# ANALISIS PERBANDINGAN METODE BEDA HINGGA SKEMA IMPLISIT DAN CRANK-NICHOLSON PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL

## SKRIPSI

**oleh :**

**EMY MUTHOLI’AH**
**NIM. 03510031**

**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MALANG**
**MALANG**
**2008**

# ANALISIS PERBANDINGAN METODE BEDA HINGGA SKEMA IMPLISIT DAN CRANK-NICHOLSON PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL

**SKRIPSI**

Diajukan Kepada :
Universitas Islam Negeri Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

**oleh :**


**EMY MUTHOLI'AH**
**NIM : 03510031**



**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MALANG**
**MALANG**

**2008**

**ANALISIS PERBANDINGAN METODE BEDA HINGGA SKEMA IMPLISIT DAN CRANK-NICHOLSON PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL**

**SKRIPSI**

**oleh:**

**EMY MUTHOLI'AH**
**NIM. 03510031**

**Telah diperiksa dan disetujui untuk diuji**
**Tanggal : 27 Maret 2008**

| Dosen Pembimbing Matematika | Dosen Pembimbing Keagamaan |
|---|---|
| **Drs. Usman Pagalay, M. Si** | **Ach. Nashichuddin, M. A** |
| **NIP. 150 327 240** | **NIP. 150 302 531** |

**Mengetahui,**
**Ketua Jurusan Matematika**

**Sri Harini, M.Si**
**NIP. 150 318 321**

# ANALISIS PERBANDINGAN METODE BEDA HINGGA SKEMA IMPLISIT DAN CRANK-NICHOLSON PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL

## SKRIPSI

**oleh :**

**EMY MUTHOLI'AH**
**NIM : 03510031**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

**Tanggal : 8 April 2008**

| **Susunan Dewan Penguji:** | | **Tanda Tangan** |
|---|---|---|
| **1. Penguji Utama** | : **Drs. Turmudzi, M. Si**<br>**NIP. 150 209 630** | ( ) |
| **2. Ketua** | : **Evawati Alisah, M. Pd**<br>**NIP. 150 291 271** | ( ) |
| **3. Sekretaris** | : **Drs. Usman Pagalay, M. Si**<br>**NIP. 150 327 240** | ( ) |
| **4. Anggota** | : **Ach. Nashichuddin, M. A**<br>**NIP. 150 302 531** | ( ) |

**Mengetahui dan Mengesahkan**
**Ketua Jurusan Matematika**

**Sri Harini, M.Si**
**NIP. 150 318 321**

**PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN**

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

| | |
|---|---|
| Nama | : EMY MUTHOLI’AH |
| NIM | : 03510031 |
| Jurusan | : Matematika |
| Fakultas | : Sains dan Teknologi |

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 29 Maret 2008

Yang membuat pernyataan

Emy Mutholi’ah

NIM. 03510031

# *MOTTO*

*"Kejujuran, ketulusan, rendah hati namun tetap berani..."*

*"Kemenangan itu diraih dengan kesabaran,*
*kelonggaran itu mengiringi masa sulit,*
*& sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan"*

*-Tirmidzi-*

## Persembahan

Dengan memanjatkan syukur Alhamdullillah kehadirat Allah SWT, Rahmat dan Ridlo-Nya, sehingga penulis bisa berdiri menapaki kehidupan di dunia ini, bisa berdiri di depan Dewan Penguji

Nabi Muhammad SAW, penerang kehidupan yang telah menunjukkan jalan yang benar kepada umatnya.

**Kupersembahkan karya kecilku ini kepada:**

-**Ibunda** 'Noer Mahmudah' & **Ayahanda** '(Alm.) Imam Achmad'- orangtua-ku tercinta, terimakasih atas semuanya….terimakasih atas kasih sayang, kepercayaan, spirit, wejangan, nasehat, doa yang selalu mengalir untuk Ananda, Insya Allah ananda tidak akan mengecewakan kalian...

**Mas** 'Ayyidil Khusnaini' & **Mbak Ipar** 'Binti Masfufah'+**'Calon Keponakan'** ,yang tak henti-hentinya mengingatkan, memotivasi, menemani dan menjadi kakak terbaikku...

**Adik** 'Irhamna Annur', mba' akan menemani & berdo'a untuk adik, percayalah Allah masih sayang sama adik, adik pasti sembuh. Semangat & sabar yo...

Seluruh **Guru** dan **Dosenku**. Terima kasih, dengan sabar & ikhlas Engkau telah memberikan ilmu kepadaku, semoga menjadi ilmu yang manfa'at dan barokah, di dunia dan akhirat....

**Ibu** 'Masyfufah' & **Abah** 'Sirotdjudin' Serta **Bulek** 'Noer Kholifah', & **Pakdhe** 'Masduki', Kalian adalah Orang Tua & Guru kedua bagiku. Terimakasih atas semuanya...

**Sepupu-2Q** 'Nia, Lilis, Bintang, Ricky, MsSofyan, Mb'Uma, Nunung, Sania, Ichsan, Sigit, Imam, D'Qomar, Nafiri, D'Umam, D'Toni, D'Lilik, MsYaya', MsAndik, Ichonk, Iklima, Dyah, Isna'

**Seluruh keluarga besar Bani Shiddieq,** terimakasih yaa Allah, Aku tumbuh dikerajaan yang besar, aku mengerti artinya kehidupan, kebersamaan, dan kekeluargaan, ...

**My BestPren** 'D' Oelphe, Phita, Qudsy, Mumun, Mb'Layla, Brother-q (Jacky), Fayi', N@bila, Aris, Riza(Ghulam), Ms_Asyfie. Terimakasih atas support, doa dan kebersamaannya...Terimakasih telah memberikan pengetahuan baru bagiku, menemaniku menangis, tertawa,...Pokok'e U're My sonia.

**Keluarga Besar Pergerakan Mahasiswa Islam Indonesia (PMII)**
**Koms' Sunan Ampel Malang, Rayon '*Pencerahan*' Galileo**
**Rekan-rekan Progressive Private Center (P2C)**

Terimakasih atas support,doa dan kebersamaannya...
Terimakasih telah memberikan pengetahuan baru bagiku...

## YANG SELALU DALAM INGATAN...

Guru2Q, Yang Terhormat:

'BuWati, P'Chamim, P'Awi, P'NurChalim, P'EkoAgus, P'Ely, BuEndah, BuArisy, BuEtik, UstadzahDewi, Gus-Is, Neng-Is, UstadzChamzawi, BuEva, BuAry, BuRini, P'Tur, P'Henky, P'Sakir, P'Usman, P'Aziz, P'Urie,P'Nasich'

Bapak&Ibu'-Q

'BuSrijatun, P'Parnyoto, P'WisnuHadi, P'Munir, P'Suryadi, Mb'Mima, P'Cholil, P'Djoko, P'Mint, MsMuchid, Mb'Afni'

Mas&Mb'-Q

'MsAndies, Mb'Halimah, MsTomy, Mb'Ne2ng, MsHalim, MsHeri, MsHuda, MsIrul, MsMubin, MsGhoib, MsFauzi, MsMuslih, MsWahid, MsIdris, MsSigit, MsBambang, MsZein, MsHariyadi, MsRizal, Mb'Wi2n, Ms'Moeth, MsSuud, MsEdi, MsMuhith, MsHam, MsRochman, CakHanif, MsBeny, MsAndi'

Adek-2Q

'Agoes, Kifli, Intan, I'iq, Luluk, Zoom, Sofyan, Surur, Utari, Shofie, Dhila, Vira, Gandis, Retha, Rini, Yanuar, Dwi, Bintang, Sema '

Sahabat-2 Rayon 'Pencerahan' Galileo PMII SA Malang:

'Noe, Ko2k, Yoseph, Phatim, Aylin, Hakim, BundaIma, Rila, Mi2n, Shiva, Fatchur, Fathur, Fuad, Tamam, YuliJamil, Ashoy, Hadir, AliTadlo, Arif, RifYu, Ari, Baihaqi, Eli, Unun, Dany, Faqih, Frenky, ImamWahyu, Izul, Lil, Lukman, Ismail, Noval, Mudawamah, Oughta, Oshy, Zainal, Nirwan, Syadily, Afif, Rahmi, Andre, Diana, IfaPo'o, Elvy, Munir, Abid, Atus, Helmy, Ghozali, Latif, Luthfie, Molen, Muthmainah, Chusna, Nana, Anas, Nanang, Iza, Luqman, LiaTI, Septa, Shodiq, Tejo, Zainuddun, UmiKulsum, Iqbal, Wildan, Hinda'

Mathematic Dept '03

'Evy, Nunik, Taufiq, Rifa', Slamet, Ipunk, Toni, Muhdlor, Syarief, Dhani, Sya'roni, Gus Dur, Iis, Nafi', Nytha, Uuth, Arin, Deni, Aurel, Rini, Aulia DPH, Mb'Lia, Fika, Dhefa, Rini, Asis, Mey, Fiqri, Inay, Lala, Anjar, Nu2ng, Ika, Hindun, Shofie, EmyHot, NurUrif, EviNoor, Lul, Tus2, Jumiyati, Susantin, SriNur, Amy, NorFarida, Evita, Me2y, PapiOry, Asa '

Arek-2 'Wisma Idjoe' Mania

'Luluk, Lilik, Laylata, Icha, Izun, Nely, Ifa, Hawin, Leny, Anis, Yuli, Layin, Muhib, Nanik, Ivo, Sofa, Aini, Dina, Mb'Is, Mb'Atik, Ma'Thunk, Mb'Ike, Mb'Muzay, Mb'I2n, Mb'Hesti, Mb'Dewi, Mb'Lely, Mb'Anik, Firdan, Samsul, KajiFaruq, Dhani, MsFarid,... '

Artuna's Club

'Ali, Ancha, Mi'teh, Aniz, Oliph, Phintoo, Sustri, Mohilkan, Dido, Mark, Profesor, Najib, Imro', Layli, Zoom, Dahniar, Risa, Isro', Syafi', Dwi, Eri, Hury, Inana, Santo, Tutik, Yul-Q, Yunin, Abid, Yuni, UmiZah'

Temen-2Q Dolan

'Anik, Reni, Ririn, Pipit, Nanik, Roh, Win, Tika , Lilis, Hemly, Arip, Anam, Udin, Imron, Rifaah, Heny, Ulum, Shodiq, Anam, Sul, Ifa, Santi, Fifin(Alm), Mami, Ulfa, Qorin, el-Farid, Iin, Dyah, NengCus, CakMiftah, Agung, MsDony, Bus, Anas, Suthenk, Ngalim'

Dll, dst, dsb, ...

Siapapun Anda, hanya Allah yang tahu, karya ini juga juga kupersembahkan untuk Anda, semoga kita bisa menjalani kehidupan ini dengan penuh kesabaran, keikhlasan dan senantiasa mendapat Ridlo Allah SWT. Amien...

Aku Tak Akan Melupakan Kalian...

# KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Syukur Alhamdulillah penulis haturkan kehadlirat Allah SWT yang telah melimpahkan segala Rahmat, Taufiq, Hidayah, dan Inyah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul *"**Analisis Perbandingan Metode Beda Hingga Skema Implisit Dan Crank-Nicholson Pada Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial**"*, sebagai salah satu persyaratan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si)

Shalawat serta salam penulis haturkan keharibaan Sang pendidik sejati Rasulullah SAW, serta para Sahabat, Tabi'in dan para umat yang senantiasa berjalan dalam risalah-Nya.

Dalam menyelesaikan skripsi ini, tentunya tidak lepas dari bantuan, dukungan, arahan, dan bimbingan dari berbagai pihak. Oleh sebab itu pada kesempatan ini penulis berkeinginan menyampaikan ucapan terima kasih yang tak terhingga kepada yang terhormat:

1. Prof. Dr.H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Malang
2. Prof. Dr. Sutiman Bambang Sumitro, SU., DSc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Malang
3. Sri Harini, M.Si, selaku  Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang
4. Drs. Usman Pagalay, M. Si. selaku Dosen Pembimbing Matematika, karena atas bimbingan, bantuan, dan kesabaran beliau penulisan skripsi ini dapat terselesaikan.

5. Ach. Nashichuddin, M. A selaku dosen pembimbing Keagamaan, yang telah memberikan saran dan bantuan selama penulisan skripsi ini.
6. Seluruh Dosen Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang
7. Ibunda tercinta, serta alm. Ayahanda, atas motivasi baik dalam bentuk moril maupun materiil serta ketulusan do'anya yang telah diberikan, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
8. Teman–teman Matematika angkatan 2003, atas segala dukungan, motivasi, rasa kekeluargaan dan kerja sama yang baik kepada penulis.
9. Sahabat-sahabat Galileo yang telah banyak memberikan dukungan dan motivasi dalam menyelesaikan skripsi ini.
10. Serta semua pihak yang tidak dapat Penulis sebutkan satu persatu yang banyak membantu dalam penulisan skripsi ini

Semoga segala bantuan dan partisipasi dari semua pihak mendapatkan imbalan pahala dari Allah SWT. Dalam penyusunan skripsi ini penulis menyadari sepenuhnya masih banyak kekurangan dan perlu mendapat penyempurnaan dari para pembaca.

Akhirnya penyusun berharap semoga skripsi ini bermanfaat, khususnya bagi penyusun dan bagi pembaca pada umumnya. Amin.

***Wallahulmuwaffiq Ilaa Aqwamit Thorieq***

Malang, 29 Maret 2008

Penulis

## DAFTAR ISI

## DAFTAR TABEL

## DAFTAR GAMBAR

NO Gambar Halaman

## DAFTAR LAMPIRAN

## ABSTRAK

**Mutholi'ah, Emy. 2008. Analisis Perbandingan Metode Beda Hingga Skema Implisit Dan Crank-Nicholson Pada Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial**. Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains Dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang, Pembimbing: I. Drs. Usman Pagalay, M. Si.
II. Ach. Nashichuddin, M. A.

**Kata kunci**: Skema Implisit, Skema Crank-Nicholson, Persamaan Diferensial Parsial

Metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang diformulasikan secara matematis dengan operasi aritmatika biasa (tambah, kurang, bagi dan kali). Salah satu penerapan metode numerik dalam perhitungan aritmatika adalah mencari solusi persamaan diferensial parsial. Metode yang digunakan antara lain metode beda hingga skema Implisit dan skema Crank-Nicholson. Penelitian ini bertujuan : (1) mengetahui solusi persamaan diferensial parsial dengan metode beda hingga skema Implisit, (2) mengetahui solusi persamaan diferensial parsial dengan metode beda hingga skema Crank-Nicholson, (3) mengetahui analisa perbandingan metode beda hingga skema Implisit dan Crank-Nicholson.

Dalam pembahasan penulis menggunakan persamaan keseimbangan massa reaktor yang berbentuk $\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - U\frac{\partial c}{\partial x} - \gamma c$, $0 < x < L$ , dimana $c(x,t)$ adalah konsentrasi, $D$ adalah koefisien dispersi, $U$ adalah kecepatan aliran dan $\gamma$ adalah koefisien orde pertama. Persamaan tersebut diubah kedalam skema Implisit dan skema Crank-Nicholson. Selanjutnya terbentuk sebuah sistem persamaan dalam bentuk matriks tridiagonal dan untuk penyelesaiannya, penulis menggunakan metode sapuan ganda choleski.

Dari analisa yang dilakukan pada langkah-langkah atau prosedur yang digunakan dari kedua skema tersebut (skema Implisit dan Crank-Nicholson), penulis dapat menyimpulkan bahwa untuk mencari solusi persamaan diferensial parsial lebih mudah jika menggunakan skema Implisit dari pada skema Crank-Nicholson.

# BAB I

# PENDAHULUAN

## 1.1. Latar Belakang

Perkembangan dan pertumbuhan ilmu pengetahuan dan teknologi dewasa ini sangat pesat sehingga tidak lepas dari bermacam-macam ilmu yang digunakan dalam menuju perkembangan dan pertumbuhan ilmu pengetahuan. Salah satu ilmu yang digunakan adalah Matematika. Kenyataan bahwa matematika banyak digunakan dalam pengembangan IPTEK menunjukkan bahwa antara IPTEK dan matematika mempunyai hubungan yang sangat erat. Menurut Sudjono (1988:7) "kemajuan teknologi yang sangat mengagumkan dewasa ini tidak mungkin dapat terjadi tanpa bantuan matematika. Matematika mempunyai peranan yang sangat utama, yaitu memberikan cara berfikir yang jelas, tegas, tepat dan konsisten sebagai sarana pengembang ilmu pengetahuan dan teknologi"

Sebagian besar dari sejarah Ilmu Pengetahuan Alam merupakan catatan dari usaha manusia secara kontinu untuk merumuskan konsep-konsep yang akan dapat menguraikan dunia nyata ke dalam istilah-istilah matematika. Metode numerik merupakan salah satu cabang ilmu matematika, khususnya matematika rekayasa, yang menggunakan bilangan untuk menirukan proses matematik. Proses matematik ini selanjutnya telah dirumuskan untuk menirukan keadaan sebenarnya. Didalam kegiatan rekayasa dan penelitian, setiap analisis diharapkan dapat menghasilkan bilangan yang diperlukan dalam perencanaan teknik ataupun penghayatan masalah.

Banyak permasalahan dalam bidang ilmu pengetahuan dan teknik yang dapat diformulasikan kedalam bentuk persamaan diferensial seperti persamaan lendutan balok, teori getaran, profil muka air sungai dan sebagainya. Persamaan diferensial merupakan suatu persamaan yang mengandung turunan fungsi. Berdasarkan variabel bebas, persamaan diferensial dibagi menjadi dua yaitu persamaan diferensial biasa (hanya mengandung satu variabel bebas) dan persamaan diferensial parsial (mengandung lebih dari satu variabel bebas). Ada beberapa metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial. *Pertama*, persamaan diferensial biasa, metode yang digunakan adalah metode Euler, metode Runge-Kutta, metode Heun, dan sebagainya. *Kedua*, persamaan diferensial parsial, metode yang digunakan adalah metode beda hingga skema Eksplisit, skema Implisit, skema Crank-Nicholson dan sebagainya.

Metode penyelesaian numerik tidak ada batasan mengenai bentuk persamaan diferensial. Penyelesaian diperoleh berupa iterasi numerik dari fungsi untuk berbagai variabel bebas. Penyelesaian suatu persamaan diferensial dilakukan pada titik-titik yang ditentukan berurutan. Untuk mendapatkan hasil yang lebih teliti, maka interval antara titik-titik yang berurutan dibuat semakin kecil.

Sasaran akhir dari analisis numerik yang dilakukan dalam metode numerik adalah diperolehnya metode yang terbaik untuk memperoleh jawaban yang berguna dari berbagai jawaban yang dapat diperoleh yang tidak dinyatakan dalam bentuk aljabar, persamaan diferensial biasa atau parsial, persamaan integral, atau kumpulan dari persamaan tersebut.

Adanya kemajuan dalam teknologi komputer yang memungkinkan pelaksanaan komputasi secara tepat dan cepat menjadikan berbagai metode penyelesaian persoalan dengan pendekatan numerik sangat berguna, karena antara lain :

1. Pendekatan numerik yang mungkin merupakan satu-satunya alternative penyelesaian dapat diperoleh secara efisien.
2. Pendekatan numerik memungkinkan pengkajian parametrik dari berbagai persoalan dari medan yang bersifat sembarang yang tidak dapat dipecahkan secara analitik.

Pada umumnya metode numerik tidak mengutamakan diperolehnya jawaban yang eksak (tepat), tetapi mengusahakan perumusan metode yang menghasilkan jawaban pendekatan yang berbeda dari jawaban yang eksak sebesar suatu nilai yang dapat diterima berdasarkan pertimbangan praktis, tetapi cukup dapat memberikan penghayatan persoalan yang dihadapi.

Dengan berbagai macam ilmu pengetahuan yang dimiliki manusia, dan berbagai tanda-tanda kebesaran yang telah ditunjukkan oleh-Nya, diharapkan manusia mampu untuk mengembangkan dan mencari suatu manfaat dari ilmu tertentu yang merupakan bagian dari mencari ilmu. Islam mendorong manusia untuk mencari ilmu dan kemajuan dalam penemuan-penemuan, dan menjanjikan ganjaran yang besar, dan upaya-upaya ini dianggap bagian dari pengabdian kepada Allah. Karena, pada dasarnya Allah tidak suka kepada ummat manusia yang bermalas-malasan, hanya menunggu perubahan nasib yang selalu dinilainya sebagai takdir Tuhan.

Allah berfirman dalam surat Al-Anbiyaa’, ayat 10:

لَقَدْ أَنزَلْنَآ إِلَيْكُمْ كِتَـٰبًا فِيهِ ذِكْرُكُمْ ۖ أَفَلَا تَعْقِلُونَ ﴿١٠﴾

*Artinya: ’’Sesungguhnya Telah kami turunkan kepada kamu sebuah Kitab yang di dalamnya terdapat sebab-sebab kemuliaan bagimu. Maka apakah kamu tiada memahaminya?’’* (Q.S. Al-Anbiyaa’, 21:10)

Pada ayat tersebut Allah memerintahkan kepada manusia untuk berfikir terhadap apa yang telah diciptakan-Nya. Diharapkan manusia dapat memanfaatkan akalnya dalam mengembangkan ilmu pengetahuan dan teknologi yang telah diciptakan oleh Allah dengan perantara semua ciptaan-ciptaan-Nya.

Manusia diwajibkan untuk mengembangkan akalnya untuk menciptakan sesuatu yang dianggap dapat menjadikan sesuatu hal tersebut lebih baik dan lebih maksimal hasilnya. Dengan akal yang telah dikaruniakan oleh Allah, manusia dapat berkreasi untuk memunculkan ide-ide demi meningkatkan proses kemanusiaan menuju kesempurnaan hasil yang diinginkan. (Jamal Baidawi dan Mustofa Ahmad, 1997:72).

Didalam dunia matematika, seperti yang telah dijelaskan diatas, banyak metode yang digunakan dalam menyelesaikan suatu permasalahan. Akan tetapi, tetap saja hanya ada satu penyelesaian yang dianggap paling baik dan paling sempurna. Walaupun kesempurnaan itu tiada yang mutlak, kecuali Allah SWT.

Berdasarkan dari latar belakang di atas, maka penulis tertarik untuk mengambil judul ***“Analisis Perbandingan Metode Beda Hingga Skema Implisit dan Crank-Nicholson Pada Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial ”***

## 1.2. Rumusan Masalah

Dalam penelitian ini, diberikan beberapa rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana penyelesaian persamaan diferensial parsial dengan metode beda hingga skema Implisit ?
2. Bagaimana penyelesaian persamaan diferensial parsial dengan metode beda hingga skema Crank-Nicholson ?
3. Bagaimana analisis perbandingan metode beda hingga skema Implisit dan Crank-Nicholson pada persamaan diferensial parsial?

## 1.3. Batasan Masalah

Dalam pembahasan ini penulis membatasi ruang lingkup permasalahan penelitian ini, antara lain :

1. Persamaan diferensial parsial yang digunakan adalah persamaan keseimbangan massa reaktor, yaitu dalam bentuk:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - U\frac{\partial c}{\partial x} - \gamma c, \quad 0 < x < L$$

2. Jarak interval yang digunakan adalah pada $\Delta x = 0,05$ dan $\Delta t = 0,025$

## 1.4. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah diatas, penelitian ini mempunyai tujuan sebagai berikut :

1. Mengetahui penyelesaian persamaan diferensial parsial dengan metode beda hingga skema Implisit

2. Mengetahui penyelesaian persamaan diferensial parsial dengan metode beda hingga skema Crank-Nicholson
3. Menganalisis perbandingan metode beda hingga skema Implisit dan Crank-Nicholson pada persamaan diferensial parsial.

## 1.5. Manfaat Penelitian

1. Bagi peneliti, sebagai tambahan wawasan dan pengetahuan mengenai analisis perbandingan metode beda hingga skema Implisit dan metode beda hingga skema Crank-Nicholson pada persamaan diferensial parsial, khususnya persamaan keseimbangan massa reaktor.
2. Bagi pemerhati matematika, dapat memperluas wawasan dan pengetahuan dalam bidang matematika yang diaplikasikan pada bidang yang lain, khususnya kimia fisika.

## 1.6. Metode Penelitian

Jenis penelitian ini adalah deskriptif kuantitatif, yaitu pencarian fakta dengan interpretasi tepat untuk membuat gambaran atau lukisan secara sistematis, faktual dan akurat mengenai fakta-fakta, sifat-sifat serta hubungan antar fenomena yang diselidiki. Dengan demikian pendekatan yang digunakan adalah pendekatan kualitatif dengan metode *"kajian kepustakaan"* atau "*literatur study"*.

Teknik kajian yang digunakan dalam pembahasan skripsi ini adalah penelitian kepustakaan (*Library Research*). Penelitian kepustakaan merupakan penampilan argumentasi penalaran keilmuan yang memaparkan hasil kepustakaan berisi satu topik kajian yang didalamnya memuat beberapa gagasan yang berkaitan dan harus didukung oleh data yang diperoleh dari berbagai sumber kepustakaan.

Bahan kajian dalam skripsi ini adalah buku-buku mengenai metode numerik dan buku tentang persamaan diferensial parsial. Literatur utama yang dijadikan acuan oleh penulis adalah Caldwell, Jim dan S. Douglas K. 2004. *Mathematical Modelling*, *Case Studies and Projects.* USA: Kluwer Academic Publisher, Triatmodjo, Bambang. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi Dengan Program Komputer*. Yogyakarta : Beta Offset, dan Lam, Chung-Yau. 1994. *Applied Numerical Methods For Partial Differential Equations, an Introduction With Spreadsheet Programs.* Singapore: Nanyang Technological University. Sedangkan untuk kajian keagamaan, penulis menggunakan buku rujukan Mansur, M. Laily. 1994. *Pemikiran Kalam Dalam Islam.* Jakarta: PT Pustaka Firdaus, Syihab, Z. A. 1998. *Akidah Ahlus Sunnah, Versi Salaf-Khalaf dan Posisi Asya'irah Diantara Keduanya.* Jakarta: Bumi Aksara, dan lain-lain

Dalam penelitian ini, langkah-langkah umum yang dilakukan penulis adalah sebagai berikut :

1. Menentukan persamaan diferensial parsial yaitu persamaan keseimbangan massa reaktor
2. Menyelesaikannya dengan metode beda hingga skema Implisit
3. Menyelesaikannya dengan metode beda hingga skema Crank-Nicholson

4. Menganalisis perbandingan hasil yang diperoleh dari metode beda hingga skema Implisit dan Crank-Nicholson dengan melihat kelebihan dan kelemahan dari kedua skema tersebut.

## 1.7. Sistematika Penulisan

Sistematika yang digunakan dalam pembahasan ini nadalah :

BAB I : Pendahuluan, yang terdiri atas latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika pembahasan.

BAB II : Kajian teori, yang terdiri atas penjelasan-penjelasan tentang persamaan diferensial parsial dan bagian-bagiannya, deret taylor, metode beda hingga, skema Eksplisit, skema Implisit, skema Crank-Nicholson, persamaan kesetimbangan massa reaktor, dan logika dalam Islam, yaitu kajian tentang aliran Mu'tazilah.

BAB III : Pembahasan, berisi tentang prosedur atau langkah-langkah yang digunakan untuk mencari solusi persamaan diferensial parsial dengan skema Implisit dan Crank-Nicholson serta menganalisis perbandingan hasil dari kedua skema tersebut.

BAB IV : Penutup, terdiri atas kesimpulan serta saran-saran yang berkaitan dengan permasalahan yang dikaji.

# BAB II

# KAJIAN TEORI

## 2.1. Persamaan Diferensial

**Definisi 1**

Persamaan yang menyangkut satu atau lebih fungsi (peubah tak bebas) beserta turunannya terhadap satu atau lebih peubah bebas disebut persamaan diferensial. (Pamuntjak, 1990:1-11)

Contoh $: \dfrac{dc}{dx} = x + 5$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}$$

**Definisi 2**

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial yang menyangkut satu atau lebih fungsi (peubah tak bebas) beserta turunannya terhadap satu peubah bebas. (Pamuntjak, 1990:1-12)

Contoh $: \dfrac{d^2c}{dx^2} + 3\dfrac{dc}{dx} + 2c = 0$

**Definisi 3**

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial yang menyangkut satu atau lebih fungsi (peubah tak bebas) beserta turunannya terhadap lebih dari satu peubah bebas. (Pamuntjak, 1990:1-12)

Contoh $: \dfrac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 c}{\partial y^2} = \dfrac{1}{C^2}\dfrac{\partial c}{\partial t}$

**Definisi 4**

Orde (tingkat) suatu persamaan diferensial adalah orde (tingkat) dari turunan yang terdapat pada persamaan itu, yang tingkatnya paling tinggi. (Pamuntjak, 1990:1-13)

Sedangkan derajat atau *degree* dari suatu persamaan diferensial adalah pangkat tertinggi dari turunan tertinggi dalam persamaan diferensial itu

Contoh:

1. $\left[\frac{dc}{dx}\right]^2 - 3x = 0$ : PD orde satu, derajat dua

2. $x\frac{d^2c}{dx^2} + 3\frac{dc}{dx} - 15x = 0$ : PD Orde dua, derajat satu

3. $\frac{d^3c}{dx^3} - 8\left[\frac{d^2c}{dx^2}\right]^3 + \frac{dc}{dx} = 10x$ : PD orde tiga, derajat tiga

4. $\left[\frac{d^4c}{dx^4}\right]^2 + \left[\frac{d^3c}{dx^3}\right]^4 - y = 0$ : PD orde empat, derajat empat

### 2.1.1 Persamaan Diferensial Parsial

Berdasarkan pada definisi 3, dapat dijelaskan ketika ada sebuah fungsi $c(x,t)$ yang bergantung pada dua variable bebas $x$ dan $t$, dan jika diturunkan terhadap $x$ maka $t$ bernilai konstan dan jika diturunkan terhadap $t$ maka $x$ bernilai konstan.

Adapun notasi pelambangannya secara berturut-turut adalah

$$\frac{\partial c}{\partial x} \text{ dan } \frac{\partial c}{\partial t},$$

dengan symbol $\partial$ yang menunjukkan turunan parsialnya. Notasi itu dapat dipakai untuk pengerjaan turunan orde dua.

Turunan $x$ dari $\frac{\partial c}{\partial x}$ dilambangkan dengan $\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$ dan turunan $t$ dari $\frac{\partial c}{\partial x}$ adalah $\frac{\partial^2 c}{\partial x \partial t}$ dan seterusnya (Levine, 1997:4).

Contoh: $c = x^2 + 2y^2 + xy$

Maka : $\frac{\partial c}{\partial x} = 2x + y, \ \frac{\partial c}{\partial y} = 4y + x$

$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = 4$

Bentuk umum persamaan diferensial parsial orde-2 dan dua dimensi adalah :

$$A\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + C\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + D\frac{\partial^2 f}{\partial x} + E\frac{\partial^2 f}{\partial y} + Ff + G = 0 \tag{2.1}$$

dengan $A,B,C,D,E,F$ dan $G$ bisa berupa fungsi dari variabel $x$ dan $y$ dan variabel tidak bebas $f$ .(Djojodihardjo, 2000:304)

Ada beberapa bentuk persamaan diferensial parsial, yaitu :

1. *Persamaan Ellips*

Yang termasuk dalam Persamaan *Ellips* adalah Persamaan Poisson :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + g = 0 \tag{2.2}$$

dan Persamaan Laplace : $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$ (2.3)

Persamaan Ellips biasanya berhubungan dengan masalah keseimbangan atau kondisi permanen (tidak tergantung waktu), dan penyelesaiannya memerlukan kondisi batas disekeliling daerah tinjauan. Contoh dari persamaan ellips adalah aliran air tanah di bawah bendungan karena adanya pemompaan, defleksi plat karena adanya pembebanan, dan sebagainya.

2. *Persamaan Parabola*

Persamaan parabola biasanya berupa persamaan yang tergantung pada waktu (tidak permanen). yang termasuk persamaan parabola adalah persamaan perambatan panas, persamaan difusi dan persamaan telegraf, yang berbentuk :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{2.4}$$

3. *Persamaan Hiperbola*

Persamaan hiperbola biasanya berhubungan dengan getaran, atau permasalahan dimana terjadi *discontinue* dalam waktu. Persamaan gelombang merupakan salah satu bentuk persamaan hiperbola yang paling sederhana yang mempunyai bentuk :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = C^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{2.5}$$

## 2.2. Deret Taylor

Deret Taylor merupakan dasar yang digunakan untuk menyelesaikan masalah dalam metode numerik, terutama penyelesaian persamaan diferensial. Jika suatu fungsi $c(x)$ diketahui dititik $x_i$ dan semua turunan dari $c$ terhadap $x$ diketahui pada titik tersebut, maka dengan deret Taylor dapat dinyatakan nilai $c$ pada titik $x_{i+1}$ yang terletak pada jarak $\Delta x$ dan $x_i$ .

$$c(x_{i+1}) = c(x_i) + c'(x_i)\frac{\Delta x}{1!} + c''(x_i)\frac{\Delta x^2}{2!} + c'''(x_i)\frac{\Delta x^3}{3!} + \ldots + c^n(x_i)\frac{\Delta x^n}{n!} + R_n$$

(2.6)

Keterangan:

| | |
|---|---|
| $c(x_i)$ | = fungsi di titik $x_i$ |
| $c(x_{i+1})$ | = fungsi dititik $x_{i+1}$ |
| $c', c'', c''', \ldots, c^n$ | = turunan pertama, kedua, ketiga,…, ke-n dari fungsi |
| $\Delta x$ | = langkah ruang, yaitu jarak antara $x_i$ dan $x_{i+1}$ |
| $R_n$ | = kesalahan pemotongan |
| ! | = operator faktorial |

(Triatmodjo, 2002:8)

### 2.1.1. Deret Taylor Orde Nol

Deret Taylor yang hanya memperhitungkan satu suku pertama dari ruas kanan, maka disebut perkiraan orde nol.

$$c(x_{i+1}) \approx c(x_i) \tag{2.7}$$

Nilai $c$ pada titik $x_{i+1}$ sama dengan nilai pada $x_i$. Perkiraan tersebut benar jika fungsi yang diperkirakan adalah suatu konstan. Jika fungsi tidak konstan, maka harus diperhitungkan suk-suku berikutnya dari deret Taylor.

### 2.1.2. Deret Taylor Orde Satu

Deret Taylor yang hanya memperhitungkan dua suku pertama dari ruas kanan, maka disebut perkiraan orde satu yang merupakan bentuk persamaan garis lurus (linier). Sehingga persamaan (2.6) dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut:

$$c\left(x_{i+1}\right) \approx c\left(x_i\right) + c'\left(x_i\right)\frac{\Delta x}{1!} \tag{2.8}$$

### 2.1.3. Deret Taylor Orde Dua

Deret Taylor yang hanya memperhitungkan tiga suku pertama dari ruas kanan, maka disebut perkiraan orde dua.

$$c\left(x_{i+1}\right) \approx c\left(x_i\right) + c'\left(x_i\right)\frac{\Delta x}{1!} + c''\left(x_i\right)\frac{\Delta x^2}{2!} \tag{2.9}$$

### 2.1.4. Kesalahan Pemotongan

"Deret Taylor merupakan deret tak berhingga yang mempunyai suku-suku yang tak berhingga, sehingga untuk mendapatkan hasil yang eksak harus dihitung setiap bilangan dari suku-suku yang tak berhingga dan menjumlahkannya dalam deret yang tentunya membutuhkan waktu yang tak berhingga" (Ferryanto, 1989:40)..Artinya, Deret Taylor akan memberikan perkiraan suatu fungsi dengan benar jika semua suku dari deret tersebut diperhitungkan. Dalam praktek hanya beberapa suku pertama saja yang diperhitungkan sehingga hasil perkiraan tidak tepat seperti pada penyelesaian analitik, ada kesalahan karena tidak memperhitungkan suku-suku terakhir dari deret Taylor. Karena itu jawaban yang diperoleh hanya berupa pendekatan dari pengambilan beberapa suku dan mengabaikan sisanya. Kesalahan ini disebut dengan kesalahan pemotongan, yang ditulis dalam bentuk:

$$R_n = O\left(\Delta x^{n+1}\right)$$

Indeks $n$ menunjukkkan bahwa deret yang diperhitungkan adalah sampai pada suku ke-n, sedangkan subskrip $n+1$ menunjukkan bahwa kesalahan pemotongan mempunyai order $n+1$, notasi $O\left(\Delta x^{n+1}\right)$ berarti bahwa kesalahan pemotongan mempunyai order $\Delta x^{n+1}$, atau kesalahan adalah sebanding dengan langkah ruang pangkat $n+1$. kesalahan pemotongna tersebut kecil jika :

1. Interval $\Delta x$ adalah kecil.
2. Memperhitungkan lebih banyak suku dari deret Taylor.

(Triatmodjo, 2002:9)

## 2.3. Diferensial Numerik

Diferensial numerik digunakan untuk memperkirakan bentuk diferensial kontinu menjadi bentuk diskret. Diferensial numerik ini banyak digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Bentuk tersebut dapat diturunkan berdasarkan deret Taylor.

### 2.2.1 Pendekatan Diferensial Pertama

Diberikan fungsi $c(x)$, secara analitis untuk $c(x+\Delta x)$ atau $c(x_{i+1})$ dapat dijabarkan dari deret taylor disekitar $x$ sebagai berikut:

$$c\left(x_{i+1}\right)=c\left(x_i\right)+c'\left(x_i\right)\frac{\Delta x}{1!}+c''\left(x_i\right)\frac{\Delta x^2}{2!}+c'''\left(x_i\right)\frac{\Delta x^3}{3!}+\ldots \tag{2.10.a}$$

$$c\left(x_{i+1}\right)=c\left(x_i\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\Delta x)^n}{n!}c^n\left(x_i\right) \tag{2.10.b}$$

Dengan mengeluarkan faktor $c'(x_i)$, diperoleh:

$$c'(x_i)=\frac{c\left(x_{i+1}\right)-c\left(x_i\right)}{\Delta x}-c''\left(x_i\right)\frac{\Delta x^2}{2!}+c'''\left(x_i\right)\frac{\Delta x^3}{3!}-\ldots \tag{2.10.c}$$

Selanjutnya menjumlahkan semua terms dengan faktor $\Delta x$ atau yang lebih tinggi dengan menotasikannya dengan $O(\Delta x = \text{baca orde dari } \Delta\text{x})$ diperoleh:

$$c'(x_i) = \frac{\partial c}{\partial x} \approx \frac{c(x_{i+1}) - c(x_i)}{\Delta x} + O(\Delta x) \tag{2.11}$$

Jika digunakan indeks subskrip $i$ untuk menyatakan titik diskret pada arah $x$, persamaan diatas dapat ditulis:

$$\left.\frac{\partial c}{\partial x}\right|_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{\Delta x} + O(\Delta x) \tag{2.12}$$

Persamaan diatas dikenal dengan pendekatan diferensial pertama dengan langkah maju dengan order $\Delta x$ atau orde-1. Selanjutnya untuk $c(x - \Delta x)$ atau $c(x_{i-1})$ seperti kita turunkan dengan deret taylor, seperti langkah diatas:

$$c(x_{i-1}) = c(x_i) - c'(x_i)\frac{\Delta x}{1!} + c''(x_i)\frac{\Delta x^2}{2!} - c'''(x_i)\frac{\Delta x^3}{3!} + ... \tag{2.13.a}$$

$$c(x_{i-1}) = c(x_i) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\pm\frac{(\Delta x)^n}{n!}\right]c^n(x_i), \quad \begin{array}{l} + \text{ untuk n genap} \\ - \text{ untuk n ganjil} \end{array} \tag{2.13.b}$$

Dengan mengeluarkan faktor $c'(x_i)$, diperoleh:

$$c'(x_i) = \frac{\partial c}{\partial x} \approx \frac{c(x_i) - c(x_{i-1})}{\Delta x} + O(\Delta x) \tag{2.14}$$

$$\left.\frac{\partial c}{\partial x}\right|_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \tag{2.15}$$

Persamaan diatas dikenal dengan pendekatan diferensial pertama dengan langkah mundur dengan order $\Delta x$ atau orde-1.

Sedangkan untuk pendekatan diferensial pertama terpusat yang artinya pendekatan turunan fungsi adalah pada titik $x_{i-1}$ dan $x_{i+1}$. Pendekatan tersebut dapat dilakukan dengan mengurangkan persamaan (2.10.a) dengan persamaan (2.13.a) yaitu:

$$c\left(x_{i+1}\right)=c\left(x_i\right)+c'\left(x_i\right)\frac{\Delta x}{1!}+c''\left(x_i\right)\frac{\Delta x^2}{2!}+c'''\left(x_i\right)\frac{\Delta x^3}{3!}+\ldots$$

$$c\left(x_{i-1}\right)=c\left(x_i\right)-c'\left(x_i\right)\frac{\Delta x}{1!}+c''\left(x_i\right)\frac{\Delta x^2}{2!}-c'''\left(x_i\right)\frac{\Delta x^3}{3!}+\ldots$$

sehingga diperoleh:

$$c\left(x_{i+1}\right)-c\left(x_{i-1}\right)\approx 2(\Delta x)c'(x_i)-\frac{(\Delta x)^3}{3!}c'''(x_i)+\ldots \tag{2.16}$$

Dengan mengeluarkan faktor $c'(x_i)$, diperoleh:

$$c'(x_i)=\frac{\partial c}{\partial x}\approx\frac{c\left(x_{i+1}\right)-c\left(x_{i-1}\right)}{2(\Delta x)}+O(\Delta x)^2 \tag{2.17}$$

$$\left.\frac{\partial c}{\partial x}\right|_i=\frac{c_{i+1}-c_{i-1}}{2(\Delta x)}+O(\Delta x)^2 \tag{2.18}$$

Persamaan diatas dikenal dengan pendekatan diferensial pertama dengan langkah terpusat dengan order $\left(\Delta x\right)^2$ atau orde-2.

### 2.2.2 Pendekatan Diferensial Kedua

Pendekatan diferensial kedua dilakukan dengan pendekatan deret taylor sebagai berikut:

$$c\left(x_{i+2}\right)=c\left(x_i\right)+c'\left(x_i\right)\frac{2\Delta x}{1!}+c''\left(x_i\right)\frac{(2\Delta x)^2}{2!}+\ldots \tag{2.19}$$

$$c\left(x_{i+1}\right)=c\left(x_i\right)+c'\left(x_i\right)\frac{\Delta x}{1!}+c''\left(x_i\right)\frac{\Delta x^2}{2!}+\ldots \tag{2.20}$$

Dengan mengurangkan persamaan pertama dengan 2 kali persamaan kedua, maka akan diperoleh:

$$c\left(x_{i+2}\right)-2c\left(x_{i+1}\right)=-c\left(x_i\right)+c''\left(x_i\right)\frac{2(\Delta x)^2}{2!}+\ldots \tag{2.21}$$

Dengan mengeluarkan faktor $c''(x_i)$, diperoleh:

$$c''\left(x_i\right)=\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\approx\frac{c\left(x_{i+2}\right)-2c\left(x_{i+1}\right)+c\left(x_i\right)}{(\Delta x)^2}+O(\Delta x) \tag{2.22}$$

$$\left.\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\right|_i=\frac{c_{i+2}-2c_{i+1}+c_i}{(\Delta x)^2}+O(\Delta x) \tag{2.23}$$

Persamaan diatas dikenal dengan pendekatan diferensial kedua dengan langkah maju dengan order $\Delta x$ atau orde-1.

Pendekatan yang sama diperoleh untuk $c(x_{i-1})$ dan c$(x_{i-2})$ yaitu:

$$c''(x_i)=\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\approx\frac{c(x_i)-2c(x_{i-1})+c(x_{i-2})}{(\Delta x)^2}+O(\Delta x) \tag{2.24}$$

$$\left.\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\right|_i=\frac{c_i-2c_{i-1}+c_{i-2}}{(\Delta x)^2}+O(\Delta x) \tag{2.25}$$

Persamaan diatas dikenal dengan pendekatan diferensial kedua dengan langkah mundur dengan order $\Delta x$ atau orde-1.

Untuk mendapatkan diferensial kedua dengan langkah terpusat, maka dengan mudah menjumlahkan persamaan untuk langkah maju dan mundur, selanjutnya diperoleh:

$$c''(x_i)=\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\approx\frac{c(x_{i+1})-2c(x_i)+c(x_{i-1})}{(\Delta x)^2}+O(\Delta x)^2 \tag{2.26}$$

$$\left.\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\right|_i=\frac{c_{i+1}-2c_i+c_{i-1}}{(\Delta x)^2}+O(\Delta x)^2 \tag{2.27}$$

Persamaan diatas dikenal dengan pendekatan turunan kedua dengan langkah terpusat dengan order $(\Delta x)^2$ atau orde-2.

### 2.2.3 Diferensial Terhadap Variabel Lain

Apabila fungsi mengandung lebih dari satu variabel bebas, seperti $c(x,t)$ maka bentuk deret Taylor menjadi:

$$c(x_{i+1},t_{l+1}) = c(x_i,t_l) + \frac{\partial c}{\partial x}\frac{\Delta x}{1!} + \frac{\partial c}{\partial t}\frac{\Delta t}{1!} + \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{\partial^2 c}{\partial t^2}\frac{\Delta t^2}{2!} + ... \quad (2.28)$$

Dengan cara yang sama, turunan pertama terhadap variabel x dan t berturut-turut dapat ditulis dalam bentuk (diferensial maju):

$$\frac{\partial c}{\partial x} \approx \frac{c(x_{i+1},t_l) - c(x_i,t_l)}{\Delta x} \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} \approx \frac{c(x_i,t_{l+1}) - c(x_i,t_l)}{\Delta t} \quad (2.30)$$

Untuk menyederhanakan penulisan, selanjutnya bentuk $c(x_i,t_l)$ ditulis menjadi $c_{i,l}$ dengan subskrip $i$ dan $l$ menunjukkan konponen dalam arah sumbu $x$ dan sumbu $t$. Dengan cara seperti itu, maka persamaan (2.29) dan persamaan (2.30) dapat ditulis manjadi:

$$\frac{\partial c}{\partial x} \approx \frac{c_{i+1,l} - c_{i,l}}{\Delta x} \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} \approx \frac{c_{i,l+1} - c_{i,l}}{\Delta t} \quad (2.32)$$

Untuk diferensial terpusat bentuk di atas menjadi:

$$\frac{\partial c}{\partial x} \approx \frac{c_{i+1,l} - c_{i-1,l}}{2\Delta x} \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} \approx \frac{c_{i,l+1} - c_{i,l-1}}{2\Delta t} \quad (2.34)$$

Dengan cara yang sama, turunan kedua terhadap *x* dan *t* dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \approx \frac{c_{i+1,l} - 2c_{i,l} + c_{i+1,l}}{\Delta x^2} \tag{2.35}$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial t^2} \approx \frac{c_{i,l-1} - 2c_{i,l} + c_{i,l+1}}{\Delta t^2} \tag{2.36}$$

(Triatmodjo, 2002:7)

## 2.4. Metode Beda Hingga

Pengertian penyelesaian dengan metode beda hingga dapat dijelaskan dengan meninjau suatu luasan yang merupakan hasil dari persamaan diferensial parsial yang mempunyai satu variable tak bebas *c* dan dua variable bebas *x* dan *t*. setiap persamaan diferensial yang berlaku pada luasan tersebut menyatakan keadaan suatu titik atau pias yang cukup kecil di luasan tersebut.

Pada gambar (2.1) ditunjukkan suatu luasan yang dipotong-potong menjadi pias kecil yang berhingga, yang apabila diproyeksikan kebidang $x-t$ akan menjadi seperti pada gambar (2.2). Untuk mendapatkan turunan di titik $P(i,l)$ dibuat potongan sejajar $c-x$. Harga $\frac{\partial c}{\partial t}$ di titik P menyatakan sudut tangensial dari garis singgung T-T pada gambar (2.3). Sudut tersebut dapat didekati dengan beberapa cara yaitu (Wignyosukarto, 1986:53):

1. Sudut dari garis singgung juring AP di titik P disebut pendekatan diferensi mundur

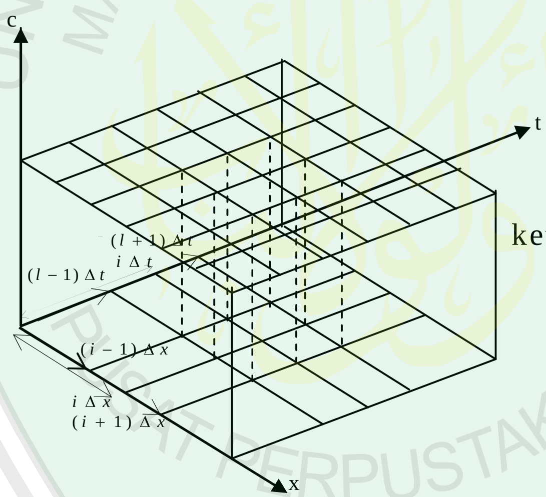
$$\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)_i^l \approx \frac{c_i^l - c_{i-1}^l}{\Delta x} \tag{2.37}$$

2. Sudut dari garis singgung juring BP di titik P disebut pendekatan diferensi maju

$$\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)_i^l \approx \frac{c_{i+1}^l - c_i^l}{\Delta x} \qquad (2.38)$$

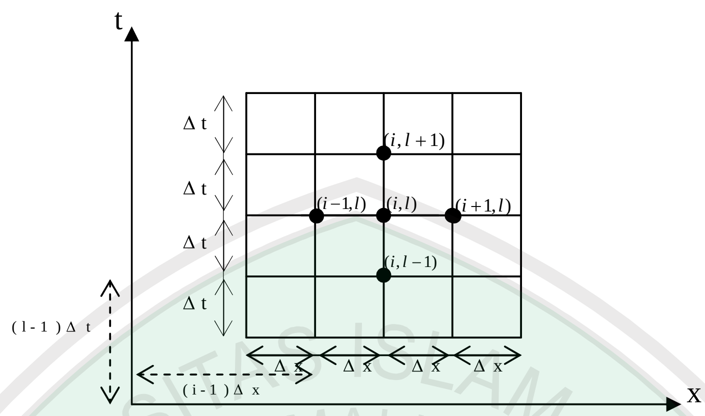
3. Sudut dari garis singgung juring AP di titik P disebut pendekatan diferensi tengah

$$\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)_i^l \approx \frac{c_{i+1}^l - c_{i-1}^l}{\Delta x} \qquad (2.39)$$

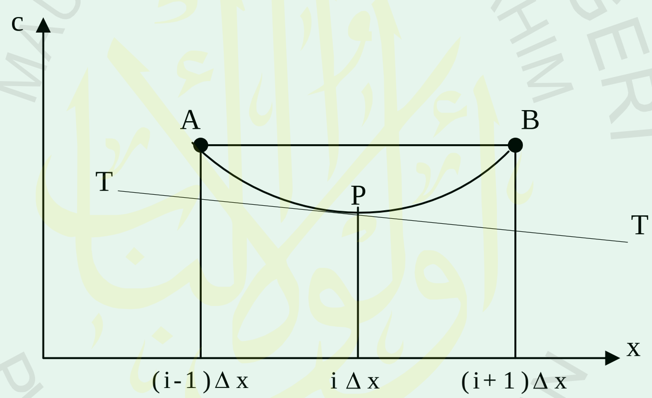



ket: Pias atas sejajar dengan pias bawah

Gambar 2.1. Pias-pias beda hingga




Gambar 2.2. Proyeksi pias-pias ke bidang x-t




Gambar 2.3. Garis singgung sejajar bidang x-c

## 2.5. Skema Beda Hingga

Untuk mempelajari skema beda hingga, misal diberikan persamaan parabola yaitu persamaan perambatan panas satu dimensi, sebagai berikut:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = K\,\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \tag{2.40}$$

dengan syarat awal adalah:

$$T(x,0) = a_0(x) \qquad ,0 < x < L$$

dengan syarat batas sebagai berikut:

$$T(0,t) = b_0(t) \qquad ,t < 0$$

$$T(L,t) = b_L(t) \qquad ,t < 0$$

(Yang, 2005:406 )

Untuk menyelesaikan sistem persamaan diatas dengan skema beda hingga akan dihitung nilai pendekatan $T$ (temperatur) pada jaringan titik $(x_i, t_l)$ dengan domain komputasi didiskritkan menggunakan grid yang *uniform* baik pada arah $x$ maupun arah $t$ sebagai berikut:

$$t_l = l \quad \Delta t \qquad ,t \geq 0$$
$$x_i = i \quad \Delta x \qquad ,0 \leq i \leq n$$

dimana n adalah banyaknya pias.

### 2.5.1 Skema Eksplisit

Pada skema Eksplisit, variabel pada waktu $l+1$ dihitung berdasarkan variabel pada waktu $l$ yang sudah diketahui. Dengan menggunakan skema diferensial maju untuk turunan pertama terhadap $t$, serta diferensial terpusat untuk turunan kedua terhadap $x$, fungsi fariabel (temperatur) $T(x,t)$ didekati oleh bentuk berikut:

$$T(x,t) = T_i^l \tag{2.41}$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{T_i^{l+1} - T_i^l}{\Delta t} \tag{2.42}$$

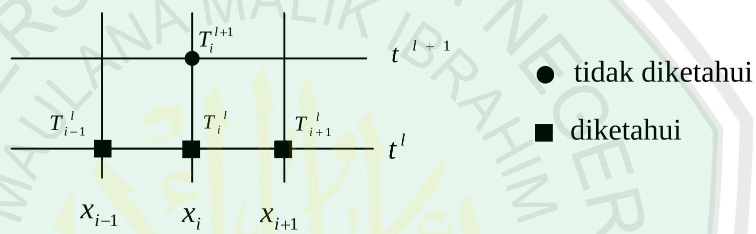
$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1}^l - 2T_i^l + T_{i-1}^l}{\Delta x^2} \tag{2.43}$$

Dengan menggunakan skema di atas, dengan anggapan bahwa $K$ konstan, maka persamaan (2.40) menjadi sebagai berikut:

$$\frac{T_i^{l+1} - T_i^l}{\Delta t} = K\left(\frac{T_{i+1}^l - 2T_i^l + T_{i-1}^l}{\Delta x^2}\right) \tag{2.44}$$

atau:

$$T_i^{l+1} = T_i^l + K\,\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left(T_{i+1}^l - 2T_i^l + T_{i-1}^l\right)$$

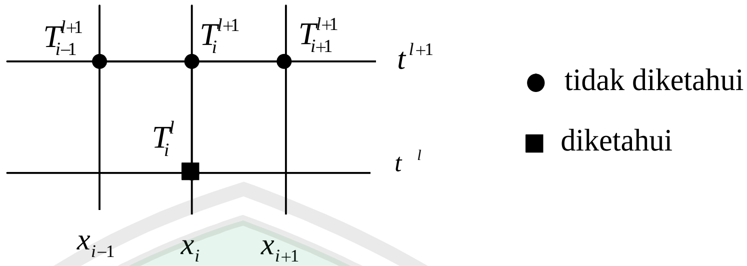



Gambar 2.4. Skema Eksplisit pada persamaan perambatan panas

Dari gambar (2.4), jarak antara titik hitungan (pajang pias) adalah $\Delta x = L/n$, dengan $n$ adalah jumlah pias, sedang interval waktu hitungan adalah $\Delta t$. Nilai $T_i^{l+1}$ dapat diperoleh secara eksplisit dari nilai sebelumnya, yaitu $T_{i-1}^l$, $T_i^l$, $T_{i+1}^l$. Dengan nilai $l$ yang sudah diketahui, memungkinkan untuk menghitung $T_i^{l+1} (i = 1,\ 2,\ \ldots, n-1)$.

### 2.5.2 Skema Implisit

Pada skema Eksplisit, ruas kanan ditulis pada waktu $l$ yang sudah diketahui nilainya, akan tetapi pada skema Implisit ruas kanan ditulis pada waktu $l+1$ yang tidak diketahui nilainya. Gambar (2.5) merupakan jaringan titik hitung pada skema Implisit, dimana turunannya didekati sebuah waktu pada saat $l+1$.




Gambar 2.5. Skema Implisit pada persamaan perambatan panas

Dari gambar (2.5), fungsi $T(x,t)$ dan turunannya didekati oleh bentuk berikut:

$$T(x,t) = T_i^l$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{T_i^{l+1} - T_i^l}{\Delta t} \tag{2.45}$$

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1}^{l+1} - 2T_i^{l+1} + T_{i-1}^{l+1}}{\Delta x^2} \tag{2.46}$$

Sehingga persamaan (2.44) dapat ditulis dalam bentuk beda hingga menjadi:

$$\frac{T_i^{l+1} - T_i^l}{\Delta t} = K\left(\frac{T_{i+1}^{l+1} - 2T_i^{l+1} + T_{i-1}^{l+1}}{\Delta x^2}\right) \tag{2.47}$$

$$\frac{1}{\Delta t}T_i^{l+1} - \frac{K}{\Delta x^2}T_{i-1}^{l+1} + \frac{2K}{\Delta x^2}T_i^{l+1} - \frac{K}{\Delta x^2}T_{i+1}^{l+1} = \frac{1}{\Delta t}T_i^l$$

$$-\frac{K}{\Delta x^2}T_{i-1}^{l+1} + \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{2K}{\Delta x^2}\right)T_i^{l+1} - \frac{K}{\Delta x^2}T_{i+1}^{l+1} = \frac{1}{\Delta t}T_i^l$$

Atau

$$AT_{i-1}^{l+1} + BT_i^{l+1} - CT_{i+1}^{l+1} = \frac{1}{\Delta t}T_i^l \tag{2.48}$$

Dimana:

$$A = \frac{K}{\Delta x^2}$$

$$B = \frac{1}{\Delta t} + \frac{2K}{\Delta x^2}$$

$$C = \frac{K}{\Delta x^2}$$

Nilai $T_i^{l+1}$ tidak diketahui besarnya, sedangkan nilai $T_i^l$ diketahui besarnya. Diasumsikan bahwa untuk $i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1$, maka dari persamaan (2.48) akan terbentuk sistem persamaan seperti berikut:

$$i = 1 \rightarrow\ - AT_0^{\,l+1} + BT_1^{\,l+1} - CT_2^{\,l+1} = \frac{1}{\Delta t} T_1^{\,l}$$

$$i = 2\ \rightarrow\ - Ac_1^{l+1} + Bc_2^{l+1} - Cc_3^{l+1} = \frac{1}{\Delta t} T_2^{\,l}$$

$$i = 3\ \rightarrow\ - AT_2^{\,l+1} + BT_3^{\,l+1} - CT_4^{\,l+1} = \frac{1}{\Delta t} T_3^{\,l}$$

$$\vdots$$

$$i = n-1 \rightarrow\ - AT_{n-2}^{\,l+1} + BT_{n-1}^{\,l+1} - CT_n^{\,l+1} = \frac{1}{\Delta t} T_{n-1}^{\,l}$$

dengan diketahui nilai awal dan nilai batasnya, dalam bentuk matrik adalah:

$$\begin{bmatrix} B & -C & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 \\ -A & B & -C & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A & B & -C & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & -A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^{l+1} \\ T_2^{l+1} \\ T_3^{l+1} \\ . \\ . \\ T_{n-1}^{l+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ab_0 + \dfrac{1}{\Delta t} T_1^l \\ \dfrac{1}{\Delta t} T_2^l \\ \dfrac{1}{\Delta t} T_3^l \\ . \\ . \\ \dfrac{1}{\Delta t} T_{n-1}^l + Cb_L \end{bmatrix} \qquad (2.49)$$

(Yang, 2005:407)

Atau

$$R\overline{T_i^{l+1}} = S$$

Dengan menggunakan operasi matriks, solusinya adalah:

$$\overline{\mathbf{T}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{l+1}}} = \mathbf{R}^{-1}\,\mathbf{S} \tag{2.50}$$

dari sini diperoleh nilai $\overline{\mathbf{T}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{l+1}}}$ untuk $i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots, n-1$.

### 2.5.3 Skema Crank-Nicholson

Skema Crank-Nicholson merupakan pengembangan dari skema Eksplisit dan skema Implisit. Pada skema skema Eksplisit, pendekatan solusi $c(x_i, t_{l+1})$ dihitung menggunakan jaringan titik $(x_i, t_l)$. Sedangkan pada skema implisit pendekatan solusi $c(x_i, t_l)$ dihitung menggunakan jaringan titik $(x_i, t_{l+1})$, pada skema Crank-Nicholson pendekatan solusi $c(x_i, t_{l+1})$ akan dihitung menggunakan jaringan tirik $(x_i, t_l)$ dan jaringan titik $(x_i, t_{l+1})$ yang artinya, diferensial terhadap waktu ditulis pada $l + 1/2$. Sehingga skema diferensial persamaan (2.40) terhadap waktu adalah:

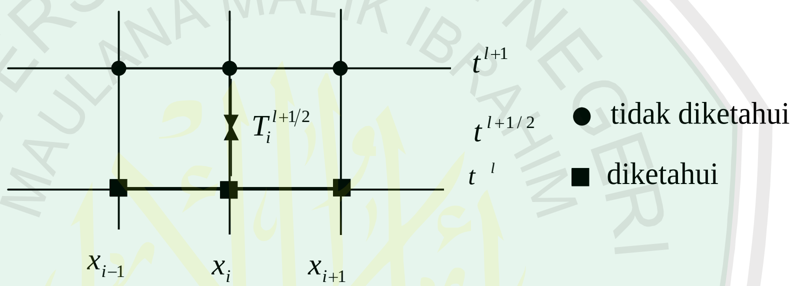
$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_i^{l+1} - T_i^{l}}{\Delta t} \tag{2.51}$$

Skema crank-Nicholson menulis ruas kanan dari persamaan (2.40) pada waktu $l + 1/2$, yang artinya merupakan nilai rerata dari skema Eksplisit dan Implisit. Berdasarkan pada skema Eksplisit pada persamaan perambatan panas diatas, skema diferensial kedua terhadap $x$ yang digunakan adalah persamaan (2.43), sedangkan untuk skema Implisit yang digunakan adalah persamaan (2.46). Sehingga skema Crank-Nicholson untuk diferensial kedua terhadap $x$ adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{T_{i+1}^{l+1} - 2T_i^{l+1} + T_{i-1}^{l+1}}{\Delta x^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{T_{i+1}^{l} - 2T_i^{l} + T_{i-1}^{l}}{\Delta x^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{T_{i+1}^{l+1} - 2T_i^{l+1} + T_{i-1}^{l+1}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i+1}^{l} - 2T_i^{l} + T_{i-1}^{l}}{\Delta x^2}\right) \tag{2.52}$$

Untuk lebih mudahnya, disajikan gambar (2.6) yang merupakan skema jaringan titik hitungan pada skema Crank-Nicholson, dan penjelasan yang menyertainya.




Gambar 2.6. Skema Crank-Nicholson pada persamaan perambatan panas

Berdasarkan penjelasan di atas, diperoleh skema Crank-Nicholson untuk persamaan (2.40) sebagai berikut:

$$\frac{T_i^{l+1} - T_i^{l}}{\Delta t} = K\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{T_{i+1}^{l+1} - 2T_i^{l+1} + T_{i-1}^{l+1}}{\Delta x^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{T_{i+1}^{l} - 2T_i^{l} + T_{i-1}^{l}}{\Delta x^2}\right)\right\} \tag{2.53}$$

Atau

$$\frac{T_i^{l+1} - T_i^{l}}{\Delta t} = \frac{1}{2}K\left(\frac{T_{i+1}^{l+1} - 2T_i^{l+1} + T_{i-1}^{l+1}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i+1}^{l} - 2T_i^{l} + T_{i-1}^{l}}{\Delta x^2}\right)$$

Untuk lebih memudahkan perhitungan, nilai $T_{i-1}^{l+1}$, $T_i^{l+1}$, $T_{i+1}^{l+1}$ dijadikan dalam satui sisi dengan menguraikan persamaan (2.53). Sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\frac{-K}{2\Delta x^2}T_{i+1}^{l+1}+\left(\frac{1}{2\Delta t}+\frac{K}{\Delta x^2}\right)T_i^{l+1}-\frac{K}{2\Delta x^2}T_{i-1}^{l+1}=\frac{K}{2\Delta x^2}T_{i+1}^{l}+\left(\frac{1}{2\Delta t}-\frac{K}{\Delta x^2}\right)T_i^{l}+\frac{K}{2\Delta x^2}T_{i-1}^{l}$$

(2.54)

Atau

$$-LT_{i+1}^{l+1}+MT_i^{l+1}-NT_{i-1}^{l+1}=LT_{i+1}^{l}+OT_i^{l}+NT_{i-1}^{l}$$

Dimana: $L=\frac{K}{2\Delta x^2}$ $\quad M=\left(\frac{1}{2\Delta t}+\frac{K}{\Delta x^2}\right)$

$N=\frac{K}{2\Delta x^2}$ $\quad O=\left(\frac{1}{2\Delta t}-\frac{K}{\Delta x^2}\right)$

Seperti pada skema Implisit, diasumsikan bahwa untuk $i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1$, dan dengan diketahui nilai awal dan nilai batasnya, maka dari persamaan (2.54) akan terbentuk sistem persamaan dalam bentuk matriks seperti berikut:

$$\begin{bmatrix} M & -O & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 \\ -L & M & -O & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -L & M & -O & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & -L & M \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1^{l+1} \\ T_2^{l+1} \\ T_3^{l+1} \\ . \\ . \\ T_{n-1}^{l+1} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} O & N & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 \\ L & O & N & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & O & N & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & L & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1^{l} \\ T_2^{l} \\ T_3^{l} \\ . \\ . \\ T_{n-1}^{l} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} L\left(b_0+a_0\right) \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ N\left(b_L+a_0\right) \end{bmatrix}$$

(2.55)

(Yang, 2005:209)

Atau : $\mathbf{X\overline{T_i^{l+1}}=Y\overline{T_i^{l}}+Z}$

Solusi dari persamaan (2.56) diberikan di bawah ini:

$$\overline{\mathbf{T_i^{l+1}}} = \mathbf{X}^{-1}\left(\mathbf{Y}\overline{\mathbf{T_i^l}} + \mathbf{Z}\right) \tag{2.56}$$

Dari persamaan (), persamaan (), dan persamaan () maka dapat diambil kesimpulan bahwa untuk persamaan (2.40) dalam skema beda hingga dapat ditulis dalam bentuk:

$$\frac{T_i^{l+1} - T_i^l}{\Delta t} = \alpha\left(\frac{T_{i+1}^{l+1} - 2T_i^{l+1} + T_{i-1}^{l+1}}{\Delta x^2}\right) + (1-\alpha)\left(\frac{T_{i+1}^l - 2T_i^l + T_{i-1}^l}{\Delta x^2}\right) \tag{2.57}$$

Dengan $\alpha$ adalah koefisien pembobot dengan nilai:

$\alpha$ = 0, jika skema adalah Eksplisit

$\alpha$ = 1, jika skema adalah Implisit

$\alpha$ = 1/2, jika skema adalah Crank-Nicholson

Bentuk persamaan (2.57) adalah stabil tanpa syarat untuk $\alpha \geq 1/2$, dan stabil dengan syarat untuk $\alpha < 1/2$.

(Triatmodjo, 2002:223)

### 2.6. Metode Sapuan Ganda Cholesky

Dalam menyelesaikan sistem persamaan yang berbentuk matriks tridiagonal, metode penyelesaian langsung sering disebut metode sapuan ganda choleski atau double sweep methode. Proses perhitungan dengan metode sapuan ganda berarti melakukan dua sapuan. Metode ini mudah pemakaiannya dan matriks tridiagonal banyak dijumpai dalam banyak permasalahan, terutama dalam penyelesaian persamaan diferensial order dua. Pada skema Implisit dan Crank-Nicholson pun akan dijumpai matriks tridiagonal dan metode sapuan ganda digunakan untuk menyelesaikannya.

Dipandang sistem persamaan berikut:

$$\begin{bmatrix} b_1x_1 & + & c_1x_2 & & & & & & & & = & d_1 \\ a_2x_1 & + & b_2x_2 & + & c_2x_3 & & & & & & = & d_2 \\ & & a_3x_2 & + & b_3x_3 & + & c_3x_4 & & & & = & d_3 \\ . & & . & & . & & . & & . & & = & . \\ & & & & a_ix_{i-1} & + & b_ix_i & + & a_ix_{i+1} & & = & d_i \\ & & & & . & & . & & . & & = & . \\ & & & & & & . & & . & & = & . \\ & & & & & & & & a_nx_{n-1} & + \; b_nx_n & = & d_n \end{bmatrix} \tag{2.58}$$

Persamaan pertama dari sistem (2.58) memungkinkan untuk menulis bilangan tak diketahui $x_1$ sebagai fungsi bilangan tak diketahui $x_2$, dalam bentuk:

$$x_1 = -\frac{c_1}{b_1}x_2 + \frac{d_1}{b_1}$$

Atau

$$x_i = P_ix_2 + Q_1 \tag{2.59}$$

Dengan:

$$P_1 = -\frac{c_1}{b_1} \qquad Q_1 = \frac{d_1}{b_1}$$

Apabila nilai $x_1$ tersebut disubtitusikan ke dalam persamaan kedua dari sistem (2.58), diperoleh:

$$a_2\left(-\frac{c_1}{b_1 x_2}+\frac{d_1}{b_1}\right)+b_2 x_2+c_2 x_3=d_2$$

$$\left(-\frac{a_2 c_1}{b_1}+b_2\right)x_2=-c_2 x_3+\left(d_2-a_2\frac{d_1}{b_1}\right)$$

Atau :

$$x_2=P_2 x_3+Q_2 \tag{2.60}$$

Dengan :

$$P_2=\frac{c_2}{\left(-\frac{a_2 c_1}{b_1}+b_2\right)} \qquad Q_2=\frac{d_2-a_2\frac{d_1}{b_1}}{\left(-\frac{a_2 c_1}{b_1}+b_2\right)}$$

Persamaan di atas menunjukkan bahwa $x_2$ merupakan fungsi dari $x_3$. Prosedur tersebut dapat diulang untuk persamaan-persamaan berikutnya. Dengan demikian setiap bilangan tak diketahui dapat dinyatakan sebagai bilangan tak diketahui berikutnya.

Misalkan telah diperoleh persamaan berikut:

$$x_{i-1}=P_{i-1}x_i+Q_{i-1} \tag{2.61}$$

Apabila nilai $x_{i-1}$ disubtitusikan ke dalam persamaan ke $i$ dari sistem (2.58), maka:

$$a_i\left(P_{i-1}x_i+Q_{i-1}\right)+b_i x_i+c_i x_{i+1}=d_i$$

$$\left(a_i P_{i-1}+b_i\right)x_i+c_i x_{i+1}=d_i-c_i Q_{i-1}$$

$$x_i=-\frac{c_i}{a_i P_{i-1}+b_i}x_{i+1}+\frac{d_i-a_i Q_{i-1}}{a_i P_{i-1}+b_i}$$

Persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk:

$$x_i=P_i x_{i+1}+Q_i \tag{2.62.a}$$

Dengan:

$$P_i = -\frac{c_i}{a_i P_{i-1} + b_i} \tag{2.62.b}$$

$$Q_i = \frac{d_i - a_i Q_{i-1}}{a_i P_{i-1} + b_i} \tag{2.62.c}$$

Untuk $i = 1$, maka persamaan (2.53.a) menjadi:

$$x_1 = P_1 x_2 + Q_1 \tag{2.63.a}$$

Dengan:

$$P_1 = -\frac{c_1}{a_1 P_0 + b_1} \tag{2.64.b}$$

$$Q_1 = \frac{d_1 - a_1 Q_0}{a_1 P_0 + b_1} \tag{2.64.c}$$

Perbandingan persamaan (2.63) dan (2.59) menunjukkan bahwa :

$$P_0 = 0 \tag{2.65.a}$$

$$Q_0 = 0 \tag{2.65.b}$$

Persamaan (2.63) dan (2.64) memungkinkan untuk menghitung koefisien $P_i$ dan $Q_i$ dari $i = 1$ sampai $i = n$. Langkah ini merupakan sapuan pertama. Setelah sampai titik ke $n$ hitungan dilakukan dalam arah kebalikannya, yaitu dari $n$ $ke$ $1$, untuk menghitung bilangan tak diketahui $x_i$. Untuk itu persamaan terakhir dari sistem (2.58) ditulis dalam bentuk:

$$a_n x_{n-1} + b_n x_n = d_n \tag{2.65}$$

Pada sistem (2.62) apabila $i = n - 1$, maka:

$$x_{n-1} = P_{n-1} x_n + Q_{n-1} \tag{2.66}$$

Subtitusi persamaan (2.66) ke persamaan (2.65) akan memberikan:

$$a_n\left(P_{n-1}x_n + Q_{n-1}\right) + b_n x_n = d_n$$

$$\left(a_n P_{n-1} + b_n\right) x_n = d_n - a_n Q_{n-1} \tag{2.67}$$

$$x_n = \frac{d_n - a_n Q_{n-1}}{a_n P_{n-1} + b_n}$$

Sesuai dengan persamaan (2.62.a), maka:

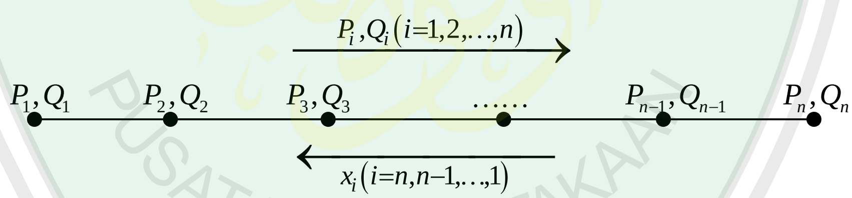
$$x_n = Q_n$$

Dengan demikian nilai $x_n$ dapat diperoleh. Berdasarkan nilai $x_n$ tersebut akan dapat dihitung nilai $x_{n-1}$ dengan persamaan berikut:

$$x_{n-1} = P_{n-1}x_n + Q_{n-1} \tag{2.68}$$

Dari nilai $x_{n-1}$ akan dihitung $x_{n-2}$, $x_{n-3}$, dan seterusnya sampai ke nilai $x_1$.

(Triatmodjo, 1983:65-69)




Gambar 2.7. Skema Metode Sapuan Ganda Choleski

## 2.7. Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor

Salah satu prinsip terpenting dalam bidang kimia teknik adalah hukum kekekalan massa. Dalam bentuk kuantitatif, prinsip tersebut dinyatakan sebagai keseimbangan massa yang menerangkan semua sumber dan akumulasi material yang masuk dan keluar dari sebuah sistem (volume satuan). Selama periode tertentu, prinsip ini dapat dirumuskan dengan:

$$\begin{pmatrix} \text{Rata-rata} \\ \text{akumulasi bahan} \\ \text{kimia didalam sistem} \\ \text{(mol/waktu)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Rata-rata} \\ \text{bahan kimia ke} \\ \text{dalam sistem} \\ \text{(mol/waktu)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{Rata-rata} \\ \text{bahan kimia yang} \\ \text{keluar sistem} \\ \text{(mol/waktu)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Rata-rata} \\ \text{pertambahan bahan} \\ \text{kimia didalam sistem} \\ \text{(mol/waktu)} \end{pmatrix}$$

Atau secara sederhana dapat dinyatakan dengan:

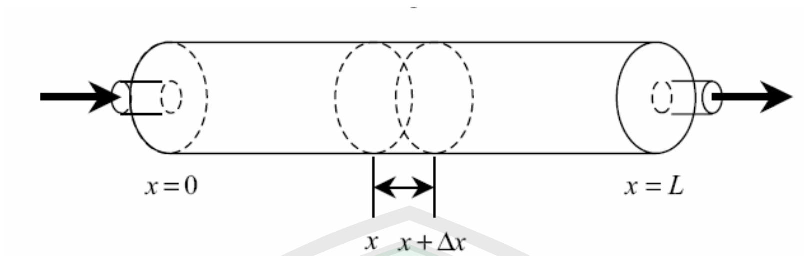
*Akumulasi = input – output* (2.69)

Dengan diterapkannya gagasan/teori kekekalan massa, ada anggapan bahwa bahan kimia tidak hanya diciptakan tetapi juga dihancurkan di dalam system reaktor kimia. Selama periode perhitungan, jika rata-rata bahan kimia yang masuk kedalam sistem (*input*) lebih besar dari rata-rata bahan kimia yang keluar dari system (*output*), maka massa unsure yang terdapat dalam volume tadi akan meningkat. Jika outputnya lebih besar dari input, maka massa akan berkurang. Selanjutnya, jika input sama dengan output, maka akumulasi bahan kimia di dalam sistem adalah nol dan massanya akan tetap tidak berubah. Sebagaimana yang terjadi pada proses dalam reaktor (sampai kondisi stabil dicapai), maka persamaan (2.60) dapat dinyatakan sebagai:

*Input (aliran masuk) = output (aliran keluar)* (2.70)

(Susila, 1996:261-262)

Para pakar kimia menerapkan teori kekekalan massa untuk menentukan konsentrasi tetap sebuah sistem pasangan-pasangan reaktor dengan menggunakan istilah input dan output sebagai variable dan parameter yang dapat diukur dengan cara ini yang memungkinkan untuk mengembangkan keseimbangan massa dan memperoleh penurunan persamaan untuk konsetrasi.




Gambar 2.7. Reaktor silindris memanjang dengan titik masuk dan keluar tunggal.

Gambar (2.7) menunjukkan sebuah reaktor silinder dengan jalan masuk dan keluar tunggal. Jika diasumsikan bahwa bahan kimia yang dijadikan model adalah subyek untuk menghilangkan order pertama dan reaktor silinder tersebut digerakkan/dikocok secara vertikal dan lateral, maka sebuah keseimbangan massa dapat ditunjukkan pada sebuah persamaan dengan pendekatan $\Delta x$.

Solusi analitik mungkin tidak lama lagi dihasilkan namun solusi numeric dihasilkan dengan menggunakan metode beda hingga untuk menunjukkan variasi konsentrasi bahan kimia sepanjang sumbu $x$ reaktor pada waktu yang berbeda.

Berdasarkan penjelasan di atas, untuk memformulasikan sebuah model matematika pada persamaan keseimbangan sebuah reaktor, dibuat beberapa asumsi awal yaitu:

a. Bahan kimia yang dijadikan model adalah subjek untuk menghilangkan/mengurangi order pertama.
b. Tangki digerakkan (dikocok) secara vertikal dan lateral.
c. Penyebaran (bahan kimia) dalam reaktor tidak mempengaruhi rata-rata aliran kimia yang keluar.
d. Kondisi awal reaktor $t=0$ dipenuhi dengan air yang tidak mengandung bahan kimia.

e. Berawal dari $t = 0$ bahan kimia dimasukkan ke dalam aliran reaktor pada tingkat konstan $c_{in}$.

Kemudian nilai $\Delta x = 0$ dan $\Delta t = 0$, serta menggunakan asumsi awal a dan b, diperoleh persamaan keseimbangan massa reaktor dengan bergantung waktu, yaitu:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - U \frac{\partial c}{\partial x} - \gamma c, \quad 0 < x < L \tag{2.71}$$

Dimana :

$c$ = konsentrasi (mol/$m^3$)

D = koefisien dispersi ($m^2$/det)

$U$ = kecepatan aliran air yang melalui tangki (m/det)

$\gamma$ = koefisien orde pertama ($det^{-1}$)

Sehingga didapatkan nilai awal dan batasnya adalah:

$$\begin{cases} c(x,0) = 0 & ,0 < x < L \\ c(0,t) = c_{in} & ,t > 0 \\ c(L,t) = 0 & ,t > 0 \end{cases} \tag{2.72}$$

(Caldwell, 2004:138-139)

## 2.8. Logika Dalam Islam (Aliran Mu'tazilah)

### 2.8.1 Asal-Usul Kemunculan Mu'tazilah

Aliran Mu'tazilah lahir kurang lebih tahun 120 H. pada abd ke dua Hijrah di kota Basyrah dan mampu bertahan sampai sekarang, Karena paham ini mampu menyusup kedalam masyarakat Islam di Barat dan di Timur bahkan di Indonesia.(Zainuddin, 1992:51)

Secara harfiah kata Mu'tazilah berasal dari i'tazala yang berarti berpisah atau memisahkan diri, yang berarti juga menjauh atau menjauhkan diri.

Pembangun golongan ini adalah Abu Hudzaifah Washil bin 'Atha' al-Ghazali. Timbulnya dizaman Abdul Malik bin Marwan dan anaknya Hisyam ibnu Abdul Malik. Dinamakan golongan Mu'tazilah karena washil memisahkan dirinya, karena berlinan pendapat dengan gurunya al-Hasan al-Bishry, tentang masalah orang Islam yang mengerjakan maksiat dan dosa besar, yang belum taubat sebelum matinya (Mu'in, 1964:102). Khawarij menjawab dengan term-term negative yang tidak mengenal kompromi. Sedangkan Murji'ah dengan term-term liberal, kalau tidak sama sekali bungkam. Wasil menjawabnya dengan cara baru tapi musykil. Pendosa besar harus ditempatkan pada posisi penengah antara kafir dan iman. (Ensiklopedi Islam II : 119)

### 2.8.2 ***Al-Ushul Al-Khamsah*: Lima Ajaran Dasar Teologi Mu'tazilah**

Kelima ajaran dasar Mu'tazilah yang tertuang dalam al-ushul al-khamsah adalah *at-Tauhid* (pengesaan Tuhan), *al-'Adl* (keadilan Tuhan), *al-Waad Wa al-Wa'id* (janji dan ancaman Tuhan), *al-Manzilah baina Manzilatain* (posisi diantara dua posisi), dan *al-Amr bi al-Ma'ruf wa al-Nahy An al-Munkar* (menyeru kepada kebaikan dan mencegah kemunkaran).

1. *At-Tauhid* (Pengesaan Tuhan)

Pengesaan Tuhan merupakan prinsip utama dan intisari ajaran Mu'tazilah. Sebenarnya setiap madzhab teoplogis dalam Islam memegang doktrin ini. Akan tetapi bagi Mu'tazilah, tauhid memilki arti yang spesifik. Tuhan harus disucikan dari segala sesuatu yang dapat mengurangi arti kemahaesaan-Nya. Hanya Dia-lah yang Qadim. Untuk memurnikan Keesaan Tuhan (tanzih), Mu'tazilah menolak konsep Tuhan memilki sifat-sifat, penggambaran fisik Tuhan (antromorfisme tajassum), dan Tuhan dapat dilihat dengan mata kepala.

Kaum Mu'tazilah dikatakan ahli tauhid karena mereka berusaha semaksimal mungkin mempertahankan prinsip ketauhidannya dari serangan Syi'ah Rafidiyah yang menggambarkan Tuhan dalam bentuk jisim dan bisa dihindari serangan dari agama dualisme dan tritinas.

Ketauhidan dari golongan Mu'tazilah adalah: (Zainuddin, 1992:54)

- Sifat-sifat Tuhan tidak bersifat Qadim, jika Tuhan bersifat qadim berarti Allah itu berbilang, sebab ada dua zat yang qadim, yaitu Allah dan sifat-Nya, padahal Maha Esa.
- Golongan Mu'tazilah "menafikan" dan mentiadakan sifat-sifat Allah, artinya Tuhan itu tidak bersifat. Sebab bla Allah bersifat dan sifatnya itu macam-macam maka Allah itu berbilang (lebih dari satu).(Mu'in, 1964:103)
- Allah bersifat 'aliman, qadiran, hayyun, sami'un, basyirun dan sebagainya adalah dengan zat-Nya demikian, tetapi ini bukan keluar dari zat Allah yang berdiri sendiri.

- Allah tidak dapat diterka dan dilihat mata walaupun diakhirnya nanti.
- Tuhan itu Esa bukan benda bukan Arrad dan tidak berlaku tempat (arah) pada-Nya.

2. *Al-‘Adl* (Keadilan Tuhan)

Adil merupakan sifat yang paling gamblang untuk menunjukkan kesempurnaan. Karena Tuhan Mahasempurna, Dia sudah pasti adil. Ajaran ini bertujuan ingin menempatkan Tuhan benar-benar adil menurut sudut pandang manusia, karena alam semesta ini sesungguhnya diciptakan untuk manusia.

Dasar dari prinsip keadilan ini terletak dalam kemampuan akal untuk berbuat baik, dan keadilan Tuhan terletak di dalam kebaikan itu. Ajaran tentang keadilan ini terkait erat dengan beberapa hal, antara lain:

a. Perbuatan manusia

Manusia adalah merdeka dalam segala perbuatannya dan bebas bertindak, oleh karena itulah manusia harus mempertanggungjawabkan atas segala perbuatannya. Kalau perbuatan itu baik diberi Tuhan kebaikan dan kalau perbuatan itu jelek atau salah jelas akan diberi Tuhan siksaan. (Zainuddin, 1992:55)

Manusia menurut Mu’tazilah, melakukan dan menciptakan perbuatannya sendiri, terlepas dari kehendak dan kekuasaan Tuhan, baik secara langsung ataupun tidak. Tuhan hanya menyuruh dan menghendaki yang baik, bukan yang buruk. Adapun yang disuruh Tuhan pasti lah baik dan apa yang dilarang-Nya tentulah buruk Konsep ini memilki konskuensi logis dengan keadilan Tuhan, yaitu apapun yang akan diterima manusia di akhirat merupakan balasan perbuatannya di dunia. Kebaikan akan dibalas kebaikan dan kejahatan akan dibalas kejahatan, itulah keadilan. Karena, berbuat atas kemauan dan kemampuannya sendiri dan tidak dipaksa. (Anwar, 2003:83)

b. Berbuat baik dan terbaik

Dalam istilah Arabnya, berbuat baik dan terbaik disebut *ash-Shalah wa al-Ashlah*. Maksudnya adalah kewajiban Tuhan untuk berbuat baik bahkan terbaik bagi manusia Tuhan tidak mungkin jahat dan aniaya karena akan menimbulkan kesan TuhanPenjahat dan Penganiaya, sesuatu yang tidak layak bagi Tuhan. Jika Tuhan berlaku jahat kepada seseorang dan berbuat baik kepada orang lain berarti ia tidak adil. Dengan sendirinya Tuhan juga tidak Mahasempurna. (Anwar, 2003:84)

c. Mengutus rasul.

Mengutus rasul kepada manusia merupakan kewajiban Tuhan terkait dengan: (Anwar, 2003:84)

- Tuhan wajib berlaku baik kepada manusia dan hal itu tidaka dapat terwujud, kecuali dengan mengutus rasul kepada manusia.
- Al-Quran secara tegas menyatakan kewajiban Tuhan untuk memberikan belas kasih kepada manusia (Q.S. Asy-Syuara [26]:29). Cara yang terbaik untuk maksud tersebut adalah dengan pengutusan Rasul.
- Tujuan diciptakannya manusia adalah untuk beribadah kepada-Nya. Agar tujuan tersebut berhasil, tidak ada jalan lain, selain megutus rasul.

3. *Al-Waad Wa Al-Wa'id* (Janji Dan Ancaman Tuhan)

Janji dan ancaman Tuhan pasti terlaksana, yaitu janji berupa limpahan pahala dan ancaman (*wa'id*) berupa siksaan. Barang siapa beruntung dengan perbuatannya atau berbuat baik (*al-muthi*) akan peroleh pahala, dan siapa yang malang atau orang yang durhaka (*al-ashi*) dalam perbuatannya akan peroleh siksa, begitu pula janji Tuhan untuk memberi pengampunan pada orang yang bertaubat nasuha pasti benar adanya. Ajaran ketiga ini sangat erat kaitannya dengan ajaran kedua yaitu keadilan Tuhan (*Al-'adl*) (Mansur, 1994:51).

Ajaran yang lain tentang janji dan ancaman adalah bahwa diakhirat tidak ada syafaat sebab syafaat berlawanan dengan *Al-Waad Wa Al-Wa'id.* (Zainuddin, 1992:55)

4. *Al-Manzilah Baina Manzilatain* (Posisi Diantara Dua Posisi)

Inilah ajaran yang mula-mula menyebabkan lahirnya mazhab Mu'tazilah. Ajaran ini terkenal dengan status orang beriman (mukmin) yang melakukan dosa besar. Pokok ajaran ini adalah bahwa mukmin yang melakukan dosa besar dan belum bertobat belum lagi mukmin atu kafir, tetapi fasik, dan mereka nanti akan di berada diantara surga dan neraka.

Menurut pandangan Mu'tazilah, pelaku dosa besar tidak dapat dikatakan mukmin secara mutlak. Hal ini karena keimanan menuntut adanya kepatuhan kepada Tuhan, tidak cukup hanya pengakuan dan pembenaran. Berdosa besar bukanlah kepatuhan melainkan kedurhakaan. Pelakunya tidak dapat dikatakan kafir secara mutlak karena ia masih percaya kepada Tuhan, Rasul-Nya, dan mengerjakan pekerjaan yang baik. Hanya saja kalau meninggal sebelum bertaubat, ia dimasukkan ke neraka dan kekal di dalamnya. Orang mukmin masuk surga dan orang kafir masuk neraka. Orang fasik pun dimasukkan kedalam neraka akan tetapi siksaannya lebih ringan daripada orang kafir. Mengapa orang fasik tidak dimasukkan ke surga dengan "kelas" yang lebih rendah dari mukmin sejati? Dari sinilah Mu'tazilah ingin mendorong agar manusia tidak menyepelekan perbuatan dosa besar.(Anwar, 2003:86)

5. *Al-Amr bi Al-Ma'ruf Wa Al-Nahy an Al-Munkar* (Menyeru Kepada Kebaikan Dan Mencegah Kemunkaran)

Dasar ini kenyataannya hanya sekedar berhubungan dengan amalan lahir. Orang yang menyalahi pendirian (ajaran Islam) dianggap sesat dan harus dibenarkan serta diluruskan. Kewajiban ini harus dilaksanakan setiap muslim untuk menegakkan agama serta memberi petunjuk kepada orang yang sesat sebagai konsekuensi logis dari keimanan seseorang. Pengakuan keimanan harus dibuktikan dengan perbuatan baik, diantaranya dengan menyuruh orang berbuat baik dan mencegahnya dari kejahatan. Ajaran ini menerangkan keberpihakan kepada kebenaran dan dan kebaikan. (Zainuddin, 1992:56)

*Al-amr bi al-ma'ruf wa al-nahy an al-munkar* bukan monopoli konsep Mu'tazilah. Frase tersebut sering digunakan di dalam al-qur'an. Arti asal al-ma'ruf adalah apa yang telah diakui dan diterima oleh masyarakat karena mengandung kebaikan dan kebenaran. Lebih spesifik lagi al-ma'ruf adalah apa yang diterima dan diakui Allah, sedangkan Al-munkar adalah sebaliknya, yaitu sesuatu yang tidak dikenal, tidak diterima atau buruk.

Perbedaan mazhab Mu’tazilah dengan mazhab lain mengenai ajaran kelima ini terletak pada tatanan pelaksanaannya. Menurut Mu’tazilah, jika memang diperlukan, kekerasan dapat ditempuh untuik mewujudkan ajaran tersebut.(Anwar, 2003-87)

# BAB III

# PEMBAHASAN

Bab ini akan menjelaskan tentang bagaimana langkah-langkah metode beda hingga skema Implisit dan Crank-Nicholson untuk mencari solusi persamaan differensial parsial. Dan menanalisis metode mana yang lebih mudah digunakan untuk mencari solusi persamaan diferensial parsial.

Langkah-langkah umum yang digunakan pada kedua skema tersebut adalah:

Langkah-1 : Menentukan persamaan yang akan diselesaikan beserta kondisi awal dan batasnya.

Langkah-2 : Merubah persamaan kedalam skema beda hingga (skema Implisit atau Crank-Nicholson).

Langkah-3 : Menentukan $\Delta x$ dan $\Delta t$ yang digunakan.

Langkah-4 : Mensubtitusi semua nilai yang telah diketahui ke bentuk skema beda hingga (skema Implisit atau Crank-Nicholson)

Langkah-5 : Mencari solusi

**Contoh :**

Jika persamaan keseimbangan massa pada reaktor kimia silindris adalah:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - U\frac{\partial c}{\partial x} - \gamma c \qquad ,0 < x < L \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} &c(x,0) = 0 && ,0 < x < L \\ &c(0,t) = c_{in} && ,t > 0 \\ &c(L,t) = 0 && ,t > 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

dengan D = 0,083 $m^2$/det; U = 0,008 m/det; $\gamma$ =0,018 mol/det; $c_{in}$ =100 mol/$m^3$. Tentukan konsentrasi di setiap titik ($c(x,t)$) pada saat $l=0$; $l=1$; $l=2$ !

**Jawab:**

Untuk mengetahui nilai konsentrasi disetiap titik, akan digunakan metode beda hingga skema Implisit dan skema Crank-Nicholson. Akan tetapi, sebelum melangkah untuk menyelesaikan dengan skema Implisit dan Crank-Nicholson, terlebih dahulu penulis akan menguraikan bentuk dari skema Eksplisit untuk memudahkan pembaca memahami bentuk dari skema Implisit dan Crank-Nicholson itu sendiri beserta prosedurnya.

**Skema Eksplisit**

Pada skema Eksplisit, variabel pada waktu $l+1$ dihitung berdasarkan variabel pada waktu $l$ yang sudah diketahui. Dengan menggunakan skema diferensial maju untuk turunan pertama terhadap $t$, serta diferensial terpusat untuk turunan pertama dan kedua terhadap $x$ didekati dengan:

$$c(x,t) = c_i^l \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} = \frac{c_i^{l+1} - c_i^l}{\Delta t} \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial x} = \frac{c_{i+1}^l - c_{i-1}^l}{2 \quad \Delta x} \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial^2 c(x,t)}{\partial t^2} = \frac{c_{i+1}^l - 2c_i^l + c_{i-1}^l}{(\Delta x)^2} \tag{3.6}$$

Sehingga persamaan (3.1) sebagai berikut:

$$\frac{c_i^{l+1}-c_i^l}{\Delta t}=D\left(\frac{c_{i+1}^l-2c_i^l+c_{i-1}^l}{(\Delta x)^2}\right)-U\left(\frac{c_{i+1}^l-c_{i-1}^l}{2\,\Delta x}\right)-\gamma c_i^l \tag{3.7}$$

jika persamaan diatas diuraikan menjadi:

$$\left(\frac{\Delta t\,D}{(\Delta x)^2}+\frac{\Delta t\,U}{2\,\Delta x}\right)c_{i-1}^l+\left(1-\frac{2\,\Delta t\,D}{(\Delta x)^2}-\gamma\Delta t\right)c_i^l+\left(\frac{\Delta t\,D}{(\Delta x)^2}-\frac{\Delta t\,U}{2\,\Delta x}\right)c_{i+1}^l=c_i^{l+1} \tag{3.8}$$

## 3.1. Skema Implisit

Berdasarkan langkah-langkah umum yang digunakan untuk mencari solusi persamaan diferensial parsial diatas, maka langkah-langkah tersebut dapat diuraikan sebagai berikut:

1. Menentukan persamaan yang akan diselesaikan

$$\frac{\partial c}{\partial t}=D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}-U\frac{\partial c}{\partial x}-\gamma c \qquad ,0<x<0,5$$

2. Menentukan nilai awal dan nilai batas

$$\begin{aligned} c(x,0)&=0 &&,0<x<0,5\\ c(0,t)&=100 &&,t>0\\ c(L,t)&=0 &&,t>0 \end{aligned}$$

3. Mengubah persamaan kedalam bentuk skema Implisit

   Dari persamaan (3.7) dapat dilihat bahwa ruas kanan ditulis pada waktu ke-$l$, apabila ruas kanan ditulis pada waktu ke-$(l+1)$, maka bentuk persamaan menjadi:

$$\frac{c_i^{l+1}-c_i^l}{\Delta t}=D\left(\frac{c_{i+1}^{l+1}-2c_i^{l+1}+c_{i-1}^{l+1}}{(\Delta x)^2}\right)-U\left(\frac{c_{i+1}^{l+1}-c_{i-1}^{l+1}}{\Delta x}\right)-\gamma c_i^{l+1} \tag{3.9}$$

jika persamaan diatas diuraikan menjadi:

$$-\left(\frac{D}{(\Delta x)^2}+\frac{U}{2\Delta x}\right)c_{i-1}^{l+1}+\left(\frac{1}{\Delta t}+\frac{2D}{(\Delta x)^2}+\gamma\right)c_i^{l+1}-\left(\frac{D}{(\Delta x)^2}-\frac{U}{2\Delta x}\right)c_{i+1}^{l+1}=\frac{1}{\Delta t}c_i^l \quad (3.10)$$

Atau

$$-K\,c_{i-1}^{l+1}+L\,c_i^{l+1}-M\,c_{i+1}^{l+1}=K\,c_{i-1}^{l}+N\,c_i^{l}+M\,c_{i+1}^{l} \quad (3.11)$$

Dimana:

$$K=\left(\frac{D\,\Delta t}{2(\Delta x)^2}+\frac{U\,\Delta t}{4\Delta x}\right) \qquad L=\left(1+\frac{D\,\Delta t}{(\Delta x)^2}+\frac{\gamma\,\Delta t}{2}\right)$$

$$M=\left(\frac{D\,\Delta t}{2(\Delta x)^2}-\frac{U\,\Delta t}{4\Delta x}\right) \qquad N=\left(1-\frac{D\,\Delta t}{(\Delta x)^2}-\frac{\gamma\,\Delta t}{2}\right)$$

4. Menentukan $\Delta x$ dan $\Delta t$ yang digunakan

Seperti yang telah dijelaskan pada bab 2 sub bab 2.51, nilai $\Delta x$ yang digunakan adalah dengan rumus $\Delta x = L/n$. Dengan membagi pias menjadi $n=10$, sehingga $\Delta x$ yang digunakan $\Delta x = L/n = 0,5/10 = 0,05$.

Sedangkan $\Delta t$ yang digunakan adalah dengan kriteria sebagai berikut:

$$\Delta t \le \frac{\Delta x^2}{2D+\gamma\,\Delta x^2} \quad (3.12)$$

(Caldwell, 2004:145)

Sehingga penulis mengambil nilai $\Delta t = 0,025$. Dan kriteria pengambilan $\Delta t$ di atas (persamaan (3.12)) hanya berlaku pada persamaan keseimbangan reaktor (persamaan (3.1)) saja.

5. Mensubtitusi nilai-nilai yang telah diketahui ke dalam persamaan:

Dengan memperhatikan persamaan (3.11), dan mensubtitusi nilai-nilai yang telah diketahui, maka diperoleh koefisien dari $c_{i-1}^{l+1}$, $c_i^{l+1}$, $c_{i+1}^{l+1}$ yaitu:

$$A=\left(\frac{0,083}{(0,05)^2}+\frac{0,008}{(2).(0,05)}\right)=33,28$$

$$B=\left(\frac{1}{0,025}+\frac{(2).(0,083)}{(0,05)^2}+0,018\right)=106,418$$

$$C=\left(\frac{0,083}{(0,05)^2}-\frac{0,008}{(2).(0,05)}\right)=33,12$$

Maka persamaan (3.11) menjadi:

$$-33,28\ c_{i-1}^{l+1}+106,418\ c_i^{l+1}-33,12\,c_{i+1}^{l+1}=\frac{1}{0,025}c_i^l \tag{3.13}$$

6. Dengan menentukan $n=10$, maka diuraikan persamaan (3.13) menjadi sistem persamaan dengan $i=1,\ 2,\ \ldots,n-1$, atau $i=1,\ 2,\ldots,9$ sebagai berikut:

$$i=1\rightarrow -33,28c_0^{l+1}+106,418c_1^{l+1}-0,0048c_2^{l+1}=\frac{1}{0,025}c_1^l$$

$$i=2\rightarrow -33,28c_1^{l+1}+106,418c_2^{l+1}-0,0048c_2^{l+1}=\frac{1}{0,025}c_2^l$$

$$i=3\rightarrow -33,28c_2^{l+1}+106,418c_3^{l+1}-0,0048c_2^{l+1}=\frac{1}{0,025}c_3^l$$

$$i=4\rightarrow -33,28c_3^{l+1}+106,418c_4^{l+1}-33,12\,c_2^{l+1}=\frac{1}{0,025}c_4^l$$

$$i=5\rightarrow -33,28c_4^{l+1}+106,418c_5^{l+1}-33,12\,c_2^{l+1}=\frac{1}{0,025}c_5^l$$

$$i=6\rightarrow -33,28c_5^{l+1}+106,418c_6^{l+1}-33,12\,c_2^{l+1}=\frac{1}{0,025}c_6^l$$

$$i=7\rightarrow -33,28c_6^{l+1}+106,418c_7^{l+1}-33,12\,c_2^{l+1}=\frac{1}{0,025}c_7^l$$

$$i = 8 \rightarrow -33,28\, c_7^{l+1} + 106,418\, c_8^{l+1} - 33,12\, c_9^{l+1} = \frac{1}{0,025} c_8^l$$

$$i = 9 \rightarrow -33,28\, c_8^{l+1} + 106,418\, c_9^{l+1} - 33,12\, c_{10}^{l+1} = \frac{1}{0,025} c_9^l \tag{3.14}$$

7. Memasukkan nilai awal dan nilai batasnya.

Dengan menggunakan nilai awal dan nilai batas pada persamaan (3.2), maka dapat diketahui sistem persamaan (3.14) menjadi:

$$i = 1 \rightarrow -(33,28).(100) + 106,418\, c_1^1 - 33,12\, c_2^1 = \frac{1}{0,025} c_1^l$$

$$106,418\, c_1^1 - 33,12\, c_2^1 = 3.328 + \frac{1}{0,025} c_1^l$$

$$i = 2 \rightarrow -33,28\, c_1^1 + 106,418\, c_2^1 - 33,12\, c_2^1 = \frac{1}{0,025} c_2^l$$

$$i = 3 \rightarrow -33,28\, c_2^1 + 106,418\, c_3^1 - 33,12\, c_2^1 = \frac{1}{0,025} c_3^l$$

$$i = 4 \rightarrow -33,28\, c_3^1 + 106,418\, c_4^1 - 33,12\, c_2^1 = \frac{1}{0,025} c_4^l$$

$$i = 5 \rightarrow -33,28\, c_4^1 + 106,418\, c_5^1 - 33,12\, c_2^1 = \frac{1}{0,025} c_5^l$$

$$i = 6 \rightarrow -33,28\, c_5^1 + 106,418\, c_6^1 - 33,12\, c_2^1 = \frac{1}{0,025} c_6^l$$

$$i = 7 \rightarrow -33,28\, c_6^1 + 106,418\, c_7^1 - 33,12\, c_2^1 = \frac{1}{0,025} c_7^l$$

$$i = 8 \rightarrow -33,28\, c_7^1 + 106,418\, c_8^1 - 33,12\, c_9^1 = \frac{1}{0,025} c_8^l$$

$$i = 9 \rightarrow -33,28\, c_8^1 + 106,418\, c_9^1 - (33,12).(0) = \frac{1}{0,025} c_9^l \tag{3.15}$$

$$-33,28\, c_8^1 + 106,418\, c_9^1 = \frac{1}{0,025} c_9^l + 0$$

$$-33,28\, c_8^1 + 106,418\, c_9^1 = \frac{1}{0,025} c_9^l$$

8. Dari persamaan (3.15), kemudian dibentuk matriks $\mathbf{R}\,\overline{\mathbf{c}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{l+1}}} = \mathbf{S}$ sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 106,418 & -33,12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -33,28 & 106,418 & -33,12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -33,28 & 106,418 & -33,12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -33,28 & 106,418 & -33,12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -33,28 & 106,418 & -33,12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -33,28 & 106,418 & -33,12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -33,28 & 106,418 & -33,12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -33,28 & 106,418 & -33,12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -33,28 & 106,418 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^{l+1} \\ c_2^{l+1} \\ c_3^{l+1} \\ c_4^{l+1} \\ c_5^{l+1} \\ c_6^{l+1} \\ c_7^{l+1} \\ c_8^{l+1} \\ c_9^{l+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.328 + \dfrac{c_1^l}{0,025} \\ c_2^l/0,025 \\ c_3^l/0,025 \\ c_4^l/0,025 \\ c_5^l/0,025 \\ c_6^l/0,025 \\ c_7^l/0,025 \\ c_8^l/0,025 \\ c_9^l/0,025 \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

9. Menyelesaikan dengan metode sapuan ganda choleski

Persamaan (3.16) dapat diselesaikan dengan operasi matriks (persamaan (2.50)), yaitu $\overline{\mathbf{c}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{l+1}}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}$. Karena persamaan (3.16) merupakan matriks tridiagonal, maka secara manual penulis menyelesaikannya dengan metode sapuan ganda choleski untuk memperoleh nilai $c_i\,(i = 1, 2, 3, \ldots, 9)$. Seperti yang telah diuraikan pada bab 2 sub bab 2.6. Penyelesaian dengan menggunakan metode ini menganggap bahwa terdapat hubungan:

$$c_i^{l+1} = P_i c_{i+1}^{l+1} + Q_i \tag{3.17}$$

Untuk titik $i-1$, persamaan (3.7) menjadi:

$$c_{i-1}^{l+1} = P_{i-1} c_i^{l+1} + Q_{i-1} \tag{3.18}$$

Persamaan (3.18) disubtitusikan ke persamaan (3.13), dan untuk penyederhanaan superskrip $l+1$ dihilangkan, maka:

$$-33,28\left(P_{i-1}c_i + Q_{i-1}\right) + c_i - 33,12c_{i+1} = D_i$$
$$\left(106,418 - 33,28P_{i-1}\right)c_i = 33,12c_{i+1} + D_i + 33,28Q_{i-1}$$
$$c_i = \frac{106,418c_{i+1} + D_i + 33,28_i Q_{i-1}}{106,418 - 33,28P_{i-1}}$$
$$c_i = \frac{33,12}{106,418 + A_i P_{i-1}} c_{i+1} + \frac{D_i + 33,28Q_{i-1}}{106,418 - 33,28P_{i-1}}$$

Atau

$$c_i = P_i c_{i+1} + Q_i \tag{3.19}$$

Dengan:

$$P_i = \frac{33,12}{106,418 - 33,28P_{i-1}} \tag{3.20}$$

$$Q_i = \frac{D_i + 33,28Q_{i-1}}{106,418 - 33,28P_{i-1}} \tag{3.21}$$

Dimana : $D_i =$ matriks **S**

Langkah pertama adalah menghitung nilai $P_i$ dan $Q_i$ $(i = 1,2,3,...,9)$ dari kiri ke kanan, setelah sampai ke titik $i = n-1 = 9$, dihitung nilai $c_9 = Q_9$. Berdasarkan nilai $c_9$ tersebut, hitungan akan dilanjutkan dari kanan ke kiri untuk mendapatkan nilai $c_i$ $(i = 1,2,3,......,9)$.

10. Menghitung nilai konsentrasi pada saat $l = 0$, atau $c_i^1 \left(i = 1,2,\ldots,9\right)$

Dengan menggunakan nilai awal dan nilai batas, maka dapat diketahui nilai $c_0^1 = c_{in} = 100; c_i^0 = 0; c_{10}^1 = 0$. Selanjutnya disubtitusikan ke persamaan (3.16), sehingga matriks baru yang terbentuk adalah:

$$\begin{bmatrix} 106,418 & -33,12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -33,28 & 106,418 & -33,12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -33,28 & 106,418 & -33,12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -33,28 & 106,418 & -33,12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -33,28 & 106,418 & -33,12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -33,28 & 106,418 & -33,12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -33,28 & 106,418 & -33,12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -33,28 & 106,418 & -33,12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -33,28 & 106,418 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^1 \\ c_2^1 \\ c_3^1 \\ c_4^1 \\ c_5^1 \\ c_6^1 \\ c_7^1 \\ c_8^1 \\ c_9^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.328 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

11. Setelah matriks baru untuk $l = 0$ terbentuk, kemudian dicari solusinya dengan metode sapuan ganda choleski.

- ***Menghitung koefisien*** $\boldsymbol{P_i \; dan \, Q_i \left( i = 1, 2, 3, ..., 9 \right)}$**,** dengan menggunakan persamaan (3.10), (3.11)

  Untuk $i = 1,\ P_0 = 0,\ Q_0 = 0.$

$$P_1 = \frac{33,12}{106,418 - 33,28 P_0}$$

$$= \frac{33,12}{106,418 - 33,28(0)}$$

$$= \frac{33,12}{106,418}$$

$$= 0,311225545$$

$$Q_1 = \frac{3.328 + 33,28 Q_0}{106,418 - 33,28 P_0}$$

$$= \frac{3.328 + (33,28).(0)}{106,418 - (33,28).(0)}$$

$$= \frac{3.328}{106,418}$$

$$= 31,27290496$$

Untuk $i=2$;

$$P_2 = \frac{33,12}{106,418 - 33,28P_1}$$

$$= \frac{33,12}{106,418 - (33,28).(0,311225545)}$$

$$= \frac{33,12}{96,06041388}$$

$$= 0,344783024$$

$$Q_2 = \frac{0 + 33,28Q_1}{106,418 - 33,28P_1}$$

$$= \frac{(33,28).(31,27290496)}{106,418 - (33,28).(0,311225545)}$$

$$= \frac{1040,76228}{96,06041388}$$

$$= 10,83445547$$

Untuk $i=3$;

$$P_3 = \frac{33,12}{106,418 - 33,28P_2}$$

$$= \frac{33,12}{106,418 - (33,28).(0,344783024)}$$

$$= \frac{33,12}{94,94362096}$$

$$= 0,348838602$$

$$Q_3 = \frac{0 + 33,28Q_2}{106,418 - 33,28P_2}$$

$$= \frac{(33,28).(10,83445547)}{106,418 - (33,28).(0,344783024)}$$

$$= \frac{360,570678}{94,94362096}$$

$$= 3,797734641$$

Untuk $i = 4$;

$$P_4 = \frac{33,12}{106,418 - 33,28P_3}$$

$$= \frac{33,12}{106,418 - (33,28).(0,348838602)}$$

$$= \frac{33,12}{94,80865133}$$

$$= 0,349335209$$

$$Q_4 = \frac{0 + 33,28Q_3}{106,418 - 33,28P_3}$$

$$= \frac{(33,28).(3,797734641)}{106,418 - (33,28).(0,348838602)}$$

$$= \frac{126,388609}{94,80865133}$$

$$= 1,333091517$$

Untuk $i = 5$;

$$P_5 = \frac{33,12}{106,418 - 33,28P_4}$$

$$= \frac{33,12}{106,418 - (33,28).(0,349335209)}$$

$$= \frac{33,12}{94,79212425}$$

$$= 0,349396116$$

$$Q_5 = \frac{0 + 33,28Q_4}{106,418 - 33,28P_4}$$

$$= \frac{(33,28).(1,333091517)}{106,418 - (33,28).(0,349335209)}$$

$$= \frac{44,3652857}{94,79212425}$$

$$= 0,468027128$$

Untuk $i = 6$;

$$P_6 = \frac{33,12}{106,418 - 33,28P_5}$$

$$= \frac{33,12}{106,418 - (33,28).(0,349396116)}$$

$$= \frac{33,12}{94,79009727}$$

$$= 0,349403587$$

$$Q_6 = \frac{0 + 33,28Q_5}{106,418 - 33,28P_5}$$

$$= \frac{(33,28).(0,468027128)}{106,418 - (33,28).(0,349396116)}$$

$$= \frac{15,5759428}{94,79009727}$$

$$= 0,164320359$$

Untuk $i = 7$;

$$P_7 = \frac{33,12}{106,418 - 33,28P_6}$$

$$= \frac{33,12}{106,418 - (33,28).(0,349403587)}$$

$$= \frac{33,12}{94,78984862}$$

$$= 0,349404504$$

$$Q_7 = \frac{0 + 33,28 Q_6}{106,418 - 33,28 P_6}$$

$$= \frac{(33,28).(0,164320359)}{106,418 - (33,28).(0,349403587)}$$

$$= \frac{5,46858155}{94,78984862}$$

$$= 0,057691637$$

Untuk $i = 8$;

$$P_8 = \frac{33,12}{106,418 - 33,28 P_7}$$

$$= \frac{33,12}{106,418 - (33,28).(0,349404504)}$$

$$= \frac{33,12}{94,78981812}$$

$$= 0,349404616$$

$$Q_8 = \frac{0 + 33,28 Q_7}{106,418 - 33,28 P_7}$$

$$= \frac{(33,28).(0,057691637)}{106,418 - (33,28).(0,349404504)}$$

$$= \frac{1,91997768}{94,78984862}$$

$$= 0,020255105$$

Untuk $i = 9$;

$P_9 = 0$, karena $C_9 = 0$ sehingga

$$P_9 = \frac{C_9}{106,418 - 33,28P_7}$$

$$= \frac{0}{106,418 - (33,28).(0,349404616)}$$

$$= 0$$

$$Q_9 = \frac{0 + 33,28Q_8}{106,418 - 33,28P_8}$$

$$= \frac{(33,28).(0,020255105)}{106,418 - (33,28).(0,349404616)}$$

$$= \frac{0,67408988}{94,78984862}$$

$$= 0,007111417$$

Setelah nilai $P_i$ dan $Q_i\left(i = 1,2,3,\ldots,9\right)$ diperoleh, kemudian dihitung nilai $c_i\left(i = 9,8,7,\ldots,1\right)$

- ***Menghitung*** $\boldsymbol{c_i\left(i = 9,8,7,\ldots,1\right)}$, dengan menggunakan persamaan (3.19)

$$c_i = P_i c_{i+1} + Q_i$$

Untuk $i = 9$;

$c_9 = Q_9 = 0,007111417$, karena $P_9 = 0$

Untuk $i = 8$;

$$c_8 = P_8 c_9 + Q_8$$

$$= (0,349404616).(0,007111417) + (0,20255105)$$

$$= 0,022739867$$

Untuk $i=7$;

$$\begin{aligned} c_7 &= P_7 c_8 + Q_7 \\ &= (0,349404504).(0,022739867)+(0,057691637) \\ &= 0,065637049 \end{aligned}$$

Untuk $i=6$;

$$\begin{aligned} c_6 &= P_6 c_7 + Q_6 \\ &= (0,349403587).(0,065637049)+(0,164320359) \\ &= 0,187254179 \end{aligned}$$

Untuk $i=5$;

$$\begin{aligned} c_5 &= P_5 c_6 + Q_5 \\ &= (0,349396116).(0,187254179)+(0,468027128) \\ &= 0,533453011 \end{aligned}$$

Untuk $i=4$;

$$\begin{aligned} c_4 &= P_4 c_5 + Q_4 \\ &= (0,349335209).(0,533453011)+(1,333091517) \\ &= 1,519445436 \end{aligned}$$

Untuk $i=3$;

$$\begin{aligned} c_3 &= P_3 c_4 + Q_3 \\ &= (0,348838602).(1,519445436)+(3,797734641) \\ &= 4,327775862 \end{aligned}$$

Untuk $i=2$;

$$\begin{aligned} c_2 &= P_2 c_3 + Q_2 \\ &= (0,344783024).(4,327775862)+(10,83445547) \\ &= 12,32659912 \end{aligned}$$

Untuk $i = 2$;

$$c_1 = P_1 c_2 + Q_1$$
$$= (0,311225545).(12,32659912) + (31,27290496)$$
$$= 35,10926748$$

Dengan demikian nilai yang diperoleh adalah:

$$\begin{bmatrix} c_1^1 \\ c_2^1 \\ c_3^1 \\ c_4^1 \\ c_5^1 \\ c_6^1 \\ c_7^1 \\ c_8^1 \\ c_9^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35,10925748 \\ 12,32659912 \\ 4,327775862 \\ 1,519445436 \\ 0,533453011 \\ 0,187254179 \\ 0,065637049 \\ 0,022739867 \\ 0,007111417 \end{bmatrix}$$

12. Menghitung nilai konsentrasi pada saat $l = 1$, atau $c_i^2 \left( i = 1, 2, \ldots, 9 \right)$.

Setelah diperoleh nilai $c_i^1 \left( i = 1, 2, \ldots, 9 \right)$ di $l = 0$, selanjutnya nilai tersebut digunakan untuk menghitung konsentrasi $c_i^2 \left( i = 1, 2, \ldots, 9 \right)$ atau di $l = 1$. Dimana nilai $c_i^1 \left( i = 1, 2, \ldots, 9 \right)$ dijadikan matriks **S** untuk membentuk persamaan (3.16) yang berbentuk $\mathbf{R}\,\overline{\mathbf{c}_\mathbf{i}^{\mathbf{l+1}}} = \mathbf{S}$.

13. Menghitung nilai matriks **S**

Matriks **S** diperoleh dari ruas kanan pada persamaan (3.16), yaitu

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 3.328 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{0,025} \begin{bmatrix} c_1^1 \\ c_2^1 \\ c_3^1 \\ c_4^1 \\ c_5^1 \\ c_6^1 \\ c_7^1 \\ c_8^1 \\ c_9^1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3.328 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.404,370299 \\ 493,063965 \\ 173,1110345 \\ 60,77781745 \\ 21,33812045 \\ 7,490167179 \\ 2,625481957 \\ 0,90959466 \\ 0,284456674 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 4732,370299 \\ 493,063965 \\ 173,1110345 \\ 60,77781745 \\ 21,33812045 \\ 7,490167179 \\ 2,625481957 \\ 0,90959466 \\ 0,284456674 \end{bmatrix}$$

14. Membuat matriks baru dari persamaan (3.16)

Setelah diketahui matriks $\mathbf{S}$, persamaan (3.16) menjadi:

$$\begin{bmatrix} 106,418 & -33,12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -33,28 & 106,418 & -33,12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -33,28 & 106,418 & -33,12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -33,28 & 106,418 & -33,12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -33,28 & 106,418 & -33,12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -33,28 & 106,418 & -33,12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -33,28 & 106,418 & -33,12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -33,28 & 106,418 & -33,12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -33,28 & 106,418 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^2 \\ c_2^2 \\ c_3^2 \\ c_4^2 \\ c_5^2 \\ c_6^2 \\ c_7^2 \\ c_8^2 \\ c_9^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.732,370299 \\ 493,063965 \\ 173,1110345 \\ 60,7778174 \\ 21,33812045 \\ 7,490167179 \\ 2,625481957 \\ 0,90959466 \\ 0,284456467 \end{bmatrix}$$

15. Setelah matriks baru untuk $l = 1$ terbentuk, selanjutnya dicari solusinya dengan metode sapuan ganda choleski.

Langkah yang dilakukan adalah seperti langkah-11, yaitu terlebih dahulu menghitung $P_i$ dan $Q_i \left( i = 1, 2, 3, ..., 9 \right)$, dengan menggunakan persamaan (3.20), (3.21), dan selanjutnya menghitung nilai $c_i \left( i = 9, 8, 7, ..., 1 \right)$, dengan menggunakan persamaan (3.19)

Sehingga diperoleh nilai $c_i^2 \left( i = 9, 8, 7, ..., 1 \right)$, yaitu:

$$\begin{bmatrix} c_1^2 \\ c_2^2 \\ c_3^2 \\ c_4^2 \\ c_5^2 \\ c_6^2 \\ c_7^2 \\ c_8^2 \\ c_9^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 51,99649503 \\ 24,18456247 \\ 10,57262829 \\ 4,442774282 \\ 1,816312394 \\ 0,727496491 \\ 0,286282548 \\ 0,109572795 \\ 0,036939609 \end{bmatrix}$$

16. Menghitung nilai konsentrasi pada saat $l = 2$, atau $c_i^3 \left(i = 1, 2, 3, \ldots, 9\right)$

Untuk menghitung nilai konsentrasi pada saat $l = 2$, atau $c_i^3 \left(i = 1, 2, 3, \ldots, 9\right)$, dapat digunakan langkah-10 dan 11 atau langkah-12, sampai langkah-15.

Setelah diperoleh nilai $c_i^2 \left(i = 1, 2, 3, \ldots, 9\right)$ di $l = 0$, selanjutnya nilai tersebut dipakai untuk menghitung konsentrasi $c_i^3 \left(i = 1, 2, 3, \ldots, 9\right)$ atau di $l = 1$. Dimana nilai $c_i^2 \left(i = 1, 2, 3, \ldots, 9\right)$ dijadikan matriks **S** seperti yang telah diuraikan pada $l = 1$.

Sehingga diperoleh nilai $c_i^3 \left(i = 9, 8, 7, \ldots, 1\right)$, yaitu:

$$\begin{bmatrix} c_1^3 \\ c_2^3 \\ c_3^3 \\ c_4^3 \\ c_5^3 \\ c_6^3 \\ c_7^3 \\ c_8^3 \\ c_9^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 61{,}2548529 \\ 33{,}53741349 \\ 17{,}00001405 \\ 8{,}154506112 \\ 3{,}753465962 \\ 1{,}672762124 \\ 0{,}724540848 \\ 0{,}301430028 \\ 0{,}108150648 \end{bmatrix}$$

17. Setelah dilakukan langkah-1 sampai langkah-18, maka diperoleh tabel nilai konsentrasi pada saat $l = 0{,}1{,}2$, atau $c_i^1, c_i^2, c_i^3$ dengan $(i = 1{,}2{,}3{,}\ldots{,}9)$ sebagai berikut:

Tabel 3.1. Nilai konsentrasi setiap titik $(c(x,t))$ dengan menggunakan skema Implisit

| $i$ | $x$ | $c(x_i,t_l)=c_i^l$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $l=0$ | $l=1$ | $l=2$ | $l=3$ |
| | | $t=0,000$ | $t=0,025$ | $t=0,050$ | $t=0,075$ |
| 0 | 0,00 | 0 | 100 | 100 | 100 |
| 1 | 0,05 | 0 | 35,10925748 | 51,99649503 | 61,2548529 |
| 2 | 0,10 | 0 | 12,32659912 | 24,18456247 | 33,53741349 |
| 3 | 0,15 | 0 | 4,327775862 | 10,57262829 | 17,00001405 |
| 4 | 0,20 | 0 | 1,519445436 | 4,442774282 | 8,154506112 |
| 5 | 0,25 | 0 | 0,533453011 | 1,816312394 | 3,753465962 |
| 6 | 0,30 | 0 | 0,187254179 | 0,727496491 | 1,672762124 |
| 7 | 0,35 | 0 | 0,065637049 | 0,286282548 | 0,724540848 |
| 8 | 0,40 | 0 | 0,022739867 | 0,109572795 | 0,301430028 |
| 9 | 0,45 | 0 | 0,007111417 | 0,036939609 | 0,108150648 |
| 10 | 0,50 | 0 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |

18. Langkah-langkah diatas dapat digunakan secara berkelanjutan sampai iterasi yang diinginkan.

## 3.2. Skema Crank-Nicholson

Langkah-langkah yang digunakan untuk mencari solusi persamaan diferensial parsial menggunakan skema Crank-Nicholson adalah sebagai berikut:

1. Menentukan persamaan differensial yang diselesaikan

$$\frac{\partial c}{\partial t}=D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}-U\frac{\partial c}{\partial x}-\gamma c \quad ,0<x<0,5$$

2. Menentukan nilai awal dan nilai batas

$$c(x,0)=0 \qquad ,0<x<0,5$$

$$c(0,t)=100 \qquad ,t>0$$

$$c(L,t)=0 \qquad ,t>0$$

3. Menentukan nilai $\Delta x$ dan $\Delta t$

Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui analisis perbandingan metode beda hingga skema Implisit dan Crank-Nicholson, sehingga selayaknya nilai $\Delta x$ dan $\Delta t$ yang diambil untuk skema Crank-Nicholson adalah sama dengan pada skema Implisit. Yaitu $\Delta x = 0,05$ dan $\Delta t = 0,025$ dengan tujuan untuk mempermudah proses analisis.

4. Mengubah persamaan kedalam bentuk skema Crank-Nicholson, seperti yang telah uraikan pada bab 2 sub bab 2.5.3.

Skema Crank-Nicholson merupakan rerata dari Skema Eksplisit dan Implisit. Berdasarkan pada skema Eksplisit pada persamaan keseimbangan massa reaktor, persamaan yang digunakan adalah persamaan (3.7)

$$\frac{c_i^{l+1}-c_i^l}{\Delta t} = D\left(\frac{c_{i+1}^l - 2c_i^l + c_{i-1}^l}{(\Delta x)^2}\right) - U\left(\frac{c_{i+1}^l - c_{i-1}^l}{2 \quad \Delta x}\right) - \gamma c_i^l$$

$$c_i^{l+1}-c_i^l = D\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(c_{i+1}^l - 2c_i^l + c_{i-1}^l\right) - U\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(c_{i+1}^l - c_{i-1}^l\right) - \gamma \Delta t c_i^l$$

dan untuk skema implisit, persamaan yang digunakan adalah persamaan (3.9)

$$\frac{c_i^{l+1}-c_i^l}{\Delta t} = D\left(\frac{c_{i+1}^{l+1} - 2c_i^{l+1} + c_{i-1}^{l+1}}{(\Delta x)^2}\right) - U\left(\frac{c_{i+1}^{l+1} - c_{i-1}^{l+1}}{\Delta x}\right) - \gamma c_i^{l+1}$$

$$c_i^{l+1}-c_i^l = D\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(c_{i+1}^{l+1} - 2c_i^{l+1} + c_{i-1}^{l+1}\right) - U\frac{\Delta t}{(\Delta x)}\left(c_{i+1}^{l+1} - c_{i-1}^{l+1}\right) - \gamma \Delta t c_i^{l+1}$$

karena skema Crank-Nicholson adalah rata-rata dari skema Eksplisit dan skema Implisit, maka pada persamaan keseimbangan massa reaktor, skema tersebut berbentuk:

$$\text{Crank Nicholson} = \frac{1}{2}\left\{\text{Skema Eksplisit} + \text{Skema Implisit}\right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left\{\left(c_i^l - c_i^{l+1} + D\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(c_{i+1}^l - 2c_i^l + c_{i-1}^l\right) - U\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(c_{i+1}^l - c_{i-1}^l\right) - \gamma\Delta t c_i^l\right)\right. \\
&\quad \left. + \left(c_i^l - c_i^{l+1} + D\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(c_{i+1}^{l+1} - 2c_i^{l+1} + c_{i-1}^{l+1}\right) - U\frac{\Delta t}{(\Delta x)}\left(c_{i+1}^{l+1} - c_{i-1}^{l+1}\right) - \gamma\Delta t c_i^{l+1}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(2c_i^l - 2c_i^{l+1} + D\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(\left(c_{i+1}^l - 2c_i^l + c_{i-1}^l\right) + \left(c_{i+1}^{l+1} - 2c_i^{l+1} + c_{i-1}^{l+1}\right)\right)\right)\right. \\
&\quad \left. - U\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(\left(c_{i+1}^l - c_{i-1}^l\right) + \left(c_{i+1}^{l+1} - c_{i-1}^{l+1}\right)\right) - \gamma\Delta t\left(c_i^l + c_i^{l+1}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Dari persamaan diatas akan diperoleh skema Crank-Nicholson sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
&= c_i^l - c_i^{l+1} + \frac{D\Delta t}{2(\Delta x)^2}\left(\left(c_{i+1}^l - 2c_i^l + c_{i-1}^l\right) + \left(c_{i+1}^{l+1} - 2c_i^{l+1} + c_{i-1}^{l+1}\right)\right) \\
&\quad - \frac{U\Delta t}{4\Delta x}\left(\left(c_{i+1}^l - c_{i-1}^l\right) + \left(c_{i+1}^{l+1} - c_{i-1}^{l+1}\right)\right) - \frac{\gamma\Delta t}{2}\left(c_i^l + c_i^{l+1}\right)\Big\}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Atau

$$\begin{aligned}
\frac{c_i^{l+1} - c_i^l}{\Delta t} &= \frac{1}{2}\left\{D\left(\left(\frac{c_{i+1}^l - 2c_i^l + c_{i-1}^l}{(\Delta x)^2}\right) + \left(\frac{c_{i+1}^{l+1} - 2c_i^{l+1} + c_{i-1}^{l+1}}{(\Delta x)^2}\right)\right)\right. \\
&\quad \left. - U\left(\left(\frac{c_{i+1}^l - c_{i-1}^l}{2\Delta x}\right) + \left(\frac{c_{i+1}^{l+1} - c_{i-1}^{l+1}}{2\Delta x}\right)\right) - \gamma\left(\frac{c_i^l + c_i^{l+1}}{\Delta t}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Persamaan (3.24) merupakan skema Crank-Nicholson untuk persamaan keseimbangan massa reaktor. Untuk lebih memudahkan perhitungan, nilai $c_{i-1}^{l+1}$, $c_i^{l+1}$, $c_{i+1}^{l+1}$ dijadikan dalam satu sisi dengan menguraikan kembali persamaan (3.24) dan mengumpulkan indeks-indeks yang sejenis. Sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$-\left(\frac{D\Delta t}{2(\Delta x)^2}+\frac{U\Delta t}{4\Delta x}\right)c_{i-1}^{l+1}+\left(1+\frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2}+\frac{\gamma\Delta t}{2}\right)c_i^{l+1}-\left(\frac{D\Delta t}{2(\Delta x)^2}-\frac{U\Delta t}{4\Delta x}\right)c_{i+1}^{l+1}$$

$$=\left(\frac{D\Delta t}{2(\Delta x)^2}+\frac{U\Delta t}{4\Delta x}\right)c_{i-1}^{l}+\left(1-\frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2}-\frac{\gamma\Delta t}{2}\right)c_i^{l}+\left(\frac{D\Delta t}{2(\Delta x)^2}-\frac{U\Delta t}{4\Delta x}\right)c_{i+1}^{l} \tag{3.25}$$

Atau

$$-K\,c_{i-1}^{l+1}+L\,c_i^{l+1}-M\,c_{i+1}^{l+1}=K\,c_{i-1}^{l}+N\,c_i^{l}+M\,c_{i+1}^{l} \tag{3.26}$$

Dimana:

$$K=\left(\frac{D\Delta t}{2\left(\Delta x\right)^2}+\frac{U\Delta t}{4\Delta x}\right) \qquad L=\left(1+\frac{D\Delta t}{\left(\Delta x\right)^2}+\frac{\gamma\Delta t}{2}\right)$$

$$M=\left(\frac{D\Delta t}{2\left(\Delta x\right)^2}-\frac{U\Delta t}{4\Delta x}\right) \qquad N=\left(1-\frac{D\Delta t}{\left(\Delta x\right)^2}-\frac{\gamma\Delta t}{2}\right)$$

5. Mensubtitusi nilai-nilai yang telah diketahui kedalam persamaan:

Perhatikan persamaan (3.26), dengan mensubtitusi nilai-nilai yang telah diketahui, maka diperoleh koefisien dari $c_{i-1}^{l+1}$, $c_i^{l+1}$, $c_{i+1}^{l+1}$, $c_{i-1}^{l}$, $c_i^{l}$, $c_{i+1}^{l}$, yaitu

$$K=\frac{(0,083).(0,025)}{2\left(0,05\right)^2}+\frac{(0,008).(0,025)}{4(0,05)}=0,416$$

$$L=1+\frac{(0,083).(0,025)}{\left(0,05\right)^2}+\frac{(0,018).(0,025)}{2}=1,330225$$

$$M=\frac{(0,083).(0,025)}{2\left(0,05\right)^2}-\frac{(0,008).(0,025)}{4(0,05)}=0,414$$

$$N=1-\frac{(0,083).(0,025)}{\left(0,05\right)^2}-\frac{(0,018).(0,025)}{2}=0,169775$$

Sehingga persamaan (3.26) menjadi:

$$-0,416c_{i-1}^{l+1}+1,330225c_{i}^{l+1}-0,414c_{i+1}^{l+1}=0,416c_{i-1}^{l}+0,169775c_{i}^{l}+0,414Mc_{i+1}^{l}$$

(3.27)

6. Dengan menentukan $n=10$, maka diuraikan persamaan (3.2) menjadi sistem persamaan dengan $i=1,\ 2,\ \ldots,n-1$, atau $i=1,\ 2,\ldots,9$ sebagai berikut:

$$i=1\rightarrow-0,416c_{0}^{l+1}+1,330225c_{1}^{l+1}-0,414c_{2}^{l+1}=0,416c_{0}^{l}+0,169775c_{1}^{l}+0,414c_{2}^{l}$$

$$i=2\rightarrow-0,416c_{1}^{l+1}+1,330225c_{2}^{l+1}-0,414c_{2}^{l+1}=0,416c_{1}^{l}+0,169775c_{2}^{l}+0,414c_{3}^{l}$$

$$i=3\rightarrow-0,416c_{2}^{l+1}+1,330225c_{3}^{l+1}-0,414c_{2}^{l+1}=0,416c_{2}^{l}+0,169775c_{3}^{l}+0,414c_{4}^{l}$$

$$i=4\rightarrow-0,416c_{3}^{l+1}+1,330225c_{4}^{l+1}-0,414c_{2}^{l+1}=0,416c_{3}^{l}+0,169775c_{4}^{l}+0,414c_{5}^{l}$$

$$i=5\rightarrow-0,416c_{4}^{l+1}+1,330225c_{5}^{l+1}-0,414c_{2}^{l+1}=0,416c_{4}^{l}+0,169775c_{5}^{l}+0,414c_{6}^{l}$$

$$i=6\rightarrow-0,416c_{5}^{l+1}+1,330225c_{6}^{l+1}-0,414c_{2}^{l+1}=0,416c_{5}^{l}+0,169775c_{6}^{l}+0,414c_{7}^{l}$$

$$i=7\rightarrow-0,416c_{6}^{l+1}+1,330225c_{7}^{l+1}-0,414c_{2}^{l+1}=0,416c_{6}^{l}+0,169775c_{7}^{l}+0,414c_{8}^{l}$$

$$i=8\rightarrow-0,416c_{7}^{l+1}+1,330225c_{8}^{l+1}-0,414c_{9}^{l+1}=0,416c_{7}^{l}+0,169775c_{8}^{l}+0,414c_{9}^{l}$$

$$i=9\rightarrow-0,416c_{8}^{l+1}+1,330225c_{9}^{l+1}-0,414c_{10}^{l+1}=0,416c_{8}^{l}+0,169775c_{9}^{l}+0,414c_{10}^{l}$$

(3.28)

7. Memasukkan nilai awal dan nilai batasnya.

Dengan menggunakan nilai awal dan nilai batas pada persamaan (3.2), maka dapat diketahui sistem persamaan (3.28) menjadi:

$$i=1\rightarrow(-0,416).(100)+1,330225c_{1}^{l+1}-0,414c_{2}^{l+1}=(0,416).(0)+0,169775c_{1}^{l}+0,414c_{2}^{l}$$

$$1,330225c_{1}^{l+1}-0,414c_{2}^{l+1}=41,6+0+0,169775c_{1}^{l}+0,414c_{2}^{l}$$

$$i=2\rightarrow-0,416c_{1}^{l+1}+1,330225c_{2}^{l+1}-0,414c_{2}^{l+1}=0,416c_{1}^{l}+0,169775c_{2}^{l}+0,414c_{3}^{l}$$

$$i=3\rightarrow-0,416c_{2}^{l+1}+1,330225c_{3}^{l+1}-0,414c_{2}^{l+1}=0,416c_{2}^{l}+0,169775c_{3}^{l}+0,414c_{4}^{l}$$

$$i=4\rightarrow-0,416c_{3}^{l+1}+1,330225c_{4}^{l+1}-0,414c_{2}^{l+1}=0,416c_{3}^{l}+0,169775c_{4}^{l}+0,414c_{5}^{l}$$

$$i=5 \rightarrow -0,416c_4^{l+1}+1,330225c_5^{l+1}-0,414c_2^{l+1}=0,416c_4^{l}+0,169775c_5^{l}+0,414c_6^{l}$$
$$i=6 \rightarrow -0,416c_5^{l+1}+1,330225c_6^{l+1}-0,414c_2^{l+1}=0,416c_5^{l}+0,169775c_6^{l}+0,414c_7^{l}$$
$$i=7 \rightarrow -0,416c_6^{l+1}+1,330225c_7^{l+1}-0,414c_2^{l+1}=0,416c_6^{l}+0,169775c_7^{l}+0,414c_8^{l}$$
$$i=8 \rightarrow -0,416c_7^{l+1}+1,330225c_8^{l+1}-0,414c_9^{l+1}=0,416c_7^{l}+0,169775c_8^{l}+0,414c_9^{l}$$
$$i=9 \rightarrow -0,416c_8^{l+1}+1,330225c_9^{l+1}-(0,414).(0)=0,416c_8^{l}+0,169775c_9^{l}+(0,414).(0)$$
$$-416c_8^{l+1}+1,330225c_9^{l+1}=0,416c_8^{l}+0,169775c_9^{l}$$

(3.29)

8. Dari persamaan (3.14), kemudian dibentuk matriks $\mathbf{X}\overline{\mathbf{c}_\mathbf{i}^{\mathbf{l+1}}}=\mathbf{Y}\overline{\mathbf{c}_\mathbf{i}^{\mathbf{l}}}+\mathbf{Z}$ sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1,330225 & -0,414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,416 & 1,330225 & -0,414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,416 & 1,330225 & -0,414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,416 & 1,330225 & -0,414 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,416 & 1,330225 & -0,414 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,416 & 1,330225 & -0,414 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,416 & 1,330225 & -0,414 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,416 & 1,330225 & -0,414 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,416 & 1,330225 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^{l+1} \\ c_2^{l+1} \\ c_3^{l+1} \\ c_4^{l+1} \\ c_5^{l+1} \\ c_6^{l+1} \\ c_7^{l+1} \\ c_8^{l+1} \\ c_9^{l+1} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0,169775 & 0,414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,416 & 0,169775 & 0,414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,416 & 0,169775 & 0,414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,416 & 0,169775 & 0,414 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,416 & 0,169775 & 0,414 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,416 & 0,169775 & 0,414 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,416 & 0,169775 & 0,414 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,416 & 0,169775 & 0,414 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,416 & 0,169775 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^{l} \\ c_2^{l} \\ c_3^{l} \\ c_4^{l} \\ c_5^{l} \\ c_6^{l} \\ c_7^{l} \\ c_8^{l} \\ c_9^{l} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 41,6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(3.30)

9. Menyelesaikan dengan metode sapuan ganda choleski

Seperti langkah-langkah pada skema Implisit, Persamaan (3.30) dapat diselesaikan dengan persamaan (2.56), yaitu $\overline{\mathbf{c_i^{l+1}}} = \mathbf{X^{-1}} \;\; (\mathbf{Y\overline{c_i^l}} + \mathbf{Z})$. Atau dapat. diselesaikan secara manual dengan metode sapuan ganda choleski untuk memperoleh nilai $c_i\left(i=1,2,\ldots,9\right)$. Akan tetapi, dalam skema Crank-Nicholson, matriks yang diselesaikan harus berbentuk $\mathbf{X\overline{c_i^{l+1}}} = \mathbf{Y'}$, dimana $\mathbf{Y'} = \mathbf{Y\overline{c_i^l}} + \mathbf{Z}$ untuk memudahkan dalam proses penyelesaian. Dengan menggagap bahwa terdapat hubungan:

$$c_i^{l+1} = P_i c_{i+1}^{l+1} + Q_i \tag{3.31}$$

Untuk titik $i-1$, persamaan (3.16) menjadi:

$$c_{i-1}^{l+1} = P_{i-1} c_i^{l+1} + Q_{i-1} \tag{3.32}$$

Persamaan (3.32) disubtitusikan ke persamaan (3.27), dan untuk penyederhanaan superskrip $l+1$ dihilangkan, maka:

$$-0,416\left(P_{i-1}c_i + Q_{i-1}\right) + c_i - 0,414c_{i+1} = D_i$$

$$\left(1,330225 - 0,416P_{i-1}\right)c_i = 0,414c_{i+1} + D_i + 0,416Q_{i-1}$$

$$c_i = \frac{0,414c_{i+1} + D_i + 0,416_i Q_{i-1}}{1,330225 - 0,416P_{i-1}}$$

$$c_i = \frac{0,414}{1,330225 + 416P_{i-1}} c_{i+1} + \frac{D_i + 0,416Q_{i-1}}{1,330225 - 0,416P_{i-1}}$$

Atau

$$c_i = P_i c_{i+1} + Q_i \tag{3.33}$$

Dengan:

$$P_i = \frac{0,414}{1,330225 - 0,416P_{i-1}} \tag{3.34}$$

$$Q_i = \frac{D_i + 0,416 Q_{i-1}}{1,330225 - 0,416 P_{i-1}} \tag{3.35}$$

Dimana : $D_i =$ matriks $\mathbf{Y'}$

Langkah yang digunakan dalam penyelesaian menggunakan metode sapuan ganda choleski pada skema Crank-Nicholson sama dengan metode sapuan ganda choleski pada skema Implisit. Yaitu, pertama dihitung nilai $P_i$ dan $Q_i$ $\left(i = 1, 2, 3, ......, 9\right)$ dari kiri ke kanan, setelah sampai ke titik $i = 9$, dihitung nilai $c_9 = Q_9$. Berdasarkan nilai $c_9$ tersebut, hitungan akan dilanjutkan dari kanan ke kiri untuk mendapatkan nilai $c_i$ $\left(i = 1, 2, 3, ..., 9\right)$.

10. Menghitung nilai konsentrasi pada saat $l = 0$, atau $c_i^1 \left(i = 1, 2, \ldots, 9\right)$

Dengan menggunakan nilai awal dan nilai batas, maka dapat diketahui nilai $c_0^1 = c_{in} = 100;\ c_i^0 = 0;\ c_{10}^1 = 0$. Selanjutnya disubtitusikan ke persamaan (3.30), sehingga matriks baru yang terbentuk adalah:

$$\begin{bmatrix} 1,330225 & -0,414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,416 & 1,330225 & -0,414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,416 & 1,330225 & -0,414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,416 & 1,330225 & -0,414 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,416 & 1,330225 & -0,414 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,416 & 1,330225 & -0,414 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,416 & 1,330225 & -0,414 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,416 & 1,330225 & -0,414 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,416 & 1,330225 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^1 \\ c_2^1 \\ c_3^1 \\ c_4^1 \\ c_5^1 \\ c_6^1 \\ c_7^1 \\ c_8^1 \\ c_9^1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0,169775 & 0,414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,416 & 0,169775 & 0,414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,416 & 0,169775 & 0,414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,416 & 0,169775 & 0,414 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,416 & 0,169775 & 0,414 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,416 & 0,169775 & 0,414 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,416 & 0,169775 & 0,414 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,416 & 0,169775 & 0,414 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,416 & 0,169775 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^0 \\ c_2^0 \\ c_3^0 \\ c_4^0 \\ c_5^0 \\ c_6^0 \\ c_7^0 \\ c_8^0 \\ c_9^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 41,6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dan karena nilai $c_i^0 = 0$, maka matriks diatas menjadi:

$$\begin{bmatrix} 1,330225 & -0,414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,416 & 1,330225 & -0,414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,416 & 1,330225 & -0,414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,416 & 1,330225 & -0,414 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,416 & 1,330225 & -0,414 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,416 & 1,330225 & -0,414 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,416 & 1,330225 & -0,414 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,416 & 1,330225 & -0,414 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,416 & 1,330225 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^1 \\ c_2^1 \\ c_3^1 \\ c_4^1 \\ c_5^1 \\ c_6^1 \\ c_7^1 \\ c_8^1 \\ c_9^1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0,169775 & 0,414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,416 & 0,169775 & 0,414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,416 & 0,169775 & 0,414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,416 & 0,169775 & 0,414 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,416 & 0,169775 & 0,414 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,416 & 0,169775 & 0,414 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,416 & 0,169775 & 0,414 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,416 & 0,169775 & 0,414 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,416 & 0,169775 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 41,6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

11. Membentuk matriks $\mathbf{Y'} = \mathbf{Y}\overline{\mathbf{c}_i^0} + \mathbf{Z}$

$$\mathbf{Y'}=\begin{bmatrix} 0{,}169775 & 0{,}414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}416 & 0{,}169775 & 0{,}414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}416 & 0{,}169775 & 0{,}414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}416 & 0{,}169775 & 0{,}414 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}416 & 0{,}169775 & 0{,}414 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}416 & 0{,}169775 & 0{,}414 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}416 & 0{,}169775 & 0{,}414 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}416 & 0{,}169775 & 0{,}414 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}416 & 0{,}169775 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 41{,}6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y'}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 41{,}6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 41{,}6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

12. Membentuk matriks $\mathbf{X}\overline{\mathbf{c}_i^1} = \mathbf{Y'}$

Setelah diperoleh matriks $\mathbf{Y'}$, selanjutnya disubtitusikan ke persamaan $\mathbf{X}\overline{\mathbf{c}_i^1} = \mathbf{Y'}$, sehingga diperoleh matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1,330225 & -0,414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,416 & 1,330225 & -0,414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,416 & 1,330225 & -0,414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,416 & 1,330225 & -0,414 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,416 & 1,330225 & -0,414 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,416 & 1,330225 & -0,414 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,416 & 1,330225 & -0,414 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,416 & 1,330225 & -0,414 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,416 & 1,330225 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^1 \\ c_2^1 \\ c_3^1 \\ c_4^1 \\ c_5^1 \\ c_6^1 \\ c_7^1 \\ c_8^1 \\ c_9^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41,6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

13. Setelah matriks $\mathbf{X\overline{c_i^1} = Y'}$ untuk $l = 0$ terbentuk, selanjutnya dicari solusinya dengan metode sapuan ganda choleski.

- ***Menghitung koefisien*** $\boldsymbol{P_i \, dan \, Q_i \left( i = 1, 2, 3, ..., 9 \right)}$**,** dengan menggunakan persamaan (3.34), (3.35)

  Untuk $i = 1, P_0 = 0, Q_0 = 0.$

$$P_1 = \frac{0,414}{1,330225 - 0,416 P_0}$$

$$= \frac{0,414}{1,330225 - 0,416(0)}$$

$$= \frac{0,414}{1,330225}$$

$$= 0,311225545$$

$$Q_1 = \frac{41,6 + 0,416 Q_0}{1,330225 - 0,416 P_0}$$

$$= \frac{41,6 + 0,416.(0)}{106,418 - 0,416(0)}$$

$$= \frac{41,6}{1,330225}$$

$$= 31,27215921$$

Untuk $i = 2$;

$$P_2 = \frac{0,414}{1,330225 - 0,416P_1}$$

$$= \frac{0,414}{1,330225 - (0,416).(0,311225545)}$$

$$= \frac{0,414}{1,200755173}$$

$$= 0,344783024$$

$$Q_2 = \frac{0 + 0,416Q_1}{1,330225 - 0,416P_1}$$

$$= \frac{(0,416).(31,27290496)}{1,330225 - (0,416).(0,311225545)}$$

$$= \frac{13,00952846}{1,200755173}$$

$$= 10,83419503$$

Untuk $i = 3$;

$$P_3 = \frac{0,414}{1,330225 - 0,416P_2}$$

$$= \frac{0,414}{1,330225 - (0,416).(0,344783024)}$$

$$= \frac{0,414}{1,186795262}$$

$$= 0,348838602$$

$$Q_3 = \frac{0 + 0,416Q_2}{1,330225 - 0,416P_2}$$

$$= \frac{(0,416).(10,83445547)}{1,330225 - (0,416).(0,344783024)}$$

$$= \frac{4,507133478}{1,186795262}$$

$$= 3,797643349$$

Untuk $i = 4$;

$$P_4 = \frac{0,414}{1,330225 - 0,416 P_3}$$

$$= \frac{0,414}{1,330225 - (33,28).(0,348838602)}$$

$$= \frac{0,414}{1,185108142}$$

$$= 0,349335209$$

$$Q_4 = \frac{0 + 0,416 Q_3}{1,330225 - 0,416 P_3}$$

$$= \frac{(0,416).(3,797734641)}{1,330225 - (0,416).(0,348838602)}$$

$$= \frac{1,57985761}{1,185108142}$$

$$= 1,333059472$$

Untuk $i = 5$;

$$P_5 = \frac{0,414}{1,330225 - 0,416 P_4}$$

$$= \frac{0,414}{1,330225 - (0,416).(0,349335209)}$$

$$= \frac{0,414}{1,184901553}$$

$$= 0,349396116$$

$$Q_5 = \frac{0 + 0,416Q_4}{1,330225 - 0,416P_4}$$

$$= \frac{(0,416).(1,333091517)}{1,330225 - (0,416).(0,349335209)}$$

$$= \frac{0,554566071}{1,184901553}$$

$$= 0,468015878$$

Untuk $i = 6$;

$$P_6 = \frac{0,414}{1,330225 - 0,416P_5}$$

$$= \frac{0,414}{1,330225 - (0,416).(0,349396116)}$$

$$= \frac{0,414}{1,184876216}$$

$$= 0,349403587$$

$$Q_6 = \frac{0 + 0,416Q_5}{1,330225 - 0,416P_5}$$

$$= \frac{(0,416).(0,468027128)}{1,330225 - (0,416).(0,349396116)}$$

$$= \frac{0,194699285}{1,184876216}$$

$$= 0,164316409$$

Untuk $i = 7$;

$$P_7 = \frac{0,414}{1,330225 - 0,416P_6}$$

$$= \frac{0,414}{1,330225 - (0,416).(0,349403587)}$$

$$= \frac{0,414}{1,184873108}$$

$$= 0,349404504$$

$$Q_7 = \frac{0 + 0,416 Q_6}{1,330225 - 0,416 P_6}$$

$$= \frac{(0,416).(0,164320359)}{1,330225 - (0,416).(0,349403587)}$$

$$= \frac{0,068352769}{1,184873108}$$

$$= 0,05769025$$

Untuk $i = 8$;

$$P_8 = \frac{0,414}{1,330225 - 0,416 P_7}$$

$$= \frac{0,414}{1,330225 - (0,416).(0,349404504)}$$

$$= \frac{0,414}{1,184872727}$$

$$= 0,349404616$$

$$Q_8 = \frac{0 + 0,416 Q_7}{1,330225 - 0,416 P_7}$$

$$= \frac{(0,416).(0,057691637)}{1,330225 - (0,416).(0,349404504)}$$

$$= \frac{0,023999721}{1,184872727}$$

$$= 0,020254618$$

Untuk $i = 9$;

$P_9 = 0$, karena $C_9 = 0$ sehingga

$$P_9 = \frac{C_9}{1,330225 - 0,416P_7}$$

$$= \frac{0}{1,330225 - (0,416).(0,349404616)}$$

$$= 0$$

$$Q_9 = \frac{0 + 0,416Q_8}{1,330225 - 0,416P_8}$$

$$= \frac{(0,416).(0,020255105)}{1,330225 - (0,416).(0,349404616)}$$

$$= \frac{0,008426124}{1,18487268}$$

$$= 0,007111246$$

Setelah nilai $P_i$ *dan* $Q_i \left(i = 1,2,3,...,9\right)$ diperoleh, kemudian dihitung nilai $c_i \left(i = 9,8,7,...,1\right)$

- ***Menghitung*** $\boldsymbol{c_i \left(i = 9,8,7,...,1\right)}$, dengan menggunakan persamaan (3.33)

$$c_i = P_i c_{i+1} + Q_i$$

Untuk $i = 9$;

$c_9 = Q_9 = 0,007111246$, karena $P_9 = 0$

Untuk $i = 8$;

$$c_8 = P_8 c_9 + Q_8$$

$$= (0,349404616).(0,007111246) + (0,20254618)$$

$$= 0,02273932$$

Untuk $i = 7$;

$$c_7 = P_7 c_8 + Q_7$$
$$= (0,349404504).(0,02273932) + (0,05769025)$$
$$= 0,065635471$$

Untuk $i = 6$;

$$c_6 = P_6 c_7 + Q_6$$
$$= (0,349403587).(0,065635471) + (0,164316409)$$
$$= 0,187249678$$

Untuk $i = 5$;

$$c_5 = P_5 c_6 + Q_5$$
$$= (0,349396116).(0,187249678) + (0,468015878)$$
$$= 0,533440188$$

Untuk $i = 4$;

$$c_4 = P_4 c_5 + Q_4$$
$$= (0,349335209).(0,533440188) + (1,333059472)$$
$$= 1,519408911$$

Untuk $i = 3$;

$$c_3 = P_3 c_4 + Q_3$$
$$= (0,348838602).(1,519408911) + (3,797643349)$$
$$= 4,327671829$$

Untuk $i = 2$;

$$c_2 = P_2 c_3 + Q_2$$
$$= (0,344783024).(4,327671829) + (10,83419503)$$
$$= 12,32630281$$

Untuk $i = 2$;

$$c_1 = P_1 c_2 + Q_1$$
$$= (0,311225545).(12,32630281) + (31,27215321)$$
$$= 35,10941351$$

Dengan demikian hasil yang diperoleh adalah:

$$\begin{bmatrix} c_1^1 \\ c_2^1 \\ c_3^1 \\ c_4^1 \\ c_5^1 \\ c_6^1 \\ c_7^1 \\ c_8^1 \\ c_9^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35,10841351 \\ 12,32630281 \\ 4,327671829 \\ 1,519408911 \\ 0,533440188 \\ 0,187249678 \\ 0,065635471 \\ 0,02273932 \\ 0,007111246 \end{bmatrix}$$

14. Menghitung nilai konsentrasi pada saat $l = 1$, atau $c_i^1 \left( i = 1, 2, 3, \ldots, 9 \right)$

Setelah diperoleh nilai $c_i^1 \left( i = 1, 2, 3, \ldots, 9 \right)$ di $l = 0$, selanjutnya nilai tersebut dipakai untuk menghitung konsentrasi $c_i^2 \left( i = 1, 2, 3, \ldots, 9 \right)$ atau di $l = 1$. Dimana dalam metode Crank-Nicholson nilai $c_i^1 \left( i = 1, 2, 3, \ldots, 9 \right)$ tidak dijadikan matriks $\mathbf{S}$, akan tetapi dijadikan bagian dari matriks $\mathbf{Y' = Y\overline{c_i^1} + Z}$. Sedangkan pengerjaannya sama dengan prosedur pada saat $l = 0$ (langkah-10, 11, 12 dan 13).

Langkah pertama adalah mensubtitusi nilai $c_i^1 \left( i = 1, 2, 3, \ldots, 9 \right)$ ke persamaan (3.30), matriks yang terbentuk adalah:

$$\begin{bmatrix} 1,330225 & -0,414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,416 & 1,330225 & -0,414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,416 & 1,330225 & -0,414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,416 & 1,330225 & -0,414 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,416 & 1,330225 & -0,414 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,416 & 1,330225 & -0,414 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,416 & 1,330225 & -0,414 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,416 & 1,330225 & -0,414 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,416 & 1,330225 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^2 \\ c_2^2 \\ c_3^2 \\ c_4^2 \\ c_5^2 \\ c_6^2 \\ c_7^2 \\ c_8^2 \\ c_9^2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0,169775 & 0,414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,416 & 0,169775 & 0,414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,416 & 0,169775 & 0,414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,416 & 0,169775 & 0,414 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,416 & 0,169775 & 0,414 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,416 & 0,169775 & 0,414 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,416 & 0,169775 & 0,414 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,416 & 0,169775 & 0,414 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,416 & 0,169775 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 35,10841351 \\ 12,32630281 \\ 4,327671829 \\ 1,519408911 \\ 0,533440188 \\ 0,187249678 \\ 0,065635471 \\ 0,02273932 \\ 0,007111246 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 41,6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

15. Membentuk matriks $\mathbf{Y'}$

Dengan menggunakan persamaan $\mathbf{Y' = Y\overline{c_i^1} + Z}$, maka diperoleh:

$$\mathbf{Y'} = \begin{bmatrix} 0,169775 & 0,414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,416 & 0,169775 & 0,414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,416 & 0,169775 & 0,414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,416 & 0,169775 & 0,414 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,416 & 0,169775 & 0,414 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,416 & 0,169775 & 0,414 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,416 & 0,169775 & 0,414 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,416 & 0,169775 & 0,414 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,416 & 0,169775 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 35,10841351 \\ 12,32630281 \\ 4,327671829 \\ 1,519408911 \\ 0,533440188 \\ 0,187249678 \\ 0,065635471 \\ 0,02273932 \\ 0,007111246 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 41,6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan operasi matriks diperoleh nilai $\mathbf{Y'}$ sebagai berikut:

$$\mathbf{Y'} = \begin{bmatrix} 59,15320676 \\ 6,163151406 \\ 2,163835915 \\ 0,759704456 \\ 0,266720094 \\ 0,093624839 \\ 0,032817736 \\ 0,01136966 \\ 0,003555623 \end{bmatrix}$$

16. Membentuk matriks $\mathbf{X\overline{c_i^2} = Y'}$

Untuk memperoleh nilai $c_i^2 \left( i = 1, 2, 3, \ldots, 9 \right)$, seperti pada langkah-11, maka dibentuk matriks $\mathbf{X\overline{c_i^2} = Y'}$ dengan memasukkan nilai $\mathbf{Y'}$ yang diperoleh dari langkah-14. Matriks yang terbentuk sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1,330225 & -0,414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,416 & 1,330225 & -0,414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,416 & 1,330225 & -0,414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,416 & 1,330225 & -0,414 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,416 & 1,330225 & -0,414 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,416 & 1,330225 & -0,414 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,416 & 1,330225 & -0,414 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,416 & 1,330225 & -0,414 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,416 & 1,330225 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^2 \\ c_2^2 \\ c_3^2 \\ c_4^2 \\ c_5^2 \\ c_6^2 \\ c_7^2 \\ c_8^2 \\ c_9^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 59,15320676 \\ 6,1631514 \\ 2,1638359 \\ 0,7597044 \\ 0,2667200 \\ 0,0936248 \\ 0,0328177 \\ 0,01136966 \\ 0,003555623 \end{bmatrix}$$

17. Mencari nilai $c_i^2 \left( i = 1, 2, 3, \ldots, 9 \right)$ dengan metode sapuan ganda choleski

Solusi $\mathbf{X\overline{c_i^2} = Y'}$ sama dengan yang dilakukan pada langkah-13, yaitu dengan menggunakan metode sapuan ganda choleski. Sehingga nilai $c_i^2 \left( i = 1, 2, 3, \ldots, 9 \right)$ adalah:

$$\begin{bmatrix} c_1^2 \\ c_2^2 \\ c_3^2 \\ c_4^2 \\ c_5^2 \\ c_6^2 \\ c_7^2 \\ c_8^2 \\ c_9^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 51,99524512 \\ 24,18398111 \\ 10,57237414 \\ 4,442667484 \\ 1,816268733 \\ 0,727479004 \\ 0,286275666 \\ 0,109570161 \\ 0,036938721 \end{bmatrix}$$

18. Menghitung nilai konsentrasi pada saat $l = 2$, atau $c_i^3 \left( i = 1, 2, 3, \ldots, 9 \right)$

Langkah-14 sampai langkah-17 dapat digunakan untuk mencari nilai $c_i^3 \left( i = 1, 2, 3, \ldots, 9 \right)$. Sehingga diperoleh nilai sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} c_1^3 \\ c_2^3 \\ c_3^3 \\ c_4^3 \\ c_5^3 \\ c_6^3 \\ c_7^3 \\ c_8^3 \\ c_9^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 61,25338043 \\ 33,5366073 \\ 16,99960539 \\ 8,154310091 \\ 3,753375734 \\ 1,672721914 \\ 0,724523431 \\ 0,301422782 \\ 0,108148048 \end{bmatrix}$$

19. Setelah dilakukan beberapa langkah di atas, maka diperoleh nilai konsentrasi pada saat $l = 0, 1, 2$, atau $c_i^1, c_i^2, c_i^3$, dengan $\left( i = 1, 2, 3, \ldots, 9 \right)$, yang disajikan pada tabel (3.2) dibawah ini.

Tabel 3.2. Nilai konsentrasi setiap titik $(c(x,t))$ dengan menggunakan skema Crank-Nicholson

| $i$ | $x$ | $c(x_i,t_l)=c_i^l$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $l=0$ | $l=1$ | $l=2$ | $l=3$ |
| | | $t=0,000$ | $t=0,025$ | $t=0,050$ | $t=0,075$ |
| 0 | 0,00 | 0 | 100 | 100 | 100 |
| 1 | 0,05 | 0 | 35,10841351 | 51,99524512 | 61,25338043 |
| 2 | 0,10 | 0 | 12,32630281 | 24,18398111 | 33,5366073 |
| 3 | 0,15 | 0 | 4,327671829 | 10,57237414 | 16,99960539 |
| 4 | 0,20 | 0 | 1,519408911 | 4,442667484 | 8,154310091 |
| 5 | 0,25 | 0 | 0,533440188 | 1,816268733 | 3,753375734 |
| 6 | 0,30 | 0 | 0,187249678 | 0,727479004 | 1,672721914 |
| 7 | 0,35 | 0 | 0,065635471 | 0,286275666 | 0,724523431 |
| 8 | 0,40 | 0 | 0,02273932 | 0,109570161 | 0,301422782 |
| 9 | 0,45 | 0 | 0,007111246 | 0,036938721 | 0,108148048 |
| 10 | 0,50 | 0 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |

20. Langkah-langkah diatas digunakan secara berkelanjutan sampai iterasi yang diinginkan.

### 3.3. Analisis Perbandingan Skema Implisit Dan Crank-Nicholson Pada Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial

Pada sub bab ini analisis perbandingan dilakukan dalam dua kategori, *pertama* berdasarkan hasil numerik, *kedua* berdasarkan langkah-langkah yang digunakan atau prosedur pada skema Implisit dan Crank-Nicholson.

a. Hasil numerik yang diperoleh

Solusi persamaan diferensial parsial yang diperoleh dari skema Implisit dan Crank-Nicholson dengan menggunakan persamaan keseimbangan massa reaktor yang berbentuk :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - U\frac{\partial c}{\partial x} - \gamma c \qquad ,0 < x < 10$$

$$c(x,0) = 0 \qquad ,0 < x < L$$
$$c(0,t) = c_{in} \qquad ,t > 0$$
$$c(L,t) = 0 \qquad ,t > 0$$

dengan D = 0,083 $m^2$/det; U = 0,008 m/det; $\gamma$ =0,018 mol/det; $c_{in}$ =100 mol/$m^3$. serta dengan menggunakan $\Delta x = 0,05$ dan $\Delta t = 0,025$ diperoleh solusi disetiap titik $c(x,t)$ yang disajikan dalam tabel (3.3).

Pada tabel (3.3) dapat dilihat bahwa mencari solusi persamaan diferensial parsial dengan menggunakan metode beda hingga skema Implisit dan Crank-Nicholson diperoleh hasil yang hampir sama, galat (baca: selisih) yang dapat dilihat sangat kecil. Dengan diperolehnya galat yang kecil, penulis menyimpulkan bahwa kedua skema tersebut dapat digunakan untuk mencari solusi persamaan diferensial parsial. Apabila hasil antara kedua skema yang diperoleh terdapat galat yang besar, maka penyusunan dari skema tersebut perlu dikaji ulang, faktor-faktor apa yang mempengaruhi sehingga galat yang diperoleh besar.

b. Langkah-langkah pada metode beda hingga (skema Implisit dan Crank-Nicholson)

Kategori kedua yang akan dianalisis oleh penulis adalah prosedur atau langkah-langkah yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial dengan skema Implisit dan Crank-Nicholson.

Pada kedua skema tersebut langkah-langkah umum yang digunakan adalah sama, yaitu (1) Menentukan persamaan yang akan diselesaikan beserta kondisi awal dan batasnya, (2) Merubah persamaan kedalam skema beda hingga (skema Implisit atau Crank-Nicholson), (3) Menentukan $\Delta x$ dan $\Delta t$ yang digunakan, (4) Mensubtitusi semua nilai yang telah diketahui ke bentuk skema beda hingga (skema Implisit atau Crank-Nicholson), dan (5) Mencari solusi yaitu dengan menggunakan metode sapuan ganda choleski. Akan tetapi pada penerapannya penulis menemukan terdapat perbedaan dalam pencarian solusi tersebut.

Dengan memperhatikan langkah-langkah pada sub bab (3.1) dan (3.2), dapat dilihat bahwasannya sebelum menyelesaikan dengan metode sapuan ganda choleski terdapat matriks yang identik dari kedua skema tersebut. Yaitu matriks $\mathbf{R}\overline{\mathbf{c}_\mathbf{i}^{\mathbf{l+1}}} = \mathbf{S}$ pada skema Implisit dan $\mathbf{X}\overline{\mathbf{c}_\mathbf{i}^{\mathbf{l+1}}} = \mathbf{Y'}$ pada skema Crank-Nicholson. Dimana matriks $\mathbf{S}$ pada skema Implisit diperoleh dari nilai $\overline{\mathbf{c}_\mathbf{i}^{\mathbf{l}}}$ yang sudah diketahui dan menambahkan dengan nilai awal dan nilai batas yang sudah ditentukan (lihat langkah-8, sub bab 3.1). Sedangkan matriks $\mathbf{Y'}$ diperoleh dari hasil pengoperasian matriks $\mathbf{Y}\overline{\mathbf{c}_\mathbf{i}^{\mathbf{l}}} + \mathbf{Z}$. Dengan kata lain, matriks $\mathbf{Y'}$ tidak dapat diperoleh secara langsung dari nilai $\overline{\mathbf{c}_\mathbf{i}^{\mathbf{l}}}$, akan tetapi nilai $\overline{\mathbf{c}_\mathbf{i}^{\mathbf{l}}}$ harus dioperasikan terlebih dahulu dengan matriks **Y** dan menambahkan dengan nilai awal dan nilai batasnya (lihat langkah-8 dan 11, sub bab 3.2), selanjutnya baru dapat diperoleh persamaan $\mathbf{X}\overline{\mathbf{c}_i^{l+1}} = \mathbf{Y'}$ dan menyelesaikannya dengan metode sapuan ganda choleski.

Dari penjelasan diatas penulis menganggap bahwa metode beda hingga skema Crank-Nicholson lebih sulit atau lebih rumit daripada skema Implisit. Dengan diperoleh nilai pada setiap titik $(c(x,t))$ yang hampir sama, akan tetapi pada skema Crank-Nicholson dibutuhkan proses yang lebih rumit dan panjang.

Pada penelitian ini penulis juga melampirkan program komputer untuk mempermudah dalam pencarian solusi persamaan diferensial parsial dengan menggunkaan metode beda hingga skema Implisit dan Crank-Nicholson, yaitu dengan program Matlab 5.3. Sehingga penulis dapat dengan mudah memperoleh nilai $c(x,t)$ berapapun yang diinginkan. Dengan cara memasukkan data-data sebagai berikut:

1. Banyaknya iterasi t, dinotasikan dengan N
2. Jarak interval x, dinotasikan dengan dx
3. Jarak interval t, dinotasikan dengan dt
4. Nilai koefisien dispersi, dinotasikan dengan D
5. Nilai kecepatan aliran, dinotasikan dengan U
6. Nilai koefisien penghilang orde pertama, dinotasikan dengan l
7. Nilai konsentrasi awal, dinotasikan dengan Cin

Sebagai contoh dengan memasukkan data-data berikut:

1. Banyaknya iterasi t, N = 25
2. Jarak interval x, dx = 0,05
3. Jarak interval t, dt = 0,025
4. Nilai koefisien dispersi, D = 0,083
5. Nilai kecepatan aliran, U = 0,008
6. Nilai koefisien penghilang orde pertama, l = 0,018
7. Nilai koefisien penghilang orde pertama, Cin = 100

Dari masukkan data-data diatas, dengan menggunkan program matlab 5.3, untuk skema Implisit penulis mendapatkan nilai $c(x,t)$ sebagai berikut:

Columns 1 through 2

| | |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1.000000000000000e+002 | 3.510925748472877e+001 |
| 1.000000000000000e+002 | 5.199649503208343e+001 |
| 1.000000000000000e+002 | 6.125485290079946e+001 |
| 1.000000000000000e+002 | 6.695336275742753e+001 |
| 1.000000000000000e+002 | 7.080212278957164e+001 |
| 1.000000000000000e+002 | 7.359114815419295e+001 |
| 1.000000000000000e+002 | 7.572070766830542e+001 |
| 1.000000000000000e+002 | 7.741140621869484e+001 |
| 1.000000000000000e+002 | 7.879399766293587e+001 |
| 1.000000000000000e+002 | 7.995083125599125e+001 |
| 1.000000000000000e+002 | 8.093642381908340e+001 |
| 1.000000000000000e+002 | 8.178837399572387e+001 |
| 1.000000000000000e+002 | 8.253350476343000e+001 |

| | |
|---|---|
| 1.000000000000000e+002 | 8.319150250579862e+001 |
| 1.000000000000000e+002 | 8.377717027683657e+001 |
| 1.000000000000000e+002 | 8.430187670087283e+001 |
| 1.000000000000000e+002 | 8.477451815047887e+001 |
| 1.000000000000000e+002 | 8.520217546928994e+001 |
| 1.000000000000000e+002 | 8.559057278862451e+001 |
| 1.000000000000000e+002 | 8.594440450832450e+001 |
| 1.000000000000000e+002 | 8.626757231485676e+001 |
| 1.000000000000000e+002 | 8.656335952329874e+001 |
| 1.000000000000000e+002 | 8.683456097020849e+001 |
| 1.000000000000000e+002 | 8.708358090155791e+001 |

Columns 3 through 4

| | |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1.232659912469403e+001 | 4.327775862316305e+000 |
| 2.418456246784736e+001 | 1.057262829250853e+001 |
| 3.353741348773973e+001 | 1.700001404848390e+001 |
| 4.066572590241379e+001 | 2.288226953521419e+001 |
| 4.614993335517919e+001 | 2.802717165633947e+001 |
| 5.046310062469928e+001 | 3.245988820955736e+001 |
| 5.393720840815249e+001 | 3.627357089944432e+001 |
| 5.679766667418031e+001 | 3.956987188552711e+001 |
| 5.919817012519683e+001 | 4.243900842975474e+001 |
| 6.124540018365470e+001 | 4.495539032418187e+001 |
| 6.301506943658119e+001 | 4.717866748963813e+001 |
| 6.456214465922724e+001 | 4.915623328214700e+001 |
| 6.592740187456950e+001 | 5.092576774733989e+001 |

| | |
|---|---|
| 6.714170057744201e+001 | 5.251739775587154e+001 |
| 6.822882869228415e+001 | 5.395541189204989e+001 |
| 6.920743670531466e+001 | 5.525958318266187e+001 |
| 7.009237936300573e+001 | 5.644617737898009e+001 |
| 7.089566374008891e+001 | 5.752871889355624e+001 |
| 7.162713032150501e+001 | 5.851857314447280e+001 |
| 7.229494949945341e+001 | 5.942539072873170e+001 |
| 7.290598823277320e+001 | 6.025744773969471e+001 |
| 7.346608397210549e+001 | 6.102190790752454e+001 |
| 7.398025146122282e+001 | 6.172502572547258e+001 |
| 7.445284038567789e+001 | 6.237230487048035e+001 |

Columns 5 through 6

| | |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1.519445436176308e+000 | 5.334530111450406e-001 |
| 4.442774281689643e+000 | 1.816312393934544e+000 |
| 8.154506112295902e+000 | 3.753465961871237e+000 |
| 1.212951205998603e+001 | 6.132132843473078e+000 |
| 1.604574244732497e+001 | 8.744899294595710e+000 |
| 1.974086740462271e+001 | 1.143384208810604e+001 |
| 2.315021267425895e+001 | 1.409360497134277e+001 |
| 2.626139623851237e+001 | 1.666036900933907e+001 |
| 2.908709003291080e+001 | 1.909915148066331e+001 |
| 3.165022561040363e+001 | 2.139356031711139e+001 |
| 3.397651911520575e+001 | 2.353859096409004e+001 |
| 3.609097704030528e+001 | 2.553591142624171e+001 |
| 3.801645792466375e+001 | 2.739090541012032e+001 |

| | |
|---|---|
| 3.977324665680772e+001 | 2.911087102724062e+001 |
| 4.137909702941086e+001 | 3.070394847935132e+001 |
| 4.284946720705448e+001 | 3.217849612756347e+001 |
| 4.419781376234896e+001 | 3.354273772666108e+001 |
| 4.543588233046820e+001 | 3.480457157524923e+001 |
| 4.657396932507763e+001 | 3.597147524665847e+001 |
| 4.762114690366691e+001 | 3.705046602473217e+001 |
| 4.858545157085967e+001 | 3.804809324710231e+001 |
| 4.947404020300387e+001 | 3.897044843980861e+001 |
| 5.029331831892709e+001 | 3.982318492148853e+001 |
| 5.104904536994307e+001 | 4.061154200881434e+001 |

Columns 7 through 8

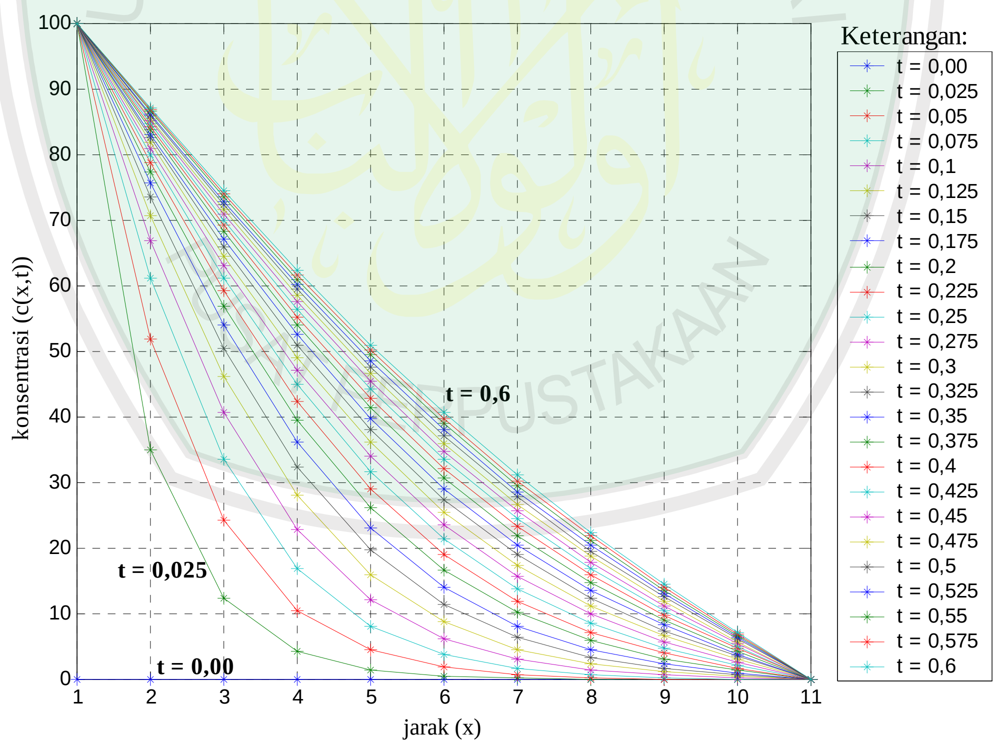
| | |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1.872541794711780e-001 | 6.563704891476026e-002 |
| 7.274964914641705e-001 | 2.862825476946069e-001 |
| 1.672762124270050e+000 | 7.245408475521911e-001 |
| 4.569054068429598e+000 | 2.292372141258503e+000 |
| 6.340415710217274e+000 | 3.365154940233969e+000 |
| 8.213179121883350e+000 | 4.570600662367268e+000 |
| 1.012197112211481e+001 | 5.862792191034887e+000 |
| 1.201873144928725e+001 | 7.201411751485018e+000 |
| 1.386999801586940e+001 | 8.553457232120556e+000 |
| 1.565364747518212e+001 | 9.893285902603806e+000 |
| 1.735595615014582e+001 | 1.120184511816452e+001 |
| 1.896923898404909e+001 | 1.246560676781096e+001 |
| 2.049006062299273e+001 | 1.367548080401898e+001 |

| | |
|---|---|
| 2.191792267654563e+001 | 1.482583529831255e+001 |
| 2.325431742385943e+001 | 1.591366827974442e+001 |
| 2.450205242398272e+001 | 1.693793497456930e+001 |
| 2.566477128232028e+001 | 1.789901543896005e+001 |
| 2.674661505586803e+001 | 1.879830113266179e+001 |
| 2.775198413646060e+001 | 1.963787851135435e+001 |
| 2.868537191735015e+001 | 2.042028985442572e+001 |
| 2.955124982570933e+001 | 2.114835456465879e+001 |
| 3.035398918263069e+001 | 2.182503724703145e+001 |
| 3.109780950249878e+001 | 2.245335163883894e+001 |

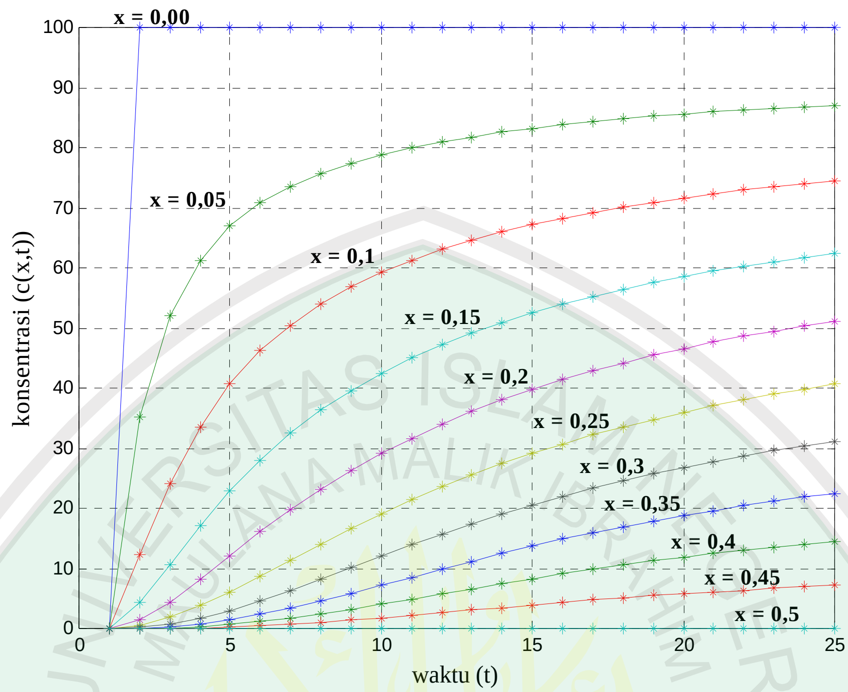
Columns 9 through 11

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 2.273986650392980e-002 | 7.111416839733726e-003 | 0 |
| 1.095727949289451e-001 | 3.693960879573608e-002 | 0 |
| 3.014300275156256e-001 | 1.081506480816165e-001 | 0 |
| 6.242670955105311e-001 | 2.358777167570818e-001 | 0 |
| 1.084705669167175e+000 | 4.278798073649839e-001 | 0 |
| 1.672981218099260e+000 | 6.840196887081387e-001 | 0 |
| 2.368761548978359e+000 | 9.978873113413644e-001 | 0 |
| 3.146841604676302e+000 | 1.359190936282225e+000 | 0 |
| 3.981424078981203e+000 | 1.755994576103511e+000 | 0 |
| 4.848786464380158e+000 | 2.176393059244790e+000 | 0 |
| 5.728623850374655e+000 | 2.609561578964649e+000 | 0 |
| 6.604477566540654e+000 | 3.046284243013953e+000 | 0 |
| 7.463613010301085e+000 | 3.479114536106469e+000 | 0 |
| 8.296613162936460e+000 | 3.902308514600763e+000 | 0 |

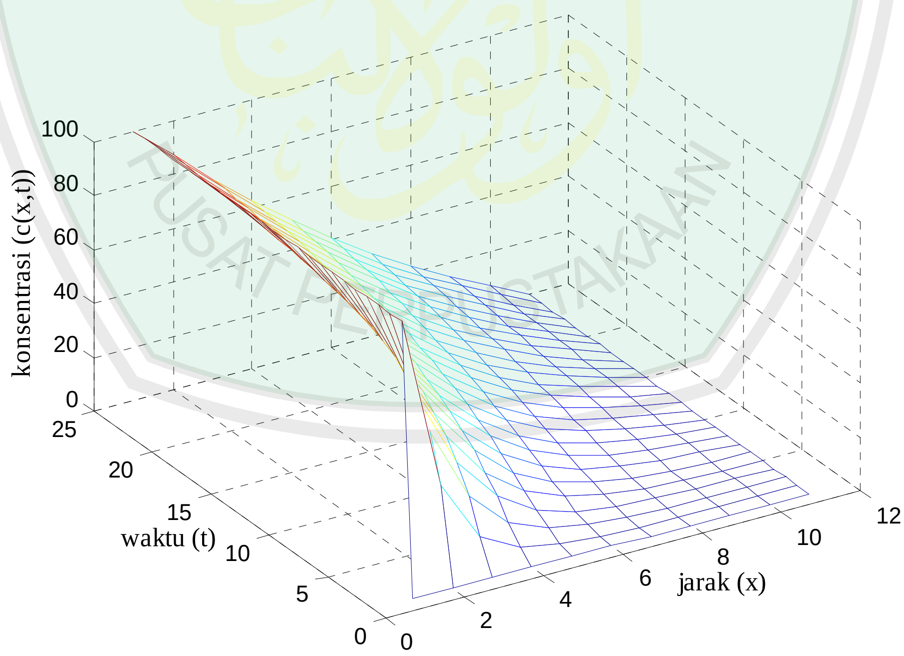
| | | |
|---|---|---|
| 9.096861169674732e+000 | 4.311637883730248e+000 | 0 |
| 9.860013743819380e+000 | 4.704155055944659e+000 | 0 |
| 1.058351836545272e+001 | 5.077953855927126e+000 | 0 |
| 1.126619679120951e+001 | 5.431949326697903e+000 | 0 |
| 1.190789985863263e+001 | 5.765687011250069e+000 | 0 |
| 1.250922940982568e+001 | 6.079184303491903e+000 | 0 |
| 1.307131907804013e+001 | 6.372802261429943e+000 | 0 |
| 1.359566448324951e+001 | 6.647144322010762e+000 | 0 |
| 1.408399369475517e+001 | 6.902977720328162e+000 | 0 |
| 1.453816982420124e+001 | 7.141173490974682e+000 | 0 |




Gambar 3.1. Grafik nilai konsentrasi (c(x,t)) terhadap jarak (x)




Gambar 3.2. Grafik nilai konsentrasi (c(x,t)) terhadap waktu (t)




Gambar 3.3. Grafik nilai konsentrasi (c(x,t))

### 3.4. Logika Dalam Pemikiran Mu’tazilah dan Matematika

Metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang diformulasikan secara matematis dengan operasi aritmatika biasa (tambah, kurang, bagi dan kali). Dalam metode numerik terdapat beberapa metode yang digunakan untuk menyelesaikan suatu permasalahan. Misal, masalah mencari solusi dari persamaan diferensial parsial. Rumus/teori matematika menyebutkan bahwa penyelesaian persamaan diferensial parsial adalah dengan menggunakan solusi analitik, yang mana kebanyakan penyelesaian analitik sangat rumit. Dengan metode numerik, persamaan diferensial parsial dapat diformulasikan secara matematis menjadi operasi hitung biasa, yaitu dengan metode beda hingga skema Eksplisit, Implisit dan Crank-Nicholson. Untuk mengubah atau memformulasikan suatu persamaan diferensial parsial kedalam metode beda hingga, penulis dituntut untuk dapat memainkan logika berpikirnya agar skema yang terbentuk menghasilkan nilai yang mendekati dengan nilai kebenaran. Walaupun dalam kenyataannya hasil yang diperoleh dari metode numerik kurang mendekati dari nilai analitik.

Dalam dunia Islam logika juga dipakai untuk menunjukkan suatu nilai kebenaran. Bagaimana umat Islam bisa berfikir secara rasional untuk menunjukkan nilai kebenaran tersebut. Salah satu umat Islam yang sangat mengedepankan rasionya, logika berpikirnya adalah kaum Mu’tazilah. Dalam berbagai hal untuk memutuskan suatu permasalahan yang berkaitan dengan syari’at Islam, mereka tidak mau dengan hanya mendengarkan atau mengikuti orang yang dianggap alim oleh masyarakat setempat, mereka menuntut dirinya sendiri agar selalu mengedepankan akal mereka untuk berpikir dan menggunakan rasionya untuk menunjukkan kebenaran tersebut. Yang mana hal itu dijelaskan pada sub bab (2.8.2), yaitu lima ajaran teologi Mu'tazilah.

Adanya perbedaan pendapat status orang beriman (mukmin) yang melakukan dosa besar dan mati sebelum taubat, merupakan salah satu contoh bagaimana orang Islam menunjukkan cara berpikir mereka dalam memerankan logikanya. Mu'tazilah menyatakan bahwa mukmin yang melakukan dosa besar dan belum bertobat, tidak lagi mukmin atau berubah menjadi kafir, tetapi fasik, dan mereka nanti akan berada diantara surga dan neraka. Status ini muncul karena menurut pandangan Mu'tazilah, pelaku dosa besar tidak dapat dikatakan mukmin secara mutlak. Karena keimanan menuntut adanya kepatuhan kepada Tuhan, tidak cukup hanya pengakuan dan pembenaran. Berdosa besar bukanlah kepatuhan melainkan kedurhakaan. Pelakunya tidak dapat dikatakan kafir secara mutlak karena ia masih percaya kepada Tuhan, Rasul-Nya, dan mengerjakan pekerjaan yang baik. Hanya saja kalau meninggal sebelum bertaubat, ia dimasukkan ke neraka dan kekal di dalamnya. Orang mukmin masuk surga dan orang kafir masuk neraka. Orang fasik pun dimasukkan kedalam neraka akan tetapi siksaannya lebih ringan daripada orang kafir. Mengapa orang fasik tidak dimasukkan ke surga dengan "kelas" yang lebih rendah dari mukmin sejati? Dari sinilah Mu'tazilah ingin mendorong agar manusia tidak menyepelekan perbuatan dosa besar.

Satu contoh lagi, yaitu ajaran keadilan Tuhan, yakni pada perbuatan manusia. Menurut Mu'tazilah, manusia melakukan dan menciptakan perbuatannya sendiri, terlepas dari kehendak dan kekuasaan Tuhan, baik secara langsung ataupun tidak.

Tuhan hanya menyuruh dan menghendaki yang baik, bukan yang buruk. Adapun yang disuruh Tuhan pasti lah baik dan apa yang dilarang-Nya tentulah buruk Konsep ini memiliki konskuensi logis dengan keadilan Tuhan, yaitu apapun yang akan diterima manusia di akhirat merupakan balasan perbuatannya di dunia. Kebaikan akan dibalas kebaikan dan kejahatan akan dibalas kejahatan, itulah keadilan. Karena, berbuat atas kemauan dan kemampuannya sendiri dan tidak dipaksa.

Dua contoh diatas menjelaskan bagaimana logika dan rasionalitas dipakai oleh orang Islam khususnya kaum Mu'tazilah dalam menunjukkan suatu nilai kebenaran. Bagaimana rasio mereka bekerja untuk menunjukkan kebenaran dalam rangka menyiarkan dan mengikuti syariat Islam yang benar serta dengan mudah bisa diterima oleh umat Islam umumnya dan khususnya kaum Mu'tazilah.

Oleh karena itu, penulis dapat menyatakan bahwasannya keterkaitan antara matematika dan Islam (kaum Mu'tazilah) adalah cara mereka dalam menggunakan logika untuk menunjukkan suatu nilai kebenaran, tentunya dalam kontek masing-masing. Bagaiman logika digunakan oleh ilmuwan matematika, yaitu dalam penyusunan skema beda hingga (Implisit dan Crank-Nicholson) untuk penyelesaian persamaan diferensial parsial agar nilai yang didapat mendekati nilai yang tepat, artinya hasil yang diperoleh mempunyai galat yang kecil dari solusi analitik. Dan bagaimana logika digunakan oleh orang Islam (kaum Mu'tazilah) untuk menunjukkan kebenaran dalam menyiarkan syari'at Islam, sehingga kaum muslimin bisa menerima dan mau menjalankan syari'at Islam dengan pertimbangan-pertimbangan yang dapat diterima oleh akal.

Tuhan tidak melarang manusia untuk berpikir sendiri untuk berkreasi, bahkan Tuhan memerintahkan kepada manusia untuk dapat memanfaatkan akalnya dalam mengembangkan ilmu pengetahuan dan teknologi yang telah diciptakan oleh Allah dengan perantara semua ciptaan-ciptaan-Nya.

Manusia diwajibkan untuk mengembangkan akalnya untuk menciptakan sesuatu yang dianggap dapat menjadikan sesuatu hal tersebut lebih baik dan lebih maksimal hasilnya. Dengan akal yang telah dikaruniakan oleh Allah, manusia dapat berkreasi untuk memunculkan ide-ide demi meningkatkan proses kemanusiaan menuju kesempurnaan hasil yang diinginkan. Diharapkan manusia mampu untuk mengembangkan dan mencari suatu manfaat dari ilmu tertentu yang merupakan bagian dari mencari ilmu. Islam mendorong manusia untuk mencari ilmu dan kemajuan dalam penemuan-penemuan, dan menjanjikan ganjaran yang besar, dan upaya-upaya ini dianggap bagian dari pengabdian kepada Allah. Karena, pada dasarnya Allah tidak suka kepada ummat manusia yang bermalas-malasan, hanya menunggu perubahan nasib yang selalu dianggap sebagai takdir Tuhan.

**BAB IV**

**PENUTUP**

## 4.1. Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan, dapat diperoleh kesimpulan antara lain:

1. Penyelesaian persamaan diferensial parsial dengan menggunakan skema Implisit adalah:
    1. Menentukan persamaan yang akan diselesaikan.
    2. Menentukan nilai awal dan batas persamaan.
    3. Mengubah persamaan kedalam skema Implisit.
    4. Menentukan $\Delta x$ dan $\Delta t$ yang digunakan.
    5. Mensubtitusi semua nilai yang telah diketahui ke dalam skema Implisit.
    6. Membuat sistem persamaan dengan sebanyak $i = n - 1$,($n =$ jumlah pias)
    7. Memasukkan nilai awal dan batas
    8. Membentuk matriks $\mathbf{R}\,\overline{\mathbf{c}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{l+1}}} = \mathbf{S}$
    9. Menyelesaikan dengan metode sapuan ganda cholesky
2. Penyelesaian persamaan diferensial parsial dengan menggunakan skema Crank-Nicholson adalah:
    1. Menentukan persamaan yang akan diselesaikan.
    2. Menentukan nilai awal dan batas persamaan.
    3. Mengubah persamaan kedalam skema Crank-Nicholson.
    4. Menentukan $\Delta x$ dan $\Delta t$ yang digunakan.
    5. Mensubtitusi semua nilai yang telah diketahui ke dalam skema Crank-Nicholson.

6. Membuat sistem persamaan dengan sebanyak $i = n-1$, ($n =$ jumlah pias)
7. Memasukkan nilai awal dan batas
8. Membentuk matriks $\mathbf{X}\overline{\mathbf{c}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{l+1}}} = \mathbf{Y}\overline{\mathbf{c}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{l}}} + \mathbf{Z}$
9. Menyelesaikan ruas kanan persamaan $\mathbf{X}\overline{\mathbf{c}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{l+1}}} = \mathbf{Y}\overline{\mathbf{c}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{l}}} + \mathbf{Z}$, yaitu $\mathbf{Y}' = \mathbf{Y}\overline{\mathbf{c}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{l}}} + \mathbf{Z}$
10. Membentuk matriks $\mathbf{X}\overline{\mathbf{c}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{l+1}}} = \mathbf{Y}'$
11. Menyelesaikan dengan metode sapuan ganda cholesky

3. Metode beda hingga skema Implisit lebih mudah daripada metode beda hingga skema Crank-Nicholson, karena untuk memperoleh matrik **S** pada skema Implisit dapat diambil secara langsung dari nilai $\overline{\mathbf{c}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{l}}}$, sedangkan pada skema Crank-Nicholson untuk memperoleh matrik $\mathbf{Y}'$ ($\mathbf{Y}'$ identik dengan **S**) tidak dapat secara langsung diambil dari $\overline{\mathbf{c}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{l}}}$, akan tetapi $\mathbf{Y}'$ diperoleh dari pengoperasian $\mathbf{Y}\overline{\mathbf{c}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{l}}} + \mathbf{Z}$.

## 4.2. Saran

Skripsi ini merupakan penelitian dengan kajian literatur tentang metode beda hingga skema Implisit dan Crank-Nicholson untuk mencari solusi persamaan diferensial parsial. Jenis persamaan diferensial parsial yang digunakan adalah persamaan diferensial parsial linier orde dua. Untuk itu penulis mengharapkan agar metode beda hingga ini lebih berkembang, maka penulis menyarankan untuk menggunakan persamaan diferensial parsial linier dengan orde lebih tinggi dan mengandung lebih dari dua variabel bebas, atau persamaan diferensial parsial non linier.

# DAFTAR PUSTAKA


Ames, William F. 1977. *Computer Science and Applied Mathematics Numerical Methods For Partial Differential Equations, 2nd Edition.* London-USA: Academic Press. INC

Anwar, Rosihon dan Rozak, Abdul. 2003. *Ilmu Kalam, Untuk IAIN, STAIN, PTAIS.* Bandung: CV. Pustaka Setia

Aziz, Abdul. 2004. *Modul Praktikum Program Komputer II Matlab.* Malang: Jurusan Matematika Fakultas Sains Dan Teknologi Universitas Islam Negeri Malang

Caldwell, Jim dan S. Douglas K. 2004. *Mathematical Modelling, Case Studies and Projects.* USA: Kluwer Academic Publisher

Chapra, Steven C. Dan Canale, Raymond P. 1988. *Numerical Methods For Engineers, 2nd Edition.* Terjemahan Drs. I Nyoman Susila, M. Sc. Jakarta: Erlangga

Djojodihardjo, Harijono. 1983. *Metoda Numerik*. Jakarta: Erlangga

Eric, Carl. 1979. *Introduction To Numerical Analysis.* Froberg: Institute For Computer Science

Fakultas Sains Dan Teknologi. 2004. *Buku Pedoman Penulisan Skripsi.* Malang: Fakultas Sains Dan Teknologi Universitas Islam Negeri Malang

Ferryanto, Sg. 1989. *Metode Numerik*. Semarang : Satya Wacana

Haberman, Richard. 1998. *Elementary Applied Partial Differential Equations With Fourier Series And Boundary Value Problem, 3rd Editions.* USA: Department of Mathematics Southern Methodist University

Lam, Chung-Yau. 1994. *Applied Numerical Methods For Partial Differential Equations, an Introduction With Spreadsheet Programs.* Singapore: Nanyang Technological University

Leithod, Louis. 1993. *Kalkulus Dan Ilmu Ukur Analitik jilid 3 (Edisi Kelima).* Jakarta: Erlangga

Kreyzig, E., 1993. *Adcvanced Engginering Mathematics, 2nd Edition*. New York

Mansur, M. Laily. 1994. *Pemikiran Kalam Dalam Islam.* Jakarta: PT Pustaka Firdaus

Mickens, R. E., 1996. *Oscillation In Planar Dynamic System World Scientific.* New Jersey

Mu'in, Taib Thahir Abdul. 1964. *Ilmu Kalam.* Jakarta: Widjaya

Pamuntjak & Santoso. 1990. *Persamaan Diferensil Biasa*, fakultas MIPA. Bandung: Institut Teknologi Bandung.

Pasya, Ahmad Fuad. 2004. *Dimensi Sains dan Al-Quran Menggali Ilmu: Pengetahuan dari Al-Quran.* Solo: Tiga Serangkai

Saefuddin, A. M. 1997. *Mukjizat Al-Qur'an dan As-Sunnah tentang Iptek.* Jakarta: Gema Insani Press

Swanson, Kristin R. Dkk. 2003. *Virtual And Real Brain Tumors: Using Mathematical Modelling To Quantify Glioma Growth and Invasion.* Journal of Neurological Science 216: 1-10

Syihab, Z. A. 1998. *Akidah Ahlus Sunnah, Versi Salaf-Khalaf dan Posisi Asya'irah Diantara Keduanya.* Jakarta: Bumi Aksara

Thomas, G. B., 2005. *Thomas Calculus Elevanth Edition*. Pearson Addison Wesley Boston

Triatmodjo, Bambang. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi Dengan Program Komputer*. Yogyakarta : Beta Offset

__________________.1992. *Metode Numerik*. Yogyakarta : Beta Offset

Wignyosukarto, Budi. 1986. *Hidraulika Numerik.* Yogyakarta : PAU - UGM

Yang, Won Yung. 2005. *Applied Numerical Methode Using Matlab.* USA: Wiley Interscience

Zainuddin. 1992. *Ilmu Tauhid Lengkap.* Jakarta: PT Rineka Cipta

*Lampiran 1:*

**PROGRAM SKEMA IMPLISIT**

```
clc;clear all; format long e;
disp('===============================================')
disp('   Solusi Persamaan Diferensial Parsial')
disp('   Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor')
disp('    Metode Beda Hingga Skema Implisit')
disp('          Oleh : Emy Mutholiah')
disp('            NIM  : 03510031')
disp('===============================================')
disp('')

N=4; %N=input('Masukkan banyaknya iterasi t,N = ');
dx=0.05; %dx=input('Masukkan jarak interval x,dx = ');
dt=0.025; %dt=input('Masukkan jarak interval t,dt = ');
D=0.083; %D=input('Masukkan nilai koefisien dispersi,D = ');
U=0.008; %U=input('Masukkan nilai kecepatan aliran,U = ');
l=0.018; %l=input('Masukkan nilai koefisien orde pertama,l = ');
Cin=100; %Cin=input('Masukkan nilai konsentrasi awal,Cin=');

M = 10; tic;
% M adalah banyaknya pias

c = zeros(N,M+1);

% Kondisi Batas
for n = 1:N
    c(n,1) =Cin;
    c(n,M+1) = 0;
end
 % Kondisi Awal
for i = 1:M
    T(1,i) = 0;
end

% Penyusunan matriks koefisien S
S=zeros(M-1,M-1);
A=(D/(dx^2)+U/(2*dx));
B=(1/dt)+((2*D)/(dx^2))+l;
C=(D/(dx^2)-U/(2*dx));
S(1,1)=B; S(1,2)=-C;

for i = 2:M-2
   S(i,i-1)=-A; S(i,i)=B; S(i,i+1)=-C;
end
S(M-1,M-2)=-A; S(M-1,M-1)=B;

T=zeros(1,M-1);
for n = 1:N-1
% Penyusunan matriks konstanta T
T(1,1)=(c(n,2)/dt)+(Cin*A);
T(1,2:M-1)=c(n,3:M)./dt;
% Solusi S*c = T untuk c
c(n+1,2:M) = (inv(S)*T')';
end
```

```
disp(' ');
disp('Hasil komputasi : ');
disp('Baris = x dan Kolom = t');
disp('===============================================')
disp(c);
disp('===============================================')
disp(['Waktu Komputasi = ',num2str(toc)])
disp('===============================================')

figure(1)
plot(1:M+1,c,'-*');
title('Gambar 3.1. Grafik nilai konsentrasi (c(x,t)) terhadap
jarak (x)');
grid on;
xlabel('jarak (x)');
ylabel('konsentrasi (c(x,t))');
figure(2)
plot(1:N,c,'-*');
title('Gambar 3.2. Grafik nilai konsentrasi (c(x,t)) terhadap
waktu (t)');
grid on;
xlabel('waktu (t)');
ylabel('konsentrasi (c(x,t))');
figure(3)
mesh(1:M+1,1:N,c);
title('Gambar 3.3. Grafik nilai konsentrasi (c(x,t))');
grid on;
zlabel('konsentrasi (c(x,t))');
```

*Lampiran 2:*

**PROGRAM SKEMA CRANK-NICHOLSON**

```
clc;clear all; format long e;
disp('==================================================')
disp('   Solusi Persamaan Diferensial Parsial')
disp('   Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor')
disp(' Metode Beda Hingga Skema Crank-Nicholson')
disp('          Oleh : Emy Mutholiah')
disp('             NIM  : 03510031')
disp('==================================================')
disp('')
N=4; %N = input('Masukkan banyaknya iterasi t, N =');
dx=0.05; %dx = input('Masukkan jarak interval x, dx =');
dt=0.025; %dt = input('Masukkan jarak interval t, dt =');
D=0.083; %D = input('Masukkan nilai koefisien dispersi,D=');
U=0.008; %U = input('Masukkan nilai kecepatan aliran, U =');
l=0.018; %l = input('Masukkan nilai koefisien orde pertama, l =');
Cin=100; %Cin = input('Masukkan nilai konsentrasi awal, Cin = ');

M = 10; tic; % M adalah banyaknya pias

c = zeros(N,M+1);

% Kondisi Batas
for n = 1:N
    c(n,1) =Cin;
    c(n,M+1) = 0;
end
 % Kondisi Awal
for i = 1:M
        c(1,i) = 0;
end

% Iterasi Crank-Nicholson
A=D/(2*(dx^2))+U/(4*dx);
B=(1+1/(2*dt))+(D/(dx^2));
C=D/(2*(dx^2))-U/(4*dx);
E=(1-1/(2*dt))-(D/(dx^2));

% Penyusunan matriks koefisien X
X=zeros(M-1,M-1);
X(1,1)=B; X(1,2)=-C;
for i = 2:M-2
    X(i,i-1)=-A; X(i,i)=B; X(i,i+1)=-C;
end
X(M-1,M-2)=-A; X(M-1,M-1)=B;

% penyusunan matriks koefisien Y
Y=zeros(M-1,M-1);
Y(1,1)=B; Y(1,2)=-C;
for i = 2:M-2
    Y(i,i-1)=A; Y(i,i)=E; Y(i,i+1)=C;
end
Y(M-1,M-2)=-A; Y(M-1,M-1)=B;
```

```
%Emy, SEMANGAT...!!!!!
%SABAR...................................

% penyusunan matriks Z
Z=zeros(1,M-1);
Z(1,1)=Cin*A;

D=zeros(1,M-1);
for n = 1:N-1
% Penyusunan matriks konstanta D, D = Y’(dalam skripsi)
D = Y*T(n,2:M)'+Z’;
% Solusi K*c = D untuk c
c(n+1,2:M) = (inv(X)*D')';
end

disp(' ');
disp('Hasil komputasi : ');
disp('Baris = x dan Kolom = t');
disp('=========================================================')
disp(c);
disp('=========================================================')
disp(['Waktu Komputasi = ',num2str(toc)])
disp('=========================================================')
figure(1)
plot(1:M+1,c,'-*');
title('Gambar 3.1. Grafik nilai konsentrasi (c(x,t)) terhadap
jarak (x)');
grid on;
xlabel('jarak (x)');
ylabel('konsentrasi (c(x,t))');
figure(2)
plot(1:N,c,'-*');
title('Gambar 3.2. Grafik nilai konsentrasi (c(x,t)) terhadap
waktu (t)');
grid on;
xlabel('waktu (t)');
ylabel('konsentrasi (c(x,t))');
figure(3)
mesh(1:M+1,1:N,c);
title('Gambar 3.3. Grafik nilai konsentrasi (c(x,t))');
grid on;
zlabel('konsentrasi (c(x,t))');
```

# BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

**Nama** : **Emy Mutholi'ah**
**NIM** : **03510031**
**Fakultas/Jurusan** : **Sains dan Teknologi / Matematika**
**Judul Skripsi** : **Analisis Perbandingan Metode Beda Hingga Skema Implisit dan Crank-Nicholson Pada Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial**
**Dosen Pembimbing** : **I. Drs. Usman Pagalay, M.Si**
**II. Ach. Nashichuddin, M. A.**

| No. | Tanggal | Materi yang dikonsultasikan | Tanda tangan |
|---|---|---|---|
| 1. | 08-03-2007 | Seminar Proposal | 1. |
| 2. | 17-09-2007 | Konsultasi Bab I, II | 2. |
| 3. | 03-12-2007 | Revisi Bab I, II | 3. |
| 4. | 01-02-2008 | Konsultasi Bab III | 4. |
| 5. | 17-03-2008 | Revisi Bab III | 5. |
| 6. | 17-03-2008 | Acc. Bab I, II, III | 6. |
| 7. | 25-03-2008 | Konsultasi Bab IV dan Abstrak | 7. |
| 8. | 17-12-2007 | Konsultasi Bab I, II Agama | 8. |
| 9. | 29-02-2008 | Konsultasi Bab III Agama | 9. |
| 10. | 17-03-2008 | Acc. Bab I, II, III Agama | 10. |
| 11. | 26-03-2008 | Acc. Keseluruhan | 11. |

**Malang, 28 Maret 2008**
**Mengetahui,**
**Ketua Jurusan Matematika**

**Sri Harini, M.Si**
**NIP. 150 318 240**

# DAFTAR RIWAYAT HIDUP

**Emy Mutholi'ah adalah putra kedua dari tiga bersaudara pasangan Alm. Imam Achmad dan Noer Mahmudah. Lahir pada tanggal 29 Mei 1984 di kota Kediri. Mempunyai satu orang kakak laki-laki dan seorang adik perempuan. Sekarang bertempat tinggal di desa Gondang Legi Prambon Nganjuk. Riwayat pendidikan penulis diawali pada tahun 1989 di TK Darma Wanita Gondanglegi di Nganjuk. Dilanjutkan dengan pendidikan tingkat dasar pada tahun 1991 di SDN Gondanglegi I Prambon, dan lulus pada tahun 1997. Pada tahun 1997-2000 penulis menempuh pendidikan tingkat menengah pertama di Madrasah Tsanawiyah Negeri Tanjung Tani, Prambon dan dilanjutkan dengan pendidikan di tingkat menengah atas di Madrasah Aliyah Negeri 3 Kediri, pada periode 2000-2003. Selanjutnya, pada tahun 2003 penulis terdaftar sebagai mahasiswa jurusan Matematika Universitas Islam Negeri (UIN) Malang dan menyelesaikan studi S-1 pada bulan Mei 2008.**