ANALISIS APROKSIMASI PADÉ DAN PENERAPANNYA PADA HAMPIRAN FUNGSI

SKRIPSI

Oleh:
ZUMROTUS SA'ADAH
NIM. 04510013

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2008

ANALISIS APROKSIMASI PADÉ DAN PENERAPANNYA PADA HAMPIRAN FUNGSI

SKRIPSI

Diajukan Kepada :
Universitas Islam Negeri (UIN) Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh :
ZUMROTUS SA'ADAH
NIM. 04510013

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2008

ANALISIS APROKSIMASI PADÉ DAN PENERAPANNYA PADA HAMPIRAN FUNGSI

SKRIPSI

Oleh:
ZUMROTUS SA'ADAH
NIM. 04510013

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji

Tanggal: 21 Oktober 2008

Pembimbing I	Pembimbing II
Drs. H. Turmudi, M.Si	Munirul Abidin, M. Ag
NIP. 150 209 630	NIP. 150 321 634

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M. Si
NIP. 150 318 321

ANALISIS APROKSIMASI PADÉ DAN PENERAPANNYA PADA HAMPIRAN FUNGSI

SKRIPSI

Oleh:
ZUMROTUS SA'ADAH
NIM. 04510013

Telah Dipertahankan di depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal 21 Oktober 2008

Susunan Dewan Penguji		**Tanda Tangan**
1. Penguji Utama	: **<u>Sri Harini, M.Si</u>** **NIP. 150 318 321**	( )
2. Ketua	: **<u>Usman Pagalay, M.Si</u>** **NIP. 150 327 240**	( )
3. Sekretaris	: **<u>Drs. H. Turmudi, M.Si</u>** **NIP. 150 209 630**	( )
4. Anggota	: **<u>Munirul Abidin, M.Ag</u>** **NIP. 150 321 634**	( )

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

<u>Sri Harini, M.Si</u>
NIP. 150 318 321

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Zumrotus Sa’adah

NIM : 04510013

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang,

Yang membuat pernyataan

Zumrotus Sa'adah

NIM. 04510013

MOTTO

وَجَآءُو عَلَىٰ قَمِيصِهِۦ بِدَمٍ كَذِبٍۚ قَالَ بَلۡ سَوَّلَتۡ لَكُمۡ أَنفُسُكُمۡ أَمۡرًاۖ فَصَبۡرٌ جَمِيلٌۖ وَٱللَّهُ
ٱلۡمُسۡتَعَانُ عَلَىٰ مَا تَصِفُونَ ١٨

Artinya: "..., Maka kesabaran yang baik itulah kesabaran-Ku. Dan Allah sajalah yang dimohon pertolongan-Nya terhadap apa yang kamu ceritakan" (Q. S Yusuf: 18).

" Never Promise More Than You Can Perform "

Untuk:

Ayah dan Bunda tercinta,

Khoirun Nisa' dan Arnestia Kiki Aprilianti,

H. T. Purwanto serta segenap keluarga terkasih,

Sumber semangat dan inspirasi untuk menentukan pilihan hidup.

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Syukur alhamdulillah penulis haturkan kehadirat Allah SWT yang telah memberikan segala kemudahan dan hidayah-Nya sehingga mampu menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang sekaligus menyelesaikan penulisan skripsi dengan judul **"Analisis Aproksimasi Padé dan Penerapannya pada Hampiran Fungsi"** dengan baik.

Sholawat dan salam semoga senantiasa tercurahkan kepada junjungan kita semua, Nabi Muhammad SAW.

Pada kesempatan ini, penulis ingin mengucapkan terima kasih yang tak terhingga beriring doa kepada yang terhormat:

1. Bapak Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
2. Bapak Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.
3. Ibu Sri Harini, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.
4. Bapak Drs. H. Turmudi, M.Si dan Bapak Munirul Abidin, M.Ag selaku dosen pembimbing yang senantiasa dengan sabar meluangkan waktu buat kami untuk berkonsultasi.
5. Segenap civitas akademika Jurusan Matematika, terutama seluruh dosen-dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.
6. Ayah dan Bunda, terima kasih atas segala pengorbanan tanpa pamrih, Pak Dhe H. T. Purwanto serta segenap keluarga yang selalu memberikan doa, semangat dan kasih sayang tanpa batas.
7. Sahabat-sahabat tercinta (W_zoe, Mb' Liel, Maz Iqbal, U_lie, Luly, Poo_G, n Shony), teman-teman senasib seperjuangan Matematika 2004 (khususnya Mb' Alin, Bunda, Rino, Mb' Sity, n Mb' Lie2k), teman-teman *Istiqomah Apartment* (Mb' Ifa, D' Ieta, dll) dan Sahabat-sahabat di PMII Rayon "Pencerahan"

Galileo (Okta, Asoy, Zainal, Arif, n Sofyan), terima kasih atas segala kenangan indah yang telah kalian ukir.

8. Firman Azhari H, terima kasih buat segenap rasa nyaman, perhatian, semangat, kesabaran dan do'anya.
9. Semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini baik secara lanngsung maupun tidak langsung.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih terdapat kekurangan dan penulis berharap semoga skripsi ini bisa memberikan manfaat kepada para pembaca khususnya bagi penulis secara pribadi. Amin.

Malang, Oktober 2008

Penulis

DAFTAR ISI

ABSTRAK

Sa'adah, Zumrotus. 2008. **Analisis Aproksimasi Padé dan Penerapannya pada Hampiran Fungsi**. Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
Pembimbing: (I) Drs. H. Turmudi, M. Si.
(II) Munirul Abidin, M. Ag.

Kata Kunci: Fungsi, Hampiran, Aproksimasi Padé

Persoalan matematika yang banyak dijumpai dalam kehidupan sehari-hari biasanya dinyatakan dalam bentuk fungsi. Fungsi-fungsi tersebut sering tidak dapat diselesaikan dengan penghitungan secara eksak (biasa) sehingga perlu dilakukan perhitungan dengan hampiran (aproksimasi) untuk mendekati nilainya.

Pada umumnya, penghampiran terhadap nilai suatu fungsi terutama fungsi dalam deret pangkat tak hingga dilakukan ke dalam bentuk polinom karena polinom merupakan bentuk yang paling mudah dipahami, mudah dihitung dan hanya melibatkan pangkat-pangkat bilangan bulat sederhana. Namun, dalam kondisi tertentu suatu fungsi tidak dapat dihampiri dengan bentuk polinom. Dalam kondisi seperti ini, suatu fungsi dapat dihampiri ke dalam bentuk fungsi rasional menggunakan aproksimasi Padé.

Suatu fungsi rasional $R_{L,M}(z)$ yang didefinisikan sebagai $R_{L,M}(z)=\frac{P_L(z)}{Q_M(z)}$, dengan $Q_M(z)\neq 0$ disebut aproksimasi Padé pada fungsi $f(z)$ jika memenuhi persamaan $Q_M(z)\cdot f(z)-P_L(z)=O\left[z^{L+M+1}\right]$, dimana $O\left(z^{L+M+1}\right)$ merupakan sisa pemotongan untuk suku ke-*(L+M+1)*. Metode aproksimasi Padé dalam beberapa hal memberikan hasil yang lebih baik dibandingkan dengan metode aproksimasi polinom.

Adapun langkah-langkah dalam mengkonstruksi aproksimasi Padé yang sesuai dengan deret pangkat (*power series*) dapat dilakukan dengan cara-cara berikut: (1) mendefinisikan suatu fungsi $f(z)$ ke dalam ekspansi deret Maclaurin, (2) mengasumsikan suatu fungsi rasional $R_{L,M}(z)$ yang didefinisikan sebagai $R_{L,M}(z)=\frac{P_L(z)}{Q_M(z)}$, dengan $Q_M(z)\neq 0$ untuk menghampiri fungsi $f(z)$ sehingga berlaku $Q_M(z)\cdot f(z)-P_L(z)=O\left[z^{L+M+1}\right]$, (3) membentuk suatu sistem persamaan koefisien untuk masing-masing konstanta pada variabel $z^0, z, z^2, \cdots$, dan (4) menentukan koefisien-koefisien pembilang dan penyebut fungsi rasional $R_{L,M}(z)$ dengan menyelesaikan sistem persamaan koefisien yang diperoleh.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan sebuah ilmu pengetahuan dasar yang dibutuhkan semua manusia dalam kehidupan sehari-hari baik secara langsung maupun tidak langsung (Rahman, 2007: 1). Dalam hubungannya dengan berbagai ilmu pengetahuan, matematika berfungsi sebagai bahasa ilmu dengan lingkup universal sebab dengan menggunakan matematika kita dapat melakukan abstraksi dari kenyataan-kenyataan yang sangat rumit menjadi suatu model sehingga dapat dicapai ketajaman dalam memberikan deskripsi, mempermudah untuk mengadakan klasifikasi, dan kalkulasi (Roziana, 2008: 1). Jadi, dengan menggunakan bahasa matematika suatu persoalan dapat menjadi lebih sederhana untuk disajikan, dipahami, dianalisis, dan dipecahkan.

Persoalan-persoalan yang melibatkan model matematika banyak dijumpai dalam berbagai disiplin ilmu pengetahuan misalnya dalam bidang fisika, kimia, maupun ekonomi. Persoalan-persoalan tersebut biasanya dinyatakan dalam bentuk fungsi. Persoalan-persoalan matematika tersebut sering tidak dapat diselesaikan dengan perhitungan analitik (eksak) sehingga perlu dilakukan perhitungan melalui hampiran atau aproksimasi untuk mendapatkan suatu nilai yang mendekati nilai eksaknya. Hal ini berarti bahwa dalam penyelesaian melalui aproksimasi terdapat suatu kesalahan (*error*) terhadap nilai eksaknya.

Dalam perhitungan dengan aproksimasi terdapat tiga macam kesalahan (*error*) yang mungkin terjadi yaitu kesalahan bawaan, kesalahan pembulatan, dan kesalahan pemotongan (Triatmodjo, 2002: 2). Kesalahan bawaan merupakan kesalahan dari nilai data yang mungkin terjadi karena kekeliruan dalam menyalin data atau membaca skala pengukuran. Kesalahan pembulatan terjadi karena tidak diperhitungkannya beberapa angka terakhir dari suatu bilangan sedangkan kesalahan pemotongan merupakan kesalahan karena hanya mempergunakan beberapa suku pertama. Kesalahan pemotongan biasanya terjadi apabila suatu fungsi direpresentasikan dalam bentuk deret pangkat tak hingga.

Pada umumnya, hampiran terhadap suatu fungsi dilakukan berdasarkan penghampiran ke dalam bentuk polinom. Hal ini sesuai dengan pernyataan Munir (2006: 18) bahwa kebanyakan dari metode-metode aproksimasi yang diturunkan didasarkan pada penghampiran fungsi ke dalam bentuk polinom. Hal itu dilakukan karena polinom merupakan bentuk yang paling mudah dipahami, mudah dihitung, dan hanya akan melibatkan pangkat-pangkat bilangan bulat sederhana.

Salah satu bentuk polinom yang bisa digunakan untuk menghampiri suatu fungsi adalah deret Taylor. Deret Taylor merupakan salah satu jenis deret pangkat (*power series*) selain deret Maclaurin dan deret Laurent. Soemantri (1994: 170) mendefinisikan bahwa yang dimaksud deret pangkat yakni deret tak hingga yang berbentuk $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ dengan a_n dan z_0 konstanta kompleks dan n = 0, 1, 2, ….

Aproksimasi atau penghampiran terhadap nilai suatu fungsi tak hingga merupakan suatu hal yang penting untuk dilakukan karena dengan melakukan aproksimasi atau penghampiran akan diperoleh nilai pendekatan terhadap fungsi tersebut. Dalam al-Qur'an surat al-Maidah ayat 35, Allah SWT menjelaskan bahwa:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ ٱتَّقُواْ ٱللَّهَ وَٱبۡتَغُوٓاْ إِلَيۡهِ ٱلۡوَسِيلَةَ وَجَٰهِدُواْ فِي سَبِيلِهِۦ لَعَلَّكُمۡ تُفۡلِحُونَ ٣٥

Artinya: "Hai orang-orang yang beriman, bertakwalah kepada Allah dan bersungguh-sungguhlah mencari jalan yang mendekatkan diri kepada-Nya dan berjihadlah pada jalan-Nya supaya kamu mendapat keberuntungan" (Q.S. Al-Maidah: 35).

Ayat ini mengajak manusia untuk selalu mendekatkan diri kepada Allah meskipun dalam hati mereka baru ada secercah iman. Menurut Shihab (2002: 87), kata *wasilah* mirip maknanya dengan *washilah* yakni sesuatu yang menyambung sesuatu dengan yang lain. *Wasilah* adalah sesuatu yang menyambung dan mendekatkan sesuatu dengan yang lain atas dasar keinginan yang kuat untuk mendekat. Tentu saja terdapat banyak cara yang dapat digunakan untuk mendekatkan diri kepada ridha Allah, namun kesemuanya haruslah yang dibenarkan oleh-Nya. Hal ini bermula dari rasa kebutuhan kepada-Nya.

Lebih lanjut Shihab (2002: 88) mengemukakan bahwa ayat ini dijadikan oleh sementara ulama sebagai dalil yang membenarkan apa yang diistilahkan dengan *tawassul* yaitu mendekatkan diri kepada Allah dengan menyebut nama Nabi saw dan para wali (orang-orang yang dekat kepada-Nya) yaitu berdoa kepada Allah guna meraih harapan demi nabi dan atau para wali yang dicintai Allah swt.

Dalam kondisi tertentu, suatu fungsi tidak dapat didekati dengan bentuk polinom. Dalam kasus ini, fungsi tersebut dapat didekati dengan suatu fungsi rasional menggunakan aproksimasi Padé. Menurut Baker (1981: 1), aproksimasi Padé merupakan sebuah pecahan rasional yang dinyatakan oleh persamaan

$$R_{m,n}(z)=\frac{P_m(z)}{Q_n(z)}=\frac{a_0+a_1z+\cdots+a_mz^m}{b_0+b_1z+\cdots+b_nz^n}$$

dengan suatu ekspansi deret pangkat yang sesuai untuk suku pertama $m+n+1$ dari ekspansi deret pangkat fungsi $f(z)$ yang diinginkan. Metode aproksimasi Padé dalam beberapa hal memberikan hasil yang lebih baik dibandingkan dengan metode aproksimasi polinom Taylor yang biasanya lebih dikenal (Saepudin, 2005: 187).

Solusi yang diperoleh dengan menggunakan aproksimasi berbentuk suatu fungsi matematik. Fungsi tersebut dapat dievaluasi untuk menghasilkan nilai dalam bentuk angka atau numerik. Berdasarkan uraian di atas, maka penulis tertarik untuk mengkajinya lebih lanjut dengan mengangkat judul **"Analisis Aproksimasi Padé dan Penerapannya pada Hampiran Fungsi".**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas, maka rumusan masalah dalam penelitian skripsi ini adalah:

1. Bagaimana mengkonstruksi aproksimasi Padé yang sesuai untuk suatu deret pangkat (*power series*)?

2. Bagaimana penerapan aproksimasi Padé dalam menghampiri fungsi eksponensial dan fungsi trigonometri?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah dikemukakan sebelumnya, maka tujuan penelitian skripsi ini adalah untuk:

1. Mengkonstruksi aproksimasi Padé yang sesuai untuk suatu deret pangkat (*power series*).
2. Mengetahui penerapan aproksimasi Padé dalam menghampiri fungsi eksponensial dan fungsi trigonometri.

1.4 Batasan Masalah

Agar pembahasan dalam penelitian skripsi ini tidak meluas, maka penulis perlu memberikan batasan-batasan sebagai berikut:

1. Ruang lingkup pembahasan adalah fungsi dengan variabel kompleks.
2. Fungsi-fungsi yang dihampiri memiliki domain cakram berpusat di $z_0 = 0$ atau dengan kata lain fungsi-fungsi tersebut diekspansi ke dalam deret Maclaurin.
3. Fungsi-fungsi yang dihampiri adalah fungsi transenden jenis fungsi eksponensial dan fungsi trigonometri (fungsi sinus dan fungsi kosinus).

1.5 Manfaat Penelitian

Penulisan skripsi ini diharapkan dapat memberikan manfaat khususnya kepada penulis dan umumnya kepada semua pembaca baik secara teoritis maupun secara praktis.

1. Secara Teoritis

   Hasil penelitian ini diharapkan dapat menjadi sarana untuk menambah wawasan dan pengetahuan tentang permasalahan-permasalahan aproksimasi untuk menghampiri suatu fungsi khususnya menghampiri suatu fungsi ke dalam bentuk fungsi rasional menggunakan aproksimasi Padé.

2. Secara Praktis

   Hasil penelitian tentang aproksimasi Padé ini diharapkan dapat digunakan untuk menghampiri suatu fungsi baik fungsi-fungsi transenden maupun fungsi-fungsi yang lain.

1.6 Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan sebuah penelitian kepustakaan (*library reseach*) yaitu melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi menggunakan teknik dokumenter, artinya data-data sumber penelitian dikumpulkan dari dokumen-dokumen, baik yang berupa buku, artikel, jurnal, majalah, maupun karya ilmiah lainnya yang berkaitan dengan topik atau permasalahan yang diteliti (Azwar, 2004: 5).

Adapun tahapan-tahapan yang dilakukan dalam penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Mencari, mempelajari dan menelaah sumber-sumber informasi yang berhubungan dengan topik yang diteliti.
2. Memberikan deskripsi dan pembahasan lebih lanjut tentang konstruksi aproksimasi Padé yang sesuai untuk suatu deret pangkat (*power series*).
3. Memberikan contoh penerapan aproksimasi Padé dalam menghampiri suatu fungsi transenden jenis eksponensial dan trigonometri (fungsi sinus dan fungsi kosinus).
4. Memberikan kesimpulan akhir dari hasil pembahasan.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar pembahasan dalam penelitian ini dapat dilakukan secara sistematis, maka sistematika penulisannya disusun dengan kerangka sebagai berikut:

BAB I: PENDAHULUAN

Bab ini merupakan bab pengantar yang terdiri dari latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penulisan, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II: KAJIAN PUSTAKA

Bab ini berisi tentang studi teoritis dari berbagai literatur dan sumber-sumber yang relevan dengan masalah yang diteliti. Bab ini membahas tentang sistem bilangan kompleks, fungsi riil, fungsi variabel kompleks, deret fungsi kompleks, kekonvergenan deret fungsi, aproksimasi fungsi, dan relevansinya dengan kajian keislaman.

BAB III: PEMBAHASAN

Bab ini memaparkan hasil penelitian dan pembahasannya tentang konstruksi aproksimasi Padé yang sesuai untuk suatu deret pangkat (*power series*), penerapan aproksimasi Padé dalam menghampiri suatu fungsi transenden jenis eksponensial dan trigonometri serta relevansi hasil pembahasan dengan kajian keislaman.

BAB IV: PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Bilangan Kompleks

Himpunan semua bilangan kompleks dinotasikan dengan **C** dan didefinisikan sebagai $\mathbf{C} = \{z : z = x + yi, x \in R, y \in R\}$. Berikut ini diberikan definisi tentang bilangan kompleks *z*.

Definisi 2.1.1 Bilangan Kompleks

Bilangan kompleks adalah bilangan yang berbentuk

$$a + bi \text{ atau } a + ib$$

Dengan *a* dan *b* bilangan riil dan $i^2 = -1$ (Soemantri, 1994: 2).

Jika $z = a + bi$ menyatakan sembarang bilangan kompleks, maka *a* dinamakan bagian riil dari *z* dan *b* dinamakan bagian imajiner dari *z* sedangkan $i = \sqrt{-1}$ dinamakan satuan imajiner (*imaginary unit*) (Spiegel, 1999: 136). Bagian riil dan bagian imajiner tersebut biasanya dinyatakan dengan *Re(z)* dan *Im(z).*

Notasi yang umum digunakan untuk suatu konstanta pengganti *a* dan *b* adalah *x* dan *y* sehingga penulisan bilangan kompleks biasanya lebih banyak dinyatakan dalam bentuk $z = x + yi$. Jika *Im(z)* = 0, maka bilangan kompleks *z* menjadi suatu bilangan riil *x*. Hal ini menunjukkan bahwa himpunan bilangan riil merupakan bagian dari himpunan bilangan kompleks.

Operasi hitung yang berlaku pada bilangan kompleks meliputi kesamaan, penjumlahan dan perkalian, serta invers terhadap penjumlahan dan perkalian yang masing-masing didefinisikan sebagai berikut.

Kesamaan : $z_1 = z_2$ jika hanya jika $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$

Penjumlahan : $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$

Perkalian : $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i$

Invers Penjumlahan : $z_1 = -(x + yi)$ sehingga untuk bilangan kompleks z berlaku $z + z_1 = 0$.

Invers Perkalian : $z_2 = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}$ sehingga untuk bilangan kompleks $z \neq 0$ berlaku $z.z_2 = 1$.

(Soemantri, 1994: 3 – 5).

2.2 Fungsi Variabel Kompleks

Fungsi variabel kompleks mempelajari fungsi dengan daerah asal suatu himpunan bilangan kompleks dan daerah hasil juga suatu himpunan bilangan kompleks (Soemantri, 1994: 32 – 33).

Definisi 2.2.1 Fungsi Variabel Kompleks

Misalkan ***C*** sebuah himpunan bilangan kompleks. Fungsi f yang didefinisikan pada ***C*** merupakan sebuah aturan yang mengaitkan setiap z pada ***C*** dengan bilangan kompleks w. Bilangan w disebut nilai dari f pada z dan dinotasikan dengan *f(z)*, sehingga $w = f(z)$ (Churchill, 1990: 26).

Himpunan bilangan kompleks ***C*** disebut daerah definisi fungsi f atau domain definisi fungsi f. Dengan demikian, fungsi variabel kompleks dapat dinotasikan sebagai:

$$f : C \to C$$

$$z \mapsto w$$

Suatu fungsi adalah bernilai tunggal (*single-valued*) jika untuk nilai z terdapat hanya satu nilai w, jika tidak demikian halnya maka fungsi tersebut adalah bernilai rangkap (*multiple-valued*) atau bernilai banyak (*many valued*). Pada umumnya kita dapat menuliskan fungsi tersebut sebagai $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, dimana u dan v adalah fungsi riil dari x dan y (Spiegel, 1999: 138).

Seperti halnya dalam bilangan riil, fungsi polinom juga dikenal dalam bilangan kompleks. Untuk n bulat positif dan $a_0, a_1, \cdots, a_n$ yang merupakan konstanta kompleks, fungsi polinom berderajat n pada bilangan kompleks didefinisikan sebagai:

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

dengan $a_n \neq 0$.

Suatu fungsi konstan yang dinyatakan oleh $f(z) = a$ disebut fungsi polinom berderajat nol sedangkan $h(z) = a_0 + a_1 z$ untuk $a_1 \neq 0$ disebut fungsi polinom berderajat satu atau disebut *fungsi linier*. Hasil bagi dua buah fungsi polinom yang dinyatakan oleh:

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_n z^n}$$

disebut fungsi rasional dan terdefinisi pada setiap titik *z* kecuali jika $Q(z) = 0$.

Berikut ini akan diuraikan beberapa bentuk fungsi variabel kompleks dari jenis fungsi transenden yaitu fungsi eksponensial dan fungsi trigonometri.

Definisi 2.2.2 Fungsi Eksponensial

Untuk bilangan kompleks *z*, fungsi eksponensial didefinisikan sebagai

$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$ (Soemantri, 1994: 91).

Definisi ini merupakan perluasan dari fungsi eksponensial dalam nilai riil. Jika diambil nilai *z* riil yaitu $z = x + 0i$, maka persamaan diruas kiri dari persamaan diatas menjadi e^x sedangkan persamaan diruas kanan menjadi $e^x(\cos 0 + i\sin 0) = e^x$.

Fungsi $f(z) = e^z$ mempunyai fungsi bagian riil dan bagian imajiner. Fungsi bagian riilnya dinyatakan sebagai $u = e^x \cos y$ sedangkan fungsi bagian imajinernya dinyatakan sebagai $v = e^x \sin y$. Pada umumnya, e^z sering dinyatakan sebagai $\exp(z)$.

Definisi 2.2.3 Fungsi Trigonometri

Untuk bilangan kompleks *z*, rumus fungsi sinus dan fungsi kosinus dinyatakan oleh

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \text{dan} \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2.i}$$

(Soemantri, 1994: 101).

Berikut ini akan diberikan penjelasan tentang dari mana rumus tersebut diperoleh. Menurut definisi fungsi eksponensial akan diperoleh bahwa

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

jika diambil $z = iy$ dengan y bilangan riil. Rumus tersebut dikenal dengan nama *rumus Euler*.

Jika diambil $z = -iy$ maka sesuai dengan rumus Euler diperoleh bahwa

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y \, .$$

Apabila kedua rumus tersebut dijumlahkan dan dikurangkan maka akan diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} e^{iy} + e^{-iy} &= (\cos y + i \sin y) + (\cos y - i \sin y) \\ &= 2 \cos y \\ e^{iy} - e^{-iy} &= (\cos y + i \sin y) - (\cos y - i \sin y) \\ &= 2i \sin y \end{aligned}$$

sehingga, diperoleh bahwa

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \qquad \text{dan} \qquad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2.i} \, .$$

Dengan memberlakukan rumus-rumus tersebut untuk variabel kompleks diperoleh definisi untuk fungsi sinus dan fungsi kosinus sebagaimana yang telah didefinisikan pada *Definisi 2.2.3*.

Definisi 2.2.4 Kekontinuan Fungsi

Fungsi f yang didefinisikan pada daerah D dikatakan *kontinu* di $z_0 \in D$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk semua $z \in D$ dengan $|z - z_0| < \delta$ berlaku

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

(Soemantri, 1994: 63).

Definisi 2.2.5 Keterdeferensialan Fungsi

Diberikan fungsi *f* yang didefinisikan pada daerah D dan $z_0 \in D$. Jika nilai

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \text{ ada,}$$

maka nilai limit ini dinamakan *turunan* atau *derivatif* fungsi *f* di titik z_0 dan dinotasikan dengan $f'(z_0)$. Jika $f'(z_0)$ ada maka *f* dikatakan *terdeferensial* atau *diferensiabel* di z_0 (Soemantri, 1994: 66 – 67).

Definisi 2.2.6 Keanalitikan Fungsi

Diberikan fungsi *f* yang didefinisikan pada domain ***D*** dan z_0 di dalam ***D***. Fungsi *f* dikatakan *analitik* di z_0 jika terdapat $\delta > 0$ sehingga *f* terdeferensial di setiap titik $z \in N(z_0, \delta)$ (Soemantri, 1994: 81).

Dari definisi ini dapat ditarik kesimpulan bahwa jika *f* analitik di titik z_0 maka *f* analitik di setiap titik pada suatu kitar z_0. Daerah definisi *f* dalam definisi di atas adalah domain, jadi ***D*** terbuka sehingga ada $\delta > 0$ sehingga *f* terdefinisikan pada $N(z_0, \delta) \subset$ ***D***. Fungsi *f* dikatakan analitik pada suatu domain jika *f* analitik di setiap titik domain itu.

Definisi 2.2.7 Titik Singular

Titik z_0 dimana fungsi *f* tidak analitik, tetapi setiap kitar dari z_0 memuat titik analitik dari *f*, maka z_0 dinamakan *titik singular* atau *singularitas* fungsi *f* (Soemantri, 1994: 83).

2.3 Deret Fungsi Kompleks

Sebelum membahas tentang deret fungsi komplek, penulis akan terlebih dahulu menjelaskan tentang barisan fungsi. Barisan fungsi dari z dinyatakan sebagai $u_1(z), u_2(z), \cdots, u_n(z), \cdots$ yang secara umum dapat dinyatakan sebagai $\{u_n(z)\}$.

Barisan $\{u_n(z)\}$ dikatakan konvergen jika limit barisan $\{u_n(z)\}$ untuk $n \to \infty$ yang dapat dinotasikan sebagai

$$\lim_{n\to\infty} u_n(z) = u(z)$$

Dari barisan fungsi $\{u_n(z)\}$, selanjutnya kita bentuk suatu barisan baru $\{S_n(z)\}$ yang didefinisikan oleh

$$S_1(z) = u_1(z)$$

$$S_2(z) = u_1(z) + u_2(z)$$

$$\vdots$$

$$S_n(z) = u_1(z) + u_2(z) + \cdots + u_n(z)$$

dimana $\{S_n(z)\}$ = $\sum u_n(z)$ dinamakan *jumlah parsial ke-n* adalah jumlah *n* suku pertama barisan $\{u_n(z)\}$.

Definisi 2.3.1 Deret Bilangan Kompleks

Setiap elemen barisan $\{S_1(z)\}$, $\{S_2(z)\}$, … atau $\{S_n(z)\}$ dinyatakan sebagai:

$$u_1(z)+u_2(z)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z)$$

dan dinamakan *deret tak hingga dalam bilangan kompleks*. (Spiegel, 1964: 152).

Jika $\lim_{n\to\infty} S_n(z)=S(z)$, maka deret tersebut dikatakan *konvergen* dengan $S_n(z)$ sebagai jumlahnya. Apabila tidak demikian, maka deret tersebut dikatakan *divergen*.

Selain deret bilangan kompleks yang telah diuraikan di atas, kita juga mengenal adanya suatu deret pangkat (*power series*). Deret pangkat (*power series*) juga disebut sebagai deret kuasa.

Definisi 2.3.2 Deret Pangkat

Suatu deret yang berbentuk

$$a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$$

dinamakan deret kuasa dalam $(z-a)$ (Spiegel, 1964: 153).

Deret kuasa tersebut konvergen untuk $z=a$ dan mungkin hanya di titik ini deret tersebut konvergen. Secara umum dapat dikatakan bahwa deret tersebut juga konvergen di titik-titik lainnya. Hal ini menunjukkan bahwa terdapat suatu bilangan positif R sehingga deret tersebut *konvergen* untuk $|z-a|<R$ dan *divergen* untuk $|z-a|>R$. Sedangkan apabila $|z-a|=R$, mungkin deret tersebut konvergen atau mungkin tidak.

Apabila terdapat suatu lingkaran dengan jari-jari R dengan pusat di $z=a$, maka deret pangkat tersebut konvergen pada semua titik di dalam lingkaran dan divergen pada semua titik di luar lingkaran, sedangkan pada lingkaran tersebut deret pangkat mungkin konvergen atau mungkin juga tidak. R disebut *jari-jari lingkaran kekonvergenan* dari suatu deret pangkat dan lingkaran tersebut dinamakan *lingkaran kekonvergenan*.

Dalam bilangan kompleks, dikenal tiga jenis deret pangkat (*power series*) yaitu deret Taylor, deret Maclaurin, dan deret Laurent.

a. Deret Taylor

Deret Taylor merupakan deret yang paling banyak digunakan dalam mengeluarkan algoritma suatu aproksimasi terutama untuk fungsi analitik.

Definisi 2.3.3 Deret Taylor

Misalkan *f(z)* analitik di bagian dalam dan pada sebuah lingkaran yang pusatnya di $z = z_0$. Maka untuk semua titik *z* dalam lingkaran tersebut, representasi deret Taylor dari *f(z)* diberikan oleh

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \frac{f'''(z_0)}{3!}(z - z_0)^3 + \cdots$$

(Spiegel, 1999: 141).

Berikut ini merupakan teorema dasar deret Taylor beserta buktinya.

Teorema 2.3.4 Deret Taylor (Roziana, 2008: 23 – 25)

Andaikan $f(z)$ merupakan suatu fungsi sedemikian hingga $f(z)$ dan semua turunan-turunannya ada dalam suatu selang $(z_0 - r, z_0 + r)$. Maka fungsi ini dapat diuraikan menjadi deret Taylor dalam rumusan sebagai berikut:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n}(z_0)}{n!}\ (z - z_0)^n$$

untuk semua z sehingga $| z - z_0 | < r$ jika dan hanya jika

$$\lim_{n\to\infty} R_n(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(z - z_0)^{n+1} = 0$$

dengan setiap c ada diantara z dan z_0.

Bukti:

Di dalam selang $(z_0 - r, z_0 + r)$, fungsi $f(z)$ memenuhi hipotesis sebagai berikut:

$$f(z) = P_n(z) + R_n(z)$$

dengan $P_n(z)$ adalah polinom Taylor berderajat n dari fungsi $f(z)$ dan $R_n(z)$ adalah suku sisa pemotongan yang dinyatakan sebagai

$$R_n(z) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(z - z_0)^{n+1}$$

dengan setiap c ada diantara z dan z_0.

$P_n(z)$ adalah jumlah n buah suku pertama dari deret Taylor fungsi $f(z)$ pada z_0. Jadi, apabila kita buktikan bahwa $\lim_{n\to\infty} P_n(z)$ ada dan sama dengan $f(z)$ jika dan hanya jika $\lim_{n\to\infty} R_n(z) = 0$, maka teorema ini akan terbukti. Karena

$$P_n(z) = f(z) - R_n(z),$$

jika $\lim_{n\to\infty} R_n(z) = 0$, maka

$$\lim_{n\to\infty} P_n(z) = f(z) - \lim_{n\to\infty} R_n(z)$$

$$= f(z) - 0$$

$$= f(z).$$

Selanjutnya, dari hipotesis bahwa $\lim_{n\to\infty} P_n(z) = f(z)$ kita akan membuktikan bahwa $\lim_{n\to\infty} R_n(z) = 0$. Karena

$$R_n(z) = f(z) - P_n(z),$$

sehingga

$$\lim_{n\to\infty} R_n(z) = f(z) - \lim_{n\to\infty} P_n(z)$$

$$= f(z) - f(z)$$

$$= 0.$$

Dengan demikian, maka teorema tersebut terbukti.

Menurut Munir (2006: 20), karena suku-suku deret Taylor tak hingga banyaknya, maka untuk alasan praktis deret Taylor dipotong sampai suku orde tertentu. Deret Taylor yang dipotong sampai suku orde ke-*n* dinamakan *deret Taylor terpotong* dan dinyatakan oleh

$$f(z) \approx f(z_0) + \frac{(z-z_0)}{1!} f'(z_0) + \cdots + \frac{(z-z_0)^n}{n!} f^{n}(z_0) + R_n(z)$$

dimana

$$R_n(z) = \frac{(z-z_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c), \qquad z_0 < c < z$$

disebut sisa suku pemotongan (residu).

Dari persamaan di atas, maka deret Taylor yang hanya memperhitungkan satu suku pertama di ruas kanan akan mempunyai bentuk umum sebagai berikut:

$$f(z_1) \approx f(z_0)$$

Bentuk tersebut dinamakan sebagai perkiraan orde nol. Perkiraan tersebut adalah benar jika fungsi yang diperkirakan adalah konstan. Jika fungsi yang diperkirakan tidak konstan, maka harus dipertimbangkan suku-suku berikutnya dari deret Taylor.

Bentuk deret Taylor yang memperhitungkan dua suku pertama atau disebut deret Taylor orde satu ditulis sebagai berikut:

$$f(z_1) \approx f(z_0) + \frac{(z - z_0)}{1!} f'(z_0)$$

Bentuk tersebut merupakan suatu persamaan garis lurus (persamaan linier). Dengan cara yang sama, maka deret Taylor yang memperhitungkan tiga suku pertama atau disebut deret Taylor orde dua dapat dituliskan dalam bentuk berikut:

$$f(z_1) \approx f(z_0) + \frac{(z - z_0)}{1!} f'(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2!} f''(z_0).$$

Berikut ini diberikan contoh ekspansi suatu fungsi ke dalam deret Taylor.

Contoh 2.3.5

Tentukan ekspansi deret Taylor untuk $f(z) = \dfrac{1}{z-1}$ dalam suatu kitar titik $z_0 = 3$.

Jawab.

Fungsi $f(z)$ analitik kecuali di $z=1$. Radius kekonvergenan deret Taylor dalam pangkat $(z-3)$ adalah $R=2$. Untuk $|z-3|<2$, maka dalam domain ini berlaku bahwa $\left|\frac{z-3}{2}<1\right|$. Sehingga ekspansi deret Taylornya adalah

$$f(3) = f(3) + \frac{f'(3)}{1!}(z-3) + \frac{f''(3)}{2!}(z-3)^2 + \cdots$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(z-3) + \frac{1}{8}(z-3)^2 + \cdots$$

b. Deret Maclaurin

Deret Maclaurin merupakan bentuk khusus dari deret Taylor yaitu deret Taylor yang diekspansi dengan pusat $z_0 = 0$. Berikut ini akan diberikan beberapa contoh ekspansi fungsi ke dalam deret Maclaurin.

Contoh 2.3.6

Tentukan ekspansi deret Maclaurin untuk fungsi eksponensial $f(z) = e^z$!

Jawab:

Dengan menggunakan definisi deret Taylor, maka dapat dituliskan bahwa ekspansi deret Maclaurinnya adalah sebagai berikut:

$$e^z = f(0) + f'(0)(z-0) + \frac{f''(0)}{2!}(z-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(z-0)^3 + \cdots$$

$$= e^0 + e^0(z-0) + \frac{e^0}{2!}(z-0)^2 + \frac{e^0}{3!}(z-0)^3 + \cdots$$

$$= 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \cdots$$

Contoh 2.3.7

Tentukan ekspansi deret Maclaurin untuk fungsi $f(z)=\sin z$!

Jawab.

Dengan menggunakan definisi deret Taylor, maka dapat dituliskan bahwa ekspansi deret Maclaurinnya adalah sebagai berikut:

$$\sin z = f(0)+f'(0)(z-0)+\frac{f''(0)}{2!}(z-0)^2+\frac{f'''(0)}{3!}(z-0)^3+\cdots$$

$$=\sin 0+\cos 0(z-0)+\frac{(-\sin 0)}{2!}(z-0)^2+\frac{(-\cos 0)}{3!}(z-0)^3+\cdots$$

$$=z-\frac{z^3}{6}+\cdots$$

Contoh 2.3.8

Tentukan ekspansi deret Maclaurin untuk fungsi $f(z)=\cos z$!

Jawab.

Dengan menggunakan definisi deret Taylor, maka dapat dituliskan bahwa ekspansi deret Maclaurinnya adalah sebagai berikut:

$$\cos z = f(0)+f'(0)(z-0)+\frac{f''(0)}{2!}(z-0)^2+\frac{f'''(0)}{3!}(z-0)^3+\cdots$$

$$=\cos 0+(-\sin 0)(z-0)+\frac{(-\cos 0)}{2!}(z-0)^2+\frac{\sin 0}{3!}(z-0)^3+\cdots$$

$$=1-\frac{z^2}{2}+\cdots.$$

c. Deret Laurent

Fungsi yang tidak analitik di z_0 tidak mungkin diekspansi ke dalam deret Taylor dalam pangkat $(z-z_0)$. Namun, fungsi ini mungkin dapat diekspansi ke dalam deret dengan pangkat bulat (negatif, nol, atau positif) dari $(z-z_0)$.

Definisi 2.3.9 Deret Laurent

Jika $f(z)$ suatu fungsi yang tidak analitik di z_0 tetapi analitik di tiap-tiap titik lain di dalam dan pada sebuah lingkaran ***C*** yang berpusat di z_0, maka $(z-z_0)^n$ dari $f(z)$ analitik disemua titik di dalam dan pada ***C*** dan mempunyai deret Taylor disekitar z_0 sehingga

$$f(z)=\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}+\frac{a_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}}+\cdots+\frac{a_{-1}}{(z-z_0)}+a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots$$

dinamakan deret Laurent untuk $f(z)$ (Spiegel, 1999: 142).

Menurut Soemantri (1994: 180), secara lebih sederhana bentuk tersebut dapat dinyatakan sebagai

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}.$$

2.4 Kekonvergenan Deret Fungsi

Kekonvergenan suatu deret fungsi dapat dibedakan menjadi tiga, yaitu suatu deret fungsi dikatakan konvergen titik demi titik, konvergen mutlak, dan konvergen seragam.

Definisi 2.4.1 Konvergen Titik Demi Titik

Suatu deret fungsi $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ dimana $z \in D$ dikatakan konvergen pada domain *D*, jika deret tersebut konvergen di setiap titik $z \in D$. Karena itu, deret yang konvergen pada *D* dikatakan *konvergen titik demi titik* pada *D* (Soemantri, 1994: 188).

Definisi 2.4.2 Konvergen Mutlak

Suatu deret $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ dinamakan *konvergen mutlak* jika deret nilai mutlaknya $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$ konvergen. Jika $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ konvergen, tetapi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$ tidak konvergen maka kita namakan $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ *konvergen bersyarat* (Spiegel, 1964: 153).

Definisi 2.4.3 Konvergen Seragam

Deret $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ yang didefinisikan pada domain *D* dikatakan *konvergen seragam* pada *D*, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat $k(\varepsilon) \in \mathrm{N}$ sehingga untuk setiap $n \in \mathrm{N}$ dan setiap $z \in D$, jika $n \geq k(\varepsilon)$ berlaku $|S_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ dimana $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ (Soemantri, 1994: 189).

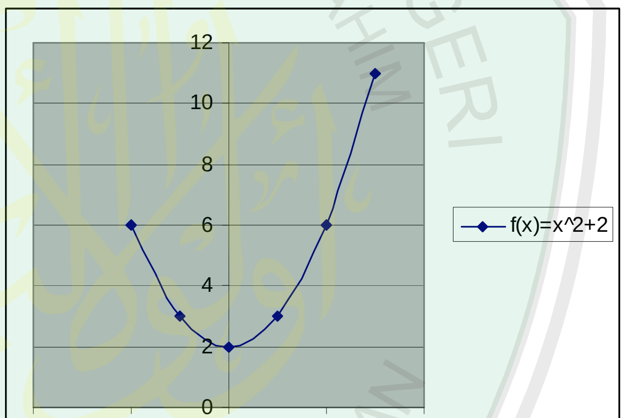
Karena $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$, maka untuk $z \in D$ dapat dituliskan bahwa $f(z) = S_n(z) + R_n(z)$ dengan $R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_n(z)$. Jadi, deret $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ konvergen seragam ke *f* pada *D* jika pada setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat $k(\varepsilon) \in \mathrm{N}$

sehingga untuk setiap $n \in \mathrm{N}$ dan setiap $z \in D$ dengan $n \geq k(\varepsilon)$ berlaku $|R_n(z)| < \varepsilon$.

2.5 Aproksimasi Fungsi

Suatu fungsi tidak memerlukan penyelesaian tetapi fungsi tersebut hanya dapat dievaluasi apabila nilai variabelnya diberikan. Misalnya, suatu fungsi variabel riil dinyatakan oleh $f(x) = x^2 + 2$ dengan $-2 \leq x \leq 3$. Fungsi $f(x)$ tersebut dapat dievaluasi secara analitik dan dibuat grafiknya sebagai berikut.

x	$f(x) = x^2 + 2$
-2	6
-1	3
0	2
1	3
2	6
3	11



Suatu fungsi juga dapat direpresentasikan dalam deret pangkat tak hingga. Suatu fungsi yang diekspansi dalam deret pangkat tak hingga $\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i$ tidak dapat diselesaikan dengan penghitungan biasa untuk mendapatkan solusi eksaknya. Oleh karena itu, untuk mencari nilainya dapat dilakukan dengan penggunaan suatu hampiran. Perhitungan dengan suatu hampiran (*approximation*) menghasilkan nilai hampiran (*approximation value*) (Munir, 2006: 18).

Hampiran (aproksimasi) terhadap suatu fungsi pada umumnya dilakukan ke dalam bentuk polinom yaitu dengan deret Taylor. Nilai eksak suatu fungsi akan bernilai sama dengan nilai aproksimasinya jika fungsi tersebut diderettkan secara Taylor sampai dengan tak hingga.

Nilai eksak suatu fungsi deret tak hingga diperoleh apabila semua suku dari deret tersebut diperhitungkan. Namun, dalam prakteknya sulit untuk memperhitungkan semua suku sampai tak terhingga. Karena suku-suku dalam suatu deret tak hingga banyaknya, maka dilakukan pemotongan sampai suku tertentu untuk alasan praktis. Oleh karena itu, terdapat suatu kesalahan yang muncul akibat penggunaan aproksimasi.

Ada dua jenis penggunaan aproksimasi pada suatu fungsi yaitu (1) untuk menggantikan fungsi-fungsi yang rumit dengan fungsi yang lebih sederhana sehingga banyak operasi umum, seperti fungsi turunan dan fungsi integral, atau bahkan mengevaluasi fungsi tersebut dapat dilakukan dengan mudah dan (2) untuk memperoleh kembali suatu fungsi dari informasi sebagian mengenai fungsi itu, misalnya dari suatu tabel nilai (yang mungkin hanya bersifat aproksimasi saja) (Santoso, 2003: 2).

Suatu fungsi yang tidak dapat dihampiri ke dalam bentuk polinom bisa dihampiri dengan suatu fungsi rasional. Metode untuk memperoleh fungsi rasional yang bisa digunakan untuk menghampiri suatu fungsi adalah aproksimasi Padé. Menurut Baker (1981: 1), aproksimasi Padé merupakan sebuah fungsi rasional yang didefinisikan sebagai

$$R_{L,M}(z)=\frac{P_L(z)}{Q_M(z)}=\frac{a_0+a_1z+\cdots+a_Lz^L}{b_0+b_1z+\cdots+b_Mz^M}$$

mempunyai ekspansi Maclaurin sesuai dengan deret pangkat untuk fungsi $f(z)$ yang diinginkan.

Dalam perhitungan dengan hampiran (aproksimasi) dimungkinkan terjadi suatu kesalahan terhadap nilai eksaknya. Menurut Triatmodjo (2002: 2), terdapat tiga jenis kesalahan yang mungkin terjadi dalam perhitungan dengan aproksimasi yaitu kesalahan bawaan, kesalahan pembulatan (*round-off error*), dan kesalahan pemotongan (*truncation error*).

Definisi 2.6.1 Kesalahan Bawaan

> Kesalahan bawaan adalah kesalahan dari nilai data yang terjadi karena kekeliruan dalam menyalin data, salah membaca skala atau kesalahan karena kurangnya pengertian mengenai hukum-hukum fisik dari data yang diukur (Triatmodjo, 2002: 2).

Munir (2006: 25) menyebut kesalahan bawaan dengan istilah kesalahan eksperimental yaitu kesalahan yang timbul dari data yang diberikan misalnya karena kesalahan pengukuran, ketidaktelitian alat ukur, dan sebagainya.

Definisi 2.6.2 Kesalahan Pembulatan (round-off error)

> Kesalahan pembulatan adalah kesalahan yang terjadi karena tidak diperhitungkannya beberapa angka terakhir dari suatu bilangan (Triatmodjo, 2002: 2).

Kesalahan pembulatan misalnya 3,1415926 dapat dibulatkan menjadi 3,14.

Definisi 2.6.3 Kesalahan Pemotongan (truncation error)

Kesalahan pemotongan adalah kesalahan yang terjadi karena hanya diperhitungkannya beberapa suku pertama dari suatu deret tak hingga (Triatmodjo, 2002: 3).

Selain definisi di atas, kesalahan pemotongan (*truncation error*) juga didefinisikan sebagai kesalahan yang timbul dari penggunaan suatu aproksimasi pengganti prosedur matematika yang eksak (Chapra, 2002: 54). Kesalahan pemotongan terjadi misalnya pada penggunaan aproksimasi dengan deret Taylor.

Hubungan antara nilai eksak (nilai sebenarnya), hasil aproksimasi dan kesalahan (*error*) yang terjadi dinyatakan sebagai berikut:

$$Nilai \quad Sebenarnya = aproksimasi + kesalahan(error).$$

Kesalahan (*error*) yang muncul dalam penggunaan aproksimasi diharapkan bernilai sangat kecil sehingga nilai yang diperoleh mendekati atau hampir sama dengan nilai eksaknya. Oleh karena itu, dalam menghampiri suatu fungsi deret pangkat tak hingga nilai kesalahannya akan bernilai semakin kecil jika suku-suku deret yang digunakan untuk menghampiri fungsi tersebut semakin banyak.

Satu cara mengungkapkan tingkat ketelitian penghampiran itu adalah dengan menggunakan notasi *O-Besar (Big-Oh)* (Munir, 2006: 31). Misalkan fungsi $f(z)$ dihampiri dengan fungsi $R_{L,M}(z)$. Maka, dapat dikatakan bahwa $R_{L,M}(z)$ menghampiri $f(z)$ dengan orde penghampiran $O(z^{n+1})$ dan ditulis

$$f(z) = R_{L,M}(z) + O(z^{n+1}) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (3.16)$$

Persamaan sebagaimana dinyatakan pada persamaan (3.16) merupakan bentuk dasar yang sesuai dengan persamaan (3.6). Dengan demikian, hampiran $f(z)$ dengan deret Taylor untuk suku ke-*n+1* dituliskan sebagai

$$R_n(z) = \frac{(z-z_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) = O\left(z^{n+1}\right) \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad (3.17)$$

Kesalahan (*error*) yang terjadi dalam perhitungan menggunakan hampiran (aproksimasi) dapat diperkecil dengan beberapa cara antara lain dengan:

a. Memperkecil interval antara $(z - z_0)$.

b. Menggunakan atau memperhitungkan lebih banyak suku dari deret Taylor.

2.6 Kajian Keislaman tentang Fungsi dan Deret Pangkat Tak Hingga

Secara umum beberapa konsep dari disiplin ilmu telah dijelaskan dalam Al-Qur'an, salah satunya adalah matematika. Menurut Afzalur Rahman (2007: 111), sumber kajian-kajian matematika, sebagaimana sumber ilmu pengetahuan lainnya dalam Islam adalah konsep *tauhid* yaitu Keesaan Allah.

Salah satu konsep matematika yang dapat diambil dari ayat al-Qur'an adalah tentang perbandingan. Dari konsep perbandingan inilah, kita bisa membentuk suatu persamaan fungsi. Konsep perbandingan ini misalnya dijelaskan dalam al-Qur'an surat al-Anfaal ayat 65 – 66 sebagai berikut:

يَـٰٓأَيُّهَا ٱلنَّبِيُّ حَرِّضِ ٱلۡمُؤۡمِنِينَ عَلَى ٱلۡقِتَالِۚ إِن يَكُن مِّنكُمۡ عِشۡرُونَ صَـٰبِرُونَ يَغۡلِبُواْ مِاْئَتَيۡنِۚ وَإِن يَكُن
مِّنكُم مِّاْئَةٌ يَغۡلِبُوٓاْ أَلۡفًا مِّنَ ٱلَّذِينَ كَفَرُواْ بِأَنَّهُمۡ قَوۡمٌ لَّا يَفۡقَهُونَ ﴿٦٥﴾ ٱلۡـَٔـٰنَ خَفَّفَ ٱللَّهُ عَنكُمۡ وَعَلِمَ

أَنَّ فِيكُمۡ ضَعۡفٗاۚ فَإِن يَكُن مِّنكُم مِّاْئَةٞ صَابِرَةٞ يَغۡلِبُواْ مِاْئَتَيۡنِۚ وَإِن يَكُن مِّنكُمۡ أَلۡفٞ يَغۡلِبُوٓاْ أَلۡفَيۡنِ بِإِذۡنِ
ٱللَّهِۗ وَٱللَّهُ مَعَ ٱلصَّٰبِرِينَ ٦٦

Artinya: " Hai nabi, kobarkanlah semangat para mukmin untuk berperang. Jika ada dua puluh orang yang sabar diantaramu, niscaya mereka akan dapat mengalahkan dua ratus orang musuh. Dan jika ada seratus orang yang sabar diantaramu, niscaya mereka akan dapat mengalahkan seribu dari pada orang kafir, disebabkan orang-orang kafir itu kaum yang tidak mengerti (65). Sekarang Allah Telah meringankan kepadamu dan dia Telah mengetahui bahwa padamu ada kelemahan. Maka jika ada diantaramu seratus orang yang sabar, niscaya mereka akan dapat mengalahkan dua ratus orang kafir; dan jika diantaramu ada seribu orang (yang sabar), niscaya mereka akan dapat mengalahkan dua ribu orang, dengan seizin Allah. dan Allah beserta orang-orang yang sabar. " (QS. Al-Anfaal: 65 – 66).

Ayat di atas menjelaskan tentang perbandingan banyaknya orang mukmin yang sabar dengan orang kafir. Menurut Abdusysyakir (2006: 85 – 86), pada ayat ke 65, Allah menjelaskan bahwa perbandingan orang mukmin dan orang kafir tersebut adalah 1:10 yaitu

$$\frac{20}{200} = \frac{100}{1000} = \frac{1}{10}.$$

Seandainya, pada ayat ke 65 hanya disebutkan bahwa 20 orang mukmin yang sabar akan mengalahkan 200 orang kafir sehingga perbandingannya dapat dinyatakan sebagai 1:10, maka akan sulit menyatakan perbandingannya untuk 30, 50, atau 100 orang mukmin yang sabar. Namun, al-Qur'an telah mempertegas kembali dengan menyatakan bahwa 100 orang mukmin yang sabar akan mengalahkan 1000 orang kafir. Hal ini menunjukkan bahwa perbandingannya selalu 1:10. Jika x menyatakan banyaknya orang mukmin yang sabar dan y menyatakan banyaknya orang kafir, maka diperoleh rumus perbandingan

$$\frac{x}{y}=\frac{1}{10}.$$

Maka, bisa dibentuk suatu fungsi $f(x)=y$ sehingga

$$f(x)=10x.$$

Dengan cara yang sama, maka berdasarkan ayat 66 diperoleh bahwa

$$\frac{x}{y}=\frac{1}{2} \text{ atau } y=2x.$$

Selain konsep tentang fungsi sebagaimana diuraikan di atas, kita juga bisa menganalogkan bahwa keberadaan Allah apabila ingin dijangkau oleh manusia merupakan sebuah deret tak hingga. Suku-suku dalam deret ini menyatakan setiap perbuatan manusia yang digunakan untuk selalu mendekatkan diri kepada Allah. Dalam konsep matematika, fungsi *f(z)* yang diekspansi dalam suatu deret tak hingga tidak mungkin dapat dihitung secara langsung nilai eksaknya. Oleh karena itu, perlu dilakukan aproksimasi untuk menghampiri nilainya. Begitu pula dengan Allah swt. Manusia tidak akan bisa mencapai Allah secara mutlak. Manusia memerlukan suatu cara untuk bisa senantiasa mendekatkan diri kepada Allah sebagai upaya untuk mendapatkan rahmat, petunjuk dan mendekati kebenaran keberadaan-Nya. Cara-cara ini dapat dilakukan misalnya dengan melaksanakan ibadah serta memperbanyak berbuat kebajikan. Hal ini sebagaimana dinyatakan dalam al-Qur’an surat al-A’raaf ayat 56 yaitu sebagai berikut:

وَلَا تُفْسِدُوا۟ فِى ٱلْأَرْضِ بَعْدَ إِصْلَٰحِهَا وَٱدْعُوهُ خَوْفًا وَطَمَعًا ۚ إِنَّ رَحْمَتَ ٱللَّهِ قَرِيبٌ مِّنَ ٱلْمُحْسِنِينَ ﴿٥٦﴾

Artinya: ”Dan janganlah kamu berbuat kerusakan di muka bumi sesudah (Allah) memperbaikinya dan berdoalah kepada-Nya dengan rasa takut (tidak *akan diterima) dan harapan (akan dikabulkan). Sesungguhnya rahmat Allah dekat dengan orang-orang yang berbuat baik".* (Q.S. al-A'raaf: 56).

Dari ayat di atas dapat diambil sebuah nilai penting bahwa dengan memperbanyak berbuat kebaikan maka seseorang akan semakin dekat dengan rahmat Allah. Orang yang dekat dengan rahmat Allah maka dia akan merasakan ketenteraman dalam hatinya. Dia tidak akan pernah merasa sendirian, karena kemanapun kakinya melangkah dia selalu merasa dekat dengan Allah swt.

Selain keberadaan Allah swt, nikmat Allah swt yang telah diberikan kepada hamba-Nya juga dapat dianalogkan sebagai suatu fungsi dalam deret tak hingga karena sesungguhnya manusia tidak akan pernah dapat menghitung nikmat-nikmat tersebut. Hal ini sebagaimana dinyatakan dalam al-Qur'an surat Ibrahim ayat 34 yaitu sebagai berikut:

وَءَاتَىٰكُم مِّن كُلِّ مَا سَأَلۡتُمُوهُۚ وَإِن تَعُدُّواْ نِعۡمَتَ ٱللَّهِ لَا تُحۡصُوهَآۗ إِنَّ ٱلۡإِنسَٰنَ لَظَلُومٞ كَفَّارٞ ٣٤

Artinya: *"Dan Dia telah menganugerahkan kepada kamu dari segala apa yang kamu mohonkan kepada-Nya. Dan jika kamu menghitung nikmat Allah, tidaklah dapat kamu menghinggakannya. Sesungguhnya manusia itu sangat zalim dan sangat kafir".* (Q.S Ibrahim: 34).

Dalam ayat yang lain yaitu surat an-Nahl ayat 18, Allah swt juga menegaskan bahwa:

وَإِن تَعُدُّواْ نِعۡمَةَ ٱللَّهِ لَا تُحۡصُوهَآۗ إِنَّ ٱللَّهَ لَغَفُورٞ رَّحِيمٞ ١٨

Artinya: *"Dan jika kamu hendak menghitung-hitung nikmat Allah, niscaya kamu tak dapat menghinggakannya. Sesungguhnya Allah benar-benar Maha Pengampun lagi Maha Penyayang".* (Q.S an-Nahl: 18).

Dari kedua ayat di atas, Allah swt menjelaskan bahwa sesungguhnya nikmat yang telah dilimpahkan kepada hamba-Nya sangatlah banyak dan jika dihitung maka kita tidak bisa menghingganya. Hal ini sesuai dengan pendapat

Shihab (2002: 63) bahwa untuk menyebutkan nikmat Allah diperlukan sederetan ungkapan sedangkan untuk menghitungnya merupakan suatu hal yang mustahil.

Perbedaan penutup antara surat Ibrahim ayat 34 dengan surat an-Nahl ayat 18 disebabkan karena konteks yang digunakan. Ayat dalam surat Ibrahim menjelaskan tentang sikap manusia yang durhaka terhadap anugerah Allah. Mereka tidak mensyukurinya karena itu mereka dikecam. Sedangkan dalam surat an-Nahl menjelaskan tentang anugerah Allah dan kemurahan-Nya serta bagaimana Allah menghadapi manusia. Betapapun manusia itu mendurhakai nikmat Allah, namun Allah masih membuka pintu maaf serta tetap mencurahkan rahmat-Nya (Shihab, 2002: 65).

Nikmat-nikmat Allah yang sudah diberikan kepada kita misalnya nikmat bernafas dan menghirup oksigen dengan nyaman tanpa harus membayar, nikmat berupa kesehatan jasmani dan pikiran, nikmat berupa penglihatan yang baik, pendengaran yang baik, hati yang senantiasa masih mengingat-Nya, dan lain sebagainya yang tentu saja kita tidak dapat menyebutkannya satu persatu.

Jika tiap-tiap nikmat Allah yang diberikan kepada hamba-Nya kita anggap sebagai setiap suku dari suatu deret tak hingga, dari nikmat yang terkecil misalnya kita nyatakan sebagai a_0 sampai pada nikmat yang sangat besar kita misalkan sebagai $a_n(z-a)^n$, maka jumlah nikmat-nikmat tersebut dapat kita nyatakan sebagai suatu fungsi dalam deret pangkat tak hingga sebagaimana yang dikenal dalam konsep matematika yaitu sebagai berikut:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

$$= a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + a_3(z-a)^3 + \cdots .$$

Semakin banyak kita mengingat nikmat Allah lalu kita mensyukurinya maka sesungguhnya kita akan semakin merasa cukup dengan apa yang kita miliki. Kita akan semakin menyadari bahwa anugerah tersebut adalah titipan dari Allah dan kita harus menggunakannya untuk senantiasa beribadah. Dalam al-Qur'an, Allah swt menjelaskan bahwa Allah akan menambah nikmat-Nya bagi orang-orang yang senantiasa bersyukur. Hal ini sebagaimana dinyatakan dalam surat Ibrahim ayat 7 sebagai berikut:

وَإِذْ تَأَذَّنَ رَبُّكُمْ لَئِن شَكَرْتُمْ لَأَزِيدَنَّكُمْ ۖ وَلَئِن كَفَرْتُمْ إِنَّ عَذَابِي لَشَدِيدٌ ﴿٧﴾

Artinya: *"Dan (ingatlah juga), tatkala Tuhanmu memaklumkan: Sesungguhnya jika kamu bersyukur, pasti kami akan menambah (nikmat) kepadamu. Dan jika kamu mengingkari (nikmat-Ku), maka sesungguhnya adzab-Ku sangat pedih"*. (Q. S Ibrahim: 7).

Bersyukur merupakan salah satu perbuatan baik yang sangat dianjurkan dalam agama Islam. Bahkan di dalam al-Qur'an, Allah berjanji akan menambah nikmat yang diberikan kepada hamba-Nya bagi siapa saja yang bersyukur sebagaimana dinyatakan dalam ayat di atas. Dalam surat al-An'am ayat 160, Allah kembali menegaskan bahwa:

مَن جَاءَ بِالْحَسَنَةِ فَلَهُ عَشْرُ أَمْثَالِهَا ۖ وَمَن جَاءَ بِالسَّيِّئَةِ فَلَا يُجْزَىٰ إِلَّا مِثْلَهَا وَهُمْ لَا يُظْلَمُونَ ﴿١٦٠﴾

Artinya: *"Barang siapa membawa amal yang baik, maka baginya (pahala) sepuluh kali lipat amalnya. Dan barang siapa yang membawa perbuatan jahat maka dia tidak diberi pembalasan melainkan seimbang dengan kejahatannya, sedang mereka tidak sedikitpun dianiaya (dirugikan)"*. (Q. S al-An'am: 160).

Dengan demikian, maka jelaslah bahwa manusia harus senantiasa mendekatkan diri kepada Allah swt dengan memperbanyak berbuat kebajikan baik dalam tatanan hubungan secara vertikal dengan Allah maupun hubungan secara horisontal dengan sesama manusia dan lingkungan alam semesta.

BAB III

PEMBAHASAN

Suatu fungsi biasanya dihampiri kedalam bentuk polinom. Fungsi yang bentuknya rumit menjadi lebih sederhana bila dihampiri dengan polinom karena polinom merupakan bentuk fungsi yang paling mudah dipahami, mudah dihitung dan hanya melibatkan pangkat-pangkat bilangan bulat sederhana (Munir, 2006: 18). Suatu fungsi yang tidak dapat ditentukan nilainya dengan penghampiran ke dalam bentuk polinom dapat dihampiri dengan suatu fungsi rasional.

Berikut ini akan diberikan pembahasan mengenai konstruksi aproksimasi Padé untuk menghampiri suatu fungsi dalam bentuk deret pangkat (*power series*) dan penerapan aproksimasi Padé untuk menghampiri fungsi transenden jenis fungsi eksponensial dan fungsi trigonometri (fungsi sinus dan fungsi kosinus).

3.1 Konstruksi Aproksimasi Padé

Aproksimasi Padé merupakan sebuah metode untuk memperoleh fungsi rasional yang dapat digunakan untuk menghampiri nilai suatu fungsi. Sebelum membahas tentang konstruksi aproksimasi Padé, berikut ini adalah definisi aproksimasi Padé dan teoremanya.

Definisi 3.1.1 Aproksimasi Padé

Didefinisikan suatu fungsi $f(z)$ dan suatu fungsi rasional $R_{L,M}(z)=\dfrac{P_L(z)}{Q_M(z)}$, dimana $P_L(z)$ dan $Q_M(z)$ memenuhi persamaan $Q_M(z)\cdot f(z)-P_L(z)=O\left[z^{L+M+1}\right]$, dan $Q_M(z)\neq 0$ maka fungsi rasional $R_{L,M}(z)$ merupakan aproksimasi Padé pada fungsi $f(z)$.

Teorema 3.1.2 Aproksimasi Padé (Baker, 1981: 6)

Dengan mendefinisikan pembilang $P_L(z)$ dan penyebut $Q_M(z)$ dari suatu fungsi rasional $R_{L,M}(z)$ untuk menghampiri fungsi $f(z)$ yang diekspansi ke dalam deret pangkat $\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i$ berlaku

$$Q_M(z)\cdot f(z)-P_L(z)=O\left[z^{L+M+1}\right].$$

Bukti:

Suatu fungsi $f(z)$ yang diekspansi dalam deret pangkat dapat dinyatakan dalam bentuk deret pangkat:

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i,$$

Pembilang $P_L(z)$ dan penyebut $Q_M(z)$ dari suatu fungsi rasional $R_{L,M}(z)$ dimana $Q_M(z)\neq 0$ didefinisikan sesuai persamaan (3.3) dan (3.4) yaitu:

$$P_L(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_Lz^L=\sum_{i=0}^{L} a_L z^L$$

dan

$$Q_M(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_M z^M = \sum_{i=0}^{M} b_M z^M .$$

Maka, akan diperoleh bahwa:

$$Q_M(z) \cdot f(z) - P_L(z) = \sum_{i=0}^{M} b_M z^M . \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i - \sum_{i=0}^{L} a_L z^L$$

$$= \left(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_M z^M\right) . \left(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots\right) - \left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_L z^L\right)$$

$$= \left[b_0 c_0 + (b_0 c_1 + b_1 c_0) z + (b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0) z^2 + \cdots\right] - \left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_L z^L\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} (b_0 c_M + b_1 c_{M-1} + b_2 c_{M-2} + \cdots + b_M c_0) z^{M+i} - \left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_L z^L\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} z^{L+M+i} \left((b_0 c_M - a_0) + (b_1 c_{M-1} - a_1) + (b_2 c_{M-2} - a_2) + \cdots + (b_M c_0 - a_L)\right)$$

$$= O(z^{L+M+i}) .$$

Dengan demikian, maka teorema tersebut terbukti.

Berdasarkan definisi dan teorema di atas, selanjutnya akan ditunjukkan tentang konstruksi aproksimasi Padé yang sesuai untuk suatu deret pangkat (*power series*).

Andaikan terdapat suatu fungsi $f(z)$ yang dapat diekspansi ke dalam bentuk deret pangkat $\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i$, sehingga dapat dinotasikan dalam bentuk berikut:

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i . \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad (3.1)$$

Persamaan (3.1) sebenarnya merupakan suatu bentuk fungsi polinom dengan $c_0, c_1, c_2, \cdots, c_i$ merupakan konstanta kompleks dan *i* merupakan bilangan bulat positif yang dimulai dari nol sampai tak hingga. Persamaan (3.1) dapat dinyatakan kembali sebagai suatu fungsi polinom berderajat i dan didefinisikan sebagai:

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3.2)$$

Didefinisikan suatu fungsi rasional dengan aproksimasi Padé yang sesuai untuk digunakan menghampiri fungsi $f(z)$ yang telah didefiniskan sesuai bentuk (3.2).

Misalkan terdapat dua buah bilangan bulat positif yaitu L dan M, masing-masing merupakan pangkat tertinggi dari dua buah fungsi polinom misalnya $P(z)$ dan $Q(z)$. Andaikan kedua bentuk fungsi polinom tersebut diekspansi, maka dapat didefinisikan bahwa:

$$P_L(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_L z^L, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.3)$$

dan

$$Q_M(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_M z^M. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.4)$$

Fungsi rasional merupakan pembagian dari dua buah fungsi polinom. Dari persamaan (3.3) dan (3.4), dapat dibentuk suatu fungsi rasional $R_{L,M}(z)$ dimana L dan M masing-masing merupakan pangkat tertinggi dari pembilang dan penyebut fungsi rasional $R_{L,M}(z)$. Fungsi rasional $R_{L,M}(z)$ dapat dinyatakan sebagai:

$$R_{L,M}(z) = \frac{P_L(z)}{Q_M(z)}$$

$$= \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_L z^L}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_M z^M} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.5)$$

Fungsi rasional sebagaimana telah didefinisikan pada persamaan (3.5) akan mempunyai suatu nilai jika $Q_M(z) \neq 0$. Misalnya diberikan suatu fungsi $f(z)$ seperti (3.1) dan pasangan bilangan bulat positif L, M. Akan ditentukan sebuah fungsi rasional $R_{L,M}(z)$ yang digunakan untuk menghampiri fungsi $f(z)$ tersebut.

Fungsi $f(z)$ sebagaimana telah didefinisikan pada persamaan (3.1), hampiran fungsi rasional seperti persamaan (3.5) dan suku sisa hampirannya dapat dinyatakan sebagai bentuk berikut:

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_L z^L}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_M z^M} + O\left(z^{L+M+1}\right)$$

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_L z^L}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_M z^M} + O\left(z^{L+M+1}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3.6)$$

dimana $O\left(z^{L+M+1}\right)$ merupakan sisa pemotongan untuk suku ke-*(L+M+1)*. Dengan melakukan operasi perkalian silang maka diperoleh bahwa

$$\left(b_0 + b_1 z + \cdots + b_M z^M\right)\left(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots\right) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_L z^L + O\left(z^{L+M+1}\right) \quad (3.7)$$

Dengan menjabarkan persamaan di ruas kiri yaitu dengan mengalikan polinom $(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_M z^M)$ dengan masing-masing suku dari deret fungsi yang diberikan dari persamaan (3.7) di atas dapat diperoleh bahwa:

$$\left(b_0 + b_1 z + \cdots + b_M z^M\right)c_0 = b_0 c_0 + b_1 c_0 z + \cdots + b_M c_0 z^M$$

$$\left(b_0 + b_1 z + \cdots + b_M z^M\right)c_1 z = b_0 c_1 z + b_1 c_1 z^2 + \cdots + b_M c_1 z^{M+1}$$

$$\left(b_0 + b_1 z + \cdots + b_M z^M\right)c_2 z^2 = b_0 c_2 z^2 + b_1 c_2 z^3 + \cdots + b_M c_2 z^{M+2}$$

$$\vdots$$

$$\left(b_0 + b_1 z + \cdots + b_M z^M\right) c_L z^L = b_0 c_L z^L + b_1 c_L z^{L+1} + \cdots + b_M c_L z^{L+M}$$

$$\left(b_0 + b_1 z + \cdots + b_M z^M\right) c_{L+1} z^{L+1} = b_0 c_{L+1} z^{L+1} + b_1 c_{L+1} z^{L+2} + \cdots + b_M c_{L+1} z^{L+M+1}$$

$$\left(b_0 + b_1 z + \cdots + b_M z^M\right) c_{L+2} z^{L+2} = b_0 c_{L+2} z^{L+2} + b_1 c_{L+2} z^{L+3} + \cdots + b_M c_{L+2} z^{L+M+2}$$

$$\left(b_0 + b_1 z + \cdots + b_M z^M\right) c_{L+3} z^{L+3} = b_0 c_{L+3} z^{L+3} + b_1 c_{L+3} z^{L+4} + \cdots + b_M c_{L+3} z^{L+M+3}$$

$$\vdots$$

$$\left(b_0 + b_1 z + \cdots + b_M z^M\right) c_{L+M} z^{L+M} = b_0 c_{L+M} z^{L+M} + b_1 c_{L+M} z^{L+M+1} + \cdots + b_M c_{L+1} z^{L+2M}\ .$$

Selanjutnya, akan terbentuk suatu sistem persamaan koefisien untuk masing-masing koefisien $z^{L+1}, z^{L+2}, \cdots, z^{L+M}$ sehingga diperoleh bahwa:

$$\begin{aligned}
&b_0 c_{L+1} + b_1 c_L + \cdots + b_{M-2} c_{L-M+3} + b_{M-1} c_{L-M+2} + b_M c_{L-M+1} = 0 \\
&b_0 c_{L+2} + b_1 c_{L+1} + \cdots + b_{M-2} c_{L-M+4} + b_{M-1} c_{L-M+3} + b_M c_{L-M+2} = 0 \qquad \ldots\ldots \quad (3.8) \\
&b_0 c_{L+3} + b_1 c_{L+2} + \cdots + b_{M-2} c_{L-M+5} + b_{M-1} c_{L-M+4} + b_M c_{L-M+3} = 0 \\
&\qquad\qquad \vdots \\
&b_0 c_{L+M} + b_1 c_{L+M-1} + \cdots + b_{M-2} c_{L+2} + b_{M-1} c_{L+1} \quad + \quad b_M c_L = 0.
\end{aligned}$$

Sistem persamaan linier tersebut terdiri dari M persamaan untuk M koefisien penyebut yang masing-masing ditunjukkan oleh indeks pada $c_{L+1}, c_{L+2}, \cdots, c_{L+M}$ dan $b_0, b_1, b_2, \cdots, b_M$.

Agar sistem persamaan linier sebagaimana didefinisikan pada persamaan (3.8) tetap konsisten, maka dapat didefinisikan bahwa $c_i = 0$ untuk $i < 0$. Untuk memenuhi syarat yang berlaku pada fungsi rasional bahwa $Q_M(z) \neq 0$, maka sekurang-kurangnya didefinisikan bahwa $b_0 = 1$.

Agar lebih mudah untuk dipahami, sistem persamaan linier tersebut dapat dituliskan ke dalam bentuk matriks berukuran *M* x *M* sebagaimana dinyatakan sebagai bentuk berikut:

$$\begin{pmatrix} c_{L+1} & c_L & \cdots & c_{L-M+3} & c_{L-M+2} & c_{L-M+1} \\ c_{L+2} & c_{L+1} & \cdots & c_{L-M+4} & c_{L-M+3} & c_{L-M+2} \\ c_{L+3} & c_{L+2} & \cdots & c_{L-M+5} & c_{L-M+4} & c_{L-M+3} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ c_{L+M} & c_{L+M-1} & \cdots & c_{L+2} & c_{L+1} & c_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \ldots\ldots.. \quad (3.9)$$

Selanjutnya, perhatikan kembali persamaan di ruas kanan dari persamaan (3.7). Nilai koefisien pembilang $a_0, a_1, \cdots, a_L$ dari persamaan di ruas kanan hasil perkalian silang pada persamaan (3.7) diperoleh dengan menyamakan masing-masing koefisien untuk $z^0, z, z^2, \cdots, z^L$ dari persamaan di ruas kanan dengan koefisien $z^0, z, z^2, \cdots$ dari persamaan di ruas kiri sehingga diperoleh bahwa:

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0, \\ a_1 &= b_0 c_1 + b_1 c_0 \\ &= c_1 + b_1 c_0, \qquad (ambil \quad b_0 = 1) \\ a_2 &= b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 \\ &= c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0, \\ &\vdots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (3.10) \\ a_L &= c_L + \sum_{i=1}^{L} b_i c_{L-i} \\ &= \sum_{i=0}^{L} b_i c_{L-i}\ . \end{aligned}$$

Dengan langkah-langkah sebagaimana diuraikan diatas, maka telah diperoleh koefisien-koefisien pembilang dan penyebut untuk suatu fungsi rasional $R_{L,M}(z)$ sebagaimana dinyatakan oleh persamaan (3.8) dan (3.10) yang kemudian disebut aproksimasi Padé untuk mendekati sebuah fungsi $f(z)$ dengan ekspansi Maclaurin yang dinyatakan dalam deret pangkat $\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i$. Aproksimasi Padé juga biasanya dinyatakan dengan simbol $[L/M]$.

Dari pemaparan-pemaparan di atas, maka langkah-langkah dalam mengkonstruksi aproksimasi Padé yang sesuai dengan deret pangkat (*power series*) adalah sebagai berikut:

1. Mendefinisikan suatu fungsi $f(z)$ ke dalam ekspansi deret Maclaurin.
2. Mengasumsikan suatu fungsi rasional $R_{L,M}(z)$ yang didefinisikan sebagai:

   $$R_{L,M}(z) = \frac{P_L(z)}{Q_M(z)},$$

   dengan $Q_M(z) \neq 0$ untuk menghampiri fungsi $f(z)$ sehingga berlaku

   $$Q_M(z) \cdot f(z) - P_L(z) = O\left[z^{L+M+1}\right].$$

   dimana $O\left(z^{L+M+1}\right)$ merupakan sisa pemotongan untuk suku ke-*(L+M+1).*
3. Membentuk suatu sistem persamaan koefisien untuk masing-masing konstanta pada variabel $z^0, z, z^2, \cdots$.
4. Menentukan koefisien-koefisien pembilang dan penyebut fungsi rasional $R_{L,M}(z)$ dengan menyelesaikan sistem persamaan koefisien yang diperoleh.

3.2 Penerapan Aproksimasi Padé pada Hampiran Fungsi

Berikut ini akan diberikan contoh penerapan aproksimasi Padé untuk menghampiri fungsi eksponensial dan fungsi trigonometri (fungsi sinus dan fungsi kosinus) yang diekspansi ke dalam deret Maclaurin. Pemilihan contoh untuk menghampiri kedua jenis fungsi ini dilakukan karena kedua fungsi tersebut merupakan jenis fungsi transenden yang banyak dikenal dan mudah untuk dipelajari. Contoh-contoh yang diambil merupakan bentuk yang paling sederhana. Untuk masing-masing fungsi dilakukan penghampiran dengan dua kasus yaitu untuk fungsi rasional dengan $L = M = 1$ dan fungsi rasional dengan $L = 2$ dan $M = 1$. Pembagian ini dilakukan sesuai dengan sifat aljabar yang berlaku pada fungsi rasional yaitu $L = M$ dan $L > M$.

1. Fungsi Eksponensial

   Ekspansi deret Maclaurin untuk fungsi eksponensial dinyatakan oleh

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

   atau

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \cdots \qquad \text{……………..} \qquad (3.11)$$

   a. Untuk $L = M = 1$.

      Persamaan eksponensial tersebut bisa dinyatakan sebagai

$$e^z = \frac{a_0 + a_1 z}{b_0 + b_1 z} + O\left(z^3\right) \qquad \text{………………} \qquad (3.12)$$

Dengan demikian, kita dapat menyatakan persamaan (3.11) dan (3.12) dalam bentuk berikut:

$$1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6}+\frac{z^4}{24}+\cdots=\frac{a_0+a_1z}{b_0+b_1z}+O\left(z^3\right)$$

$$\left(b_0+b_1z\right)\left(1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6}+\frac{z^4}{24}+\cdots\right)=\left(a_0+a_1z\right)+O\left(z^3\right)$$

$$\left(b_0+b_1z\right)\left(1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6}+\frac{z^4}{24}+\cdots\right)-\left(a_0+a_1z\right)=O\left(z^3\right)$$

$$\left(b_0-a_0\right)+\left(b_0+b_1-a_1\right)z+\left(\frac{b_0}{2}+b_1\right)z^2+\cdots=O\left(z^3\right)$$

Dengan membentuk sistem persamaan koefisien diperoleh bahwa

$b_0-a_0=0$ maka $b_0=a_0$,

$b_0+b_1-a_1=0$ maka $a_1=\frac{b_0}{2}$,

$\frac{b_0}{2}+b_1=0$ maka $b_1=-\frac{b_0}{2}$.

Selanjutnya, kita akan memperoleh bahwa

$$R_{1,1}(z)=\frac{b_0+\frac{b_0}{2}z}{b_0-\frac{b_0}{2}z}, \qquad (ambil \quad b_0=1)$$

$$=\frac{1+\frac{1}{2}z}{1-\frac{1}{2}z}.$$

Jadi, approksimasi Padé $[1/1]$ untuk fungsi eksponensial adalah

$$e^z \approx \frac{\left(1+\frac{1}{2}z\right)}{\left(1-\frac{1}{2}z\right)}.$$

Secara sepintas, bentuk yang kita peroleh dengan aproksimasi Padé untuk fungsi eksponensial sebagaimana di atas tidak sama dengan ekspansi deret Maclaurin yang telah dinyatakan sebelumnya. Selanjutnya, akan kita tunjukkan bahwa nilai tersebut menghampiri fungsi eksponensial sesuai dengan ekspansi deret Maclaurinnya.

Fungsi $f(z) = e^z \approx \dfrac{\left(1+\frac{1}{2}z\right)}{\left(1-\frac{1}{2}z\right)}$ analitik di setiap titik kecuali pada $z = 2$.

Jadi, fungsi tersebut mempunyai lingkaran kekonvergenan dengan radius $R = 2$. Dalam domain ini, maka bisa dinyatakan bahwa

$$\begin{aligned} f(z) &= f_1(z).f_2(z) \\ &= \left(1+\frac{1}{2}z\right).\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z\right)}, \qquad (|z| < 2). \end{aligned}$$

Dalam domain $|z| < 2$, maka berlaku bahwa $\left|\dfrac{z}{2}\right| < 1$.

Untuk $f_2(z) = \dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z\right)}$, dengan ekspansi Maclaurin kita memperoleh bahwa

$$f_2(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z\right)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{n}$$

$$=1+\frac{z}{2}+\frac{z^{2}}{4}+\frac{z^{3}}{8}+\cdots$$

Sehingga, kita memperoleh bahwa

$$f(z)=f_1(z).f_2(z)$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}z\right).\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{n}$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}z\right)\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^{2}}{4}+\frac{z^{3}}{8}+\cdots\right)$$

$$=\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^{2}}{4}+\frac{z^{3}}{8}+\cdots\right)+\left(\frac{z}{2}+\frac{z^{2}}{4}+\frac{z^{3}}{8}+\cdots\right)$$

$$=1+z+\frac{z^{2}}{2}+\frac{z^{3}}{4}+\cdots, \qquad |z|<2.$$

Persamaan di atas menunjukkan bahwa nilai fungsi eksponensial yang dihampiri dengan aproksimasi Padé sesuai dengan ekspansi Maclaurinnya. Selanjutnya, kita akan menguji kekonvergenan deret tersebut.

Ekspansi Maclaurin untuk fungsi eksponensial dinyatakan oleh

$$f(z)=e^{z}\approx 1+z+\frac{z^{2}}{2}+\frac{z^{3}}{6}+\frac{z^{4}}{24}+\cdots, \qquad |z|<\infty .$$

Dengan aproksimasi Padé, $f(z)=S_n(z)$ diperoleh bahwa

$$f(z)=e^{z}\approx 1+z+\frac{z^{2}}{2}+\frac{z^{3}}{4}+\cdots, \qquad |z|<2.$$

Maka,

$$|R_n(z)|=|f(z)-S_n(z)|$$

$$= \left| \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots\right) - \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{4} + \dots\right) \right|$$

$$= \left| -\frac{z^3}{12} + \dots \right|.$$

Ambil $\varepsilon = \frac{2}{3}$, maka kita akan memperoleh bahwa

$$|R_n(z)| < \varepsilon$$

$$\left| -\frac{z^3}{12} \right| < \frac{2}{3}$$

$$\frac{z^3}{12} < \frac{2}{3}$$

$$z^3 < 8$$

$$z < 2.$$

Dengan demikian, maka fungsi e^z yang mempunyai ekspansi Maclaurin tersebut konvergen seragam dengan $\varepsilon = \frac{2}{3}$ pada domain $D = \{z : |z| < 2\}$.

b. Untuk $L = 2$ dan $M = 1$

Persamaan eksponensialnya bisa dinyatakan sebagai

$$e^z = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2}{b_0 + b_1 z} + O(z^4) \qquad \dots\dots\dots\dots\dots \qquad (3.13)$$

Dengan demikian, kita dapat menyatakan persamaan (3.11) dan (3.13) dalam bentuk berikut:

$$1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \cdots = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2}{b_0 + b_1 z} + O(z^4)$$

$$(b_0+b_1z)\left(1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6}+\frac{z^4}{24}+\cdots\right)=(a_0+a_1z+a_2z^2)+O(z^4)$$

$$(b_0+b_1z)\left(1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6}+\frac{z^4}{24}+\cdots\right)-(a_0+a_1z+a_2z^2)=O(z^4)$$

$$(b_0-a_0)+(b_0+b_1-a_1)z+\left(\frac{b_0}{2}+b_1-a_2\right)z^2+\left(\frac{b_0}{6}+\frac{b_1}{2}\right)z^3+\cdots=O(z^4)$$

Dengan membentuk sistem persamaan koefisien diperoleh bahwa

$b_0-a_0=0$ maka $b_0=a_0$,

$b_0+b_1-a_1=0$ maka $a_1=\frac{2}{3}b_0$,

$\frac{b_0}{2}+b_1-a_2=0$ maka $a_2=\frac{1}{6}b_0$,

$\frac{b_0}{6}+\frac{b_1}{2}=0$ maka $b_1=-\frac{1}{3}b_0$.

Selanjutnya, kita akan memperoleh bahwa

$$R_{2,1}(z)=\frac{\left(b_0+\frac{2}{3}b_0z+\frac{1}{6}b_0z^2\right)}{\left(b_0-\frac{1}{3}b_0z\right)},\qquad (ambil\quad b_0=1)$$

$$=\frac{1+\frac{2}{3}z+\frac{1}{6}z^2}{1-\frac{1}{3}z}.$$

Jadi, aproksimasi Padé $[2/1]$ untuk fungsi eksponensial adalah

$$e^z \approx \frac{\left(1+\frac{2}{3}z+\frac{1}{6}z^2\right)}{\left(1-\frac{1}{3}z\right)}.$$

Seperti dalam kasus $L = M = 1$, secara sepintas bentuk yang kita peroleh dengan aproksimasi Padé untuk fungsi eksponensial sebagaimana di atas juga tidak sama dengan ekspansi deret Maclaurin yang telah dinyatakan sebelumnya. Selanjutnya, akan kita tunjukkan bahwa nilai tersebut menghampiri fungsi eksponensial sesuai dengan ekspansi deret Maclaurinnya.

Fungsi $f(z) = e^z \approx \dfrac{\left(1+\frac{2}{3}z+\frac{1}{6}z^2\right)}{\left(1-\frac{1}{3}z\right)}$ analitik di setiap titik kecuali pada $z = 3$. Jadi, fungsi tersebut mempunyai lingkaran kekonvergenan dengan radius $R = 3$. Dalam domain ini, maka bisa dinyatakan bahwa

$$\begin{aligned} f(z) &= f_1(z).f_2(z) \\ &= \left(1+\frac{2}{3}z+\frac{1}{6}z^2\right).\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}z\right)}, \qquad (|z| < 3). \end{aligned}$$

Dalam domain $|z| < 3$, maka berlaku bahwa $\left|\dfrac{z}{3}\right| < 1$.

Untuk $f_2(z) = \dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{3}z\right)}$, dengan ekspansi Maclaurin kita memperoleh bahwa

$$f_2(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}z\right)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n$$

$$= 1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{9} + \frac{z^3}{27} + \frac{z^4}{81} + \cdots$$

Sehingga, kita memperoleh bahwa

$$f(z) = f_1(z).f_2(z)$$

$$= \left(1 + \frac{2}{3}z + \frac{1}{6}z^2\right).\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n$$

$$= \left(1 + \frac{2}{3}z + \frac{1}{6}z^2\right)\left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{9} + \frac{z^3}{27} + \frac{z^4}{81} + \cdots\right)$$

$$= \left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{9} + \frac{z^3}{27} + \frac{z^4}{81} + \cdots\right) + \left(\frac{2}{3}z + \frac{2}{9}z^2 + \frac{2}{27}z^3 + \frac{2}{81}z^4 + \cdots\right) +$$

$$\left(\frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{18}z^3 + \frac{1}{54}z^4 + \cdots\right)$$

$$= 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{18} + \cdots, \qquad |z| < 3.$$

Persamaan di atas menunjukkan bahwa nilai fungsi eksponensial yang dihampiri dengan aproksimasi Padé sesuai dengan ekspansi Maclaurinnya.

Selanjutnya, kita akan menguji kekonvergenan deret tersebut.

Ekspansi Maclaurin untuk fungsi eksponensial dinyatakan oleh

$$f(z) = e^z \approx 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \cdots, \qquad |z| < \infty.$$

Dengan aproksimasi Padé, $f(z) = S_n(z)$ diperoleh bahwa

$$f(z) = e^z \approx 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{18} + \cdots, \qquad |z| < 3.$$

Maka,

$$\begin{aligned} |R_n(z)| &= |f(z) - S_n(z)| \\ &= \left| \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \ldots\right) - \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{18} + \ldots\right) \right| \\ &= \left| -\frac{z^4}{72} + \ldots \right|. \end{aligned}$$

Ambil $\varepsilon = \frac{9}{8}$, maka kita akan memperoleh bahwa

$$|R_n(z)| < \varepsilon$$

$$\left| -\frac{z^4}{72} \right| < \frac{9}{8}$$

$$\frac{z^4}{72} < \frac{9}{8}$$

$$z^4 < 81$$

$$z < 3.$$

Dengan demikian, maka fungsi e^z yang mempunyai ekspansi Maclaurin tersebut konvergen seragam dengan $\varepsilon = \frac{9}{8}$ pada domain $D = \{z : |z| < 3\}$.

2. Fungsi Sinus

Ekspansi deret Maclaurin untuk fungsi sinus dinyatakan oleh

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots$$

atau

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad (3.14)$$

a. Untuk $L = M = 1$

Persamaan sinusnya bisa dinyatakan sebagai

$$\sin z = \frac{a_0 + a_1 z}{b_0 + b_1 z} + O(z^3) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (3.15)$$

Dengan demikian, kita dapat menyatakan persamaan (3.14) dan (3.15) dalam bentuk berikut:

$$z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots = \frac{a_0 + a_1 z}{b_0 + b_1 z} + O(z^3)$$

$$(b_0 + b_1 z)\left(z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots \right) = (a_0 + a_1 z) + O(z^3)$$

$$(b_0 + b_1 z)\left(z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots \right) - (a_0 + a_1 z) = O(z^3)$$

$$(-a_0) + (b_0 - a_1) z + b_1 z^2 + \cdots = O(z^3)$$

Dengan membentuk sistem persamaan koefisien diperoleh

$-a_0 = 0$ maka $a_0 = 0$,

$b_0 - a_1 = 0$ maka $b_0 = a_1$,

$b_1 = 0$.

Dengan demikian, kita memperoleh bahwa

$$R_{1,1}(z)=\frac{b_0 z}{b_0}=z\,.$$

Jadi, approksimasi Padé $[1/1]$ untuk fungsi sinus adalah

$$\sin z \approx z\,.$$

b. Untuk $L=2$ dan $M=1$

Persamaan sinusnya bisa dinyatakan sebagai

$$\sin z=\frac{a_0+a_1 z+a_2 z^2}{b_0+b_1 z}+O(z^4) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (3.16)$$

Dengan demikian, kita dapat menyatakan persamaan (3.14) dan (3.16) dalam bentuk berikut:

$$z-\frac{z^3}{6}+\frac{z^5}{120}-\cdots=\frac{a_0+a_1 z+a_2 z^2}{b_0+b_1 z}+O(z^4)$$

$$(b_0+b_1 z)\left(z-\frac{z^3}{6}+\frac{z^5}{120}-\cdots\right)=\left(a_0+a_1 z+a_2 z^2\right)+O(z^4)$$

$$(b_0+b_1 z)\left(z-\frac{z^3}{6}+\frac{z^5}{120}-\cdots\right)-\left(a_0+a_1 z+a_2 z^2\right)=O(z^4)$$

$$(-a_0)+(b_0-a_1)z+(b_1-a_2)z^2+\left(-\frac{b_0}{6}\right)z^3+\cdots=O(z^4)$$

Dengan membentuk sistem persamaan koefisien diperoleh

$-a_0=0$ maka $a_0=0$,

$b_0-a_1=0$ maka $b_0=a_1=0$,

$b_1-a_2=0$ maka $b_1=a_2$,

$-\frac{b_0}{6}=0$ maka $b_0=0$.

Dengan demikian, kita memperoleh bahwa

$$R_{2,1}(z) = \frac{b_1 z^2}{b_1 z} = z \ .$$

Jadi, approksimasi Padé $[2/1]$ untuk fungsi sinus adalah

$$\sin z \approx z \ .$$

3. Fungsi Kosinus

Ekspansi deret Maclaurin untuk fungsi sinus dinyatakan oleh

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots$$

atau

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{270} + \cdots \qquad \ldots\ldots.. \quad (3.17)$$

a. Untuk $L = M = 1$

Persamaan kosinusnya bisa dinyatakan sebagai

$$\cos z = \frac{a_0 + a_1 z}{b_0 + b_1 z} + O(z^3) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (3.18)$$

Dengan demikian, kita dapat menyatakan persamaan (3.17) dan (3.18) dalam bentuk berikut:

$$1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{270} + \cdots = \frac{a_0 + a_1 z}{b_0 + b_1 z} + O(z^3)$$

$$(b_0 + b_1 z)\left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{270} + \cdots\right) = (a_0 + a_1 z) + O(z^3)$$

$$(b_0 + b_1 z)\left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{270} + \cdots\right) - (a_0 + a_1 z) = O(z^3)$$

$$(b_0 - a_0) + (b_1 - a_1)z + \left(-\frac{b_0}{2}\right)z^2 + \left(-\frac{b_1}{2}\right)z^3 + \cdots = O(z^3)$$

Dengan membentuk sistem persamaan koefisien diperoleh

$b_0 - a_0 = 0$ maka $b_0 = a_0$,

$b_1 - a_1 = 0$ maka $b_1 = a_1$.

Dengan demikian, kita memperoleh bahwa

$$R_{1,1}(z) = \frac{b_0 + b_1 z}{b_0 + b_1 z} = 1.$$

Jadi, approksimasi Padé $[1/1]$ untuk fungsi kosinus adalah

$$\cos z \approx 1.$$

b. Untuk $L = 2$ dan $M = 1$

Persamaan kosinusnya bisa dinyatakan sebagai

$$\cos z = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2}{b_0 + b_1 z} + O(z^4) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.19)$$

Dengan demikian, kita dapat menyatakan persamaan (3.17) dan (3.19) dalam bentuk berikut:

$$1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{270} + \cdots = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2}{b_0 + b_1 z} + O(z^4)$$

$$(b_0 + b_1 z)\left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{270} + \cdots\right) = (a_0 + a_1 z + a_2 z^2) + O(z^4)$$

$$(b_0 + b_1 z)\left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{270} + \cdots\right) - (a_0 + a_1 z + a_2 z^2) = O(z^4)$$

$$(b_0 - a_0) + (b_1 - a_1)z + \left(-\frac{b_0}{2} - a_2\right)z^2 + \left(-\frac{b_1}{2}\right)z^3 + \cdots = O(z^4)$$

Dengan membentuk sistem persamaan koefisien diperoleh

$b_0 - a_0 = 0$ maka $b_0 = a_0$,

$b_1 - a_1 = 0$ maka $b_1 = a_1 = 0$,

$-\frac{b_0}{2} - a_2 = 0$ maka $a_2 = -\frac{b_0}{2}$,

$-\frac{b_1}{2} = 0$ maka $b_1 = 0$.

Dengan demikian, diperoleh bahwa

$$R_{2,1}(z) = \frac{b_0 - \frac{b_0}{2} z^2}{b_0} \qquad (ambil \quad b_0 = 1)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} z^2.$$

Jadi, approksimasi Padé $[2/1]$ untuk fungsi kosinus adalah

$$\cos z \approx 1 - \frac{1}{2} z^2.$$

3.3 Kajian Keislaman tentang Aproksimasi Fungsi

Islam menempatkan ilmu pengetahuan sebagai sebuah kewajiban bagi umatnya, dimana orang yang mencarinya semakin bergerak mendekat kepada Allah dan menerapkannya sebagai sarana mendapatkan keridhaan-Nya (Al-Hasyimi, 2007: 51). Mempelajari berbagai ilmu pengetahuan contohnya matematika yang sesuai dengan paradigma *ulul albab* tidak cukup hanya berbekal kemampuan intelektual saja, tetapi perlu didukung secara bersamaan dengan kemampuan emosional dan spiritual. Pola pikir deduktif dan logis dalam matematika juga bergantung pada kemampuan intuitif dan imajinatif serta mengembangkan pendekatan rasional, empiris, dan logis (Abdusysyakir, 2007: 24). Hal ini sesuai dengan firman Allah dalam surat Shaad ayat 29 yaitu sebagai berikut:

كِتَٰبٌ أَنزَلۡنَٰهُ إِلَيۡكَ مُبَٰرَكٞ لِّيَدَّبَّرُوٓاْ ءَايَٰتِهِۦ وَلِيَتَذَكَّرَ أُوْلُواْ ٱلۡأَلۡبَٰبِ ٢٩

Artinya: "Ini adalah sebuah kitab yang kami turunkan kepadamu penuh dengan berkah supaya mereka memperhatikan ayat-ayatNya dan supaya mendapat pelajaran orang-orang yang mempunyai fikiran" (Q.S. Shaad: 29).

Tingkat keimanan seseorang merupakan salah satu contoh persoalan yang apabila digambarkan dalam sautu grafik fungsi di suatu titik akan naik dan pada titik tertentu akan turun. Apabila tingkat keimanannya naik, maka seseorang semakin merasa dekat dengan Allah. Demikian sebaliknya, jika tingkat keimanan seseorang turun, maka dia akan semakin jauh dari Allah. Manusia berusaha agar tingkat keimanannya kepada Allah selalu naik. Oleh karena itu, manusia harus banyak berbuat kebaikan dan memperkecil kesalahan-kesalahan (dosa) yang dilakukan.

Seperti yang telah dijelaskan dalam bab-bab sebelumnya bahwa pada realitanya suatu fungsi dalam deret tak hingga tidak dapat dihitung nilainya secara langsung dengan perhitungan biasa. Walaupun dalam kondisi demikian, bukan berarti kita tidak bisa menentukan nilai fungsi tersebut. Islam mengajarkan kepada umatnya untuk pantang menyerah dalam menyelesaikan setiap persoalan karena setiap persoalan selalu memiliki jalan keluar atau solusi. Jika tidak dapat diselesaikan dengan satu cara, maka persoalan tersebut pasti bisa diselesaikan dengan cara yang lain. Sikap pantang menyerah, pantang berputus asa, dan memiliki rasa percaya diri sangat dianjurkan dan merupakan suatu perintah dalam al-Qur’an. Hal ini sebagaimana dinyatakan oleh Allah swt dalam surat al-Hijr ayat 56 berikut ini.

قَالَ وَمَن يَقۡنَطُ مِن رَّحۡمَةِ رَبِّهِۦٓ إِلَّا ٱلضَّآلُّونَ ﴿٥٦﴾

Artinya: “Ibrahim berkata: Tidak ada orang yang berputus asa dari rahmat Tuhan-nya, kecuali orang-orang yang sesat”. (Q. S al-Hijr: 56).

Dalam surat Alam Nasyroh ayat 5 – 6, secara tegas Allah swt menyatakan bahwa sesudah ada kesulitan pasti ada kemudahan. Oleh karena itu, Islam sangat menganjurkan agar umatnya selalu berusaha dan pantang menyerah dalam menghadapi setiap kesulitan sebagaimana berikut ini.

فَإِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرًا ﴿٥﴾ إِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرٗا ﴿٦﴾

Artinya: “Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan (5) Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan (6)”. (Q. S Alam Nasyroh: 5 – 6).

Aproksimasi dalam konsep matematika merupakan sebuah metode yang digunakan untuk melakukan penghampiran (pendekatan) terhadap nilai suatu fungsi yang tidak dapat diperoleh melalui penghitungan secara analitik (eksak). Fungsi tersebut biasanya merupakan fungsi dalam deret pangkat tak hingga. Dengan melakukan aproksimasi, suatu fungsi yang dinyatakan dalam deret pangkat tak hingga dapat diperoleh nilainya karena solusi yang diperoleh dengan menggunakan aproksimasi berbentuk suatu fungsi matematik. Fungsi tersebut dapat dievaluasi untuk menghasilkan nilai dalam bentuk angka atau numerik.

Dengan demikian, aproksimasi merupakan suatu hal yang penting untuk dilakukan.

Suatu fungsi dalam deret pangkat tak hingga yang akan diaproksimasi terlebih dahulu dirubah menjadi bentuk fungsi dalam deret pangkat berhingga dengan memotong beberapa suku deret tersebut agar dapat dievaluasi nilainya. Karena adanya pemotongan suku deret, maka dalam penghitungan dengan aproksimasi dimungkinkan terjadi suatu penyimpangan atau kesalahan terhadap nilai eksaknya. Kesalahan (*error*) yang mungkin terjadi dalam penggunaan aproksimasi dapat diperkecil dengan penggunaan suku-suku dari deret tersebut dengan jumlah yang lebih banyak.

Dalam konsep agama Islam terdapat sebuah upaya yang bisa dilakukan oleh para ulama dalam menentukan hukum suatu persoalan yang tidak terdapat hukumnya dalam nash al-Qur’an ataupun al-Hadits. Upaya tersebut dikenal dengan istilah *ijtihad*. Menurut bahasa, *ijtihad* artinya berusaha sungguh-sungguh sedangkan menurut istilah dalam kaitannya dengan hukum Islam, *ijtihad* adalah pengerahan segala kemampuan yang ada pada seseorang ahli hukum Islam di dalam menetapkan hukum yang amaliyah dari dalil-dalil yang tafsiliyah. Dari pengertian ini, dapat diklasifikasikan dua macam *ijtihad* yaitu *ijtihad* dalam *istinbath* hukum dan penjelasannya serta *ijtihad* dalam penerapan hukum (Djazuli, 1999: 95 – 96). Seperti halnya dalam melakukan aproksimasi, kesalahan yang mungkin timbul dari hasil suatu *ijtihad* diharapkan sangat kecil. Dalam mencapai maksud ini, Islam menganjurkan agar ijtihad dilakukan secara bersama-sama oleh para ahli hukum Islam.

Aproksimasi yang baik adalah aproksimasi yang mempunyai tingkat kesalahan paling kecil sehingga menghasilkan nilai yang sangat mendekati nilai eksak suatu fungsi. Selain itu, aproksimasi yang baik juga harus membutuhkan waktu yang cepat untuk memperoleh hasil yang diinginkan. Oleh karena itu, perhitungan dengan aproksimasi harus dilakukan secara teliti.

Allah swt adalah dzat yang Maha teliti dan Maha cepat perhitungan-Nya sebagaimana dinyatakan dalam al-Qur’an surat Maryam ayat 94 dan surat al-An’am ayat 62 sebagai berikut:

لَّقَدْ أَحْصَىٰهُمْ وَعَدَّهُمْ عَدًّا ﴿٩٤﴾

Artinya: *“Sesungguhnya Allah telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan perhitungan yang teliti”* (Q.S Maryam: 94).

ثُمَّ رُدُّوٓا۟ إِلَى ٱللَّهِ مَوْلَىٰهُمُ ٱلْحَقِّ ۚ أَلَا لَهُ ٱلْحُكْمُ وَهُوَ أَسْرَعُ ٱلْحَـٰسِبِينَ ﴿٦٢﴾

Artinya: *“Kemudian mereka (hamba Allah) dikembalikan kepada Allah, Penguasa mereka yang sebenarnya. Ketahuilah bahwa segala hukum (pada hari itu) kepunyaan-Nya. Dan Dialah pembuat perhitungan yang paling cepat”* (Q.S al-An’am: 62).

Dari kedua ayat diatas dapat diambil sebuah pelajaran penting tentang sifat Allah yaitu teliti dan cepat dalam perhitungan. Menurut ash-Shiddieqy (2000: 2508) bahwa Allah telah menciptakan segala sesuatu menurut ukuran dan hitungan yang telah ditetapkan oleh Allah dan tidak ada satupun keadaan mereka yang tersembunyi bagi Allah.

Manusia sebagai hamba Allah seharusnya juga memiliki sifat teliti dan cepat dalam melakukan perhitungan. Dalam menjalani kehidupannya, manusia harus bertindak secara hati-hati, teliti dalam menyelesaikan sesuatu, dan cepat dalam mengambil keputusan. Dengan bersikap teliti, penuh perhitungan dan berhati-hati dalam menyelesaikan suatu persoalan, peluang terjadinya kesalahan akan menjadi kecil sehingga hasil yang dicapai semakin maksimal.

Dalam ayat yang lain yaitu surat Maryam ayat 84, Allah swt juga menegaskan agar manusia selalu penuh pertimbangan dan teliti dalam bertindak. Sesungguhnya Allah melarang manusia bersikap tergesa-gesa karena tergesa-gesa merupakan perbuatan syetan.

فَلَا تَعۡجَلۡ عَلَيۡهِمۡۖ إِنَّمَا نَعُدُّ لَهُمۡ عَدّٗا ٨٤

Artinya: "Maka janganlah kamu tergesa-gesa memintakan siksa terhadap mereka. Karena sesungguhnnya kami hanya menghitung datangnya (hari siksaan) untuk mereka dengan perhitungan yang teliti" (Q.S Maryam: 84).

Ayat diatas menjelaskan tentang kondisi orang-orang yang menyembah berhala. Allah melarang orang-orang yang beriman agar jangan terburu-buru memohon supaya mereka dibinasakan dan bumi ini dibersihkan dari amalan-amalan mereka yang kotor karena waktu mereka tidak lama lagi. Maka orang-orang yang beriman tidak perlu meminta agar adzab itu disegerakan. Sesungguhnya Allah maha cepat perhitungan-Nya dan Allah telah menghitung semua perbuatan dan ucapan mereka (ash-Shiddieqy, 2000: 2505 – 2506).

Kehidupan ini sangat berharga untuk dijalani. Dalam salah satu hadist, Nabi Muhammad memberikan penjelasan agar manusia mau menjaga lima hal sebelum datang lima hal yang lain. Kelima hal itu adalah sehat sebelum sakit, lapang sebelum sempit, muda sebelum tua, kaya sebelum miskin, dan hidup sebekum mati. Oleh karena itu, sudah seharusnya manusia untuk berhati-hati, penuh pertimbangan dan teliti dalam menjalani kehidupannya dan mempergunakan nikmat yang diberikan oleh Allah dengan sebaik-baiknya untuk beribadah agar tidak mengalami kerugian.

BAB IV

PENUTUP

4.1. Kesimpulan

Dari hasil pembahasan pada bab sebelumnya, maka dapat diambil beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Langkah-langkah mengkonstruksi aproksimasi Padé yang sesuai dengan deret pangkat (*power series*) adalah sebagai berikut:
   a) Mendefinisikan suatu fungsi $f(z)$ ke dalam ekspansi deret Maclaurin.
   b) Mengasumsikan suatu fungsi rasional $R_{L,M}(z)$ yang didefinisikan sebagai:

   $$R_{L,M}(z) = \frac{P_L(z)}{Q_M(z)},$$

   dengan $Q_M(z) \neq 0$ untuk menghampiri fungsi $f(z)$ sehingga berlaku

   $$Q_M(z) \cdot f(z) - P_L(z) = O\left[z^{L+M+1}\right].$$

   dimana $O\left(z^{L+M+1}\right)$ merupakan sisa pemotongan untuk suku ke-*(L+M+1)*.
   c) Membentuk suatu sistem persamaan koefisien untuk masing-masing konstanta pada variabel $z^0, z, z^2, \cdots$.
   d) Menentukan koefisien-koefisien pembilang dan penyebut fungsi rasional $R_{L,M}(z)$ dengan menyelesaikan sistem persamaan koefisien yang diperoleh.
2. Penerapan aproksimasi Padé pada hampiran fungsi eksponensial dan fungsi trigonometri (fungsi sinus dan fungsi kosinus) untuk fungsi rasional dengan

$L = M = 1$ dan fungsi rasional dengan $L = 2$ dan $M = 1$ menghasilkan suatu nilai hampiran (aproksimasi) sebagai berikut:

a) Fungsi Eksponensial

- Untuk $L = M = 1$

$$e^z \approx \frac{\left(1 + \frac{1}{2}z\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}z\right)}.$$

- Untuk $L = 2$ dan $M = 1$

$$e^z \approx \frac{\left(1 + \frac{2}{3}z + \frac{1}{6}z^2\right)}{\left(1 - \frac{1}{3}z\right)}.$$

b) Fungsi Sinus

- Untuk $L = M = 1$

$$\sin z \approx z.$$

- Untuk $L = 2$ dan $M = 1$

$$\sin z \approx z.$$

c) Fungsi Kosinus

- Untuk $L = M = 1$

$$\cos z \approx 1.$$

- Untuk $L = 2$ dan $M = 1$

$$\cos z \approx 1 - \frac{1}{2}z^2.$$

4.2. Saran

Dengan adanya kajian tentang aproksimasi Padé dan contoh penerapannya pada fungsi transenden jenis fungsi eksponensial dan fungsi trigonometri (fungsi sinus dan fungsi kosinus), pembaca juga bisa mengembangkan kajian ini dengan menerapkan aproksimasi Padé untuk menghampiri fungsi pada jenis-jenis yang lain misalnya fungsi aljabar dengan bentuk yang rumit ataupun fungsi trigonometri jenis tangen, dll.

DAFTAR PUSTAKA

Abdusysyakir. 2006. *Ada Matematika dalam Al Qur'an.* Malang: UIN Malang Press.

___________. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika.* Malang: UIN Malang Press.

Al-Hasyimi, Muhammad Ali. 2007. *It's My Life: Hidup Saleh dengan Nilai-nilai Spiritual Islam*. Semarang: Norma Pustaka.

Ash-Shiddieqy, Teungku Muhammad Hasbi. 2000. *Tafsir al-Qur'an an-Nuur 3*. Semarang: PT. Pustaka Rizki Putra.

Azwar, Saifuddin. 2004. *Metode Penelitian*. Yogyakarta: Pustaka Pelajar.

Baker, George A dan Peter Graves-Morris. 1981. *Padé Approximants Part I: Basic Theory*. Canada: Addison-Wesley Publishing Company.

Churchill, Ruel Vance. 1990. *Complex Variables and Applications fifth edition.* Singapura: McGraw-Hill Book.

Djazuli, H. A. dan Nurol Aen. 1999. *Ushul Fiqh: Metodologi Hukum Islam*. Jakarta: Rajawali Pers.

Munir, Rinaldi. 2006. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika Bandung.

Rahman, Afzalur. 2007. *Ensiklopediana Ilmu dalam Al-Qur'an: Rujukan Terlengkap Isyarat-isyarat Ilmiah dalam Al-Qur'an* terjemahan Taufik Rahman. Bandung: Penerbit Mizania.

Rahman, Hairur. 2007. *Indahnya Matematika dalam Al-Qur'an*. Malang: UIN Malang Press.

Roziana, Dewi Farida. 2008. *Solusi Analitik dan Solusi Numerik Persamaan Divusi Konveksi*. Malang: Skripsi Jurusan Matematika UIN Malang.

Santoso, Gatot Iman. 2003. *Aproksimasi Polinomial sebagai Metode Hampiran untuk Fungsi yang Mempunyai Turunan ke-n yang Kontinyu*. Madiun: Universitas Katolik Widya Mandala. Diakses tanggal 9 September 2008.

Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Mishbah: Pesan, Kesan dan Keserasian Al-Qur'an Volume 3.* Jakarta: Lentera Hati.

_______________. 2002. *Tafsir Al-Mishbah: Pesan, Kesan dan Keserasian Al-Qur'an Volume 7.* Jakarta: Lentera Hati.

Soemantri, R. 1994. *Fungsi Variabel Kompleks.* Yogyakarta: Unversitas Gajah Mada.

Spiegel, Murray R. 1964. *Peubah Kompleks dengan Pengenalan Pemetaan Konvormal dan Penerapannya*, terjemahan Koko Martono. Jakarta: Erlangga.

________________. 1999. *Transformasi Laplace*. Jakarta: Erlangga.

Triatmodjo, Bambang. 2002. *Metode Numerik*. Yogyakarta: Beta Offset.