CAYLEY COLOR GRAPH DARI GRUP SIMETRI DAN GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh:
YULI HIKMA JAMILIA
NIM. 04510020

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2008

CAYLEY COLOR GRAPH DARI GRUP SIMETRI DAN GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Diajukan Kepada :
Universitas Islam Negeri Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh :
YULI HIKMA JAMILIA
NIM. 04510020

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2008

CAYLEY COLOR GRAPH DARI GRUP SIMETRI DAN GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh:
YULI HIKMA JAMILIA
NIM. 04510020

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji

Tanggal: 26 Juli 2008

Pembimbing I	Pembimbing II
Abdussakir, M.Pd	Abdul Aziz, M. Si
NIP. 150 327 247	NIP. 150 377 256

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M. Si
NIP. 150 318 321

CAYLEY COLOR GRAPH DARI GRUP SIMETRI DAN GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh:
YULI HIKMA JAMILIA
NIM. 04510020

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal 31 Juli 2008

Susunan Dewan Penguji		**Tanda Tangan**
1. Penguji Utama	: **Wahyu H. Irawan, M. Pd** **NIP. 150 300 415**	( )
2. Ketua	: **Sri Harini, M. Si** **NIP. 150 318 321**	( )
3. Sekretaris	: **Abdussakir, M. Pd** **NIP. 150 327 247**	( )
4. Anggota	: **Abdul Aziz, M. Si** **NIP. 150 377 256**	( )

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M. Si
NIP. 150 318 321

Untuk

Bapak H. Sa'id Amrullah, Ibu Uswatun Hasanah

Adik-adikku Miftahul Arifin,

Hikmah Maftuhatil Barizah, dan Nabila Ayu Mazidah

Keluarga tercinta

Kakakku Sigit Musthafa

dan

Ibnu Hajar, sumber inspirasi, semangat dan kebahagiaanku

MOTTO

"PERBUATANLAH YANG LEBIH UTAMA"

(Al-Hafidz Ahmad Bin Hajar Al-'Asqalani)

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	: YULI HIKMA JAMILIA
NIM	: 04510020
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 26 Juli 2008
Yang membuat pernyataan

Yuli Hikma Jamilia
NIM. 04510020

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Alhamdulillahirrobbil 'alamin, segala puji syukur ke hadirat Allah SWT atas limpahan rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, hingga penulis mampu menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul "*CAYLEY COLOR GRAPH* DARI GRUP SIMETRI DAN GRUP DIHEDRAL" ini dengan baik. Sholawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada junjungan Nabi besar Muhammad SAW sebagai *uswatun hasanah* dalam meraih kesuksesan di dunia dan akhirat.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, iringan doa dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, terutama kepada:

1. Bapak Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Malang .
2. Bapak Prof. Dr. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
3. Ibu Sri Harini. M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
4. Bapak Abdussakir, M.Pd. selaku dosen pembimbing, yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan pengarahan selama penulisan skripsi ini.

5. Seluruh Dosen Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang yang telah memberikan ilmu pengetahuan kepada penulis selama di bangku kuliah, serta seluruh karyawan dan staf UIN Malang.
6. Bapak dan Ibu tercinta, yang selalu memberikan semangat dan motivasi baik moril maupun spirituil dan perjuangannya yang tak pernah kenal lelah dalam mendidik dan membimbing penulis hingga penulis sukses dalam meraih cita-cita serta ketulusan do'anya kepada penulis sampai dapat menyelesaikan skripsi ini.
7. Adik-adik tersayang, Miftahul Arifin, Hikmah Maftuhatil Barizah, dan Nabila Ayu Mazidah yang telah memberikan semangat selama kuliah serta dalam menyelesaikan skripsi ini.
8. Ibnu Hajar, terima kasih atas semua saran, doa, semangat serta motivasinya agar selalu semangat dalam menyelesaikan skripsi ini.
9. Sigit Mushtafa kakak tersayang terima kasih atas doa, motivasi sehingga aku selalu semangat dalam merampungkan skripsi ini. Serta mas Sofyan Hadi dan mas Ahmad Sholehuddin terima kasih atas doa dan motivasinya.
10. Sahabat-sahabat yang selalu memberikan motivasi, saran serta doa juga keceriaan dalam menyelesaikan skripsi ini (mbak zum, mbak luluk, mbak sofi, mbak eli). Mas Asoy, mas Okta, mas Arif Wahyullah, Zainal, Hadir terima kasih atas pengalaman, wawasan yang kalian berikan dalam mencari jati diri serta buat Lutvi Kecil dan adik Rofi terimakasih atas motivasi dan doanya.
11. Sahabat-sahabat kabinet "*Perjuangan*" BEMF SAINTEK '07-'08 (Luly, Imbux) perubahan dan pembaharuan tidak berhenti sampai disini..

12. Teman-teman Matematika ’04, terima kasih atas doa serta kenangan yang kalian berikan.
13. Teman-teman kost SD-4 serta The Roumboe Geng (Imanx, Pupunx, Tony, Gepeng, Pendi’, Ardi, Eko, Kojec) yang selalu memberikan keceriaan serta doa dalam menyelesaikan skripsi ini.
14. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, atas keikhlasan bantuan moril dan sprituil penulis ucapkan terima kasih.

Semoga skripsi ini bermanfaat dan dapat menambah wawasan keilmuan khususnya Matematika. Amien.

Wassalamu’alaikum Wr.Wb

.

Malang, 26 Juli 2008

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Jamilia, Yuli Hikma**.** 2008. ***Cayley Color Graph* dari Grup Simetri dan Grup Dihedral.** Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
Pembimbing: (I) Abdussakir, M. Pd
(II) Abdul Aziz, M. Si

Kata Kunci: Grup simetri, Grup Dihedral, *Cayley Color Graph*

Matematika merupakan salah satu disiplin ilmu yang sangat berpengaruh pada disiplin ilmu lainnya. Salah satu cabang dari disiplin ilmu matematika adalah teori graf yang banyak manfaatnya karena teori-teorinya dapat diterapkan pada cabang-cabang ilmu matematika yang lain atau untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu pembahasan yang menarik dari aplikasi teori graf pada cabang ilmu matematika yang lain adalah *Cayley Color Graph*.

Cayley Color Graph merupakan pembahasan tentang teori graf yang menjelaskan suatu digraf yang dikaitkan dengan grup dan subset dari grup yang disebut generator. Berdasarkan latar belakang tersebut dalam penelitian ini penulis akan mengkaji tentang bagaimana menentukan *Cayley Color Graph* dari grup simetri dan grup dihedral dengan tujuan untuk menjelaskan cara menentukan *Cayley Color Graph* dari grup simetri dan menjelaskan cara menentukan *Cayley Color Graph* dari grup dihedral.

Dalam kajian ini, penulis menggunakan grup simetri S_3 dan grup dehidral D_6 dan D_8 sebagai acuan untuk menentukan *Cayley Color Graph* dari grup simetri dan grup dehidral. Setiap penentuan *Cayley Color Graph* dari grup-grup tersebut dilakukan sebanyak dua kali dengan Δ atau generator yang berbeda. Adapun cara menentukan *Cayley Color Graph* dari grup simetri dan grup dihedral adalah (1) Mengambil generator yang merupakan subset dari grup tersebut, (2) Menentukan warna busur dari dua titik yang adjacent, (3) Menggambar hasil *Cayley Color Graph* $D_\Delta(\Gamma)$ dari grup simetri dan dehidral dalam bentuk digraf, dan (4) Jika ada pasangan busur dari hasil *Cayley Color Graph* $D_\Delta(\Gamma)$ baik dari grup simetri dan dehidral berwarna sama maka cukup diwakili oleh sisi tunggal pasangan busur tersebut. Kemudian digambarkan kembali dalam bentuk graf atau digraf.

Untuk penulisan skripsi selanjutnya, penulis menyarankan untuk mengkaji masalah *Cayley Color Graph* dari grup simetri dan dehidral dengan order yang lebih tinggi atau kajian yang lebih dalam tentang keterkaitan teori graf dan grup mengingat pembahasan tentang grup sangat luas.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Catatan dari usaha manusia secara *kontinue* untuk merumuskan konsep-konsep dan unsur-unsur dalam bidang ilmu pengetahuan agar dapat diuraikan ke dalam dunia nyata adalah sebagian dari sejarah ilmu pengetahuan alam. Berbicara tentang ilmu pengetahuan, Al-Qur’an telah memberikan kepada manusia kunci ilmu pengetahuan tentang dunia dan akhirat serta menyediakan peralatan untuk mencari dan meneliti segala sesuatu agar dapat mengungkap dan mengetahui keajaiban dari kedua dunia itu (Rahman, 1992:12). Hal itu menunjukkan keluasan suatu ilmu. Dalam Al-Qur’an hal tersebut telah dijelaskan oleh Allah S.W.T dengan firman-Nya dalam surat Al-Kahfi ayat 109 yang berbunyi:

قُل لَّوْ كَانَ ٱلْبَحْرُ مِدَادًا لِّكَلِمَٰتِ رَبِّى لَنَفِدَ ٱلْبَحْرُ قَبْلَ أَن تَنفَدَ كَلِمَٰتُ رَبِّى وَلَوْ
جِئْنَا بِمِثْلِهِۦ مَدَدًا ١٠٩

Artinya: Katakanlah: sekiranya lautan menjadi tinta untuk (menulis) kalimat-kalimat Tuhanku, sungguh habislah lautan itu sebelum habis (ditulis) kalimat-kalimat Tuhanku, meskipun kami datangkan tambahan sebanyak itu (pula)"(Q. S. Al-Kahfi:109)

Ayat tersebut menjelaskan bahwa hendaknya manusia memahami akan kewajiban untuk menuntut ilmu serta mempelajarinya.

Dalam mempelajari suatu ilmu sesuai dengan paradigma *ulul albab*, yakni berbekal kemampuan intektual semata tidak cukup, tetapi perlu didukung secara bersamaan dengan kemampuan emosional dan spiritual. Pola pikir deduktif dan logis dalam matematika juga bergantung pada kemampuan intuitif dan imajinatif serta mengembangkan pendekatan rasionalis, empiris, dan logis (Abdusysyakir, 2007: 24). Sebagaimana dalam firman Allah SWT dalam surat Shaad ayat 29:

كِتَٰبٌ أَنزَلْنَٰهُ إِلَيْكَ مُبَٰرَكٌ لِّيَدَّبَّرُوٓا۟ ءَايَٰتِهِۦ وَلِيَتَذَكَّرَ أُو۟لُوا۟ ٱلْأَلْبَٰبِ ٢٩

Artinya: *"Ini adalah sebuah Kitab yang kami turunkan kepadamu penuh dengan berkah supaya mereka memperhatikan ayat-ayatNya dan supaya mendapat pelajaran orang-orang yang mempunyai fikiran* (Q. S. Shaad: 29).

1

Dari ayat tersebut jelas bahwa dalam mempelajari ilmu tidak hanya berbekal kemampuan intektual semata saja, tetapi perlu didukung secara bersamaan dengan kemampuan emosional dan spiritual. Sehingga apabila ia telah mampu memahami suatu ilmu, maka ia dapat menyampaikan ilmu yang telah ia miliki kepada orang yang belum mengetahui dengan disertai metode yang baik, sehingga apa yang disampaikan mudah dipahami oleh orang lain. Sebagaimana firman Allah S.W.T yang memerintahkan Rasulullah s.a.w untuk menyampaikan kepada manusia tentang suatu ilmu kepada umat manusia. Firman Allah tersebut terletak pada surat Al-Maidah ayat 99:

مَّا عَلَى ٱلرَّسُولِ إِلَّا ٱلْبَلَٰغُ ۗ وَٱللَّهُ يَعْلَمُ مَا تُبْدُونَ وَمَا تَكْتُمُونَ ٩٩

Artinya: *"Kewajiban Rasul tidak lain hanyalah menyampaikan (ilmu), dan Allah mengetahui apa yang kamu lahirkan dan apa yang kamu sembunyikan* "(Q. S. Al-Maidah: 99).

Dalam ayat lain disebutkan

كَمَآ أَرۡسَلۡنَا فِيكُمۡ رَسُولاً مِّنكُمۡ يَتۡلُواْ عَلَيۡكُمۡ ءَايَـٰتِنَا وَيُزَكِّيكُمۡ وَيُعَلِّمُكُمُ ٱلۡكِتَـٰبَ وَٱلۡحِكۡمَةَ وَيُعَلِّمُكُم مَّا لَمۡ تَكُونُواْ تَعۡلَمُونَ ﴿١٥١﴾

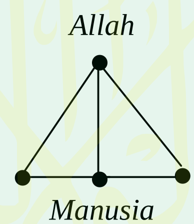
Artinya: Sebagaimana (Kami Telah menyempurnakan nikmat kami kepadamu) kami Telah mengutus kepadamu Rasul diantara kamu yang membacakan ayat-ayat kami kepada kamu dan mensucikan kamu dan mengajarkan kepadamu Al Kitab dan Al-Hikmah, serta mengajarkan kepada kamu apa yang belum kamu ketahui.

Hikmah yang dapat diambil dari ayat-ayat tersebut adalah agar manusia senantiasa mengikuti teladan rasulullah untuk menyampaikan suatu ilmu karena terdapat beberapa manfaat di dalamnya.

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu yang mendasari berbagai macam ilmu yang lain dan selalu menghadapi berbagai macam fenomena yang semakin kompleks sehingga penting untuk dipelajari. Dalam kehidupan sehari-hari banyak permasalahan yang memerlukan pemecahan. Sering dengan bantuan matematika permasalahan tersebut lebih mudah difahami, lebih mudah dipecahkan, atau bahkan dapat ditunjukkan bahwa suatu persoalan tidak mempunyai penyelesaian. Untuk keperluan tersebut, perlu dicari pokok permasalahannya dan kemudian dibuat rumusan atau model matematikanya (Purwanto, 1998: 1).

Salah satu cabang matematika yang penting dan banyak manfaatnya adalah teori graf karena teori-teorinya dapat diterapkan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Dengan menggunakan rumusan atau model teori graf yang tepat, suatu permasalahan menjadi lebih jelas, sehingga mudah menganalisanya. Permasalahan yang dirumuskan dengan teori graf dibuat sederhana, yaitu diambil aspek-aspek yang diperlukan dan dibuang aspek-aspek lainnya (Purwanto, 1998: 1).

Teori graf yang merupakan salah satu cabang dari matematika tersebut menurut definisinya adalah himpunan yang tidak kosong yang memuat elemen-elemen yang disebut titik, dan suatu daftar pasangan tidak terurut elemen itu yang disebut sisi. Dalam al-Qur'an elemen-elemen pada graf yaitu titik dan sisi meliputi Pencipta (Allah) dan hamba-hambanya, sedangkan sisi atau garis yang menghubungkan elemen-elemen tersebut adalah bagaimana hubungan antara Allah dengan hambanya dan juga hubungan sesama hamba yang terjalin, *Hablun min Allah wa Hablun min An-Nas.*



Gambar 1.1 Hubungan antara Allah dengan HambaNya serta Sesama Hamba

Hal ini dikuatkan oleh firman Allah dalam al-Qur'an surat Ali Imran ayat 10 yaitu:

ضُرِبَتْ عَلَيْهِمُ ٱلذِّلَّةُ أَيْنَ مَا ثُقِفُوٓاْ إِلَّا بِحَبْلٍ مِّنَ ٱللَّهِ وَحَبْلٍ مِّنَ ٱلنَّاسِ وَبَآءُو بِغَضَبٍ
مِّنَ ٱللَّهِ وَضُرِبَتْ عَلَيْهِمُ ٱلْمَسْكَنَةُۚ ذَٰلِكَ بِأَنَّهُمْ كَانُواْ يَكْفُرُونَ بِـَٔايَٰتِ ٱللَّهِ وَيَقْتُلُونَ
ٱلْأَنۢبِيَآءَ بِغَيْرِ حَقٍّۚ ذَٰلِكَ بِمَا عَصَواْ وَّكَانُواْ يَعْتَدُونَ ١١٢

Artinya: *"Mereka diliputi kehinaan di mana saja mereka berada, kecuali jika mereka berpegang kepada tali (agama) Allah dan tali (perjanjian) dengan manusia[218], dan mereka kembali mendapat kemurkaan dari Allah dan mereka diliputi kerendahan. yang demikian itu[219] Karena mereka kafir kepada ayat-ayat Allah dan membunuh para nabi tanpa*

> *alasan yang benar. yang demikian itu[220] disebabkan mereka durhaka dan melampaui batas".*

Salah satu contoh masalah dalam kehidupan sehari-hari yang menggunakan teori graf adalah masalah jembatan Konisberg dan merupakan suatu masalah yang pertama kali menggunakan graf (tahun 1736). Di kota Konigsberg (sebelah timur negara bagian Prussia, Jerman), sekarang bernama kota Kaliningrad, terdapat sungai Pregal yang mengalir mengitari pulau Kneiphof lalu bercabang menjadi dua buah anak sungai. Di mana ada tujuh buah jembatan yang menghubungkan daratan yang dibelah oleh sungai tersebut. Masalahnya adalah "Apakah mungkin melalui ketujuh jembatan itu masing-masing tepat satu kali, dan kembali ke tempat semula?. Seorang matematikawan Swiss, L. Euler, adalah orang pertama yang berhasil menemukan jawaban masalah itu dengan pembuktian yang sederhana. Ia memodelkan masalah ini ke dalam graf. Daratan (titik-titik yang dihubungkan oleh jembatan) dinyatakannya sebagai titik (noktah)-yang disebut simpul (*vertex*) dan jembatan dinyatakan sebagai garis yang disebut sisi (*edge*). (Rinaldi Munir, 2007: 354).

Selain dalam kehidupan sehari-hari teori graf juga dapat diaplikasikan pada cabang-cabang ilmu matematika yang lain, diantaranya aljabar abstrak, matematika diskrit, dan lain sebagainya. Salah satu pembahasan yang menarik dari aplikasi teori graf pada cabang ilmu matematika yang lain adalah graf yang dibentuk dari suatu grup. Di mana pembahasan tentang teori graf yang dibentuk dari grup di sini menjelaskan suatu digraf yang dikaitkan dengan grup dan subset dari grup yang disebut generator.

Berkaitan dengan aplikasi teori graf pada cabang-cabang ilmu matematika yang lain serta adanya ayat dalam al-Qur'an yang berkaitan dengan teori graf maka penulis bermaksud untuk membahas tentang teori graf yang diaplikasikan pada teori tentang grup yaitu teori tentang *Cayley Color Graph* dari suatu grup. Penyampaian kajian tentang *Cayley Color Graph* dari suatu grup di sini disertai dengan variasi pasangan generator dalam menentukan *Cayley Color Graph*nya.

Berdasarkan uraian tersebut dalam penelitian ini penulis akan mengkaji tentang graf yang diberikan oleh suatu grup, dengan mengambil judul skripsi ***"Cayley Color Graph* dari Grup Simetri dan Grup Dihedral"**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah dalam penulisan skripsi ini adalah:

1. Bagaimana menentukan *Cayley Color Graph* dari Grup Simetri?
2. Bagaimana menentukan *Cayley Color Graph* dari Grup Dihedral?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penulisan skripsi ini antara lain:

1. Menjelaskan cara menentukan *Cayley Color Graph* dari Grup Simetri.
2. Menjelaskan cara menentukan *Cayley Color Graph* dari Grup Dihedral.

1.4 Batasan Masalah

Agar pembahasan dalam skripsi ini lebih terfokus, maka penulis hanya membatasi pada masalah *Cayley Color Graph* dari grup simetri S_3 dan *Cayley Color Graph* dari grup dihedral D_6 dan D_8 karena ketiga grup tersebut mempunyai order kurang dari sepuluh, sehingga mempermudah menggambar grafnya.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penulisan skripsi ini adalah:

1. Bagi peneliti, sebagai tambahan informasi dan wawasan pengetahuan mengenai *Cayley Color Graph* dari grup simetri dan dihedral.
2. Bagi pemerhati matematika, sebagai tambahan pengetahuan bidang matematika, khususnya Teori Graf mengenai *Cayley Color Graph* dari grup simetri dan dihedral.
3. Bagi lembaga UIN Malang, untuk bahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di jurusan matematika untuk mata kuliah Teori Graf.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan (*library research)* atau kajian pustaka, yakni melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi-informasi serta objek yang digunakan dalam pembahasan masalah tersebut. Studi kepustakaan merupakan penampilan argumentasi penalaran keilmuan untuk memaparkan hasil olah pikir mengenai suatu permasalahan atau topik kajian kepustakaan yang dibahas dalam penelitian ini.

Adapun langkah-langkah yang akan digunakan oleh peneliti dalam membahas penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mencari literatur utama yang dijadikan acuan dalam pembahasan ini. Literatur yang dimaksud adalah buku tentang graf dan aljabar abstrak..
2. Mengumpulkan berbagai literatur pendukung, baik yang bersumber dari buku, jurnal, artikel, diktat kuliah, internet, dan lainnya yang berhubungan dengan permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini.
3. Memahami dan mempelajari konsep *Cayley Color Graph*.
4. Menerapkan konsep *Cayley Color Graph* untuk grup simetri dan grup dihedral dengan langkah-langkah sebagai berikut:
   a. Memilih generator dari masing-masing grup yaitu grup simetri dan grup dihedral.
   b. Menentukan warna busur dari dua titik yang adjacent.
   c. Menggambar hasil *Cayley Color Graph* $D_{\Delta}(\Gamma)$ dari grup simetri dan dehidral dalam bentuk digraf.
   d. Jika ada pasangan busur dari hasil *Cayley Color Graph* $D_{\Delta}(\Gamma)$ baik dari grup simetri maupun dehidral yang berwarna sama maka cukup diwakili oleh sisi tunggal pasangan busur tersebut. Kemudian digambarkan kembali dalam bentuk graf atau digraf .

1.7 Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi ini lebih terarah, mudah ditelaah dan dipahami, maka digunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab yaitu:

BAB I PENDAHULUAN

Pendahuluan meliputi: latar belakang permasalahan, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN PUSTAKA

Bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan, antara lain pengertian graf, incident dan adjacent, derajat titik dari graf, graf terhubung, pengertian digraf, derajat titik dari digraf, pengertian grup, operasi biner, grup simetri, grup dihedral, kajian Graf dan Grup dalam Al-Qur'an.

BAB III PEMBAHASAN

Pembahasan berisi tentang bagaimana menentukan *Cayley Color Graph* dari grup simetri dan grup dihedral dengan variasi generator dalam menentukan *Cayley Color Graph*nya serta tinjauan al-qur'an terhadap *Cayley Color Graph*.

BAB IV PENUTUP

Pada bab ini akan dibahas tentang kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Graf

2.1.1 Definisi Graf

Definisi 1

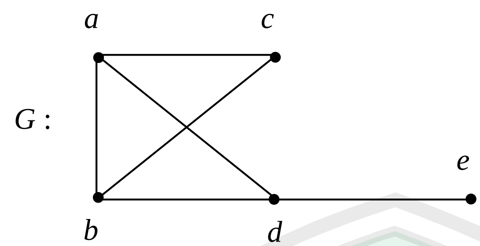
Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di V yang disebut sebagai sisi. Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan E(G). Sedangkan banyaknya unsur di V disebut order dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di E disebut size dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari G tersebut cukup ditulis dengan p dan q (Chartrand dan Lesniak, 1986: 4).

Perhatikan graf G yang memuat himpunan titik V dan himpunan sisi E seperti berikut ini.

$V = \{ a, b, c, d, e\}$

$E = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (b, c), (d, e)\}$.

Graf G tersebut dapat digambar sebagai berikut



Gambar 2.1 Graf G

Graf *G* mempunyai 5 titik sehingga order *G* adalah p = 5. Graf *G* mempunyai 6 sisi sehingga size graf *G* adalah q = 6.

Graf *G* dengan

$V = \{ a, b, c, d, e\}$

$E = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (b, c), (d, e)\}$

Dapat juga ditulis dengan

$V = \{ a, b, c, d, e\}$

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$

dengan

$e_1 = (a, b)$

$e_2 = (a, c)$

$e_3 = (a, d)$

$e_4 = (b, d)$

$e_5 = (b, c)$

$\mathrm{e}_6 = (\mathrm{d}, \mathrm{e})$

Definisi 2

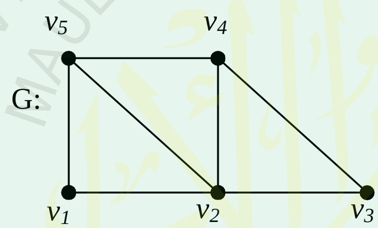
Graf *H* disebut subgraf dari *G* jika himpunan titik di *H* adalah subset dari himpunan titik-titik di *G* dan himpunan sisi-sisi di *H* adalah subset dari himpunan sisi di G. Dapat ditulis $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Jika H adalah subgraf G, maka dapat ditulis $H \subseteq G$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 8).

Perhatikan graf G yang memuat himpunan titik V dan himpunan sisi E seperti berikut ini.

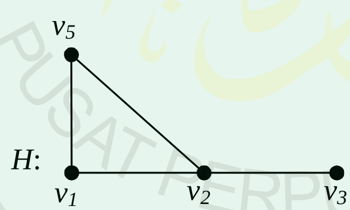
$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan

$E(G) = \{ (v_1 v_2),(v_1 v_5), (v_2 v_3), (v_2 v_4), (v_2 v_5), (v_3 v_4), (v_4 v_5)\}$

Graf G tersebut dapat digambar sebagai berikut



Gambar 2.2 Graf



Gambar 2.3 Subgraf

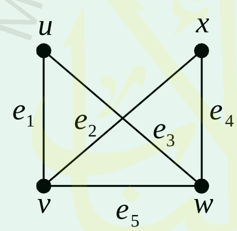
Gambar 2.1 dan 2.2 menunjukkan dua graf G dan H dan menunjukkan bahwa H subgraf G.

2.1.2 Adjacent dan Incident

Definisi 3

Sisi e = (u, v) dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika e = (u, v) adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), u dan e serta v dan e disebut terkait langsung (*incident*). Untuk selanjutnya, sisi $e = (u,v)$ akan ditulis $e = uv$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 4).

Sebagai contoh perhatikan graf G yang memuat himpunan $V = \{u, v, w, x\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ berikut ini.



Gambar 2.4 Graf G

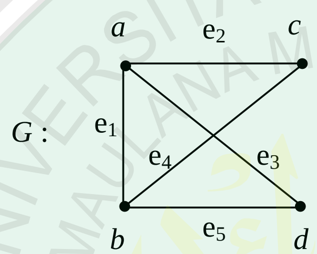
Dari Gambar 2.4 tersebut, titik u dan e_1 serta e_1 dan v adalah *incident* (terkait langsung) dan titik u dan v adalah *adjacent* (terhubung langsung).

2.1.3 Derajat Titik

Definisi 4

Derajat dari titik v di graf G, ditulis $\deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung (*incident*) dengan v (Chartrand dan Leniak, 1986:7). Dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf G, maka tulisan $\deg_G(v)$ disingkat menjadi $\deg(v)$. Titik yang berderajat genap sering disebut *titik genap* (*even vertices*) dan titik yang berderajat ganjil disebut *titik ganjil* (*odd vertices*). Titik yang berderajat nol disebut *isolated vertices* dan titik yang berderajat satu disebut *titik ujung* (*end vertices*) (Chartrand dan Leniak, 1986:7).

Perhatikan graf G berikut yang mempunyai himpunan titik $V = \{a, b, c, d\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$.



Gambar 2.5 Graf G

Berdasarkan gambar, diperolah bahwa

deg(a) = 3

deg(b) = 3

deg(c) = 2

deg(d) = 2

Titik a dan b adalah titik ganjil, titik c dan d adalah titik genap. Karena tidak ada yang berderajat 1, maka graf G tidak mempunyai titik ujung. Hubungan antara jumlah derajat semua titik dalam suatu graf G dengan banyak sisi, yaitu q, adalah

$$\sum_{v \in G} \deg(v) = 2q.$$

Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 1

Jika G graf dengan $V(G) = \{ v_1, v_2, ..., v_p\}$

maka $\sum_{i=1}^{p} \deg_G(v_i) = 2q$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 7).

Bukti:

Setiap sisi adalah terkait langsung dengan 2 titik. Jika setiap derajat titik dijumlahkan, maka setiap sisi dihitung dua kali.

Corollary 1.

Pada sebarang graf, jumlah derajat titik ganjil adalah genap.

Bukti:

Misalkan graf *G* dengan size *q*. Dan misalkan *W* himpunan yang memuat titik ganjil pada *G* serta *U* himpunan yang memuat titik genap di *G*. Dari teorema 1 maka diperoleh:

$$\sum_{v \in v(G)} \deg_G v = \sum_{v \in W} \deg_G v + \sum_{v \in U} \deg_G v = 2q$$

Dengan demikian karena $\sum_{v \in U} \deg_G v$ genap, maka $\sum_{v \in W} \deg_G v$ juga genap. Sehingga $|W|$ adalah genap.

2.1.4 Graf Beraturan-r

Definisi 5

Graf beraturan – *r* adalah graf yang semua titiknya berderajat r, atau deg *v* = *r* (Chartrand dan Lesniak, 1986: 9).

Contoh:

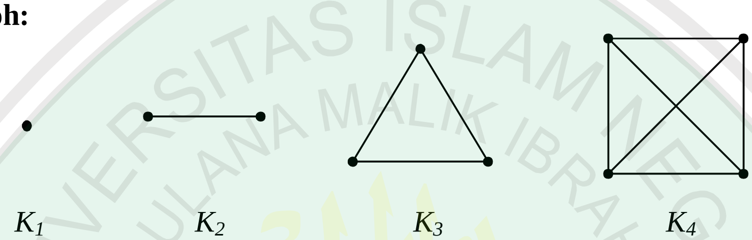
Gambar 2.6 Graf G Beraturan-1 dan Beraturan-2

2.1.5 Graf komplit

Definisi 6

Graf komplit (*Complete Graph*) adalah graf dengan dua titik yang berbeda saling *adjacent*. Graf komplit dengan n titik dinyatakan dengan K_n (Chartrand dan Lesniak, 1986: 9 dan Purwanto, 1998:21).

Contoh:



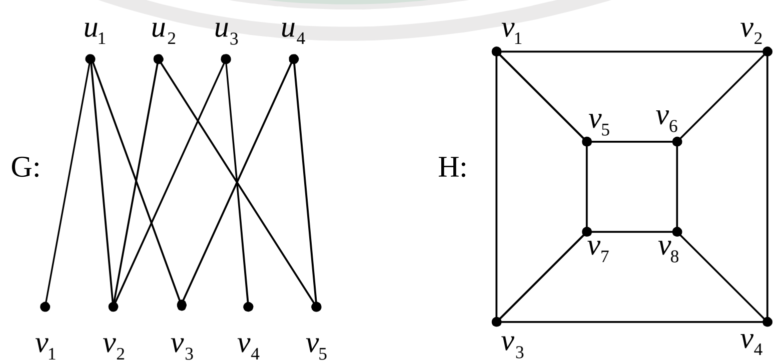
Gambar 2.7 Graf Komplit

2.1.6 Graf Bipartisi

Definisi 7

Graf bipartisi (*bipartite graph*) adalah graf yang himpunan titiknya dapat dipisahkan menjadi dua himpunan tak kosong *X* dan *Y* sehingga masing-masing sisi di graf tersebut menghubungkan satu titik di *X* dan satu titik di Y. X dan *Y* disebut himpunan partisi (Purwanto, 1998:21).

Contoh:



Gambar 2.8 Graf Bipartisi

Pada Gambar 2.8 G adalah graf bipartisi dengan himpunan partisi $X = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ dan $Y = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ demikian juga H adalah graf bipartisi dengan himpunan partisi X = $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ *dan* $Y = \{v_5, v_6, v_7, v_8\}$.

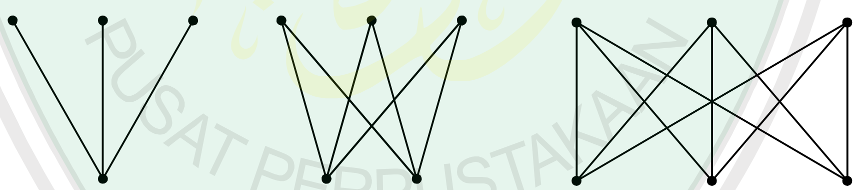
2.1.7 Graf Bipartisi Komplit

Definisi 8

Graf bipartisi komplit (*complete bipartite graph*) adalah graf bipartisi dengan himpunan partisi X dan Y sehingga masing-masing titik di X dihubungkan dengan masing-masing titik di Y oleh tepat satu sisi. Jika $|X| = m$ dan $|Y| = m$, maka graf bipartisi tersebut dinyatakan dengan $K_{m,n}$ (Purwanto, 1998:22).

Contoh:

Graf $K_{1,3}$, $K_{2.3}$, *dan* $K_{3,3}$.



$K_{1,3}$ $K_{2.3}$ $K_{3,3}$

Gambar 2.9 Graf Bipartisi Komplit

2.2 Graf Terhubung

Definisi 9

Sebuah jalan (*walk*) *u-v* di graf G adalah barisan berhingga (tak kosong) $W : u = u_0, e_1, u_1, e_2, \ldots, u_{n-1}, e_n, u_n = v$ yang berselang seling antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik u dan diakhiri dengan titik v, dengan $e_i = u_{i-1}u_i$ untuk i = 1, 2, . . ., n adalah sisi di G. u_0 disebut titik awal, u_n disebut titik akhir, u_1, u_2, ..., u_{n-1} disebut titik internal, dan n menyatakan panjang dari W (Chartrand dan Lesniak, 1986: 26).

Definisi 10

Jalan *u-v* disebut *terbuka* atau *tertutup* jika $u = v$ atau $u \neq v$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 26).

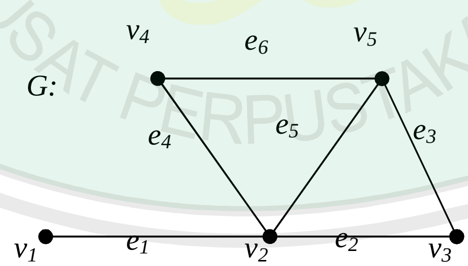
Definisi 11

Jalan *u-v* yang semua sisinya berbeda disebut *trail* *u-v* (Chartrand dan Lesniak, 1986: 26).

Definisi 12

Jalan *u-v* yang semua sisi dan titiknya berbeda disebut *path* (lintasan) *u-v*. Dengan demikian, semua lintasan adalah *trail* (Chartrand dan Lesniak, 1986: 26).

Contoh:



Gambar 2.10 Jalan pada Graf

Dari graf di atas v_1, e_1, v_2, e_5, v_5, e_6, v_4, e_4, v_2, e_2, v_3 disebut sebagai *trail*, sedangkan v_1, e_1, v_2, e_5, v_5, e_6, v_4 disebut sebagai *path* (lintasan).

Definisi 13

Suatu titik u yang membentuk linatasan *u-u* disebut jalan trivial (Chartrand dan Lesniak, 1986: 26).

Definisi 14

Suatu jalan tertutup (*closed trail*) yang tak-trivial pada Graf *G* disebut Sirkuit *G*. (Chartrand dan Lesniak, 1986: 28).

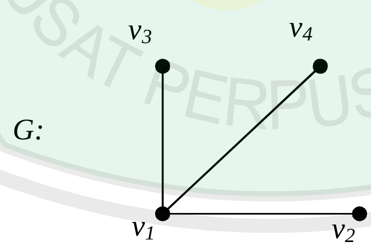
Definisi 15

Sirkuit $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \ldots, v_{n-1}, e_{n-1}, e_n, v_n, v_1$ dengan $n \geq 3$ dan v_i berbeda untuk setiap *i* disebut Sikel (*cycle*) (Chartrand dan Lesniak, 1986: 28).

Definisi 16

Misalkan *u* dan *v* titik berbeda pada graf *G*. Maka titik *u* dan *v* dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika terdapat lintasan *u* – *v* di *G*. Sedangkan suatu graf *G* dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika untuk setiap titik *u* dan *v* di *G* terhubung (Chartrand dan Lesniak, 1986: 28).

Contoh:



Gambar 2.11 Graf Terhubung (*connected*)

2.3 Digraf

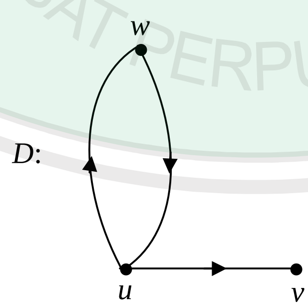
2.3.1 Definisi Digraf

Definisi 17

Digraf (*Graf berarah/ Directed Graph*) *D* adalah pasangan himpunan (*V*, *E*) di mana *V* adalah himpunan tak kosong dari elemen-elemen yang disebut *titik* (*vertex*) dan *E* adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan terurut (*u*,*v*), yang mempunyai arah dari *u* ke *v*, dari titik-titik *u*,*v* di *V* yang disebut *busur*. Himpunan titik di *D* dinotasikan dengan *V(D)* dan himpunan busur dinotasikan dengan *E*(*D*) (Chartrand dan Lesniak, 1986: 14 dan Wilson dan Watkins, 1990:81).

Himpunan titik di digraf *D* disebut order dari *D* dan dilambangkan dengan *p(D),* atau *p*. Sedangkan himpunan busur di digraf *D* adalah Size *q(D)* atau *q* (Chartrand dan Lesniak, 1986: 15).

Perhatikan digraf *D* dengan himpunan titik *V(D)* = {*u*, *v*, *w*} dan himpunan busur *E(D)* = {(*u*, *w*), (*w*, *u*), (*u*, *v*)} berikut ini.



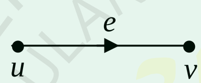
Gambar 2.12 Digraf *D*

2.3.2 Adjacent dan Incident

Definisi 18

Misal *D* digraf dan *u* dan *v* adalah titik-titik pada digraf *D*. Jika $e = (u, v)$ adalah busur di digraf *D*, maka *e* dikatakan menghubungkan *u* dan *v*, *u* adjacent ke *v* dan *v* *adjacent* dari *u*. Jika busur *e* diarahkan dari *u* ke *v* maka busur *e* disebut *incident* dari *u* dan *incident* ke *v*. (Chartrand dan Lesniak, 1986: 15 dan Wilson dan Watkins, 1990:84)

Contoh:



Gambar 2.13 Digraf *D*

Dari gambar tersebut, *u adjacent* ke *v* dan *v adjacent* dari *u* dan busur *e* *incident* dari *u* dan *incident* ke *v*.

2.3.3 Derajat Titik

Definisi 19

Outdegree, ditulis *od v* dari titik *v* adalah banyaknya titik di *D* yang adjacent dari *v*. Indegree, ditulis *id v* dari titik *v* adalah banyaknya titik di *D* yang adjacent ke v. Derajat (*deg v*) dari titik *v* di *D* didefinisian dengan

$$\mathbf{deg\ v = od\ v + id\ v}$$

Theorema 2

Jika D adalah digraf dengan order p dan size q, dan V(D) = $\{v_1, v_2, \ldots v_p\}$, maka

$$\sum_{i=1}^{p} od\ v_i = \sum_{i=1}^{p} id\ v_i = q$$

Bukti:

Jika outdegree dari titik-titik dijumlahkan, masing-masing busur dihitung satu kali, karena setiap busur incident tepat satu titik. Dengan cara yang sama, jika indegree dijumlahkan, busur juga dihitung satu kali karena setiap titik incident ke titik tunggal. (Chartrand dan Lesniak, 1986: 15)

2.4 Operasi Biner

Misalkan S suatu himpunan yang tidak kosong. Operasi $\circ$ pada elemen-elemen S disebut biner, apabila setiap dua elemen a, $b \in S$ maka $(a \circ b) \in S$. Atau dapat dikatakan operasi $\circ$ merupakan pemetaan dari S x S ke S. Operasi $\circ$ pada S yang merupakan operasi biner bersifat tertutup (Sukirman, 2005: 35).

Misalkan operasi $\circ$ pada S adalah suatu operasi biner, maka berlaku:

1. Jika $\forall a, b \in S$ berlaku $a \circ b = b \circ a$, maka dikatakan bahwa operasi $\circ$ pada S bersifat komuatif.
2. Jika $\forall a, b \in S$ berlaku $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$, maka dikatakan bahwa operasi biner $\circ$ pada S bersifat assosiatif.
3. Jika ada $e \in S$ sedemikian hingga $\forall a \in S$ berlaku $a \circ e = e \circ a = a$, maka e disebut elemen identitas terhadap $\circ$.
4. Jika $\forall a \in S, \exists b \in S$ sedemikian hingga $a \circ b = b \circ a = e$ maka b disebut invers dari a terhadap operasi $\circ$. Invers dari a ditulis a^{-1}.

2.5 Grup

2.5.1 Definisi Grup

Definisi 20

Grup adalah suatu struktur aljabar yang dinyatakan sebagai $(G,*)$ dengan G tidak sama dengan himpunan kosong ($G \neq \phi$) dan $*$ adalah operasi biner pada G yang memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $(a*b)*c = a*(b*c)$, untuk semua $a,b,c \in G$ (yaitu $*$ assosiatif).
2. Ada suatu elemen e di G sehingga $a*e = e*a = a$, untuk semua $a \in G$ (e disebut identitas di G).
3. Untuk setiap $a \in G$ ada suatu element a^{-1} di G sehingga $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$ (a^{-1} di sebut invers dari a)

Sebagai tambahan, grup $(G,*)$ disebut *abelian* (grup komutatif) jika $a*b = b*a$ untuk semua $a,b \in G$ (Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 31 dan Dummit dan Foote, 1991:13-14).

Contoh:

Selidiki apakah (Z, +) adalah grup abelian.

Jawab:

Misalkan $a,b,c \in \mathrm{Z}$ dan + adalah operasi biner, (Z, +) adalah grup abelian jika memenuhi:

1. $(a+b)+c = a+(b+c)$, untuk semua $a,b,c \in Z$ (yaitu + assosiatif).
2. Untuk semua $a \in \mathrm{Z}$ ada suatu element 0 di Z sehingga $a+0 = 0+a = a$ (0 disebut identitas di Z).

3. Untuk setiap $a \in Z$ ada suatu elemen $-a$ di Z sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$ ($-a$ di sebut invers dari a).
4. Untuk semua $a, b \in G$ maka $a + b = b + a$ (komutatif)

Jadi (Z, +) adalah grup abelian.

Contoh:

Selidiki apakah (Z, $\square$) grup, dengan $\square$ didefinisikan $a \square b = a - 2ab + 1$, di mana $a, b \in Z$.

Jawab:

1. Untuk setiap $a, b \in Z$ maka $a \square b = a - 2ab + 1 \in Z$
2. Untuk setiap $a, b, c \in Z$ maka

   $(a \square b) \square c = a \square (b \square c)$

   Untuk $(a \square b) \square c = (a - 2ab + 1) \square c$

   $= (a - 2ab + 1) - 2(a - 2ab + 1)c + 1$

   $= a - 2ac - 2ab + 4abc - 2c + 2$

   Untuk $a \square (b \square c) = a \square (b - 2bc + 1)$

   $= a - 2a(b - 2bc + 1) + 1$

   $= a - 2ab + 4abc - 2a + 1$

Karena $(a \square b) \square c \neq a \square (b \square c)$, maka (Z, $\square$) bukan grup.

2.5.2 Grup Simetri

Misal Ω adalah sebarang himpunan tak kosong dan misal S_Ω adalah himpunan yang memuat semua fungsi-fungsi bijektif dari Ω ke Ω (atau himpunan yang memuat semua permutasi dari Ω). Himpunan S_Ω dengan operasi komposisi

"$\circ$" atau ($S_\Omega, \circ$) adalah grup. Perhatikan bahwa "$\circ$" adalah operasi biner pada S_Ω karena jika $\sigma : \Omega \to \Omega$ dan $\tau : \Omega \to \Omega$ adalah fungsi-fungsi bijektif maka $\sigma \circ \tau$ juga fungsi bijektif. Selanjutnya operasi "$\circ$" yang merupakan komposisi fungsi adalah bersifat assosiatif. Identitas dari S_Ω adalah permutasi 1 yang didefinisikan oleh 1(a) = a, $\forall$ a $\in \Omega$. Untuk setiap $\sigma : \Omega \to \Omega$ maka ada fungsi invers yaitu $\sigma^{-1} : \Omega \to \Omega$ yang memenuhi $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = 1$. Dengan demikian semua aksioma grup telah dipenuhi oleh S_Ω dengan operasi $\circ$. Grup ($S_\Omega, \circ$) disebut sebagai *grup simetri* pada himpunan Ω (Dummit dan Foote:1991, 28).

Pada kasus khusus dengan Ω = {1, 2, 3, ... , *n*} merupakan grup simetri pada Ω yang dinotasikan dengan S_n, yaitu *grup simetri dengan derajat n* (Dummit dan Foote:1991, 28).

Perhatikan bahwa S_n mempunyai order *n*!, dengan S_n = {1, 2, 3, ... , *n*}. Untuk menggambarkan suatu permutasi $\sigma : S \to S$, ada *n* macam-macam pilihan untuk $\sigma(1)$. Untuk menentukan bahwa σ fungsi satu-satu, ditunjukkan bahwa $\sigma(2) \neq \sigma(1)$ sehingga hanya ada *n* – 1 macam-macam pilihan untuk $\sigma(2)$. Selanjutnya dari analisis ini terlihat bahwa ada total dari $n \cdot (n-1) \cdots (2) \cdot (1) = n!$ kemungkinan permutasi yang berbeda dari S (Beachy dan Blair:1990, 93).

Contoh:

Misal Ω = {1,2,3}, tentukan grup simetri dari S_3 tersebut.

Jawab:

Grup S_3 adalah permutasi yang memuat 3! = 6 elemen, dengan Ω = {1,2,3}maka diperoleh:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1)(2)(3) = 1$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123)$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (132)$$

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1)(23) = (23)$$

$$\tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (13)(2) = (13)$$

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (12)(3) = (12)$$

Jadi grup simetri S_3 = {1, (123), (132), (23), (13), (12)}

2.5.3 Grup Dihedral

Defnisi 21

Grup dihedral adalah grup dari himpunan simetri-simetri dari segi-*n* beraturan, dinotasikan D_{2n}, untuk setiap *n* adalah anggota bilangan bulat positif, $n \geq 3$. Dalam buku lain ada yang menuliskan grup dihedral dengan D_n (Dummit dan Foote, 1991: 24-25).

Misalkan D_{2n} suatu grup yang didefinisikan oleh *st* untuk $s, t \in D_{2n}$ yang diperoleh dari simetri (simetri sebagai fungsi pada segi-*n*, sehingga *st* adalah fungsi komposisi). Jika *s*, *t* akibat permutasi titik berturut-turut σ, τ, maka *st* akibat dari $\sigma \circ \tau$. Operasi biner pada D_{2n} adalah assosiatif karena fungsi komposisi adalah assosiatif. Identitas dari D_{2n} adalah identitas dari simetri (yang meninggalkan semua titik tetap), dinotasikan dengan 1, dan invers dari $s \in D_{2n}$ adalah kebalikan semua putaran dari simetri *s* (jadi jika *s* akibat permutasi pada titik σ, s^{-1} akibat dari σ^{-1}) (Dummit dan Foote, 1991: 24-25).

Karena grup dihedral akan digunakan secara ektensif dalam seluruh teks maka perlu beberapa notasi dan beberapa hitungan yang dapat menyederhanakan perhitungan selanjutnya dan membantu mengamati D_{2n} sebagai grup abstrak, yaitu:

(1) 1, r, r^2, . . ., r^{n-1}

(2) $|s| = 2$,

(3) $s \neq r^i$ untuk semua *i*.

(4) $sr^i \neq sr^j$ untuk semua $0 \leq i, j \leq n-1$ dengan $i \neq j$, jadi

$$D_{2n} = \{1, r, r^2, ..., r^{n-1}, s, sr, sr^2, ..., sr^{n-1}\}$$

Yaitu setiap elemen dapat dituliskan secara tunggal dalam bentuk $s^k r^i$ untuk *k* = 0 atau 1 dan $0 \leq i \leq n-1$.

(5) $sr = r^{-1}s$.

(6) $sr^i = r^{-i}s$, untuk semua $0 \leq i \leq n$ (Dummit dan Foote, 1991: 26).

Definisi 22

Misal *G* suatu grup dan misalkan *A* subset dari *G* dengan *A* adalah himpunan berhingga $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ akan ditulis $\langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle$ dari pada ditulis $\langle \{a_1, a_2, ..., a_n\} \rangle$ untuk grup yang di bangkitkan oleh $a_1, a_2, ..., a_n$, maka *A* disebut generator (pembangkit) (Dummit dan Foote, 1991: 61-62).

Contoh:

Diberikan S adalah generator dengan S = $\langle r, s \rangle$. S adalah subset dari D_6. Tunjukkan bahwa D_6 dapat dibangkitkan oleh S dengan operasi komposisi $\circ$.

Jawab:

D_6 adalah himpunan simetri-simetri dari segitiga yaitu {1, r, r^2, s, sr, sr^2}. Akan ditunjukkan D_6 dapat dibangkitkan oleh S = $\langle r, s \rangle$.

1. $r \circ r = r^2$
2. $r^2 \circ r = 1$
3. $1 \circ r = r$
4. $r \circ s = sr^2$
5. $r^2 \circ s = sr$
6. $1 \circ s = s$

Dari hasil generator S = $\langle r, s \rangle$ yang dioperasikan dengan komposisi $\circ$ diperoleh {1, r, r^2, s, sr, sr^2}. Jadi D_6 dapat dibangkitkan oleh S = $\langle r, s \rangle$

2.6 Kajian Graf dan Grup dalam Al-Qur'an

Secara umum beberapa konsep dari disiplin ilmu telah dijelaskan dalam al-Quran. salah satunya adalah matematika. Konsep dari disiplin ilmu matematika serta berbagai cabangnya yang ada dalam al-Quran di antaranya adalah masalah logika, pemodelan, statistik, teori graf, teori tentang grup dan lain-lain. Teori graf yang merupakan salah satu cabang dari matematika tersebut menurut definisinya adalah himpunan yang tidak kosong yang memuat elemen-elemen yang disebut titik, dan suatu daftar pasangan tidak terurut elemen itu yang disebut sisi. Dalam al-Qur’an elemen-elemen yang dimaksud meliputi Pencipta (Allah) dan hamba-hambanya, sedangkan sisi atau garis yang menghubungkan elemen-elemen tersebut adalah bagaimana hubungan antara Allah dengan hambanya dan juga hubungan sesama hamba yang terjalin, *Hablun min Allah wa Hablun min An-Nas*. Hal ini dikuatkan oleh firman Allah dalam al-Qur’an surat al-Hujurat ayat 10 yaitu:

ضُرِبَتْ عَلَيْهِمُ ٱلذِّلَّةُ أَيْنَ مَا ثُقِفُوٓا۟ إِلَّا بِحَبْلٍ مِّنَ ٱللَّهِ وَحَبْلٍ مِّنَ ٱلنَّاسِ وَبَآءُو بِغَضَبٍ
مِّنَ ٱللَّهِ وَضُرِبَتْ عَلَيْهِمُ ٱلْمَسْكَنَةُ ۚ ذَٰلِكَ بِأَنَّهُمْ كَانُوا۟ يَكْفُرُونَ بِـَٔايَٰتِ ٱللَّهِ وَيَقْتُلُونَ
ٱلْأَنۢبِيَآءَ بِغَيْرِ حَقٍّ ۚ ذَٰلِكَ بِمَا عَصَوا۟ وَّكَانُوا۟ يَعْتَدُونَ ﴿١١٢﴾

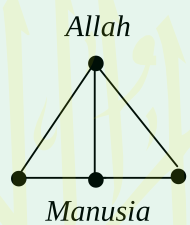
Artinya: *”Mereka diliputi kehinaan di mana saja mereka berada, kecuali jika mereka berpegang kepada tali (agama) Allah dan tali (perjanjian) dengan manusia[218], dan mereka kembali mendapat kemurkaan dari Allah dan mereka diliputi kerendahan. yang demikian itu[219] Karena mereka kafir kepada ayat-ayat Allah dan membunuh para nabi tanpa alasan yang benar. yang demikian itu[220] disebabkan mereka durhaka dan melampaui batas”*.

Dalam ayat lain disebutkan bahwa umat manusia yang beriman itu bersaudara. Sehingga mereka harus menjalin hubungan yang baik, rukun antara sesama umat. Ayat tersebut yaitu:

إِنَّمَا ٱلْمُؤْمِنُونَ إِخْوَةٌ فَأَصْلِحُوا۟ بَيْنَ أَخَوَيْكُمْ ۚ وَٱتَّقُوا۟ ٱللَّهَ لَعَلَّكُمْ تُرْحَمُونَ ﴿١٠﴾

Artinya: ”Orang-orang beriman itu sesungguhnya bersaudara. Sebab itu damaikanlah (perbaikilah hubungan) antara kedua saudaramu itu dan *takutlah terhadap Allah, supaya kamu mendapat rahmat"* (Q. S. Al-Hujurat: 10).

Sehingga dengan demikian, hal ini menunjukkan adanya suatu hubungan atau keterkaitan antara titik yang satu dengan titik yang lain. Jika dikaitkan dengan kehidupan nyata, maka banyaknya titik yang terhubung dalam suatu graf dapat diasumsikan sebagai banyaknya kejadian tertentu, yang selanjutnya kejadian-kejadian tersebut memiliki keterkaitan dengan titik lainnya yang merupakan kejadian sesudahnya.



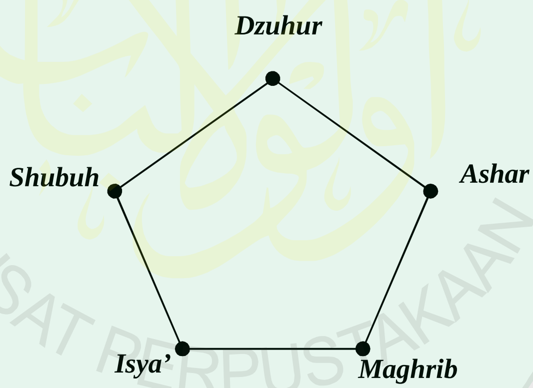
Gambar 2.14 Hubungan antara Allah dengan HambaNya serta Sesama Hamba

Representasi yang lain dari suatu graf adalah shalat. Shalat mempunyai kedudukan yang amat penting dalam Islam dan merupakan pondasi yang kokoh bagi tegaknya agama Islam. Ibadah shalat dalam Islam sangat penting, sehingga shalat harus dilakukan pada waktunya, dimanapun, dan bagaimanapun keadaan seorang muslim yang mukalaf. Dalam kaitannya dengan peribadatan sholat, Allah swt berfirman:

فَإِذَا قَضَيْتُمُ ٱلصَّلَوٰةَ فَٱذْكُرُوا۟ ٱللَّهَ قِيَـٰمًا وَقُعُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِكُمْ ۚ فَإِذَا
ٱطْمَأْنَنتُمْ فَأَقِيمُوا۟ ٱلصَّلَوٰةَ ۚ إِنَّ ٱلصَّلَوٰةَ كَانَتْ عَلَى ٱلْمُؤْمِنِينَ كِتَـٰبًا مَّوْقُوتًا ﴿١٠٣﴾

Artinya: "Maka apabila kamu Telah menyelesaikan shalat(mu), ingatlah Allah di waktu berdiri, di waktu duduk dan di waktu berbaring. Kemudian *apabila kamu Telah merasa aman, Maka Dirikanlah shalat itu (sebagaimana biasa). Sesungguhnya shalat itu adalah fardhu yang ditentukan waktunya atas orang-orang yang beriman*" (Q.S. An-Nisaa': 103).

Dalam ayat tersebut dijelaskan bahwa waktu-waktu sholat telah ditentukan waktunya dan telah menjadi suatu ketetapan, baik itu sholat fardhu maupun sholat sunnah. Sholat lima waktu diwajibkan dalam sehari (dhuhur, 'ashar, maghrib, 'isya', dan subuh) merupakan sholat yang wajib ditunaikan dan tidak boleh ditinggalkan. Waktu pelaksanaan antara satu waktu sholat fardhu berbeda dengan empat waktu sholat yang lain dan telah ditetapkan oleh Allah swt. Akan tetapi kelima waktu sholat tersebut saling mengikat dan tidak diperbolehkan hanya melaksanakan satu sholat saja.



Gambar 2.14 Representasi Graf Terhadap Waktu-Waktu Shalat

Adapun hubungan waktu sholat tersebut dengan teori graf adalah bahwa waktu-waktu sholat tersebut merupakan suatu himpunan yang terdiri dari waktu sholat fardhu (dhuhur, 'ashar, maghrib, 'isya' dan subuh) dan waktu sholat sunnah sebagai ekspresi dari himpunan titik dalam graf. Sedangkan keterikatan antara kelima sholat fardhu tersebut yang tidak dapat ditinggalkan salah satunya dalam menunaikannya dan sholat sunnah sebagai pelengkap sholat fardhu merupakan ekspresi dari garis atau sisi yang menghubungkan titik-titik dalam graf. Selain itu, dalam teori graf juga terdat digraf yang menurut definisinya himpunan tak kosong dari elemen-elemen yang disebut *titik* (*vertex*) dan himpunan (mungkin kosong) pasangan terurut (uv), yang mempunyai arah dari u ke v, dari titik-titik u,v di V yang disebut *busur*. Penjelasan mengenai digraf dalam al-Quran sama halnya seperti penjelasan pada graf.

Selain teori graf, ilmu lain yang merupakan bagian dari matematika yaitu teori tentang grup. Di mana definisi dari grup sendiri adalah suatu struktur aljabar yang dinyatakan sebagai $(G,*)$ dengan G tidak sama dengan himpunan kosong ($G \neq \phi$) dan $*$ adalah operasi biner pada G yang memenuhi sifat-sifat assosiatif, ada identitas, dan ada invers dalam grup tersebut. Himpunan tidak kosong berarti terdiri dari himupunan-himpunan. Seperti halnya teori graf himpunan-himpunan dalam grup mempunyai elemen atau anggota tersebut juga merupakan makhluk dari ciptaan-Nya, dan operasi biner merupakan interaksi antara makhluk-makhluk-Nya, dan sifat-sifat yang harus dipenuhi merupakan aturan-aturan yang telah ditetapkan oleh Allah artinya sekalipun makhluknya berinteraksi dengan sesama makhluk ia harus tetap berada dalam koridor yang telah ditetapkan Allah.

Kajian mengenai grup sudah ada dalam al-Qur’an. Misalnya, kehidupan manusia yang terdiri dari berbagai macam golongan. Di mana golongan merupakan bagian dari himpunan karena himpunan sendiri merupakan kumpulan objek-objek yang terdefinisi. Dalam al-Quran surat al-Fatihah ayat 7 disebutkan.

صِرَٰطَ ٱلَّذِينَ أَنۡعَمۡتَ عَلَيۡهِمۡ غَيۡرِ ٱلۡمَغۡضُوبِ عَلَيۡهِمۡ وَلَا ٱلضَّآلِّينَ ٧

Artinya: "(yaitu) Jalan orang-orang yang telah Engkau beri nikmat kepada mereka; bukan (jalan) mereka yang dimurkai dan bukan (pula jalan) mereka yang sesat" (Q. S. Al-Fatihah: 7).

Yang dimaksud ayat tersebut yaitu manusia terbagi menjadi tiga kelompok, yaitu (1) kelompok yang mendapat nikmat dari Allah SWT, (2) kelompok yang dilaknat, dan (3) kelompok yang sesat (Abdusysyakir, 2006: 47).

Berbicara tentang himpunan selain himpunan manusia, juga disebutkan dalam al-Quran himpunan-himpunan yang lain. Perhatikan firman Allah SWT dalam surat Al-Faathir ayat 1.

ٱلْحَمْدُ لِلَّهِ فَاطِرِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ جَاعِلِ ٱلْمَلَٰٓئِكَةِ رُسُلًا أُوْلِىٓ أَجْنِحَةٍ مَّثْنَىٰ
وَثُلَٰثَ وَرُبَٰعَ ۚ يَزِيدُ فِى ٱلْخَلْقِ مَا يَشَآءُ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلَىٰ كُلِّ شَىْءٍ قَدِيرٌ ﴿١﴾

Artinya:"Segala puji bagi Allah Pencipta langit dan bumi, yang menjadikat malaikat sebagai utusan-utusan (untuk mengurus berbagai macam urusan) yang mempunyai sayap, masing-masing (ada yang) dua, tiga dan empat. Allah menambah pad cintaaan-Nya apa yang dikendaki-Nya. Sesungguhnya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu"(Q.S. Al-Faathir:1).

Dalam ayat 1 surat Al-Faathir ini dijelaskan sekelomok, segolongan atau sekumpulan makhluk yang disebut malaikat. Dalam kelompok malaikat tersebut terdapat kelompok malaikat yang mempunyai dua sayap, tiga sayap, atau empat sayap. Bahkan sangat dimungkinkan terdapat kelompok malaikat yang mempunyai lenih dari empat sayap jika allah SWT menghendaki (Abdussakir, 2006: 48).

Kembali pada definisi grup yang merupakan himpunan tidak kosong dengan operasi biner yang memenuhi sifat-sifat assosiatif, ada identitas, dan ada invers. Kita telah membicarakan himpunan dalam konsep Islam, sekarang kita mengkaji opersai biner dalam konsep Islam. Misal $\circ$ adalah operasi pada elemen-elemen S maka ia disebut biner, apabila setiap dua elemen a, $b \in S$ maka $(a \circ b) \in S$. Jadi jika anggota dari himpunan S dioperasikan hasilnya juga anggota S. Jika dikaitkan dengan konsep Islam, ciptaan Allah SWT yang sangat beragam merupakan himpunan-himpunan tersebut. Dalam dunia nyata operasi biner dan sifat-sifat yang harus dipenuhi oleh grup merupakan interaksi-interaksi yang terjadi antara sesama makhluk. Jadi sekalipun makhluk-makhluk tersebut berinteraksi dengan berbagai macam pola akan tetap berada dalam himpunan tersebut yaitu himpunan ciptaan-Nya.

Manusia merupakan salah satu makhluk atau ciptaan Allah yang sempurna karena mereka diberi nafsu, akal dan indera-indera yang dapat dimanfaatkan oleh manusia. Interaksi-interaksi yang terjadi pun sangat beragam walaupun pada akhirnya akan kembali pada yang mencipta mereka. Dalam kehidupan sehari-hari manusia sering lupa akan percipta-Nya dan sering kali tidak melaksanakan perintah-Nya dan tidak meninggalkan larangan-Nya. Padahal Allah telah memperingatkan manusia dengan firmanNya bahwa manusia harus berada pada jalan yang benar yakni menjalankan perintah-Nya dan menjauhi larangan-Nya. Dalam al-Quran surat al-An’aam ayat 153 dijelaskan bahwa:

وَأَنَّ هَٰذَا صِرَٰطِي مُسْتَقِيمًا فَٱتَّبِعُوهُ ۖ وَلَا تَتَّبِعُوا۟ ٱلسُّبُلَ فَتَفَرَّقَ بِكُمْ عَن سَبِيلِهِۦ ۚ
ذَٰلِكُمْ وَصَّىٰكُم بِهِۦ لَعَلَّكُمْ تَتَّقُونَ ﴿١٥٣﴾

Artinya: "dan bahwa (yang Kami perintahkan ini) adalah jalanKu yang lurus, maka ikutilah dia, dan janganlah kamu mengikuti jalan-jalan (yang lain)[152], karena jalan-jalan itu mencerai beraikan kamu dari jalanNya. Yang demikian itu diperintahkan Allah agar kamu bertakwa".

Akan tetapi karena manusia merasa bahwa dirinya adalah mahkluk yang sempurna dari pada makhluk-makhluk lain sehingga manusia seringkali sombong, dengki, dan sebagainya yang mengakibatkan mereka melampaui batas. Padahal seperti apapun mereka berpola, pada akhirnya akan tetap kembali pada Kholiq-Nya. Dalam al-Quran disebutkan dalam surat Al'Alaq ayat 6, 7, 8.

كَلَّآ إِنَّ ٱلْإِنسَٰنَ لَيَطْغَىٰٓ ﴿٦﴾ أَن رَّءَاهُ ٱسْتَغْنَىٰٓ ﴿٧﴾ إِنَّ إِلَىٰ رَبِّكَ ٱلرُّجْعَىٰٓ (﴿٨﴾

Artinya: "Ketahuilah! Sesungguhnya manusia benar-benar melampaui batas. Karena dia melihat dirinya serba cukup. Sesungguhnya hanya kepada Tuhanmulah kembali(mu)" (Q.S. Al'Alaq: 6-8).

Dari ayat-ayat tersebut jelas bahwa manusia sering kali melampaui batas karena merasa dirinya telah cukup sehigga mereka lupa akan pencipta-Nya. Padahal, mereka akan kembali pada pencipta-Nya jika waktunya tiba.

BAB III

PEMBAHASAN

Pada Bab III ini, akan dibahas mengenai masalah *Cayley color Graph* dari grup simetri dan grup dehidral, yakni bagaimana menentukan *Cayley Color Graph* dari grup simetri S_3, dan bagaimana menentukan *Cayley Color Graph* dari grup dehidral D_6 dan D_8 serta menyajikannya dalam gambar berupa graph atau digraf. Di mana pada setiap penentuan *Cayley Color Graph* dari grup-grup tersebut dilakukan sebanyak dua kali dengan pasangan Δ (generator) yang berbeda.

Misal diberikan Γ grup nontrivial yang berhingga dengan $\Delta = \{h_1, h_2, ..., h_k\}$ sebagai himpunan generator untuk Γ. Digraf yang dikaitkan dengan Γ dan Δ disebut *Cayley Color Graph* dari Γ atas Δ dan dinotasikan dengan $D_\Delta(\Gamma)$. Himpunan titik dari $D_\Delta(\Gamma)$ adalah himpunan dari elemen grup Γ; oleh karena itu $D_\Delta(\Gamma)$ mempunyai order $|\Gamma|$. Masing-masing generator h_i disebut color atau warna. Untuk $g_1, g_2 \in \Gamma$ akan terdapat suatu busur (g_1, g_2) yang berwarna h_i di $D_\Delta(\Gamma)$ jika dan hanya jika $g_2 = g_1 h_i$. Jika h_i adalah suatu elemen yang berorder 2 (inversnya dirinya sendiri atau $(h_i)^2 = 1$) dan $g_2 = g_1 h_i$, maka diperoleh $g_2 = g_1 h_i$ (jika ruas kanan dan kiri sama-sama dikalikan h_i) yaitu $g_2 h_i = g_1 h_i h_i$, maka $g_2 h_i = g_1 h_i^2$ sehingga $g_2 h_i = g_1 1$ atau $g_1 = g_2 h_i$. Jadi *Cayley Color Graph* $D_\Delta(\Gamma)$ memuat busur (g_1, g_2) dan (g_2, g_1), dan jika kedua-duanya sama-sama berwarna h_i maka untuk pasangan busur simetri ini cukup diwakili oleh sisi tunggal g_1, g_2. Sedangkan untuk busur (g_1, g_2) dan (g_2, g_1) yang berwarna h_i berbeda tetap diwakili oleh busur itu sendiri.

Cara menentukan *Cayley Color Graph* $D_\Delta(\Gamma)$ dari grup simetri dan grup dihedral adalah sebagai berikut:

5. Memilih generator yang merupakan subset dari grup tersebut.
6. Menentukan warna busur dari dua titik yang adjacent.
7. Menggambar hasil *Cayley Color Graph* $D_\Delta(\Gamma)$ dari grup simetri dan dehidral dalam bentuk digraf.
8. Jika ada pasangan busur dari hasil *Cayley Color Graph* $D_\Delta(\Gamma)$ baik dari grup simetri maupun dehidral berwarna sama maka cukup diwakili oleh sisi tunggal pasangan busur tersebut. Kemudian digambarkan kembali dalam bentuk graf atau digraf .

3.1 *Cayley Color Graph* dari Grup Simetri

3.1.1 *Cayley Color Graph* dari Grup Simetri S_3

Misal Γ dinotasikan sebagai grup simetri S_3 dari semua permutasi pada himpunan {1, 2, 3}, di mana himpunan tersebut beranggotakan 3 dan permutasi dari 3! = 6 sehingga anggotanya adalah 6. Dari hasil permutasi pada himpunan tersebut diperoleh Γ = {1, (12), (23), (13), (123), (132)}. Untuk pasangan generator yang dapat membangkitkan grup simetri S_3 yaitu {(12), (23)}, {(12), (13)}, {(23), (13)}, {(123), (12)} {(123), (13)}, {(123), (23)}, {(132), (12)}, {(132), (13)}, {(132), (23)}, akan tetapi pembasahan mengenai *Cayley Color Graph* dari grup simetri S_3 dalam Bab III ini hanya memilih pasangan generator

{(12), (23)} dan {(123), (12)}. Pada bagian ini dipilih generator $\Delta =$ {(12), (23)}. Sebagaimana yang telah dijelaskan pada uraian sebelumnya himpunan titik dari $D_{\Delta}(\Gamma)$ adalah himpunan dari elemen grup Γ; oleh karena itu $D_{\Delta}(\Gamma)$ mempunyai order $|\Gamma|$, sedangkan *a* dan *b* adalah warna. Misal g_1, g_2 anggota dari himpunan Γ maka jika $g_2 = g_1 \circ a$ atau $g_2 = g_1 \circ b$, ia merupakan *Cayley Color Graph* $D_{\Delta}(\Gamma)$ dengan g_1, g_2 merupakan busur (g_1, g_2) yang berwarna *a* atau *b*. Maka *Cayley Color Graph* $D_{\Delta}(\Gamma)$ dari S_3 adalah dengan $\Delta =$ {*a*, *b*} dengan *a* = (12) dan *b* = (23):

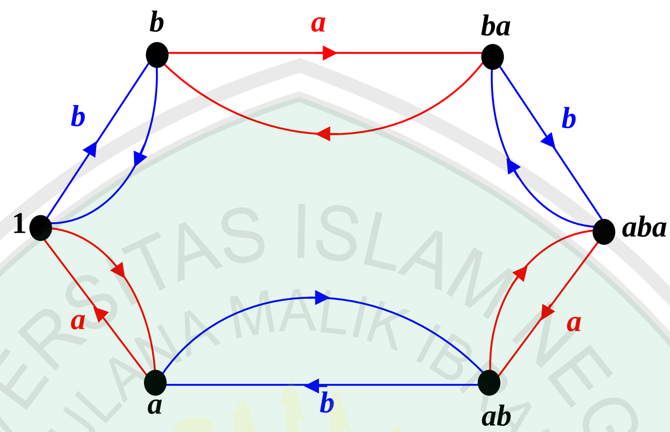
Untuk hasil *Cayley Color Graph* $D_{\Delta}(\Gamma)$ dengan warna *a* = (12) adalah:

1. $a \circ a$ = (12) ◦ (12) = (1) (2) (3) = 1
2. $1 \circ a$ = (1) (2) (3) ◦ (12) = (12) = *a*
3. $b \circ a$ = (23) ◦ (12) = (132) = *ba*
4. $ba \circ a$ = (132) ◦ (12) = (23) = *b*
5. $ab \circ a$ = (123) ◦ (12) = (13) = *aba*
6. $aba \circ a$ = (13) ◦ (12) = (123) = *ab*

Untuk hasil *Cayley Color Graph* $D_{\Delta}(\Gamma)$ dengan warna *b* = (23) adalah:

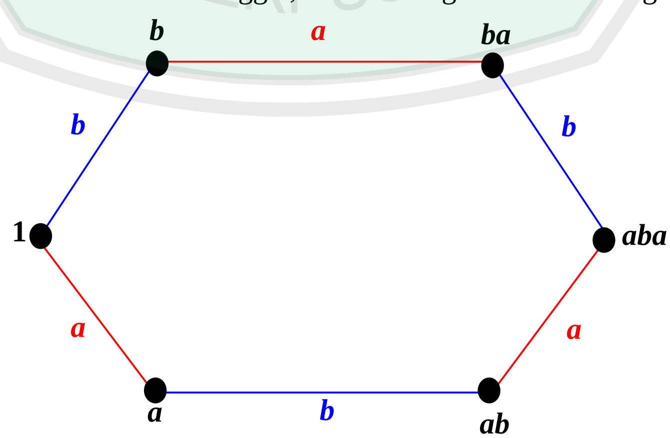
1. $b \circ b$ = (23) ◦ (23) = (1) (2) (3) = 1
2. $1 \circ b$ = (1) (2) (3) ◦ (23) = (23) = *b*
3. $a \circ b$ = (12) ◦ (23) = (123) = *ab*
4. $ab \circ b$ = (123) ◦ (23) = (12) = *a*
5. $ba \circ b$ = (132) ◦ (23) = (13) = *aba*
6. $aba \circ b$ = (13) ◦ (23) = (132) = *b*a

Jadi *Cayley Color Graph* $D_\Delta(\Gamma)$ = {*b*, *aba*, *a*, *ab*, *b*, 1}. *Cayley color Graph* $D_\Delta(\Gamma)$ dari grup simetri S_3 tersebut dapat digambarkan dengan digraf berikut.



Gambar 3.1 *Cayley Color Graph* dari Grup Simetri S_3

Dari gambar tersebut dapat dilihat bahwa busur (*ab*, *ba*) dan (*ba*, *ab*) kedua-duanya sama-sama berwarna *b*, busur (*ab*, *aba*) dan (*aba*, *ab*) kedua-duanya sama-sama berwarna *b*, busur (*ab*, *a*) dan (*a*, *ab*) kedua-duanya sama-sama berwarna *b*, busur (1, *a*) dan (*a*, 1) kedua-duanya sama-sama berwarna *b*, busur (*b*, 1) dan (1, *b*) kedua-duanya sama-sama berwarna *b*. Sebagaimana penjelasan pada uraian sebelumnya yaitu untuk pasangan busur yang berwarna sama cukup diwakili oleh sisi tunggal, kasus ini digambarkan oleh graf berikut.



Gambar 3.2 *Cayley Color Graph* dari Grup Simetri S_3

Selanjutnya penulis akan menentukan *Cayley Color Graph* $D_{\Delta}(\Gamma)$ seperti sebelumnya dengan $\Delta = \{a, b\}$ yang yang telah dipilih yaitu a = (123) dan b = (12). Misal g_1, g_2 anggota dari himpunan Γ maka jika $g_2 = g_1 \circ a$ atau $g_2 = g_1 \circ b$, ia merupakan *Cayley Color Graph* $D_{\Delta}(\Gamma)$ dengan g_1, g_2 adalah busur (g_1, g_2) yang berwarna a atau b. Himpunan titik dari *Cayley Color Graph* $D_{\Delta}(\Gamma)$ adalah himpunan dari elemen grup Γ; oleh karena itu $D_{\Delta}(\Gamma)$ mempunyai order $|\Gamma|$, sedangkan a dan b adalah warna. *Cayley Color Graph* $D_{\Delta}(\Gamma)$ dari grup S_3 adalah:

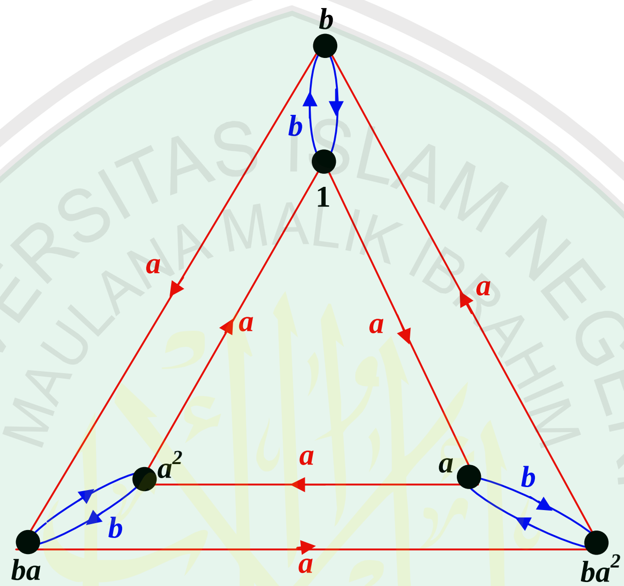
Untuk hasil *Cayley Color Graph* dengan warna a = (123) adalah:

1. $b \circ a$ = (12) ◦ (123) = (23) = ba
2. $ba \circ a$ = (23) ◦ (123) = (13) = ba^2
3. $ba^2 \circ a$ = (13) ◦ (123) = (12) = b
4. $a \circ a$ = (123) ◦ (123) = (132) = a^2
5. $1 \circ a$ = (1) (2) (3) ◦ (123) = (123) = a
6. $a^2 \circ a$ = (132) ◦ (123) = (1) (2) (3) = 1

Untuk hasil *Cayley Color Graph* dengan warna b = (12), adalah:

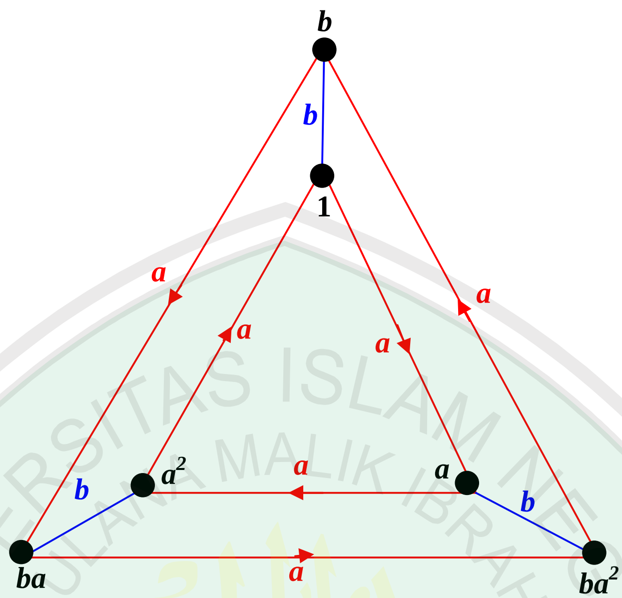
1. $b \circ b$ = (12) ◦ (12) = (1) (2) (3) = 1
2. $1 \circ b$ = (1) (2) (3) ◦ (12) = (12) = b
3. $a \circ b$ = (123) ◦ (12) = (13) = ba^2
4. $ba \circ b$ = (23) ◦ (12) = (132) = a^2
5. $a^2 \circ b$ = (132) ◦ (12) = (23) = ba
6. $ba^2 \circ b$ = (13) ◦ (12) = (123) = a

Jadi *Cayley Color Graph* $D_{\Delta}(\Gamma)$ dari grup simetri S_3 adalah $D_{\Delta}(\Gamma)$ = $\{a, ba, a^2, ba^2, b, 1\}$. *Cayley Color Graph* $D_{\Delta}(\Gamma)$ dari grup simetri S_3 pada kasus ini dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 3.3 *Cayley Color Graph* dari Grup Simetri S_3

Sebagaimana ketentuan yang telah diuraikan sebelumnya yaitu untuk pasangan busur yang berwarna sama cukup diwakili oleh sisi tunggal pasangan busur tersebut. Pada gambar digraf tersebut busur-busur yang berwarna sama yaitu busur (a, ba^2) dan busur (ba^2,a) berwarna b, busur (ba, a^2) dan busur (a^2, ba) berwarna b, dan busur (1, b) dan (b, 1) juga berwarna b, sehingga busur-busurnya cukup diwakili oleh sisi tunggal. Berikut ini adalah gambar dari kasus tersebut.



Gambar 3.4 *Cayley Color Graph* dari Grup Simetri S_3

3.2 *Cayley Color Graph* dari Grup Dehidral

3.2.1 *Cayley Color Graph* dari Grup Dehidral D_6

Misal Γ dinotasikan sebagai grup dehidral D_6. Di mana grup dehidral D_6 adalah himpunan simetri-simetri dari segi tiga yaitu Γ = {1, *r*, r^2, *s*, *sr*, sr^2}. Untuk pasangan generator yang dapat membangkitkan grup dehidral D_6 diantaranya {*r*, *s*}, {r^2, *sr*}, {*s*, *sr*}, {*s*, sr^2}, akan tetapi dalam pembahasan mengenai *Cayley Color Graph* dari grup dehidral D_6 generator yang dipilih hanya pasangan generator {*r*, *s*} dan {*s*, *sr*}. Pada bagian ini dipilih generator Δ = {*s*, *r*}. Sebagaimana penjelasan sebelumnya himpunan titik dari *Cayley Color Graph* $D_\Delta(\Gamma)$ adalah himpunan dari elemen grup Γ; oleh karena itu $D_\Delta(\Gamma)$ mempunyai order $|\Gamma|$, sedangkan *r* dan *s* adalah warna. Misal g_1, g_2 anggota dari himpunan Γ maka jika $g_2 = g_1 \circ r$ atau $g_2 = g_1 \circ s$, ia merupakan *Cayley Color Graph* $D_\Delta(\Gamma)$

dengan g_1, g_2 adalah busur (g_1, g_2) yang berwarna *r* atau *s*. *Cayley Color Graph* $D_\Delta(\Gamma)$ dari grup dehidral D_6 dengan $\Delta = \{s, r\}$ adalah:

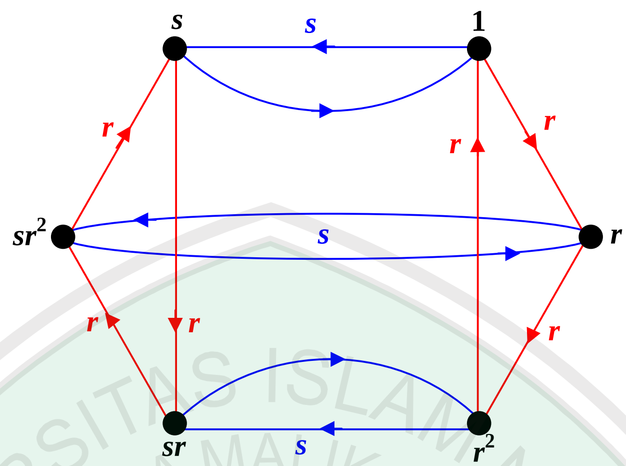
Untuk hasil *Cayley Color Graph* dengan warna *r*, adalah:

7. $1 \circ r = r$
8. $r \circ r = r^2$
9. $r^2 \circ r = 1$
10. $s \circ r = sr$
11. $sr \circ r = sr^2$
12. $sr^2 \circ r = s$

Untuk hasil *Cayley Color Graph* dengan warna *s*, adalah:

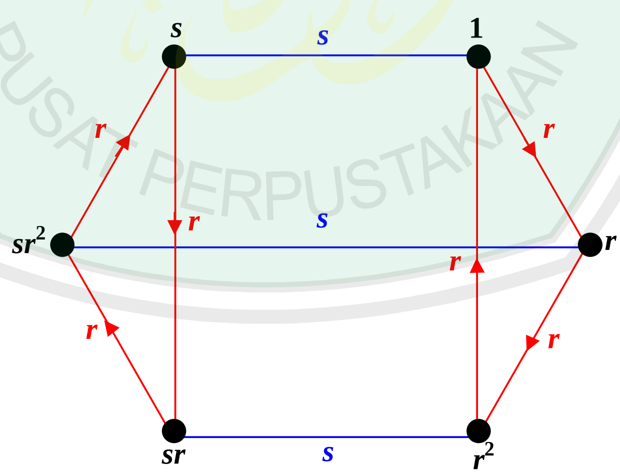
1. $1 \circ s = s$
2. $r \circ s = sr^2$
3. $r^2 \circ s = sr$
4. $s \circ s = 1$
5. $sr \circ s = r^2$
6. $sr^2 \circ s = r$

Jadi *Cayley Color Graph* dari grup dehidral D_6 adalah $D_\Delta(\Gamma)$ = $\{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. *Cayley Color Graph* $D_\Delta(\Gamma)$ pada kasus ini dapat dilihat pada gambar berikut.



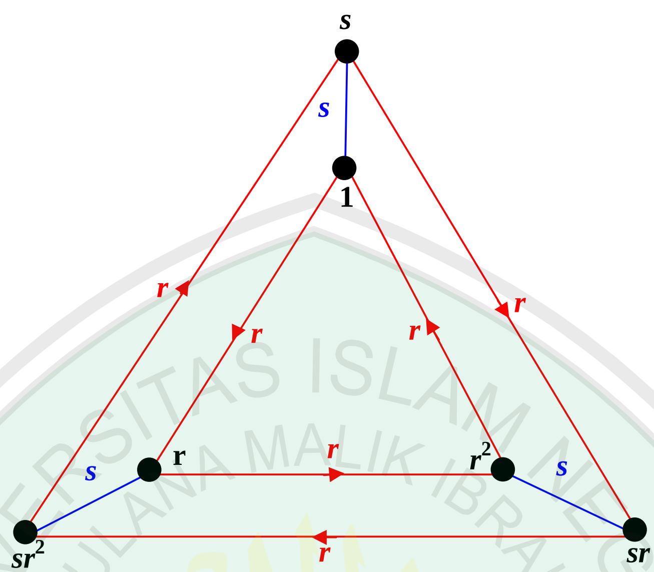
Gambar 3.5 *Cayley Color Graph* dari Grup Dehidral D_6

Dari gambar tersebut dapat di lihat bahwa terdapat pasangan busur yang berwarna sama yaitu busur (1, s) dan busur (s, 1) berwarna s, busur (r, sr^2) dan busur (sr^2, r) berwarna s, dan busur (sr, r^2) dan (r^2, s) juga berwarna s, sehingga busur-busurnya diwakili oleh sisi tunggal. Berikut ini adalah gambar dari kasus tersebut.



Gambar 3.6 *Cayley Color Graph* dari Grup Dehidral D_6

Atau *Cayley Color Graph* $D_\Delta(\Gamma)$ pada kasus ini dapat dibuat digrafnya seperti berikut.



Gambar 3.7 *Cayley Color Graph* dari Grup Dehidral D_6

Selanjutnya penulis akan menentukan *Cayley Color Graph* $D_\Delta(\Gamma)$ dari grup dihedral D_6 dengan Δ yang telah dipilih dari pengerjaan *Cayley Color Graph* $D_\Delta(\Gamma)$ dari grup dihedral D_6 sebelumnya, yaitu Δ = {*s*, *sr*}. Himpunan titik dari $D_\Delta(\Gamma)$ adalah himpunan dari elemen grup Γ; oleh karena itu $D_\Delta(\Gamma)$ mempunyai order $|\Gamma|$, sedangkan *s* dan *sr* adalah warna. Misal g_1, g_2 anggota dari himpunan Γ maka jika $g_2 = g_1 \circ s$ atau $g_2 = g_1 \circ sr$, ia merupakan *Cayley Color Graph* $D_\Delta(\Gamma)$ dengan g_1, g_2 adalah busur (g_1, g_2) yang berwarna *s* atau *sr*. *Cayley Color Graph* $D_\Delta(\Gamma)$ dari grup dihedral D_6 adalah:

Untuk hasil *Cayley Color Graph* dengan warna *s*, adalah:

1. $1 \circ s = s$
2. $r \circ s = sr^2$
3. $r^2 \circ s = sr$

4. $s \circ s = 1$

5. $sr \circ s = r^2$

6. $sr^2 \circ s = r$

Untuk hasil *Cayley Color Graph* dengan warna *sr*, adalah:

1. $1 \circ sr = sr$

2. $r \circ sr = s$

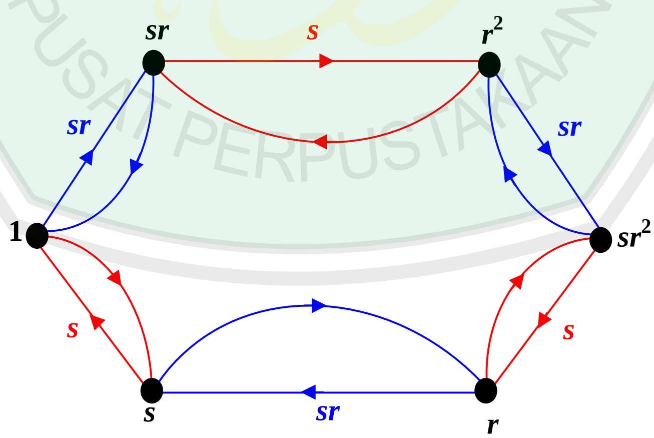
3. $r^2 \circ sr = sr^2$

4. $s \circ sr = r$

5. $sr \circ sr = 1$

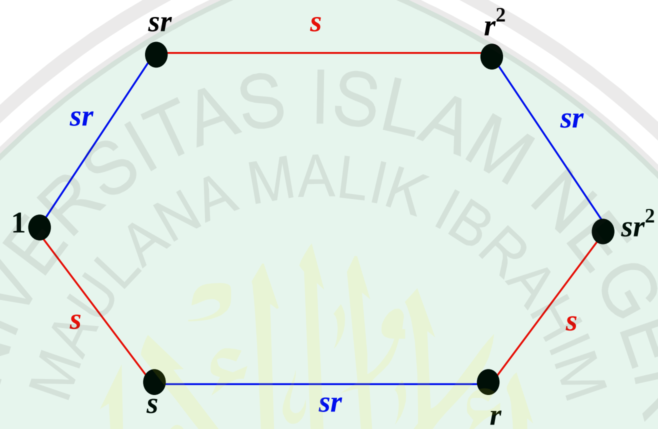
6. $sr^2 \circ sr = r^2$

Jadi *Cayley Color Graph* $D_\Delta(\Gamma)$ dari grup dehidral D_6 adalah $D_\Delta(\Gamma)$ = {1, r, r^2, s, sr, sr^2}. *Cayley Color Graph* $D_\Delta(\Gamma)$ pada kasus ini dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 3.8 *Cayley Color Graph* dari Grup Dehidral D_6

Dari digraf tersebut dapat di lihat bahwa terdapat busur-busur yang berwarna sama yaitu busur (sr, 1) dan busur (1, sr) berwarna sr, busur (sr^2, r^2) dan busur (r^2, sr^2) berwarna *sr*, busur (*s*, *r*) dan (*r*, *s*) juga berwarna *sr*, busur (1, *s*) dan busur (*s*, 1) berwarna *s*, busur (*r*, sr^2) dan busur (sr^2, *r*) berwarna *s*, dan busur (r^2, *sr*) dan busur (*sr*, r^2) juga berwarna *s*. Sehingga busur-busur tersebut cukup diwakili oleh sisi tunggal. Berikut gambar dari kasus ini.



Gambar 3.9 *Cayley Color Graph* dari Grup Dehidral D_6

3.2.2 *Cayley Color Graph* dari Grup Dehidral D_8

Misal Γ dinotasikan sebagai grup dehidral D_8. Grup dehidral D_8 adalah himpunan simetri-simetri dari segi empat yaitu Γ = { *r*, r^2, r^3, 1, *s*, *sr*, sr^2, sr^3} Untuk generator yang dapat membangkitkan grup dehidral D_8 diantaranya {*r*, *s*}, {r^2, *sr*}, {*s*, *sr*}, {*s*, sr^2}, { r^3, *sr* }, { *s*, sr^3}, dalam pembahasan mengenai *Cayley Color Graph* dari grup dehidral D_8 generator yang dipilih hanya pasangan generator {*r*, *s*} dan {*s*, *sr*}**.** Pada bagian ini dipilih generator Δ = {s, r}. Sebagaimana penjelasan pada awal bab ini himpunan titik dari *Cayley Color Graph* $D_\Delta(\Gamma)$ adalah himpunan dari elemen grup Γ; oleh karena itu *Cayley Color Graph* $D_\Delta(\Gamma)$ mempunyai order $|\Gamma|$, sedangkan *r* dan *s* adalah warna. Misal g_1, g_2 anggota dari himpunan Γ maka jika $g_2 = g_1 \circ s$ atau $g_2 = g_1 \circ r$, ia merupakan *Cayley color Graph* $D_{\Delta}(\Gamma)$ dengan g_1, g_2 merupakan busur (g_1, g_2) yang berwarna *r* atau *s*. *Cayley color Graph* $D_{\Delta}(\Gamma)$ dari grup dehidral D_8 dengan $\Delta = \{s, r\}$ adalah:

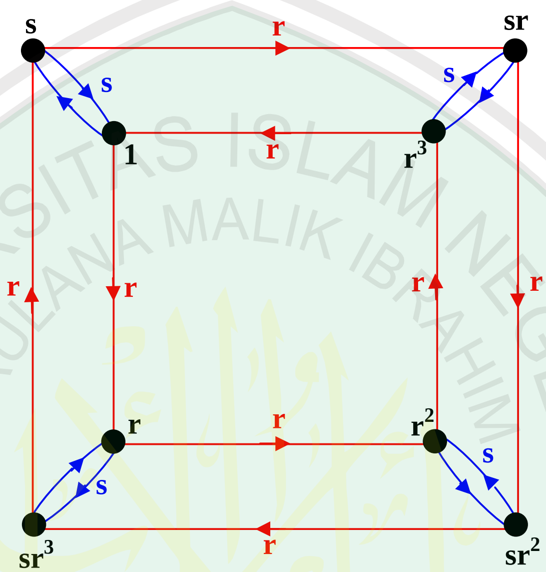
Untuk hasil *Cayley color Graph* $D_{\Delta}(\Gamma)$ dengan warna *r*, adalah:

1. $1 \circ r = r$
2. $r \circ r = r^2$
3. $r^2 \circ r = r^3$
4. $r^3 \circ r = 1$
5. $s \circ r = sr$
6. $sr \circ r = sr^2$
7. $sr^2 \circ r = sr^3$
8. $sr^3 \circ r = s$

Untuk hasil *Cayley color Graph* dengan warna *s*, adalah:

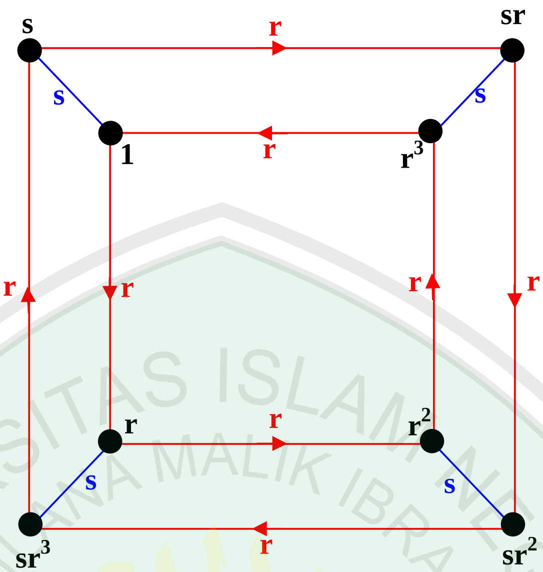
1. $1 \circ s = s$
2. $r \circ s = sr^3$
3. $r^2 \circ s = sr^2$
4. $r^3 \circ s = sr$
5. $s \circ s = 1$
6. $sr \circ s = r^3$
7. $sr^2 \circ s = r^2$
8. $sr^3 \circ s = r$

Jadi *Cayley Color Graph* $D_\Delta(\Gamma)$ dari grup dehidral D_6 adalah $D_\Delta(\Gamma)$ = {1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3}. *Cayley Color Graph* $D_\Delta(\Gamma)$ pada kasus ini dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 3.10 *Cayley Color Graph* dari Grup Dehidral D_8

Pada gambar digraf tersebut terdapat busur-busur yang berwarna sama yaitu busur (sr, r^3) dan busur (r^3,sr) berwarna s, busur (r, sr^3) dan busur (sr^3, r) berwarna s, dan busur (1, s) dan (s, 1) berwarna s, busur (r^2, sr^2) dan busur (sr^2, r^2) berwarna s juga sehingga busur-busurnya cukup diwakili oleh sisi tunggal. Berikut ini adalah gambar dari kasus tersebut.



Gambar 3.11 *Cayley Color Graph* dari Grup Dehidral D_8

Selanjutnya penulis akan menentukan *Cayley Color Graph* $D_\Delta(\Gamma)$ dari grup dihedral D_8 seperti pengerjaan sebelumnya akan tetapi dengan Δ yang berbeda, yaitu $\Delta = \{s, sr\}$. Menurut penjelasan sebelumnya himpunan titik dari *Cayley Color Graph* $D_\Delta(\Gamma)$ adalah himpunan dari elemen grup Γ; oleh karena itu *Cayley Color Graph* $D_\Delta(\Gamma)$ mempunyai order $|\Gamma|$, sedangkan *s* atau *sr* adalah warna. Misal g_1, g_2 anggota dari himpunan Γ maka jika $g_2 = g_1 \circ s$ atau $g_2 = g_1 \circ sr$, ia merupakan *Cayley Color Graph* $D_\Delta(\Gamma)$ dengan g_1, g_2 merupakan busur (g_1, g_2) yang diwarnai r^3 atau sr^2. *Cayley Color Graph* $D_\Delta(\Gamma)$ dari grup dihedral D_8 adalah:

Untuk hasil *Cayley Color Graph* dengan warna *s*, adalah:

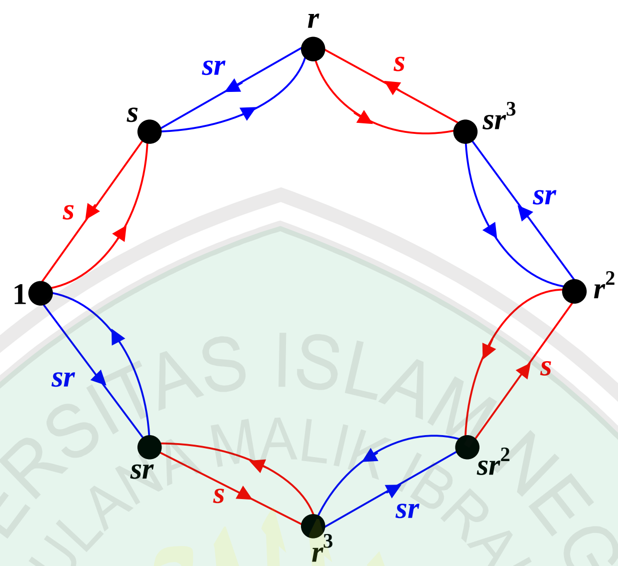
1. $1 \circ s = s$
2. $r \circ s = sr^3$

3. $r^2 \circ s = sr^2$
4. $r^3 \circ s = sr$
5. $s \circ s = 1$
6. $sr \circ s = r^3$
7. $sr^2 \circ s = r^2$
8. $sr^3 \circ s = r$

Untuk hasil *Cayley Color Graph* dengan warna *sr*, adalah:

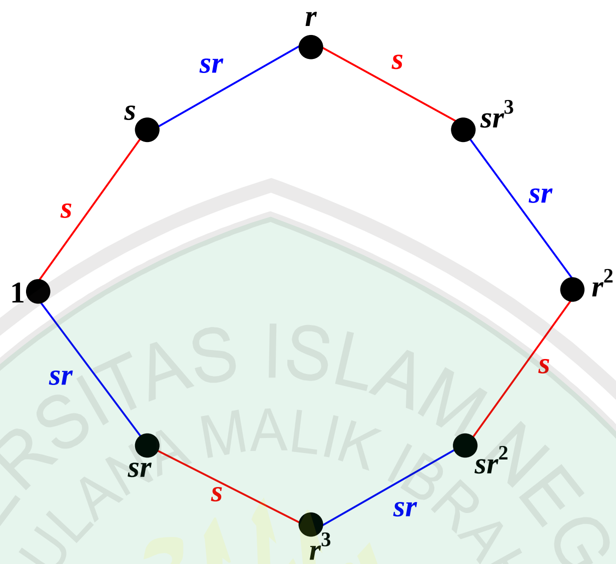
1. $1 \circ sr = sr$
2. $r \circ sr = s$
3. $r^2 \circ sr = sr^3$
4. $r^3 \circ sr = sr^2$
5. $s \circ sr = r$
6. $sr \circ sr = 1$
7. $sr^2 \circ sr = r^3$
8. $sr^3 \circ sr = r^2$

Jadi *Cayley Color Graph* $D_\Delta(\Gamma)$ dari grup dehidral D_6 adalah $D_\Delta(\Gamma)$ = {r, r^2, r^3, 1, s, sr, sr^2, sr^3}. *Cayley Color Graph* $D_\Delta(\Gamma)$ pada kasus ini dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 3.12 *Cayley Color Graph* dari Grup Dehidral D_8

Dari gambar tersebut dapat dilihat bahwa terdapat busur-busur yang berwarna sama. Menurut ketentuan yang telah dijelaskan pada awal bab ini yaitu untuk pasangan simetri yang busur-busurnya berwarna sama cukup diwakili oleh sisi tunggal. Pada gambar digraf tersebut busur-busur yang berwarna sama yaitu busur (sr, 1) dan busur (1, sr) berwarna sr, busur (sr^2, r^3) dan busur (r^3, sr^2) berwarna sr, busur (r, s) dan busur (s, r) berwarna sr, dan busur (sr^3, r^2) dan busur (r^2, sr^3) berwarna sr, begitu busur busur (s, 1) dan busur (1, s) berwarna s, busur (sr^2, r^2) dan busur (r^2, sr^2) berwarna s, busur (r^3, sr) dan busur (sr, r^3) berwarna s, dan busur (sr^3, r) dan busur (r, sr^3) berwarna s sehingga busur-busur tersebut diwakili oleh sisi tunggal. Berikut ini adalah gambar dari kasus tersebut.



Gambar 3.13 *Cayley Color Graph* dari Grup Dehidral D_8

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada Bab III, maka dapat diambil kesimpulan, antara lain:

1. Untuk menentukan *Cayley Color Graph* $D_{\Delta}(\Gamma)$ dari grup simetri adalah:
   a. Memilih generator yang merupakan subset dari grup tersebut.
   b. Menentukan warna busur dari dua titik yang adjacent.
   c. Menggambar hasil *Cayley Color Graph* $D_{\Delta}(\Gamma)$ dari grup simetri dan dehidral dalam bentuk digraf.
   d. Jika ada pasangan busur dari hasil *Cayley Color Graph* $D_{\Delta}(\Gamma)$ baik dari grup simetri dan dehidral berwarna sama maka cukup diwakili oleh sisi tunggal pasangan busur tersebut. Kemudian digambarkan kembali dalam bentuk graf atau digraf .
2. Untuk menentukan *Cayley Color Graph* dari grup dehidral menggunakan cara yang sama seperti pada grup simetri yaitu:
   a. Memilih generator yang merupakan subset dari grup tersebut.
   b. Menentukan warna busur dari dua titik yang adjacent.
   c. Menggambar hasil *Cayley Color Graph* $D_{\Delta}(\Gamma)$ dari grup simetri dan dehidral dalam bentuk digraf.
   d. Jika ada pasangan busur dari hasil *Cayley Color Graph* $D_{\Delta}(\Gamma)$ baik dari grup simetri dan dehidral berwarna sama maka cukup

diwakili oleh sisi tunggal pasangan busur tersebut. Kemudian digambarkan kembali dalam bentuk graf atau digraf .

4.2 Saran

Pada skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pada pokok bahasan masalah *Cayley Color Graph* pada grup simetri S_3, dan grup dehidral D_6 dan D_8. Maka dari itu, untuk penulisan skripsi selanjutnya, penulis menyarankan untuk mengkaji masalah *Cayley Color Graph* dari grup simetri dan dehidral dengan order yang lebih tinggi atau kajian yang lebih dalam tentang keterkaitan teori graf dan grup mengingat pembahasan tentang grup sangat luas.

DAFTAR PUSTAKA

Abdusysyakir. 2006. *Ada Matematika dalam Al-Qur'an*. Malang: UIN Malang Press.

Abdusysyakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Chartrand, Gery and Lesniak, Linda. 1986. *Graphs and Digraphs Second Edition*. California: a Division of Wadsworth, Inc.

Departemen Agama RI. 1995. *Al-Qur'an dan Terjemahnya*. Semarang: PT. Karya Toha Putra.

Dummit, David Steven dan Foote, Richard M. 1991. *Abstract algebra*. New Jersey: a Division of Simon & Schuster, Inc.

Munir, Rinaldi. 2007. *Matematika Diskrit*. Bandung: INFORMATIKA.

Purwanto, 1998. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP Malang.

Raisinghania. M.D. dan R.S. Aggarwal. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi:S. Chand & Company LTD.

Rahman, Afzalur. 1992. *Al Qur'an Sumber Ilmu Pengetahuan*. Jakarta: Rineka Cipta.

Sukirman. 2005. *Pengantar Aljabar Abstrak*. Malang: Universitas Negeri malang (UM PRESS).

Wilson, Robin J dan John J. Watkins. 1989. *Graph an Introductory Approach*.

DEPARTEMEN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345
Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : **Yuli Hikma Jamilia**
Nim : **04510020**
Fakultas/ jurusan : **Sains Dan Teknologi/ Matematika**
Judul skripsi : ***Cayley Color Graph* dari Grup Simetri dan Grup Dihedral**
Pembimbing : **Abdussakir, M.Pd**
Abdul Aziz, M. Si

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan
1	21 Februari 2008	Konsultasi Masalah	1.
2	5 Maret 2008	Konsultasi BAB III	2.
3	12 Maret 2008	Revisi BAB III	3.
4	19 Maret 2008	Revisi BAB III	4.
5	9 April 2008	ACC BAB III	5.
6	25 Juni 2008	Konsultasi BAB I dan II	6.
7	4 Juli 2008	Konsultasi Keagamaan	7.
8	9 Juli 2008	Revisi BAB I dan II	8.
9	21 Juli 2008	Revisi Keagamaan	9.
10	24 Juli 2008	Konsultasi BAB I, II, III, IV	10.
11	25 Juli 2008	Konsultasi Keseluruhan	11.
12	26 Juli 2008	ACC Keseluruhan	12.

Malang, 28 Juli 2008
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321