KAJIAN TENTANG GRAF PERFECT

SKRIPSI

Oleh:
NURUL IMAMAH AH
NIM: 04510008

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2008

KAJIAN TENTANG GRAF PERFECT

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
Dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
NURUL IMAMAH AH
NIM 04510008

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2008

KAJIAN TENTANG GRAF PERFECT

SKRIPSI

Oleh:
NURUL IMAMAH AH
NIM 04510008

Telah Disetujui untuk Diuji

Malang, 26 Juli 2008

Dosen Pembimbing I,	Dosen Pembimbing II,
Abdussakir, M.Pd	**Abdul Azis, M.Si**
NIP 150 327 247	**NIP 150 377 256**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M. Si
NIP 150 318 321

KAJIAN TENTANG GRAF PERFECT

SKRIPSI

Oleh:
NURUL IMAMAH AH
NIM 04510008

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal:

31 Juli 2008

Susunan Dewan Penguji:			**Tanda Tangan**
1.	**Penguji Utama**	**: Wahyu H. Irawan, M.Pd** **NIP: 150 300 415**	**( )**
2.	**Ketua**	**: Sri Harini, M.Si** **NIP: 150 318 321**	**( )**
3.	**Sekretaris**	**: Abdussakir, M.Pd** **NIP: 150 327 247**	**( )**
4.	**Anggota**	**: Abdul Azis, M.Si** **NIP: 150 377 256**	**( )**

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP: 150 318 321

...Salaaman Wahtirooman Sysauqon 'amiiqon mim ba'iid

Teriring Doa Semoga Skripsi ini Bermanfaat dan menjadi Kesuksesan Dunia dan Akhirat

Dengan iringan doa dan rasa syukur yang teramat besar,

Karya besar ini kupersembahkan kepada:

- ***Ayahanda Ahmad Yahdi dan ibunda Siti Mutmainnah tercinta. Ayah, karena perasan keringatmulah ananda bisa memperoleh kesempatan untuk menjelajahi dunia keilmuan setinggi ini. Dan karena doamu ananda bisa mewujudkan cita-cita ananda. ananda sangat berterimakasih kepadamu.***
- ***Ibu kaulah wanita surga, dengan suara lembut penuh keluh kesah, kau doakan putri-putrimu untuk meraih cita dan meraih ridlo ilahi, dengan keteguhan hati dan ketulusan jiwa, kau jadikan ananda sebagai orang berharga.***
- ***Ayah, Ibu, terimakasih atas segala kasih sayang, pengorbanan dan kebaikan kalian, karena kalianlah ananda mengerti akan arti ilmu dalam hidup ini. Dari lubuk hati yang paling dalam, ananda hanya bisa berkata "engkaulah Ayah dan Ibu yang dirindukan syurga dan engkaulah ayah dan ibu yang sangat dirindukan oleh setiap manusia yang lahir dibumi ini" semoga amal kalian diterima disisi Allah, Amin ya Rabbal Alamin***
- ***Saudara-saudaraku; Mba' Faiq, Mas Ichonk, Mba' reha, Mba' rois,dan nenekku Mak Hah Yang selalu memberiku bantuan dan motivasi n seluruh keluargaku…***

- *Calon Suamiku tercinta, Mas Jalil yang memberikanku warna-warni kehidupan, terima kasih. Jadilah sahabat tuk seumur hidupku. Dambaan hatiku. Penggerak jiwaku yang kaku.*
- *Bapak Abdussakir, M.Pd, tiada ungkapan yang pantas kuucap kecuali untaian ucapan terima kasih karena bimbinganmu yang amat berarti.*
- *Bapak Abdul Azis, M.Si. Terima kasih atas bimbingannya.*
- *Dosen Faforitku terhormat; Bapak Wahyu Henky Irawan. Semoga Allah selalu memberikan rahmat kepada Beliau…Amin*
- *Bapak Drs. H. Turmudzi, M.Si dan ibu yang selalu memberikanku Motivasi, bimbingan, kasih sayang serta semangat. Terima kasih.*
- *Bapak Baharudin Ghazali. Terima kasih atas bantuannya.*
- *Para Dosen dan Guru-guruku terhormat, khususnya ustadz jamaluddin, terima kasih atas nasehat-nasehatnya…*
- *Teman-temanku seperjuangan; Upik, H5, Vera, n MSQ community (nasrifa, atus, lina, aminah n iffah) plus Anwar n semuanya trims atas motivasinya…*
- *Sahabat-sahabat Musyrifah di Khodijah dan seluruh Musyrif-Musyrifah Ma'had Sunan Ampel Al-Ali…*
- *Teman-teman seperjuanganku angkatan 2004-2008*

Motto:

خَيْرُكُمْ مَنْ تَعَلَّمَ الْقُرْأنَ وَعَلَّمَهُ

"Sebaik-baik manusia adalah yang belajar Al-Qur'an dan mengajarkannya"

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : NURUL IMAMAH AH

NIM : 04510008

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 29 Juli 2008

Yang membuat pernyataan

Nurul Imamah AH

NIM. 04510008

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Segala puji bagi Allah SWT karena atas rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Malang.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Untuk itu, iringan do'a dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, utamanya kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
2. Prof. Drs Sutiman Bambang Sumitro, SU, D.Sc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.
3. Ibu Sri Harini, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.
4. Bapak Abdussakir, M.Pd yang telah bersedia meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan dan pengarahan selama penulisan skripsi di bidang matematika.
5. Bapak Abdul Azis, M.Si yang telah bersedia memberikan bimbingan dan pengarahan selama penulisan skripsi di bidang agama.
6. Segenap dosen pengajar atas ilmu yang telah diberikan kepada penulis.
7. Kedua orang tua tercinta. Ayah Umi yang selalu mendidik, mencintai serta selalu menjadi motivator terbaik bagi penulis.
8. Segenap keluarga yang senantiasa memberikan do'a dan dukungan yang terbaik bagi penulis.
9. Teman-teman Matematika, terutama angkatan 2004 beserta semua pihak yang telah membantu penyelesaian skripsi ini.

Dalam penyusunan skripsi ini tentunya masih terdapat banyak kesalahan dan kekurangan, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran demi perbaikan skripsi ini. Akhirnya, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Amien.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, 26 Juli 2008

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Imamah AH, Nurul. 2008**. Kajian Tentang Graf perfect.** Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
Pembimbing: Abdussakir, M.Pd
Abdul Azis, M.Si

Kata kunci: *Graf, Pewarnaan Titik, order, Clique, Khromatik Graf perfect,*

Pewarnaan titik pada graf *G* adalah pemberian warna untuk setiap titik pada graf *G*, sehingga tidak ada dua titik yang terhubung langsung mendapatkan warna yang sama. Banyaknya warna terkecil yang diberikan pada titik-titik di graf *G* sedemikian hingga untuk setiap dua titik yang terhubung langsung mendapatkan warna yang berbeda disebut dengan bilangan khromatik. Banyaknya titik yang dimiliki oleh graf *G* disebut dengan order dari *G*. Order maksimum dari subgraf komplit yang dapat dibentuk dari suatu graf *G* disebut dengan bilangan clique.

Salah satu aplikasi dari bilangan clique dan bilangan khromatik suatu graf *G* adalah pada graf perfect. Graf perfect adalah suatu graf yang memiliki bilangan clique dan bilangan khromatik yang sama.

Adapun langkah-langkah menentukan graf perfect adalah sebagai berikut:

1. Menentukan subgraf komplit maksimum yang dapat dibentuk dari graf *G*
2. Menentukan bilangan clique $\omega(G)$ dan menentukan bilangan khromatik $\chi(G)$ pada beberapa kasus untuk menentukan pola.
3. Pola yang diperoleh dinyatakan dengan teorema.
4. Membuktikan teorema.

Berdasarkan pembahasan dalam skripsi ini diperoleh bahwa graf kosong, graf komplit, graf bipartisi komplit, graf sikel genap, dan graf lintasan adalah graf perfect, karena masing-masing graf tersebut memiliki bilangan clique dan bilangan khromatik yang sama.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam kehidupan di dunia, manusia tidak lepas dari berbagai permasalahan. Permasalahan-permasalahan tersebut menyangkut berbagai aspek, dimana dalam penyelesaiannya diperlukan sebuah pemahaman melalui suatu metode dan ilmu bantu tertentu. Salah satunya adalah ilmu matematika. Matematika merupakan alat untuk menyederhanakan penyajian dan pemahaman masalah. Dalam bahasan matematika, suatu masalah dapat menjadi lebih sederhana untuk disajikan, dipahami, dianalisis, dan dipecahkan. Untuk keperluan tersebut, pertama dicari pokok masalahnya, kemudian dibuat rumusan atau model matematikanya (Purwanto, 1998: 1). Matematika adalah ratunya ilmu pengetahuan, sehingga matematika tidak dapat dilepaskan dari berbagai ilmu yang ada dan matematika juga membantu dalam kehidupan sehari-hari (Falaqiyah, 2004: 1).

Salah satu cabang ilmu matematika yang bermanfaat dalam kehidupan sehari-hari adalah Teori Graf. Pada Teori Graf diberikan model matematika untuk setiap himpunan dari sejumlah obyek diskrit, dimana beberapa pasangan unsur dari himpunan tersebut terikat menurut suatu aturan tertentu. Obyek diskrit dari dari suatu himpunan misalnya dapat berupa orang-orang dengan aturan kenal, atau juga himpunan nama kota dengan aturan jalan yang menghubungkan antara kota satu ke kota yang lain.

Secara umum beberapa konsep dari disiplin ilmu telah dijelaskan dalam Al-Quran. Salah konsep dari disiplin ilmu matematika yang terdapat dalam Al-Qur’an adalah masalah teori graf. Teori graf merupakan salah satu cabang dari matematika yang didefinisikan sebagai himpunan tidak kosong yang memuat elemen-elemen yang disebut titik, dan pasangan tidak terurut dari elemen-elemen itu disebut sisi.

Saat ini teori graf semakin berkembang dan menarik. Hal ini disebabkan teori graf merupakan teori yang unik dan memiliki banyak penerapan. Keunikan teori graf adalah kesederhanaan pokok bahasan yang dipelajarinya, karena dapat disajikan sebagai titik *(vertex)* dan sisi *(edge)*.

Menurut sejarah teori graf lahir pada tahun 1736 melalui tulisan L.Euler, seorang matematikawan Swiss, yang berisi tentang upaya pemecahan masalah jembatan Konigsberg yang sangat terkenal di Eropa (Sutarno, 2001: 65). Di Konigsberg (sebelah timur Prussia, Jerman) sekarang bernama Kaliningrad terdapat sungai Pregal yang mengitari pulau Kneiphof lalu bercabang menjadi dua buah anak sungai tesebut. Ada tujuh buah jembatan yang menghubungkan daratan yang dibelah oleh sungai tersebut. Masalahnya adalah “Apakah mungkin melalui ketujuh jembatan itu masing-masing tepat satu kali, dan kembali ke tempat semula?. Euler membuat model masalah tersebut dalam bentuk graf. Daratan dinyatakannya sebagai sebagai titik atau *(vertex)*; dan jembatan dinyatakannya sebagai garis yang disebut *sisi (edge)*. Jawaban yang dikemukakannya adalah tidak mungkin orang melalui ketujuh jembatan itu masing-masing satu kali dan kembali lagi ke tempat asal keberangkatan jika derajat setiap titik tidak seluruhnya genap, yaitu banyaknya garis yang terkait langsung dengan titik.

Berikut ini adalah firman Allah yang menyatakan tentang keterkaitan antara titik sebagai awal penciptaan manusia dan garis sebagai proses perjalanan manusia yang terdapat dalam surat Al-Mukminun ayat 12-16 yang berbunyi:

وَلَقَدۡ خَلَقۡنَا ٱلۡإِنسَٰنَ مِن سُلَٰلَةٖ مِّن طِينٖ ﴿١٢﴾ ثُمَّ جَعَلۡنَٰهُ نُطۡفَةٗ فِي قَرَارٖ مَّكِينٖ ﴿١٣﴾ ثُمَّ
خَلَقۡنَا ٱلنُّطۡفَةَ عَلَقَةٗ فَخَلَقۡنَا ٱلۡعَلَقَةَ مُضۡغَةٗ فَخَلَقۡنَا ٱلۡمُضۡغَةَ عِظَٰمٗا فَكَسَوۡنَا ٱلۡعِظَٰمَ
لَحۡمٗا ثُمَّ أَنشَأۡنَٰهُ خَلۡقًا ءَاخَرَۚ فَتَبَارَكَ ٱللَّهُ أَحۡسَنُ ٱلۡخَٰلِقِينَ ﴿١٤﴾ ثُمَّ إِنَّكُم بَعۡدَ ذَٰلِكَ
لَمَيِّتُونَ ﴿١٥﴾ ثُمَّ إِنَّكُمۡ يَوۡمَ ٱلۡقِيَٰمَةِ تُبۡعَثُونَ ﴿١٦﴾

Dan Sesungguhnya kami Telah menciptakan manusia dari suatu saripati (berasal) dari tanah.
Kemudian kami jadikan saripati itu air mani (yang disimpan) dalam tempat yang kokoh (rahim).
Kemudian air mani itu kami jadikan segumpal darah, lalu segumpal darah itu kami jadikan segumpal daging, dan segumpal daging itu kami jadikan tulang belulang, lalu tulang belulang itu kami bungkus dengan daging. Kemudian kami jadikan dia makhluk yang (berbentuk) lain. Maka Maha sucilah Allah, Pencipta yang paling baik.
Kemudian, sesudah itu, Sesungguhnya kamu sekalian benar-benar akan mati.
Kemudian, Sesungguhnya kamu sekalian akan dibangkitkan (dari kuburmu) di hari kiamat.

Ayat tersebut menyatakan bahwa manusia diciptakan dari suatu titik atau saripati, air mani, segumpal darah, dan lain sebagainya yang telah disebutkan dalam surat Al-Mukminun tersebut. Kemudian beberapa garis dalam suatu graf adalah proses perjalanan manusia dari awal diciptakan hingga kemudian mati dan dibangkitkan kembali.

Ayat Al-Qur’an tentang penciptaan manusia tersebut jika digambarkan dengan pasangan titik dan garis pada teori graf adalah sebagai berikut:

Dalam proses perjalanan kehidupannya, manusia memiliki karakter yang bermacam-macam ada yang baik dan ada yang buruk, sehingga semua manusia pasti memiliki dosa. Dosa yang ada pada diri manusia dimisalkan sebagai warna pada suatu graf, sehingga diharapkan manusia memiliki warna yang minimum atau dosa yang sedikit sekali. Hal tersebut dapat dilakukan dengan cara tidak selalu mengikuti hawa nafsu, karena nafsu itulah manusia yang hidup di muka bumi ini ada yang sempurna dan ada yang tidak sempurna. Dalam teori graf manusia yang sempurna dan tidak sempurna dimisalkan sebagai graf perfect dan graf tidak perfect.

Graf perfect adalah graf yang ditemukan oleh Claude Berge pada tahun 1960an. Ia memperkenalkan graf perfect sebagai graf yang memiliki bilangan clique dan bilangan khromatik yang sama. Bilangan clique didefinisikan sebagai order maksimum dari subgraf komplit pada graf G (Marthin, 1980:51). Sedangkan bilangan khromatik didefinisikan sebagai banyaknya warna terkecil yang diberikan pada titik-titik di graf G sedemikian hingga untuk setiap dua titik yang terhubung langsung mendapatkan warna yang berbeda (Rosen dalam Khotimah, 2006:3).

Kajian tentang graf perfect saat ini masih belum begitu banyak dikenal oleh orang. Berdasarkan hal tersebut, maka penulis mengambil judul skripsi ini, yaitu: **"Kajian tentang Graf Perfect "** .

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah di atas dapat ditarik rumusan permasalahan yang akan dibahas, yaitu bagaimana langkah-langkah menentukan suatu graf menjadi graf perfect.

1.3 Tujuan Penulisan

Adapun tujuan dari penulisan ini adalah untuk mengetahui langkah-langkah menentukan suatu graf menjadi graf perfect.

1.4 Batasan Masalah

Untuk tetap menjaga kedalaman pembahasan materi, penulisan tugas akhir ini dibatasi pada Obyek kajian graf kosong, graf komplit, graf bipartisi komplit, graf lintasan, dan graf sikel genap. Penulis hanya membatasi pada beberapa graf tersebut karena merupakan graf perfect.

Dalam teori graf, istilah yang dipakai belum baku sepenuhnya. Untuk itu setiap pilihan istilah dapat diterima asal digunakan secara konsisten. Istilah-istilah tersebut antara lain:

1. Titik = titik = noktah = node = vertex
2. Sisi = garis = edge.

1.5 Manfaat Penulisan

Penulisan karya ilmiah ini pada dasarnya diharapkan dapat memberikan manfaat terhadap beberapa pihak, diantaranya:

1. Bagi Penulis
   - Menambah wawasan dan ilmu pengetahuan tentang teori graf perfect.
2. Bagi Jurusan Matematika
   - Sebagai bahan pustaka tentang kajian graf perfect.

1.6 Metode Penelitian

1.6.1 Pendekatan dan jenis penelitian

Jenis dari penelitian ini adalah deskriptif kualitatif. Pendekatan yang digunakan adalah pendekatan kualitatif dengan metode kepustakaan.

Dalam pendekatan deskriptif kualitatif ini maka penulis menggunakan metode penelitian kepustakaan (Library Research). Metode penelitian kepustakaan yaitu penelitian yang dilakukan di dalam perpustakaan untuk mengumpulkan data dan informasi. Pengumpulan data dan informasi tersebut dapat dilakukan dengan bantuan bermacam material yang terdapat di ruang perpustakaan seperti buku-buku dan dokumen yang ada.

1.6.2 Data dan sumber data

Data yang digunakan penulis dalam rangka penyusunan skripsi ini adalah data-data yang meliputi bilangan-bilangan clique, bilangan khromatik, dan data-data lain yang sesuai.

Sumber data dalam penulisan skripsi ini diperoleh melalui buku-buku antara lain Gary Chartrand dan Linda Lesniak (Graphs and digraphs second edition) Robin J. Wilson dan John J. Watkins (Graph an Introductiory Approach) dan sumber-sumber lain yang relevan.

1.6.3 Tehnik Analisis data

Dalam menganalisis data, penulis melakukan persiapan dengan menghitung bilangan clique dan bilangan khromatik dari beberapa graf yang diteliti. Beberapa graf tersebut antara lain graf kosong, graf komplit, graf bipartisi komplit, graf lintasan, dan graf sikel genap. Selanjutnya menyimpulkan apakah graf-graf tersebut merupakan graf perfect .

1.7 Sistematika Pembahasan

Agar penulisan skripsi ini lebih terarah, mudah ditelaah dan dipahami, maka digunakan sistematika pembahasan yeng terdiri dari empat bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab dengan rumusan sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Pendahuluan meliputi: latar belakang permasalahan, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN PUSTAKA

Bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain berisi tentang dasar-dasar teori sebagai acuan dalam penulisan skripsi ini, antara lain teori mengenai graf perfect dan teori keagamaan berserta relevansi antara keduanya.

BAB III PEMBAHASAN

Pembahasan berisi tentang analisis graf kosong, graf komplit, graf bipartisi komplit, graf lintasan, dan graf sikel genap dengan beberapa pembuktian dari teorema-teorema yang diperoleh dari pola suatu graf.

BAB IV PENUTUP

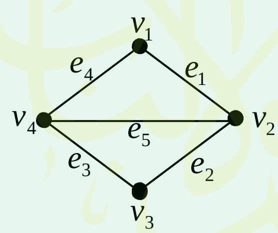
Pada bab ini akan dibahas tentang kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN TEORI

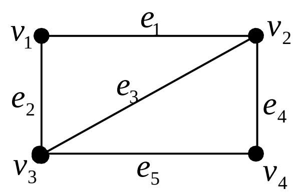
2.1. Graf

Graf *G* didefinisikan sebagai pasangan himpunan *(V(G),E(G)* dengan *V(G)* adalah himpunan berhingga tak kosong dari elemen-elemen yang disebut titik (vertex), dan *E(G)* adalah himpunan (boleh kosong) dari pasangan tak terurut *(u,v)* dari titik *u* dan *v* yang berbeda di *V* yang disebut sisi (edge). Jadi dapat diketahui bahwa komponen utama terbentuknya suatu graf *G* adalah titik. Sisi *e=(u,v)* di dalam graf G dapat ditulis dengan *e= uv*. Sebagai contoh graf G pada Gambar 2.1 adalah graf dengan V (G) = $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan E (G) = $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ dengan $e_1 = v_1v_2$, $e_2 = v_2v_3$, $e_3 = v_3v_4$, $e_4 = v_4v_1$, dan $e_5 = v_4v_2$.



Gambar 2.1 Titik dan Sisi pada Graf

Jika *e=uv* adalah sisi dari graf *G*, maka *u* dan *v* dikatakan *adjacent* atau terhubung langsung, sedangkan sisi *e* dikatakan terkait langsung atau *incident* pada titik *u* dan *v*, sebagai contoh pada Gambar 2.2 titik v_1 dikatakan terhubung langsung dengan titik v_2 dan v_3, tetapi v_1 tidak terhubung langsung dengan titik v_4, sedangkan sisi e_2 terkait langsung pada titik v_1 dan v_3. Sisi e_4 terkait langsung pada titik v_2 dan v_4, tetapi sisi e_1 tidak terkait langsung pada titik v_4.



Gambar 2.2 Titik dan Sisi yang Adjacent dan Insident

Banyaknya titik yang dimiliki oleh graf *G* disebut order dari *G* dan ditulis dengan $p(G)$ atau *p*. Himpunan sisinya dinamakan *size* dari *G* dan ditulis dengan *q(G)* atau *q*. Jadi graf G memiliki order *p* dan size *q*.

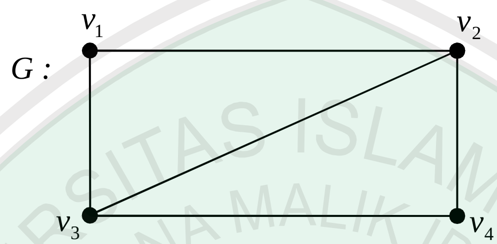
Graf *G* disebut *finite* atau berhingga jika himpunan titik adalah berhingga, atau graf yang jumlah titiknya adalah *n* berhingga. Graf *infinite* atau tak berhingga adalah graf yang jumlah titiknya tidak berhingga.

Graf trivial adalah graf berorder satu dengan himpunan sisinya merupakan himpunan kosong. Graf *non trivial* adalah graf yang berorder lebih dari satu (Bondy and Murthy, 1976). Graf paling sederhana adalah graf Null atau graf kosong dengan n titik, dinotasikan dengan N_n. Graf kosong didefinisikan sebagai suatu graf dengan himpunan sisinya merupakan himpunan kosong. Graf ini hanya terdiri dari himpunan elemen yang disebut ***vertex***. Berikut ini adalah contoh graf kosong dan graf tidak kosong:

Gambar 2.3 Graf Null atau Graf Kosong dan Graf tidak Kosong

Degree dari vertex *v* pada sebuah graf *G* adalah jumlah edges atau sisi *e* yang terkait langsung pada *v*, degree atau derajat pada titik *G* dinotasikan dengan $\deg_G v$ atau

$d(v)$. Misalkan pada Gambar 2.4, $d(v_1) = d(v_4) = 2$ dan $d(v_2) = d(v_3) = 3$. Jika setiap titik dalam suatu graf mempunyai derajat yang sama maka graf tersebut disebut dengan graf reguler (*Reguler Graphs*). Sebuah graf G dikatakan r reguler atau reguler berderajat r jika setiap titik di G mempunyai derajat r.



Gambar 2.4 Derajat atau Degree

Hubungan antara jumlah derajat semua titik dalam suatu graph G dengan banyak sisi, yaitu *q*, adalah:

$$\sum_{v \in G} \deg(v) = 2q.$$

Jumlah derajat titik sama dengan jumlah 2 kali banyaknya sisi. Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 1.

Misalkan G graph dengan order p dan ukuran q, maka

$$\sum_{v \in G} \deg(v) = 2q.$$

Bukti:

Setiap menghitung derajat suatu titik di *G*, maka suatu sisi dihitung 1 kali. Karena setiap sisi menghubungkan dua titik berbeda maka ketika menghitung derajat semua titik, sisi akan terhitung dua kali. Dengan demikian diperoleh bahwa jumlah semua derajat titik di *G* sama dengan 2 kali jumlah sisi di *G*. Terbukti bahwa

$\sum_{v \in G} \deg(v) = 2q$. (Chartrand dan Leniak, 1986:7 dan Siang, 2002:206-207)

Berdasarkan hubungan tersebut, maka banyak titik ganjil dalam suatu graph selalu genap. Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 2.

Banyaknya titik ganjil dalam suatu graph selalu genap.

Bukti

Misalkan *G* graph dan misalkan X adalah himpunan titik genap di *G* dan Y adalah himpunan titik ganjil di *G*. Maka

$$\sum_{v \in G} \deg(v) = \sum_{v \in X} \deg(v) + \sum_{v \in Y} \deg(v) = 2q.$$

Karena X adalah himpunan titik genap maka $\sum_{v \in X} \deg(v)$ adalah genap.

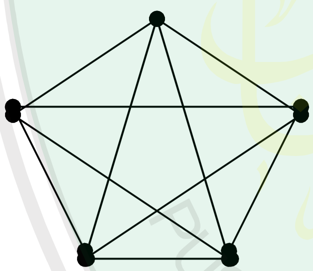
Karena 2q adalah bilangan genap dan $\sum_{v \in X} \deg(v)$ juga genap maka $\sum_{v \in Y} \deg(v)$ haruslah bilangan genap.

Karena Y himpunan titik ganjil dan $\sum_{v \in Y} \deg(v)$ adalah bilangan genap, maka banyak titik di Y haruslah genap, sebab jika banyak titik di Y ganjil maka $\sum_{v \in Y} \deg(v)$ adalah ganjil.

Terbukti bahwa banyaknya titik ganjil di G adalah genap. (Chartrand dan Leniak, 1986:7-8 dan Siang, 2002:207-208)

Komplemen dari graf G dinotasikan dengan $\overline{G}$. Komplemen graf G adalah suatu graf dengan himpunan titik di $\overline{G}$ sama dengan himpunan titik di G yaitu $V(\overline{G}) = V(G)$. Dengan titik u,v di $\overline{G}$ terhubung langsung jika dan hanya jika titik u,v di G tidak terhubung langsung dan sebaliknya. Berikut ini adalah Gambar 2.5 contoh graf komplit beserta komplemennya.

$G =$



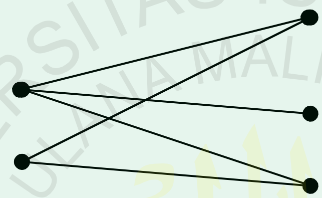
$\overline{G} =$

Gambar 2.5 Graf dengan Komplemennya

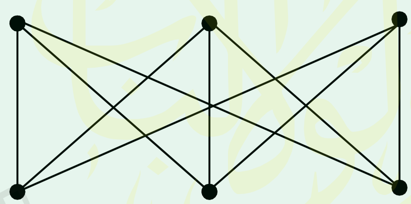
Graf komplit adalah graf dengan n titik yang dinotasikan dengan K_n. Graf komplit didefinisikan sebagai sebuah graf dengan setiap titik yang saling terhubung langsung. Jadi K_n mempunyai $\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{n(n-1)}{2}$ sisi dan setiap titiknya berderajat n-1. Komplemen graf komplit K_n yaitu $\overline{K_n}$ adalah graf dengan n titik yang berderajat 0.

Graf bipartisi (Bipartite graph) adalah graf yang himpunan titiknya dapat dikelompokkan menjadi dua bagian himpunan V_1 dan V_2. Setiap sisi di dalam graf G

menghubungkan sebuah titik V_1 ke titik V_2 dan dinyatakan sebagai $G(V_1, V_2)$. Setiap pasangan titik di V_1 tidak terhubung langsung (demikian pula dengan titik V_2). Jika setiap titik di V_1 terhubung langsung dengan semua titik V_2 maka $G(V_1, V_2)$ disebut graf bipartisi komplit *(complete bipartite graph)* yang dilambangkan dengan $K_{m,n}$. Jumlah sisi pada graf bipartisi komplit adalah *mn*. Gambar 2.6 dan 2.7 berikut ini adalah contoh graf bipartisi dan graf bipartisi komplit:



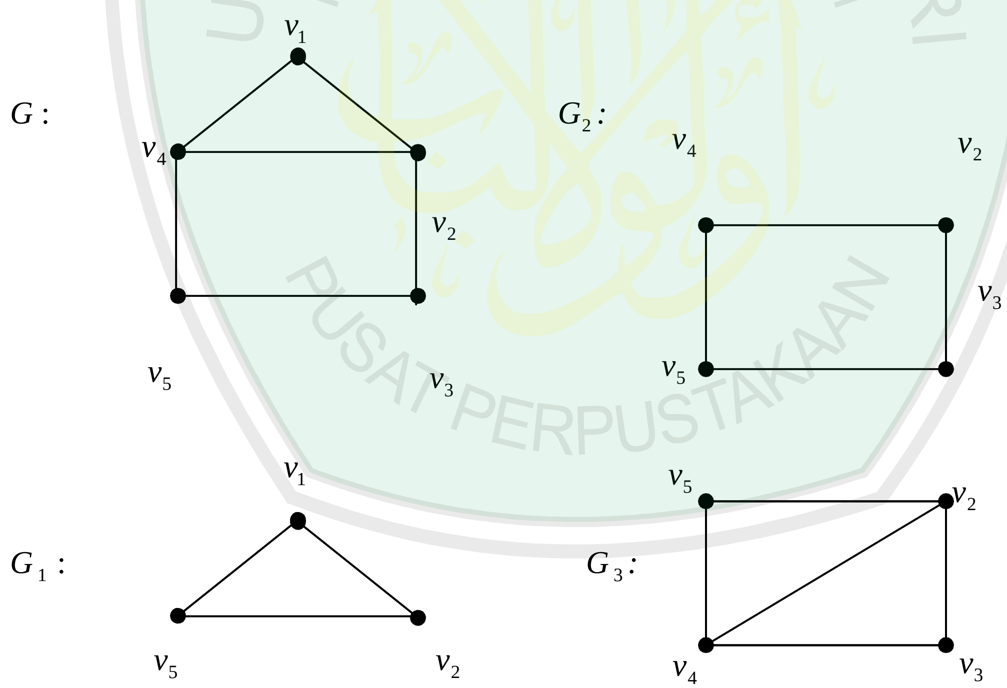
Gambar 2.6 Graf Bipartisi



Gambar 2.7 Graf Bipartisi Komplit

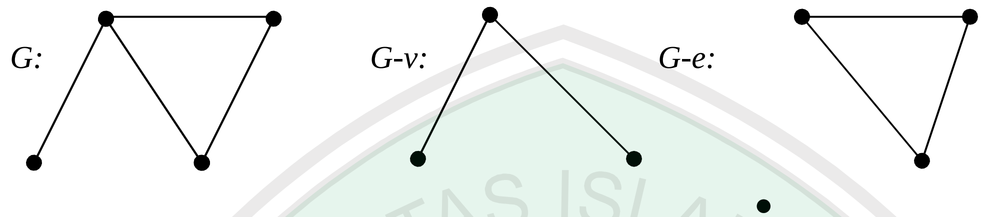
2.2 Subgraf

Graf H dikatakan *subgraf* dari graf G jika setiap titik di H adalah titik di G, dan setiap sisi di H adalah sisi di G, dengan kata lain $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Pada kasus yang lain graf G disebut *supergraf* dari H, jika G dan H adalah graf yang tidak semua titik-titiknya dapat dilabelkan, H juga dapat menjadi subgraf dari G jika setiap titik yang tidak berlabel dapat dilabelkan menjadi $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Jika H adalah subgraf dari G maka dapat ditulis $H \subset G$. Gambar 2.8 adalah contoh G_1 dan G_2 sebagai subgraf dari G, akan tetapi G_3 bukan subgraf dari G karena ada sisi v_2v_4 di $E(G_3)$ yang bukan elemen di $E(G)$.



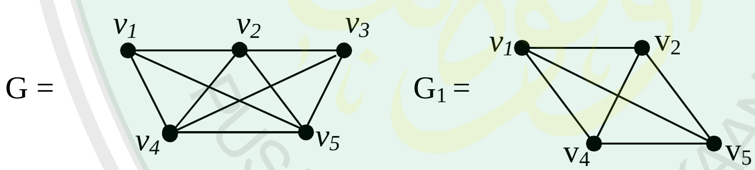
Gambar 2.8 Graf dengan Subgraf dan bukan Subgraf

Subgraf dari graf G dapat diperoleh dengan menghapus titik atau sisi, jika $v \in V(G)$ dan $|V(G)| \geq 2$, maka G-v menunjukkan subgraf dengan $V(G) - \{v\}$ dengan sisi-sisi dari G yang tidak terkait langsung dengan *v*. Jika $e \in E(G)$, maka *G-e* adalah subgraf yang memiliki himpunan titik *V(G)* dan sisi $E(G)-\{e\}$. Sebagai contoh Gambar 2.9 yaitu penghapusan titik dan penghapusan sisi:



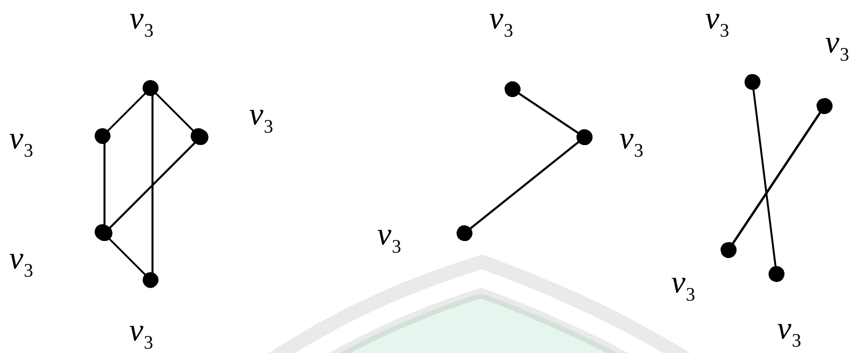
Gambar 2.9 Penghapusan Titik dan Penghapusan Sisi

Subgraf Terinduksi *(Induced subgraf)* *H* dari graf G yang dinotasikan dengan $G[V^1]$ adalah subgraf dari graf *G* yang memuat himpunan V^1 titik bersama semua sisi-sisi *uv* dari graf *G* dimana $u,v \in V^1$, jadi subgraf *H* dari graf *G* dapat diperoleh dengan menghapus titik-titik dari graf *G*. Perhatikan gambar berikut:



Gambar 2.10 Graf dengan Subgraf Terinduksinya

Subgraf terinduksi sisi (*edge induced*) *H* di definisikan sebagai $G[E^1]$ jika $H \cong \langle F \rangle$ untuk setiap subset *F* dari *E(G)*. Jadi subgraf terinduksi sisi dari graf *G* dapat diperoleh dengan menghapus titik dan sisi pada graf *G*. Perhatikan gambar berikut:



Gambar 2.11 Subgraf Terinduksi Titik dan Terinduksi Sisi

Subgraf *H* dari graf *G* yang memiliki himpunan order yang sama pada *G*, atau jika subgraf *H* dengan *V(H)=V(G)*, maka *H* disebut *spanning subgraf* dari *G*.

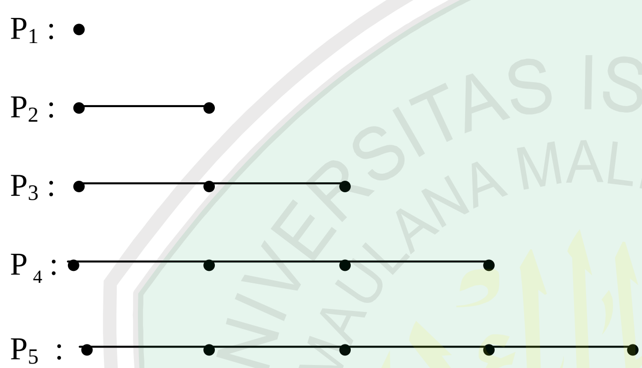
2.3 Graf Terhubung (Connected)

Sebuah jalan atau *walk W* dari titik v_0 ke v_n pada graf *G* adalah suatu barisan hingga yang berganti-ganti dari titik dan sisi $v_0, e_0, v_1, e_1, v_2, e_2, ..., v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ sedemikian hingga $e_i = v_i v_{i+1}$ untuk setiap i=0,1,2,...,*n-1* Jalan ini menghubungkan titik v_0 dan v_n. Jalan ini dapat juga dinotasikan sebagai v_0- v_1-...- v_n. *Panjang suatu jalan* adalah jumlah sisi pada jalan tersebut. Jalan dikatakan tertutup jika v_0 = v_n dan terbuka jika v_0 $\neq$ v_n.

Jalan *W* yang semua sisinya berbeda disebut *trail* (Chartrand dan Leniak, 1986:26). Jalan *W* yang semua titik dan semua sisinya berbeda disebut *lintasan* (Chartrand dan Linda Lesniak, 1986:26). Dengan demikian setiap lintasan pasti merupakan trail, tetapi tidak semua trail merupakan lintasan.

Graf lintasan adalah graf yang berbentuk lintasan atau graf yang terdiri dari lintasan (path tunggal). Graf lintasan dengan n titik di notasikan dengan P_n. Graf lintasan P_n memiliki *n-1* sisi, graf lintasan tersebut dapat diperoleh dari graf sikel C_n dengan menghilangkan salah satu sisi sembarang

Contoh graf lintasan:



Gambar 2.12 Graf Lintasan atau Graf Path

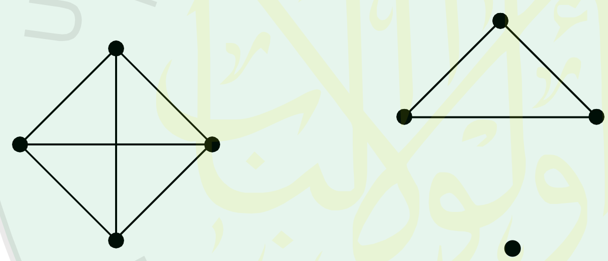
.Jalan tertutup *W* yang semua sisinya berbeda disebut *sirkuit* (Chartrand dan Lesniak, 1986:28). Jalan tertutup *W* yang semua titiknya berbeda disebut *sikel* (Chartrand dan Lesniak, 1986:28). Dengan demikian setiap sikel pasti merupakan sirkuit, tetapi tidak semua sirkuit merupakan sikel. Jadi dari hubungan antara sirkuit dan sikel diperoleh bahwa: trail tertutup dan taktrivial pada graph *G* disebut *sirkuit* di *G*. Sirkuit yang semua titik internalnya berbeda disebut *sikel*. Sikel dengan panjang *k* disebut sikel-*k*. Sikel-*k* disebut genap atau ganjil bergantung pada *k* genap atau ganjil.

Graf Sikel (*Cycle Graf*) C_n ialah graf terhubung 2-reguler yang mempunyai n titik ($n \geq 3$) dan n sisi. Gambar berikut adalah contoh graf sikel:

c_3 c_4

Gambar 2.13 Graf Sikel

Jika setiap pasang titik di graf *G* ada lintasannya, maka *G* dinamakan *terhubung (connected)*. Komponen dari graf adalah subgraf terhubung maksimal dari *G*. Jadi setiap graf terhubung hanya mempunyai satu komponen. Sedangkan untuk graf tak terhubung memiliki sedikitnya dua komponen. Berikut ini adalah contoh graf terhubung dan tidak terhubung:



Gambar 2.14 Graf Terhubung dan Tidak Terhubung

2.4 Pewarnaan Graf

Pewarnaan Graf adalah suatu pemberian warna pada salah satu elemen-elemennya (titik dan sisi), sehingga elemen-elemen yang saling terhubung langsung mendapatkan warna yang berbeda. Ada tiga macam pewarnaan graf yaitu pewarnaan titik, pewarnaan sisi, dan pewarnaan wilayah (region).

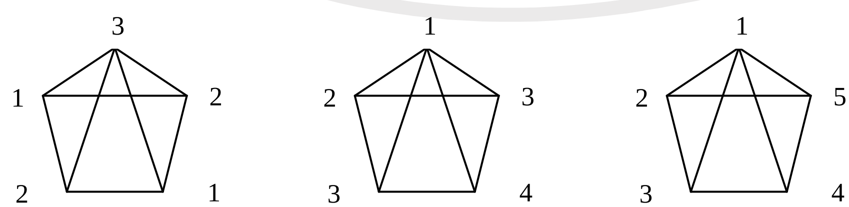
2.4.1 Pewarnaan Titik

Pewarnaan titik adalah memberi warna pada titk-titik suatu graf sedemikian sehingga tidak ada dua titik terhubung langsung mempunyai warna yang sama.

Bilangan Kromatik $\chi(G)$ (*Chromatik Number*) adalah banyaknya warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai titik-titik pada graf *G* sedemikian sehingga setiap titik-titik yang terhubung langsung mendapatkan warna yang berbeda. Jika $\chi(G) = k$, maka titik-titik pada graf *G* dapat diwarnai dengan *k* warna, tetapi tidak diwarnai dengan *k-1* warna.

Beberapa graf tertentu dapat langsung ditentukan bilangan kromatiknya. Graf kosong N_n memiliki $\chi(G) = 1.$ karena semua titik tidak terhubung, jadi untuk mewarnai semua titik cukup dibutuhkan satu warna saja. Graf komplit K_n memiliki $\chi(G) = n$ sebab semua titik saling terhubung sehingga diperlukan *n* warna.

Pewarnaan-*k* untuk graf *G* merupakan penunjukan k warna pada titik *G* sedemikian hingga titik yang berdekatan mendapat warna berbeda (Watkins dan Wilson, 1992:256). Jika *G* memiliki pewarnaan-*k*, maka *G* dapat diwarna-k. Bilangan khromatik *G* dinotasikan dengan $\chi(G)$ adalah bilangan terkecil *k* yang menunjukkan bahwa *G* dapat diwarna-*k*. Berikut ini adalah contoh pewarnaan titik pada graf:



(a) (b) (c)

Gambar 2.15 Pewarnaan Titik pada Graf

Pewarnaan-k ini dapat ditunjukkan dengan menulis bilangan 1, 2, 3, …, k di dekat titik pada graf. Pada Gambar 2.15 (a), (b), dan (c) masing-masing mengilustrasikan pewarnaan-3, pewarnaan-4, dan pewarnaan-5. Dengan demikian, $\chi(G) \geq 3$ karena G memiliki pewarnaan-3 (gambar a) sehingga $\chi(G) = 3$.

Berikut ini adalah beberapa bilangan khromatik yang telah diketahui:

$$\chi(N_n) = 1$$

$$\chi(K_n) = 2$$

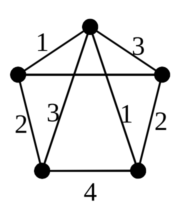
$$\chi(K_{m,n}) = 2$$

$$\chi(C_n) = 2\,,\ \chi(C_{n+1}) = 3$$

$\chi(P_n) = 2$. (Chartrand dan Linda Lesniak, 1979:272)

2.4.2 Pewarnaan Sisi

Pewarnaan sisi-*k* untuk *G* adalah pemberian *k* warna pada sisi-sisi *G* sedemikian hingga setiap dua sisi yang bertemu pada titik yang sama mendapatkan warna berbeda (Watkins dan Wilson, 1992:262). Jika *G* memiliki pewarnaan sisi *k*, maka G dikatakan dapat diwarna sisi *k*. Indeks khromatik *G* dinotasikan dengan $\chi'(G)$ adalah bilangan *k* terkecil sehingga *G* dapat diwarna sisi-*k*.

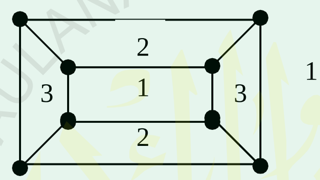


Gambar 2.16 Pewarnaan Sisi pada Graf

Pewarnaan sisi-k ini dapat ditunjukkan dengan menulis bilangan-bilangan 1, 2, 3, …, k pada sisi-sisinya. Contoh Gambar 2.16 adalah pewarnaan sisi-4. Dengan demikian $\chi'(G) = 4$.

2.4.3 Pewarnaan Wilayah (Map)

Pewarnaan *n* wilayah merupakan pewarnaan graf *G* yang dapat diwarnai dengan *n* atau warna minimum, sehingga wilayah yang terhubung langsung dapat diwarnai dengan warna yang berbeda. Pewarnaan *n* wilayah dapat disimbolkan dengan $\chi^*(G)$.



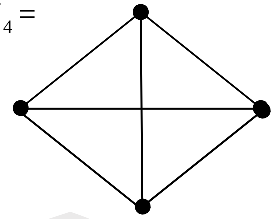
Gambar 2.17 Pewarnaan wilayah pada Graf

2.5 Graf Perfect

Graf *perfect* adalah suatu graf yang mempunyai bilangan khromatik dan bilangan *clique* yang sama, $(\chi(H) = \omega(H)$ (Chartrand dan Lesniak, 1996:280). Bilangan *clique* dinotasikan dengan $\omega(G)$ didefinisikan sebagai order dari subgraf komplit maksimum yang bisa dibentuk dari graf G. Bilangan khromatik suatu graf G dinotasikan dengan $\chi(G)$ didefinisikan sebagai jumlah minimal warna yang diperlukan untuk mewarnai titik-titik pada graf *G* sedemikian sehingga setiap titik-titik yang terhubung langsung mendapatkan warna yang berbeda.

Berikut ini contoh dari graf perfect:

$K_4 =$

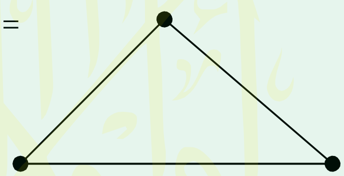


Subgraf komplit dari K_4 adalah:

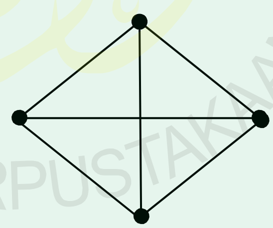
$K_1 =$

$K_2 =$

$K_3 =$



$K_4 =$



Subgraf komplit maksimum dari graf K_4 adalah K_4 sendiri. Karena subgraf komplit maksimumnya adalah K_4, maka order subgraf komplitnya adalah 4, sehingga $\omega(K_4) = 4$. Karena antara satu titik dengan titik yang lain saling terhubung langsung maka pewarnaan minimum yang diberikan adalah 4, sehingga $\chi(K_4) = 4$. Karena terbukti $\omega(K_4) = \chi(K_4) = 4$, maka graf K_4 adalah graf perfect.

2.6 Ma'rifatullah

Menurut bahasa, kata Ma'rifat berarti mengetahui atau mengenal. Pengertian tersebut bisa diperluas lagi menjadi: cara mengetahui atau mengenal Allah melalui tanda-tanda kekuasaan-Nya yang berupa makhluq-makhluq ciptaan-Nya. Sebab dengan hanya memperhatikan tanda-tanda kekuasaan-Nya kita bisa mengetahui akan keberadaan dan kebesaran Allah SWT. Karena tidak ada satu makhluqpun walau sekecil atau sebesar apapun, yang ada dengan sendirinya. Semuanya itu pasti ada yang menciptakan. Dan siapa lagi yang menciptakan segala makhluq tersebut kalau bukan Allah? Tanda-tanda tentang adanya Allah sudah jelas terlihat di sekeliling kita. Setiap hari bisa melihat terbitnya matahari dari ufuk timur dan kemudian tenggelam di ufuk barat dan betapa indahnya bulan serta begitu gemerlapnya bintang-bintang yang bertaburan di malam hari. Semua itu yang menciptakan dan mengatur peredarannya adalah Allah. Siapa yang tak mengenal Allah lewat tanda-tanda kekuasaan-Nya, ia adalah sebuta-butanya manusia. Bukan buta matanya, akan tetapi buta hatinya. Adapun cara memperhatikan tanda-tanda kekuasaan Allah bukan hanya sekedar dengan menggunakan penglihatan lahir saja. Tetapi harus juga ditunjang dengan penglihatan mata bathin (hati) yang jernih dari berbagai macam dosa. Hal inilah yang dimaksud dengan ilmu ma’rifat.

Menurut seorang ahli ma'rifat yang bernama Al-Junaidi menyebutkan bahwa seorang belum bisa disebut sebagai ahli ma'rifat sebelum dirinya mempunyai beberapa sifat berikut, yaitu:

a. Mengenal Allah secara mendalam, hingga seakan-akan dapat berhubungan secara langsung dengan-Nya.

b. Dalam beramal selalu berpedoman kepada petunjuk-petunjuk Rasulullah SAW (Al-Hadits).

c. Berserah diri kepada Allah dalam hal mengendalikan hawa nafsunya.

d. Merasa bahwa dirinya adalah kepunyaan Allah dan kelak pasti akan kembali kepada-Nya.

Adapun menurut Imam Al-Ghozali sebagaimana yang ditulis dalam kitab Ihya 'Ulumudin disebutkan bahwa ada 3 hal yang harus dikenal dan dipelajari oleh seseorang yang berma'rifat kepada Allah. Ketiga hal tersebut adalah:

1. Mengenal siapa dirinya.
2. Mengenal siapa Tuhannya.
3. Mengenal Dunianya.

2.7 Relevansi antara Kajian Graf Perfect dengan Kajian Ma’rifatullah

Pada bab I telah dikaji bahwa suatu graf dapat dianalogikan dengan manusia. Manusia sebagai suatu graf mempunyai titik dan mempunyai garis, titik adalah awal dari manusia tercipta. Garis adalah proses perjalanan manusia tersebut. Manusia yang tercipta di muka bumi pastilah memiliki perbedaan, ada yang sempurna dan ada yang tidak sempurna. Kesempurnaan dan ketidaksempurnaan manusia itulah yang dianalogikan sebagai graf perfect dan graf tidak perfect.

Sebagaimana kita ketahui bahwasanya Graf *perfect* adalah suatu graf yang mempunyai bilangan khromatik dan bilangan *clique* yang sama. Jika kita mengkaji kembali hubungan antara materi graf perfect dan graf tidak perfect dengan Integrasinya pada Al-Qur'an, terdapat hubungan antara ilmu tasawuf yang terkandung di dalamnya, dengan gagasan bahwasanya sebuah graf dapat disebut perfect apabila bilangan clique dan dan bilangan khromatiknya seimbang, sama halnya jika kita misalkan pada ilmu tasawuf yang mengkaji tentang pencapaian manusia menuju ma'rifatullah, bahwasanya manusia akan mencapai tingkatan kesempurnaan ma'rifatullah apabila antara jasmani atau khouf seorang manusia dan Rohani atau raja' seorang manusia telah seimbang, sebaliknya manusia tidak akan mencapai tingkatan ma'rifatullah apabila antara khouf dan roja'nya tidak seimbang.

Jasmani manusia kita misalkan sebagai *bilangan clique* dalam teori graf, yaitu order maksimum dari suatu graf. Order merupakan titik-titik yang tampak sama halnya seperti jasmani manusia. Semakin banyak manusia melakukan pendekatan kepada Allah, maka ia akan semakin ia dapat mencapai tingkatan ma'rifatullah. *Bilangan khromatik* adalah banyaknya pewarnaan terkecil yang dapat diberikan terhadap suatu graf, warna dimisalkan sebagaimana dosa seorang manusia. Warna minimum dimisalkan sebagai dosa yang sedikit dan dimiliki seorang manusia yang dekat kepada Allah. Jadi manusia akan sampai kepada tingkatan ma'rifatullah jika dia telah mampu mendekatkan diri kepada Allah S.W.T yang tercermin dari perbuatan baiknya serta selalu menghindari perbuatan yang menyebabkan ia berdosa.

Dalam surat Ali-Imron ayat 31 disebutkan:

قُلْ إِن كُنتُمْ تُحِبُّونَ ٱللَّهَ فَٱتَّبِعُونِى يُحْبِبْكُمُ ٱللَّهُ وَيَغْفِرْ لَكُمْ ذُنُوبَكُمْ ۗ وَٱللَّهُ غَفُورٌ رَّحِيمٌ ﴿٣١﴾

> *Katakanlah: "Jika kamu (benar-benar) mencintai Allah, ikutilah aku (lahir dan bathin) niscaya Allah mengasihi dan mengampuni dosa-dosamu." Allah Maha Pengampun lagi Maha Penyayang.*

Adapun ayat lain pada surat Al-Baqarah ayat 2٠٨ yang menyebutkan bahwa manusia diperintahkan oleh Allah agar masuk kepada agama islam secara sempurna adalah:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ ٱدۡخُلُواْ فِي ٱلسِّلۡمِ كَآفَّةٗ وَلَا تَتَّبِعُواْ خُطُوَٰتِ ٱلشَّيۡطَٰنِۚ إِنَّهُۥ لَكُمۡ عَدُوّٞ مُّبِينٞ ٢٠٨

> *Hai orang-orang yang beriman, masuklah kamu ke dalam Islam sempurna (kaffah), dan janganlah kamu turuti langkah-langkah syaitan. Sesungguhnya syaitan itu musuh yang nyata bagimu.*

Dua ayat Al-Qur’an tersebut menunjukkan bahwasanya Allah akan mengasihi dan mengampuni dosa-dosa manusia yang mengikutinya secara lahir dan bathin (kaffah) dan tidak selalu mengikuti langkah-langkah syetan. Karena dengan selalu berpegang teguh kepada jalan Allah dan tidak mengikuti langkah-langkah syetan, maka tingkatan kesempurnaan akan tercapai. Karena kesempurnaan itulah yang menjadi tujuan akhir hidup manusia.

Manusia yang ingin mencapai ma’rifatullah harus menempuh jalan atau cara-cara yang telah dianjurkan. Adapun jalan atau cara untuk menuju sebuah kesempurnaan dapat ditempuh dengan tiga tahapan yaitu:

1. Syari’at

Syari’at adalah peraturan dan undang-undang yang bersumber kepada wahyu Allah. Perintah dan larangannya jelas dan dijalankan untuk kesejahteraan seluruh manusia. Contoh dari syari’at adalah: kewajiban manusia untuk sholat, zakat, dan lain sebagainya.

2. Thariqah

Thariqat adalah jalan yang ditempuh dan sangat waspada serta berhati-hati ketika beramal ibadah. Adapun contoh dari thoriqah ini adalah: thoriqah naghsabandiyah, tijaniyah dan lain sebagainya.

3. Hakekat.

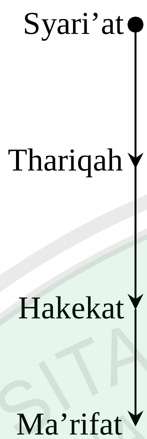
Hakekat adalah tonggak terakhir. Dalam haqiqat itulah manusia yang mencari dapat menemukan cahaya *ma'rifatullâh.*

Para penuntut ilmu tasawuf tidak akan mencapai kehidupan yang hakiki, kecuali telah menempuh tingkatan hidup ruhani yang tiga tersebut. Tiga jalan itu hendaklah ditempuh bersama-sama dan bertahap. Sebagaimana disebutkan dalam salah satu syair di dalam kitab hidayatul adzkiya’ yang berbunyi

فَشَرِيْعَةٌ كَسَفِيْنَةٍ ♦ وَطَرِيْقَةٌ كَالْبَحْرِ ♦ ثُمَّ حَقِيْقَةٌ دُرٌّغَلاَ

Ibarat bahtera itulah syari'at Ibarat samudera itulah thariqat Ibarat mutiara itulah haqiqat

Ungkapan dari syair di atas menjelaskan kedudukan tiga jalan menuju akhirat. Syari'at ibarat kapal, yakni sebagai instrumen mencapai tujuan. Thariqat ibarat lautan, yakni sebagai wadah yang mengantar ke tempat tujuan. Haqiqat ibarat mutiara yang sangat berharga dan banyak manfaatnya. Untuk memperoleh mutiara haqiqat, manusia harus mengarungi lautan dengan ombak dan gelombang yang dahsyat. Sedangkan untuk mengarungi lautan itu, tidak ada jalan lain kecuali dengan kapal. Apabila ketiga tahapan itu tidak ditempuh maka penuntut tasawuf atau mereka yang berminat mencari hidup ruhani yang tentram tidak akan mendapatkan mutiara yang sangat mahal harganya. Ketiga jalan menuju kesempurnaan ma’rifatullah yaitu syari’at, thoriqah dan hakekat jika dikaitkan dengan teori graf akan memiliki suatu bentuk pasangan titik dan garis sebagai berikut:



Titik pada graf tersebut adalah tingkatan jalan menuju ma’rifatullah dan garis menggambarkan proses yang harus ditempuh oleh manusia untuk menuju ma’rifatullah. Pasangan titik dan garis tersebut menggambarkan bahwa manusia dapat mencapai tingkatan ma’rifatullah jika manusia melalui titik-titik syari’at, thoriqah, kemudian hakekat secara bertahap. Sebaliknya manusia tidak akan dapat mencapai tingkatan ma’rifatullah jika manusia tidak melalui titik-titik tersebut secara bertahap. Karena jika manusia dapat mencapai tingkatan hakekat tanpa melalui thoriqah maka yang ia peroleh bukanlah ilmu ma’rifatullah akan tetapi ilmu kebatninan. Apabila manusia mencapai ma’rifat tanpa bersyari’at, maka ia akan sesat.

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini kita akan mengkaji apakah graf kosong, graf komplit, graf bipartisi komplit, graf lintasan, dan graf sikel genap merupakan graf perfect. Graf perfect dapat diperoleh dengan membuktikan bilangan clique dan bilangan khromatik dari suatu graf G sama. Jika terbukti bilangan clique dan bilangan khromatik dari graf G sama, maka graf tersebut adalah graf perfect. Sebaliknya jika bilangan clique dan bilangan khromatik dari graf G tidak sama maka graf G tersebut bukan graf perfect.

Adapun langkah-langkah menentukan graf perfect adalah sebagai berikut:

1. Menentukan subgraf komplit dan subgraf komplit maksimum dari graf G.
2. Menentukan bilangan clique $\omega(G)$ dan menentukan bilangan khromatik $\chi(G)$ pada beberapa kasus untuk menentukan pola.
3. Pola yang diperoleh dinyatakan dengan teorema.
4. Membuktikan teorema.

3.1 Graf Perfect dari Berbagai Macam Graf

3.1.1 Graf Kosong

Untuk menunjukkan graf kosong sebagai graf perfect, maka harus ditentukan bilangan clique dan bilangan khromatik dari graf kosong dengan n titik N_n. Berikut ini adalah graf N_n dengan bilangan clique dan bilangan khromatiknya:

Perhatikan graf N_1 berikut!

N_1: •

Subgraf komplit maksimum dari graf N_1 hanya $K_1 = \bullet$. Karena hanya memuat 1 titik saja, Sehingga bilangan clique $\omega(N_1) = 1$, dan bilangan khromatik $\chi(N_1) = 1$ karena hanya satu titik yang diberi warna. Terbukti bahwa bilangan clique dan bilangan khromatik $\omega(N_1) = \chi(N_1) = 1$, maka N_1 adalah graf perfect.

Perhatikan graf N_2 berikut!

$N_2 : \bullet \ \bullet$

Subgraf komplit maksimum dari graf N_2 hanya $K_1 = \bullet$, sehingga bilangan clique $\omega(N_2)=1$. Karena antara titik satu dengan titik yang lainnya tidak terhubung langsung, maka pewarnaan minimumnya hanya 1 sehingga $\chi(N_2)=1$. Terbukti Bilangan clique dan bilangan khromatik $\omega(N_2) = \chi(N_2) = 1$. Jadi N_2 adalah graf perfect.

Perhatikan graf N_3 berikut!

$N_3 : \bullet \ \bullet \ \bullet$

Subgraf komplit maksimum dari graf N_3 hanya $K_1 = \bullet$, sehingga bilangan clique $\omega(N_3)=1$. Karena antara titik satu dengan titik yang lainnya tidak terhubung langsung, maka pewarnaan minimumnya hanya 1 sehingga bilangan khromatik $\chi(N_3)=1$. Terbukti $\omega(N_3)= \chi(N_3)=1$, maka graf N_3 adalah graf perfect.

Perhatikan graf N_4 berikut!

$N_4 : \bullet \ \bullet \ \bullet \ \bullet$

Subgraf komplit maksimum dari graf N_4 hanya $K_1 = \bullet$, sehingga bilangan clique $\omega(N_4)=1$. Karena antara titik satu dengan titik yang lainnya tidak terhubung langsung, maka pewarnaan minimumnya juga hanya 1 sehingga bilangan khromatik $\chi(N_4)=1$, Terbukti $\chi(N_4)=\omega(N_4)=1$. Jadi N_4 adalah graf perfect.

Berikut ini adalah tabel untuk graf kosong beserta bilangan clique dan bilangan khromatiknya:

Tabel 3.1 Graf N_n dengan $\omega(N_n)$ dan $\chi(N_n)$

Graf N_n	Subgraf komplit maksimum	$\omega(N_n)$	$\chi(N_n)$
N_1	K_1	1	1
N_2	K_1	1	1
N_3	K_1	1	1
N_4	K_1	1	1
N_n	K_1	1	1

Dari beberapa kasus yang telah diselesaikan serta berdasarkan Tabel 3.1.1, maka terlihat pola bahwa graf kosong memiliki $\omega(N_n)= \chi(N_n)=1$. Dengan demikian dapat dibuat teorema berikut:

Teorema 3.1.1:

Graf kosong dengan *n* titik N_n adalah graf perfect

Bukti :

Graf N_n memiliki subgraf komplit maksmum K_1, karena subgraf komplit maksimumnya K_1, maka order maksimumnya adalah 1, sehingga $\omega(N_n)=1$.

Karena setiap titik tidak terhubung langsung dengan titik yang lain, maka banyaknya pewarnaan titik yang diberikan adalah 1, sehingga $\chi(N_n)=1$. Jadi karena $\omega(N_n)=\chi(N_n)=1$, maka terbukti bahwa graf kosong adalah graf perfect.

3.1.2 Graf Komplit

Berikut ini adalah graf komplit K_n dengan bilangan clique dan bilangan khromatiknya:

Perhatikan graf K_1 berikut!

$$K_1 = \bullet$$

Subgraf komplit dari graf K_1 adalah:

$$K_1 = \bullet$$

Graf komplit K_1 sama dengan graf kosong N_1 yang memuat satu titik. Subgraf komplit maksimum dari graf K_1 adalah K_1 sendiri, sehingga $\omega(K_1)$=1. Karena graf K_1 hanya mempunyai satu titik , maka pewarnaan minimumnya juga hanya 1 sehingga $\chi(K_1)$= 1, Jadi karena $\omega(K_1)=\chi(K_1)$=1, maka graf K_1 merupakan graf perfect.

Perhatikan graf K_2 berikut!

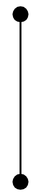
$K_2 =$

Subgraf komplit dari graf K_2 adalah:

$$K_1 = \bullet$$

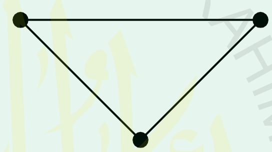
$K_2 =$

Subgraf komplit maksimum dari graf K_2 adalah:

$K_2 =$ 

Subgraf komplit maksimum dari graf K_2 adalah K_2 sendiri, sehingga $\omega(K_2)$=2. Karena antara titik satu dengan titik yang lain terhubung langsung, sehingga pewarnaan pada setiap titik harus berbeda, maka banyaknya warna minimumnya adalah 2 sehingga $\chi(K_2)$=2. Karena $\omega(K_2) = \chi(K_2)$=2, maka graf K_2 adalah graf perfect.

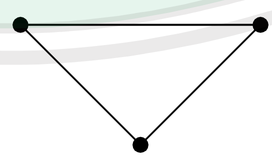
Perhatikan graf K_3 berikut!

$K_3 =$ 

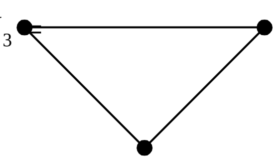
Subgraf komplit dari graf K_3 adalah:

$K_1 =$

$K_2 =$ 

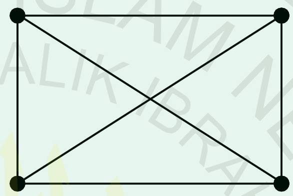
$K_3 =$ 

Subgraf komplit maksimum dari graf K_3 adalah:

$K_3 =$ 

Subgraf komplit maksimum K_3 adalah K_3 sendiri, sehingga $\omega(K_3)$=3. Karena antara titik yang satu dengan titik yang lain didalam graf tersebut terhubung langsung, mengakibatkan banyaknya warna minimum pada graf K_3 adalah 3 sehingga $\chi(K_3)$=3. Karena $\omega(K_3)=\chi(K_3)$=3, maka graf K_3 adalah graf perfect.

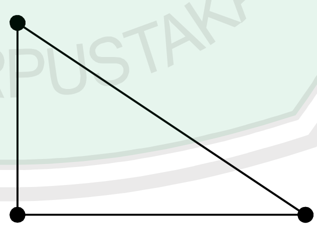
Perhatikan graf K_4 berikut:

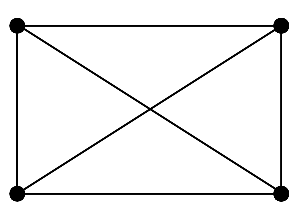
K_4 = 

Subgraf komplit dari graf K_4 adalah:

K_1 =

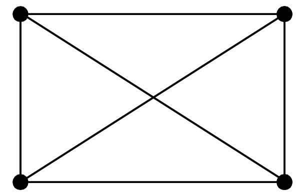
K_2 = 

K_3 = 

K_4 = 

Subgraf komplit maksimum dari graf K_4 adalah:

K_4 =



Subgraf komplit maksimum K_4 adalah K_4 sendiri, sehingga $\omega(K_4)$=4. Karena antara titik yang satu dengan titik yang lain pada graf tersebut terhubung langsung, mengakibatkan banyaknya warna minimum pada K_4 adalah 4, sehingga $\chi(K_4)$=4. Karena $\omega(K_4)=\chi(K_4)=4$, maka graf K_4 adalah graf perfect.

Berikut ini adalah Tabel graf komplit beserta bilangan clique dan bilangan khromatiknya:

Tabel 3.2 Graf K_n dengan $\omega(K_n)$ dan $\chi(K_n)$

Graf K_n	Subgraf komplit maksimum	$\omega(K_n)$	$\chi(K_n)$
K_1	K_1	1	1
K_2	K_2	2	2
K_3	K_3	3	3
K_4	K_4	4	4
K_n	K_n	n	n

Dari beberapa kasus yang telah diselesaikan dan berdasarkan Tabel 3.2 maka terlihat bahwa graf komplit K_1, K_2, K_3 dan K_4 memiliki pola $\omega(K_n)=\chi(K_n)$ = n. Dengan demikian dapat dibuat teorema berikut:

Teorema 3.1.2:

Graf komplit dengan n titik K_n adalah graf perfect

Bukti:

Graf K_n memiliki subgraf komplit maksimum dirinya sendiri atau K_n, karena subgraf komplit maksimumnya adalah K_n itu sendiri, maka order maksimumnya adalah *n*, sehingga $\omega(K_n) = n$.

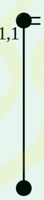
Karena setiap titik terhubung langsung dengan setiap titik yang lain, maka banyaknya warna minimum pada graf K_n juga sebanyak *n*, sehingga $\chi(K_n) = n$.

Karena $\omega(K_n) = \chi(K_n) = n$, maka graf K_n adalah graf perfect.

3.1.3 Graf Bipartisi Komplit

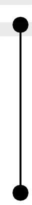
Berikut ini adalah graf $K_{1,n}$ dengan bilangan clique dan bilangan khromatiknya:

Perhatikan graf $K_{1,1}$ berikut!

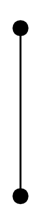
$K_{1,1}$ = 

Graf komplit dari graf $K_{1,1}$ adalah:

K_1 =

K_2 = 

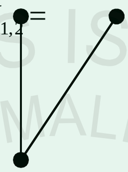
Subgraf komplit maksimum dari graf $K_{1,1}$ adalah:

K_2 = 

Graf $K_{1,1}$ memiliki subgraf komplit maksimum K_2, sehingga $\omega(K_{1,1})$=2. Karena antara titik satu dengan titik lain terhubung langsung, maka pewarnaan minimum yang diberikan adalah 2, sehingga nilai $\chi(K_{1,1})$=2. Karena $\omega(K_{1.1})=\chi(K_{1.1})$=2, maka graf $K_{1,1}$ merupakan graf perfect.

Perhatikan graf $K_{1,2}$ berikut!

$K_{1,2}$ =



Subgraf komplit dari graf $K_{1,2}$ adalah:

K_1 =

K_2 =

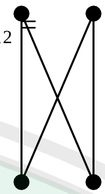
Subgraf komplit maksimum untuk graf $K_{1,2}$ adalah:

K_2 =

Subgraf komplit maksimum dari graf $K_{1,2}$ adalah K_2, sehingga $\omega(K_{1,2})$=2. Karena graf $K_{1,2}$ hanya memiliki dua titik yang terhubung langsung, maka pewarnaan minimum yang diberikan juga 2 sehingga $\chi(K_{1,2})$=2. Karena $\omega(K_{1,2})=\chi(K_{1,2})$=2, maka graf $K_{1,2}$ adalah graf perfect.

Berikut ini adalah graf $K_{2,n}$ beserta bilangan clique dan bilangan khromatiknya:

Perhatikan graf $K_{2,2}$ berikut!

$K_{2,2} =$ 

Subgraf komplit dari graf $K_{2,2}$ adalah:

$K_1 = \bullet$

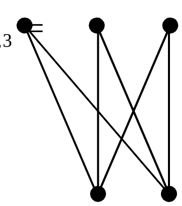
$K_2 =$ 

Subgraf komplit maksimum dari graf $K_{2,2}$ adalah:

$K_2 =$ 

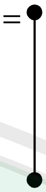
Subgraf komplit maksimum dari graf $K_{2,2}$ adalah K_2, sehingga $\omega(K_{2,2})=2$. Karena graf $K_{2,2}$ hanya memiliki dua titik yang terhubung langsung maka pewarnaan minimumnya juga 2 sehingga $\chi(K_{2,2})=2$. Karena $\omega(K_{2,2})=\chi(K_{2,2})=2$, maka graf $K_{2,2}$ adalah graf perfect.

Perhatikan graf $K_{2,3}$ berikut!

$K_{2,3} =$ 

Subgraf komplit dari graf $K_{2,3}$ adalah:

K_1 = •

K_2 = 

Subgraf komplit maksimum dari graf $K_{2,3}$ adalah:

K_2 = 

Subgraf komplit maksimum dari graf $K_{2,3}$ adalah K_2, sehingga $\omega(K_{2,3})=2$. Karena titik yang terhubung langsung hanya 2, maka pewanaan minimumnya adalah 2 sehingga $\chi(K_{2,3})=2$. Karena $\omega(K_{2,3})=\chi(K_{2,3})=2$, maka graf $K_{2,3}$ adalah graf perfect.

Berikut ini adalah Tabel graf bipartisi komplit beserta bilangan clique dan bilangan khromatiknya:

Tabel 3.3 Graf $K_{m,n}$ dengan $\omega(K_{m,n})$ dan $\chi(K_{m,n})$

Graf $K_{m,n}$	Subgraf komplit maksimum	$\omega(K_{m,n})$	$\chi(K_{m,n})$
$K_{1,1}$	K_2	2	2
$K_{1,2}$	K_2	2	2
$K_{2,2}$	K_2	2	2
$K_{2,3}$	K_2	2	2
$K_{m,n}$	K_2	2	2

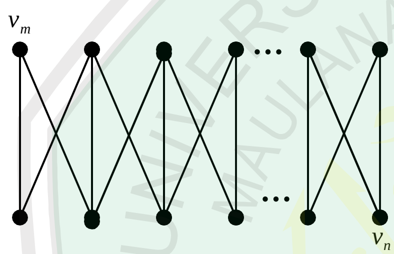
Dari beberapa pembuktian pada graf $K_{1,n}$ dan graf $K_{2,n}$ dan berdasarkan Tabel 3.3, maka diperoleh pola $\omega(K_{m,n})=\chi(K_{m,n})=2.$ Dengan demikian dapat dibuat teorema berikut:

Teorema 3.1.4

Graf bipartisi komplit dengan titik *m,n* $K_{m,n}$ adalah graf perfect

Bukti:

Berikut ini adalah gambar graf $K_{m,n}$:



Graf bipartisi komplit memiliki 2 komponen titik v_m dan v_n. Karena titik pada v_m hanya terhubung langsung dengan v_n, maka subgraf komplit maksimumnya adalah K_2, sehingga order maksimumnya adalah 2. Oleh karena itu $\omega(K_{m,n})$=2. Karena setiap titik pada v_m hanya terhubung langsung dengan v_n, maka titik v_m memiliki 1 warna dan v_n juga memiliki 1 warna sehingga $\chi(K_{m,n})$ = 2. Jadi karena $\chi(K_{m,n})$ = $\omega(K_{m,n})$=2, maka graf $K_{m,n}$ adalah graf perfect.

3.1.4 Graf Sikel

Berikut ini beberapa bentuk Graf C_n dengan $n \geq 3$:

Perhatikan graf C_4 berikut!

$C_4 =$

Subgraf komplit dari graf C_4 adalah:

$K_1 =$

$K_2 =$

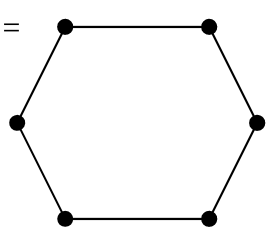
Subgraf komplit maksimum dari graf C_4 adalah:

$K_2 =$

Subgraf komplit maksimum dari graf sikel C_4 adalah K_2, sehingga $\omega(C_4)$ =2. Warna minimum yang dapat diberikan pada C_4 adalah 2, karena titik-titik yang terhubung langsung adalah 2 sehingga $\chi(C_4)$=2. Karena $\omega(C_4)$= $\chi(C_4)$ = 2, maka graf C_4 adalah graf perfect.

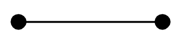
Perhatikan graf C_6 berikut!

$C_6 =$



Subgraf komplit dari graf C_6 :

$K_1 = \bullet$

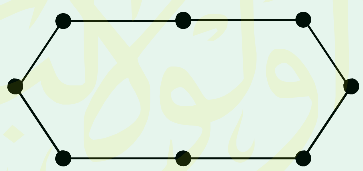
$K_2 =$ 

Subgraf komplit maksimum dari graf C_6 adalah:

$K_2 =$ 

Subgraf komplit maksimum dari graf sikel C_6 adalah K_2, sehingga $\omega(C_6)$ =2. Warna minimum yang dapat diberikan pada C_6 adalah 2 karena titik-titik yang terhubung langsung adalah 2, sehingga $\chi(C_6)$=2. Karena $\omega(C_6)$= $\chi(C_6)$ = 2, maka graf C_6 adalah graf perfect.

Perhatikan graf C_8 berikut!

$C_8 =$ 

Subgraf komplit dari graf C_8 adalah:

$K_1 = \bullet$

$K_2 =$ 

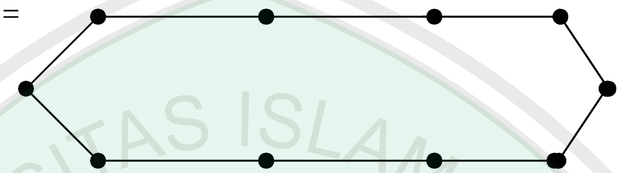
Subgraf komplit maksimum dari graf C_8 adalah:

$K_2 =$ 

Subgraf komplit maksimum dari graf C_8 adalah K_2, sehingga $\omega(C_8)=2$, Banyak pewarnaan minimumnya adalah 2, sehingga $\chi(C_8)=2$. Karena $\omega(C_8)=\chi(C_8)=2$, maka graf sikel C_8 merupakan graf perfect.

Perhatikan graf C_{10} berikut!

$C_{10} =$



Subgraf komplit dari graf C_{10} adalah:

$K_1 =$

$K_2 =$

Subgraf komplit maksimum dari graf C_{10} adalah:

$K_2 =$

Subgraf komplit maksimum dari graf C_{10} adalah K_2, sehingga $\omega(C_{10})=2$, dan banyak pewarnaan minimumnya adalah 2, sehingga $\chi(C_{10})=2$. Karena $\omega(C_{10})=\chi(C_{10})=2$, maka graf sikel C_{10} adalah graf perfect.

Berikut ini adalah Tabel graf sikel beserta bilangan clique dan bilangan khromatiknya:

Tabel 3.4 Graf C_n, $\forall\ n \geq 3$ dengan $\omega(C_n)$ dan $\chi(C_n)$

Graf C_n	Subgraf komplit maksimum	$\omega(C_n)$	$\chi(C_n)$
C_4	K_2	2	2
C_6	K_2	2	2
C_8	K_2	2	2
C_{10}	K_2	2	2
C_n	K_2	2	2

Berdasarkan nilai bilangan clique dan bilangan khromatik yang diperoleh dari graf graf sikel C_4, C_6, C_8, C_{10} dan berdasarkan Tabel, tampak sebuah pola $\omega(C_n)=\chi(C_n)=2$. Dengan demikian dapat dibuat teorema berikut:

Teorema 3.1.5

Graf sikel dengan *n* titik C_n, $\forall\ n \geq 3$ adalah graf perfect

Bukti:

Graf sikel dengan *n* titik C_n, $\forall\ n \geq 3$ memiliki subgraf komplit maksimum K_2, karena hanya dapat dibuat subgraf komplit maksimum dengan 2 titik saja, sehingga $\omega(C_n)=2$.

Karena titik yang terhubung langsung pada graf C_n adalah 2 titik, maka banyaknya pewarnaan yang diberikan adalah 2, sehingga $\chi(C_n)=2$.

Karena $\omega(C_n)=\chi(C_n)=2$, maka terbukti bahwa graf sikel C_n, $\forall\ n \geq 3$ adalah graf perfect.

3.1.5 Graf Lintasan

Berikut ini adalah gambar dari graf lintasan P_n dengan bilangan clique dan bilangan khromatiknya:

Perhatikan graf P_1 berikut:!

P_1 : •

Subgraf komplit dari graf P_1 adalah:

K_1 = •

Subgraf komplit maksimum dari graf P_1 adalah:

K_1 = •

Subgraf komplit maksimum dari graf P_1 adalah K_1, sehingga $\omega(P_1)$= 1. Karena graf P_1 hanya memiliki 1 titik, maka pewarnaan minimum pada graf P_1 adalah 1, sehingga $\chi(P_1)$=1. Jadi karena $\omega(P_1)=\chi(P_1)$=1, maka graf P_1 adalah graf perfect.

Perhatikan graf P_2 berikut!

P_2 = •——•

Subgraf komplit dari P_2 adalah:

K_1 = •

K_2 = •——•

Subgraf komplit maksimum dari graf P_2 adalah:

K_2 = •——•

Subgraf komplit maksimum dari graf P_2 adalah K_2, sehingga $\omega(P_2)=2$. Karena graf P_2 hanya memiliki 2 titik terhubung langsung, maka pewarnaan minimumnya adalah 2 sehingga $\chi(P_2)=2$. Karena $\omega(P_2)=\chi(P_2)=2$, maka graf P_2 adalah graf perfect.

Perhatikan graf P_3 berikut!

P_3 :

Subgraf komplit dari graf P_3 adalah:

K_1 =

K_2 =

Subgraf komplit maksimum dari graf P_3 adalah:

K_2 =

Subgraf komplit maksimum dari graf P_3 adalah K_2, sehingga $\omega(P_3)=2$. Karena graf P_3 hanya memiliki 2 titik terhubung langsung, maka pewarnaan minimumnya adalah 2 sehingga $\chi(P_3)=2$. Karena $\omega(P_3)=\chi(P_3)=2$ maka graf P_3 merupakan graf perfect.

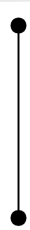
Perhatikan graf P_4 berikut!

P_4 =

Subgraf komplit dari P_4 adalah:

K_1 =

K_2 =



Subgraf komplit maksimum dari graf P_4 adalah:

K_2 = 

Subgraf komplit maksimum dari graf P_4 adalah K_2, sehingga $\omega(P_4)=2$. Karena graf P_4 hanya memiliki 2 titik terhubung langsung, maka pewarnaan minimumnya adalah 2, sehingga $\chi(P_4)=2$. Karena $\omega(P_4)=\chi(P_4)=2$ maka graf P_4 merupakan graf perfect.

Berikut ini adalah Tabel graf lintasan beserta bilangan clique dan bilangan khromatiknya:

Tabel 3.5 Graf P_n dengan $\omega(P_n)$ dan $\chi(P_n)$

Graf P_n	Subgraf komplit maksimum	$\omega(P_n)$	$\chi(P_n)$
P_1	K_1	1	1
P_2	K_2	2	2
P_3	K_2	2	2
P_4	K_2	2	2
P_n	K_2	2	2

Dari pembuktian graf P_1, P_2, P_3 dan P_4 tersebut, diperoleh pola bahwa $\omega(P_1)=\chi(P_1)=1$ dan $\omega(P_n)=\chi(P_n)=2$, $\forall n \geq 2$. Dengan demikian diperoleh teorema berikut:

Teorema 3.1.6

Graf lintasan dengan n titik P_n adalah graf perfect.

Bukti:

Graf P_1 memiliki subgraf komplit maksimum K_1, maka order dari subgraf komplit maksimum graf P_1 adalah 1, sehingga $\omega(P_1)=1$. Karena P_1 hanya memiliki 1 titik, maka banyak pewarnaan yang diberikan adalah 1, sehingga $\chi(P_1)=1$.

Graf lintasan dengan n titik P_n $\forall\ n \geq 2$ memiliki subgraf komplit maksimum K_2, sehingga $\omega(P_n)=2$. Karena graf P_n hanya memiliki 2 titik terhubung langsung, maka banyak pewarnaan minimum yang diberikan adalah 2, sehingga $\chi(P_n)=2$, $\forall\ n \geq 2$.

Karena nilai $\omega(P_1)=\chi(P_1)=1$ dan $\omega(P_n)=\chi(P_n)=2$ $\forall\ n \geq 2$, maka graf P_n adalah graf perfect.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Graf perfect adalah suatu graf yang memiliki bilangan clique dan bilangan khromatik yang sama untuk setiap graf *G*. Bilangan clique dinotasikan dengan $\omega(G)$ didefinisikan sebagai order dari subgraf komplit maximum dari graf G. Bilangan khromatik suatu graf *G* dinotasikan dengan $\chi(G)$ didefinisikan sebagai banyaknya warna minimal yang diperlukan untuk mewarnai titik-titik pada graf *G*, sedemikian sehingga setiap titik-titik yang terhubung langsung mendapatkan warna yang berbeda.

Adapun langkah-langkah menentukan graf perfect adalah sebagai berikut:

5. Menentukan subgraf komplit maksimum yang dapat dibentuk dari graf *G*
6. Menentukan bilangan clique $\omega(G)$ dan menentukan bilangan khromatik $\chi(G)$ pada beberapa kasus untuk menentukan pola.
7. Pola yang diperoleh dinyatakan dengan teorema.
8. Membuktikan teorema.

Berdasarkan pembahasan dalam skripsi ini diperoleh ketitikan bahwa graf kosong, graf komplit, graf bipartisi komplit, graf sikel genap, dan graf lintasan adalah graf perfect, karena beberapa graf tersebut memiliki bilangan clique dan bilangan khromatik yang sama.

4.2 Saran

Berdasarkan pembahasan yang dilaksanakan, penulis menyarankan agar pembuktian graf perfect dapat dilanjutkan kepada pembuktian berbagai macam graf yang lain, misalkan pada graf sikel ganjil, graf euler, dan graf pohon. Analisis lebih lanjut dari graf perfect adalah analisis tentang graf superperfect.

DAFTAR PUSTAKA

Anwar. 2004. *Ilmu Tasawuf*. Pustaka Setia: Bandung

Chartrand, Gery and Linda Lesniak. 1986. *Graphs and Digraphs Second Edition*. California: a Division of Wadsworth, Inc.

Echols, John M dan Hasan Shadily. 1976. *Kamus Inggris Indonesia*. Jakarta: Gramedia

Sumarna. 2006. *Filsafat Ilmu dari Hakikat menuju nilai edisi revisi.* Bandung: Pustaka bani Quraisy

Golumbic. 1980. *Alghoritmic Graph Theory and perfect Graphs*. USA: Academic Press

Murty dan Bondy. 1976. *Graph Theory with Applications.* Canada: The Macmillan Press LTD

Mustofa. 1997. *Filsafat Islam*. CV Pustaka Setia: Bandung

Nasution, Hasymsyah. 1999. *Filsafat Islam*. Gaya Media Pratama: Jakarta

Wilson, Robin J dan Watkins. 1990. *Graph and introductory approach*. Open University course: Singapore

Yahya, Kadirun. 1985. *Kapita Selekta jilid III*. Lembaga ilmiah metafisika Tasawuf Islam: Sumatra Utara