PENYELESAIAN NUMERIK INTEGRAL LIPAT DUA DENGAN MENGGUNAKAN INTEGRASI ROMBERG BERBANTUAN MATLAB

SKRIPSI

Oleh :

ISWATUL KHASANAH
NIM.03510046

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MALANG
2008

PENYELESAIAN NUMERIK INTEGRAL LIPAT DUA DENGAN MENGGUNAKAN INTEGRASI ROMBERG BERBANTUAN MATLAB

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Univrsitas Islam Negeri Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Mmperoleh Gelar Sarjana Sains (S. Si)

Oleh :

ISWATUL KHASANAH
NIM.03510046

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MALANG
2008

PENYELESAIAN NUMERIK INTEGRAL LIPAT DUA DENGAN MENGGUNAKAN INTEGRASI ROMBERG BERBANTUAN MATLAB

SKRIPSI

Oleh :

ISWATUL KHASANAH
NIM.03510046

Telah disetujui untuk diuji

Malang, 27 Februari 2008

Dosen pembimbing I	**Dosen Pembimbing II**
Wahyu Henky Irawan, M.Pd	**Ahmad Barizi, M.A**
NIP. 150 300 415	**NIP. 150 283 991**

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M. Si

NIP. 150 318 321

PENYELESAIAN NUMERIK INTEGRAL LIPAT DUA DENGAN MENGGUNAKAN INTEGRASI ROMBERG BERBANTUAN MATLAB

SKRIPSI

OLEH

ISWATUL KHASANAH
NIM. 03510046

Telah Dipertahankan Di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains

Tanggal

08 April 2008

Susunan Dewan Penguji:		Tanda Tangan
1. Penguji Utama	: Evawati Alisah, M.Pd	( )
2. Ketua	: Usman Pagalay,M. Si	( )
3. Sekretaris	: Wahyu Henky Irawan, M.Pd	( )
4. Anggota	: Ahmad Barizi, M.A	( )

Mengetahui dan mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M. Si
NIP. 150 318 321

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Syukur Alhamdulillah penulis haturkan kehadirat Allah SWT, yang telah melimpahkan segala rahmat, taufiq, hidayah dan inayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Penyelesaian Numerik Integral Lipat Dua dengan Menggunakan Integrasi Romberg Berbantuan Matlab”.

Shalawat serta salam senantiasa Penulis panjatkan kepada junjungan Nabi Besar Muhammad SAW, yang telah membimbing ke jalan yang Benar, yaitu jalan yang di Ridhai Allah SWT.

Dalam menyelesaikan skripsi ini, tentunya tidak lepas dari bantuan, dukungan, arahan, dan bimbingan dari berbagai pihak. Oleh sebab itu, pada kesempatan ini, penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang tak terhingga kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku rektor UIN Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., DSc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.
3. Sri Harini, M.Si, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.
4. Wahyu Henky Irawan, M.Pd, selaku Dosen Pembimbing Matematika yang telah memberikan pengarahan dan bimbingan kepada penulis sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan
5. Ahmad Barizi, M. A, selaku Dosen Pembimbing Kajian Keagamaan yang telah membimbing dan memberi masukan kepada penulis dalam penulisan kajian agama dalam skripsi ini.

6. Seluruh Dosen matematika yang senantiasa bersedia meluangkan waktu dalam membimbing penulis serta memberikan ilmunya dalam beberapa tahun ini.
7. Ayahanda M.Rofiudin, Ibunda Mujiatul Umah, adik Lail dan saudara-saudaraku yang selalu memberikan dukungan, semangat dan do'a yang tiada terkira.
8. Teman-teman matematika angkatan 2003 yang selalu siap membantu dan memotivasi penulis selama ini.
9. Semua pihak yang turut membantu dan mendampingi penulis selama ini, terima kasih banyak.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih banyak kekurangan dan kekhilafan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang bersifat mendidik dan membangun sebagai motivasi dalam penulisan skripsi ini sangat penulis harapkan.

Semoga hasil skripsi ini dapat memberikan manfaat kepada penulis khususnya dan pembaca pada umumnya. Semoga Allah senantiasa melimpahkan petunjuk dan rahmat-Nya kepada seluruh umat yang senantiasa mengharapkan ridho-Nya.

Malang, 27 Maret 2008

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR i

DAFTAR ISI iii

DAFTAR TABEL v

DAFTAR GAMBAR vi

ABSTRAK vii

BAB I: PENDAHULUAN 1

1.1 Latar Belakang 1

1.2 Rumusan Masalah 5

1.3 Batasan Masalah 6

1.4 Tujuan Penulisan 6

1.5 Manfaat Penulisan 6

1.6 Metode Penelitian 9

1.7 Sistematika Penulisan 7

BAB II: KAJIAN PUSTAKA 10

2.1 Metode Numerik 10

2.2 Integral Lipat Dua 17

2.3 Fungsi 19

2.3.1 Fungsi Aljabar 19

2.3.2 Fungsi Eksponen 19

2.4 Ekstrapolasi Richardson 20

2.5 Metode Romberg 25

2.5.1 Rumus Trapesium Rekursif 25

2.5.2 Aturan Simpson Rekursif 27

2.4.3 Aturan Boole Rekursif 29

2.4.4 Metode Romberg... 30

BAB III: PEMBAHASAN 35

3.1 Algoritma Integral Lipat Dua dengan Metode Romberg 35

3.1.1 Contoh Penyelesaian Integral Lipat Dua.................................. 37

3.2 Flowchart Integral Lipat Dua dengan Metode Romberg................... 44

3.3 Program Matlab dalam Menyelesaikan Integral Lipat Dua dengan Metode Romberg... 46

BAB IV: PENUTUP 61

4.1 Kesimpulan... 61

4.2 Saran.. 63

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Titik-titik di dalam selang [0, 1] dengan h = 0,125 22

Tabel 2.2 Proses Integrasi Romberg 32

Tabel 3.1 Selesaian Integrasi Pertama Romberg 41

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Penyelesaian permasalahan matematis..12

Gambar 3.1 Penyelesaian Integral Lipat dua dengan Metode Romberg.........45

ABSTRAK

Khasanah, Iswatul. 2008, **Penyelesaian Numerik Integral Lipat Dua Dengan Menggunakan Integrasi Romberg Berbantuan Matlab**, Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Malang
Pembimbing: Wahyu Henky Irawan, M. Pd dan Ahmad Barizi, M. A

Kata kunci: Metode numerik, Integral lipat, integrasi Romberg, Matlab

Penerapan integral dalam bidang sains dan rekayasa umumnya memiliki fungsi yang sulit diselesaikan secara analitik. Penyelesaian tersebut dapat di sederhanakan dan ditemukan selesaiannya dengan menggunakan metode numerik. Pemilihan selesaian dengan cara yang lebih mudah dianjurkan di dalam Al-Qur'an pada S. Al-Baqarah ayat 185, yaitu *Allah menghendaki kemudahan bagimu, dan tidak menghendaki kesukaran bagimu*. Dengan beragamnya metode dalam menyelesaikan integral secara numerik, maka metode yang digunakan harus memiliki ketelitian yang tinggi sehingga mampu memberikan hasil integrasi yang mendekati atau sama dengan nilai eksak. Berdasarkan hal tersebut maka rumusan masalah penelitian ini adalah bagaimana prosedur dan program penyelesaian numerik integral lipat dengan menggunakan metode Romberg. Dengan demikian tujuan penulisan ini adalah mendeskripsikan bagaimana prosedur dan program penyelesaian numerik integral lipat dengan menggunakan metode Romberg. Akan tetapi, penelitian ini memiliki batasan-batasan, yaitu terdiri dari dua variabel bebas yaitu x dan y, $f(x,y)$ merupakan fungsi aljabar dan fungsi eksponensial, batas integral lipat bernilai konstan $(a, b, c$ dan $d)$. Dan program yang digunakan adalah matlab 5.3.

Metode Romberg merupakan metode perbaikan dari metode trapesium. Hal tersebut didasarkan pada kesalahan pemotongan dari kaidah trapesium yang hampir sebanding dengan kuadrat lebar pias (h^2). Ketelitian dalam metode Romberg juga di dasarkan pada penggunaan ekstrapolasi Richardson. Dengan demikian, penghitungan integrasi fungsi dilakukan dengan dua cara perkiraan $I(h1)$ dan $I(h2)$ untuk memperoleh hasil yang lebih cermat $I = f\left[I(h_1), I(h_2)\right]$.

Penyelesaian integral lipat dua dengan metode Romberg yang menggunakan bantuan komputer berarti membuat suatu proses atau prosedur yang merupakan urutan dari langkah-langkah atau instruksi-instruksi dalam menyelesaikan integral lipat dua dengan metode Romberg. Hal tersebut meliputi algoritma, flowchart (bagan alir), pemeriksaan program, produksi dan interpretasi. Dalam penelitian ini, contoh yang diberikan penulis adalah fungsi aljabar yaitu $f(x,y) = 4xy^3$. Penyelesaian dilakukan secara analitis, metode Romberg manual dan metode Romberg komputasi.

Adapun langkah-langkah penyelesaian integral lipat dengan metode Romberg adalah (a) Mendefiniskan integran dan batas-batas integran, (b) menentukan banyaknya iterasi (N), (c) Pilih batas integran yang akan diselesaikan, (d) Hitung nilai h, (e) Hitung R(N,1) dengan menggunakan rumus trapesium, (f) Hitung R(r, s) dengan menggunakan metode Romberg, (g) Hasil (f) diintegrasikan lagi atau kembali ke langkah (d). (h) Hasil integrasi diperoleh pada baris dan

kolom terakhir. Hasil integrasi dari ketiga cara penyelesaian mempunyai hasil integrasi yang sama yaitu 160 satuan. Dengan bantuan program matlab, hasil integrasi diperoleh dalam waktu singkat yaitu 0,15 detik. Hal ini jauh lebih efisien bila dibandingkan dengan penghitungan secara analitis dan metode Romberg manual.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Penggunaan matematika dalam memecahkan suatu persoalan dalam kehidupan nyata yaitu dengan mengubah atau menyajikan masalah yang ada dalam suatu model atau konsep yang tepat. Pengubahan ini berarti menerjemahkan bahasa kehidupan nyata dan komponen-komponen yang ada pada suatu masalah ke dalam bahasa matematika yang dinyatakan dalam bentuk simbol-simbol. Hal tersebut merujuk pada ciri khas matematika yang bersifat abstrak dan menggunakan bahasa simbol.

Salah satu penyelesaian matematika yang dipilih penulis dalam penulisan karya ini adalah integral. Penerapan integral terdapat banyak ditemui dalam bidang sains dan rekayasa, seperti menghitung persamaan kecepatan dan mengukur fluks panas matahari. Contoh-contoh tersebut umumnya memiliki fungsi yang bentuknya rumit sehingga sukar diintegralkan secara analitik. Dalam hal demikian, penyelesaian tersebut sebenarnya dapat dicari dengan metode numerik, dimana penggunaan metodenya menghasilkan solusi hampiran yang memang tidak tepat sama dengan solusi sejati. Akan tetapi, kita dapat menentukan selisih antara keduanya (galat) sekecil mungkin.

Metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematik sehingga dapat dipecahkan dengan operasi hitungan atau aritmatika biasa (tambah, kurang, kali dan bagi) (Munir, 2003: 5).

Menyelesaikan permasalahan matematika dalam bentuk operasi hitung dan bilangan akan mempermudah dalam memperoleh hasil penyelesaian yang diinginkan. Hal ini sesuai dengan anjuran Allah, bahwa dalam melakukan sesuatu kerjakanlah yang dianggap mudah bagi kita karena Allah menghendaki kemudahan bagi kita dan tidak menghendaki kesukaran bagi kita, seperti dalam firman-Nya berikut ini:

يُرِيدُ ٱللَّهُ بِكُمُ ٱلْيُسْرَ وَلَا يُرِيدُ بِكُمُ ٱلْعُسْرَ ﴿١٨٥﴾

> *"Allah menghendaki kemudahan bagimu, dan tidak menghendaki kesukaran bagimu.(Qs. Al-Baqarah / 2: 185)".*

Dengan demikian, maka harapan penulis dengan menggunakan metode numerik dalam penyelesaian matematik pada penulisan skripsi ini adalah mempermudah penulis serta pengguna untuk menyelesaikan permasalahan matematis yang sulit diselesaikan secara analitik.

Proses hitungan metode numerik dapat dilakukan dengan menggunakan salah satu dari bentuk proses hitungan yang paling efisien dan memerlukan waktu hitung yang paling cepat. Operasi hitungan dalam metode numerik pada umumnya dilakukan dengan iterasi sehingga jumlah hitungan yang dilakukan banyak dan berulang-ulang. Oleh karena itu, diperlukan bantuan komputer untuk melaksanakan operasi hitungan tersebut. Komputer merupakan alat elektronik yang dapat beroperasi dengan kecepatan tinggi, menghasilkan hasil yang teliti, mampu menyimpan sejumlah besar keterangan dan melakukan serangkaian operasi yang panjang dan rumit.

Adapun langkah penyelesaian suatu persoalan dengan komputer dimulai dengan: (1) Pengenalan persoalan dan sasaran. Hal ini mencakup pemilihan pendekatan secara umum, penentuan kombinasi sasaran yang harus dipenuhi oleh sistem, dan penetapan kondisi yang diperlukan agar pemecahan persoalan dilakukan. (2) Uraian matematika, (3) Analisa numerik, (4) Program komputer. Prosedur numerik harus dinyatakan secara tepat dalam bentuk operasi komputer, pertama-tama operasi ditulis dalam bentuk grafik dalam suatu diagram balok. Prosedur harus dinyatakan dalam suatu "bahasa" yang dimengerti komputer. Selanjutnya dengan pedoman diagram tersebut dituliskan suatu program yang dimengerti mesin, (5) Pemeriksaan program, (6) Produksi, (7) Interpretasi (Djodjodihardjo, 1983: 99)

Bahasa pemrogaraman yang dipilih penulis untuk membantu penyelesaian penulisan ini adalah Matlab. Karena program ini cocok untuk analisis dan komputasi numerik.

Matlab (*Matrix Laboratory*) adalah bahasa canggih untuk komputasi tehnik. Di dalamnya terdapat kemampuan penghitungan visualisasi dan pemrograman dalam suatu lingkungan yang mudah untuk digunakan karena permasalahan dan pemecahannya dinyatakan dalam notasi matematika biasa (Aziz, 2006: 2). Hal tersebut memungkinkan penulis untuk memecahkan penyelesaian integral lipat dalam waktu yang singkat.

Penyelesaian integral dengan metode numerik ada beberapa macam seperti metode Trapesium, Simpson, Gauss kuadratur dan metode-metode lain yang berderajat lebih tinggi (didasarkan pada polinomial interpolasi newton's) yang bisa kita pelajari di buku-buku panduan seperti metode numerik dan analisis numerik. Akan tetapi, tentang bagaimana teknik penyelesaian integral lipat dengan menggunakan metode numerik jarang ditemui dan dipaparkan secara gamblang. Oleh sebab itu, penulis tertarik untuk meneliti tentang penyelesaian integral lipat khususnya integral lipat dua.

Jika fungsi yang diintegrasikan mempunyai satu variabel, proses disebut *Quadrature Mechanic*, dan bila fungsi mempunyai dua variabel bebas, proses disebut *Cubature Mechanic* (Nasution dan Zakaria, 2001:140).

Integral lipat dua (*double Integrals*) $\iint_R f(x,y)dxdy$ adalah integral fungsi *f(x,y)* pada daerah batas *R* dari bidang *xy* (Weber, 1999: 79).

Tafsiran geometri dari integral ganda adalah menghitung volume ruang di bawah permukaan kurva *f (x, y)* yang alasnya adalah berupa bidang yang dibatasi oleh garis-garis $x = a$, $x = b$, $y = c$ dan $y = d$. Volume benda yang berdimensi tiga adalah

V = luas alas x tinggi.

Solusi integral lipat dua diperoleh dengan melakukan integrasi dua kali. Pertama dalam arah *x* (dalam hal ini nilai, nilai *y* tetap) selanjutnya dalam arah *y* (dalam hal ini nilai, nilai *x* tetap), atau sebaliknya. Dalam arah *x* berarti kita menghitung luas alas benda, sedangkan dalam arah *y* berarti kita mengalikan alas dengan tinggi untuk memperoleh volume benda (Munir, 2003:316).

Adapun metode integrasi yang digunakan penulis untuk menyelesaikan integral lipat dua adalah integrasi Romberg. Hal tersebut didasarkan pada perolehan nilai integrasi yang semakin cermat bila dibandingkan dengan metode integrasi lainnya. Integrasi Romberg merupakan metode perbaikan dari metode integrasi numerik. Hal tersebut didasarkan pada kesalahan pemotongan dari metode trapesium yang besarnya hampir sebanding dengan kuadrat lebar pias (h^2).

Integrasi Romberg didasarkan pada perluasan ekstrapolasi Richardson, sehingga di dalamnya terdapat hitungan integrasi fungsi dengan dua cara perkiraan $I(h_1)$ dan $I(h_2)$ yang mengakibatkan order galat pada hasil selesaiannya naik sebesar dua. Apabila order galat naik maka nilai galat semakin kecil. Dan apabila nilai galat semakin kecil, maka nilai integrasi numeriknya akan dapat memberikan nilai yang mendekati atau sama dengan nilai eksak. Berdasarkan hal tersebut, maka harapan penulis dengan menggunakan integrasi Romberg dalam menyelesaikan integral lipat dua pada penulisan skripsi ini adalah integrasi Romberg mampu memperkecil kesalahan hitungan dan memungkinkan memberikan hasil yang mendekati nilai eksak (nilai sesungguhnya).

Dengan alasan tersebutlah, maka penulis tertarik untuk membuat skripsi ini dengan judul **"Penyelesaian Numerik Integral Lipat Dua Dengan Menggunakan Integrasi Romberg Berbantuan Matlab"**.

1.2 Rumusan Masalah

Dengan latar belakang di atas, maka rumusan masalah penulis adalah:

1. Bagaimana prosedur penyelesaian numerik integral lipat dua dengan menggunakan integrasi Romberg.
2. Bagaimana program penyelesaian numerik integral lipat dua dengan menggunakan integrasi Romberg.

1.3 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini penulis membatasi ruang lingkup permasalahan penelitian antara lain:

1. Penyelesaian integral lipat dibatasi pada dua variabel bebas yaitu x dan y.
2. $f(x,y)$ merupakan fungsi aljabar dan fungsi eksponensial.
3. Batas integral lipat bernilai konstan (a, b, c dan d).
4. Integrasi numerik yang dilakukan sampai iterasi ke-5.
5. Program yang digunakan adalah matlab 5.3.

1.4 Tujuan Penulisan

Adapun tujuan penulisan ini adalah:

1. Mendeskripsikan langkah-langkah penyelesaian numerik integral lipat dua dengan menggunakan integrasi Romberg.
2. Mendeskripsikan program penyelesaian numerik integral lipat dua dengan menggunakan integrasi Romberg.

1.5 Manfaat penulisan

1.5.1 Bagi Penulis

- Sebagai suatu bentuk partisipasi penulis dalam memberikan konstribusi terhadap pengembangan keilmuwan, khususnya dalam bidang metematika
- Sebagai suatu bentuk pengembangan dan pengaplikasian pengetahuan dan keilmuwan penulis, khususnya metode numerik dalam integral lipat.

1.5.2 Bagi Pembaca

- Sebagai motivasi kepada para pembaca agar dapat mempelajari dan mengembangkan matematika.

- Sebagai suatu tambahan pengetahuan bidang matematika khususnya metode numerik.

1.5.3 Bagi Lembaga

- Sebagai bahan pengembangan, perbaikan keilmuwan dan pemaduan sains dan teknologi.
- Sebagai bahan pustaka tentang mata kuliah metode numerik.

1.6 Metode Penelitian

1.6.1 Pendekatan penelitian

Metode penelitian yang digunakan penulis adalah studi literatur (perpustakaan). Penelitian perpustakaan bertujuan mengumpulkan data dan informasi dengan bantuan bermacam-macam materiil yang terdapat di ruang perpustakaan, seperti: buku-buku, majalah, dokumen, catatan dan kisah-kisah sejarah dan lain-lainnya (Mardalis, 2003:28).

1.6.2 Bahan Kajian

Karena metode kajian ini berupa studi literatur (kepustakaan), maka bahan kajian yang digunakan oleh penulis berupa literatur/ buku-buku yang berhubungan dengan penelitian ini yaitu analisis numerik, kalkulus peubah banyak, metode numerik, matlab, artikel dan lain-lainnya.

1.6.3 Pengumpulan data

Pengumpulan data adalah salah satu proses dari pengadaan data/informasi untuk keperluan penulisan. Pada tahap ini penulis memilih metode dokumentasi yaitu pengumpulan data yang dilakukan secara intensif, dengan cara mencari buku-buku yang berada di perpustakaan, memfotokopi berbagai dokumen yang berkaitan, internet dan konsultasi ke para pakar.

1.6.4 Analisis data

Setelah penulis mengumpulkan data kemudian dianalisis dengan cara kontens atau kajian isi. Menurut Kriopendorf (1980) kajian isi adalah kajian yang memanfaatkan seperangkat prosedur untuk menarik kesimpulan yang objektif dan sistematis. Adapun metode analisis penulis sebagai berikut:

1. Mencari dan memahami materi atau teori dasar yang berhubungan dengan integral lipat dua, integrasi Romberg, dan matlab.
2. Menyelesaikan integral lipat dua dengan integrasi Romberg.
3. Membuat algoritma penyelesaian numerik integral lipat dua dengan integrasi Romberg.
4. Memberikan contoh yang diselesaikan secara analitis, manual dan program selesaian integrasi Romberg.
5. Analisis hasil output dari ketiga cara tersebut.

1.6.5 Membuat kesimpulan

Kesimpulan merupakan gambaran ringkas dari pembahasan atas apa yang diteliti (penyelesaian numerik integral lipat dua dengan integrasi Romberg). Kesimpulan ini di dasarkan pada data yang telah dikumpulkan dan merupakan jawaban dari permasalahan yang dikemukakan.

1.6.6 Melaporkan (membuat laporan)

Langkah terakhir dari kegiatan penelitian adalah menyusun laporan penelitian tersebut.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi ini tersusun secara sistematis, maka penulis memberikan sistematika penulisan sebagai berikut:

Bab I : Pendahuluan.

Bab ini membahas tentang isi keseluruhan penulisan skripsi yang terdiri dari latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penulisan, manfaat penulisan, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II: Kajian Teori.

Bab ini memaparkan tentang teori-teori yang berhubungan dengan penulisan skripsi ini seperti metode numerik, integral lipat dua, integrasi Romberg, dan Matlab. Yang dimulai dengan deskripsi tentang metode numerik, definisi integral lipat dua, ekstrapolasi Richardson, metode Trapesium rekursif, metode Simpson rekursif, metode Boole rekursif, integrasi Romberg dan deskripsi tentang program Matlab.

Bab III: Pembahasan.

Bab ini memuat tentang penyelesaian integral lipat dua dengan metode Romberg, algoritmanya dan perbandingan hasil output pada fungsi yang dibahas secara rinci.

Bab IV: Penutup.

Bab ini merupakan bab terakhir yang didalamnya berisikan tentang kesimpulan dari pembahasan (Bab III) dan saran-saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Metode Numerik

Persoalan yang melibatkan model matematika banyak muncul dalam berbagai disiplin ilmu pengetahuan seperti dalam bidang fisika, kimia, ekonomi, atau pada persoalan rekayasa (*engineerring*), seperti teknik sipil, teknik mesin, teknik elektro dan lain sebagainya. Seringkali model matematika tersebut muncul dalam bentuk yang tidak ideal alias rumit. Model matematika yang rumit ini adakalanya tidak dapat diselesaikan dengan metode analitik yang secara umum untuk mendapatkan solusi sejatinya (*exact solution*) (Munir, 2003: 1). Untuk mengatasi masalah tersebut, digunakanlah metode numerik untuk menyelesaikan model matematika tersebut.

Dalam Metode numerik tidak mengutamakan diperolehnya jawaban eksak (tepat) dari persoalan yang sedang diselesaikan. Penyelesaian yang digunakan adalah penyelesaian pendekatan atau perkiraan. Walaupun demikian, hasil penyelesaian tersebut akan sangat membantu dalam menyelesaikan permasalahan matematis yang dihadapi pengguna.

Berbagai cara yang dilakukan dalam mencari suatu penyelesaian dari suatu persamaan itu diperbolehkan, asalkan penyelesaian yang dilakukan baik dan sesuai dengan aturan atau hukum dari metode yang digunakan. Hal ini sesuai dengan firman Allah dalam Qs. An-Nisâ’ ayat 62:

بِٱللَّهِ إِنۡ أَرَدۡنَآ إِلَّآ إِحۡسَٰنٗا وَتَوۡفِيقًا ﴿٦٢﴾

"Demi Allah, kami sekali-kali tidak menghendaki selain penyelesaian yang baik dan perdamaian yang sempurna (Qs. An-Nisâ'/ 4: 62)".

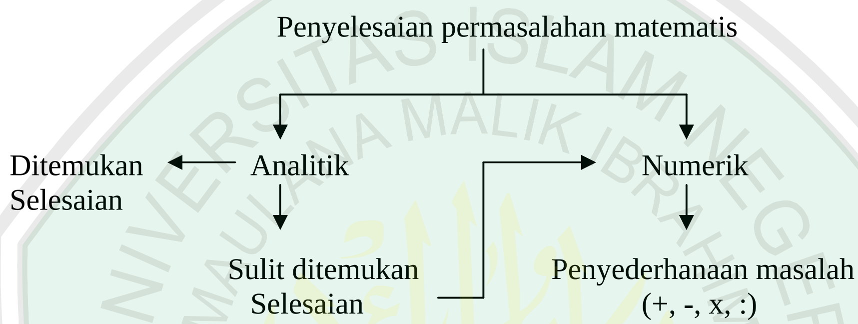
Metode numerik adalah teknik untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang diformulasikan secara matematis dengan cara operasi hitungan (*arithmatic*). Dalam metode numerik terdapat beberapa bentuk proses hitungan / algoritma untuk menyelesaikan suatu tipe persamaan matematis. Hitungan numerik dapat dilakukan dengan menggunakan salah satu dari bentuk proses hitungan yang paling efisien yang memerlukan waktu hitungan paling cepat. Operasi hitungan yang dilakukan dengan iterasi dalam jumlah yang sangat banyak dan berulang-ulang. Oleh karena itu, diperlukan komputer untuk melaksanakan operasi hitungan tersebut. Tanpa bantuan komputer metode numerik tidak banyak memberikan manfaat (Triatmodjo, 2002: 1).

Berdasarkan uraian di atas diketahui bahwa penyederhanaan metode numerik dalam menyelesaikan suatu masalah yaitu dengan diformulasikannya secara matematis permasalahan-permasalahan yang dihadapi dengan cara operasi hitungan seperti: penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian. Dengan hal tersebut, maka akan terjadi kemudahan dalam mencari penyelesaian suatu permasalahan yang sulit diselesaikan secara analitis. Peristiwa tersebut sebenarnya telah tersirat dalam Qs. Alam Nasyrah ayat 5 yang berbunyi:

فَإِنَّ مَعَ ٱلْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾

" Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan".

Dari ayat tersebut disebutkan bahwa sesudah mengalami kesulitan disitu ada kemudahan. Hal ini seperti dalam penyelesaian matematis yang sulit diselesaikan dengan analitis, akan terjadi kemudahan dalam menyelesaikannya dengan menggunakan metode numerik karena di dalamnya hanya mengandung operasi hitungan yang sederhana (*arithmatic*).



Gambar 2.1: Penyelesaian permasalahan matematis

Dengan demikian dalam menyelesaikan suatu permasalahan dianjurkan menggunakan cara yang tidak menimbulkan kesulitan bagi kita. Hal ini sesuai dengan anjuran Allah, bahwa dalam melakukan sesuatu kerjakanlah yang dianggap mudah bagi kita karena Allah menghendaki kemudahan bagi kita dan tidak menghendaki kesukaran bagi kita, seperti dalam firman-Nya berikut ini:

يُرِيدُ ٱللَّهُ بِكُمُ ٱلۡيُسۡرَ وَلَا يُرِيدُ بِكُمُ ٱلۡعُسۡرَ ﴿١٨٥﴾

"Allah menghendaki kemudahan bagimu, dan tidak menghendaki kesukaran bagimu" (Qs. al-Baqarah / 2: 185).

Penggunaan komputer dalam metode numerik antara lain untuk memprogram. Langkah-langkah metode numerik diformulasikan menjadi program komputer.

Program ditulis dengan bahasa pemrograman tertentu, seperti FORTRAN, PASCAL, C, C++, BASIC dan sebagainya (Munir, 2003: 9)

Dalam mempelajari metode numerik, atau menerapkannya, ada beberapa pemikiran dasar yang melandasinya, baik berupa manfaat (modal, asset) maupun kendala. Lima butir pokok pemikiran dasar diantaranya disampaikan berikut ini.

Pertama, perlu dipahami bahwa setiap perhitungan (*komputasi*) mempunyai tujuan, tetapi perlu diperhatikan adalah maksud utama dari perhitungan adalah penghayatan masalah, bukan hanya untuk memperoleh bilangan, dan untuk itu setidak-tidaknya harus diperolah bilangan yang tepat. Selajutnya, dalam melakukan perhitungan, hendaknya dipilih proses perhitungan atau algoritma yang efisien, yaitu yang memerlukan waktu penghitungan sependek mungkin.

Kedua, bila tujuan komputasi adalah penghayatan masalah, maka perlu dipelajari ciri kelompok masalah dan kaitan antara kelompok satu dengan yang lainnya, bilamana mungkin, dan rumus serta algoritma yang terlalu khusus sifatnya (atau dalam terminologi matematik), perlu dihindari.

Ketiga, menyangkut *galat (kesalahan) pembulatan*. Galat pembulatan timbul karena dalam aplikasinya, bilangan hanya dinyatakan dalam angka (digit) yang terbatas jumlahnya.

Keempat, menyangkut keterbatasan proses komputasi bila dilaksanakan oleh mesin. Karena kecepatan mesin mempunyai kecepatan terbatas, maka untuk selang waktu tertentu hanya dapat melakukan operasi komputasi yang terbatas jumlahnya. Oleh karena itu timbul *Galat (kesalahan) pemotongan*.

Kelima, umpan balik (*feedback*), bilangan yang dihasilkan pada satu tahap akan dipergunakan oleh komputer untuk komputasi tahap berikutnya. Suatu program komputasi akan mempunyai suau jalur ulang (*loop*) siklus selanjutnya (Joyodihardjo, 2000: 2).

Ada enam tahap yang dilakukan dalam pemecahan persoalan dunia nyata dengan metode numerik, yaitu:

1. Pemodelan

Ini adalah tahap pertama. Persoalan dunia nyata dimodelkan ke dalam persamaan matematika.

2. Penyederhaan model

Model matematika yang dihasilkan dari tahap 1 mungkin saja terlalu kompleks, yaitu memasukkan banyak peubah (variabel) atau parameter. Semakin kompleks model matematikanya, semakin rumit penyelesaiannya. Mungkin beberapa andaian dibuat sehingga beberapa parameter dapat diabaikan.

3. Formulasi numerik

Tahap selanjutnya adalah memformulasikanya secara numerik, antara lain:

a. menentukan metode numerik yang akan dipakai bersama-sama dengan analisis galat awal (yaitu taksiran galat, penentuan ukuran langkah dan sebagainya).

   Pemilihan metode didasari pada pertimbangan:

   - apakah metode tersebut teliti?
   - Apakah metode tersebut mudah diprogram dan waktu pelaksanaannya cepat?

- Apakah metode tersebut tidak peka terhadap perubahan data yang cukup kecil?

b. Menyusun algoritma dari metode numerik yang dipilih

4. Pemrograman

Tahap selanjutnya adalah menterjemahkan algoritma ke dalam program komputer dengan menggunakan salah satu bahasa pemrograman yang dikuasai.

5. Operasional

Pada tahap ini, program komputer dijalankan dengan data uji coba sebelum data yang sesungguhnya.

6. Evaluasi

Bila program sesudah selesai dijalankan dengan data yang sesungguhnya, maka hasil yang diperoleh diinterpretasi. Interpretasi meliputi analisis hasil *run* dan membandingkannya dengan prinsip dasar dan hasil-hasil empirik untuk menaksir kualitas solusi numerik, dan keputusan untuk menjalankan kembali program dengan untuk memperoleh hasil yang lebih baik.

(Munir, 2003: 11)

Pada umumnya metode numerik tidak mengutamakan diperolehnya jawaban eksak (tepat) dari persoalan yang sedang diselesaikan. Penyelesaian yang digunakan adalah penyelesaian pendekatan, oleh karena itu biasanya timbul eror (kesalahan).

Ada beberapa jenis error yang biasa terjadi dalam penghitungan analisa numerik, jenis- jenis error ini adalah:

1. *Truncation Error*

   Adalah error yang tejadi akibat penggunaan metode itu sendiri dalam menyelesaikan suatu persoalan matematika.

2. *Round-off Error*

   Adalah error yang terjadi akibat pembulatan suatu bilangan sampai pada beberapa digit tertentu.

3. Error pada data input (*error in original data*)

   Adalah error yang terjadi akibat gangguan yang ada pada data input yang akan diproses, atau adanya informasi tertentu yang tidak diketahui (unknown information) terikut dalam proses hitungan.

4. *Blunders* (*Gross Error*)

   Adalah eror yang terjadi akibat kesalahan manusia atau mesin hitung yang digunakan, error jenis ini bisa dikurangi dengan melakukan pekerjaan berulang-ulang dan memilih mesin hitung yang baik kualitasnya.

5. Kesalahan mutlak, Kesalahan relatif dan prosentase kesalahan

   - Kesalahan mutlak (*absolute error*)

     Adalah selisih dari nilai sebenarnya dengan nilai yang didapat dari perhitungan atau pengukuran.

   - Kesalahan relatif (*relative error*)

     Adalah kesalahan ,absolut dibagi dengan nilai sebenarnya.

   - Prosentase kesalahan

     Adalah besarnya relatif error dikalikan dengan 100%.

(Munif dan Hidayatullah, 2004: 4)

2.2 Integral lipat dua

Dalam bidang tehnik, integral sering muncul dalam bentuk integral ganda dua (atau lipat dua) atau integral ganda tiga (lipat tiga).

Persamaan integrasi lipat dua termasuk integrasi *Qubature mechanic*, dengan fungsi integran mempunyai dua variabel bebas. Integrasi dinyatakan sebagai:

$$I = \iint_A f(x,y)dA \quad \text{atau} \quad I = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy \quad = \int_a^b \left[\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dy \right] dx \qquad (2.1)$$

(Nasution dan Zakaria,2001: 140)

Tafsiran geometri dari integral ganda adalah menghitung volume ruang di bawah permukaan kurva *f(x,y)* yang alasnya adalah berupa bidang yang dibatasi oleh garis *x=a, x=b, y=c* dan *y=d*. Volume benda berdimensi tiga adalah

V = luas alas x tinggi

(Munir, 2003: 316).

Perhitungaan integral lipat paling mudah diselesaikan dengan integrasi parsial secara berturut-turut, yang merupakan kebalikan dari differensiasi parsial. Dengan demikian, untuk menghitung integral lipat, suatu fungsi dari dua variabel bebas diintegrasikan terhadap salah satu variabel bebas tadi sementara variabel yang lain dianggap konstan, hasil dari integrasi parsial ini kemudian diintegrasikan terhadap variabel bebas yang tadinya dianggap konstan. (Weber,1999: 79)

Dalam arah *x* berarti kita menghitung luas alas benda, sedangkan dalam arah *y* berarti kita mengalikan alas dengan tinggi untuk memperoleh volume benda (Munir, 2003: 316).

Dalam penulisan skripsi ini batas bawah dan batas atas merupakan bilangan real, sehingga dalam penyelesaiannya menjadi:

$$I = \iint_A f(x,y)dA \text{ atau } I = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx \right] dy \text{ atau } I = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx .$$

Dengan demikian, penyelesaiannya menghasilkan nilai integrasi dalam bentuk angka bukan fungsi.

Perhatikan Qs. Fushshilat ayat 12 berikut ini:

فَقَضَىٰهُنَّ سَبْعَ سَمَٰوَاتٍ فِى يَوْمَيْنِ وَأَوْحَىٰ فِى كُلِّ سَمَآءٍ أَمْرَهَا ۚ وَزَيَّنَّا
ٱلسَّمَآءَ ٱلدُّنْيَا بِمَصَٰبِيحَ وَحِفْظًا ۚ ذَٰلِكَ تَقْدِيرُ ٱلْعَزِيزِ ٱلْعَلِيمِ ﴿١٢﴾

"Maka Dia menjadikannya tujuh langit dalam dua masa. Dia mewahyukan pada tiap-tiap langit urusannya. Dan Kami hiasi langit yang dekat dengan bintang-bintang yang cemerlang dan Kami memeliharanya dengan sebaik-baiknya. Demikianlah ketentuan Yang Maha Perkasa lagi Maha Mengetahui" (Qs. Fushshilat / 41 : 12).

Bila Qs. Fushshilat ayat 12 di atas diintegrasikan dalam bahasa matematika, maka kita misalkan tujuh langit adalah fungsi (*f(x,y)*), dengan *x* dan *y* adalah langit, sedangkan dua masa menyatakan integral yang dilakukan dua kali. Dalam notasi matematika dapat di tulis sebagai berikut:

$$V = \iint_L 7dxdy$$

Proses penyelesaiannya yaitu dengan mencari nilai-nilai pada masing-masing masa untuk setiap langit, sehingga hasil penyelesaiannya yaitu tujuh langit dengan hiasan bintang-bintang yang gemerlapan.

2.3 Fungsi

Dalam sistem koordinat kartesius fungsi dapat dibagi menjadi 2 yaitu:

2.3.1 Fungsi Aljabar

Fungsi *f* disebut fungsi aljabar jika *f* dinyatakan sebagai jumlahan, selisih, hasil kali, hasil bagi, pangkat, ataupun akar fungsi-fungsi suku banyak.

Contoh:

$$f(x) = \frac{3x - x^2(x+1)^{2/3}}{\sqrt{x^2+1}}$$

Adapun fungsi suku banyak berderajat *n* mempunyai persamaan sebagai berikut:

$$f(x) = P_n(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$$

Dengan *n* bilangan bulat tak negatif, a_1, . . ., a_n adalah bilangan-bilangan real dan $a \neq 0$.

2.3.2 Fungsi Transenden

Fungsi yang bukan fungsi aljabar disebut fungsi transenden. Beberapa contoh fungsi transenden adalah fungsi trigonometri, fungsi logaritma, fungsi eksponensial, fungsi hiperbolik.

Pembahasan dalam skripsi ini berhubungan dengan fungsi eksponensial dan aljabar, sehingga penjabaran fungsi lebih difokuskan pada fungsi eksponensial dan aljabar.

Fungsi eksponen

Misal terdapat bilangan a>0. Selanjutnya fungsi *f* yang didefinisikan sebagai $f(x) = a^x$ disebut fungsi eksponensial dengan basis ***a*.**

Fungsi eksponen e^x

Fungsi yang mempunyai bentuk e^x disebut fungsi eksponen natural atau fungsi eksponen dengan basis e. Bilangan e adalah bilangan irasional yang besarnya adalah 2,7182818…

2.4 Ekstrapolasi Richardson

Pandang kaidah trapesium

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2\sum_{i=1}^{n} f_i + f_n \right) - \frac{(b-a)f''(t)}{12}h^2$$

yang dapat ditulis sebagai

$$\int_a^b f(x)dx = I(h) + Ch^2$$

Secara umum, kaidah integrasi dapat ditulis sebagai

$$\int_a^b f(x)dx = I(h) + Ch^q \qquad (2.2)$$

dengan *C* dan *q* adalah konstanta yang tidak begantung pada *h*. Nilai *q* dapat ditentukan langsung dari orde galat kaidah integrasi,misalnya

Kaidah trapesium, $O(h^2) \longrightarrow q = 2$

Kaidah titik tengah, $O(h^2) \longrightarrow q = 2$

Kaidah 1/3 simpson, $O(h^4) \longrightarrow q = 4$

Tujuan ekstrapolasi Richardson ialah menghitung nilai integrasi yang lebih baik (*improve*) dibandingkan dengan *I*. Misalkan *J* adalah nilai integasi yang lebih baik daripada *I* dengan jarak antar titik adalah *h*:

$$J = I(h) + Ch^q \qquad (2.3)$$

Ekstapolasikan *h* menjadi *2h*, lalu hitung integrasi numeriknya

$$J = I(2h) + C(2h)^{q} \qquad (2.4)$$

Eliminasikan *C* dari kedua persamaan dengan menyamakan persamaan (2.3) dan persamaan (2.4):

$$I(h) + Ch^{q} = I(2h) + C(2h)^{q} \qquad (2.5)$$

Sehingga diperoleh

$$C = \frac{I(h) - I(2h)}{(2^{q} - 1)h^{q}} \qquad (2.6)$$

Sulihkan (2.6) ke dalam (2.3) untuk memperoleh

$$J = I(h) + \frac{I(h) - I(2h)}{2^{q} - 1} \qquad (2.7)$$

Yang merupakan persamaan ekstrapolasi Richardson. Ekstapolasi Richadson dapat kita artikan sebagai berikut:

> Mula-mula hitunglah nilai integrasi dengan kaidah yang sudah baku dengan jarak antar titik selebar *h* untuk mendapatkan *I(h)*, kemudian hitung kembali nilai integrasi dengan jarak antar titik selebar *2h* untuk mempeoleh *I(2h)*. akhirnya,hitung nilai integrasi yang lebih baik dengan menggunakan persamaan (2.7).

Contoh 2.3.1

Hitung kembali integral

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{1+x}dx$$

Dengan menggunakan ekstrapolasi Richardson, yang dalam hal ini *I(h)* dan *I(2h)* dihitung dengan kaidah trapesium dan *h*= 0,125

Penyelesaian:

Jumlah selang *n=(1 – 0)/0,125 = 8*

Tabel 2.2: Titik-titik di dalam selang [0, 1] dengan *h = 0,125*:

r	x_r	f_r
0	0	1
1	0,125	0,88889
2	0,250	0,80000
3	0,375	0,72727
4	0,500	0,66667
5	0,625	0,61538
6	0,750	0,57143
7	0,875	0,53333
8	1,000	0,5000

I(h) adalah nilai integrasi dengan kaidah trapesium menggunakan h=0,125:

$$I(h) = \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx = h/2\left(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 2f_4 + 2f_5 + 2f_6 + 2f_7 + f_8\right)$$

= 0,125/2 (1 + 2(0,88889) + 2(0,80000) + 2(0,72727) + 2(0,66667) +

2(0,61538) + 2(0,57143) + 2(0,53333) + 0,5000)

= 0,69412

I(2h) adalah nilai integrasi dengan kaidah trapesium menggunakan *2h = 0,250*

$$I(2h) = \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx = 2h/2\left(f_0 + 2f_2 + 2f_4 + 2f_6 + f_8\right)$$

= 0,250/2 (1 + 2(0,80000) + 2(0,66667) + 2(0,57143) + 0,5000)

= 0,69702

Nilai integrasi yang lebih baik *J*, diperoleh dengan ekstrapolasi Richardson:

$$J = I(h) + \frac{I(h) - I(2h)}{2^q - 1}$$

yang dalam hal ini, q = 2, karena *I(h)* dan *I(2h)* dihitung dengan kaidah trapesium (yang mempunyai orde galat = 2)

$$J = 0{,}69412 + \frac{0{,}69412 - 0{,}69702}{2^2 - 1} = 0{,}69315$$

Jadi, taksiran nilai integrasi yang lebih baik adalah 0,69315. Bandingkan dengan nilai integrasi sejatinya:

$$I(2h) = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \ln(1+x)\Big|_{x=0}^{x=1} = \ln(2) - \ln(1) = 0{,}69314718$$

yang apabila dibulatkan ke dalam 5 angka bena. f(0,69314718) = 0,69315. Hasilnya tepat sama dengan nilai integrasi yang dihitung dengan ekstrapolasi Richardson.

(Munir, 2003: 303)

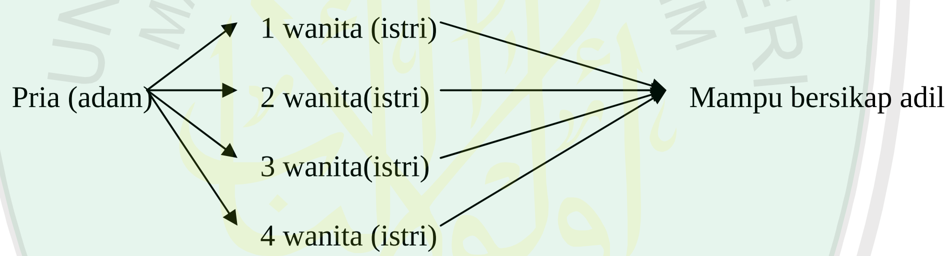
Berdasarkan uraian di atas, diketahui bahwa penerapan Ekstrapolasi Richardson dalam suatu metode adalah untuk memperkecil kesalahan metode trapesium. Hal tersebut dimaksudkan untuk memperoleh nilai perkiraan yang mendekati nilai eksak. Dengan demikian, penggunaan ekstrapolasi Richardson dapat dikatakan sebagai alternatif atau pilihan yang lebih baik dari metode sebelumnya.

Dari uraian tersebut, dapat diilustrasikan terhadap fenomena pernikahan suatu kaum (adam) yang hendak memiliki istri lebih dari satu, seperti yang terdapat dalam firman Allah Swt. Berikut ini:

وَإِنْ خِفْتُمْ أَلَّا تُقْسِطُوا۟ فِى ٱلْيَتَـٰمَىٰ فَٱنكِحُوا۟ مَا طَابَ لَكُم
مِّنَ ٱلنِّسَآءِ مَثْنَىٰ وَثُلَـٰثَ وَرُبَـٰعَ ۖ فَإِنْ خِفْتُمْ أَلَّا تَعْدِلُوا۟ فَوَٰحِدَةً أَوْ
مَا مَلَكَتْ أَيْمَـٰنُكُمْ ۚ ذَٰلِكَ أَدْنَىٰٓ أَلَّا تَعُولُوا۟ ﴿٣﴾

"Dan jika kamu takut tidak akan dapat berlaku adil terhadap (hak-hak) perempuan yang yatim (bilamana kamu mengawininya), maka kawinilah wanita-wanita (lain) yang kamu senangi : dua, tiga atau empat. Kemudian jika kamu takut tidak akan dapat berlaku adil, maka (kawinilah) seorang saja, atau budak-budak yang kamu miliki. Yang demikian itu adalah lebih dekat kepada tidak berbuat aniaya (Qs. An-Nisâ' / 4 : 3)."

Dari ayat tersebut di atas, maka dapat digambarkan sebagai berikut:



Suatu kaum (adam) yang memiliki keinginan untuk menikah, dianjurkan untuk menikah satu wanita saja, akan tetapi apabila ada pertimbangan lain yang hal tersebut baik secara agama, maka diperbolehkan menikah dengan dua, tiga atau empat wanita lain yang disenangi. Dengan pertimbangan bahwa kaum (adam) tersebut mampu berlaku adil. Dan apabila ia tidak mampu melakukannya, maka dianjurkan dia menikah dengan seorang wanita saja. Dan hal tersebut merupakan keputusan terbaik bagi dirinya.

Dengan demikian, dapat di katakan bahwa dalam menentukan suatu penyelesaian yang terdapat beragam cara penyelesaiannya. Dianjurkan bagi kita untuk memilih suatu penyelesaian yang terbaik, seperti: pemilihan penggunaan ekstrapolasi Richardson dalam penyelesaian integral numerik.

2.5 Metode Romberg

Berdasarkan rumusan ekstrapolasi, Romberg menghitung integrasi fungsi dengan dua cara perkiraan *I(h$_1$)* dan *I(h$_2$)* untuk memperoleh hasil yang lebih cermat $I = f\left[I(h_1), I(h_2)\right]$ (Nasution dan Zakaria, 2001: 160). Metode ini dipakai untuk evaluasi numerik dari integral tentu, misalnya penggunaan aturan trapesium.

2.5.1 Rumus Trapesium Rekursif

Teorema 2.1

Misalkan f adalah suatu fungsi yang terdefinisi pada [a , b] dan h = (b – a). Untuk n = 1, 2, 4, 8, 10,... atau untuk $n = 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, ..., 2^k, ...$ *kita definisikan barisan aturan trapesium*

$$T_0, T_1, T_2, ..., T_k, ...$$

dengan

$$T_0 = T_1(f, h) = \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b)\right) \quad dan \quad T_k = T_{2^k}\left(f, \frac{h}{2^k}\right) \quad k = 1, 2, 3, ...$$

Barisan aturan trapesium tersebut memenuhi hubungan

$$T_{k+1} = \frac{T_k}{2} + \frac{h}{2^{k+1}} \sum_{j=1}^{2^k} f_{2j-1}, \text{ dengan } f_i = f\left(a + i\frac{h}{2^{k+1}}\right) \qquad (2.8)$$

Bukti:

Misalkan *f* adalah suatu fungsi yang terdefinisi pada [a, b].

Misalkan $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ suatu partisi [a, b] sedemikian hingga $x_k = x_0 + kh$ dengan h = (b – a)/n untuk k = 0, 1, 2, 3,..., n.

Berdasarkan rumusan ekstrapolasi Richardson, maka integrasi fungsi dilakukan dengan menghitung dua cara perkiraan $I(h_1)$ dan $I(h_2)$.

T_n adalah barisan aturan trapesium dan n = 1, 2, 4, 8, 16, . . . atau $n = 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, ..., 2^k, ...,$ maka

Pertama; T_n dengan lebar setiap subinterval adalah h, maka di dapat

$$T_n(f, h) = \frac{h}{2}\{f_0 + 2f_1 + 2f_2 + ... + 2f_{n-1} + f_n\}$$

$$= \frac{h}{2}\{f_0 + f_1\} + h\{f_1 + f_2 + ... + f_{n-1}\}$$

$$= \frac{h}{2}\{f_0 + f_1\} + h\sum_{k=1}^{n-1} f_k \qquad (2.9)$$

Kedua, jika lebar setiap subinterval diperkecil separohnya, maka didapat

$$T_{2n}(f, \tfrac{h}{2}) = \frac{h}{4}\{f_0 + f_{2n}\} + \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{2n-1} f_k \qquad (2.10)$$

$$= \frac{h}{4}\{f_0 + f_{2n}\} + \frac{h}{2}\sum_{j=1}^{n-1} f_{2j} + \frac{h}{2}\sum_{j=1}^{n} f_{2j-1}$$

$$= \frac{T_n(f, h)}{2} + \frac{h}{2}\sum_{j=1}^{n} f_{2j-1} \qquad (2.11)$$

Pada (2.9) berlaku $f_k = f(x_0 + kh)$, sedangkan pada (2.10) berlaku $f_k = f(x_0 + kh/2)$, sehingga f_{2k} pada (2.10) sama dengan f_k pada persamaan (2.9). Rumus (2.11) disebut rumus trapesium rekursif.

Rumus ini memungkinkan penggunaan aturan trapesium majemuk secara efisien, dengan tanpa harus menghitung ulang nilai-nilai fungsi di beberapa absis yang sudah dihitung sebelumnya.

Dalam menghitung hampiran $\int_a^b f(x)\,dx$ dengan aturan trapesium rekursif, di lakukan langkah-langkah sebagai berikut.

$$h = b - a$$

$$T_0 = \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

$$T_1 = \frac{T_0}{2} + \frac{h}{2} f_1$$

$$T_2 = \frac{T_1}{2} + \frac{h}{4}(f_1 + f_3)$$

$$T_3 = \frac{T_1}{2} + \frac{h}{8}(f_1 + f_3 + f_5 + f_7)$$

$$\vdots$$

$$T_n = \frac{T_{n-1}}{2} + \frac{h}{2^n}\sum_{j=1}^{2^{n-1}} f_{2j-1}$$

(Sahid, 2004: 297)

2.5.2 Aturan Simpson Rekursif

Teorema 2.2

Misalkan $\{T_n : n = 0,1,2,3,...\}$ *adalah barisan aturan trapesium majemuk yang dihasilkan dengan aturan pada Teorema 2.1, dan* S_n *adalah aturan Simpson* *majemuk untuk fungsi f dengan* 2^n *subinterval pada interval [a, b]. Hubungan antara aturan Simpson majemuk dan aturan trapesium majemuk adalah*

$$S_n = \frac{4T_n - T_{n-1}}{3}, \qquad \text{untuk } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.12}$$

Bukti:

Berdasarkan aturan trapesium rekursif pada Teorema 2.1, maka aturan Simpson rekursif dengan menggunakan ekstrapolasi Richardson adalah

$$S_n = T_n + \frac{T_n - T_{n-1}}{2^q - 1}$$

karena aturan trapesium memiliki orde galat senilai 2 ($q = 2$), maka diperoleh

$$S_n = T_n + \frac{T_n - T_{n-1}}{2^2 - 1}$$

$$= T_n + \frac{T_n - T_{n-1}}{3}$$

$$= \frac{3T_n}{3} + \frac{T_n - T_{n-1}}{3}$$

$$S_n = \frac{4T_n - T_{n-1}}{3} \tag{2.13}$$

Rumus (2.13) adalah aturan Simpson rekursif. Rumus ini memungkinkan penggunaan aturan Simpson rekursif secara efisien, dengan tanpa harus menghitung ulang nilai-nilai fungsi di beberapa absis yang sudah dihitung sebelumnya. Jadi, teorema di atas terbukti.

2.5.3 Aturan Boole Rekursif

Teorema 2.3

Misalkan $\{S_n : n = 1,2,3,...\}$ *adalah barisan antara Simpson majemuk yang dihasilkan dengan aturan Teorema 2.2. Misalkan* B_n *adalah aturan Boole majemuk untuk fungsi f dengan* 2^n *sub interval sama panjang interval [a, b], yakni*

$$B_n = \frac{2h}{45 \times 2^n} \sum_{k=1}^{2^n/4} \left(7 f_{4k-4} + 32 f_{4k-3} + 12 f_{4k-2} + 32 f_{4k-1} + 7 f_{4k}\right) \quad (2.14)$$

dengan $h = b - a$ *dan* $f_i = f\left(a + \frac{ih}{2^n}\right)$.

Hubungan antara aturan Boole majemuk dan aturan Simpson majemuk adalah

$$B_n = \frac{16S_n - S_{n-1}}{15}, \quad \textit{untuk } n = 2, 3, 4, ... \qquad (2.15)$$

Bukti:

Dengan rumusan ekstrapolasi Richardson, maka aturan Boole rekursif dengan menggunakan aturan Simpson rekursif adalah

$$B_n = S_n + \frac{S_n - S_{n-1}}{2^q - 1}$$

karena aturan trapesium memiliki orde galat senilai 2 (q = 4), maka diperoleh

$$B_n = S_n + \frac{S_n - S_{n-1}}{2^4 - 1}$$

$$= S_n + \frac{S_n - S_{n-1}}{15}$$

$$= \frac{15S_n}{15} + \frac{S_n - S_{n-1}}{15}$$

$$B_n = \frac{16S_n - S_{n-1}}{15} \qquad (2.16)$$

Rumus (2.16) adalah aturan Boole rekursif. Rumus ini memungkinkan penggunaan aturan Boole rekursif secara efisien, dengan tanpa menghitung integrasi dengan menggunakan rumus kuadratur yang cukup panjang dan tanpa harus menghitung ulang nilai-nilai fungsi di beberapa absis yang sudah dihitung sebelumnya. Jadi, teorema di atas terbukti.

2.5.4 Metode Romberg

Pada proses integrasi Romberg, mula-mula hitung kuadratur dengan lebar langkah *h* dan *2h*. Untuk menurunkan galat hampiran integral dari $O(h^{2n})$ menjadi $O(h^{2n+2})$ dapat digunakan ekstrapolasi Richardson, seperti dinyatakan dalam teorema berikut ini.

Teorema 2.4

Jika diketahui dua buah hampiran $R_k(f,h)$ *dan* $R_k(f,2h)$ *untuk nilai Q yang memenuhi*

$$Q = R_k(f,h) + c_1 h^{2k} + c_2 h^{2k+2} + \ldots$$

dan

$$Q = R_k(f,2h) + c_1 4^k h^{2k} + c_2 4^{k+1} h^{2k+2} + \ldots$$

maka

$$Q = \frac{4^k R_k(f,h) - R_k(f,2h)}{4^k - 1} + O(h^{2k+2}) \qquad (2.16)$$

Bukti:

Misalkan Q adalah nilai integrasi romberg dengan jarak antar titik adalah *h*:

$$Q = R_k(f,h) + c_1 h^{2k} + c_2 h^{2k+2} + \ldots \qquad (2.17)$$

Ekstrapolasikan *h* menjadi 2h, lalu hitung integrasi numeriknya

$$Q = R_k(f,2h) + c_1 4^k h^{2k} + c_2 4^{k+1} h^{2k+2} + \ldots \qquad (2.18)$$

Eliminasikan C dari kedua persamaan dengan menyamakan persamaan (2.17) dan persamaan (2.18):

$$R_k(f,h) + c_1 h^{2k} + c_2 h^{2k+2} + \ldots = R_k(f,2h) + c_1 4^k h^{2k} + c_2 4^{k+1} h^{2k+2} + \ldots$$

$$R_k(f,h) - R_k(f,2h) = c_1 h^{2k}(4^k - 1) + \ldots$$

Sehingga diperoleh

$$c_1 = \frac{R(f,h) - R(f,2h)}{(4^k - 1)h^{2k}} \qquad (2.19)$$

Sulihkan (2.19) ke dalam persamaan (2.17) untuk memperoleh

$$Q = R_k(f,h) + \frac{R_k(f,h) - R_k(f,2h)}{4^k - 1} + O(h^{2k+2}) \qquad (2.20)$$

Persamaan (2.20) merupakan integrasi Romberg. Jadi teorema di atas terbukti.

Jika teorema di atas didefinisikan dalam barisan kuadratur $\{R(i,j) : i \geq j, j = 1,2,3,\ldots\}$ untuk hampiran integral *f(x)* pada [a, b] sebagai

$R(i,1) = T_{i-1}, i \geq 1$ (barisan aturan trapesium majemuk) (2.21)

$R(i,2) = S_{i-1}, i \geq 2$ (barisan aturan Simpson majemuk) (2.22)

$R(i,2) = B_{i-1}, i \geq 2$ (barisan aturan Boole majemuk) (2.23) maka integrasi Romberg untuk meningkatkan keakuratan hampiran integral dapat ditulis sebagai

Integrasi Romberg dengan Ekstrapolasi Richardson

$$R(j,k) = \frac{4^{k-1}R(j,k-1) - R(j-1,k-1)}{4^{k-1}-1} \qquad (2.24)$$

Untuk $2 \leq k \leq j$*, dengan nilai awal adalah kuadratur trapesium*

$$R(1,1) = T_0 = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)).$$

Algoritma Romberg menghasilkan suatu jajaran bilangan segitiga, yang semuanya merupakan nilai-nilai hampiran integral sebuah fungsi *f(x)* pada interval [a, b]. Jajaran (*array*) tersebut tampak seperti tabel 2.3

Tabel 2.3 Proses Integrasi Romberg

R(1, 1)					
R(2, 1)	R(2, 2)				
R(3, 1)	R(3, 2)	R(3, 3)			
R(4, 1)	R(4, 2)	R(4, 3)	R(4, 4)		
R(5, 1)	R(5, 2)	R(5, 3)	R(5, 4)	R(5, 5)	
:	:	:	:	:	
R(N, 1)	R(N, 2)	R(N, 3)	R(N, 4)	. . .	R(N,N)

(Sahid, 2004: 300)

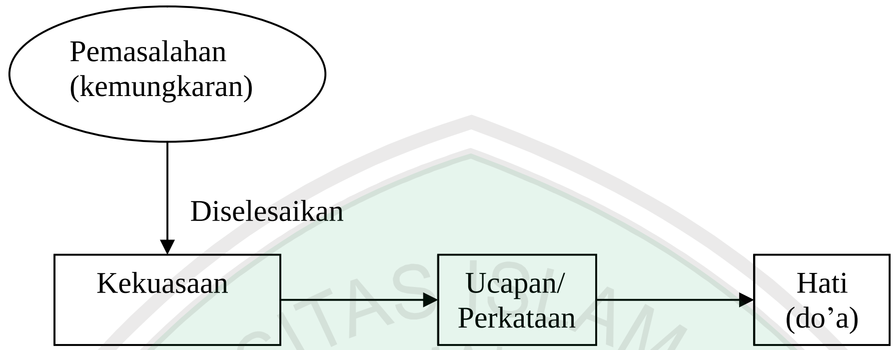
Kolom pertama pada tabel tersebut memuat hampiran integral tentu dengan menggunakan aturan trapesium rekursif. Kolom kedua merupakan hampiran integral yang sama dengan aturan Simpson rekursif (perbaikan pertama). Kolom ketiga merupakan hampiran integral yang sama dengan aturan Boole rekursif (perbaikan kedua). Kolom keempat merupakan merupakan perbaikan ketiga. Demikian seterusnya.

Perhatikan hadits Muslim berikut:

حَدَّثَنَا أَبُو بَكْرِ بْنُ أَبِي شَيْبَةَ حَدَّثَنَا وَكِيعٌ عَنْ سُفْيَانَ ح و حَدَّثَنَا مُحَمَّدُ بْنُ
الْمُثَنَّى حَدَّثَنَا مُحَمَّدُ بْنُ جَعْفَرٍ حَدَّثَنَا شُعْبَةُ كِلَاهُمَا عَنْ قَيْسِ بْنِ مُسْلِمٍ عَنْ
طَارِقِ بْنِ شِهَابٍ وَهَذَا حَدِيثُ أَبِي بَكْرٍ قَالَ أَوَّلُ مَنْ بَدَأَ بِالْخُطْبَةِ يَوْمَ الْعِيدِ
قَبْلَ الصَّلَاةِ مَرْوَانُ فَقَامَ إِلَيْهِ رَجُلٌ فَقَالَ الصَّلَاةُ قَبْلَ الْخُطْبَةِ فَقَالَ قَدْ تُرِكَ
مَا هُنَالِكَ فَقَالَ أَبُو سَعِيدٍ أَمَّا هَذَا فَقَدْ قَضَى مَا عَلَيْهِ سَمِعْتُ رَسُولَ اللَّهِ
صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ يَقُولُمَنْ رَأَى مِنْكُمْ مُنْكَرًا فَلْيُغَيِّرْهُ بِيَدِهِ فَإِنْ لَمْ يَسْتَطِعْ
فَبِلِسَانِهِ فَإِنْ لَمْ يَسْتَطِعْ فَبِقَلْبِهِ وَذَلِكَ أَضْعَفُ الْإِيمَانِ حَدَّثَنَا أَبُو كُرَيْبٍ مُحَمَّدُ
بْنُ الْعَلَاءِ حَدَّثَنَا أَبُو مُعَاوِيَةَ حَدَّثَنَا الْأَعْمَشُ عَنْ إِسْمَعِيلَ بْنِ رَجَاءٍ عَنْ أَبِيهِ
عَنْ أَبِي سَعِيدٍ الْخُدْرِيِّ وَعَنْ قَيْسِ بْنِ مُسْلِمٍ عَنْ طَارِقِ بْنِ شِهَابٍ عَنْ أَبِي
سَعِيدٍ الْخُدْرِيِّ فِي قِصَّةِ مَرْوَانَ وَحَدِيثِ أَبِي سَعِيدٍ عَنْ النَّبِيِّ صَلَّى اللَّهُ
عَلَيْهِ وَسَلَّمَ بِمِثْلِ حَدِيثِ شُعْبَةَ وَسُفْيَانَ

"*Diberitakan kepada kami dari Abu Bakri bin Abi Syaibah diberitakan kepada kami dari Waki' dari Sufyan dan dikabarkan kepada kami dari Muhammad bin Musanna dikabarkan kepada kami dari muhammad bin Ja'far diberitatakan kepada kami dari Syu'bah sebagaimana dari keduanya dari Qois bin Muslim dari Thariq bin Syihab dan hadits ini dari Abi Bakr, ia berkata: pertama seseorang memulai khutbah pada hari Id sebelum sholat maka Marwan berdiri kepada seseorang dan berkata: " Sholat itu sebelum khutbah", maka kemudian ia berkata: " sungguh tinggalkanlah apa-apa yang ada pada kamu", maka Abu Said berkata"adapun permasalahan ini telah sampai ke telinga Rasulullah Saw kemudian Rosulullah bersabda: " Barang siapa diantara kamu meliht suatu kemungkaran, maka rubahlah dengan kekuasaan, jik tidak bisa rubahlah dengan ucapan atau perkataan, dan jika tidak bisa maka cukup dengan hati (do'a) dan ini adalah serendah-rendahnya iman". Dikabarkan kepada kami dari Abu Quraib Muhammad bin Ala' diberitakan kepada kami dari Abu Muawiyah diberitakan kepada kami dari A'Masy dari Ismail bin Raja dari bapaknya dari Abi Said Al-Khudri dan dari Qois bin Muslim dari Thariq bin Syihab dari Abi Said Al-Khudri sebagaimana dikisahkan oelh Marwan dan hadits atau berita dari Abi Said dari Nabi Muhammad Saw dengan hadits yang sama dari Syu'bah dan sufyan.*

Dari hadits di atas, maka dapat digambarkan sebagai berikut:



Dalam hadits di atas, kita dapat memisalkan kemungkaran adalah integrasi numerik dengan metode Trapesium (T_n), kekuasaan adalah metode Simpson (S_n), ucapan atau perkataan adalah metode Boole dan hati (do'a) adalah metode Romberg $\left(R_{(n,n)}\right)$.

Bila dalam kehidupan sehari-hari, kita dapat mengilustrasikannya sebagai berikut: manusia merupakan makhluk yang paling sempurna dan mulia di dunia ini, karenanya manusia dijadikan sebagai khalifah. Dengan tugas tersebut maka seharusnya manusia mampu menghadapi kemungkaran di dunia ini. Kemungkaran tersebut dapat di atas dengan (1) Kekuasaan, bila dengan cara pertama kemungkaran masih belum teratasi, maka kita dapat melakukan perbaikan penyelesaian dengan cara kedua yaitu, (2) Ucapan atau perkataan, dan apabila masih belum berhenti kemungkaran yang dilakukan, maka kita dapat melakukan penyelesaian yang terakhir dan baik yaitu, (3) Hati (do'a).

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Algoritma Integral Lipat Dua Dengan Metode Romberg

Dalam menyelesaikan suatu masalah yang menggunakan bantuan komputer, pemakai (*user*) diharapkan mampu membuat suatu proses atau prosedur yang merupakan urutan dari langkah-langkah atau instruksi-instruksi dalam menyelesaikan suatu permasalahan.

Menurut Yulikispartono (2004: 12), sebuah algoritma pada hakikatnya merupakan suatu prosedur yang tepat untuk dapat memecahkan masalah dengan menggunakan bantuan komputer serta suatu bahasa pemrograman.

Berdasarkan hal tersebut, maka langkah awal penulis adalah membuat algoritma dalam menyelesaikan integral lipat dua dengan metode Romberg.

a. Mendefinisikan integran dan batas-batas integran.
b. Tentukan banyaknya iterasi (N).
c. Pilih batas integran yang akan diselesaikan terlebih dahulu.
d. Bila batas yang dipilih *x*, maka hitung

$$h = x_2 - x_1$$

   Bila batas yang dipilih *y*, maka hitung

$$h = y_2 - y_1$$

e. Bila batas yang dipilih *x*, maka hitung

$$R(1,1) = T_0 = \frac{h}{2}\left(f(x_1, y) + f(x_2, y)\right)$$

Bila batas yang dipilih *y*, maka hitung

$$R(1,1) = T_0 = \frac{h}{2}\left(f(x, y_1) + f(x, y_2)\right)$$

f. Apabila batas yang dipilih *x*:

Hitung $R(2,1) = T_k = \frac{T_0}{2} + \frac{h}{2} f_i$ dimana $f_i = f\left(x_1 + i.\frac{h}{2^k}\right)$ dan

k = 1, 2, 3, …

Apabila batas yang dipilih *y*:

Hitung $R(2,1) = T_k = \frac{T_0}{2} + \frac{h}{2} f_i$ dimana $f_i = f\left(y_1 + i.\frac{h}{2^k}\right)$ dan

k = 1, 2, 3, …

g. Apabila batas yang dipilih *x*:

Hitung $R(r,1) = T_{k+1} = \frac{T_k}{2} + \frac{h}{2^{k+1}} \sum_{j=1}^{2^k} f_{2j-1}$ dimana $f_i = f\left(x_1 + i.\frac{h}{2^{k+1}}\right)$

dan $f_{2j-1} = f_i$.

Apabila batas yang dipilih *y*:

Hitung $R(r,1) = T_{k+1} = \frac{T_k}{2} + \frac{h}{2^{k+1}} \sum_{j=1}^{2^k} f_{2j-1}$ dimana $f_i = f\left(y_1 + i.\frac{h}{2^{k+1}}\right)$

dan $f_{2j-1} = f_i$.

h. Hitungan selanjutnya dengan menggunakan metode Romberg

$$R(r, s) = \frac{4^{s-1}.R(r, s-1) - R(r-1, s-1)}{4^{s-1} - 1} \qquad \text{untuk } 2 \le s \le r .$$

i. Hasil integrasi pertama (h) dari metode Romberg diintegralkan lagi atau kembali ke langkah c sampai h.

j. Hasil integral lipat dua dengan metode Romberg.

3.1.1 Contoh Penyelesaian Integral Lipat Dua.

Selesaikan integral lipat dua berikut.

$$\iint_D 4xy^3 dA \text{, D = } \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 3\}$$

a. Secara Analitis;

$$\int_0^2 \int_{-1}^3 4xy^3 dydx = \int_0^2 \left[\int_{-1}^3 4xy^3 dy \right] dx \qquad \text{(diintegrasikan terhadap } y \text{)}$$

$$= \int_0^2 \left[4x.\frac{1}{4} y^4 \Big|_{-1}^{3} \right] dx$$

$$= \int_0^2 \left[x.y^4 \Big|_{-1}^{3} \right] dx$$

$$= \int_0^2 \left[x(3)^4 - x(-1)^4 \right] dx$$

$$= \int_0^2 [81x - x] dx$$

$$= \int_0^2 80xdx$$

$$= \frac{80}{2} x^2 \Big|_0^2$$

$$= 40x^2 \Big|_0^2$$

$$= 40(2)^2 - 40(0)^2$$

$$= 160$$

Jadi, penyelesaian integral lipat dua dari $f(x, y) = 4xy^3$ adalah 160 satuan.

b. Secara Numerik dengan menggunakan metode Romberg;

$$\iint_D 4xy^3\,dA \text{, D = } \{(x, y) \mid 0 \le x \le 2, -1 \le y \le 3\}$$

1) Integran yang diselesaikan adalah $f(x, y) = 4xy^3$

2) Batas bawah daerah integrasi (x) = 0

   Batas atas daerah integrasi (x) = 2

   Batas bawah daerah integrasi (y) = -1

   Batas atas daerah integrasi (y) = 3

3) Dimisalkan banyaknya iterasi yang dilakukan (N) = 4;

Tabel 3.3.1.1 Proses integrasi Romberg

$$\begin{tikzcd}
R(1, 1) \arrow[dr] & & & \\
R(2, 1) \arrow[r] \arrow[dr] & R(2, 2) \arrow[dr] & & \\
R(3, 1) \arrow[r] \arrow[dr] & R(3, 2) \arrow[r] \arrow[dr] & R(3, 3) \arrow[dr] & \\
R(4, 1) \arrow[r] & R(4, 2) \arrow[r] & R(4, 3) \arrow[r] & R(4, 4)
\end{tikzcd}$$

4) Integrasi pertama dilakukan dalam arah y maka nilai x konstan, sehingga

   $h = y_2 - y_1$

   $h = 3 - (-1) = 4$

5) Menghitung: $R(1,1) = T_0 = \dfrac{h}{2}\left(f(x, y_1) + f(x, y_2)\right)$

   maka $\quad f(x,-1) = 4x(-1)^3 = -4x$

   $f(x,3) = 4x(3)^3 = 108x$;

   Sehingga $\quad R(1,1) = T_0 = \dfrac{4}{2}(-4x + 108x)$

   $R(1,1) = T_0 = 2(104x)$

$$R(1{,}1) = T_0 = 208x$$

6) Menghitung: $R(2{,}1) = T_k = \frac{T_0}{2} + \frac{h}{2} f_1$ dimana $f_1 = f\left(y_1 + 1.\frac{h}{2^k}\right)$ dan

$k = 1, 2, 3, \ldots$

$$f_1 = f\left(y_1 + 1.\frac{h}{2}\right) = f\left(-1 + 1.\frac{4}{2^1}\right) = f(-1+2) = f(1)$$

$$f(1) = 4x(1)^3 = 4x$$

$$R(2{,}1) = T_k = \frac{T_0}{2} + \frac{h}{2} f_i$$

$$R(2{,}1) = T_1 = \frac{208x}{2} + \frac{4}{2} 4x$$

$$R(2{,}1) = T_1 = 104x + 8x$$

$$R(2{,}1) = T_1 = 112x$$

7) $\mathrm{R}(3, 1) = T_2 = \frac{T_1}{2} + \frac{h}{2^{k+1}}(f_1 + f_3)$

$$f_1 = f\left(y_1 + 1.\frac{h}{2^{k+1}}\right) = f\left(-1 + 1.\frac{4}{2^{1+1}}\right) = f(0) = 4x(0)^3 = 0$$

$$f_3 = f\left(y_1 + 3.\frac{h}{2^{k+1}}\right) = f\left(-1 + 3.\frac{4}{2^{1+1}}\right) = f(2) = 4x(2)^3 = 32x$$

$$\mathrm{R}(3, 1) = T_2 = \frac{T_1}{2} + \frac{h}{2^{k+1}}(f_1 + f_3)$$

$$= \frac{112x}{2} + \frac{4}{4}(0 + 32x)$$

$$= 56x + 32x \quad = 88x$$

8) $\mathrm{R}(4, 1) = T_3 = \frac{T_2}{2} + \frac{h}{2}(f_1 + f_3 + f_5 + f_7)$

$$f_1 = f\left(y_1 + 1.\frac{h}{2^{k+1}}\right) = f\left(-1+1.\frac{4}{2^{2+1}}\right) = f\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 4x(-\tfrac{1}{2})^3 = -\frac{1}{2}x$$

$$f_3 = f\left(y_1 + 3.\frac{h}{2^{k+1}}\right) = f\left(-1+3.\frac{4}{2^{2+1}}\right) = f\left(\tfrac{1}{2}\right) = 4x(\tfrac{1}{2})^3 = \frac{1}{2}x$$

$$f_5 = f\left(y_1 + 5.\frac{h}{2^{k+1}}\right) = f\left(-1+5.\frac{4}{2^{2+1}}\right) = f\left(\tfrac{3}{2}\right) = 4x(\tfrac{3}{2})^3 = \frac{27}{2}x$$

$$f_7 = f\left(y_1 + 7.\frac{h}{2^{k+1}}\right) = f\left(-1+7.\frac{4}{2^{2+1}}\right) = f\left(\tfrac{5}{2}\right) = 4x(\tfrac{5}{2})^3 = \frac{125}{2}x$$

R(4, 1) = $T_3 = \dfrac{T_2}{2} + \dfrac{h}{2}\left(f_1 + f_3 + f_5 + f_7\right)$

$= \dfrac{88x}{2} + \dfrac{2}{8}\left(-\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{27}{2}x + \dfrac{125}{2}x\right)$

$= 44x + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{152x}{2}\right)$

$= 44x + 38x$

$= 82x$

9) Hitungan selanjutnya menggunakan metode Romberg

$$R(r,s) = \frac{4^{s-1}.R(r,s-1) - R(r-1,s-1)}{4^{s-1}-1} \qquad \text{untuk } 2 \le s \le r .$$

Kolom kedua dalam integrasi Romberg

R(2, 2) = $\dfrac{4^{2-1}.R(2,2-1) - R(2-1,2-1)}{4^{2-1}-1} = \dfrac{4R(2,1) - R(1,1)}{3}$

$= \dfrac{4(112x) - 208x}{3} = \dfrac{240x}{3} = 80x$

R(3, 2) = $\dfrac{4^{2-1}.R(3,2-1) - R(3-1,2-1)}{4^{2-1}-1} = \dfrac{4R(3,1) - R(2,1)}{3}$

$$= \frac{4(88x) - 112x}{3} = \frac{240x}{3} = 80x$$

$$\text{R(4, 2)} = \frac{4^{2-1}.R(4,2-1) - R(4-1,2-1)}{4^{2-1}-1} = \frac{4R(4,1) - R(3,1)}{3}$$

$$= \frac{4(82x) - 112x}{3} = \frac{240x}{3} = 80x$$

Kolom ketiga dalam integrasi Romberg

$$\text{R(3, 3)} = \frac{4^{3-1}.R(3,3-1) - R(3-1,3-1)}{4^{2-1}-1} = \frac{4^2\,R(3,2) - R(2,2)}{4^2-1}$$

$$= \frac{16R(3,2) - R(2,2)}{15} = \frac{16(80x) - 80x}{15} = 80x$$

$$\text{R(4, 3)} = \frac{4^{3-1}.R(4,3-1) - R(4-1,3-1)}{4^{2-1}-1} = \frac{4^2\,R(4,2) - R(3,2)}{4^2-1}$$

$$= \frac{16R(4,2) - R(3,2)}{15} = \frac{16(80x) - 80x}{15} = 80x$$

Kolom keempat dalam integrasi Romberg

$$\text{R(4, 4)} = \frac{4^{4-1}.R(4,4-1) - R(4-1,4-1)}{4^{2-1}-1} = \frac{4^3\,R(4,3) - R(3,3)}{4^3-1}$$

$$= \frac{64R(3,2) - R(2,2)}{63} = \frac{64(80x) - 80x}{63} = \frac{5040x}{63} = 80x$$

Jadi nilai integrasi pertama dengan metode Romberg adalah 80 satuan.

Tabel 3.1 Selesaian Integrasi Pertama Romberg

$208x$			
$118x$	$80x$		
$88x$	$80x$	$80x$	
$82x$	$80x$	$80x$	$80x$

10) Integrasi kedua;

Integran yang diselesaikan adalah f(x, y) = 80x

11) Batas bawah daerah integrasi (x) = 0

Batas atas daerah integrasi (x) = 2

12) Banyaknya iterasi yang dilakukan (N) = 4

$h = x_2 - x_1$

$h = 2 - 0 = 2$

13) Hitung: $R(1,1) = T_0 = \frac{h}{2}\left(f(x_1, y) + f(x_2, y)\right)$

maka $f(0, y) = 80(0) = 0$

$f(2, y) = 80(2) = 160$;

Sehingga $R(1,1) = T_0 = \frac{2}{2}(0 + 160) = 160$

14) $f_1 = f\left(y_1 + 1.\frac{h}{2}\right) = f\left(0 + 1.\frac{2}{2}\right) = f(1) = 80(1) = 80$

$R(2,1) = T_k = \frac{T_0}{2} + \frac{h}{2} f_1 = \frac{160}{2} + \frac{2}{2}.80 = 80 + 80 = 160$

15) R(3, 1) = $T_2 = \frac{T_1}{2} + \frac{h}{2^{k+1}}\left(f_1 + f_3\right)$

$f_1 = f\left(x_1 + 1.\frac{h}{2^{k+1}}\right) = f\left(0 + 1.\frac{2}{2^{1+1}}\right) = f\left(\tfrac{1}{2}\right) = 80(\tfrac{1}{2}) = 40$

$f_3 = f\left(x_1 + 3.\frac{h}{2^{k+1}}\right) = f\left(0 + 3.\frac{2}{2^{1+1}}\right) = f\left(\tfrac{3}{2}\right) = 80\left(\tfrac{3}{2}\right) = 120$

R(3, 1) = $T_2 = \frac{T_1}{2} + \frac{h}{2^{k+1}}\left(f_1 + f_3\right)$

$= \frac{160}{2} + \frac{2}{4}(40+120)$

= 80 + 80

= 160

16) R(4, 1) = 160

17) Hitungan selanjutnya menggunakan metode Romberg

$$R(r,s) = \frac{4^{s-1}.R(r,s-1) - R(r-1,s-1)}{4^{s-1}-1} \qquad \text{untuk } 2 \le s \le r \text{ .}$$

Kolom kedua dalam metode Romberg

R(2, 2) = $\frac{4^{2-1}.R(2,2-1) - R(2-1,2-1)}{4^{2-1}-1} = \frac{4R(2,1) - R(1,1)}{3}$

$= \frac{4(160)-160}{3} = \frac{480}{3} = 160$

R(3, 2) = 160

R(4, 2) = 160

Kolom ketiga dalam metode Romberg

R(3, 3) = 160

R(4, 3) = 160

Kolom keempat dalam metode Romberg

R(4, 4) = 160

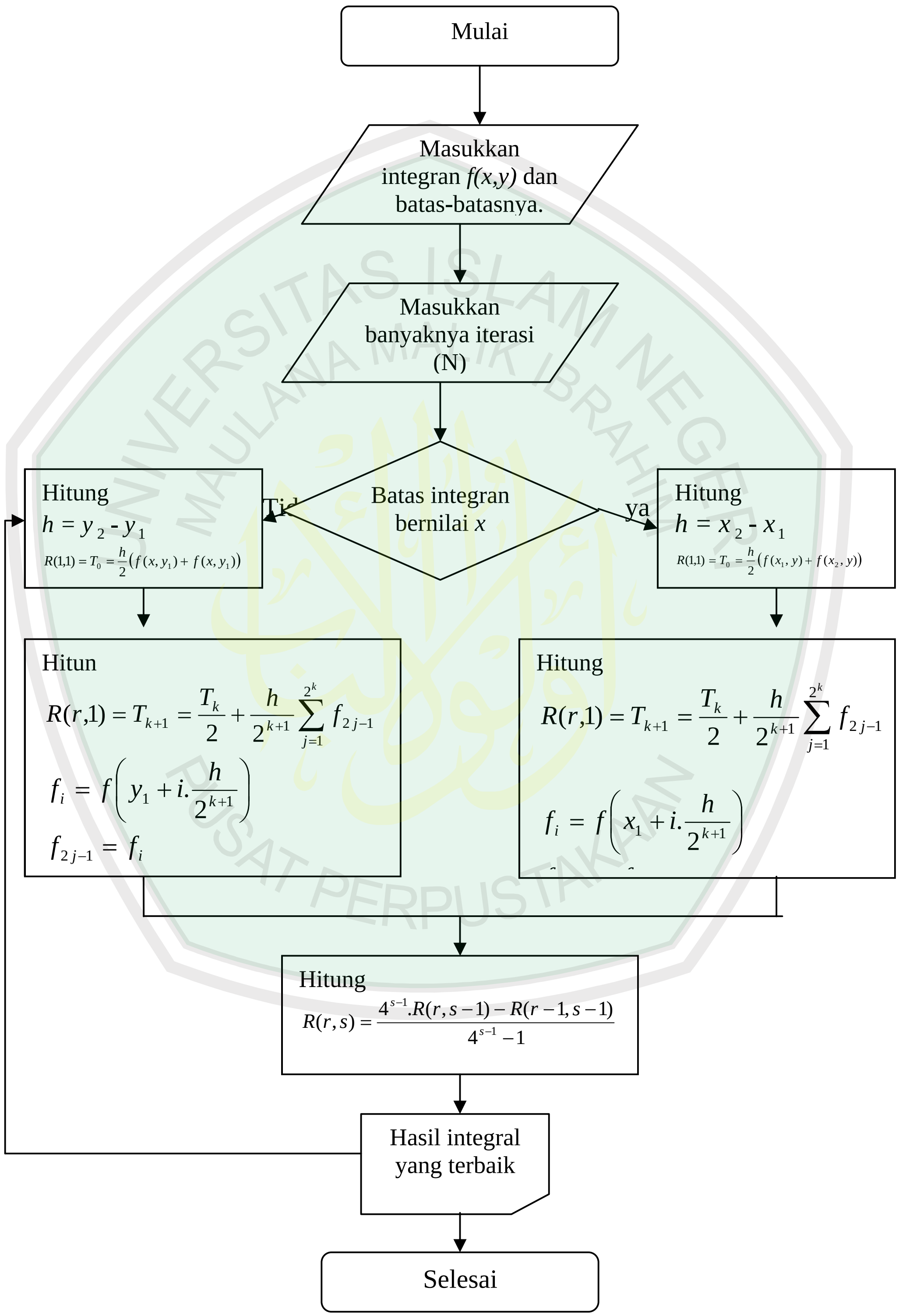
Jadi, penyelesaian integral lipat dua dari $f(x,y) = 4xy^3$ adalah 160 satuan.

Berdasarkan uraian di atas tentang proses integrasi manual metode Romberg dalam menyelesaikan integral lipat dua, maka perlu digunakan program komputer dalam membantu mempercepat operasi hitungan dan iterasi yang dilakukan dalam metode numerik di atas. Apabla dilihat dari segi hasil, metode Romberg memberikan nilai yang sama dengan nilai eksak. Hal ini menunjukkan bahwa metode Romberg memiliki ketelitian yang tinggi dalam selesaiannya. Secara teoritis, metode Romberg merupakan evaluasi numerik dari integral tentu (metode trapesium), dimana penghitungannya membandingkan nilai integrasi *I(h1)* dan *I(h2)* untuk memperoleh hasil yang lebih baik.

3.2 Bagan Alir Integral lipat dua dengan metode Romberg

Berdasarkan algoritma di atas, kita dapat membuat logika atau urut-urutan instruksi program integral lipat dua dalam bentuk bagan alir.

Menurut Yulispartono (2004: 34), Bagan alir dapat menunjukkan secara jelas arus pengendalian algoritma, yakni bagaimana rangkaian pelaksanaan kegiatan program tersebut. Adapun bagan alir integral lipat dua dengan metode Romberg sebagai berikut:


Mulai
Masukkan integran $f(x,y)$ dan batas-batasnya.
Masukkan banyaknya iterasi (N)
Batas integran bernilai x
Tid
ya
Hitung
$h = y_2 - y_1$
$R(1,1) = T_0 = \frac{h}{2}\left(f(x, y_1) + f(x, y_1)\right)$
Hitung
$h = x_2 - x_1$
$R(1,1) = T_0 = \frac{h}{2}\left(f(x_1, y) + f(x_2, y)\right)$
Hitun
$R(r,1) = T_{k+1} = \frac{T_k}{2} + \frac{h}{2^{k+1}} \sum_{j=1}^{2^k} f_{2j-1}$
$f_i = f\left(y_1 + i.\frac{h}{2^{k+1}}\right)$
$f_{2j-1} = f_i$
Hitung
$R(r,1) = T_{k+1} = \frac{T_k}{2} + \frac{h}{2^{k+1}} \sum_{j=1}^{2^k} f_{2j-1}$
$f_i = f\left(x_1 + i.\frac{h}{2^{k+1}}\right)$
Hitung
$R(r,s) = \frac{4^{s-1}.R(r,s-1) - R(r-1,s-1)}{4^{s-1} - 1}$
Hasil integral yang terbaik
Selesai

Gambar 3.1: Integral lipat dua dengan metode Romberg

3.3 Program Matlab Dalam Menyelesaikan Integral lipat dengan metode Romberg

Setelah mengetahui proses penyelesaian integral lipat dua secara analitis dan numerik yang diselesaikan secara manual, maka langkah selanjutnya mengetahui seberapa besar peran komputer (program matlab) dalam menyelesaikan integral lipat dua.

Contoh 1.

Penyelesaian integran $f(x, y) = 4xy^3$ dengan batas bawah daerah integrasi (x) = 0, batas atas daerah integrasi (x) = 2, batas bawah daerah integrasi (y) = -1, batas atas daerah integrasi (y) = 2 dan banyaknya iterasi yang dilakukan 4 adalah

```
========================================================
***************PROGRAM INTEGRAL LIPAT DUA****************
******SELESAIAN NUMERIK DENGAN METODE ROMBERG*******
*******************BY: ISWATUL KHASANAH*****************
```

```
Persamaan Aljabar

f =

    Inline function:

    f(x,y) = 4.*x.*y.^4

Masukkan batas bawah interval (y)=-1
Masukkan batas atas interval(y)=3
Masukkan batas bawah interval(x) =0
Masukkan batas atas interval(x)=2
Masukkan banyaknya iterasi yang dilakukan =3
```

```
Integrasi pertama dalam arah y

h =     4

R =
```

208	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

R =

208	0	0	0
112	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

R =

208	0	0	0
112	80	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

R =

208	0	0	0
112	80	0	0
88	0	0	0
0	0	0	0

R =

208	0	0	0
112	80	0	0
88	80	0	0

0	0	0	0

R =

208	0	0	0
112	80	0	0
88	80	80	0
0	0	0	0

R =

208	0	0	0
112	80	0	0
88	80	80	0
82	0	0	0

R =

208	0	0	0
112	80	0	0
88	80	80	0
82	80	0	0

R =

208	0	0	0
112	80	0	0
88	80	80	0
82	80	80	0

R =

208	0	0	0
112	80	0	0
88	80	80	0
82	80	80	80

ans = 80

Hasil Integrasi pertama dengan Metode Romberg adalah 80

Integrasi kedua dalam arah x

h = 2

R =

160	0	0	0
160	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

R =

160	0	0	0
160	160	0	0
160	0	0	0
0	0	0	0

R =

160	0	0	0
160	160	0	0
160	160	160	0
160	160	160	160

ans =   160

Hasil Integrasi kedua dengan Metode Romberg adalah 160
Waktu Komputasi = 0.15

Contoh 2.

Penyelesaian integran $f(x, y) = \frac{3xy^2 \sqrt{x^3 + 1}}{\sqrt{2y^2 + 2}} e^{3xy^4}$ dengan batas bawah daerah integrasi (*x*) = 0,1, batas atas daerah integrasi (*x*) = 1,5, batas bawah daerah integrasi (*y*) = 0,5, batas atas daerah integrasi (*y*) = 2, 2 dan banyaknya iterasi yang dilakukan 5 adalah

```
============================================================
****************PROGRAM INTEGRAL LIPAT DUA****************
********SELESAIAN NUMERIK DENGAN METODE ROMBERG*******
*******************BY: ISWATUL KHASANAH******************
============================================================

Persamaan Aljabar dan Eksponensial

f =

     Inline function:

     f(x,y) = (3*x.*y.^2 * sqr(x^3+1)*e^3*x*y^4 /sqrt(2*y^2+2)


Masukkan batas bawah interval (y)=0.5
Masukkan batas atas interval(y)=2.2
Masukkan batas bawah interval(x) =0.1
Masukkan batas atas interval(x)=1.5
Masukkan banyaknya iterasi yang dilakukan =4
============================================================
Integrasi pertama dalam arah y

h =

    1.7000
```

R =

1.0e+003 *

1.6992	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

R =

1.0e+003 *

1.6992	0	0	0	0
1.1530	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

R =

1.0e+003 *

1.6992	0	0	0	0
1.1530	0.9709	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

R =

1.0e+003 *

1.6992	0	0	0	0
1.1530	0.9709	0	0	0
1.8264	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

```
R =

  1.0e+003 *

    1.6992         0         0         0         0
    1.1530    0.9709         0         0         0
    1.8264    2.0509         0         0         0
         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0


R =

  1.0e+003 *

    1.6992         0         0         0         0
    1.1530    0.9709         0         0         0
    1.8264    2.0509    2.1229         0         0
         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0


R =

  1.0e+003 *

    1.6992         0         0         0         0
    1.1530    0.9709         0         0         0
    1.8264    2.0509    2.1229         0         0
    3.4060         0         0         0         0
         0         0         0         0         0


R =

  1.0e+003 *

    1.6992         0         0         0         0
    1.1530    0.9709         0         0         0
    1.8264    2.0509    2.1229         0         0
    3.4060    3.9326         0         0         0
         0         0         0         0         0
```

```
R =

  1.0e+003 *

    1.6992         0         0         0         0
    1.1530    0.9709         0         0         0
    1.8264    2.0509    2.1229         0         0
    3.4060    3.9326    4.0580         0         0
         0         0         0         0         0


R =

  1.0e+003 *

    1.6992         0         0         0         0
    1.1530    0.9709         0         0         0
    1.8264    2.0509    2.1229         0         0
    3.4060    3.9326    4.0580    4.0887         0
         0         0         0         0         0


R =

  1.0e+003 *

    1.6992         0         0         0         0
    1.1530    0.9709         0         0         0
    1.8264    2.0509    2.1229         0         0
    3.4060    3.9326    4.0580    4.0887         0
    6.6878         0         0         0         0


R =

  1.0e+003 *

    1.6992         0         0         0         0
    1.1530    0.9709         0         0         0
    1.8264    2.0509    2.1229         0         0
    3.4060    3.9326    4.0580    4.0887         0
    6.6878    7.7817         0         0         0
```

```
R =

  1.0e+003 *

    1.6992         0         0         0         0
    1.1530    0.9709         0         0         0
    1.8264    2.0509    2.1229         0         0
    3.4060    3.9326    4.0580    4.0887         0
    6.6878    7.7817    8.0383         0         0


R =

  1.0e+003 *

    1.6992         0         0         0         0
    1.1530    0.9709         0         0         0
    1.8264    2.0509    2.1229         0         0
    3.4060    3.9326    4.0580    4.0887         0
    6.6878    7.7817    8.0383    8.1015         0


R =

  1.0e+003 *

    1.6992         0         0         0         0
    1.1530    0.9709         0         0         0
    1.8264    2.0509    2.1229         0         0
    3.4060    3.9326    4.0580    4.0887         0
    6.6878    7.7817    8.0383    8.1015    8.1172


ans =

  8.1172e+003

Hasil Integrasi pertama dengan Metode Romberg adalah 8117.1958
==============================================================
 Integrasi kedua dalam arah x

h =

    1.4000
```

```
R =

  1.0e+004 *

    8.0512         0         0         0         0
    5.2695         0         0         0         0
         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0


R =

  1.0e+004 *

    8.0512         0         0         0         0
    5.2695    4.3422         0         0         0
         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0


R =

  1.0e+004 *

    8.0512         0         0         0         0
    5.2695    4.3422         0         0         0
    4.4822         0         0         0         0
         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0


R =

  1.0e+004 *

    8.0512         0         0         0         0
    5.2695    4.3422         0         0         0
    4.4822    4.2198         0         0         0
         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0


R =
```

1.0e+004 *

8.0512	0	0	0	0
5.2695	4.3422	0	0	0
4.4822	4.2198	4.2117	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

R =

1.0e+004 *

8.0512	0	0	0	0
5.2695	4.3422	0	0	0
4.4822	4.2198	4.2117	0	0
4.2790	0	0	0	0
0	0	0	0	0

R =

1.0e+004 *

8.0512	0	0	0	0
5.2695	4.3422	0	0	0
4.4822	4.2198	4.2117	0	0
4.2790	4.2112	0	0	0
0	0	0	0	0

R =

1.0e+004 *

8.0512	0	0	0	0
5.2695	4.3422	0	0	0
4.4822	4.2198	4.2117	0	0
4.2790	4.2112	4.2107	0	0
0	0	0	0	0

R =

1.0e+004 *

8.0512	0	0	0	0
5.2695	4.3422	0	0	0
4.4822	4.2198	4.2117	0	0
4.2790	4.2112	4.2107	4.2106	0
0	0	0	0	0

R =

1.0e+004 *

8.0512	0	0	0	0
5.2695	4.3422	0	0	0
4.4822	4.2198	4.2117	0	0
4.2790	4.2112	4.2107	4.2106	0
4.2278	0	0	0	0

R =

1.0e+004 *

8.0512	0	0	0	0
5.2695	4.3422	0	0	0
4.4822	4.2198	4.2117	0	0
4.2790	4.2112	4.2107	4.2106	0
4.2278	4.2107	0	0	0

R =

1.0e+004 *

8.0512	0	0	0	0
5.2695	4.3422	0	0	0
4.4822	4.2198	4.2117	0	0
4.2790	4.2112	4.2107	4.2106	0
4.2278	4.2107	4.2106	0	0

R =

1.0e+004 *

8.0512	0	0	0	0
5.2695	4.3422	0	0	0

```
   4.4822    4.2198    4.2117         0            0
   4.2790    4.2112    4.2107    4.2106         0
   4.2278    4.2107    4.2106    4.2106         0


R =

  1.0e+004 *

   8.0512         0            0         0            0
   5.2695    4.3422         0         0            0
   4.4822    4.2198    4.2117      0            0
   4.2790    4.2112    4.2107    4.2106      0
   4.2278    4.2107    4.2106    4.2106    4.2106


ans =

  4.2106e+004

Hasil Integrasi kedua dengan Metode Romberg adalah 42106.4624

Waktu Komputasi = 0.172
```

Penyelesaian integral lipat degan menggunakan integrasi Romberg merupakan penyelesaian yang cukup panjang dan rumit. Hal tersebut dapat di lihat pada halaman 34. Akan tetapi, dengan bantuan komputer, maka penyelesaian tersebut dapat terselesaikan dengan mudah. Penyelesaian integral lipat dua dengan integrasi Romberg pada skripsi ini memiliki dua program utama, yaitu integrasi awal dalam arah x dan dalam arah y.

User dapat memilih program utama yang diinginkan. Pada contoh-contoh yang diberikan penulis di atas, program utama yang dipilih adalah dalam arah y, berarti nilai x konstan. Pemilihan integrasi awal dalam arah x atau dalam arah y, sebenarnya tidak mempengaruhi hasil akhir integrasi. Hal ini sesuai definisi integral lipat sebagai berikut:

$$I = \iint_A f(x,y)dA \;\text{ atau }\; I = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx \right] dy \;\text{ atau }\; I = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx$$

Pada contoh 1 di atas, diketahui bahwa integrasi pertama dilakukan dalam arah *y*, ini berarti nilai *x* konstan. Iterasi dilakukan sebanyak empat kali, maka matriks yang terbentuk dalam MATLAB adalah 4x4. Adapun proses penghitungan integrasi dalam MATLAB untuk R ditampilkan satu persatu. Lihat nilai R pada baris pertama kolom pertama (208) menunjukkan hasil integrasi pertama (R(1,1)). Yang kemudian dilanjutkan dengan perbaikan nilai integrasi R(2,1) hingga R(4,4). Nilai R(4, 4) menunjukkan nilai integrasi dengan metode Romberg yaitu 80.

Demikian juga dengan nilai integrasi kedua dalam arah *x*, pada baris pertama kolom pertama (160) menunjukkan hasil integrasi kedua (R(1,1)). Yang kemudian dilanjutkan dengan perbaikan nilai integrasi R(2,1) hingga R(4,4). Nilai R(4, 4) menunjukkan nilai integrasi dengan metode Romberg yaitu 160. Dan waktu penghitungan komputasi adalah 0,15 detik.

Sedangkan pada contoh 2, Iterasi dilakukan sebanyak lima kali, maka matriks yang terbentuk dalam Matlab adalah 5x5. Adapun proses penghitungan integrasi dalam Matlab untuk R ditampilkan satu persatu. Lihat nilai R pada baris pertama kolom pertama (1699,2) menunjukkan hasil integrasi pertama (R(1,1)). Yang kemudian dilanjutkan dengan perbaikan nilai integrasi R(2,1) hingga R(4,4). Nilai R(4, 4) menunjukkan nilai integrasi dengan metode Romberg yaitu 8117,2.

Demikian juga dengan nilai integrasi kedua dalam arah *x*, pada baris pertama kolom pertama (80152) menunjukkan hasil integrasi kedua (R(1,1)). Yang kemudian dilanjutkan dengan perbaikan nilai integrasi R(2,1) hingga R(4,4). Nilai R(4, 4) menunjukkan nilai integrasi dengan metode Romberg yaitu 42106,624. Adapun waktu komputasi dalam contoh ini adalah 0,172.

Dengan demikian, memang benar program matlab sangat memudahkan pemakai dalam mencari selesaian numerik integral lipat dua. Selain waktu yang dibutuhkan cukup singkat bila dibandingkan dengan penghitungan manual, tetapi juga hasil penyelesaiannya mendekati nilai eksak.

BAB IV

PENUTUP

4.1 KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan pada bab III di atas, dapat ditarik kesimpulan bahwa langkah-langkah penyelesaian integral lipat dua dengan menggunakan integrasi Romberg adalah sebagai berikut:

k. Mendefinisikan integran dan batas-batas integran.

l. Menentukan banyaknya iterasi ($N \leq 5$).

m. Memilih batas integran yang akan diselesaikan terlebih dahulu,

1) Bila batas yang dipilih *x*, berarti nilai *y* konstan, maka hitung

$$h = x_2 - x_1 \ ,$$

$$R(1,1) = T_0 = \frac{h}{2}\left(f(x_1, y) + f(x_2, y)\right)$$

$$R(r,1) = T_{k+1} = \frac{T_k}{2} + \frac{h}{2^{k+1}} \sum_{j=1}^{2^k} f_{2j-1}$$

2) Bila batas yang dipilih *y*, berarti nilai *x* konstan, maka hitung

$$h = y_2 - y_1$$

$$R(1,1) = T_0 = \frac{h}{2}\left(f(x, y_1) + f(x, y_1)\right)$$

$$R(r,1) = T_{k+1} = \frac{T_k}{2} + \frac{h}{2^{k+1}} \sum_{j=1}^{2^k} f_{2j-1}$$

n. Hitungan selanjutnya dengan menggunakan integrasi Romberg

$$R(r,s)=\frac{4^{s-1}.R(r,s-1)-R(r-1,s-1)}{4^{s-1}-1} \qquad \text{untuk } 2\le s\le r\,.$$

o. Hasil integrasi pertama (d) dari integrasi Romberg diintegralkan lagi atau kembali ke langkah c.

p. Hasil integrasi Romberg dalam bentuk matriks, sehingga hasil integral lipat dua dengan integrasi Romberg terletak pada kolom dan baris ke-N.

Penyelesaian numerik integral lipat dua dengan menggunakan integrasi Romberg yang menggunakan program matlab, mampu memberikan nilai integrasi dalam waktu yang singkat. Hal tersebut dapat di lihat pada contoh yang diberikan penulis berikut, contoh 1: $f(x,y)=4xy^3$, hasil integrasi diperoleh dalam waktu singkat yaitu 0,15 detik. Sedangkan pada contoh 2, $f(x,y)=\frac{3xy^2\sqrt{x^3+1}}{\sqrt{2y^2+2}}e^{3xy^4}$, hasil integrasi diperoleh dalam waktu 0,172 detik

4.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian ini, maka peneliti merekomendasikan beberapa hal untuk penelitian selanjutnya, yaitu

a) Penyempurnaan program ini menjadi program penyelesaian numerik integral lipat ke-n dengan menggunakan integrasi Romberg.

b) Penerapan integrasi Romberg pada fungsi-fungsi lainnya, seperti fungsi trigonometri, fungsi hiperbolik, dan fungsi irasional.

c) Penyelesaian integrasi numerik dengan menggunakan metode numerik lainnya, seperti: metode Heun, metode adaptive Quadrature, dan metode composite rules.

d) Penerapan integrasi Romberg dengan menggunakan bahasa pemrograman lainnya, seperti Visual Basic, Fortran, dan C++.

DAFTAR PUSTAKA

Djoyodihardjo, Harijono.1983. *Metode Numerik*. Erlangga: Jakarta

Hasan, Talib Hasyim. 2005. *Belajar Sendiri Dasar-Dasar Pemrograman MATLAB Lengkap Disertai Teori Dan Aplikasi. Gava Media: Yogyakarta*
.

Joyodihardjo, Harijono.2000. *Metode Numerik*. PT. Gramedia Pustaka: Jakarta

Luih, Donatha Lalu.2005.*Metode Numerik Untuk Menyelesaikan Integral Rangkap Dua Dengan Metode Simpson dan Metode Gauss*.Skripsi. Universitas Brawijaya

Mardalis.2003. *Metode Penelitian, Suatu Pendekatan Proposal*. Bumi Aksara: Jakarta

Munif, Abdul. 2004. *Cara Praktis Penguasaan dan Penggunaan Metode Numerik.* Guna Widya: Surabaya

Munir, Rinaldi.2003. *Metode Numerik*. Informatika Bandung: Bandung

Nasution, Amrinsyah.2001. *Metode Numerik dalam Ilmu Rekayasa Sipil*. ITB Bandung: Bandung

Sahid. 2004. Pengantar Komputasi Numerik dengan MATLAB.Laboratorium Komputer Jurusan Pendidikan Matematika MIPA UNY.

Triatmodjo, Bambang.2002. *Metode Numerik Dilengkapi Dengan Program Komputer*. Beta Offset: Yogyakarta

Weber, Jean E. *Analisis Matematik Penerapan Bisnis Dan Ekonomi Edisi Ke empat*. Erlangga: Jakarta

Yulikuspartono.2004. *Pengantar Logika dan Algoritma.*ANDI: Yogyakarta

--http/google.com/

Lampiran 1

```
clc;clear all;format short;
disp('============================================================='
)
disp('****************PROGRAM INTEGRAL LIPAT
DUA****************')
disp('**********SELESAIAN NUMERIK DENGAN METODE
ROMBERG**********')
disp('*******************BY: ISWATUL
KHASANAH*******************')
disp('============================================================='
)
disp(' ')
disp('Persamaan Aljabar')
f=inline('4.*x.*y.^4','x','y')
a=input('Masukkan batas bawah interval (y)=');
b=input('Masukkan batas atas interval(y)=');
c=input('Masukkan batas bawah interval(x) =');
d=input('Masukkan batas atas interval(x)=');
N=input('Masukkan banyaknya iterasi yang dilakukan =');
e=input('Masukkan tolerasnsi maksimum f(x,y)=');
disp('============================================================='
)
disp('Integrasi pertama dalam arah y')
R=zeros(N + 1, N + 1);
tic;
h=b - a
R(0 + 1, 0 + 1) = 0.5 * h * (4*a^3 + 4*b^3)

for i = 1:N
    h = h/2;

    m = (a + h): h : (b - h);
    R( i + 1, 1 ) = 0.5*( 4*a^3 + 2*sum(4*m.^3) + 4*b^3)*h

    for j = 1:i
        R(i + 1, j + 1) = (4^j*R(i + 1, j) - R(i, j))/(4^j - 1)
    end

  end

R( i + 1, i + 1 )
disp(['Hasil Integrasi pertama dengan Metode Romberg adalah
',num2str(R( i + 1, i + 1 ))])
disp('============================================================='
)
disp(' ')
disp('integrasi kedua dalam arah x')
int1 = R( i + 1, i + 1 );
R = zeros( N + 1, N + 1 );
h = d - c
R(0 + 1, 0 + 1) = 0.5*(int1*c + int1*d)*h;

for i = 1:N
   h = h/2;
```

```
   m = (c + h): h : (d - h);

    R( i + 1, 1 ) = 0.5*( int1*c + 2*sum(int1.*m)+ int1*d)*h

    for j = 1:i
        R(i + 1, j + 1) = (4^j*R(i + 1, j) - R(i, j))/(4^j - 1);
    end

end

R( i + 1, i + 1 )
disp('')
disp(['Hasil Integrasi kedua dengan Metode Romberg adalah
',num2str(R( i + 1, i + 1 ))])
disp(' ')
disp(['Waktu Komputasi = ',num2str(toc)])
```

Lampiran 2

```
clc;clear all;format short;
disp('============================================================'
)
disp('****************PROGRAM INTEGRAL LIPAT
DUA****************')
disp('**********SELESAIAN NUMERIK DENGAN METODE
ROMBERG**********')
disp('*******************BY: ISWATUL
KHASANAH*******************')
disp('============================================================'
)
disp(' ')
disp('Persamaan Aljabar')
f=inline('4*x*y^4','x','y')
a=input('Masukkan batas bawah interval (x)=');
b=input('Masukkan batas atas interval(x)=');
c=input('Masukkan batas bawah interval(y) =');
d=input('Masukkan batas atas interval(y)=');
N=input('Masukkan banyaknya iterasi yang dilakukan =');
disp('============================================================'
)
disp('Integrasi pertama dalam arah x')
R=zeros(N + 1, N + 1);
tic;
h=b - a
R(0 + 1, 0 + 1) = 0.5 * h * (4*a + 4*b)

for i = 1:N
    h = h/2;

    m = (a + h): h : (b - h);
    R( i + 1, 1 ) = 0.5*( 4*a + 2*sum(4*m) + 4*b)*h

    for j = 1:i
        R(i + 1, j + 1) = (4^j*R(i + 1, j) - R(i, j))/(4^j - 1)
    end
```

```
  end

R( i + 1, i + 1 )
disp(['Hasil Integrasi pertama dengan Metode Romberg adalah
',num2str(R( i + 1, i + 1 ))])
disp('============================================================'
)
disp(' ')
disp('integrasi kedua dalam arah y')
int1 = R( i + 1, i + 1 );
R = zeros( N + 1, N + 1 );
h = d - c
R(0 + 1, 0 + 1) = 0.5*(int1*c^3 + int1*d^3)*h;

for i = 1:N
   h = h/2;

   m = (c + h): h : (d - h);

    R( i + 1, 1 ) = 0.5*( int1*c.^3 + 2*sum(int1.*m.^3)+
int1*d.^3)*h

    for j = 1:i
        R(i + 1, j + 1) = (4^j*R(i + 1, j) - R(i, j))/(4^j - 1);
    end

end

R( i + 1, i + 1 )
disp('')
disp(['Hasil Integrasi kedua dengan Metode Romberg adalah
',num2str(R( i + 1, i + 1 ))])
disp(' ')
disp(['Waktu Komputasi = ',num2str(toc)])
```