SKRIPSI

PENYELESAIAN INTEGRASI NUMERIK NEWTON COTES DENGAN METODE ADAM DAN MILNE

Oleh:
UMMU FIKRIYAH
NIM. 03510006

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2008

SKRIPSI

PENYELESAIAN INTEGRASI NUMERIK NEWTON COTES DENGAN METODE ADAM DAN MILNE

Oleh:

UMMU FIKRIYAH

NIM. 03510006

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG

2008

PENYELESAIAN INTEGRASI NUMERIK NEWTON COTES DENGAN METODE ADAM DAN MILNE

SKRIPSI

Dianjukan kepada:
Universitas Islam Negeri (UIN) Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
UMMU FIKRIYAH
NIM. 03510006

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
2008

PENYELESAIAN INTEGRASI NUMERIK NEWTON COTES DENGAN METODE ADAM DAN MILNE

SKRIPSI

Oleh:

UMMU FIKRIYAH
NIM. 03510006

Telah diperiksa dan disetujui untuk diuji

Tanggal : 10 April 2008

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Usman Pagalay,M.Si	**Munirul Abidin, M.Ag**
NIP. 150 327 240	**NIP. 150 321 634**

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150318321

PENYELESAIAN INTEGRASI NUMERIK NEWTON COTES
DENGAN METODE ADAM DAN MILNE

SKRIPSI

Oleh:

UMMU FIKRIYAH
NIM. 03510006

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal, 10 April 2008

SUSUNAN DEWAN PENGUJI			TANDA TANGAN
1.	Penguji Utama	Evawati Alisah, M.Pd NIP. 150 291 271	1.
2.	Ketua Penguji	Sri Harini, M.Si NIP. 150 318 321	2.
3.	Sekretaris Penguji	Usman Pagalay, M.Si NIP. 150 327 240	3.
4.	Anggota Penguji	Munirul Abidin, M.Ag NIP. 150 321 634	4.

Mengetahui dan Mengesahkan
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321

MOTTO

فَإِنَّ مَعَ ٱلْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾ إِنَّ مَعَ ٱلْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾ فَإِذَا فَرَغْتَ

فَٱنصَبْ ﴿٧﴾ وَإِلَىٰ رَبِّكَ فَٱرْغَب ﴿٨﴾

Artinya:

Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan,
sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan,
Maka apabila kamu telah selesai (dari sesuatu urusan), kerjakanlah dengan sungguh-sungguh (urusan) yang lain,
dan hanya kepada Tuhanmulah hendaknya kamu berharap.

(QS. Alam Nasyrah 5-8)

Ilmu yang pertama adalah diam, kedua mendengarkan, ketiga menghafal, keempat mengamalkan dan kelima menyebarkannya.

PERSEMBAHAN

Karya ilmiah ini kupersembahkan untuk orang-orang yang aku cintai

Abuya dan Ummy, semoga aku bisa menjadi kebanggaan bagi kalian.

Adekku Rosyida, neng yin dan mas errick, mbak yuli n mas yanto serta ponakan2ku bima n fatima, i love you all.

Baba Syarif yang selalu mensupport penulis dalam segala hal. I love you n I miss you.

Ika, slamet, evita , inay, Dani buleng, mbak asis, mei n yang lainnya yang g bisa penulis sebutkan satu persatu. Terimakasih atas dukungan dan doanya.

Semua temen2 jurusan Matematika angkatan '03 perjuangan, kebersamaan yang kita lakukan bersama Harus dijaga dan dilaminating dalam hati kita masing2.

KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah SWT, atas segala petunjuk, rahmat, hidayah serta karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini dengan lancar.

Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada junjungan Nabi Besar Muhammad SAW, yang telah mengantarkan ummat manusia kepada zaman yang terang benderang, yang kaya akan ilmu pengetahuan.

Dalam keadaan yang penuh dengan perjuangan dan suka cita, dan tak pernah lepas dari orang-orang yang selalu membantu, penulis dapat menyelesaikan penulisan ini dengan tampa hambatan dan halangan yang berarti. Oleh karena itu penulis mengucapkan terima kasih yang tiada terhingga kepada :

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku rektor Universitas Islam Negeri Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, Su., Dsc selaku dekan fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Malang.
3. Sri Harini, M.Si selaku ketua jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Malang.
4. Usman Pagalay, M.Si selaku dosen pembimbing yang telah menyempatkan diri dan meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan dan mengarahkan penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

5. Bapah Munirul Abidin, M.Ag selaku dosen pembimbing keagamaan yang telah menyempatkan diri dan meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan dan mengarahkan penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
6. Segenap bapak dan ibu dosen jurusan matematika yang telah memberikan ilmu pengetahuan, arahan dan dorongan dalam menuntut ilmu di UIN Malang.
7. Abuya dan Ummy atas do'a, motivasi dan kasih sayangnya dalam mendidik serta mengiringi perjalanan hidup penulis hingga dewasa.

Semoga segala kebaikan dijadikan sebagai amalan yang akan mendaptkan balasan yang lebih baik dari Allah SWT dan segala keburukan diampuni oleh Allah SWT.

Penulis berharap, semoga karya tulis yang sedikit ini menjadi amalan jariyah dan dapat bermanfaat bagi penulis khususnya dan bagi pembaca pada umumnya serta bagi perkembangan ilmu pengetahuan di bidang matematika terutama di UIN malang.

Walhamdulillahirobbil'alamin

Malang, April 2008

Penulis

ABSTRAK

Fikriyah, Ummu. 2008: *Penyelesaian Integrasi Numerik Newton Cotes dengan Metode Adam dan Milne.* Skripsi, Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Malang.
Pembimbing Matematika: Usman Pagalay, M.Si., Pembimbing Keagamaan: Munirul Abidin, M.Ag

Kata Kunci: Integrasi Numerik, Newton Cotes, Metode Adam, Metode Milne.

Matematika merupakan salah satu ilmu yang banyak manfaatnya dalam kehidupan sehari-hari. Banyak sekali permasalahan dalam kehidupan yang dapat diselesaikan dengan menggunakan metode matematika. Akan tetapi sering ditemukan masalah-masalah yang penyelesaiannya tidak dapat diatasi hanya dengan menggunakan rumus atau konsep sederhana. Sehingga salah satu penyelesaiannya adalah menggunakan metode numerik.

Perbedaan utama antara metode numerik dengan metode analitik terletak pada dua hal antara lain yaitu solusi dengan metode numerik selalu berbentuk angka, sedangkan metode analitik biasanya menghasilkan solusi dalam bentuk fungsi matematika, dan yang kedua adalah dengan metode numerik hanya diperoleh solusi yang menghampiri atau mendekati solusi sejati sehingga solusi numerik dinamakan juga solusi hampiran (*approximation*). Akan tetapi, solusi hampiran tersebut dapat dibuat seteliti yang diinginkan.

Salah satu penyelesaian dalam metode numerik adalah integrasi numerik yang didasarkan pada rumus integrasi Newton Cotes dengan metode Adam dan Milne. Integral numerik adalah teknik untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang diformulaskan secara matematik dengan cara operasi arithmetik. Berbagai permasalahan dalam bidang ilmu pengetahuan dan teknologi dapat digambarkan dalam bentuk persamaan matematik. Apabila persamaan tersebut mempunyai bentuk sederhana, penyelesaiannya dapat dilakukan secara analitik. Tetapi pada umumnya bentuk persamaan sulit diselesaikan secara numerik. Hasil dari penyelesaian numerik merupakan nilai perkiraan atau pendekatan dari penyelesaian analitik atau eksak

Metode Adam dan Milne adalah suatu metode alternatif dari pendekatan numerik yang digunakan untuk menaksir suatu nilai dari variabel terikat y_{i+1} pada nilai selanjutnya x_{i+1} dengan menggunakan titik-titik sebelumnya $x_i, x_{i-1}, x_{i-2}, \dots, x_{i-n}$.

Metode adam orde keempat adalah suatu metode multistep yang didasarkan pada rumus integrasi Adam dengan menggunakan rumus Adam Bashforth orde keempat sebagai prediktor dan rumus Adam Muolton orde keempat sebagai korektor

Metode Milne adalah metode multistep yang didasarkan pada rumus integrasi Newton Cotes . Metode ini menggunakan rumus terbuka Newton-Cotes tiga titik sebagai prediktor dan rumus tertutup tertutup Newton Cotes tiga titik sebagai korektor.

DAFTAR ISI

BAB IV PENUTUP

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 LATAR BELAKANG

Ilmu matematika menurut kebanyakan orang adalah ilmu yang identik dengan angka atau bilangan. Allah sendiri bahkan sempat bersumpah atas nama bilangan. (Abdussyakir. 2007:93). Hal ini dijelaskan dalam surat Al-Fajr ayat 1 sampai 3.

وَٱلۡفَجۡرِ ۝١ وَلَيَالٍ عَشۡرٖ ۝٢ وَٱلشَّفۡعِ وَٱلۡوَتۡرِ ۝٣

Artinya: Demi fajar,
Dan demi malam yang 10.
Dan demi yang genap dan ganjil.

Ada apa dengan malam yang 10. ada apa dengan bilangan ganjil dan genap. Mengapa Allah sampai bersumpah demikian?

إِنَّا كُلَّ شَيۡءٍ خَلَقۡنَٰهُ بِقَدَرٖ ۝٤٩

Artinya: Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran.

Menurut firman Allah dalam Al-Qur'an surat Al-Qamar ayat 49 di atas sebenarnya, ada ayat dalam Al-Qur'an yang memerintahkan umat Islam untuk mempelajari matematika misalnya ilmu faraidh.

Masalah faraidh merupakan ketentuan Allah SWT yang wajib dilaksanakan oleh umat Islam. Berkenaan dengan masalah faraidh ini Allah SWT berfirman dalam surat An-Nisa' ayat 13 dan 14 sebagai berikut:

تِلْكَ حُدُودُ ٱللَّهِ ۚ وَمَن يُطِعِ ٱللَّهَ وَرَسُولَهُۥ يُدْخِلْهُ جَنَّـٰتٍ تَجْرِى مِن تَحْتِهَا
ٱلْأَنْهَـٰرُ خَـٰلِدِينَ فِيهَا ۚ وَذَٰلِكَ ٱلْفَوْزُ ٱلْعَظِيمُ ﴿١٣﴾ وَمَن يَعْصِ ٱللَّهَ وَرَسُولَهُۥ
وَيَتَعَدَّ حُدُودَهُۥ يُدْخِلْهُ نَارًا خَـٰلِدًا فِيهَا وَلَهُۥ عَذَابٌ مُّهِينٌ ﴿١٤﴾

Artinya: (Hukum-hukum tersebut) itu adalah ketentuan-ketentuan dari Allah. Barangsiapa taat kepada Allah dan Rasul-Nya, niscaya Allah memasukkannya kedalam syurga yang mengalir didalamnya sungai-sungai, sedang mereka kekal di dalamnya; dan itulah kemenangan yang besar.
Dan barangsiapa yang mendurhakai Allah dan Rasul-Nya dan melanggar ketentuan-ketentuan-Nya, niscaya Allah memasukkannya ke dalam api neraka sedang ia kekal di dalamnya; dan baginya siksa yang menghinakan.

Bukankah telah disebutkan dengan tegas bahwa masalah faraidh adalah ketentuan dari Allah yang wajib dilaksanakan. Untuk dapat memahami dan dapat melaksanakan faraidh dengan baik maka hal yang perlu difahami dulu adalah konsep matematika yang berkaitan dengan bilangan pecahan, pecahan senilai, konsep keterbagian, faktor persekutuan terbesar (FPB), kelipatan persekutuan terkecil (KPK) dan konsep pengukuran yang meliputi pengukuran luas, berat dan volume. Pemahaman terhadap konsep-konsep tersebut akan memudahkan untuk memahami masalah faraidh. Jadi adanya permasalahan faraidh dapat diartikan bahwa umat Islam perlu mempelajari matematika (Abdussyakir. 2007:96).

Selain masalah faraidh juga tentang masalah diciptakannya matahari dan bulan salah satunya agar manusia dapat mengetahui perhitungan waktu, sebagamana firman Allah dalam sirat Yunus ayat 5.

هُوَ ٱلَّذِى جَعَلَ ٱلشَّمْسَ ضِيَآءً وَٱلْقَمَرَ نُورًا وَقَدَّرَهُۥ مَنَازِلَ لِتَعْلَمُوا۟ عَدَدَ
ٱلسِّنِينَ وَٱلْحِسَابَ ۚ مَا خَلَقَ ٱللَّهُ ذَٰلِكَ إِلَّا بِٱلْحَقِّ ۚ يُفَصِّلُ ٱلْءَايَٰتِ لِقَوْمٍ يَعْلَمُونَ
﴿٥﴾

Artinya: Dia-lah yang menjadikan matahari bersinar dan bulan bercahaya dan ditetapkan-Nya manzilah-manzilah (tempat-tempat) bagi perjalanan bulan itu, supaya kamu mengetahui bilangan tahun dan perhitungan (waktu). Allah tidak menciptakan yang demikian itu melainkan dengan hak. Dia menjelaskan tanda-tanda (kebesaran-Nya) kepada orang-orang yang mengetahui.

Berbagai permasalahan dalam bidang matematika digambarkan dalam bentuk persamaan matematika. Apabila persamaan tersebut sederhana, maka bisa diselesaikan secara analitik. Tetapi jika persamaan tersebut sulit diselesaikan dengan analitik, maka salah satu solusinya adalah diselesaikan dengan dengan numerik. Penghitungan numerik adalah suatu tehnik untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang diformulasikan secara matematik dengan cara operasi hitungan. Hasil dari penyelesaian numerik merupakan nilai perkiraan atau pendekatan dari penyelesaian analitik atau eksak. Nilai kesalahan tersebut diupayakan sekecil mungkin terhadap tingkat kesalahan yang ditetapkan.

Pada umumnya perhitungan secara numerik tidak mengutamakan diperoleh jawaban eksak, tetapi mengusahakan perumusan metode yang menghasilkan jawaban pendekatan yang berbeda dari jawaban yang eksak sebesar suatu nilai yang dapat diterima berdasarkan pertimbangan praktis, tetapi cukup dapat memberikan penghayatan pada persoalan yang dihadapi.

Dalam penghitungan numerik terdapat beberapa bentuk proses hitungan untuk menyelesaikan suatu tipe persamaan matematik. Operasi hitungan dilakukan dengan iterasi (pengulangan) yang banyak dan berulang-ulang. Oleh karena itu diperlukan bantuan komputer untuk melaksanakan operasi hitung tersebut.

Penyelesaian dengan pendekatan numerik dari persoalan integrasi, didasarkan pada dua metode yaitu metode satu langkah (*Onestep*) dan metode banyak langkah (*Multistep*). Pada metode satu langkah (*Onestep*) hanya digunakan nilai tunggal x_i untuk menaksir nilai dari variable terikat y_{i+1} pada nilai selanjutnya x_{i+1}. Sedangkan pada metode banyak langkah (*Multistep*) digunakan nilai sebelumnya $x_i, x_{i-1}, x_{i-2}, \ldots, x_{i-n}$ untuk menaksir y_{i+1}.

Pada metode banyak langkah (*Multistep*) dikenal beberapa metode antara lain metode Adam, metode Milne dan Metode Hamming. Dalam hal ini yang lebih ditekankan adalah pada metode Adam dam metode Milne. Metode Adam yang digunakan adalah metode Adam Bashforth orde 4 sebagai prediktor dan Adam Moulton orde 4 sebagai korektor sedangkan metode Milne didasarkan pada rumus terbuka Newton Cotes tiga titik dan rumus tertutup Newton Cotes tiga titik untuk menyelesaikan sebuah persamaan matematika.

Ada beberapa persamaan yang sangat kompleks sehingga tidak bisa diselesikan dengan metode satu langkah (*Onestep*) dan hanya bisa dilakukan dengan metode banyak langkah (*Multistep*). Salah satunya adalah dengan integrasi numerik yang didasarkan pada rumus integrasi Newton Cotes dengan metode Adam dan Milne.

Berdasarkan permasalahan diatas, penulis sangat tertarik untuk mengkaji bagaimana mencari penyelesaian integrasi numerik dengan menggunakan metode multistep. Untuk itu skripsi ini penulis beri judul **Penyelesaian Integrasi Numerik Newton Cotes dengan Metode Adam dan Milne.**

1.2 RUMUSAN MASALAH

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan maka rumusan masalah dalam penulisan ini adalah Bagaimana menyelesaikan integrasi numerik Newton Cotes dengan metode Adam dan Milne.

1.3 TUJUAN

Sesuai dengan latar belakang dan rumusan masalah, maka tujuan dari penulisan skripsi ini adalah Untuk mendeskripsikan prosedur atau penyelesaian dari integrasi numerik Newton Cotes dengan metode Adam dan Milne.

1.4 BATASAN MASALAH

Batasan penulisan ini adalah:

1. Penggunaan metode Adam orde keempat yang didasarkan pada rumus integrasi Adam dengan menggunakan rumus Adam Bashforth orde-4 sebagai prediktor dan rumus Adam Moulton orde-4 sebagai korektor.
2. Penggunanaan metode Milne didasarkan pada rumus integrasi Newton Cotes . Rumus terbuka Newton Cotes tiga titik sebagai predictor dan rumus tertutup Newton Cotes tiga titik sebagai korektor.

1.5 MANFAAT

Manfaat penulisan ini diantaranya adalah sebagai berikut:

1. Sebagai sarana pengembangan ilmu pengetahuan yang dimiliki tentang metode Adam dan metode Milne.
2. Sebagai wahana pengembangan ilmu perhitungan matematika dengan menggunakan software Matlab.
3. Menambah wawasan tentang keterkaitan antara berbagai ilmu matematika, terutama tentang integrasi numerik Newton Cotes dengan metode Adam dan Milne.

1.6 METODE PEMBAHASAN

Metode merupakan cara utama yang akan ditempuh untuk menemukan jawaban dari suatu permasalahan. Berdasarkan hal tersebut, maka dalam penulisan skripsi ini, penulis menggunakan metode kajian literatur atau kepustakaan, yaitu penelitian yang dilakukan di perpustakaan yang bertujuan untuk mengumpulkan data dan informasi dengan bermacam materiil yang terdapat di perpustakaan. Buku-buku matematika seperti: An Introduction Numerical Methods for Angineers With Software and Programming Application Fourth Edition, Metode Numerik, Numerical Analysis Second Edition, Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer, Pengantar Komputasi Numerik dengan Matlab dan referensi lain yang relevan dengan pembahasan merupakan referensi pendukung yang digunakan oleh penulis.

Adapun langkah-langkah penulisan yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Merumuskan masalah

   Sebelum memulai kegiatan, penulis membuat rancangan terlebih dahulu. Penelitian berawal dari suatu masalah yang akan dijawab, dipecahkan, diatasi dan dicari jalan keluarnya secara ilmiah.

2. Mengumpulkan data

   Dengan menggunakan metode kepustakaan, penulis mengumpulkan bahan atau sumber dan informasi dengan cara membaca dan memahami literatur yang berkaitan dengan integrasi numerik Newton Cotes dengan metode adam dan Milne.

3. menyelesaikan contoh

   di sini, penulis menyelesaikan contoh dengan cara mengaitkan materi yang sedang dikaji.

4. Membuat kesimpulan

   Kesimpulan merupakan gambaran langkah dari pembahasan atas apa yang sedang ditulis. Kesimpulan didasarkan pada data yang telah dikumpulkan dan merupakan jawaban dari masalah yang dikemukakan.

5. Membuat laporan

1.7 SISTEMATIKA PEMBAHASAN

Untuk memperoleh gambaran yang dapat dimengerti dan menyeluruh mengenai rancangan isi dari skripsi ini, secara global dapat dilihat dari sistematika pembahasan di bawah ini :

Bab I membahas tentang Pendahuluan, yang berisikan tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, metode penelitian dan sistematika pembahasan.

Bab II merupakan kajian pustaka yang berisi tentang teori-teori yang mendukung pembahasan.

Bab III merupakan pembahasan yang berisi tentang langkah-langkah dalam menyelesaikan integrasi numerik Newton Cotes dengan metode Adam dan Milne secara numerik dan komputer dengan menggunkan software Matlab.

Bab IV adalah Penutup, yang berisikan tentang kesimpulan dan saran-saran yang diberikan untuk penulisan selanjutnya.

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Definisi Deret Taylor

Deret Taylor merupakan dasar untuk menyelesaikan masalah dalam metode numerik, terutama penyalesaian persamaan differensial (Triatmodjo. B., 2002).

Misalkan fungsi $f^{(k)}$ menyatakan turunan ke-*k* dari fungsi *f*. Jika *f* beserta dengan $f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}, \ldots, f^{(n+1)}$ semuanya kontinu di *[A, B]* dan x_0 suatu titik di *[A, B]*, maka setiap *x* di *[A, B]* berlaku

$$f(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f^{(2)}(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)n + R_n(x) \tag{2.1}$$

Dengan:

$f(x)$	: fungsi di titik x_i
$f(x_0)$	: fungsi di titik x_{i+1}
$f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}, \ldots, f^{(n+1)}$	: turunan pertama, kedua, ketiga, …, ke-*n* dari fungsi
R_n	: kesalahan pemotongan
!	: operator perkalian

Dengan suku sisa $R_n(x)$ sama dengan:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x - t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \tag{2.2}$$

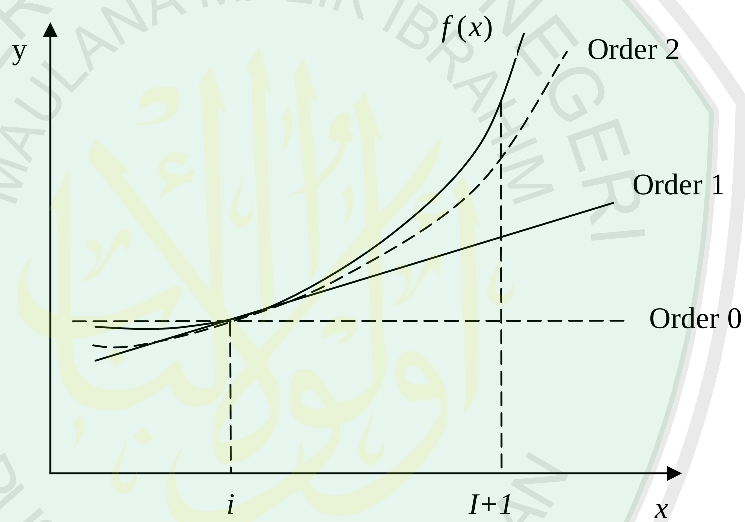
Pada deret ini dicatat hal-hal sebagai berikut:

$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ tidak lain adalah galat (*error*) yang terjadi karena pendekatan $f(x)$ oleh $P_n(x)$.

Jika M menyatakan batas untuk $f^{(n+1)}$ di *[A, B]* maka $R_n(x)$ terbatas oleh:

$$\left|R_n(x)\right| \le \frac{M}{(n+1)!}\left|x - x_0\right|^{(n+1)} \qquad (2.3)$$

(Djauhari., 1991)



Gambar 2.1. Perkiraan suatu fungsi dengan deret Taylor

2.2 Definisi Beda mundur

Salah satu bentuk beda mundur yang dihubungkan dengan rumus interpolasi adalah beda mundur yang didefinisikan

$$\nabla f(z) = f(z) - f(z-h) \qquad (2.4)$$

Untuk $r \ge 0$

$$\nabla^{r+1} f(z) = \nabla^r f(z) - \nabla^r f(z-h)$$

Nilai tersebut disebut beda mundur dari f pada z dan ∇ disebut operator beda mundur. Untuk $x_i = x_0 - ih$ dengan $i = 0, 1, 2, \dots$

$$\nabla f(x_i) = f(x_i) - f(x_{i+1})$$

$$\nabla f(x_i) = f_i - f_{i+1} \qquad\qquad f(x_i) = f_i$$

(Atkinson, 1988)

2.3 Integrasi Numerik

Integrasi numerik merupakan metode pendekatan dari integrasi analitis. Integrasi numerik dilakukan apabila integral tidak dapat atau sulit diselesaikan secara analitis atau fungsi yang diintegralkan tidak diberikan dalam bentuk analitis, tetapi secara numerik dalam bentuk angka atau tabel.

Integrasi numerik merupakan integral tertentu yang didasarkan pada hitungan perkiraan. Hitungan dilakukan dengan membagi luasan dalam sejumlah pias kecil. Luas total adalah jumlah dari luas semua pias.

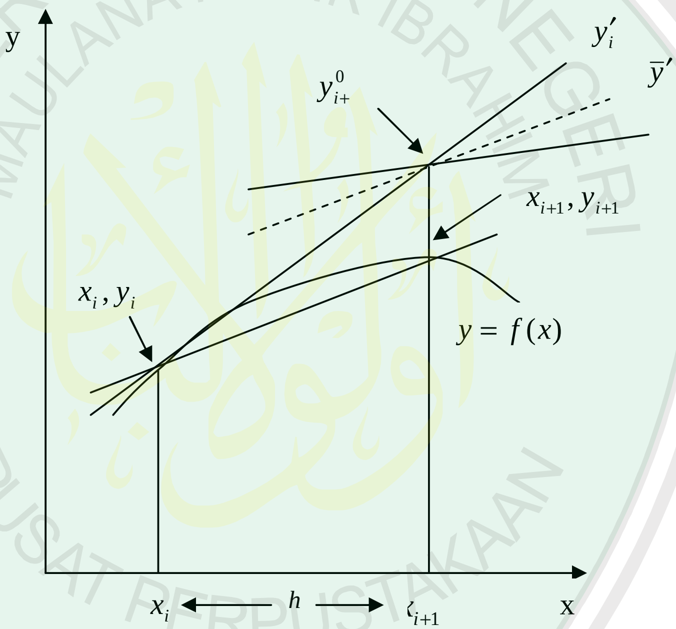
Metode integrasi numerik dapat dibedakan dalam dua kelompok, yaitu metode Newton Cotes dan metode Gauss. Metode Newton Cotes membagia absis dalam jarak interval yang tetap sedangkan metode Gauss digunakan untuk mengintegralkan suatu fungsi, tidak untuk tabel data (Triatmodjo. B., 1995).

2.4 Metode Onestep

Metode onestep adalah suatu metode yang dapat digunakan untuk menghitung y_{i+1} jika hanya satu titik (x_i, y_i) dan interval $(\Delta x = x_{i+1} - x_i)$ yang diketahui (Triatmodjo. B., 2002).

2.4.1 Definisi Metode Huen (predictor-korektor)

Metode Huen merupakan modifikasi dari metode Euler. Modifikasi dilakukan dalam memperkirakan kemiringan Φ. Metode ini memperkirakan dua turunan pada intervalnya, yaitu pada ujung awal dan akhir. Kedua turunan tersebut kemudian diratakan untuk mendapatkan perkiraan kemiringan yang lebih baik (Gambar 2.2)



Gambar 2.2. Metode Huen

Berdasarkan metode Euler, kemiringan pada ujung awal dari interval

$$y'_{i+1} = f(x_i, y_i) \quad (2.5)$$

Digunaan untuk ekstrapolasi ke nilai y_{i+1}:

$$y^0_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\Delta x \quad (2.5)$$

Nilai y^0_{i+1} dari persamaan (2.5) tersebut kemudian digunakan untuk memperkirakan kemiringan pada ujung akhir interval,

$$y'_{i+1} = f\left(x_{i+1}, y_{i+1}^{0}\right) \tag{2.6}$$

Kedua kemiringan yang diberikan oleh persamaan (2.4) dan (2.6) kemudian digabungkan untuk memperoleh kemiringan rata-rata pada interval,

$$\bar{y}' = \frac{y'_i + y'_{i+1}}{2} = \frac{f(x_i, y_i) + f\left(x_{i+1}, y_{i+1}^{0}\right)}{2}$$

Kemiringan rata-rata tersebut kemudian digunakan untuk ekstrapolasi linier dari y_i ke y_{i+1} dengan menggunakan metode Euler,

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f\left(x_{i+1}, y_{i+1}^{0}\right)}{2}\Delta x \tag{2.7}$$

Metode Huen ini disebut juga metode prediktor-korektor. Persamaan (2.5) disebut persamaan prediktor, sedangkan persamaan (2.7) disebut persamaan korektor (Triatmodjo. B., 2002).

2.4.2 Definisi Metode Runge-Kutta

Metode Runge-Kutta memberikan ketelitian hasil yang lebih besar dan tidak memerlukan turunan dari fungsi. Bentuk umum dari metode Runge-Kutta adalah:

$$y_{i+1} = y_i + \Phi(x_i, y_i, \Delta x)\Delta x \tag{2.8}$$

Dengan $\Phi(x_i, y_i, \Delta x)$ adalah fungsi pertambahan yang merupakan kemiringan rerata pada interval. Fungsi pertambahan dapat ditulis dalam bentuk umum:

$$\Phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n \tag{2.9}$$

Dengan a adalah konstanta dan k adalah:

$$k_1 = f(x_i y_i) \tag{2.9a}$$

$$k_2 = f\left(x_i + p_1\Delta x, y_i + q_{11}k_1\Delta x\right) \quad (2.9b)$$

$$k_3 = f\left(x_i + p_2\Delta x, y_i + q_{21}k_1\Delta x + q_{22}k_2\Delta x\right) \quad (2.9c)$$

.

.

.

$$k_3 = f\left(x_i + p_{n-1}\Delta x, y_i + q_{n-1}k_1\Delta x + q_{n-1,2}k_2\Delta x + \cdots + q_{n-1,n-1}k_{n-1}\Delta x\right) \quad (2.9d)$$

Persamaan tersebut menunjukkan bahwa nilai *k* mempunyai hubungan berurutan. Nilai k_1 muncul dalam persamaan untuk menghitung k_2, yang juga muncul dalam persamaan untuk menghitung k_3, dan seterusnya. Hubungan yang berurutan ini membuat metode Runge-Kutta adalah efisien dalam hitungan.

Ada beberaa tipe mode Runge-Kutta yang tergantung pada nilai *n* yang digunakan. Untuk $n = 1$, yang disebut metode Runge-Kutta orde satu,

$$\Phi = a_1 k_1 = a_1 f\left(x_i y_i\right)$$

Untuk $a_1 = 1$ maka

$$y_{i+1} = y_i + f\left(x_i, y_i\right)\Delta x \quad (2.10)$$

Yang sama dengan metode Euler.

Di dalam metode Runge-Kutta, setelah nilai *n* ditetapkan, kemudian nilai *a*, *p* dan *q* dicari dengan menyamakan persamaan (2.8) dengan suku-suku dari deret Taylor. Selanjutnya akan diturunkan metode Runge-Kutta orde dua.

Metode Runge-Kutta orde dua mempunyai bentuk

$$y_{i+1} = y_i + \left(a_1 k_1 + a_2 k_2\right)\Delta x \quad (2.10a)$$

Dengan

$$k_1 = f(x_i, y_i) \tag{2.10b}$$

$$k_2 = f(x_i + p_1\Delta x, y_i + q_{11}k_1\Delta x) \tag{2.10c}$$

Nilai a_1, a_2, p_1, dan q_{11} dievaluasi dengan menyamakan persamaan (2.10a) dengan deret Taylor orde 2, yang mempunyai bentuk:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\Delta x + f'(x_i, y_i)\frac{\Delta x}{2} \tag{2.11}$$

Dengan $f'(x_i y_i)$ dapat ditentukan dari hukum berantai *(chain rule)* berikut:

$$f'(x_i y_i) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} \tag{2.12}$$

Substitusi persamaan (2.12) ke dalam persamaan (2.11) menghasilkan:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)\frac{\Delta x}{2} \tag{2.13}$$

Di dalam metode Runge-Kutta ini dicari nilai a_1, a_2, p_1 dan q_{11} sedemikian sehingga persamaan (2.10a) ekivalen dengan persamaaan (2.13). untuk itu digunakan deret Taylor untuk mengembangkan persamaan ((2.10c). deret Taylor untuk fungsi dengan dua variable mempunyai bentuk:

$$g(x+r, y+s) = g(x, y) + \frac{\partial g}{\partial x} + s\frac{\partial g}{\partial y} + \cdots$$

Dengan cara tersebut persamaan (2.10c) dapat ditulis dalam bentuk:

$$f(x_i, p_1\Delta x, y_i + q_{11}k_1\Delta x) = f(x_i, y_i) + p_1\Delta x\frac{\partial f}{\partial x} + q_{11}k_1\Delta x\frac{\partial f}{\partial y} + 0(\Delta x^2)$$

Bentuk diatas dan persamaan (2.10b) disubstitusikan kedalam persamaan (2.10a) sehingga menjadi:

$$y_{i+1} = y_i + a_1 \Delta x f(x_i, y_i) + a_2 \Delta x f(x_i, y_i) + a_2 p_1 \Delta x^2 \frac{\partial f}{\partial x}$$
$$+ a_2 q_{11} \Delta x^2 f(x_i, y_i) \frac{\partial f}{\partial x} + 0(\Delta x^3)$$

Atau

$$y_{i+1} = y_i + [a_1 f(x_i, y_i) + a_2 f(x_i, y_i)]\Delta x + [a_2 p_1 \frac{\partial f}{\partial x}$$
$$+ a_2 q_{11} f(x_i, y_i) \frac{\partial f}{\partial x}]\Delta x^2 + 0(\Delta x^3) \tag{2.14}$$

Dengan membandingkan persamaan (2.13) dan (2.14), dapat disimpulkan bahwa kedua persamaan ekivalen apabila:

$$a_1 + a_2 = 1 \tag{2.15a}$$

$$a_2 p_1 = \frac{1}{2} \tag{2.15b}$$

$$a_2 q_{11} = \frac{1}{2} \tag{2.15c}$$

Sistem persamaan diatas terdiri dari tiga persamaan mengandung empat bilangan tak diketahui, sehingga tidak bisa diselesaikan. Untuk itu salah satu bilangan tak diketahui ditetapkan, dan kemudian di cari ketiga bilangan lain. Dianggap bahwa a_2 ditetapkan, sehingga persamaan (2.15a) sampai (2.15c) dapat diselesaikan dengan menghasilkan:

$$a_1 = 1 - a_2 \tag{2.16a}$$

$$p_1 = q_{11} = \frac{1}{2a_2} \tag{2.16b}$$

Bila dipilih $a_2 = \frac{1}{2}$, maka

$$a_1 = \frac{1}{2}$$
$$p_1 = q_{11} = 1$$

Sehingga persamaan (2.10a) menjadi

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)\Delta x \tag{2.17a}$$

Dengan

$$k_1 = f\left(x_i, y_i\right) \tag{2.17b}$$

$$k_2 = f\left(x_i + \Delta x, y_i + k_1\Delta x\right) \tag{2.17c}$$

Dengan k_1 adalah kemiringan pada awal interval dan k_2 adalah kemiringan pada akhir interval. Persamaan (2.17a) adalah salah satu dari rumus Runge Kutta order dua yang sama dengan metode huen (Triatmodjo. B., 2002).

Rumus-rumus Runge-Kutta untuk order yang lebih tinggi dapat diturunkan dengan cara yang sama dengan pada order dua. Rumus Runge-Kutta yang dipakai dalam permasalahan disini adalah rumus Runge-Kutta orde empat yang didefinisikan sebagai berikut

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \tag{2.18}$$

Dengan

$$k_1 = \Delta x f\left(x_i, y_i\right) \tag{2.19a}$$

$$k_2 = \Delta x f\left(x_i + \frac{1}{2}\Delta x, y_i + \frac{1}{2}k_1\right) \tag{2.19b}$$

$$k_3 = \Delta x f\left(x_i + \frac{1}{2}\Delta x, y_i + \frac{1}{2}k_2\right) \tag{2.19c}$$

$$k_4 = \Delta x f\left(x_i + \Delta x, y_i + k_3\right) \tag{2.19d}$$

Rumus Runge-Kutta orde empat ini digunakan sebagai pemulai (*starting*) dalam metode Adam dan Milne, yaitu untuk menghitung nilai awal yang diperlukan dalam metode Adam dan Milne (Chapra dan Canale,2002).

2.5 Metode Multistep

Metode multistep adalah suatu metode alternatif dari pendekatan numerik yang digunakan untuk menaksir suatu nilai dari variabel terikat y_{i+1} pada nilai selanjutnya x_{i+1} dengan menggunakan titik-titik sebelumnya x_i, x_{i-1}, x_{i-2}, …, x_{i-n} (Chapra dan Canale,2002).

2.5.1 Definisi Metode Non-Self-Starting Huen

Metode ini merupakan pengembangan dari metode prediktor-korektor (Huen) dengan memperbaiki kesalahan lokal pada prediktornya, yaitu dengan mengembangkan suatu prediktor yang mempunyai kesalahan lokal $O(\Delta x^3)$ (Chapra dan Canale,2002)..

Prediktor:

$$y_{i+1}^0 = y_{i-1}^m + f\left(x_i, y_i^m\right) 2\Delta x \tag{2.20}$$

Korektor:

$$y_{i+1}^j = y_i^m + \frac{f\left(x_i y_i^m\right) + f\left(x_{i+1}, y_{i+1}^j\right)}{2} \Delta x$$

(Untuk $j = 1, 2, \ldots, m$) (2.21)

Disini akan diturunkan rumus Non Self starting Huen secara sistematis. Penurunan didasarkan pada penyelesaian persamaan diferensial biasa secara umum:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Persamaan tersebut juga bisa diselesaikan dengan mengalikan kedua ruas dengan *dx* dan mengintegralkan diantara nilai limit *i* dan *i + 1*.

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} dy = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)dx$$

Hasil dari integrasi persamaan diatas adalah:

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)dx \qquad (2.22)$$

Integrasi numerik sebagaimana yang dikembangkan terdahulu digunakan untuk menghitung integral pada persamaan (2.22). sebagai contoh, aturan trapesium dapat juga digunakan untuk menghiting integral seperti pada:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) \cong \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})}{2} \Delta x \qquad (2.23)$$

Dengan $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ adalah interval (*step size*). Substitusikan persamaan (2.23) ke persamaan (2.22) dihasilkan:

$$y_{i+1} = y_i \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})}{2} \Delta x$$

Yang mana merupakan persamaan korektor untuk Huen. Karena persamaan ini didasarkan pada aturan trapesium, maka kesalahan pemotongan lokal diambil langsung dari tabel 2.1:

$$E_c = -\frac{1}{12}\Delta x^3 y'''(\xi_c) = -\frac{1}{12}\Delta x^3 f''(\xi_c) \qquad (2.24)$$

Dimana subkrip *c* menandakan bahwa adalah kesalahan dari korektor (Chapra dan Canale,2002).

Pendekatan serupa dapat juga digunakan untuk menurunkan prediktor. Dalam hal ini, pendekatan integrasinya adalah dari *i – 1* sampai *i + 1*:

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} dy = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)dx$$

Yang mana dapat diintegralkan dan dirubah untuk mendapatkan:

$$y_{i+1} = y_{i-1} + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x, y)dx \qquad (2.25)$$

Dengan memakai rumus tertutup dari tabel 2.1, rumus terbuka Newton Cotes (tabel 2.2) dapat digunakan untuk menghitung integral

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x, y)dx = 2\Delta x f(x_i, y_i) \qquad (2.26)$$

Yang mana disebut dengan metode nilai tenganh. Dengan mensubstitusikan persamaan (2.26) ke dalam persamaan (2.25) di dapatkan

$$y_{i+1} = y_{i-1} + f(x_i y_i)2\Delta x$$

Yang mana merupakan prediktor dari rumus Non Self Starting Huen. Sebagaimana dengan korektor, kesalahan pemotongan lokal dapat diambil langsung dari tabel 2.2

$$E_p = -\frac{1}{3}\Delta x^3 y'''(\xi_p) = -\frac{1}{3}\Delta x^3 f''(\xi_p) \qquad (2.27)$$

Dimana subskrip p menunjukkan kesalahan dari prediktor. Jadi pada metode Non Self Starting Huen mempunyai kesalahan pemotongan dengan order yang sama (Chapra dan Canale,2002).

2.6 Rumus Integrasi Metode Multistep

Metode Non Self Starting Huen merupakan salah dari metode multistep. Dengan menggunakan rumus integral terbuka (metode titik tengah) untuk membuat estimasi awal. Langkah prediktor ini memerlukan titik data sebelumnya. Kemudian dengan rumus iteratif untuk memperbaiki penyelesaian.

Untuk mendapatkan hasil yang lebih baik dari penyelesaian metode multistep digunakan rumus integral dengan order yang lebih tinggi sebagai prediktor dan korektor. Rumus integrasi Newton Cotes dan rumus integrasi Adam akan digunakan untuk tujuan ini (Chapra dan Canale,2002).

2.6.1 Definisi Rumus Newton Cotes

Rumus Newton Cotes mengestimasi integral sepanjang satu rentang interval dari beberapa titik. Integral ini selanjutnya digunakan untuk membuat perhitungan dari awal interval sampai akhir.

Rumus integrasi Newton Cotes didasarkan pada beberapa pendekatan. Rumus tersebut terdiri dari dua tipe: bentuk terbuka dan bentuk tertutup.

Rumus terbuka:

Untuk n titik data yang sama, rumus terbuka dapat ditunjukkan dalam bentuk penyelesaian dari persamaan diferensial biasa, dalam hal ini persamaan umumnya adalah:

$$y_{i+1} = y_{i-n} + \int_{x_{i-n}}^{x_{i+1}} f_n(x)dx \qquad (2.28)$$

Dimana $f_n(x)$ adalah interpolasi polinomial dengan orde n. evaluasi dari integral menghasikan rumus terbuka Newton Cotes orde-n (tabel 2.2), jika $n = 1$

$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2\Delta x f_i \qquad (2.29)$$

Dimana f_i adalah kependekan untuk $f(x_i,y_i)$, sehingga persamaan differensial dievaluasi pada x_i dan y_i. persamaan (2.29) mengacu pada metode nilai tengah dan dipakai sebelumnya sebagai prediktor pada metode Non Self starting Huen,

Untuk $n = 2$, $\quad y_{i+1} = y_{i-2} + \dfrac{3\Delta x}{2}\left(f_i + f_{i-1}\right)$

Untuk $n = 3$, $\quad y_{i+1} = y_{i-3} + \dfrac{4\Delta x}{3}\left(f_i - f_{i-1} + 2 f_{i-2}\right) \qquad (2.30)$

Persamaan (2.30) secara grafis dalam gambar 3a

Rumus tetutup:

Rumus tertutup secara umum dapat diberikan:

$$y_{i+1} = y_{i-n+1} + \int_{x_{i-n+1}}^{x_{i+1}} f_n(x)dx \qquad (2.31)$$

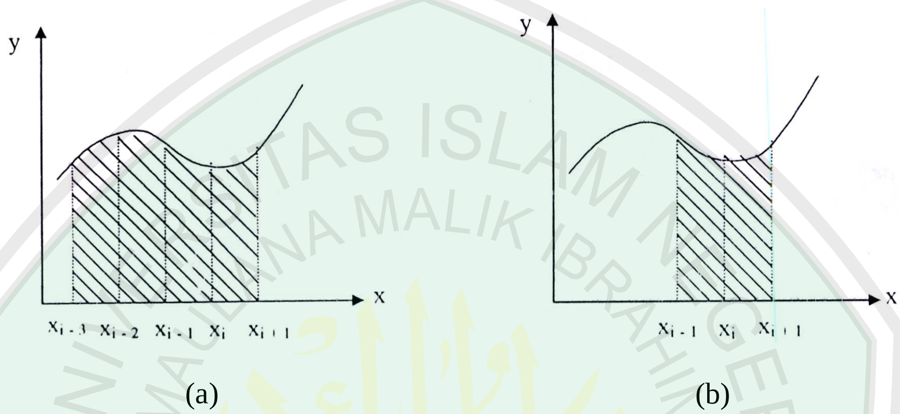
Dimana integral didekati oleh rumus integrasi Newton Cotes orde ke-n (tabel 2.1).

Untuk $n = 1$, $\quad y_{i+1} = y_i + \dfrac{\Delta x}{2}\left(f_i + f_{i+1}\right)$

Yang mana adalah ekivalen dengan aturan trapezium. Untuk $n = 2$

$$y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{\Delta x}{3}\left(f_{i-1} - 4f_i + f_{i+1}\right) \tag{2.32}$$

Yang mana ekivalen dengan aturan Simpson 1/3. persamaan (2.32) digambarkan dalam gambar 2.3b.



Gambar 2. 3. Itegrasi terbuka dan tertutup Newton Cotes. (a) Rumus terbuka tiga titik (b) Rumus tertutup tiga titik

n	titik	nama	Rumus	Kesalahan pemotongan
1	2	Aturan trpesium	$(b-a)\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}$	$-\frac{1}{12}\Delta x^3 f''(\xi)$
2	3	Aturan Simpson 1/3	$(b-a)\frac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{6}$	$-\frac{1}{90}\Delta x^5 f^{(4)}(\xi)$
3	4	Aturan simpson 3/8	$(b-a)\frac{f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)}{8}$	$-\frac{3}{80}\Delta x^5 f^{(4)}(\xi)$
4	5	Aturan Boole	$(b-a)\frac{7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)}{90}$	$-\frac{8}{945}\Delta x^7 f^{(6)}(\xi)$
5	6		$(b-a)\frac{19f(x_0)+75f(x_1)+50f(x_2)+50f(x_3)+75f(x_4)+19f(x_5)}{288}$	$-\frac{275}{12.096}\Delta x^7 f^{(6)}(\xi)$

Tabel 2. 1. rumus integrasi tertutup Newton Cotes dan kesalahan pemotongannya $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

(Chapra dan Canale,2002)

n	titik	nama	Rumus	Kesalahan pemotongan
2	1	Aturan trpesium	$(b-a)f(x_1)$	$\frac{1}{3}\Delta x^3 f''(\xi)$
3	2	Aturan Simpson 1/3	$(b-a)\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$	$\frac{3}{4}\Delta x^5 f''(\xi)$
4	3	Aturan simpson 3/8	$(b-a)\frac{2f(x_1)-f(x_2)+2f(x_3)}{3}$	$\frac{14}{45}\Delta x^5 f^{(4)}(\xi)$
5	4	Aturan Boole	$(b-a)\frac{11f(x_1)+f(x_2)+2f(x_3)+11f(x_4)}{24}$	$\frac{95}{144}\Delta x^5 f^{(4)}(\xi)$
6	5		$(b-a)\frac{11f(x_1)-14f(x_2)+26f(x_3)-14f(x_4)+11f(x_5)}{20}$	$\frac{41}{140}\Delta x^7 f^{(6)}(\xi)$

Tabel 2. 2. rumus integrasi terbuka Newton Cotes dan kesalahan pemotongannya $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

(Chapra dan Canale,2002)

2.6.2 Definisi Rumus Adam

Tipe lain rumus integrasi disini adalah rumus integrasi Adam. Rumus Adam menggunakan himpunan titik-titik dari suatu interval untuk mengestimasi integral hanya untuk segmen terakhir pada suatu interval. Integral ini kemudian digunakan untuk memperhitungkan sepanjang segmen terkhir ini.

Rumus integrasi Adam didasarkan pada beberapa pendekatan. Rumus tersebut terdiri dari dua tipe: tipe terbuka dan tipe tertutup.

Rumus terbuka (Adam-Bashforth)

Rumus Adam dapat diturunkan dalam berbagai cara salah satunya adalah dengan menulis ekspansi maju deret Taylor sepanjang x_i.

$$y_{i+1} = y_i + f_i\Delta x + \frac{f_i^{'}}{2!}\Delta x^2 + \frac{f_i^{''}}{3!}\Delta x^3 + \cdots$$

Yang mana dapat juga ditulis dalam bentuk

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x\left(f_i + \frac{\Delta x}{2!} f_i^{'} + \frac{\Delta x^2}{3!} f_i^{''} + \cdots \right) \tag{2.33}$$

Dengan menggunakan definisi dari beda mundur dapat dipakai untuk menaksir turunan:

$$f_i^{'} = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + \frac{f_i^{''}}{2} \Delta x + o\left(\Delta x^2\right)$$

Yang mana dapat disubstitusikan kedalam persamaan (2.33) yang menghasilkan:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x\left(f_i + \frac{\Delta x}{2}\left(\frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + \frac{f_i^{''}}{2} \Delta x + o\left(\Delta x^2\right)\right) + \frac{\Delta x^2}{3!} f_i^{''} + \cdots \right)$$

Atau dalam bentuk pengelompokan

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x\left(\frac{3}{2} f_i - \frac{1}{2} f_{i-1} \right) + \frac{5}{12} \Delta x^3 f_i^{''} + o(\Delta x^4) \tag{2.34}$$

Rumus ini disebut rumus Adam terbuka orde ke-2. rumus terbuka Adam juga mengacu pada rumus Adam-Bashforth. Karena itu persamaan (2.34) juga disebut rumus Adam-Bashforth orde dua.

Rumus Adam-Bashforth orde yang lebih tinggi dapat dikembangkan dengan mensubstitusikan penaksiran beda tertinggi kedalam persamaan (2.33). rumus terbuka Adam-Bashforthorde ke-*n* secara umum ditulis

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k f_{i-k} + o\left(\Delta x^{n+1}\right) \tag{2.35}$$

Orde	β_0	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	Kesalahan pemotongan lokal
1	1						$\frac{1}{2}\Delta x^2 f^{'}(\xi)$
2	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$					$\frac{5}{12}\Delta x^3 f''(\xi)$
3	$\frac{23}{12}$	$-\frac{16}{12}$	$\frac{5}{12}$				$\frac{9}{24}\Delta x^4 f^{'''}(\xi)$
4	$\frac{55}{24}$	$-\frac{59}{24}$	$\frac{37}{24}$	$-\frac{9}{24}$			$\frac{251}{720}\Delta x^5 f^{(4)}(\xi)$
5	$\frac{1901}{4277}$	$-\frac{2774}{720}$	$\frac{2616}{720}$	$-\frac{1274}{720}$	$\frac{251}{720}$		$\frac{475}{1440}\Delta x^6 f^{(5)'}(\xi)$
6	$\frac{4277}{720}$	$-\frac{7923}{720}$	$\frac{9982}{720}$	$-\frac{7298}{720}$	$\frac{2877}{720}$	$-\frac{475}{720}$	$\frac{19.087}{60.480}\Delta x^7 f^{(6)}(\xi)$

Tabel 2. 3. Koefisien dan kesalahan pemotongan lokal untuk Adam-Bashfort prediktor.

(Chapra dan Canale,2002)

Koefisien β_k ditunjukkan dalam tabel 3. Persamaan orde ke-4 digambarkan dalam gambar 2.3a. Dengan catatan persamaan untuk orde pertamanya adalah metode Euler.

Rumus tertutup (Adam-Moulton):

Ekspansi mundur deret Taylor sepanjang x_{i+1} dapat ditulis sebagai

$$y_i = y_{i+1} - f_{i+1}\Delta x + \frac{f^{'}_{i+1}}{2}\Delta x^2 - \frac{f^{''}_{i+1}}{3!}\Delta x^3 + ...$$

Penyelesaian untuk y_{i+1} menghasilkan

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x\left(f_{i+1} - \frac{\Delta x}{2} f'_{i+1} + \frac{\Delta x^2}{6} f''_{i+1} - ....\right) \tag{2.36}$$

Rumus beda dapat digunakan untuk menaksir turunan

$$f'_{i+1} = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + \frac{f''_{i+1}}{2}\Delta x + o\left(\Delta x^2\right)$$

Yang mana dapat disubstitusikan kedalam persamaan (2.36) yang menghasilkan

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x\left[f_{i+1} - \frac{\Delta x}{2}\left(\frac{f_{i+1}}{\Delta x} + \frac{f''_{i+1}}{2}\Delta x + o\left(\Delta x^2\right)\right) + \frac{\Delta x^2}{6} f''_{i+1} - ....\right]$$

Atau dalam bentuk pengelompokan

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x\left(\frac{1}{2} f_{i+1} + \frac{1}{2} f_i\right) - \frac{1}{12}\Delta x^3 f''_{i+1} - o\left(\Delta x^4\right)$$

Rumus ini disebut rumus tertutup Adam orde kedua atau rumus Adam-Moulton orde kedua. Dengan catatan bahwa rumus tersebut juga mengacu pada aturan trapesium.

Rumus tertutup Adam orde ke-*n* secara umum dapat dituliskan sebagai berikut:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k f_{i+k-k} + o\left(\Delta x^{n+1}\right) \tag{2.37}$$

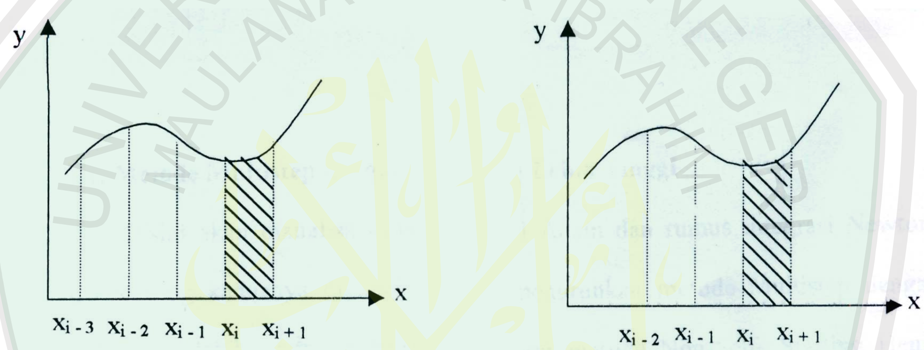
Orde	β_0	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	Kesalahan pemotongan lokal
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$					$-\frac{1}{12}\Delta x^3 f''(\xi)$
3	$\frac{5}{12}$	$\frac{8}{12}$	$-\frac{1}{12}$				$-\frac{1}{24}\Delta x^4 f'''(\xi)$
4	$\frac{9}{24}$	$\frac{19}{24}$	$-\frac{5}{24}$	$\frac{1}{24}$			$-\frac{19}{720}\Delta x^5 f^{(4)}(\xi)$

5	$\frac{251}{720}$	$\frac{646}{720}$	$-\frac{264}{720}$	$\frac{106}{720}$	$-\frac{19}{720}$		$-\frac{27}{1440}\Delta x^6 f^{(5)'}(\xi)$
6	$\frac{475}{1440}$	$\frac{1427}{1440}$	$-\frac{798}{1440}$	$\frac{482}{1440}$	$-\frac{173}{1440}$	$\frac{27}{1440}$	$-\frac{863}{60.480}\Delta x^7 f^{(6)}(\xi)$

Tabel 2. 4. Koefisien dan kesalahan pemotongan lokal untuk Adam-Moulton korektor.

(Chapra dan Canale,2002)

Koefisien β_k ditunjukkan dalam tabel 2.4. persamaan orde ke-4 digambarkan dalam gambar 2.3b.



(a) (b)

Gambar 2. 3. Integral terbuka dan tertutup Adam. (a) Rumus terbuka Adam-Bashforth orde keempat (b) Rumus tertutup Adam-Moulton orde keempat

2.6.3 Definisi Metode Adam Orde ke Empat

Metode Adam orde keempat adalah suatu metode multistep yang didasarkan pada rumus integrasi Adam dengan menggunakan rumus Adam Bashforth orde keempat sebagai prediktor:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta x}{24}\left(55 f_n - 59 f_{n-1} + 37 f_{n-2} - 9 f_{n-3}\right) \qquad (2.38)$$

Dan rumus Adam Muolton erde keempat sebagai korektor:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta x}{24}\left(9 f_{n+1} + 19 f_n - 5 f_{n-1} + f_{n-2}\right) \tag{2.39}$$

2.7 Teori Kesalahan

Kesalahan adalah selisih antara nilai eksak dan nilai perkiraan,

$$E_e = P - P^* \tag{2.40}$$

Dengan:

E_e : kesalahan terhadap nilai eksak

P : nilai eksak

P^* :nilai perkiraan

Bentuk kesalahan diatas disebut kesalahan absolute. Kesalahan absolute tidak menunjukkan besarnya tingkat kesalahan.

Besarnya tingkat kesalahan dinyatakan dalam bentuk kesalahan relatif.

$$\varepsilon_e = \frac{E_e}{P} \tag{2.41}$$

Dengan ε_e : kesalahn relative terhadap nilai eksak atau sering diberikan dalam bentuk persentase

$$\varepsilon_e = \frac{E_e}{P} \times 100\% \tag{2.42}$$

Dalam metode numerik nilai eksak biasanya tidak diketahui. Untuk itu kesalahan dinyatakan berdasarkan nilai perkiraan terbaik dari nilai eksak.

$$\varepsilon_a = \frac{\varepsilon}{P^*} \times 100\% \tag{2.43}$$

Dengan ε : kesalahan terhadap nilai perkiraan terbaik

P^* : nilai perkiraan terbaik

ε_a : kesalahan dibandingkan terhadap nilai perkiraan

Pendekatan secara iteratif dilakukan untuk membuat perkiraan sekarang berdasarkan perkiraan sebelumnya. Dalam hal ini, kesalahan adalah perbedaan antara perkiraan sebelumnya dan perkiraan sekarang.

$$\varepsilon_a = \frac{P^{*^{n+1}} - P^{*^{n}}}{P^{*^{n+1}}} \times 100\% \tag{2.44}$$

Dengan $P^{*^{n}}$: nilai perkiraan pada iterasi ke-*n*

$P^{*^{n+2}}$: nilai perkiraan pada iterasi ke- *n+1*

Jika nilai mutlak dari persamaan (2.41) sampai (2.44) lebih kecil dari toleransi yang diperkenankan

$$\varepsilon_s = \left(0.5 \times 10^{2-n}\right)\% \tag{2.45}$$

Dengan *n* adalah banyaknya angka signifikan. Penghitungan dilakukan berulang-ulang hingga

$$\left|\varepsilon_a\right| < \varepsilon_s \tag{2.46}$$

(Triatmodjo,B., 1995)

2.8 Kajian Keagamaan

2.8.1 Allah yang Maha Matematis

Matematika pada dasarnya berkaitan dengan pekerjaan menghitung, sehingga tidak salah jika kemudian ada yang menyebut matematika adalah ilmu hitung atau *ilmu al-hisab*. Dalam urusan hitung menghitung ini, Allah rajanya.

Allah sangat cepat dalam menghitung dan teliti. Banyak sekali ayat Al Qur'an yang menjelaskan bahwa Allah Maha Matematis diantaranya adalah surat Al Baqarah ayat 261.

مَّثَلُ ٱلَّذِينَ يُنفِقُونَ أَمۡوَٰلَهُمۡ فِي سَبِيلِ ٱللَّهِ كَمَثَلِ حَبَّةٍ أَنۢبَتَتۡ سَبۡعَ سَنَابِلَ فِي كُلِّ
سُنۢبُلَةٖ مِّاْئَةُ حَبَّةٖۗ وَٱللَّهُ يُضَٰعِفُ لِمَن يَشَآءُۚ وَٱللَّهُ وَٰسِعٌ عَلِيمٌ ٢٦١

Artinya: Perumpamaan (nafkah yang dikeluarkan oleh) orang-orang yang menafkahkan hartanya di jalan Allah adalah serupa dengan sebutir benih yang menumbuhkan tujuh bulir, pada tiap-tiap bulir seratus biji. Allah melipat gandakan (ganjaran) bagi siapa yang Dia kehendaki. Dan Allah Maha Luas (karunia-Nya) lagi Maha Mengetahui.

Pada QS Al-Baqarah ayat 261 di atas, nampak jelas bahwa allah menetapkan pahala menafkahkan harta di jalan Allah dengan rumus matematikanya. Pahala menafkahkan harta adalah tujuh ratus kali. Secara matematika, diperoleh persamaan

$$y = 700x$$

Dengan x menyatakan nilai nafkah dan y menyatakan nilai pahala yang diperoleh (Abdusysyakir, 2007: 81).

Selain ayat di atas, Allah menjelaskan pula sifat Maha matematisNya itu dalam surat Al-An'am ayat 160.

مَن جَآءَ بِٱلۡحَسَنَةِ فَلَهُۥ عَشۡرُ أَمۡثَالِهَاۖ وَمَن جَآءَ بِٱلسَّيِّئَةِ فَلَا يُجۡزَىٰٓ إِلَّا مِثۡلَهَا وَهُمۡ لَا
يُظۡلَمُونَ ١٦٠

Artinya: Barangsiapa membawa amal yang baik, maka baginya (pahala) sepuluh kali lipat amalnya; dan barangsiapa yang membawa perbuatan jahat *maka dia tidak diberi pembalasan melainkan seimbang dengan kejahatannya, sedang mereka sedikitpun tidak dianiaya (dirugikan).*

Pada QS Al-An'am ayat 160 tersebut, sekali lagi Allah menggunakan rumus matematika untuk menentukan balasan perbuatan kebaikan dan kejahatan mendapatkan balasan 1 kali amal kejahatan tersebut.

Secara matematika diperoleh rumus

$$y = 10x$$

Untuk amal kebaikan, dan

$$y = x$$

Untuk amal kejahatan. Variabel x menyatakan nilai amal dan y menyatakan nilai balasan yang diperoleh (Abusysyakir, 2007: 82).

Dalam surat Al An'am ayat 62 Allah sendiri berfirman bahwa dirinya adalah Maha Menghitung dan hitungannya sangat cepat.

ثُمَّ رُدُّوٓاْ إِلَى ٱللَّهِ مَوۡلَىٰهُمُ ٱلۡحَقِّۚ أَلَا لَهُ ٱلۡحُكۡمُ وَهُوَ أَسۡرَعُ ٱلۡحَٰسِبِينَ ٦٢

Artinya: *Kemudian mereka (hamba Allah) dikembalikan kepada Allah, Penguasa mereka yang sebenarnya. Ketahuilah bahwa segala hukum (pada hari itu) kepunyaanNya. Dan Dialah Pembuat Perhitungan yang paling cepat.*

Ayat diatas menjelaskan bahwa Allah dapat membuat perhitungan kepada setiap hambaNya dengan sangat cepat di akhirat nanti.

Begitu pula dalam surat Ali Imran ayat 199 disebutkan

وَإِنَّ مِنۡ أَهۡلِ ٱلۡكِتَٰبِ لَمَن يُؤۡمِنُ بِٱللَّهِ وَمَآ أُنزِلَ إِلَيۡكُمۡ وَمَآ أُنزِلَ إِلَيۡهِمۡ خَٰشِعِينَ لِلَّهِ لَا يَشۡتَرُونَ بِـَٔايَٰتِ ٱللَّهِ ثَمَنًا قَلِيلًاۚ أُوْلَٰٓئِكَ لَهُمۡ أَجۡرُهُمۡ عِندَ رَبِّهِمۡۗ إِنَّ ٱللَّهَ سَرِيعُ ٱلۡحِسَابِ ١٩٩

Artinya: Dan sesungguhnya diantara ahli kitab ada orang yang beriman kepada Allah dan kepada apa yang diturunkan kepada kamu dan yang diturunkan kepada mereka sedang mereka berendah hati kepada Allah dan mereka tidak menukarkan ayat-ayat Allah dengan harga yang sedikit. Mereka memperoleh pahala di sisi Tuhannya. Sesungguhnya Allah amat cepat perhitungan-Nya.

Sekali lagi Allah memperlihatkan keMaha matematisanNya ini melalui ayat di atas dalam masalah pemberian pahala. Allah dengan sangat cepat memperhitungkan pahala manusia tanpa adanya kekeliruan dengan manusia yang lain.

Selain dengan hitungan yang sangat cepat, Allah adalah maha menghitung yang sangat teliti. Hal ini dijelaskan dalam surat Maryam ayat 84 berikut

فَلَا تَعۡجَلۡ عَلَيۡهِمۡۖ إِنَّمَا نَعُدُّ لَهُمۡ عَدًّا ٨٤

Artinya: maka janganlah kamu tergesa-gesa memintakan siksa terhadap mereka, karena sesungguhnya Kami hanya menghitung datangnya (hari siksaan) untuk mereka dengan perhitungan yang teliti.

Selain memperhitungkan pahala, Allah juga memperhitungkan dosa yang dilakukan oleh manusia dengan hitungan yang sangat teliti dan pastinya Allah juga menghitungnya dengan sangat cepat. Selain ayat di atas Allah juga menunjukkan keMaha matematisanNya itu dalam surat Maryam ayat 94 berikut

لَّقَدْ أَحْصَىٰهُمْ وَعَدَّهُمْ عَدًّا ﴿٩٤﴾

Artinya: Sesungguhnya Allah telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti.

Ayat di atas menunjukkan bahwa Allah tidak pernah salah dalam menghitung. Seberapapun yang dihitungNya pastilah benar karena Allah adalah Maha teliti dalam menghitung.

Tidak ada sesuatupun yang lepas dari pengetahuan Allah, termasuk hal-hal dalam matematika yang diangap rumit oleh manusia. Allah berfirman dalam Al Qur'an surat Al-An'am ayat 59

وَعِندَهُۥ مَفَاتِحُ ٱلْغَيْبِ لَا يَعْلَمُهَآ إِلَّا هُوَ ۚ وَيَعْلَمُ مَا فِى ٱلْبَرِّ وَٱلْبَحْرِ ۚ وَمَا تَسْقُطُ مِن وَرَقَةٍ إِلَّا يَعْلَمُهَا وَلَا حَبَّةٍ فِى ظُلُمَٰتِ ٱلْأَرْضِ وَلَا رَطْبٍ وَلَا يَابِسٍ إِلَّا فِى كِتَٰبٍ مُّبِينٍ ﴿٥٩﴾

Artinya: Dan pada sisi Allah-lah kunci-kunci semua yang ghaib; tidak ada yang mengetahuinya kecuali Dia sendiri, dan Dia mengetahui apa yang di daratan dan di lautan, dan tiada sehelai daun pun yang gugur melainkan Dia mengetahuinya (pula), dan tidak jatuh sebutir biji-pun dalam kegelapan bumi, dan tidak sesuatu yang basah atau yang kering, melainkan tertulis dalam kitab yang nyata (Lauh Mahfudz)"

Dari beberapa ayat yang dipaparkan di atas, menjelaskan bahwa Allah Maha matematis dan mengatur alam ini dengan kematematisanNya. Jadi kalau di bumi ini ada ilmu matematika, maka Allah adalah ahlinya, yang paling mengetahuinya, Dialah ahli matematika (matematisi) yang serba maha (Abdusysyakir, 2007: 91).

2.8.2 Alam Semesta Diciptakan Berdasar Ukuran-ukuran

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semsta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi. Jadi tidak salah jika Galileo mengatakan "*Mathematics is the language with wich god created the universe*". Perhatikan Firman Allah surat Al-Qamar ayat 49 berikut (Abusysyakir, 2007: 79):

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَٰهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran.

Demikian juga dalam al-Qur'an surat AL-Furqan ayat 2

ٱلَّذِى لَهُۥ مُلْكُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُن لَّهُۥ شَرِيكٌ فِى
ٱلْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَىْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

Artinya: yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu bagiNya dalam kekuasaan(Nya), dan dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya.

Semua yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitung-hitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya. Ahli matematika atau fisika tidak membuat hukum alam sedikitpun. Mereka hanya menemukan hukum alam itu lalu mereka merumuskannya dalam suatu rumus atau persamaan. Albert Einstein tidak membuat hukum energi tetapi menemukan hukum tersebut lalu membuat rumus $e = mc^2$, dia hanya menemukan dan menyimbolkannya. Hukum alam (rumus-

rumus) yang ada sekarang bukan diciptakan manusia, tetapi sudah disediakan. Manusia hanya menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika.

Pada masa-masa mutakhir ini, pemodelan-pemodelan matematika yang dilakukan manusia sebenarnya bukan membuat sesuatu yang baru. Pada hakikatnya, mereka hanya mencari persamaan-persamaan atau rumus-rumus yang berlaku pada suatu fenomena. Bahkan, wabah seperti demam berdarah, malaria, TBC, bahkan flu burung ternyata mempunyai aturan-aturan yang matematis, sungguh, segala sesuatu telah diciptakan dengan ukuran, perhitungan, rumus, atau persamaan tertentu yang rapi dan teliti (Abdusysyakir,2007:79-81).

2.8.3 Numerik (Bilangan) dalam AlQur'an

Dalam matematika, terdapat enam himpunan bilangan yang sangat dikenal. Keenam himpunan bilangan tersebut meliputi bilangan asli, cacah, bulat, rasional, real dan kompleks.

Bilangan 1, 2, 3, 4, 5, … disebut bilangan asli. Himpunan bilangan asli (natural numbers) disimbolkan dengan huruf **N**.

N = {1, 2, 3, 4, 5, ...}

Himpunan bilangan asli jika digabung dengan himpunan {0} akan menghasilkan himpunan bilangan cacah (whole numbers). Himpunan cacah dengan huruf **W**. Jadi,

W = {0, 1, 2, 3, 4, ...}

Himpunan {..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...} disebut himpunan bilangan bulat (integer). Himpunan bilangan bulat disimbolkan dengan huruf **Z**.

Himpunan bilangna rasional adalah himpunan semua bilangan yang berbentuk $\frac{a}{b}$, dengan *a*, *b* adalah bilangan bulat dan *b* tidak boleh nol.

Dalam Al Qur'an disebutkan sebanyak 38 bilangan berbeda. Dari 38 bilangan tersebut, 30 bilangan merupakan bilangan asli dan 8 merupakan bilangan pecahan (rasional) (Abdusysyakir, 2007: 113-117).

1 (Wahid)	11 (Ahada Asyara)	90 (Tis'un wa Tis'una)
2 (Itsnain)	12 (Itsna Asyara)	100 (Mi'ah)
3 (Tsalats)	19 (Tis'ata Asyar)	200 (Mi'atain)
4 (Arba')	20 ('Isyrun)	300 (Tsalatsa Mi'ah)
5 (Khamsah)	30 (Tsalatsun)	1000 (Alf)
6 (Sittah)	40 ('Arbaun)	2000 (Alfain)
7 (Saba')	50 (Khamsun)	3000 (Tsalatsa Alf)
8 (Tsamaniyah)	60 (Sittun)	5000 (Khamsati Alf)
9 (Tis'a)	70 (Sab'un)	50000 (Khamsina Alf)
10 ('Asyarah)	80 (Tsamanun)	100000 (Mi'ati Alf)

Sedangkan 8 bilangan rasional yang disebutkan dalam Al Qur'an adalah

$\frac{2}{3}$ (Tsulutsa)

$\frac{1}{2}$ (Nish)

$\frac{1}{3}$ (Tsuluts)

$\frac{1}{4}$ (Rubu')

$\frac{1}{5}$ (Khumus)

$\frac{1}{6}$ (Sudus)

$\frac{1}{8}$ (Tsumun)

$\frac{1}{10}$ (Mi'syar)

Setelah mengetahui bahwa dalam Al Qur'an terdapat bilangan-bilangan, maka orang muslim harus mengenal bilangan. Tanpa mengenal bilangan, seorang muslim tidak akan memahami Al Qur'an dengan baik ketika membaca ayat-ayat yang berbicara tentang bilangan tersebut. Ketika Al Qur'an berbicara tentang bilangan, yang banyaknya sampai 38 bilangan berbeda, maka tidak diragukan lagi bahwa Al Qur'an sebenarnya berbicara tentang metematika (Abdusysyakir, 2006).

Berikut ini beberapa ayat yang menjelaskan masalah bilangan-bilangan seperti di atas:

Surat Attaubah ayat 36-37 yang berbunyi

إِنَّ عِدَّةَ ٱلشُّهُورِ عِندَ ٱللَّهِ ٱثۡنَا عَشَرَ شَهۡرٗا فِي كِتَٰبِ ٱللَّهِ يَوۡمَ خَلَقَ ٱلسَّمَٰوَٰتِ
وَٱلۡأَرۡضَ مِنۡهَآ أَرۡبَعَةٌ حُرُمٞۚ ذَٰلِكَ ٱلدِّينُ ٱلۡقَيِّمُۚ فَلَا تَظۡلِمُواْ فِيهِنَّ أَنفُسَكُمۡۚ
وَقَٰتِلُواْ ٱلۡمُشۡرِكِينَ كَآفَّةٗ كَمَا يُقَٰتِلُونَكُمۡ كَآفَّةٗۚ وَٱعۡلَمُوٓاْ أَنَّ ٱللَّهَ مَعَ
ٱلۡمُتَّقِينَ ٣٦ إِنَّمَا ٱلنَّسِيٓءُ زِيَادَةٞ فِي ٱلۡكُفۡرِۖ يُضَلُّ بِهِ ٱلَّذِينَ كَفَرُواْ يُحِلُّونَهُۥ

عَامًا وَيُحَرِّمُونَهُۥ عَامًا لِّيُوَاطِـُٔوا۟ عِدَّةَ مَا حَرَّمَ ٱللَّهُ فَيُحِلُّوا۟ مَا حَرَّمَ ٱللَّهُ ۚ زُيِّنَ لَهُمْ
سُوٓءُ أَعْمَٰلِهِمْ ۗ وَٱللَّهُ لَا يَهْدِى ٱلْقَوْمَ ٱلْكَٰفِرِينَ ﴿٣٧﴾

Artinya: Sesungguhnya bilangan bulan pada sisi Allah adalah dua belas bulan, dalam ketetapan Allah di waktu Dia menciptakan langit dan bumi, di antaranya empat bulan haram. Itulah (ketetapan) agama yang lurus, Maka janganlah kamu Menganiaya diri kamu dalam bulan yang empat itu, dan perangilah kaum musyrikin itu semuanya sebagaimana merekapun memerangi kamu semuanya, dan ketahuilah bahwasanya Allah beserta orang-orang yang bertakwa. Sesungguhnya mengundur-undurkan bulan Haram itu adalah menambah kekafiran. disesatkan orang-orang yang kafir dengan mengundur-undurkan itu, mereka menghalalkannya pada suatu tahun dan mengharamkannya pada tahun yang lain, agar mereka dapat mempersesuaikan dengan bilangan yang Allah mengharamkannya, Maka mereka menghalalkan apa yang diharamkan Allah. (syaitan) menjadikan mereka memandang perbuatan mereka yang buruk itu. dan Allah tidak memberi petunjuk kepada orang-orang yang kafir.

Pada ayat diatas Allah menyebutkan bilangan dua belas dan empat. Selain ayat di atas dalam surat Al Kahfi ayat 22 juga disebutkan tentang bilangan yaitu bilangan tiga, lima dan tujuh seperti di bawah ini.

سَيَقُولُونَ ثَلَٰثَةٌ رَّابِعُهُمْ كَلْبُهُمْ وَيَقُولُونَ خَمْسَةٌ سَادِسُهُمْ كَلْبُهُمْ رَجْمًۢا بِٱلْغَيْبِ ۖ
وَيَقُولُونَ سَبْعَةٌ وَثَامِنُهُمْ كَلْبُهُمْ ۚ قُل رَّبِّىٓ أَعْلَمُ بِعِدَّتِهِم مَّا يَعْلَمُهُمْ إِلَّا قَلِيلٌ ۗ فَلَا
تُمَارِ فِيهِمْ إِلَّا مِرَآءً ظَٰهِرًا وَلَا تَسْتَفْتِ فِيهِم مِّنْهُمْ أَحَدًا ﴿٢٢﴾

Artinya: Nanti (ada orang yang akan) mengatakan (jumlah mereka) adalah tiga orang yang keempat adalah anjingnya, dan (yang lain) mengatakan: "(jumlah mereka) adalah lima orang yang keenam adalah anjing nya", sebagai terkaan terhadap barang yang gaib; dan (yang lain lagi) mengatakan: "(jumlah mereka) tujuh orang, yang ke delapan adalah anjingnya." Katakanlah: "Tuhanku lebih mengetahui jumlah mereka; tidak ada orang yang mengetahui (bilangan) mereka kecuali sedikit." Karena itu janganlah kamu (Muhammad) bertengkar tentang hal *mereka, kecuali pertengkaran lahir saja dan jangan kamu menanyakan tentang mereka (pemuda-pemuda itu) kepada seorangpun di antara mereka.*

Selain kedua ayat dia atas, surat Al Kahfi ayat 25 yang berbunyi

وَلَبِثُوا۟ فِى كَهْفِهِمْ ثَلَٰثَ مِا۟ئَةٍ سِنِينَ وَٱزْدَادُوا۟ تِسْعًا ﴿٢٥﴾

Artinya: Dan mereka tinggal dalam gua mereka tiga ratus tahun dan ditambah sembilan tahun (lagi).

juga berisikan tentang bilangan. Bahkan dalam ayat di atas juga terdapat operasi penjumlahan yaitu 300 + 9 = 309.

Operasi penjumlahan yang tersirat dalam Al Qur'an juga bisa di temui pada Surat Al A'raf ayat 142:

وَوَٰعَدْنَا مُوسَىٰ ثَلَٰثِينَ لَيْلَةً وَأَتْمَمْنَٰهَا بِعَشْرٍ فَتَمَّ مِيقَٰتُ رَبِّهِۦٓ أَرْبَعِينَ لَيْلَةً ۚ
وَقَالَ مُوسَىٰ لِأَخِيهِ هَٰرُونَ ٱخْلُفْنِى فِى قَوْمِى وَأَصْلِحْ وَلَا تَتَّبِعْ سَبِيلَ ٱلْمُفْسِدِينَ
﴿١٤٢﴾

Artinya: Dan telah Kami janjikan kepada Musa (memberikan Taurat) sesudah berlalu waktu tiga puluh malam, dan Kami sempurnakan jumlah malam itu dengan sepuluh (malam lagi), maka sempurnalah waktu yang telah ditentukan Tuhannya empat puluh malam. Dan berkata Musa kepada saudaranya yaitu Harun: "Gantikanlah aku dalam (memimpin) kaumku, dan perbaikilah, dan janganlah kamu mengikuti jalan orang-orang yang membuat kerusakan."

Pada ayat di atas juga disebutkan operasi penjumlahan yang lengkap dengan hasil jumlahnya yaitu 30 + 10 = 40.

Jika dalam matematika ada operasi penjumlahan, maka ada pula operasi pengurangan. Hal ini dinyatakan dalam surat Al Ankabut ayat 14

وَلَقَدۡ أَرۡسَلۡنَا نُوحًا إِلَىٰ قَوۡمِهِۦ فَلَبِثَ فِيهِمۡ أَلۡفَ سَنَةٍ إِلَّا خَمۡسِينَ عَامًا فَأَخَذَهُمُ ٱلطُّوفَانُ وَهُمۡ ظَٰلِمُونَ ﴿١٤﴾

Artinya: Dan sesungguhnya Kami telah mengutus Nuh kepada kaumnya, maka ia tinggal di antara mereka seribu tahun kurang lima puluh tahun. Maka mereka ditimpa banjir besar, dan mereka adalah orang-orang yang zalim.

Pada surat Al Ankabut di atas terdapat operasi pengurangan yaitu 1000 – 50.

Operasi pembagian dalam Al Qur'an diwakili dengan penyebutan bilangan pecahan. Bilangan pecahan dapat bermakna pembagian antara pembilang dan penyebut. Berkaitan dengan operasi hitung bilangan, ternyata Al Qur'an tidak berbicara tentang operasi perkalian. Pada surat Al An'am ayat 160 Allah menjelaskan.

مَن جَآءَ بِٱلۡحَسَنَةِ فَلَهُۥ عَشۡرُ أَمۡثَالِهَاۖ وَمَن جَآءَ بِٱلسَّيِّئَةِ فَلَا يُجۡزَىٰٓ إِلَّا مِثۡلَهَا وَهُمۡ لَا يُظۡلَمُونَ ﴿١٦٠﴾

Artinya: Barangsiapa membawa amal yang baik, maka baginya (pahala) sepuluh kali lipat amalnya; dan barangsiapa yang membawa perbuatan jahat maka dia tidak diberi pembalasan melainkan seimbang dengan kejahatannya, sedang mereka sedikitpun tidak dianiaya (dirugikan).

Pada ayat di atas sebenarnya tidak membicarakan operasi perkalian bilangan. Pernyataan sepuluh kali amalnya tidak dapat dimaknai operasi perkalian bilangan, karena secara kualitas amal bukan bilangan. Jika dilihat secara kuantitasnya, maka pernyataan sepuluh kali amalnya dapat bermakna perkalian bilangan. Sebagai contoh, jika seseorang membaca dzikir 33 kali maka berdasarkan ayat di atas pahala yang diperoleh sama dengan membaca dzikir sebanyak 330 kali (33 x 10) (Abdusysyakir, 2007: 127).

Walaupun Al Qur'an tidak berbicara operasi perkalian bilangan secara tegas, ternyata Al Qur'an memberikan gambaran yang akan memunculkan operasi perkalian bilangan. Seperti pada surat Al Baqarah ayat 261 Allah menjelaskan bahwa 1 biji akan menumbuhkan 7 batang, dan tiap-tiap batang terdapat 100 biji. Karena opersi penjumlahan telah disebutkan dalam Al Qur'an, maka untuk menentukan keseluruhan biji, seseorang dapa melakukan dengan cara menghitung 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 = 700. penjumlahan 100 berulang sebanyak 7 kali sehingga diperoleh 700. konsep penjumlahan berulang inilah yang sebenarnya merupakan konsep operasi perkalian bilangan jadi pernyataan 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 = 7 x 100. dengan demikian, munculnya operasi perkalian bilangan bersumber dari operasi penjumlahan, yaitu penjumlahan berulang (Abdusysyakir, 2007: 128).

Nilai numerik huruf hijaiyah di Indonesia dikenal dengan istilah *"abajaun"*. Berikut ini adalah tabel nilai numerik huruf hijaiyah (Adusysyakir, 2007: 161):

Huruf	Nilai Numerik
ا *(Alif)*	1
ب *(Ba')*	2
ج *(Jim)*	3

Huruf	Nilai Numerik
س *(Sin)*	60
ع *('Ain)*	70
ف *(Fa')*	80

د*(Dal)*	4	ص*(Shad)*	90
ه*(Hha)*	5	ق*(Qaf)*	100
و*(Wau)*	6	ر*(Ra')*	200
ز*(Za')*	7	ش*(Syin)*	300
ح *(Ha')*	8	ت*(Ta')*	400
ط*(Tha')*	9	ث*(Tsa')*	500
ي *(Ya')*	10	خ *(Kha')*	600
ك*(kaf)*	20	ذ*(Dzal)*	700
ل*(Lam)*	30	ض*(Dhad)*	800
م*(Mim)*	40	ظ*(Zhad)*	900
ن*(Nun)*	50	غ *(Ghin)*	1000

Tabel 2.5 Nilai Numerik Huruf Hijaiyah

2.8.4 Dampak Positif Pembelajaran Matematika

Manfaat yang dapat kita ambil dari pembelajaran matematika diantaranya adalah sikap teliti, cermat dan hemat, sikap jujur, tegas dan bertanggung jawab dan sikap pantang menyerah dan percaya diri.

Matematika disebut sebagai ilmu hitung karena pada hakikatnya matematika berkaitan dengan masalah hitung- menghitung. Dalam pengerjaan operasi hitung, maka seseorang dituntut untuk bersikap teliti, cermat, hemat cermat dan tepat. Saat mengerjakan masalah matematika, seseorang sebenarnya dituntut untuk mengerjakan dengan teliti dan cermat, jangan sampai ada pengerjaan atau langkah yang salah. Langkah demi langkah pengerjaan diteliti dan dicermati. Setelah diperoleh hasilnya, hasil tersebut perlu dicek lagi apakah sudah menjawab permasalahan atau tidak. Intinya matematika mengajari seseorang untuk jeli dan berhati-hati dalam melangkah. Matematika juga melatih sikap hemat dan tidak boros. Dapat dilihat bahwa orang matematika selalu simpel dalam bertindak dan berbicara, serta tidak bertele-tele seperti orang-sosial.

Matematika juga mengajarkan sikap jujur, tegas dan benar. Lebih baik jujur sekalipun pahit, karena kalau tidak jujur suatu saat pasti akan ketahuan. Selain itu, matematika juga mengajarkan sikap tegas, maksudnya dalam matematika hanya ada dua pilihan, benar atau salah. Matematika juga berkenaan dengan pembuktian. Langkah-langkah dalam pembuktian matematika harus didasarkan pada hal-hal yang sudah diakui kebenarannya. Langkah-demi langkah harus berdasarkan alasan yang kuat dan benar. Dengan cara inilah matematika mengajarkan sikap hidup benar dan bertanggung jawab.

Saat mengerjakan masalah matematika, tidak boleh pantang menyerah. Saat gagal atau tidak dapat menjawab, harus percaya diri bahwa sebenarnya bisa. Di coba terus sampai akhirnya di dapatkan jawabannya. Sikap pantang menyerah, berputus asa dan percaya diri sangat dianjurkan dan merupakan perintah dalam Al Qur'an. Seperti yang dinyatakan dalam Al Qur'an surat Yusuf ayat 87 berikut:

يَٰبَنِيَّ ٱذۡهَبُواْ فَتَحَسَّسُواْ مِن يُوسُفَ وَأَخِيهِ وَلَا تَاْيۡـَٔسُواْ مِن رَّوۡحِ ٱللَّهِۖ إِنَّهُۥ لَا
يَاْيۡـَٔسُ مِن رَّوۡحِ ٱللَّهِ إِلَّا ٱلۡقَوۡمُ ٱلۡكَٰفِرُونَ ٨٧

Artinya: Hai anak-anakku, pergilah kamu, maka carilah berita tentang Yusuf dan saudaranya dan jangan kamu berputus asa dari rahmat Allah. Sesungguhnya tiada berputus asa dari rahmat Allah, melainkan kaum yang kafir."

Masih banyak lagi manfaat yang dapat diperoleh dari belajar matematika misalnya sikap suka bekerja sama, saling tolong menolong dan saling menghargai orang lain (Abdusysyakir, 2007: 70-75)

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Metode Multistep dengan Orde yang Lebih Tinggi

Disini akan dianalisis rumus integrasi Adam dan rumus integrasi Newton Cotes yang keduanya digunakan untuk menurunkan metode multistep dengan orde yang lebih tinggi. Sebagaimana dalam metode Non Self Starting Heun, rumus integrasi diterapkan dalam pasangan sebagai metode prediktor-korektor sehingga prediktor dan korektor mempunyai kesalahan pemotongan lokal dengan orde yang sama (Chapra dan Canale,2002).

3.2 Definisi Metode Milne

Metode Milne adalah metode multistep yang didasarkan pada rumus integrasi Newton Cotes . Metode ini menggunakan rumus terbuka Newton Cotes tiga titik sebagai prediktor:

$$y_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4\Delta x}{3}\left(2 f_{n-2} - f_{n-1} + 2 f_n\right) \tag{3.1}$$

Dan rumus tertutup tertutup Newton Cotes tiga titik sebagai korektor:

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{\Delta x}{3}\left(f_{n-1} + 4 f_n + f_{n+1}\right) \tag{3.2}$$

(Munif, 1995).

3.3 Definisi Metode Adam Orde ke empat

Metode adam orde keempat adalah suatu metode multistep yang didasarkan pada rumus integrasi Adam dengan menggunakan Adam Bashfort orde keempat sebagai prediktor:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta x}{24}\left(55 f_n - 59 f_{n-1} + 37 f_{n-2} - 9 f_{n-3}\right) \tag{3.3}$$

Dan rumus Adam Moulton orde keempat sebagai korektor:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta x}{24}\left(9 f_{n+1} + 19 f_n - 5 f_{n-1} + f_{n-2}\right) \tag{3.4}$$

2.4 Pemakaian Metode Milne dan Metode adam Orde Keempat

Contoh 1

Berikut ini akan diberikan contoh persoalan integrasi yang akan diselesaikan dengan metode miltistep dengan orde yang lebih tinggi yaitu metode Milne dan metode Adam orde keempat dengan "pemulai" (*starter*) metode Runga-Kutta orde keempat dan ditentukan kriteria kesalahan (ε_s) sehingga hasilnya betul sampai tiga angka signifikan *(n = 3)* yaitu

$$\varepsilon_s = 0.05\%$$

Dari $\frac{dy}{dx} = xe^{2x}$ dengan $\Delta x = 0.2$

Dengan metode Runga-Kutta orde keempat akan dicari terlebih dahulu nilai y pada titik-titik x sebelumnya dengan syarat awal pada $x = 0, y = 0$.

Dengan metode Runga-Kutta orde keempat dicari nilai-nilai $y_1, y_2, \ldots, y_n$ pada $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

Untuk

$x_0 = 0$ maka $y_0 = 0$

$x_1 = 0.2$ maka $y_1 = ?$

$$k_1 = \Delta x f\left(x_0, y_0\right)$$

$= (0.2)\ f\ (0,0)$

$= (0.2)\ (0\ e^{0})$

$= (0.2)\ (0)$

$= 0$

$$k_2 = \Delta x f\left(x_0 + \frac{1}{2}\Delta x, y_0 + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$= (0.2)\ f\ (0.1,0)$

$= (0.2)\ (0.1\ e^{0.2})$

$= (0.2)\ (0.12214)$

$= 0.024438$

$$k_3 = \Delta x f\left(x_0 + \frac{1}{2}\Delta x, y_0 + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$= (0.2)\ f\ (0.1,0.012215)$

$= (0.2)\ (0.1\ e^{0.2})$

$= (0.2)\ (0.12214)$

$= 0.024438$

$$k_4 = \Delta x\left(x_0 + \Delta x, y_0 + k_3\right)$$

$= (0.2)\ f\ (0.12214)$

$= (0.2)\ (0.2\ e^{0.4})$

$= (0.2)\ (0.29836)$

$= 0.05967$

$y_2 = 0 + \frac{1}{6}\ (0 + 2\ (0.024438) + 2\ (0.024438) + 0.05967)$

$= \frac{1}{6}\ (0.157422)$

$= 0.026237$

Untuk

$x_1 = 0.2$ maka $y_1 = 0.026237$

$x_2 = 0.4$ maka $y_2 = ?$

$$k_1 = \Delta x f\left(x_1 y_1\right)$$

$= (0.2)\ f\ (0.2,\ 0.026237)$

$= (0.2)\ (0.2\ e^{0.4})$

$= (0.2)\ (0.29836)$

$= 0.05967$

$$k_2 = \Delta x f\left(x_1 + \frac{1}{2}\Delta x, y_1 + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$= (0.2)\ f\ (0.3,0.20113)$

$= (0.2)\ (0.3\ e^{0.6})$

$= (0.2)\ (0.54664)$

$= 0.10933$

$$k_3 = \Delta x f\left(x_1 + \frac{1}{2}\Delta x, y_1 + \frac{1}{2}k_2\right)$$

= (0.2) f (0.3,0.22753)

= (0.2) (0.3 $e^{0.6}$)

= (0.2) (0.54664)

= 0.10933

$$k_4 = \Delta x f\left(x_1 + \Delta x, y_1 + k_3\right)$$

= (0.2) f (0.4,0.21682)

= (0.2) (0.4 $e^{0.8}$)

= (0.2) (0.44511)

= 0.08902

$$y_2 = 0.17827 + \frac{1}{6}\ (0.05652 + 2\ (0.10933) + 2\ (0.10933) + 0.08902)$$

$$= 0.17827 + \frac{1}{6}(0.58286)$$

= 0.17287 + 0.09714

= 0.27

Untuk

x_2 = 0.4 maka y_2= 0.53246

x_3 = 0.6 maka y_3= ?

$$k_1 = hf\left(x_2, y_2\right)$$

= (0.2) f (0.4,0.27)

= (0.2) (0.4 $e^{0.8}$)

= (0.2) (0.44511)

$= 0.08902$

$$k_2 = hf\left(x_2 + \frac{1}{2}h, y_2 \frac{1}{2}k_1\right)$$

$= (0.2)\ f\ (0.5{,}0.31451)$

$= (0.2)\ (0.5\ e^1)$

$= (0.2)\ (1.35914)$

$= 0.27183$

$$k_3 = hf\left(x_2 + \frac{1}{2}h, y_2 \frac{1}{2}k_2\right)$$

$= (0.2)\ f\ (0.5{,}0.40592)$

$= (0.2)\ (0.5\ e^1)$

$= (0.2)\ (1.35914)$

$= 0.27183$

$$k_4 = hf\left(x_2 + h, y_2 k_3\right)$$

$= (0.2)\ f\ (0.6{,}0.54183)$

$= (0.2)\ (0.6\ e^{1.2})$

$= (0.2)\ (1.99207)$

$= 0.39841$

$$y_3 = 0.27 + \frac{1}{6}\ (0.08902 + 2\ (0.27183) + 2\ (0.27183) + 0.39841)$$

$$= 0.\ 27 + \frac{1}{6}(1.57475)$$

$= 0.27 + 0.26246$

$= 0.53246$

Untuk

x_3 = 0.6 maka y_3= 0.53246

x_4= 0.8 maka y_4= ?

$$k_1 = \Delta x f(x_3, y_3)$$

= (0.2) f (0.6,0.53246)

= (0.2) (0.6 $e^{1.2}$)

= (0.2) (1.99207)

= 0.39841

$$k_2 = \Delta x f\left(x_3 + \frac{1}{2}\Delta x, y_3 + \frac{1}{2}k_1\right)$$

= (0.2) f (0.7,0.731665)

=(0.2) (0.7 $e^{1.4}$)

= (0.2) (2.83864)

= 0.56773

$$k_3 = \Delta x f\left(x_3 + \frac{1}{2}\Delta x, y_3 + \frac{1}{2}k_2\right)$$

= (0.2) f (0.7,0.81663)

=(0.2) (0.7 $e^{1.4}$)

= (0.2) (2.83864)

= 0.56773

$$k_4 = \Delta x f(x_3 + \Delta x, y_3 + k_3)$$

= (0.2) f (0.8,1.10019)

= (0.2) (0.8 $e^{1.6}$)

= (0.2) (3.96243)

$= 0.79249$

$y_4 = 0.53246 + \frac{1}{6}\ (0.39841 + 2\ (0.56773) + 2\ (0.56773) + 0.72949)$

$= 0.53246 + \frac{1}{6}\ (3.46182)$

$= 0.53246 + 0.57697$

$= 1.10943$

Sehingga dapat kita bentuk tabel seperti di bawah ini

x_i	y_i
0	0
0.2	0.026237
0.4	0.27
0.6	0.53246
0.8	1.10943

Tabel 3.1 Nilai-nilai pada titik-titik sebelumnya yang didapat dengan menggunakan metode Runga-Kutta orde keempat

Nilai-nilai y pada tabel diatas digunakan sebagai pemulai (*starting value*) untuk menghitung integral numerik dengan menggunakan metode milne dan metode Adam orde keempat

Dari tabel di atas maka nilai f_n, f_{n-1}, f_{n-2}, dan f_{n-3} dapat di tentukan sebagai berikut:

$f_n = f_4 = f\ (0.8,\ 1.10943)$

$= 0.8\ e^{1.6}$

$= 3.96243$

$f_{n-1} = f_3 = f\,(0.6, 0.53246)$

$= 0.6\ e^{1.2}$

$= 1.99207$

$f_{n-2} = f_2 = f\,(0.4, 0.27)$

$= 0.4\ e^{0.8}$

$= 0.44511$

$f_{n-3} = f_1 = f\,(0.2, 0.17287)$

$= 0.2\ e^{0.4}$

$= 0.29836$

Dengan Metode Milne

Pertama akan digunakan rumus prediktor (3.1) untuk membuat perkiraan awal dari nilai *y* tersebut pada titik *x* selanjutnya. Kemudian diperbaiki dengan memakai rumus korektor (3.2).

Prediktor:

$$y_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4\Delta x}{3}\left(2 f_{n-2} - f_{n-1} + 2 f_n\right)$$

$$Y_5 = 0.17287 + \frac{0.8}{3}\ (2\ (0.44511) - 1.99207 + 2\ (3.96243))$$

$$= 0.\ 17287 + \frac{0.8}{3}\ (6.82301)$$

$$= 0.\ 17287 + 1.74601$$

$$= 1.91888$$

$F_5 = f\,(1) = 1\ e^2 = 7.38906$

Korektor:

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{\Delta x}{3}\left(f_{n-1} + 4f_n + f_{n+1}\right)$$

$Y_5 = 0.53246 + \frac{0.2}{3}$ (1.99207 + 4 (3.96243) + 7.38906)

$= 0.53246 + \frac{0.2}{3}$ (25.23085)

= 0.53246 + 1.68207

= 2.21452

$$\varepsilon_a = \left|\frac{2.21452 - 1.91888}{2.21452} \times 100\%\right|$$

= 13.35%

Karena ε_a pada korektor masih lebih besar dari ε_s sehingga harus dilakukan iterasi sampai $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$. Hal ini akan dilakukan dengan menggunakan program komputer.

Dengan metode Adam orde keempat

Dari nilai-nilai *y* pada titik-titik x_{i-1}, …, x_{i-4} pada tabel 3.1 digunakan untuk menghitung nilai *y* pada titik-titik x_{i+1} berikutnya dengan menggunakan metode adam orde keempat

Langkah pertama digunakan rumus prediktor korektor (3.3) untuk membuat estimasi awal. Selanjutnya digunakan rumus korektor (3.4) untuk memperbaiki nilai pada perkiraan awal sebelumnya

Pada titik x_{i+1} = 1.0

Prediktor (Adam Bashforth)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta x}{24}\left(55 f_n - 59 f_{n-1} + 37 f_{n-2} - 9 f_{n-3}\right)$$

y_5 = 1.10943 + $\frac{0.2}{24}$ (55(3.96243) – 59 (1.99207) + (0.44511) – 9 (0.29836)

= 1.10943 + $\frac{0.2}{24}$ (114.18531)

= 1.10943 + 0.95154

= 2.06097

f_5 = f (1) = 1 e^2 = 7.38906

Korektor (Adam Moulton)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta x}{24}\left(9 f_{n+1} + 19 f_n - 5 f_{n-1} + f_{n-2}\right)$$

= 1.10943 + $\frac{0.2}{24}$ (9 (7.38906) – 19 (3.96243) – 5 (1.99207) + 0.44511)

= 1.10943 + $\frac{0.2}{24}$ (66421.59859)

= 1.10943 + 553.51332

= 554.62275

$$\varepsilon_a = \left|\frac{554.62275 - 2.06097}{554.62275} \times 100\%\right|$$

= 99.61%

Karena ε_a pada korektor masih lebih besar dari ε_s sehingga harus dilakukan iterasi sampai $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$. Hal ini akan dilakukan dengan menggunakan program komputer.

Contoh 2

Berikut ini akan di berikan contoh persoalan integrasi yang akan diselesaian dengan metode miltistep dengan orde yang lebih tinggi yaitu metode Milne dan metode Adam orde keempat dengan "pemulai" (starter) metode Runga-Kutta orde keempat dan ditentukan kriteria kesalahan (ε_s) sehinggan hasilnya betul sampai tiga angka signifikan *(n = 3)* yaitu

$$\varepsilon_s = \left(0.5\times10^{2-3}\right) = 0.05\%$$

Dari $\frac{dy}{dx} = \ln 2x - {}^{3}\log x + e^{x}\sin x^{2}$ dengan $\Delta x = 0.5$

Dengan metode Runga-Kutta orde keempat akan dicari terlebih dahulu nilai *y* pada titik-titik *x* sebelumnya dengan syarat awal pada $x = 0$, $y = 0$.

Dengan metode Runga-Kutta orde keempat dicari nilai-nilai $y_1, y_2, \ldots, y_n$ pada $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

Untuk

$x_0 = 0$ maka $y_0 = 0$

$x_1 = 0.5$ maka $y_1 = ?$

$$k_1 = \Delta x f\left(x_0, y_0\right)$$

$= (0.5)\ f\ (0,0)$

$= (0.5)\ (\ln 0 - {}^{3}\log 0 + e^{0} \sin 0^{2})$

$= (0.5)\ (0)$

$= 0$

$$k_2 = \Delta x f\left(x_0 + \frac{1}{2}\Delta x, y_0 + \frac{1}{2}k_1\right)$$

= (0.5) f (0.25,0)

$= (0.5)\ \left(\ln 0.5 - {}^{3}\log 0.25 + e^{0.25}\sin 0.0625\right)$

= (0.5) (0.64905)

= 0.32453

$$k_3 = \Delta x f\left(x_0 + \frac{1}{2}\Delta x, y_0 + \frac{1}{2}k_2\right)$$

= (0.5) f (0.25,0.13226)

$= (0.5)\ \left(\ln 0.5 - {}^{3}\log 0.25 + e^{0.25}\sin 0.0625\right)$

= (0.5) (0.64905)

= 0.32453

$$k_4 = \Delta x f\left(x_0 + \Delta x, y_0 + k_3\right)$$

= (0.5) f (0.5,0.32453)

$= (0.5)\ \left(\ln 1 - {}^{3}\log 0.5 + e^{0.5}\sin 0.25\right)$

= (0.5) (1.03883)

= 0.51942

$y_1 = 0 + \frac{1}{6}$ (0 + 2 (0.32453) + 2 (0.32453 + 0.51942)

$= \frac{1}{6}(1.81754)$

= 0.30292

Untuk

x_1 = 0.5 maka y_1 = 0.30292

x_2 = 1 maka y_2= ?

$k_1 = \Delta x f\left(x_1, y_1\right)$

= (0.5) f (0.5,0.30292)

= (0.5) $\left(\ln 1 - {}^3\log 0.5 + e^{0.5} \sin 0.25\right)$

= (0.5) (1.03883)

= 0.51942

$k_2 = \Delta x f\left(x_1 + \frac{1}{2}\Delta x, y_1 + \frac{1}{2}k_1\right)$

= (0.5) f (0.75,0.56263)

= (0.5) $\ln 1.5 - {}^3\log 0.75 + e^{0.75} \sin 0.5625$

= (0.5) (1.79633)

= 0.89817

$k_3 = \Delta x f\left(x_1 + \frac{1}{2}\Delta x, y_1 + \frac{1}{2}k_2\right)$

= (0.5) f (0.75,0.752)

= (0.5) ($\ln 1.5 - {}^3\log 0.75 + e^{0.75} \sin 0.5625$)

= (0.5) (1.79633)

= 0.89817

$k_4 = \Delta x f\left(x_1 + \Delta x, y_1 + k_3\right)$

= (0.5) f (1,1.20109)

= (0.5) $\left(\ln 2 - {}^3\log 1 + e^1 \sin 1\right)$

= (0.5) (2.98051)

= 1.49025

$y_2 = 0.30292 + \frac{1}{6}$ (0.51942+ 2 (0.89817) + 2 (0.89817) + 1.49025)

$= 0.30292 + \frac{1}{6}(5.60235)$

= 0.30292 + 0.933725

= 1.23665

Untuk

$x_2 = 1$ maka $y_2 = 1.23665$

$x_3 = 1.5$ maka $y_3 = ?$

$$k_1 = \Delta x f\left(x_2, y_2\right)$$

= (0.5) f (1,1.2366)

$= (0.5)\ \left(\ln 2 - {}^3\log 1 + e^1 \sin 1\right)$

= (0.5) (2.98051)

= 1.49025

$$k_2 = \Delta x f\left(x_2 + \frac{1}{2}\Delta x, y_2 + \frac{1}{2}k_1\right)$$

= (0.5) f (1.25,1.98178)

$= (0.5)\ \ln 2.5 - {}^3\log 1.25 + e^{1.25} \sin 1.5625$

= (0.5) (4.203396)

= 2.1017

$$k_3 = \Delta x f\left(x_2 + \frac{1}{2}\Delta x, y_2 + \frac{1}{2}k_2\right)$$

= (0.5) f (1.25,1.2875)

$= (0.5)\ \ln 2.5 - {}^3\log 1.25 + e^{1.25} \sin 1.5625$

= (0.5) (4.203396)

= 2.1017

$k_4 = \Delta x f\left(x_2 + \Delta x, y_2 + k_3\right)$

= (0.5) f (1.5,3.33835)

= (0.5) $\left(\ln 3 - {}^3\log 1.5 + e^{1.5} \sin 2.25\right)$

= (0.5) (4.21661)

= 2.10831

$y_3 = 1.23665 + \frac{1}{6}$ (1.49025+ 2 (2.1017) + 2 (2.1017) + 2.10831)

= 1.23665 + $\frac{1}{6}$ (12.00536)

= 1.23665 + 2.00089

= 3.23754

Untuk

x_3 = 1.5 maka y_3 = 3.23754

x_4 = 2 maka y_4 = ?

$k_1 = \Delta x f\left(x_3, y_3\right)$

= (0.5) f (1.5,3.23754)

= (0.5) $\left(\ln 3 - {}^3\log 1.5 + e^{1.5} \sin 2.25\right)$

= (0.5) (4.21661)

= 2.10831

$k_2 = \Delta x f\left(x_3 + \frac{1}{2}\Delta x, y_3 + \frac{1}{2}k_1\right)$

= (0.5) f (1.75,4.291695)

$= (0.5)\ \left(\ln 3.5 - {}^{3}\log 1.75 + e^{1.75} \sin 3.0625\right)$

= (0.5) (1.19805)

= 0.59903

$$k_3 = \Delta x f\left(x_3 + \frac{1}{2}\Delta x, y_3 + \frac{1}{2}k_2\right)$$

= (0.5) f (1.75,3.2368)

$= (0.5)\ \left(\ln 3.5 - {}^{3}\log 1.75 + e^{1.75} \sin 3.0625\right)$

= (0.5) (1.19805)

= 0.59903

$$k_4 = \Delta x f\left(x_3 + \Delta x, y_3 + k_3\right)$$

= (0.5) f (2,3.83657)

$= (0.5)\ \left(\ln 4 - {}^{3}\log 2 + e^{2} \sin 4\right)$

= (0.5) (-0.1987)

= -0.09935

$y_4 = 3.23754 + \frac{1}{6}$ (2.10831 + 2 (0.59903) + 2 (0.59903) – 0.09935)

$= 3.23754 + \frac{1}{6}$ (4.40508)

= 3.23754 + 0.73418

= 4.3194

Sehingga dapat kita bentuk tabel seperti di bawah ini

x_i	y_i
0	0
0.5	0.30292
1	1.23665
1.5	3.23754
2	4.3194

Tabel 3.2. Nilai-nilai pada titik-titik sebelumnya yang didapat dengan menggunakan metode Runga-Kutta orde keempat

Nilai-nilai *y* pada tabel diatas digunakan sebagai pemulai (*starting value*) untuk menghitung integral numerik dengan menggunakan metode milne dan metode Adam orde keempat

Dari tabel di atas maka nilai f_n, f_{n-1}, f_{n-2}, dan f_{n-3} dapat di tentukan sebagai berikut:

$f_n = f_4$ = f (2, 3.58522)

$= \left(\ln 4 - {}^3\log 2 + e^2 \sin 4\right)$

= -0.1987

$f_{n-1} = f_3$ = f (1.5, 3.23754)

$= \left(\ln 3 - {}^3\log 1.5 + e^{1.5} \sin 2.25\right)$

= -1.6109

$f_{n-2} = f_2$ = f (1, 1.23665)

$= \left(\ln 2 - {}^3\log 1 + e^1 \sin 1\right)$

= 1.49025

$f_{n-3} = f_1$ = f (0.5, 0.30292)

$= \left(\ln 1 - {}^{3}\log 0.5 + e^{0.5} \sin 0.25\right)$

= 0.51942

Dengan Metode Milne

Pertama akan digunakan rumus prediktor (3.1) untuk membuat perkiraan awal dari nilai *y* tersebut pada titik *x* selanjutnya. Kemudian diperbaiki dengan memakai rumus korektor (3.2).

Prediktor:

$$y_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4h}{3}\left(2 f_{n-2} - f_{n-1} + 2 f_n\right)$$

$y_5 = 1.23665 + \frac{2}{3}$ (2 (1.49025) – 0.51942+ 2 (-2.41835))

$= 1.23665 + \frac{2}{3}$ (-2.37562)

= 1.23665 – 1.58375

= -0.3471

F_5 = f (1) = 1 e^2 = 7.38906

Korektor:

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}\left(f_{n-1} + 4 f_n + f_{n+1}\right)$$

$y_5 = 3.23754 + \frac{0.5}{2}$ (2.10831+ 4 (-2.41835) + 7.38906)

$= 3.23754 + \frac{0.5}{2}$ (-0.17675)

= 3.23754 – 0.04419

$= 3.19335$

$$\varepsilon_a = \left| \frac{3.19335 - (-0.3471)}{3.19335} \times 100\% \right|$$

$= 110\%$

Karena ε_a pada korektor masih lebih besar dari ε_s sehingga harus dilakukan iterasi sampai $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$. Hal ini akan dilakukan dengan menggunakan program komputer.

Dengan metode Adam orde keempat

Dari nilai-nilai y pada titik-titik x_{i-1}, …, x_{i-4} pada tabel 5 digunakan untuk menghitung nilai y pada titik-titik x_{i+1} berikutnya dengan menggunakan metode adam orde keempat

Langkah pertama digunakan rumus prediktor korektor (3.3) untuk membuat estimasi awal. Selanjutnya digunakan rumus korektor (3.4) untuk memperbaiki nilai pada perkiraan awal sebelumnya

Pada titik $x_{i+1} = 1.0$

Prediktor (Adam Bashforth)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left(55 f_n - 59 f_{n-1} + 37 f_{n-2} - 9 f_{n-3}\right)$$

$Y_5 = 3.58522 + \frac{0.5}{24}$ (55(-2.41835) – 59 (2.10831) + 37(1.49025) – 9 (0.51942)

$= 3.58522 + \frac{0.5}{24}$ (-206.93507)

$= 3.58522 - 4.31115$

$= -0.72593$

$F_5 = f(1) = 1\ e^2 = 7.38906$

Korektor (Adam Moulton)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left(9 f_{n+1} 9 f_n - 5 f_{n-1} + f_{n-2}\right)$$

$$= 3.58522 + \frac{0.5}{24}\ (9\ (7.38906) - 19\ (-2.41835) - 5\ (2.10831) + 1.49025)$$

$$= 3.58522 + \frac{0.5}{24}\ (103.39889)$$

$= 3.58522 + 2.15414$

$= 5.73936$

$$\varepsilon_a = \left| \frac{5.73936 - (-0.72593)}{5.73936} \times 100\% \right|$$

$= 113\%$

Karena ε_a pada korektor masih lebih besar dari ε_s sehingga harus dilakukan iterasi sampai $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$. Hal ini akan dilakukan dengan menggunakan program komputer.

2.5 Tinjauan Agama terhadap Hasil Pembahasan

Setiap permasalahan dalam bentuk matematika pasti dapat diselesaikan. Jika persamaan matematika tersebut mempunyai bentuk yang sederhana maka penyelesiannya dilakukan secara analitik. Tetapi jika persamaan itu tidak dapat diselesaikan secara anaitik, maka persamaan tersebut dapat diselesaikan secara numerik diantaranya adalah dengan integrasi linier. Integrasi linier haruslah dikerjakan dengan metode yang tepat. Berdasarkan bahasan yang telah dipaparkan di depan, ditemukan bahwa integrasi linier juga bisa dilakukan dengan menggunakan metode multistep yaitu metode Adam dan metode Milne. Artinya, metode multistep adalah metode yang tepat untuk menyelesaikan integrasi numerik. Sehingga tingkat kesalahan (error) dari masing-masing metode juga dapat diketahui, sehingga dapat pula diketahui metode yang paling signifikan diantara kedua metode multistep tersebut (Triatmodjo, 2002).

Dalam Al Qur'an juga dijelaskan mengenai integrasi numeric. Perhatikan surat Al Baqarah ayat 261 berikut:

مَّثَلُ ٱلَّذِينَ يُنفِقُونَ أَمْوَٰلَهُمْ فِى سَبِيلِ ٱللَّهِ كَمَثَلِ حَبَّةٍ أَنۢبَتَتْ سَبْعَ سَنَابِلَ فِى كُلِّ
سُنۢبُلَةٍ مِّا۟ئَةُ حَبَّةٍ ۗ وَٱللَّهُ يُضَٰعِفُ لِمَن يَشَآءُ ۗ وَٱللَّهُ وَٰسِعٌ عَلِيمٌ ﴿٢٦١﴾

Artinya: *Perumpamaan (nafkah yang dikeluarkan oleh) orang-orang yang menafkahkan hartanya di jalan Allah adalah serupa dengan sebutir benih yang menumbuhkan tujuh bulir, pada tiap-tiap bulir seratus biji. Allah melipat gandakan (ganjaran) bagi siapa yang Dia kehendaki. Dan Allah Maha Luas (karunia-Nya) lagi Maha Mengetahui.*

Dalam tafsir Al Aisar dijelaskan makna katanya sebagai berikut:

Perumpamaan orang-orang yang menafkahkan harta.	مَّثَلُ ٱلَّذِينَ يُنفِقُونَ
Semua hal yang akan mengantar manusia untuk mendapat ridha Allah seperti iman dan amal saleh	سَبِيلِ للَّهِ
Menambah dan memperbanyak sehingga menjadi berlipat ganda dari sebelumnya	يُضَٰعِفُ

(Al-Jazairi, Abu Bakar Jabir, 2004:444)

Dalam tafsir As Sa'di dijelaskan bahwa ayat diatas merupakan anjuran yang agung dari Allah untuk hamba-hambaNya untuk menafkahkan harta mereka di jalanNya; yaitu jalan yang menyampaikannya kepadaNya. Termasuk dalam hal ini adalah menafkahkan dalam meningkatkan ilmu yang bermanfaat, dalam mengadakan persiapan berjihad di jalanNya dalam mempersiapkan para tentara maupun membekali mereka, dan dalam segala macam kegiatan-kegiatan sosial yang berguna bagi kaum muslimin. Kemudian disusul berinfak kepada orang-orang yang mebutuhkan, fakir miskin, dan kemungkinan saja dua cara itu dapat disatukan hingga menjadi nafkah untuk menolong orang-orang yang membutuhkan dan sekaligus bakti sosial dan ketaatan.

Nafkah-nafkah seperti ini akan dilipat gandakan. Kelipatan ini dengan tujuh ratus kalil lipat hingga berlipat ganda banyaknya lagi dari itu. Karena itu Allah berfirman وَٱللَّهُ يُضَٰعِفُ لِمَن يَشَآءُ itu tentunya sesuai dengan apa yang ada dalam hati orang yang berinfak tersebut dari keimanan dan keikhlasan yang tulus, dan juga sesuai dengan kebaikan dan manfaat yang dihasilkan dari infaknya tersebut, karena beberapa jalan kebajikan dengan berinfak padanya akan mengakibatkan manfaat-manfaat yang terus menerus dan kemaslahatan yang bermacam-macam, maka balasan itu tentunya sesuai dengan jenis perbuatannya (Abdurrahman, 2007:421)

Dalam matematika ayat di atas ditafsirkan secara matematis. Jika dimisalkan butir = y, bulir = z dan dan biji = x, maka akan ada dua persamaan yang mana salah satunya adalah merupakan dasar dari persamaan yang lain. Artinya jika 1 butir = 7 bulir dan 1 bulir = 100 biji maka jika ditulis dalam persamaan matematika maka akan menghasilkan $y = 7z$ dan $z = 100x$. Maka $y = 7(100x)$. Sehingga akan menghsilkan $y = 700x$.

Contoh rumus lain adalah dalam surat Al An'am ayat 160 berikut:

مَن جَآءَ بِٱلْحَسَنَةِ فَلَهُۥ عَشْرُ أَمْثَالِهَا ۖ وَمَن جَآءَ بِٱلسَّيِّئَةِ فَلَا يُجْزَىٰٓ إِلَّا مِثْلَهَا وَهُمْ لَا يُظْلَمُونَ ١٦٠

Artinya: Barangsiapa membawa amal yang baik, maka baginya (pahala) sepuluh kali lipat amalnya; dan barangsiapa yang membawa perbuatan jahat

Dalam tafsir Al Aisar dijelaskan makna katanya sebagai berikut:

Yakni dating dihari kiamat dengan membawa kebaikan, yaitu iman kepada Allah; mengakui keesaanNya serta MenaatuNya dan rasulNya	مَن جَآءَ بِٱلْحَسَنَةِ

(Al-Jazairi, Abu Bakar Jabir, 2004:975)

Ayat ini merupakan penjelasan yang rinci bagi ayat lainnya yang disebutkan secara global yaitu firmanNya: مَن جَآءَ بِٱلْحَسَنَةِ فَلَهُۥ .(Abdullah dan Abdurrahman, 2007:337).

Dalam matematika, penafsiran ayat ini adalah merupakan rumus dari pahala dan dosa. Rumus matematika untuk menentukan balasan perbuatan kebaikan dan kejahatan mendapatkan balasan 1 kali amal kejahatan tersebut.

Secara matematika diperoleh rumus

$$y = 10x$$

Untuk amal kebaikan, dan

$$y = x$$

Untuk amal kejahatan. Variabel x menyatakan nilai amal dan y menyatakan nilai balasan yang diperoleh (Abusysyakir, 2007: 82).

Dalam integrasi numerik, diperlukan hitungan-hitungan untuk setiap iterasi. Dalam penghitungan pada setiap iterasi, operasi penjumlahan, pengurangan dan pembagian seperti yang ada dalam Al Qur'an juga diterapkan. Penghitungan dalam setiap iterasi harus dilakukan secara teliti. Karena setiap iterasi akan berhubungan degan iterasi selanjutnya. Sehingga, tingkat kesalahan (error) bisa diminimalkan.

Penghitungan error pada setiap metode didasarkan pada rumus prediktor dan korektor dari setiap metode. Dalam menghitung error dari setiap metode harus berdasarkan pada beberapa iterasi sebelumnya. Hal ini sejalan dengan penghitungan pahala dan dosa oleh Allah. Allah menghitung pahala setiap hambanya dengan melihat kebaikan atau kebajikan yang telah dilakukan oleh hambanya. Begitu pula dengan penghitungan dosa, Allah menghitung dosa setiap hambanya berdasarkan perbuatan-perbuatan yang tidak sesuai yang dilakukan oleh hambanya. Allah menghitung pahala dan dosa setiap hambanya dengan teliti dan cepat karena Allah adalah Maha cepat dan teliti perhitungganNya. Hal ini sejalan dengan firman Allah dalam Surat Maryam ayat 94 yang berbunyi:

لَّقَدۡ أَحۡصَىٰهُمۡ وَعَدَّهُمۡ عَدّٗا ٩٤

Artinya: Sesungguhnya Allah telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti.

Allah juga berfirman dalam surat Alam Nasyrah ayat 5 yang berbunyi:

فَإِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرًا ٥

Artinya: Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan, Yang menyatakan bahwa semua permasalahan pastilah dapat diselesaikan asalkan manusia itu berusaha dengan sungguh-sungguh.

Dalam mempelajari ilmu pastilah tidak akan sia-sia begitu pula dengan matematika. Pada bab sebelumnya disebutkan tentang dampak positif belajar matematika dalam hal ini integrasi numerik. Diantaranya adalah sikap teliti, bertanggung jawab, dan pantang menyerah. Dengan ketelitian, maka penghitungan yang dilakukan pada setiap iterasi akan menghasilkan hasil yang benar dan hasil yang diperoleh harus bisa dipertanggung jawabkan. Jika penghitugan pada setiap iterasi mengalami kesalahan, maka harus dicek dan diulangi lagi hingga memperoleh hasil yang benar (Abdusysyakir, 2007).

Jadi, pembelajaran matematika sangat penting dalam rangka pembentukan pribadi yang berkualitas. Matematika tidak hanya dipandang sebagai ilmu yang mementingkan kemampuan kognitif, akan tetapi matematika sangat berkaitan dengan pembentukan sikap dan perilaku yang terpuji. Matematika selain berguna untuk mengasah kemampuan berpikir, juga berguna untuk membentuk akhlaq mahmudah. Oleh karena itu, sebagai seseorang yang mempunyai paradigma ulul albab maka haruslah seorang matematikawan bisa mewujudkan akhlaq mahmudah.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Untuk mengintegrasikan sebuah persamaan dengan metode Adam dan metode Milne seperti yang telah dijelaskan pada bab III sebelumnya, maka dapat diambil kesimpulan bahwa:

Langkah pertama yang harus dilakukan adalah menyelesaikan persamaan matematika (baik persamaan linier maupun persamaan non linier) dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat untuk menentukan nilai awal. Sehingga akan diperoleh nilai-nilai y yang akan digunakan sebagai pemulai (*starting value*) untuk menghitung integral numerik dengan menggunakan metode Milne dan metode Adam orde keempat. Dengan menggunakan rumus prediktor dan korektor pada metode Adam orde keempat dan Metode Milne yang didasarkan pada rumus terbuka dan tertutup Newton Cotes, sehingga dapat pula di gunakan untuk menghitung kesalahan perkiraan sehingga akan diperoleh error yang diinginkan

4.2 Saran

Saran yang diberikan untuk penulis berikutnya adalah:

1. Mengkaji lebih lanjut tentang metode multistep yang lain
2. Menggunakan metode multistep yang lain untuk menyelesaikan masalah integrasi numerik.

DAFTAR PUSTAKA

Abdullah. 2006, *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 3.* Jakarta: Pustaka Imam asy Syafi'i

Abdusysyakir, M.Pd. 2006, *Ada Matematika Dalam Al Qur'an*. Malang: UIN Press

Abdusysyakir, M.Pd. 2006, *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Press

Al-Jazairi, Abu Bakar Jabir, 2006, *Tafsir Al Qur'an Al Aisar Jilid 1*. Jakarta: Darus Sunnah

Al-Jazairi, Abu Bakar Jabir, 2006, *Tafsir Al Qur'an Al Aisar Jilid 2*. Jakarta: Darus Sunnah

Atkinson, Kendal E. 1988, *An Introduction Numerical Analysis Second Edition*, New York: Jhon Wiley and Sons, Inc.

As Sa'di, Syaikh abdurrahman bin Nashir. 2007, *Tafsir As Sa'di*. Jakarta: Pustaka Sahifa

Chapra, Steven C dan Canale, Raymon P, 2002, *Numerical Methods for Angineers With Software and Programming Application Fourth Edition*, New York: The Mc Grow Hill Companies. Inc.

Chapra, Steven C dan Canale, Raymon P, 1985, *Metode Numerik Untuk Teknik Dengan Penerapan Pada Komputer Pribadi*, Jakarta: Universitas Indonesia

Munir, Renaldi. 2006, *Metode Numerik*, Bandung: Informatika

Sahid, M.Sc. 2005, *Pengantar Komputasi Numerik dengan Matlab*, Yogyakarta: ANDI Yogyakarta

Triatmodjo, Bambang. 2002, *Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer*. Yogyakarta: Beta Offset

www.google.co.id/search?q=metode+adam+dan+milne&hl=id&start=30&sa=N

Lampiran 1

List Program Metode Runge Kutta Orde Keempat dengan menggunakan bantuan MATLAB

```
function F=fexpl(x,y)
%pers. diferential yang diuji
F = x*exp(2*x);


function [xSol,ySol] = runKut4(dEqs,x,y,xStop,h)
% 4th-order Runge-Kutta integration.
% USAGE: [xSol,ySol] = runKut4(dEqs,x,y,xStop,h)
% INPUT:
% dEqs  = handle of function that specifies the
%         1st-order differential equations
%         F(x,y) = [dy1/dx dy2/dx dy3/dx ...].
% x,y   = initial values; y must be row vector.
% xStop = terminal value of x.
% h     = increment of x used in integration.
% OUTPUT:
% xSol = x-values at which solution is computed.
% ySol = values of y corresponding to the x-values.

if size(y,1) > 1 ; y = y'; end  % y must be row vector
xSol = zeros(2,1); ySol = zeros(2,length(y));
xSol(1) = x; ySol(1,:) = y;
i = 1;
while x < xStop
    i = i + 1;
    h = min(h,xStop - x);
    K1 = h*feval(dEqs,x,y);
    K2 = h*feval(dEqs,x + h/2,y + K1/2);
    K3 = h*feval(dEqs,x + h/2,y + K2/2);
    K4 = h*feval(dEqs,x+h,y + K3);
    y = y + (K1 + 2*K2 + 2*K3 + K4)/6;
    x = x + h;
    xSol(i) = x; ySol(i,:) = y;  % Store current solv.
end


[xsol,ysol]=runkut4(@fexpl,0,0,2,h);
plot(xsol(1:11),ysol(1:11),'-o')
title('Rungkutte4')
xlabel('x')
ylabel('y')
```

Output Metode Runga Kutta Orde keempat

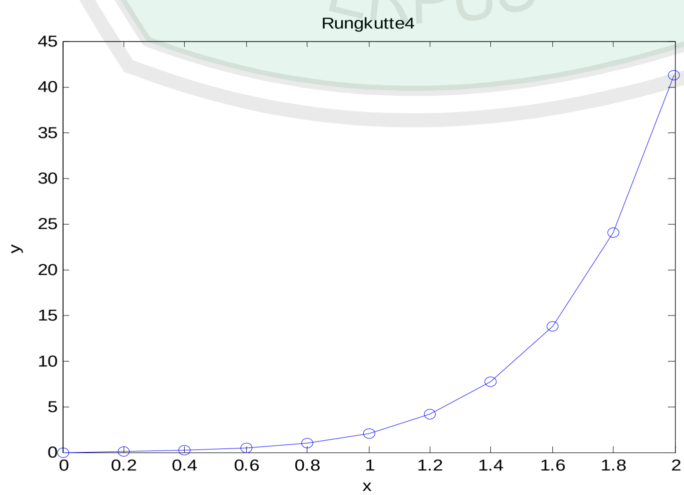
```
xsol =

         0
    0.2000
    0.4000
    0.6000
    0.8000
    1.0000
    1.2000
    1.4000
    1.6000
    1.8000
    2.0000
    2.0000


ysol =

         0
    0.0262
    0.1387
    0.4160
    0.9930
    2.0973
    4.1082
    7.6503
   13.7432
   24.0394
   41.1995
   41.1995
```

Gambar grafik metode Runge Kutta Orde Keempat



Lampiran 2

List Program Metode Milne dengan menggunakan bantuan MATLAB

```
clear,clc;
h=0.2;
[xsol,ysol]=runkut4(@fexp1,0,0,2,h)
xsol=xsol(2:11);
ysol=ysol(2:11);
ypre=ysol(1:4);
ycor=ysol(1:4);
xsol1=xsol(5);
for i=1:5
    f(i)=feval(@fexp1,xsol(i),0);
end
for i=4:9;
% e=10;
% while e > 0.05
    xsol1=xsol1+h;
    xsol=[xsol;xsol1];
    f1=feval(@fexp1,xsol(i+2),0);
    f=[f f1];
%   milne
    ypre1=ypre(i-3)+0.8/3*(2*f(i-2)-f(i-1)+2*f(i));
%     while
    ycor1=ycor(i-1)+0.2/3*(f(i-1)+4*f(i)+f(i+1));
%     end
%     e=abs(ycor1-ypre1)/ycor1*100;
%     etot(i)=e;
    ypre=[ypre;ypre1];
    ycor=[ycor;ycor1];
%     i=i+1;

% end
end
plot(xsol(1:10),ysol,'-bo',xsol(1:10),ypre,'-ro',xsol(1:10),ycor,'-go')
```

Out put Metode Milne

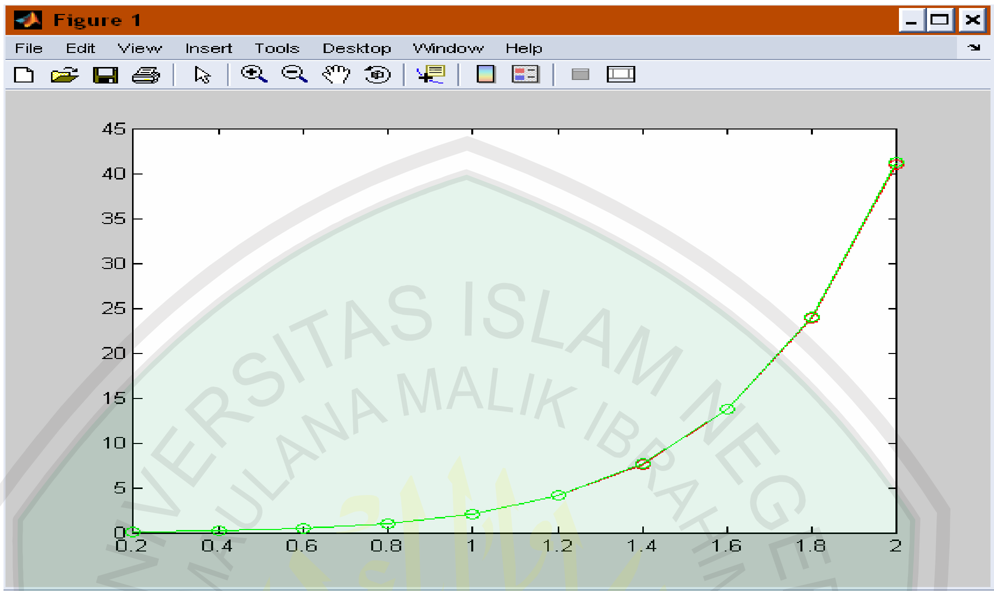
```
xsol =

         0
    0.2000
    0.4000
    0.6000
    0.8000
    1.0000
    1.2000
    1.4000
    1.6000
    1.8000
    2.0000
    2.0000


ysol =

         0
    0.0262
    0.1387
    0.4160
    0.9930
    2.0973
    4.1082
    7.6503
   13.7432
   24.0394
   41.1995
   41.1995
```

Gambar Grafik Metode Milne



Lampiran 3

List Program Metode Adam Orde Keempat dengan menggunakan bantuan MATLAB

```
clear,clc;
h=0.2;
[xsol,ysol]=runkut4(@fexp1,0,0,2,h)
xsol=xsol(2:11);
ysol=ysol(2:11);
ypre=ysol(1:4);
ycor=ysol(1:4);
xsol1=xsol(5);
for i=1:5
    f(i)=feval(@fexp1,xsol(i),0);
end
for i=4:9;
% e=10;
% while e > 0.05
    xsol1=xsol1+h;
    xsol=[xsol;xsol1];
    f1=feval(@fexp1,xsol(i+2),0);
    f=[f f1];
%   ABM
    ypre1=ypre(i)+h/24*(55*f(i)-59*f(i-1)+37*f(i-2)-9*f(i-3));
    ycor1=ypre(i)+h/24*(9*f(i+1)+9*f(i)-5*f(i-1)+f(i-2));
%     e=abs(ycor1-ypre1)/ycor1*100;
%     etot(i)=e;
    ypre=[ypre;ypre1];
    ycor=[ycor;ycor1];
%     i=i+1;
% end
end
plot(xsol(1:10),ysol,'-bo',xsol(1:10),ypre,'-ro',xsol(1:10),ycor,'-go')
legend('RKT','PRE','COR')
title('Kurva ADAM-BM')
xlabel('x')
ylabel('y')
```

Output Metode Adam Orde Keempat

```
xsol =

         0
    0.2000
    0.4000
    0.6000
    0.8000
    1.0000
    1.2000
    1.4000
    1.6000
    1.8000
    2.0000
    2.0000


ysol =

         0
    0.0262
    0.1387
    0.4160
    0.9930
    2.0973
    4.1082
    7.6503
   13.7432
   24.0394
   41.1995
   41.1995
```

Gambar Grafik Metode Adam Orde Keempat