

**SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL
MENGUNAKAN METODE LIEBMANN PADA
DISTRIBUSI SUHU BATANG LOGAM**

SKRIPSI

Oleh:

ROFIKA KAMALIA

03510042



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINTEK
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
2008**

**SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL
MENGUNAKAN METODE LIEBMANN PADA
DISTRIBUSI SUHU BATANG LOGAM**

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:

ROFIKA KAMALIA
NIM: 03510042

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINTEK
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
2008**

HALAMAN PERSETUJUAN

**SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL MENGGUNAKAN
METODE LIEBMANN PADA DISTRIBUSI SUHU BATANG LOGAM**

SKRIPSI

**Oleh :
ROFIKA KAMALIA
NIM : 03510042**

Telah Disetujui oleh:

Dosen Pembimbing I

Dosen Pembimbing II

**Drs. H. Turmudzi, M. Si
NIP. 150209630**

**Ahmad Barizi, M. A
NIP. 150283991**

Tanggal 20 Maret 2008

Mengetahui

Ketua Jurusan Matematika

**Sri Harini, M.Si
NIP. 150318321**

HALAMAN PENGESAHAN

SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL MENGGUNAKAN METODE LIEBMANN PADA DISTRIBUSI SUHU BATANG LOGAM

SKRIPSI

Oleh :
ROFIKA KAMALIA
NIM : 03510042

Telah Dipertahankan Di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal, 12 April 2008

JABATAN	DEWAN PENGUJI	TANDA TANGAN
1. Penguji Utama	Usman Pagalay, M.Si NIP. 150327240	1 _____
2. Ketua Penguji	Sri Harini, M.Si NIP. 150318321	2 _____
3. Sekretaris	Drs. H. Turmudzi, M.Si NIP. 150209630	3 _____
4. Anggota Penguji	Ahmad Barizi, M.A NIP. 150283991	4 _____

Mengetahui dan Mengesahkan

Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150318321

SURAT PERNYATAAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Rofika Kamalia

NIM : 03510042

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Solusi Persamaan Diferensial Parsial Menggunakan Metode Liebmann Pada Distribusi Suhu Batang Logam

Menyatakan bahwa skripsi tersebut adalah karya saya sendiri dan bukan karya orang lain, baik sebagian maupun keseluruhan, kecuali dalam bentuk kutipan yang telah disebutkan sumbernya.

Selanjutnya apabila dikemudian hari ada “klaim” dari pihak lain, bukan menjadi tanggung jawab Dosen Pembimbing dan/atau Pengelola Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang, tetapi menjadi tanggung jawab saya sendiri

Demikian surat pernyataan ini saya buat dengan sebenar-benarnya dan apabila pernyataan ini tidak benar, saya bersedia mendapat sanksi akademis.

Malang, 17 Februari 2008

Yang menyatakan,

Rofika Kamalia

MOTTO

... وَمَنْ يَتَّقِ اللَّهَ يَجْعَلْ لَهُ مَخْرَجًا ﴿٢﴾

**“...barangsiapa bertakwa kepada Allah
niscaya Dia akan mengadakan baginya jalan
keluar.” (ath-Thalaq/65:2)**

PERSEMBAHAN

Ku Persembahkan

Karya Sederhana Ini Untuk:

AYAHANDA ANGSORI DAN IBUNDA MUJAYANAH

KELUARGA BESAR BANI DAIMUN DAN

BANI NUR IBRAHIM

TEMAN- TEMAN DI WISMA HERNANDA

TEMAN- TEMANKU ANGKATAN '03

KATA PENGANTAR



Segenap rasa syukur dengan menyebut nama-Mu ya Allah, Tuhan awal segala mula dan noktah segenap akhiran, pemilik segala ke Mahaan, pemilik kasih nan tak pilih kasih, dan hanya Rahmat dan Hidayah-Mu jualah yang mengantarkan karya ini ke batas usai.

Kemudian Shalawat serta Salam tercurahkan kepada utusan terakhir-Mu, “Muhammad” sang Nabi pamungkas, seorang figur utama bagi kehidupan kini dan menjadi tumpuan syafaat bagi kehidupan kelak, InsyaAllah.

Adalah benar, bahwa karya ini sulit untuk dapat terwujud manakala penulis tidak mendapat bantuan dari berbagai pihak, baik berupa saran maupun peminjaman buku, lebih-lebih bantuan yang bersifat moral. Karena itulah sepatutnya diucapkan terima kasih yang tak terhingga, terutama penulis tujukan kepada yang terhormat :

1. Prof DR. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU.,DSc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Malang.
3. Sri Harini, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika.
4. Drs. H. Turmudzi, M.Si selaku Dosen Pembimbing yang telah memberikan bimbingan kepada penulis hingga terselesaikannya skripsi ini.
5. Ahmad Barizi, M.A selaku Dosen Pembimbing Integrasi Sains dan Agama yang telah memberikan bimbingan kepada penulis hingga terselesaikannya skripsi ini.

6. Bapak/Ibu Dosen Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Malang beserta stafnya atas ilmu dan pengalaman yang diberikan.
7. Ayahanda dan Ibunda tercinta yang tiada lelah memberikan do'a dan kasih sayang serta kepercayaan.
8. Teman-teman Matematika angkatan 2003 yang telah mewarnai hari-hariku dan selalu memberikan keceriaan selama kuliah di UIN Malang.
9. Semua pihak yang telah membantu dalam penulisan skripsi ini yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Demikianlah apa yang dapat saya sampaikan dalam tulisan ini, semoga apa yang saya hasilkan ini dapat bermanfaat bagi semua pihak, terutama bagi pihak-pihak yang terkait dengan skripsi ini.

Penulis menyadari masih banyak kekurangan dan keterbatasan dalam skripsi ini, oleh karena itu, penulis mengharapkan saran dan kritik yang membangun untuk menyempurnakan tulisan ini

Malang, 17 Maret 2008

Penulis

DATAR ISI

HALAMAN JUDUL.....	i
HALAMAN PERSETUJUAN.....	ii
HALAMAN PENGSAHAN.....	iii
SURAT PERNYATAAN	iv
MOTTO.....	v
HALAMAN PERSEMBAHAN.....	vi
KATA PENGANTAR	vii
DAFTAR ISI.....	ix
DAFTAR GAMBAR	xi
DAFTAR TABEL.....	xii
DAFTAR LAMPIRAN	xiii
ABSTRAK.....	xiv
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang	1
1.2. Rumusan Masalah	5
1.3. Tujuan Penulisan	5
1.4. Batasan Masalah.....	5
1.5. Manfaat Penulisan	6
1.6. Metode Penelitian.....	6
1.7. Sistematika Pembahasan	7
BAB II KAJIAN TEORI	8
2.1. Deret Taylor	8
2.1.1. Teorema Taylor	8
2.1.1.1. Deret Taylor Order Nol	10
2.1.1.2. Deret Taylor Order Satu	11
2.1.1.3. Deret Taylor Order Dua	11
2.1.1.4. Kesalahan Pemotongan	11
2.2. Numerik.....	12

2.2.1. Diferensial Numerik	13
2.2.2. Diferensial Turunan Pertama.....	13
2.2.3. Diferensial Turunan Kedua	14
2.2.4. Turunan Terhadap Variabel Lain	15
2.3. Turunan Parsial.....	16
2.3.1. Definisi Turunan Parsial.....	16
2.3.2. Turunan Parsial Tingkat Tinggi	18
1. Persamaan Ellips	19
2. Persamaan Parabola.....	20
3. Persamaan Hiperbola.....	21
2.3.3. Solusi Persamaan Diferensial Parsial	21
2.3.1. Solusi Numerik pada Persamaan Diferensial Parsial ..	23
2.4. Persamaan Diferensial Parsial Dalam Bentuk Benda Hingga.....	25
2.5. Metode Liebmann.....	26
2.6. Energi	28
2.6.1. Pengertian Energi	29
2.7. Perpindahan Energi Panas	33
2.7.1. Perpindahan Panas Konduksi	36
2.8. Logam.....	39
2.9. Persamaan Energi Dalam Bentuk Benda Hingga.....	40
BAB III PEMBAHASAN.....	42
3.1. Langkah-langkah Metode Liebmann.....	42
3.2. Analisis Numerik.....	51
BAB IV PENUTUP	67
4.1. Kesimpulan.....	67
4.2. Saran	68
DAFTAR PUSTAKA	69
LAMPIRAN	

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1. Jaringan titik hitungan dalam bidang $x-y$	26
Gambar.2.2. Perpindahan panas satu dimensi	37
Gambar.2.3. Perpindahan panas dua dimensi.....	38
Gambar.3.1. Distribusi suhu dengan kesalahan 0.0001.....	52
Gambar.3.2. Distribusi suhu dengan kesalahan 0.00001.....	54
Gambar.3.3. Distribusi suhu dengan sumber panas, dengan kesalahan 0.0001.....	63
Gambar.3.4. Distribusi suhu dengan sumber panas, dengan kesalahan 0.00001.....	65

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1: Nilai Numerik Huruf Hijaiyah	12
--	-----------



DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Program pada persamaan Laplace

Lampiran 2: Program pada persamaan Poisson

Lampiran 3: Hasil Iterasi



Abstrak

Kamalia, Rofika. 2008. **Solusi Persamaan Diferensial Parsial Menggunakan Metode Liebmann Pada Distribusi Suhu Batang Logam**. Skripsi Jurusan Matematika. Fakultas Sains dan Teknologi. Universitas Islam Negeri Malang.

Pembimbing : H. Turmudi, M. Si.
Ahmad Barizi, M.A

Kata Kunci : Persamaan Diferensial Parsial, Metode Liebmann, Distribusi Suhu.

Persamaan diferensial parsial merupakan persamaan yang digunakan untuk untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari karena banyak fenomena-fenomena yang melahirkan model matematika, namun model matematikanya mengandung laju perubahan, sehingga membutuhkan matematika untuk menghitungnya yaitu pada persamaan diferensial parsial, misalnya masalah distribusi suhu dapat diselesaikan menggunakan diferensial numerik dengan metode Liebmann. Dan tentang distribusi suhu atau perpindahan energi panas dibahas juga dalam Al Quran yaitu Qs. An-Nûr/24:35 yang berisi tentang cahaya.

Distribusi suhu mempunyai model matematika yang berbentuk persamaan diferensial parsial linier orde 2 yang memodelkan distribusi suhu terhadap sumbu x dan y . Berdasarkan latar belakang tersebut, penulis ingin mengetahui model distribusi suhu batang logam dengan menggunakan metode Liebmann, dan bagaimana selesaian distribusi suhu batang logam dengan menggunakan metode Liebmann.

Metodologi penelitian dalam skripsi ini menggunakan studi literatur, yaitu penelitian yang dilakukan di perpustakaan yang bertujuan untuk mengumpulkan data dan informasi dengan berbagai macam materi yang terdapat di perpustakaan yang berhubungan dengan penelitian yang dilakukan penulis.

Dari hasil analisis dan pembahasan menunjukkan bahwa distribusi suhu pada logam pada persamaan Laplace dengan kondisi batas pada keliling plat yaitu $T(0,y)=10^{\circ}C$, $T(x,0)=50^{\circ}C$, $T(x,K)=100^{\circ}C$, $T(L,y)=150^{\circ}C$, diperoleh keadaan setimbang pada iterasi yang ke 28 iterasi yang kesalahan maksimalnya 0.0001 dengan waktu komputasi 0.04, dan pada kesalahan maksimal 0.00001 diperoleh keadaan setimbang pada iterasi yang ke 31 dengan waktu komputasi 0.05. Dalam menghitung, komputer memerlukan waktu yang disebut waktu komputasi.

Dari hasil analisis dan pembahasan menunjukkan bahwa distribusi suhu pada logam pada persamaan Poisson dengan kondisi batas pada keliling plat yaitu $T(0,y)=10^{\circ}C$, $T(x,0)=50^{\circ}C$, $T(x,K)=100^{\circ}C$, $T(L,y)=150^{\circ}C$, diperoleh keadaan setimbang pada iterasi yang ke 27 iterasi yang kesalahan maksimalnya 0.0001 dengan waktu komputasi 0.008, dan pada kesalahan maksimal 0.00001 diperoleh keadaan setimbang pada iterasi yang ke 31 dengan waktu komputasi 0.008.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Berbagai masalah yang ada dalam berbagai disiplin ilmu pengetahuan dapat digambarkan dalam bentuk matematik dari berbagai fenomena yang berpengaruh. Misalnya gerak air dan polutan di saluran, aliran udara, perambatan panas, defleksi suatu plat dan balok, dan sebagainya, dapat digambarkan dalam bentuk matematik. (Bambang T, 1996: 2)

Matematika pada dasarnya berkaitan dengan pekerjaan menghitung, sehingga tidak salah jika kemudian ada yang menyebut matematika adalah ilmu hitung atau *ilmu al-hisab* (Abdusysyahir, 2007: 83). Banyak ayat-ayat Al Qur'an yang berisi tentang perhitungan atau matematika. Q.s. Al An'am/6: 160, dinyatakan:

مَنْ جَاءَ بِالْحَسَنَةِ فَلَهُ عَشْرُ مَثَالٍهَا وَمَنْ جَاءَ بِالسَّيِّئَةِ فَلَا تُجْزَىٰ إِلَّا مِثْلَهَا وَهُمْ لَا يُظْلَمُونَ ﴿١٦٠﴾

"Barangsiapa membawa amal yang baik, Maka baginya (pahala) sepuluh kali lipat amalnya; dan barangsiapa yang membawa perbuatan jahat Maka dia tidak diberi pembalasan melainkan seimbang dengan kejahatannya, sedang mereka sedikitpun tidak dianiaya (dirugikan)" (Qs. Al-An'am/6: 160)

Pada ayat tersebut, Allah menggunakan rumus matematika untuk menentukan balasan perbuatan kebaikan dan kejahatan. Amal kebaikan mendapat pahala 10 kali amal kebaikan tersebut, dan amal kejahatan mendapat balasan 1 kali amal kejahatan tersebut. Secara matematika diperoleh rumus

$$y = 10x$$

untuk amal kebaikan, dan

$$y = x$$

untuk amal kejahatan. Variabel x menyatakan nilai amal dan y menyatakan nilai balasan yang diperoleh (*Ibid,hal: 81-82*).

Matematika tidak lain adalah ilmu yang menjadi alat bagi kebutuhan manusia. Matematika telah diciptakan dan sengaja disediakan untuk menuntun manusia memahami kekuasaan Allah swt (*Ibid,hal: 88*).

Matematika merupakan alat untuk menyederhanakan penyajian dan pemahaman masalah. Dengan menggunakan bahasa matematik, suatu masalah dapat menjadi lebih sederhana untuk disajikan, dipahami, dianalisa, dan dipecahkan (Dumary, 1999: ix).

Persamaan diferensial merupakan cabang dari matematika yang termasuk topik penting. Topik ini digunakan untuk memecahkan masalah-masalah yang dihadapi dalam bidang-bidang sains dan teknik. Dan persamaan diferensial membantu pemecahan masalah-masalah dalam bidang tersebut.

Dalam sains dan teknik sering ditemukan masalah-masalah yang penyelesaiannya tidak dapat diatasi dengan hanya menggunakan rumus atau konsep yang sudah ada. Banyak fenomena-fenomena yang melahirkan model matematika, namun model matematikanya mengandung laju perubahan. Dalam situasi seperti ini dibutuhkan penyelesaian atau perhitungan matematika secara khusus. Dan perhitungan-perhitungan tersebut memerlukan persamaan diferensial (Yaya S. Kusumah, 1989: 1).

Berkenaan dengan penyelesaian masalah, Allah mempunyai janji kepada kita. Apabila kita dihadapkan dengan suatu masalah maka hendaknya kita selalu ingat kepada Allah, dan senantiasa mendekatkan diri kepada Allah dengan memperbanyak amal shaleh. Karena dengan memperbanyak amal shaleh akan mendatangkan pertolongan Allah dari arah yang tidak kita duga. Allah Swt berfirman dalam Qs. Ath-Thalâq/65: 2, yang berbunyi

... وَمَنْ يَتَّقِ اللَّهَ يَجْعَلْ لَهُ مَخْرَجًا ﴿٢﴾

"...Barangsiapa bertakwa kepada Allah niscaya dia akan mengadakan baginya jalan keluar"(Ath-Thalâq/65: 2).

Dalam masalah keseimbangan energi, ada energi yang berpindah dalam bentuk kalor atau panas (heat). Dalam bidang teknik, masalah tersebut dibahas dalam perpindahan kalor yaitu ilmu yang memperkirakan perpindahan energi karena perbedaan temperatur (suhu) diantara benda atau material (Holman J.P, 1986: 1).

Perpindahan kalor atau perpindahan energi karena perbedaan temperatur, juga dapat menyebabkan perubahan wujud, misalnya es dipanaskan akan mencair, air dipanaskan akan berubah wujud menjadi uap, atau air didinginkan akan berubah wujud menjadi es. Berkenaan dengan perubahan wujud dalam Al Qur'an dijelaskan tentang perubahan wujud yaitu pada Qs. Al-Mu'minûn/23: 12-14

وَلَقَدْ خَلَقْنَا الْإِنْسَانَ مِنْ سُلَالَةٍ مِّن طِينٍ ﴿١٢﴾ ثُمَّ جَعَلْنَاهُ نُطْفَةً فِي قَرَارٍ مَّكِينٍ ﴿١٣﴾
ثُمَّ خَلَقْنَا النُّطْفَةَ عَلَقَةً فَخَلَقْنَا الْعَلَقَةَ مُضْغَةً فَخَلَقْنَا الْمُضْغَةَ عِظْمًا فَكَسَوْنَا
الْعِظْمَ لَحْمًا ثُمَّ أَنْشَأْنَاهُ خَلْقًا ءَاخِرَ ۖ فَتَبَارَكَ اللَّهُ أَحْسَنُ الْخَالِقِينَ ﴿١٤﴾

"Dan Sesungguhnya kami Telah menciptakan manusia dari suatu saripati (berasal) dari tanah. Kemudian Kami jadikan saripati itu air mani (yang disimpan) dalam tempat yang kokoh (rahim). Kemudian air mani itu Kami jadikan segumpal darah, lalu segumpal darah itu Kami jadikan segumpal daging, dan segumpal daging itu Kami jadikan tulang belulang, lalu tulang belulang itu Kami bungkus dengan daging. Kemudian Kami jadikan dia makhluk yang (berbentuk) lain. Maka Maha sucilah Allah, Pencipta yang paling baik" (Al-Mu'minûn/23: 12-14).

Dari ayat di atas jelas bahwa asal mula manusia adalah berasal dari sari pati dan kemudian sari pati dijadikan air mani, kemudian dari air mani dijadikan atau berubah wujud menjadi segumpal darah, kemudian segumpal darah berubah wujud menjadi segumpal daging, dari segumpal daging berubah wujud menjadi tulang-belulang, kemudian tulang belulang dibungkus dengan daging, dan kemudian oleh Allah Swt dijadikan makhluk yang berbentuk lain, atau oleh Allah dirubah wujudnya menjadi makhluk yang berbentuk lain. Ayat di atas merupakan ayat yang berkenaan dengan perubahan wujud.

Hukum yang mengatur tentang sebaran suhu (distribusi suhu) pada benda, banyak diterapkan pada bidang teknik. Karena hal itu mempunyai tujuan untuk mengetahui kekuatan logam, apakah logam tersebut mudah berubah wujud atau tidak apabila dipanaskan atau didinginkan sampai suhu tertentu. Dalam menyelesaikan masalah persamaan diferensial parsial misalnya pada masalah distribusi suhu, dapat dilakukan dengan metode analitik. Tetapi bila metode analitik tidak dapat diterapkan, maka solusi persoalan dapat dicari dengan menggunakan metode numerik. Dalam mencari solusi numerik banyak metode-metode yang dapat digunakan, sesuai dengan masalah yang akan diselesaikan. Misalnya metode Liebmann untuk menyelesaikan masalah distribusi suhu.

Untuk itu penulis tertarik untuk mengkaji masalah distribusi suhu. Sehingga penelitian ini diberi judul **"Solusi Persamaan Diferensial Parsial Menggunakan Metode Liebmann Pada Distribusi Suhu Batang Logam"**.

1.2. Rumusan Masalah

Dari latar belakang masalah di atas dapat dirumuskan yaitu sebagai berikut:

1. Bagaimanakah pemodelan dari distribusi suhu batang logam dengan menggunakan metode Liebmann.
2. Bagaimanakah selesaian distribusi suhu batang logam dengan menggunakan metode Liebmann.

1.3. Tujuan Penulisan

Sesuai dengan rumusan masalah di atas maka tujuan penulisan ini adalah

1. Untuk mengetahui pemodelan dari distribusi suhu batang logam dengan menggunakan metode Liebmann.
2. Untuk mengetahui selesaian distribusi suhu batang logam dengan menggunakan metode Liebmann.

1.4. Batasan Masalah

Adapun batasan masalahnya adalah sebagai berikut:

1. Pembahasan skripsi ini hanya dilakukan pada plat 2 dimensi (2D).

2. Perpindahan panas yang dibahas pada skripsi ini adalah perpindahan panas konduksi.
3. Penyelesaian skripsi ini menggunakan bantuan program, yaitu menggunakan software matlab.

1.5. Manfaat Penulisan

1. Bagi Penulis

Sebagai sarana untuk mengaplikasikan ilmu yang telah diperoleh penulis selama perkuliahan, pada mata kuliah metode numerik dan persamaan diferensial, khususnya tentang metode Liebmann pada distribusi suhu batang logam.

2. Bagi Pemerhati Matematika

Sebagai wacana untuk menambah pengetahuan tentang metode numerik dan persamaan diferensial khususnya metode Liebmann pada distribusi suhu batang logam.

1.6. Metode Penelitian

Metode adalah cara bertindak menurut sistem atau aturan tertentu (Sudarto,1997:41). Berdasarkan hal tersebut, maka dalam penulisan skripsi ini menggunakan studi literatur, yaitu penelitian yang dilakukan diperpustakaan yang bertujuan untuk mengumpulkan data dan informasi dengan bermacam materiil yang terdapat di perpustakaan, seperti buku-buku, majalah, dokumen, catatan, kisah-kisah sejarah, dan lain-lain (Mardalis,1999: 28).

Dalam penulisan skripsi ini, langkah-langkah umum yang dilakukan penulis adalah sebagai berikut:

1. Menentukan persamaan distribusi suhu, dengan cara mengkonstruksi metode beda hingga dengan dasar deret Taylor, kemudian dari persamaan beda hingga dijadikan metode Liebmann.
2. Melakukan analisis dengan menyelesaikan masalah perambatan suhu dengan metode Liebmann secara manual dan menggunakan bantuan program Matlab.

1.7. Sistematika Pembahasan

Organisasi pada skripsi ini terdiri dari empat bab, adapun sistematikanya adalah sebagai berikut:

Bab pertama, berisi tentang pendahuluan yang terdiri dari latar belakang, rumusan masalah, tujuan penulisan, batasan masalah, manfaat penulisan, metode penelitian, dan sistematika pembahasan.

Bab dua, berisi tentang kajian teori yang terdiri dari teorema dan penjelasan-penjelasan yang diperlukan dalam menentukan solusi persamaan diferensial parsial pada distribusi suhu.

Bab tiga, berisi tentang pembahasan yaitu menjelaskan tentang solusi persamaan diferensial parsial pada distribusi suhu menggunakan metode Liebmann serta menganalisis secara numerik.

Bab empat, berisi tentang penutup yang terdiri atas kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN TEORI

Pada bab ini akan menjelaskan tentang beberapa teori yang mendukung pembahasan pada bab berikutnya.

2.1. Deret Taylor

2.1.1. Teorema Taylor

Andaikan f sebuah fungsi yang memiliki turunan dari semua tingkatan dalam suatu selang $(a - r, a + r)$. Syarat yang perlu dan cukup agar deret Taylor

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

menggambarkan fungsi f pada selang itu, ialah

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

dengan $R_n(x)$ suku sisa dalam rumus Taylor, yaitu

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

dengan c suatu bilangan dalam selang $(a - r, a + r)$.

(Edwin J. Purcell, 1999: 57)

Bukti

Pada selang $(a - r, a + r)$, fungsi f memenuhi hipotesis sebagai berikut:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \quad (2.1)$$

dengan $P_n(x)$ adalah polinom Taylor berderajat n dari f dan $R_n(x)$ adalah suku sisanya, yang diberikan oleh:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad (2.2)$$

dengan dianggap c di antara x dan a .

Sekarang $P_n(x)$ adalah jumlah n buah suku pertama dari deret Taylor dari f pada a . Jadi, bila kita buktikan bahwa $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x)$ ada dan sama dengan $f(x)$ jika dan hanya jika $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$, teorema tersebut akan terbukti.

Dari persamaan (2.1),

$$P_n(x) = f(x) - R_n(x) \quad (2.3)$$

Jika $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$, maka menurut persamaan (2.3)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) &= f(x) - \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) \\ &= f(x) - 0 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Sekarang dari hipotesis bahwa $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = f(x)$ kita akan membuktikan bahwa $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$

Dari persamaan (2.1), $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ maka,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) &= f(x) - \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) \\ &= f(x) - f(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Jadi teorema terbukti bahwa $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$

Deret Taylor merupakan dasar yang digunakan untuk menyelesaikan masalah metode numerik, terutama penyelesaian persamaan diferensial. Jika suatu fungsi $T(x)$ diketahui di titik x_i dan semua turunan dari T terhadap x diketahui pada titik tersebut, maka dengan deret Taylor dapat dinyatakan nilai T pada titik x_{i+1} yang terletak pada jarak Δx dari titik x_i .

$$T(x_{i+1}) = T(x_i) + T'(x_i) \frac{\Delta x}{1!} + T''(x_i) \frac{\Delta x^2}{2!} + T'''(x_i) \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots + T^{(n)}(x_i) \frac{\Delta x^n}{n!} + R_n \quad (2.4)$$

Keterangan:

$T(x_i)$: fungsi di titik x_i

$T(x_{i+1})$: fungsi di titik x_{i+1}

$T', T'', T''', \dots, T^{(n)}$: turunan pertama, kedua, ketiga, ..., ke-n dari fungsi

Δx : langkah ruang, yaitu jarak antara x_i dan x_{i+1}

R_n : kesalahan pemotongan

! : operator faktorial

2.1.1.1. Deret Taylor Order Nol

Apabila yang diperhitungkan hanya satu suku pertama, maka persamaan dapat ditulis dalam bentuk:

$$T(x_{i+1}) \approx T(x_i) \quad (2.5)$$

2.1.1.2. Deret Taylor Order Satu

Bentuk deret Taylor order satu, yang memperhitungkan dua suku pertama, dapat ditulis dalam bentuk:

$$T(x_{i+1}) \approx T(x_i) + T'(x_i) \frac{\Delta x}{1!} \quad (2.6)$$

Yang merupakan bentuk persamaan garis lurus (linier).

2.1.1.3. Deret Taylor Order Dua

Bentuk deret Taylor yang memperhitungkan tiga suku pertama dari kanan dapat ditulis menjadi:

$$T(x_{i+1}) \approx T(x_i) + T'(x_i) \frac{\Delta x}{1!} + T''(x_i) \frac{\Delta x^2}{2!} \quad (2.7)$$

2.1.1.4. Kesalahan Pemotongan

Deret Taylor akan memberikan perkiraan suatu fungsi dengan benar jika semua suku dari deret tersebut diperhitungkan. Dalam praktek hanya beberapa suku pertama saja yang diperhitungkan sehingga hasil perkiraan tidak tepat seperti pada penyelesaian analitik. Ada kesalahan karena tidak diperhitungkannya suku-suku terakhir dari deret Taylor. Kesalahan ini disebut dengan kesalahan pemotongan (*truncation error*, R_n), yang ditulis dalam bentuk:

$$R_n = O(\Delta x^{n+1})$$

Indek n menunjukkan bahwa deret yang diperhitungkan adalah sampai pada suku ke n , sedang subskrip $n+1$ menunjukkan bahwa kesalahan pemotongan mempunyai order $n+1$. Notasi $O(\Delta x^{n+1})$ berarti bahwa kesalahan pemotongan mempunyai order Δx^{n+1} ; atau kesalahan adalah sebanding dengan langkah ruang pangkat $n+1$. Kesalahan pemotongan tersebut adalah kecil apabila:

1. interval Δx adalah kecil,
2. memperhitungkan lebih banyak suku dari deret Taylor

Pada perkiraan order satu besarnya kesalahan pemotongan adalah:

$$O(\Delta x^2) = T''(x_i) \frac{\Delta x^2}{2!} + T'''(x_i) \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots$$

(Triatmojo, 2002: 9)

2.2. Numerik

Numerik berarti bersifat / berbentuk angka (nomor). Nilai numerik juga disebut nilai gramatikal atau geometri. Nilai numerik suatu huruf adalah bilangan yang dipasangkan pada huruf tersebut. Saat Al Qur'an diturunkan 14 abad yang lalu, sistem penulisan yang dikenal sekarang belum ada. Sebagai gantinya, huruf-huruf digunakan sebagai lambang untuk bilangan. Nilai numerik huruf hijaiyah di Indonesia dikenal dengan istilah "Abjadun". Tabel berikut ini adalah tabel nilai numerik huruf Hiaiyyah.

Tabel: 2.1. Nilai Numerik Huruf Hijaiyyah

Huruf	Nilai numerik	Huruf	Nilai numerik	Huruf	Nilai numerik
ا (Alif)	1	ك (kaf)	20	ر (Ra')	200
ب (Ba')	2	ل (lam)	30	ش (Syin)	300
ج (Jim)	3	م (Mim)	40	ت (Ta')	400
د (Dal)	4	ن (Nun)	50	ث (Tsa')	500
ه (Hha)	5	س (sin)	60	خ (Kha')	600
و (Wau)	6	ع ('Ain)	70	ذ (Dzal)	700
ز (Za)	7	ف (Fa')	80	ض (Dhad)	800
ح (Ha')	8	ص (Shad)	90	ظ (Zhad)	900
ط (Tha')	9	ق (Qaf)	100	غ (Ghin)	1000
ي (ya)	10				

(Abdusysyagir, 2007: 161)

رَفِيعُ الدَّرَجَاتِ ذُو الْعَرْشِ يُلْقِي الرُّوحَ مِنْ أَمْرِهِ عَلَى مَنْ يَشَاءُ مِنْ عِبَادِهِ لِيُنْذِرَ

يَوْمَ التَّلَاقِ ﴿١٥﴾

“(Dialah) Pemilik derajat tertinggi, Yang mempunyai Arasy, Yang mengutus Jibril dengan (membawa) perintah-Nya kepada siapa yang dikehendaki-Nya di antara hamba-hamba-Nya, supaya dia memperingatkan (manusia) tentang hari pertemuan” (QS al-Mu’min/40:15).

Pemilik derajat tertinggi dalam ayat tersebut merupakan terjemahan dari kata “Rafii’u al-darajaat”. Kata “Rafii’u” menyatakan ketinggian. dan perhitungan total nilai numerik dari kata “Rafii’u” (yang terdiri dari huruf-huruf Ra, Fa’, Ya’, dan ‘Ain) dapat dicari dari tabel 2.1. dari tabel tersebut akan didapatkan total nilai numerik sebesar 360. Sedangkan dalam matematika itu sendiri nilai derajat yang paling sempurna atau derajat yang paling tinggi adalah 360.

2.2.1. Diferensial Numerik

Diferensial numerik digunakan untuk memperkirakan bentuk diferensial kontinyu menjadi bentuk diskret. Diferensial numerik ini banyak digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Bentuk persamaan diferensial tersebut dapat diturunkan berdasar deret Taylor.

2.2.2. Diferensial Turunan Pertama

Deret Taylor pada persamaan (2.4) dapat ditulis dalam bentuk:

$$T(x_{i+1}) = T(x_i) + T'(x_i)\Delta x + O(\Delta x^2) \quad (2.8)$$

atau

$$\frac{\partial T}{\partial x} = f'(x_i) = \frac{T(x_{i+1}) - T(x_i)}{\Delta x} - O(\Delta x^2) \quad (2.9)$$

Bentuk diferensial dari persamaan (2.9) disebut diferensial maju order satu. Disebut diferensial maju karena menggunakan data pada x_i dan x_{i+1} untuk menghitung diferensial. Jika data yang digunakan adalah di titik x_i dan x_{i-1} , maka disebut diferensial mundur, dan deret Taylor menjadi:

$$T(x_{i-1}) = T(x_i) - T'(x_i) \frac{\Delta x}{1!} + T''(x_i) \frac{\Delta x^2}{2!} - T'''(x_i) \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots \quad (2.10)$$

atau

$$T(x_{i-1}) = T(x_i) - T'(x_i) \Delta x + O(\Delta x^2) \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = T'(x_i) = \frac{T(x_i) - T(x_{i-1})}{\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (2.12)$$

Apabila data yang digunakan untuk memperkirakan diferensial dari fungsi adalah pada titik x_{i-1} dan x_{i+1} , maka perkiraannya disebut diferensial terpusat. Jika persamaan (2.4) dikurangi persamaan (2.10) didapat:

$$T(x_{i+1}) - T(x_{i-1}) = 2T'(x_i) \Delta x + 2T'''(x_i) \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots$$

atau

$$\frac{\partial T}{\partial x} = T'(x_i) = \frac{T(x_{i+1}) - T(x_{i-1})}{2\Delta x} - T'''(x_i) \frac{\Delta x^2}{6} \dots$$

atau

$$\frac{\partial T}{\partial x} = T'(x_i) = \frac{T(x_{i+1}) - T(x_{i-1})}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) - \dots \quad (2.13)$$

2.2.3. Diferensial Turunan Kedua

Turunan kedua dari suatu fungsi dapat diperoleh dengan menjumlahkan persamaan (2.4) dengan persamaan (2.10):

$$T(x_{i+1}) + T(x_{i-1}) = 2T(x_i) + 2T''(x_i) \frac{\Delta x^2}{2!} + 2T''''(x_i) \frac{\Delta x^4}{4!} + \dots$$

atau

$$T''(x_i) = \frac{T(x_{i+1}) - 2T(x_i) + T(x_{i-1}))}{\Delta x^2} - T''''(x_i) \frac{\Delta x^4}{12} - \dots$$

atau

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = T''(x_i) = \frac{T(x_{i+1}) - 2T(x_i) + T(x_{i-1}))}{\Delta x^2} - O(\Delta x^2) \quad (2.14)$$

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa bentuk diferensial (biasa atau parsial) dapat diubah dalam bentuk diferensial numerik (beda hingga).

2.2.4. Turunan Terhadap Variabel Lain

Apabila fungsi mengandung lebih dari satu variabel bebas, seperti (x, y) , maka bentuk deret Taylor menjadi:

$$T(x_{i+1}, y_{j+1}) = T(x_i, y_j) + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\Delta x}{1!} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\Delta y}{1!} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \frac{\Delta y^2}{2!} + \dots \quad (2.15)$$

Dengan cara yang sama seperti telah dijelaskan di depan, turunan pertama terhadap variabel x dan y berturut-turut dapat ditulis dalam bentuk (diferensial maju):

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T(x_{i+1}, y_j) - T(x_i, y_j)}{\Delta x} \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{T(x_i, y_{j+1}) - T(x_i, y_j)}{\Delta y} \quad (2.17)$$

Untuk menyederhanakan penulisan, selanjutnya bentuk $T(x_i, y_j)$ ditulis menjadi T_{ij} dengan subskrip i dan j menunjukkan komponen dalam arah sumbu x

dan sumbu y . Dengan cara seperti itu maka persamaan (2.16) dan (2.17) dapat ditulis menjadi:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x} \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta y} \quad (2.19)$$

Untuk diferensial terpusat bentuk di atas menjadi:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{2\Delta y} \quad (2.21)$$

Dengan cara yang sama, turunan kedua terhadap x dan y dapat ditulis menjadi:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{\Delta x^2} \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{\Delta y^2} \quad (2.23)$$

(Triatmojo, 2002: 9-13)

2.3. Turunan Parsial

2.3.1. Definisi Turunan Parsial

Misalkan T suatu fungsi dua variabel x dan y . Turunan parsial T terhadap x adalah suatu fungsi, yang dinyatakan oleh D_1T , yang nilai fungsinya di setiap titik (x,y) dalam domain T diberikan oleh:

$$D_1T(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{T(x + \Delta x, y) - T(x, y)}{\Delta x} \quad (2.24)$$

apabila limit ini ada. Dengan cara yang sama, turunan parsial T terhadap y adalah suatu fungsi yang dinyatakan oleh D_1T , yang nilai fungsinya di setiap (x,y) dalam domain T diberikan oleh:

$$D_2T(x,y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{T(x,y+\Delta y) - T(x,y)}{\Delta y} \quad (2.25)$$

apabila limit ini ada.

Proses pencarian suatu turunan parsial disebut pendiferensialan parsial. D_1T dibaca sebagai "D satu T " dan menyatakan fungsi yang merupakan turunan parsial T terhadap variabel pertama. $D_1T(x,y)$ dibaca sebagai "D satu T dari x dan y " dan menyatakan nilai fungsi D_1T di titik (x,y) . Notasi lain untuk D_1T adalah T_1, T_x , dan $\frac{\partial T}{\partial x}$. Notasi lain untuk $D_1T(x,y)$ adalah $T_1(x,y), T_x(x,y)$, dan $\frac{\partial T(x,y)}{\partial x}$. Dengan cara yang sama, notasi-notasi lain untuk D_2T adalah T_2, T_y , dan $\frac{\partial T}{\partial y}$, notasi lain untuk $D_2T(x,y)$ adalah $T_2(x,y), T_y(x,y)$, dan $\frac{\partial T(x,y)}{\partial y}$.

Bila $Z = T(x,y)$, kita dapat menuliskan $\frac{\partial Z}{\partial x}$ untuk $D_1T(x,y)$. Turunan parsial tidak dapat dipandang sebagai hasil bagi dari dZ dan dx karena masing-masing simbol ini tidak mempunyai arti secara terpisah. Notasi $\frac{dy}{dx}$ dapat dianggap sebagai hasil bagi dua diferensial apabila y suatu fungsi satu variabel x , tetapi tidak ada tafsiran yang serupa seperti itu untuk $\frac{\partial Z}{\partial x}$. (Leitholt, 1991: 313)

2.3.2. Turunan Parsial Tingkat Tinggi

Secara umum, karena turunan parsial suatu fungsi x dan y adalah fungsi lain dari dua peubah yang sama, maka turunan tersebut dapat diturunkan secara parsial terhadap x dan y untuk memperoleh empat turunan parsial kedua fungsi T yaitu:

$$\begin{aligned} T_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} & T_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\ T_{xy} &= (T_x)_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial x} & T_{yx} &= (T_y)_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Kebanyakan permasalahan dalam ilmu pengetahuan dan teknologi dapat dipresentasikan dalam bentuk persamaan diferensial parsial. Persamaan tersebut merupakan laju perubahan terhadap dua atau lebih variabel bebas yang biasanya adalah waktu dan jarak (ruang). Bentuk persamaan diferensial parsial order 2 dimensi adalah:

$$A \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial x} + C \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + D \frac{\partial T}{\partial x} + E \frac{\partial T}{\partial y} + FT + G = 0 \quad (2.27)$$

Dengan a, b, c, d, e, f , dan g bisa merupakan fungsi dari variabel x dan y dan variabel tidak bebas T .

Seperti pada persamaan diferensial biasa, disini perlu diketahui syarat batas, tetapi karena ada dua variabel bebas, syarat batasnya diberikan pada suatu lengkungan dalam bidang x - y .

Persamaan diferensial dapat dibedakan menjadi tiga tipe yaitu:

1. Persamaan Ellips (*elliptik*) jika : $b^2 - 4ac < 0$

Persamaan ellips ini biasanya berhubungan dengan masalah kesetimbangan atau kondisi permanen (tidak tergantung waktu) dan penyelesaiannya memerlukan kondisi batas di sekeliling daerah tinjauan. Seperti aliran air tanah di bawah bendungan karena adanya pemompaan, defleksi plat akibat pembebanan, dsb.

Persaman yang termasuk dalam tipe ini adalah persamaan Poisson:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + g = 0 \quad (2.28)$$

Dan persamaan Laplace:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (2.29)$$

Keterangan

T	: suhu
x	: absis
y	: koordinat
g	: $\frac{q(\Delta x^2)}{k}$

Dengan syarat batas $T(x,y)$ adalah konstan pada lengkungan batas C dari daerah R . Biasanya daerah R , adalah segi empat dengan lebar L dan tinggi K , sehingga lebar L dapat dibagi menjadi n selang, masing-masing $h = \frac{L}{n}$ dan

tinggi K dalam selang m masing-masing $k = \frac{K}{m}$. Seluruhnya terdapat

$(n-1)(m-1)$ titik perpotongan. Kita akan menuliskan suatu persamaan

diferensial setiap titik perpotongan dan memecahkan system persamaan simultan yang terjadi.

Gunakan notasi: $T(ih, jk) = T_{i,j}$
 $h(ih, jk) = h_{i,j}$

Dengan notasi ini maka syarat batas menjadi:

$$\begin{aligned} T_{i,0} &= u_{i,0} & \text{dengan } i &= 1, 2, 3, \dots, n \\ T_{i,m} &= u_{i,m} & j &= 1, 2, 3, \dots, n \\ T_{0,j} &= u_{0,j} \\ T_{n,j} &= u_{n,j} \end{aligned}$$

Dengan $\lambda = k/h$ dan titik i,j adalah (x_0, y_0) maka persamaan Laplace di atas berubah menjadi:

$$\lambda^2 T_{i+1,j} + \lambda^2 T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 2(1 + \lambda^2) T_{i,j} = 0 \quad (2.30)$$

Untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ dan $j = 1, 2, 3, \dots, m-1$. Jika ditulis untuk semua titik, kita mempunyai persamaan simultan sebanyak $(m-1)(n-1)$ buah dan $T_{i,j}$ sebanyak $(m+1)(n+1)$ buah. Persamaan syarat batas sebanyak $2(m+n)$ menyebabkan $T_{i,j}$ diperoleh secara unik.

2. Persamaan Parabola (*parabolik*) jika : $b^2 - 4ac = 0$

Persamaan parabolik ini biasanya merupakan persamaan yang tergantung pada waktu (tidak permanen) dan penyelesaiannya memerlukan kondisi awal dan batas. Persamaan parabola paling sederhana adalah perambatan panas.

Persamaan Parabola mempunyai bentuk:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2.31)$$

Keterangan: T : suhu
 t : waktu
 x : jarak.
 K : koefisien konduktivitas

3. Persamaan Hiperbola (*hiperbolik*) jika: $b^2 - 4ac > 0$

Persamaan hiperbolik ini biasanya berhubungan dengan getaran atau permasalahan di mana terjadi diskontinu dalam waktu, seperti gelombang kejut yang terjadi diskontinu dalam kecepatan, tekanan dan rapat massa.

Persamaan Hiperbolik mempunyai bentuk:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2.32)$$

Keterangan: T : gelombang
 t : waktu
 x : jarak.
 C : laju gelombang

Penyelesaian persamaan diferensial parsial dengan kondisi awal dan batas, dapat diselesaikan dengan metode beda hingga (Bambang Triatmojo, 2002: 201).

2.3.3. Solusi Persamaan Diferensial Parsial

Solusi adalah cara terbaik untuk mengatasi atau menyelesaikan satu masalah (M. Dahlan, 2003: 725).

Suatu problem matematis yang berbentuk persamaan diferensial parsial, diikuti oleh beberapa syarat yang harus dipenuhi oleh penyelesaian-penyelesaian persamaan diferensial parsial tersebut. Syarat-syarat ini dapat menyangkut dua

harga atau lebih variabel bebas, sehingga persamaan diferensial parsial tersebut disertai syarat ini, biasa disebut masalah syarat batas.

Masalah syarat awal adalah persamaan diferensial parsial yang diikuti oleh syarat yang hanya menyangkut satu titik saja. Suatu syarat batas maupun syarat awal dikatakan homogen apabila syarat tersebut dipenuhi oleh suatu fungsi f dan juga cf , dimana c adalah konstanta sebarang.

Contoh:

Misalkan problem yang disajikan dengan persamaan:

$$\frac{\partial^2 Y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 Y(x,t)}{\partial t^2} \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \geq t$$

$$Y(0,t) = 0 = Y(L,t) \quad \text{syarat batas}$$

$$\left. \begin{array}{l} Y(x,0) = f(x) \\ \frac{\partial Y(x,0)}{\partial t} = g(x) \end{array} \right\} \quad \text{syarat awal}$$

Menurut Farlow (1994), untuk menemukan solusi suatu persamaan diferensial parsial yang disertai syarat awal dan syarat batas dapat digunakan beberapa metode antara lain sebagai berikut:

1. Metode Pemisahan Variabel

Metode ini mereduksi persamaan diferensial parsial n variabel ke dalam n persamaan diferensial biasa. Metode ini menganggap bahwa suatu penyelesaian persamaan diferensial parsial dapat dinyatakan sebagai suatu perkalian dari masing-masing fungsi yang tak diketahui yang tergantung hanya pada satu variabel

2. Metode Transformasi Fourier

Metode ini mereduksi persamaan diferensial parsial n variabel bebas menjadi suatu persamaan diferensial biasa. Kemudian persamaan diferensial biasa tersebut diselesaikan dan balikan transformasi Fourier dari persamaan diferensial tersebut merupakan penyelesaian persamaan diferensial parsial yang diberikan.

3. Metode Numerik

Metode ini Mereduksi persamaan diferensial parsial menjadi suatu persamaan beda yang diselesaikan dengan program komputer. (Imam Wahyudi.2002)

2.3.3.1. Solusi Numerik pada Persamaan Diferensial Parsial

Ide dasar penggunaan metode numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial adalah bahwa setiap turunan parsial dari persamaan diferensial yang digunakan diganti dengan suatu pendekatan beda hingga. Bila pendekatan beda hingga tersebut diterapkan seluruh titik-titik variabel yang terdapat pada model konsep, maka solusi dari rangkaian persamaan simultan yang digunakan dapat ditentukan secara langsung atau menggunakan cara iterasi.

Pada suatu model yang mempunyai persamaan jarak antara titik variabel adalah $x_i = x_0 + i\Delta x$ dan $y_j = y_0 + j\Delta y$, akan mempunyai persamaan pendekatan beda hingga yaitu pada persamaan (2.18) dan persamaan (2.19).

Lebih lanjut, pendekatan beda hingga untuk turunan keduanya adalah pada persamaan (2.22) dan pada persamaan (2.23):

Menggunakan kedua persamaan turunan kedua di atas dapat diperoleh pendekatan beda hingga terhadap persamaan Laplace dua dimensi, yaitu persamaan (2.29).

Sehingga diperoleh

$$\frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0 \quad (2.33)$$

Bila diasumsikan bahwa $\Delta x = \Delta y$, persamaan di atas dapat disederhanakan menjadi :

$$T_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}}{4} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{dan} \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2.34)$$

Persamaan (2.34) menyatakan bahwa nilai suatu titik variabel merupakan nilai rata-rata empat titik variabel terdekat.

Solusi dengan menggunakan metode Liebmann maka, untuk menghitung titik-titik dalam suatu permasalahan yaitu dengan menggunakan persamaan (2.34) kemudian dilanjutkan dengan menghitung nilai over-relaksasi dari titik tersebut dengan persamaan

$$T_{i,j}^{new} = \lambda T_{i,j}^{new} + (1 - \lambda) T_{i,j}^{old} \quad (2.35)$$

Perhitungan secara iterasi dapat dilanjutkan sampai memperoleh nilai Iterasi dengan nilai kesalahan terkecil, atau nilai kesalahan minimal yang kita harapkan dengan rumus

$$|(\varepsilon_a)_{i,j}| = \left| \frac{T_{i,j}^{new} - T_{i,j}^{old}}{T_{i,j}^{new}} \right| \times 100\% \quad (2.36)$$

(Agus Setiawan, 2006:217).

Berkenaan dengan solusi atau penyelesaian masalah apabila kita memperbanyak amal shaleh dan beristighfar maka Allah akan memberi kita jalan keluar, atau memberi solusi kepada kita, dari arah yang tidak diduga. Seperti dalam firman Allah Swt. dalam Qs. Ath-Thalâq/65: 2

... وَمَنْ يَتَّقِ اللَّهَ يَجْعَلْ لَهُ مَخْرَجًا ﴿٢﴾

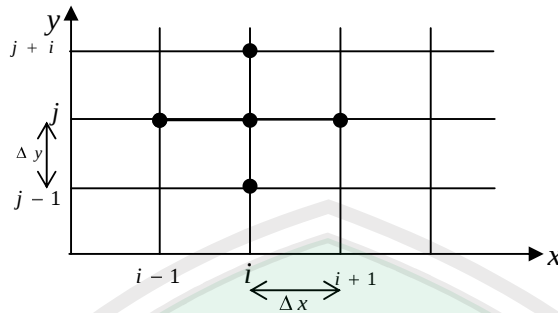
"...Barangsiapa bertakwa kepada Allah niscaya dia akan mengadakan baginya jalan keluar"(Ath-Thalâq/65: 2).

Dan barang siapa bertakwa kepada Allah dengan melaksanakan tuntunannya dan meninggalkan larangannya niscaya Dia akan mengadakan baginya jalan keluar dari aneka kesulitan hidup, termasuk hidup rumah tangga yang dihadapinya dan memberinya risiko yakni perolehan risiko duniawi dan ukhrawi dari arah yang tak diduga. (M. Quraish Shihab, 2003: 289)

Allah memberi jalan keluar tidak hanya dalam kesulitan hidup rumah tangga saja melainkan keseluruhan dari masalah yang kita hadapi dalam kehidupan sehari-hari.

2.4. Persamaan Diferensial Parsial dalam Bentuk Benda Hingga

Perkiraan diferensial dengan bentuk benda hingga, untuk persamaan yang mengandung variabel x dan y , perbedaan benda hingga dilakukan dengan membuat jaringan titik pada hitungan pada bidang $x - y$ yang dapat dibagi menjadi sejumlah pias segi empat dengan sisi Δx dan Δy . Panjang pias dalam arah x adalah sama dan diberi notasi $x_i = i \Delta x$, $i = 0, 1, 2, 3, \dots$ dan dalam arah y adalah sama dan diberi notasi $y_i = i \Delta y$, $i = 0, 1, 2, 3, \dots$ Dengan menggunakan jaringan titik hitungan dalam Gambar 2.1. Semua diferensial ditulis pada titik hitungan (i, j) . bentuk turunan pertama dan kedua didekati oleh:



Gambar 2.1. jaringan titik hitungan dalam bidang $x - y$

Dimana:

Dalam arah x memenuhi persamaan (2.18) dan persamaan (2.20)

Maka untuk turunan kedua dalam arah x memenuhi persamaan (2.22)

Sedangkan dalam arah y memenuhi persamaan (2.19) dan persamaan (2.21)

Maka untuk turunan kedua dalam arah y memenuhi persamaan (2.23)

(Bambang Tiatmojo, 2002: 202)

2.5. Metode Liebmann

Cara penyelesaian persamaan diferensial parsial Eliptik dengan menggunakan metode *finite difference* akan menghasilkan suatu sistem linier yang harus dipecahkan. Untuk pembagian grid yang besar, maka penyelesaiannya akan semakin sulit, dan menghasilkan kesalahan yang cukup besar. Untuk menyelesaikan hal ini biasanya menggunakan metode Liebmann.

Pada metode Liebmann mengekspresikan persamaan beda hingga dua dimensi menjadi persamaan (2.34) yaitu:

$$T_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}}{4}$$

dan memecahkan secara iterasi untuk $i = 1$ sampai n dan $j = 1$ sampai m .

Persamaan (2.34) selanjutnya diselesaikan secara Iterasi dengan persamaan over-relaksasi yaitu persamaan (2.35) berikut:

$$T_{i,j}^{new} = \lambda T_{i,j}^{new} + (1 - \lambda) T_{i,j}^{old}$$

dengan $T_{i,j}^{new}$ dan $T_{i,j}^{old}$ adalah nilai $T_{i,j}$ dari iterasi sekarang dan sebelumnya, dan λ adalah koefisien relaksasi, yang besarnya dapat diambil antara 1 dan 2 (Agus Setiawan, 2006:217).

λ_{opt} dapat dicari menggunakan persamaan sebagai berikut:

$$\lambda_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \omega^2}} \quad (3.37)$$

Untuk

$$\omega = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2} \left[\cos \frac{\pi}{m} + \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 \cos \frac{\pi}{n} \right] \quad (3.38)$$

(Chung-Yau Lam, 1994: 82)

Over-relaksasi digunakan untuk mempercepat dari kesetabilan dengan menggunakan rumus pada persamaan (2.35) yang mengikuti pada masing-masing Iterasi (Chapra, 2002: 825).

Sebagai nilai awal maka kondisi pada titik interior diambil sama dengan nol. Iterasi dapat dihentikan jika kesalahan relatifnya sudah mencapai batas yang disyaratkan. Besarnya kesalahan relatif didefinisikan sebagai persamaan (2.36) (Agus Setiawan, 2006: 217).

2.6. Energi

Energi juga telah dibahas dalam Al Quran tetapi tidak dituliskan secara jelas melainkan dengan kata-kata lain seperti kata Nur atau cahaya, seperti dalam Qs. An-Nûr/24: 35

﴿اللَّهُ نُورُ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ مِثْلُ نُورِهِ كَمِشْكُوتٍ فِيهَا مِصْبَاحٌ الْمِصْبَاحُ فِي زُجَاجَةٍ الزُّجَاجَةُ كَأَنَّهَا كَوْكَبٌ دُرِّيٌّ يُوقَدُ مِنْ شَجَرَةٍ مُبْرَكَةٍ زَيْتُونَةٍ لَا شَرْقِيَّةٍ وَلَا غَرْبِيَّةٍ يَكَادُ زَيْتُهَا يُضِيءُ وَلَوْ لَمْ تَمْسَسْهُ نَارٌ نُورٌ عَلَى نُورٍ يَهْدِي اللَّهُ لِنُورِهِ مَنْ يَشَاءُ وَيَضْرِبُ اللَّهُ الْأَمْثَلَ لِلنَّاسِ وَاللَّهُ بِكُلِّ شَيْءٍ عَلِيمٌ﴾

"Allah (Pemberi) cahaya (kepada) langit dan bumi. perumpamaan cahaya Allah, adalah seperti sebuah lubang yang tak tembus, yang di dalamnya ada Pelita besar. Pelita itu di dalam kaca (dan) kaca itu seakan-akan bintang (yang bercahaya) seperti mutiara, yang dinyalakan dengan minyak dari pohon yang berkahnya, (yaitu) pohon zaitun yang tumbuh tidak di sebelah timur (sesuatu) dan tidak pula di sebelah barat(nya), yang minyaknya (saja) hampir-hampir menerangi, walaupun tidak disentuh api. cahaya di atas cahaya (berlapis-lapis), Allah membimbing kepada cahaya-Nya siapa yang dia kehendaki, dan Allah memperbuat perumpamaan-perumpamaan bagi manusia, dan Allah Maha mengetahui segala sesuatu" (Qs. An-Nûr/24: 35).

Kata Nur atau yang berarti cahaya di atas mempunyai maksud energi. Karena cahaya adalah energi yang paling utama, tanpa cahaya bumi ini sangat dingin dan semua makhluk hidup tidak dapat hidup di bumi ini. Dengan cahaya matahari, tumbuhan dapat melakukan fotosintesis, manusia dapat menjemur pakaian dan cahaya matahari dapat diubah menjadi energi listrik sehingga dapat digunakan untuk menyalakan lampu dan alat-alat listrik yang lain.

Kajian tentang energi juga terdapat dalam Qs. Al Hadîd/57: 25

وَأَنْزَلْنَا الْحَدِيدَ فِيهِ بَأْسٌ شَدِيدٌ وَمَنْفَعٌ لِلنَّاسِ وَلِيَعْلَمَ اللَّهُ مَنْ يَنْصُرُهُ وَرُسُلَهُ

بِالْغَيْبِ إِنَّ اللَّهَ قَوِيٌّ عَزِيزٌ ﴿٥٧﴾

”... dan Kami ciptakan besi yang padanya terdapat kekuatan yang hebat dan berbagai manfaat bagi manusia, (supaya mereka mempergunakan besi itu) dan supaya Allah mengetahui siapa yang menolong (agama)Nya dan rasul-rasul-Nya padahal Allah tidak dilihatnya. Sesungguhnya Allah Maha Kuat lagi Maha Perkasa” (Qs. Al Hadid/57: 25).

Dari ayat di atas berarti dalam besi terdapat kekuatan yang besar, atau di dalam besi terdapat energi yang besar sehingga dapat dimanfaatkan bagi manusia.

2.6.1. Pengertian Energi

Energi adalah suatu kemampuan atau potensi untuk melakukan suatu usaha (perubahan). Secara umum energi dibagi menjadi dua, yaitu energi transisional (*transitional energy*) dan energi tersimpan (*stored energy*) (Archie W. Culp, 1989:3-6).

1. Energi Transisional

Energi transisional adalah energi yang sedang bergerak, dan dapat berpindah melintasi suatu batas sistem.

2. Energi Tersimpan

Energi tersimpan adalah energi yang berwujud sebagai massa, posisi dalam medan gaya, dan lain-lain.

Karena belum adanya metode dan sistem pengklasifikasian energi yang dapat diterima secara umum, Archie W. Culp membagi energi menjadi 6 kelompok atau klasifikasi utama, yaitu:

- Energi Mekanik

Energi mekanik adalah suatu energi yang dapat digunakan mengangkat suatu benda. Energi mekanik dapat disimpan dalam bentuk energi potensial dan dalam bentuk energi kinetik.

Contoh energi potensial adalah energi dalam medan gravitasi, energi yang berkaitan dengan regangan elastisitas. Sedangkan contoh energi kinetik adalah roda gila (*flywheel*).

- Energi Listrik

Energi listrik adalah jenis energi yang berkaitan dengan arus dan akumulasi elektron.

Contoh energi yang tersimpan dalam accu.

Tentang listrik dijelaskan juga dalam Al Qur'an Qs. An-Nûr/24: 35

اللَّهُ نُورُ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ ۚ مِثْلُ نُورِهِ كَمِشْكَاةٍ فِيهَا مِصْبَاحٌ
الْمِصْبَاحُ فِي زُجَاجَةٍ ۚ الزُّجَاجَةُ كَأَنَّهَا كَوْكَبٌ دُرِّيٌّ يُوقَدُ مِنْ شَجَرَةٍ
مُبْرَكَةٍ زَيْتُونَةٍ لَا شَرْقِيَّةٍ وَلَا غَرْبِيَّةٍ يَكَادُ زَيْتُهَا يُضِيءُ وَلَوْ لَمْ تَمْسَسْهُ
نَارٌ ۚ نُورٌ عَلَى نُورٍ ۗ يَهْدِي اللَّهُ لِنُورِهِ مَن يَشَاءُ ۚ وَيَضْرِبُ اللَّهُ الْأَمْثَلَ
لِلنَّاسِ ۚ وَاللَّهُ بِكُلِّ شَيْءٍ عَلِيمٌ ﴿٣٥﴾

“Allah (Pemberi) cahaya (kepada) langit dan bumi. perumpamaan cahaya Allah, adalah seperti sebuah lubang yang tak tembus, yang di dalamnya ada pelita besar. pelita itu di dalam kaca (dan) kaca itu seakan-akan bintang (yang bercahaya) seperti mutiara, yang dinyalakan dengan minyak dari pohon yang berkahnya, (yaitu) pohon zaitun yang tumbuh tidak di sebelah timur (sesuatu) dan tidak pula di sebelah barat(nya), yang minyaknya (saja) Hampir-hampir menerangi, walaupun tidak disentuh api. cahaya di atas cahaya (berlapis-lapis), Allah membimbing kepada cahaya-Nya siapa yang Dia kehendaki, dan Allah memperbuat

perumpamaan-perumpamaan bagi manusia, dan Allah Maha mengetahui segala sesuatu” (Qs. An-Nûr/24: 35).

Dalam ayat di atas yang mempunyai arti "... yang dinyalakan dengan minyak dari pohon yang banyak berkahnya (yaitu) pohon zaitun yang tumbuh tidak di sebelah timur dan tidak pula di sebelah barat, yang minyaknya saja hampir-hampir menerangi walaupun tidak di sentuh api, cahaya diatas cahaya, ..." Hal yang menarik bagi penulis adalah kalimat "... yang tumbuh tidak di sebelah timur dan tidak pula di sebelah barat ...", apabila kita memperhatikan arah mata angin, kalau bukan timur dan barat, bukankah ini berarti utara dan selatan, utara dan selatan adalah kutub magnet, magnet (elektro magnetik) berguna sebagai pembangkit induksi listrik untuk menghasilkan energi listrik.

Dalam ayat ini kata pohon zaitun seumpama generator dan minyak seumpama arus listrik dimana apabila arus dengan kutub yang berbeda dihubungkan akan menimbulkan percikan ("... minyaknya hampir-hampir menerangi walaupun tidak disentuh api..."). Menurut penulis ayat ini jelas-jelas menulis tentang listrik dan bola lampu, yang disampaikan melalui perumpamaan-perumpamaan, sesuai dengan kelanjutan ayat tersebut"...Allah membimbing kepada Cahaya-Nya siapa yang dia kehendaki dan Allah memperbuat perumpamaan-perumpamaan bagi manusia dan Allah Maha Mengetahui segala sesuatu." (Dian Fansuri Nainggolan, 2007. <http://www.waspada.co.id/Mimbar-Jumat/Artikel-Jumat/Prinsip-Dasar-Listrik-Menurut-Al-Qur-an.html>.29 Desember 2008).

- Energi Elektromagnetik

Energi elektromagnetik adalah suatu bentuk energi yang berkaitan dengan radiasi elektromagnetik. Dan radiasi elektromagnetik adalah suatu bentuk energi murni yang artinya tidak berkaitan dengan massa.

Contoh, radiasi gamma, sinar X, dan radiasi gelombang radio.

- Energi Kimia

Energi Kimia adalah energi yang keluar sebagai hasil interaksi elektron di mana dua atau lebih atom dan / molekul berkombinasi menghasilkan senyawa kimia yang stabil.

Contoh, pembakaran pada bensin, pembakaran pada solar.

- Energi Nuklir

Energi Nuklir adalah bentuk energi lain yang hanya ada sebagai energi tersimpan yang bisa dilepas akibat interaksi partikel dengan atau di dalam inti atom.

Contoh, peluruhan radioaktif.

- Energi Panas

Energi panas (termal) adalah bentuk energi dasar dengan arti kata, semua bentuk energi lain dapat dikonversi secara penuh ke energi ini. Bentuk transisional dari energi termal adalah panas. Energi termal dapat disimpan hampir pada semua media sebagai panas sebagai panas sensibel maupun panas laten. Penyimpanan panas sensibel diikuti dengan kenaikan suhu (*temperatur*), sedangkan penyimpanan panas laten diikuti dengan perubahan fase dan bersifat isothermis.

Contoh: panas yang terkandung dalam api

2.7. Perindahan Energi Panas

Perpindahan energi panas dapat didefinisikan sebagai perindahan energi dari satu daerah ke daerah lain sebagai akibat dari beda suhu antara daerah-daerah tersebut. Perpindahan panas pada umumnya ada tiga cara pemindahan panas, yaitu: hantaran (*konduksi*), radiasi (*radiation*), konveksi (*illian*) (Frank Kreith, 1986:4-5).

a. Perpindahan Panas Konduksi

Perpindahan panas konduksi adalah perpindahan panas dimana panas mengalir dari daerah bersuhu lebih tinggi ke daerah yang lebih rendah di dalam suatu medium (padat, cair, atau gas) atau antara medium yang berlainan yang bersinggungan secara langsung.

b. Perpindahan Panas Radiasi

Perpindahan panas radiasi adalah perpindahan panas dimana panas mengalir dari benda yang bersuhu tinggi ke benda yang bersuhu rendah bila benda-benda tersebut terpisah di dalam ruang, bahkan bila terdapat dalam ruang hampa diantara benda-benda tersebut.

Radiasi merambat di ruang angkasa dalam bentuk gelombang. Karena terdapat perbedaan yang sangat besar pada panjang gelombang radiasi elektromagnetik maka untuk mempermudah para ilmuwan membagi spektrum ini berdasarkan panjang gelombang, yaitu:

1. Sinar Gamma mempunyai panjang gelombang 10^{-19} nm

2. Sinar X mempunyai panjang gelombang 10^{-7} nm
3. Sinar ultraviolet mempunyai panjang gelombang 10^{-5} nm
4. Cahaya biru mempunyai panjang gelombang 400 nm
5. Tampak merah mempunyai panjang gelombang 700 nm
6. Cahaya inframerah mempunyai panjang gelombang diantara 700 nm – 10^6 nm
7. Gelombang mikro mempunyai panjang gelombang diantara $10^6 - 10^9$ nm
8. Gelombang radio mempunyai panjang gelombang lebih dari 10^9 nm

(<http://www.harunyahya.com/indo/buku/semesta008.htm>, 21 januari 2008)

Misalnya matahari yang memancarkan panas ke bumi, panas tersebut mengalir melalui ruang hampa, sehingga bumi menjadi hangat dan juga menjadi terang, karena panas yang dipancarkan matahari. Allah Swt berfirman dalam Qs An-Nûr/24: 35

﴿اللَّهُ نُورُ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ ۚ مِثْلُ نُورِهِ كَمِشْكُوتٍ فِيهَا مِصْبَاحٌ
الْمِصْبَاحُ فِي زُجَاجَةٍ ۚ الزُّجَاجَةُ كَأَنَّهَا كَوْكَبٌ دُرِّيٌّ يُوقَدُ مِنْ شَجَرَةٍ مُبَارَكَةٍ
زَيْتُونَةٍ لَا شَرْقِيَّةٍ وَلَا غَرْبِيَّةٍ يَكَادُ زَيْتُهَا يُضِيءُ وَلَوْ لَمْ تَمْسَسْهُ نَارٌ ۚ نُورٌ عَلَى
نُورٍ يَهْدِي اللَّهُ لِنُورِهِ مَن يَشَاءُ ۚ وَيَضْرِبُ اللَّهُ الْأَمْثَلَ لِلنَّاسِ ۚ وَاللَّهُ بِكُلِّ

شَيْءٍ عَلِيمٌ ﴿٣٥﴾

"Allah (Pemberi) cahaya (kepada) langit dan bumi. perumpamaan cahaya Allah, adalah seperti sebuah lubang yang tak tembus, yang di dalamnya ada Pelita besar. Pelita itu di dalam kaca (dan) kaca itu seakan-akan bintang (yang bercahaya) seperti mutiara, yang dinyalakan dengan minyak dari pohon yang berkahnya, (yaitu) pohon zaitun yang tumbuh tidak di sebelah timur (sesuatu) dan tidak pula di sebelah barat(nya), yang minyaknya (saja) hampir-hampir menerangi, walaupun tidak disentuh api. cahaya di atas

cahaya (berlapis-lapis), Allah membimbing kepada cahaya-Nya siapa yang dia kehendaki, dan Allah memperbuat perumpamaan-perumpamaan bagi manusia, dan Allah Maha mengetahui segala sesuatu” (Qs. An-Nûr/24: 35).

Jadi dari ayat di atas dijelaskan bahwa lubang yang tidak tembus dan di dalamnya terdapat pelita besar. Pelita itu seakan-akan bercahaya seperti mutiara. Pelita tersebut bisa terlihat oleh manusia karena pelita tersebut mengeluarkan panas dan cahaya secara radiasi sehingga dapat terlihat oleh mata kita.

Kecepatan cahaya dapat dihitung berdasarkan redaksi ayat-ayat Al Quran, yaitu Qs. As-Sajdah/32: 5

يُدَبِّرُ الْأَمْرَ مِنَ السَّمَاءِ إِلَى الْأَرْضِ ثُمَّ يَعْرُجُ إِلَيْهِ فِي يَوْمٍ كَانَ مِقْدَارُهُ أَلْفَ سَنَةٍ مِّمَّا تَعُدُّونَ ﴿٥﴾

“Dia mengatur urusan dari langit ke bumi, kemudian (urusan) itu naik kepadaNya dalam satu hari yang kadarnya adalah seribu tahun menurut perhitunganmu” (As-Sajdah/32: 5).

Menurut Dr. Mansour Hassab Elnaby Seorang ilmuwan matematika dan fisika dari Mesir, sehari adalah seribu tahun pada ayat tersebut bila dimasukkan dalam persamaan matematis adalah sebagai berikut: $C \cdot t = 12000 \cdot L$

$$C \cdot t = 12000 \cdot (v \cdot T)$$

$$C \cdot t = 12000 \cdot (V_e \cdot \cos a \cdot T)$$

$$C = 12000 \cdot (V_e \cdot \cos a \cdot T) / t$$

$$C = 12000 \cdot 3682.07 \text{ km/jam} \cdot 0.89157 \cdot 655.71986 \text{ jam} / 86164.0906 \text{ det}$$

$$C = 299.792,5 \text{ km/det}$$

Hasil tersebut sangat valid bila dibandingkan dengan hasil pengukuran kecepatan cahaya pada saat ini. Karena hasil hitung US National Bureau of Standard diperoleh $C = 299.792,4601 \text{ km/ detik}$.

(<http://bagustris.blogspot.com/2007/08/kecepatan-cahaya-itu-relatif.html>, 21 januari 2008).

Artinya dari hasil perhitungan ilmuwan baru-baru ini yang mengadakan penelitian dalam menghitung kecepatan cahaya nilainya mendekati dengan yang dituliskan dalam Al Quran yang telah diturunkan kepada Nabi Muhammad Saw. 1400 tahun yang lalu.

c. Perpindahan Panas Konveksi

Perpindahan panas konveksi adalah perpindahan panas dimana panas ditransport dengan kerja gabungan dari konduksi, penyimpanan panas dan gerakan mencampur. Konveksi sangat penting sebagai mekanisme perpindahan energi antara permukaan benda padat dan cair atau gas (Frank Kerith, 1986: 4-5).

Dalam skripsi ini yang dibahas adalah perpindahan panas secara konduksi.

2.7.1. Perpindahan Panas Konduksi

Perpindahan panas konduksi adalah perpindahan panas dimana panas mengalir dari daerah bersuhu lebih tinggi ke daerah yang lebih rendah di dalam suatu medium (padat, cair, atau gas) atau antara medium yang berlainan yang bersinggungan secara langsung. Jika pada suatu benda terdapat gradien suhu (*temperatur gradient*), maka akan terjadi perpindahan energi dari bagian yang bersuhu tinggi ke bagian yang bersuhu rendah. Kita katakan bahwa energi

berpindah secara konduksi atau hantaran dan bahwa laju perpindahan kalor itu berbanding dengan gradien suhu normal:

$$\frac{q}{A} \sim \frac{\partial T}{\partial x}$$

Jika dimasukkan konstanta proporsionalitas (*proportionality constant*) atau tetapan kesebandingan, maka didapat suatu persamaan yang disebut dengan hukum Fourier untuk perpindahan panas secara konduksi, yaitu:

$$q = -kA \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.38)$$

Di mana: q = laju perpindahan panas

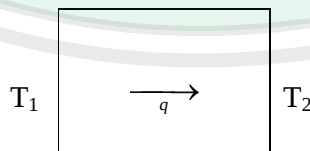
$\frac{\partial T}{\partial x}$ = gradien suhu ke arah perpindahan panas

k = konduktivitas atau kehantaran termal

A = luas penampang

Tanda minus (-) di atas diselipkan agar memenuhi hukum kedua termodinamika, yaitu bahwa kalor mengalir ketempat yang lebih rendah dalam skala suhu.

Untuk menghitung perpindahan panas satu dimensi lebih sederhana karena arah perpindahan panasnya hanya satu arah saja, seperti gambar di bawah ini.



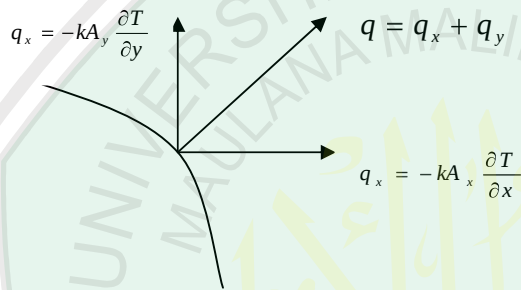
Gambar.2.2. Perpindahan panas satu dimensi

Untuk aliran panas dua dimensi (*two-dimensional heat flow*) dalam keadaan tunak berlaku persamaan Laplace atau persamaan (2.29), sedangkan

aliran panas dua dimensi dalam keadaan tunak dengan sumber panas didalamnya berlaku persamaan Poisson atau persamaan (2.28).

Dengan menganggap konduktivitas termal (*thermal conductivity*) tetap.

Untuk perpindahan panas dua dimensi lebih rumit, karena arah perpindahan panasnya dalam dua sumbu koordinat yaitu x dan y . Perpindahan panas dua dimensi dapat digambarkan



Gambar.2.3. Perpindahan panas dua dimensi

Jadi, aliran kalor pada arah x dan y dapat dihitung dari persamaan Fourier:

$$q_x = -kA_x \frac{\partial T}{\partial x} \quad (a)$$

$$q_y = -kA_y \frac{\partial T}{\partial y} \quad (b)$$

Aliran panas pada persamaan (a) mempunyai arah sejajar sumbu x . Sedangkan aliran panas pada persamaan (b) mempunyai arah sejajar sumbu y . Aliran total pada setiap titik dalam bahan itu adalah resultan dari x (q_x) atau y (q_y) di titik itu.

Atau dapat ditulis:

$$q = q_x + q_y$$

Jadi, vektor aliran kalor total mempunyai arah sedemikian rupa sehingga tegak lurus terhadap garis suhu tetap (*lines of constant temperature*), sebagaimana terlihat pada gambar di atas.

Untuk persamaan di atas dapat dimisalkan yaitu

q : golongan kanan

q_x : golongan kanan untuk kelompok umat terdahulu

q_y : golongan kanan untuk kelompok umat yang kemudian.

Jadi sesuai dengan rumus diatas berarti golongan kanan terdiri dari kelompok umat terdahulu dan kelompok besar umat yang kemudian. Allah Swt berfirman dalam (Qs. Al-waqi'ah/56: 38-40).

لَا صَحَابَ الْيَمِينِ ثَلَاثَةٌ مِّنَ الْأَوَّلِينَ وَثَلَاثَةٌ مِّنَ الْآخِرِينَ

”(Kami ciptakan mereka) untuk golongan kanan, (yaitu) segolongan besar dari orang-orang yang terdahulu. Dan segolongan besar pula dari orang-orang yang kemudian” (Qs. Al-waqi'ah/56 : 38-40).

2.8. Logam

Logam di bagi mejadi dua yaitu logam mulia dan logam bukan mulia.

Yang termasuk logam mulia yaitu emas, perak, dan lain sebagainya. Dan yang termasuk logam bukan mulia yaitu besi dan baja, tembaga, nikel, aluminium, timbal, seng, timah, dan lain sebagainya.

Ayat Al Quran ada juga yang membicarakan tentang logam yaitu pada Qs.

Al Hadid/57: 25 yang berbunyi

لَقَدْ أَرْسَلْنَا رُسُلَنَا بِالْبَيِّنَاتِ وَأَنْزَلْنَا مَعَهُمُ الْكِتَابَ وَالْمِيزَانَ لِيَقُومَ النَّاسُ
بِالْقِسْطِ وَأَنْزَلْنَا الْحَدِيدَ فِيهِ بَأْسٌ شَدِيدٌ وَمَنْفَعٌ لِلنَّاسِ وَلِيَعْلَمَ اللَّهُ مَنْ يَنْصُرُهُ
وَرُسُلَهُ بِالْغَيْبِ إِنَّ اللَّهَ قَوِيٌّ عَزِيزٌ ﴿٥٧﴾

“Sesungguhnya kami Telah mengutus rasul-rasul kami dengan membawa bukti-bukti yang nyata dan Telah kami turunkan bersama mereka Al Kitab dan neraca (keadilan) supaya manusia dapat melaksanakan keadilan, dan kami ciptakan besi yang padanya terdapat kekuatan yang hebat dan berbagai manfaat bagi manusia, (supaya mereka mempergunakan besi itu) dan supaya Allah mengetahui siapa yang menolong (agama)Nya dan rasul-rasul-Nya padahal Allah tidak dilihatnya. Sesungguhnya Allah Maha Kuat lagi Maha Perkasa” (Qs. al Hadid/57: 25).

Ayat di atas menerangkan bahwa besi mempunyai kekuatan yang hebat dan mempunyai banyak manfaat untuk manusia, misalnya besi dapat digunakan sebagai senjata yang dapat digunakan untuk berperang, dalam bidang teknik besi dapat digunakan sebagai mesin kendaraan bermotor, dan besi pun juga dapat digunakan sebagai kerangka bangunan sehingga suatu bangunan menjadi kuat dan tahan terhadap guncangan.

2.9. Persamaan Energi dalam Bentuk Benda Hingga

Persamaan energi untuk konduksi dua dimensi pada keadaan tunak (*steady*) memenuhi persamaan (2.29), atau persamaan diferensial parsial yang merupakan persamaan ellips. Dari persamaan ellips di atas akan disubstitusikan untuk mencari persamaan energi dalam bentuk benda hingga yang merupakan distribusi suhu pada koordinat x dan y .

Dari gambar 2.1, di atas adalah sebuah benda dua dimensi yang dibagi atas sejumlah jenjang tambahan yang sama (Equal increments) pada arah x dan y .

Selanjutnya akan ditentukan suhu pada setiap titik node di dalam benda itu dengan menggunakan persamaan sebagai kondisi yang ditentukan. Dengan menggunakan metode beda hingga untuk mendekati tambahan diferensial pada koordinat bidang dan suhu. Makin kecil tambahan berhingga yang digunakan makin baik pendekatan terhadap distribusi suhu sebenarnya. Dari persamaan diferensial parsial dalam bentuk beda hingga disubstitusikan pada persamaan ellips di atas, jika ditulis dalam bentuk beda hingga yaitu pada persamaan (2.33).

Persamaan ini adalah bentuk persamaan energi yang merupakan distribusi suhu dua dimensi pada keadaan tunak dalam koordinat x dan y .



BAB III

PEMBAHASAN

Bab ini akan menjelaskan tentang solusi persamaan diferensial parsial dengan menggunakan metode Liebmann pada distribusi suhu, Metode Liebmann dikonstruksi dari metode beda hingga dengan menggunakan dasar deret Taylor, sehingga menghasilkan turunan pertama. Dari turunan pertama diturunkan lagi sehingga menjadi turunan kedua (diferensial maju atau diferensial mundur). Dari diferensial Numerik (diferensial maju atau diferensial mundur) kemudian disubstitusikan pada persamaan suhu dalam keadaan tunak (*persamaan Laplace*). Melalui proses penghitungan dengan kondisi awal dan kondisi batas serta Δx dan Δy yang telah diketahui sehingga diperoleh nilai rambatan suhu pada setiap titik.

3.1. Langkah-langkah Metode Liebmann

Langkah-langkah untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial menggunakan metode Liebmann;

1. Menentukan persamaan diferensial parsial yang akan diselesaikan
2. Murunkan persamaan Laplace dengan deret Taylor sehingga menjadi persamaan beda hingga.
3. Mengkonstruksi persamaan beda hingga menjadi persamaan Liebmann
4. Menyelesaikan permasalahan dengan metode Liebmann.

Contoh 1:

1. Menentukan persamaan diferensial parsial yang akan diselesaikan, yaitu persamaan Laplace sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

2. Menurunkan persamaan di atas dengan deret Taylor

Untuk menurunkan persamaan di atas, berarti menggunakan deret Taylor dengan dua variabel bebas $T(x, y)$ yaitu dengan cara menambahkan variabel tambahan dengan mengikuti pola sebagaimana persamaan (2.4) dan didukung dengan penjelasan 2.1.2.4 Tentang turunan terhadap variabel lain (persamaan 2.15) sehingga deret Taylor dengan dua variabel bebas $T(x, y)$ adalah:

$$T(x_{i+1}, y_{j+1}) = T(x_i, y_j) + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\Delta x}{1!} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\Delta y}{1!} + \dots \quad (3.1)$$

Dari persamaan (3.1) kita dapat melihat bahwa:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T(x_{i+1}, y_j) - T(x_i, y_j)}{\Delta x} \quad (3.2)$$

Dan

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{T(x_i, y_{j+1}) - T(x_i, y_j)}{\Delta y} \quad (3.3)$$

Sebagaimana penjelasan 2.1.2.4, persamaan (3.2) dan persamaan (3.1), merupakan turunan pertama terhadap variabel x dan y dalam bentuk diferensial maju. Untuk mendapatkan turunan kedua dapat dilakukan dengan cara sebagai berikut:

1. Jika turunan pertama berupa diferensial maju, maka turunan kedua diselesaikan dalam bentuk diferensial mundur.
2. Jika turunan pertama berupa diferensial mundur, maka turunan kedua diselesaikan dalam bentuk diferensial maju.

Karena persamaan (3.1) dan persamaan (3.2) merupakan persamaan diferensial maju, maka turunan kedua akan diselesaikan dengan cara diferensial mundur, yaitu:

Turunan kedua terhadap variabel x :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x} \right)\end{aligned}$$

Misal $r = \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x}$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{r_{i,j} - r_{i-1,j}}{\Delta x}$$

Maka

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\left(\frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x} \right) - \left(\frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x} \right)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

(3.4)

Turunan kedua terhadap variabel y :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta y} \right)\end{aligned}$$

Misal $z = \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta y}$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z_{i,j} - z_{i,j-1}}{\Delta y}$$

Maka

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= \frac{\left(\frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta y} \right) - \left(\frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta y} \right)}{\Delta y} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2}\end{aligned} \tag{3.5}$$

Setelah diketahui turunan kedua fungsi T terhadap x dan y , kemudian disubstitusikan pada persamaan Laplace atau persamaan distribusi suhu, sehingga diperoleh:

$$\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0 \tag{3.6}$$

Untuk ukuran Δx dan Δy yang sama, maka persamaan di atas disederhanakan menjadi:

$$T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1} = 0$$

atau

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0 \tag{3.7}$$

3. Mengkontruksi Persamaan Liebmann

Persamaan Liebmann dikonstruksi dari persamaan (3.7) di atas menjadi:

$$T_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}}{4} \quad (3.8)$$

dan memecahkan secara iterasi untuk $i=1$ sampai n dan $j=1$ sampai m .

Persamaan (3.8) selanjutnya diselesaikan secara Iterasi dengan persamaan over-relaksasi berikut:

$$T_{i,j}^{new} = \lambda T_{i,j}^{new} + (1 - \lambda) T_{i,j}^{old} \quad (3.9)$$

dengan $T_{i,j}^{new}$ dan $T_{i,j}^{old}$ adalah nilai $T_{i,j}$ dari iterasi sekarang dan sebelumnya, dan λ adalah koefisien relaksasi, yang besarnya dapat diambil antara 1 dan 2 atau λ_{opt} dapat dicari menggunakan persamaan sebagai berikut:

$$\lambda_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \omega^2}} \quad (3.10)$$

Untuk

$$\omega = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2} \left[\cos \frac{\pi}{m} + \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 \cos \frac{\pi}{n} \right] \quad (3.11)$$

4. Menentukan solusi persamaan diferensial parsial dengan metode Liebmann.

Secara umum, dari persamaan perambatan panas dengan T adalah perambatan panas pada jarak x dan y , yang mempunyai panjang L dan tinggi K . Oleh karena nilai T pada tepi plat diketahui suhunya (kondisi batas) dan pada saat sebelum perambatan, nilai pada titik-titik dalamnya adalah nol

(kondisi awal) maka penyelesaian persamaan adalah menghitung T pada x dan y tertentu.

Untuk persamaan diferensial parsial

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq L \text{ dan } 0 \leq y \leq K$$

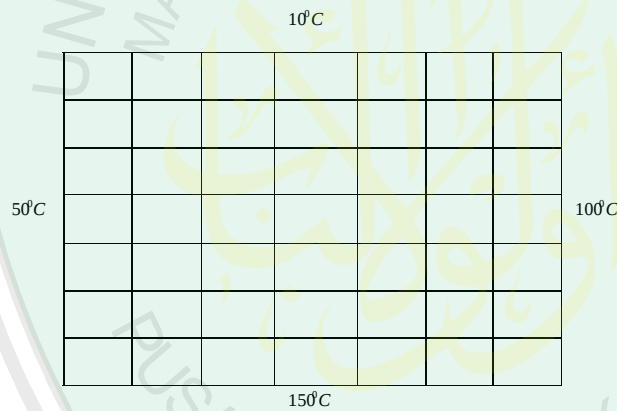
$$T(0, y) = 10$$

$$T(L, y) = 150$$

$$T(x, 0) = 50$$

$$T(x, K) = 100$$

(diketahui $\Delta x = 0,1$ dan $\Delta y = 0,1$)



Gambar: Pelat yang dipanaskan dengan kondisi batas tertentu

Pada saat pelat dipanaskan, dan suhu pada bagian tepi pelat dijaga konstan.

Dengan metode Liebmann hitunglah titik-titik dalam pelat tersebut!

Jawab:

Untuk mengetahui solusi perambatan panas pada masing-masing titik dengan metode Liebmann, dapat dilakukan dengan menggunakan persamaan (3.8). Memecahkan secara iterasi untuk $i = 0$ samapi n , dan $j = 1$ sampai m . selanjutnya persamaan tersebut diselesaikan secara iterasi

dengan persamaan *over-relaksasi* atau persamaan (3.9), dengan λ adalah koefisien relaksasi, yang besarnya dapat diambil antar 1 hingga 2. Iterasi dapat dihentikan jika kesalahan relatifnya sudah mencapai batas yang disyaratkan. Besarnya kesalahan relatif didefinisikan sebagai:

$$|(\varepsilon_a)_{i,j}| = \left| \frac{T_{i,j}^{new} - T_{i,j}^{old}}{T_{i,j}^{new}} \right| \times 100\% \quad (3.12)$$

Sehingga diperoleh solusi sebagai berikut:

λ_{opt} dapat dicari menggunakan persamaan sebagai berikut:

$$\omega = \frac{1}{1 + \left(\frac{0.1}{0.1}\right)^2} \left[\cos \frac{3.14}{7} + \left(\frac{0.1}{0.1}\right)^2 \cos \frac{3.14}{7} \right] = 0.93$$

maka $\lambda_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - (0.93)^2}} = 1.47$ dapat dibulatkan menjadi $\lambda = 1.5$

Pada kondisi awal atau Iterasi ke-0

Nilai nol di bawah ini merupakan nilai kondisi awal.

10	10	10	10	10	10	10	10	10
50	0	0	0	0	0	0	0	100
50	0	0	0	0	0	0	0	100
50	0	0	0	0	0	0	0	100
50	0	0	0	0	0	0	0	100
50	0	0	0	0	0	0	0	100
50	0	0	0	0	0	0	0	100
50	0	0	0	0	0	0	0	100
150	150	150	150	150	150	150	150	150

solusi pada Iterasi I dengan cara Liebmann, maka pada titik $T_{i,j}$ dari persamaan

(3.8) diperoleh :

$$T_{1,1} = \frac{0 + 50 + 0 + 10}{4} = 15$$

dari persamaan over-relaksasi (ambil $\lambda = 1.5$) diperoleh:

$$T_{1,1} = 1.5(15) + (1 - 1.5)0 = 22.5$$

Untuk $T_{2,1}$ diperoleh:

$$T_{2,1} = \frac{0 + 22.5 + 0 + 10}{4} = 8.13$$

dari persamaan over-relaksasi diperoleh:

$$T_{2,1} = 1.5(8.13) + (1 - 1.5)0 = 12.2$$

Untuk $T_{3,1}$ diperoleh:

$$T_{3,1} = \frac{0 + 12.2 + 0 + 10}{4} = 5.55$$

dari persamaan over-relaksasi diperoleh:

$$T_{3,1} = 1.5(5.55) + (1 - 1.5)0 = 8.33$$

Untuk $T_{4,1}$ diperoleh:

$$T_{4,1} = \frac{0 + 8.33 + 0 + 10}{4} = 4.58$$

dari persamaan over-relaksasi diperoleh:

$$T_{4,1} = 1.5(4.58) + (1 - 1.5)0 = 6.87$$

Untuk $T_{5,1}$ diperoleh:

$$T_{5,1} = \frac{0 + 6.87 + 0 + 10}{4} = 4.22$$

dari persamaan over-relaksasi diperoleh:

$$T_{5,1} = 1.5(4.22) + (1 - 1.5)0 = 6.33$$

Untuk $T_{6,1}$ diperoleh:

$$T_{6,1} = \frac{0 + 6.33 + 0 + 10}{4} = 4.08$$

dari persamaan over-relaksasi diperoleh:

$$T_{6,1} = 1.5(.08) + (1 - 1.5)0 = 6.12$$

Untuk $T_{7,1}$ diperoleh:

$$T_{7,1} = \frac{100 + 6.12 + 0 + 10}{4} = 29.03$$

dari persamaan over-relaksasi diperoleh:

$$T_{7,1} = 1.5(29.03) + (1 - 1.5)0 = 43.55$$

Untuk $T_{1,2}$ diperoleh:

$$T_{1,2} = \frac{0 + 50 + 0 + 22.5}{4} = 18.13$$

dari persamaan over-relaksasi diperoleh:

$$T_{1,2} = 1.5(18.13) + (1 - 1.5)0 = 27.2$$

Untuk $T_{2,2}$ diperoleh:

$$T_{2,2} = \frac{0 + 27.2 + 0 + 12.2}{4} = 9.85$$

dari persamaan over-relaksasi diperoleh:

$$T_{2,2} = 1.5(9.85) + (1 - 1.5)0 = 14.78$$

iterasi dilanjutkan sampai iterasi pada titik $T_{7,7}$ sehingga diperoleh nilai seperti di bawah ini.

Nilai pada Iterasi I

10	10	10	10	10	10	10	10	10
50	22.5	12.2	8.33	6.87	6.33	6.12	43.55	100
50	27.2	14.78	8.66	5.82	4.56	4.01	55.34	100
50	28.95	16.4	9.41	5.72	3.86	2.96	59.37	100
50	29.61	17.25	10.01	5.9	3.66	2.49	60.71	100
50	29.85	17.67	10.38	6.11	3.66	2.31	61.14	100
50	29.94	17.85	10.59	6.27	3.72	2.27	61.28	100
50	86.24	95.28	95.96	94.59	93.12	92.03	151.25	100
150	150	150	150	150	150	150	150	150

Iterasi dapat dihentikan jika kesalahan relatifnya sudah mencapai batas toleransi yang disyaratkan.

3.2. Analisis Numerik

Untuk efisiensi waktu, tenaga dan pikiran dapat digunakan software matlab (program persamaan Liebmann) sebagai alat bantu untuk mencari solusi distribusi suhu pada saat pada logam 2 dimensi pada soal di atas, dengan cara memasukkan data-data sebagai berikut:

1. Luas plat 2 dimensi (banyaknya kolom dan baris pada matrik), yang dinotasikan dengan Luas.
2. Besar kesalahan (error) yang diinginkan.

Misal:

Diberikan masukan data sebagai berikut:

1. Luas plat 2 dimensi, yang dinotasikan dengan Luas = 8
2. Besar kesalahan (error) yang diinginkan, error = 0.0001

Jawab:

1. Berdasarkan masukan data tersebut, sehingga diperoleh solusi persamaan distribusi suhu yang diformulasikan dalam bentuk matrik U dengan ordo 9×9 , yaitu:

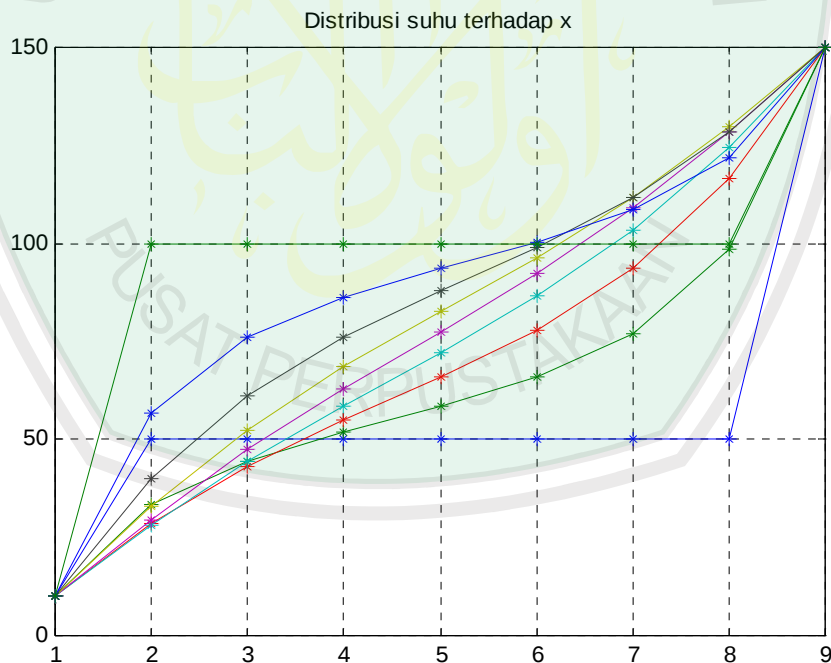
Nilai distribusi suhu pada iterasi ke 28

U =

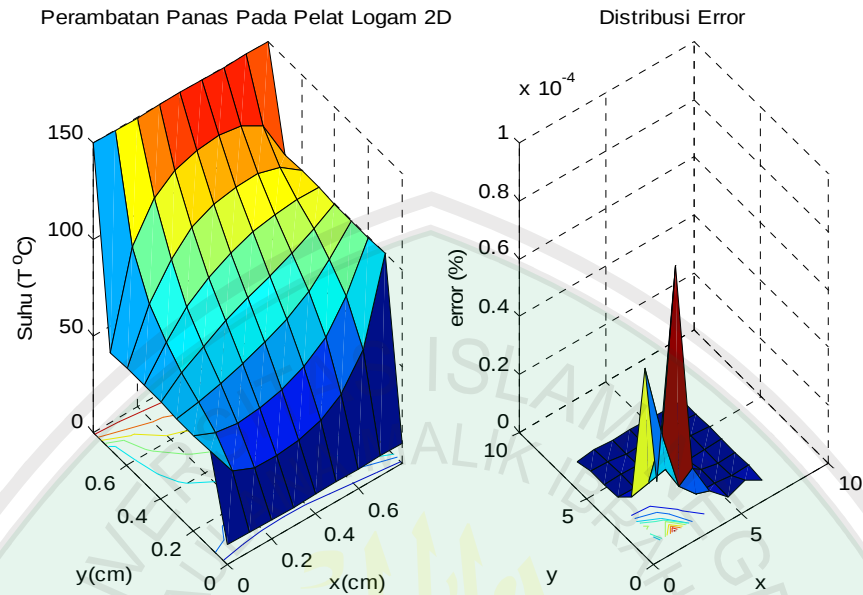
10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000
50.0000	33.3085	28.6392	28.1485	29.6580	33.1082	40.2201	56.5672	100.0000
50.0000	44.5947	43.0999	44.2967	47.3753	52.5546	61.2052	76.0485	100.0000
50.0000	51.9704	54.8691	58.5630	62.9920	68.5298	75.9976	86.4218	100.0000
50.0000	58.4178	65.8431	72.0941	77.5000	82.5751	87.8334	93.6410	100.0000
50.0000	65.8576	77.9914	86.4702	92.3389	96.4370	99.1199	100.3090	100.0000
50.0000	77.0213	93.7948	103.4564	108.9482	111.7144	111.9001	108.4752	100.0000
50.0000	98.4328	116.7100	124.6124	128.2832	129.5721	128.2909	121.6915	100.0000
150.0000	150.0000	150.0000	150.0000	150.0000	150.0000	150.0000	150.0000	150.0000

Banyaknya iterasi yang dilakukan = : 28

Waktu Komputasi = 0.04



Gambar: 3.1. Distribusi suhu dengan kesalahan 0.0001 terhadap x



Gambar: 3.2. Distribusi suhu dengan kesalahan 0.0001.

Untuk memperoleh keadaan setimbang dengan kesalahan maksimal 0.0001 pada setiap titik $T_{i,j}$, dilakukan iterasi sebanyak 28 kali. Pada gambar pertama terlihat untuk daerah yang berwarna merah adalah daerah yang mempunyai suhu tinggi yaitu suhu di atas 120°C , untuk daerah yang berwarna orange adalah daerah yang bersuhu antara 100°C sampai 120°C , untuk daerah yang berwarna kuning adalah daerah yang bersuhu antara 85°C sampai 99°C , untuk daerah yang berwarna hijau adalah daerah yang bersuhu antara 70°C sampai 84°C , dan untuk daerah yang berwarna biru adalah daerah yang bersuhu dibawah 70°C , yang artinya semakin rendah suhu pada gambar tersebut maka warnanya semakin tua (biru tua).

Pada gambar kedua adalah gambar kesalahan relatif pada distribusi suhu, terlihat kesalahan yang besar terletak pada titik $T_{1,6}$ dan $T_{4,7}$, kesalahan tertinggi berada pada titik $T_{4,7}$ dengan nilai kesalahan yaitu $2.5 \times 10^{-4}\%$.

2. Jika kesalahannya 0.00001 diperoleh nilai distribusi suhu sebagai berikut:

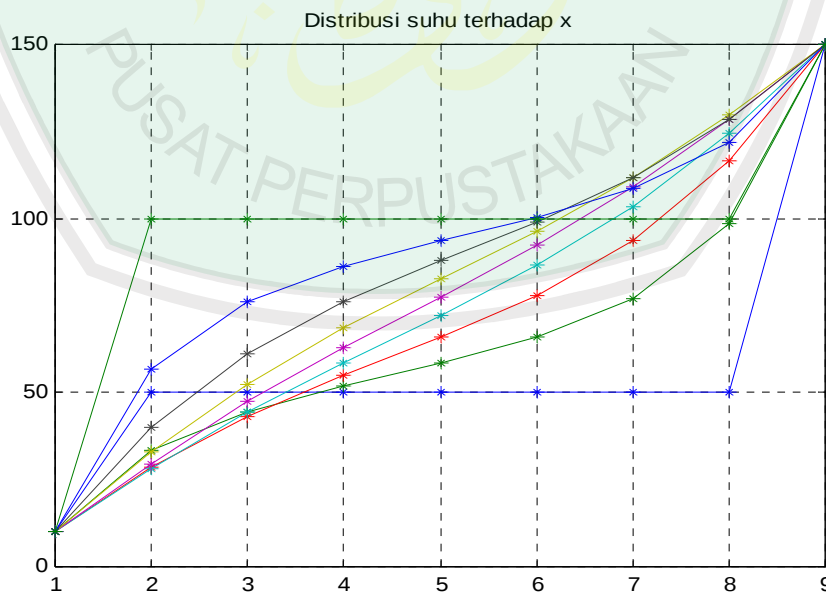
Nilai distribusi suhu pada iterasi ke 31

U=

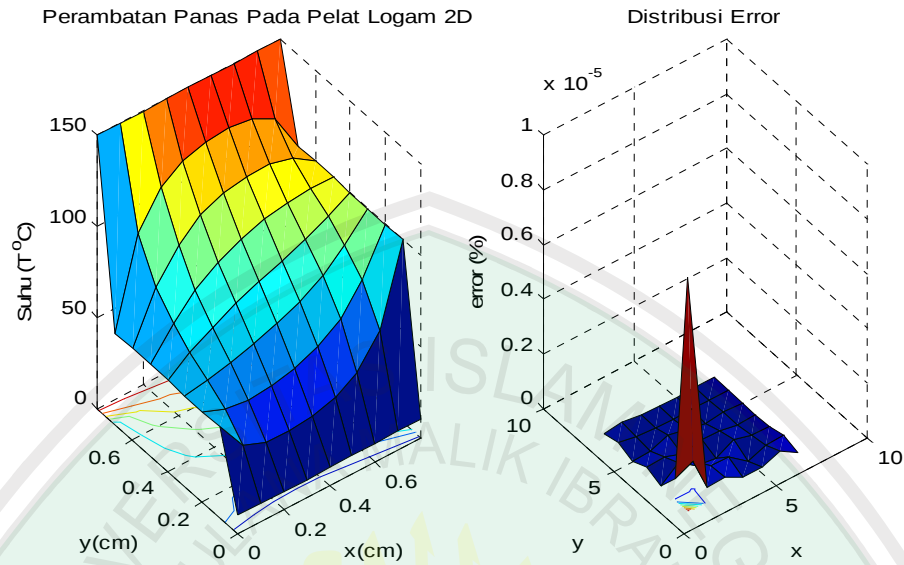
10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000
50.0000	33.3085	28.6392	28.1485	29.6580	33.1082	40.2201	56.5672	100.0000
50.0000	44.5947	43.0999	44.2967	47.3753	52.5546	61.2052	76.0485	100.0000
50.0000	51.9704	54.8691	58.5630	62.9920	68.5298	75.9976	86.4218	100.0000
50.0000	58.4178	65.8431	72.0941	77.5000	82.5751	87.8334	93.6410	100.0000
50.0000	65.8576	77.9914	86.4702	92.3389	96.4370	99.1199	100.3090	100.0000
50.0000	77.0213	93.7948	103.4564	108.9482	111.7144	111.9001	108.4752	100.0000
50.0000	98.4328	116.7100	124.6124	128.2832	129.5721	128.2909	121.6915	100.0000
150.0000	150.0000	150.0000	150.0000	150.0000	150.0000	150.0000	150.0000	150.0000

Banyaknya iterasi yang dilakukan = : 31

Waktu Komputasi = 0.05



Gambar: 3.3. Distribusi suhu dengan kesalahan 0.00001 terhadap x



Gambar: 3.4. Distribusi suhu dengan kesalahan 0.00001.

Untuk memperoleh keadaan setimbang dengan kesalahan maksimal 0.00001 pada setiap titik $T_{i,j}$, dilakukan iterasi sebanyak 31 kali. Pada gambar pertama terlihat untuk daerah yang berwarna merah adalah daerah yang mempunyai suhu tinggi yaitu suhu di atas 120°C , untuk daerah yang berwarna orange adalah daerah yang bersuhu antara 100°C sampai 120°C , untuk daerah yang berwarna kuning adalah daerah yang bersuhu antara 85°C sampai 99°C , untuk daerah yang berwarna hijau adalah daerah yang bersuhu antara 70°C sampai 84°C , dan untuk daerah yang berwarna biru adalah daerah yang bersuhu dibawah 70°C , yang artinya semakin rendah suhu pada gambar tersebut maka warnanya semakin gelap (biru tua).

Pada gambar kedua adalah gambar kesalahan relatif dari distribusi suhu, kesalahan terbesar berada $T_{1,7}$, dengan nilai kesalahan yaitu $2 \times 10^{-6}\%$.

Antara kedua perhitungan dengan menggunakan perhitungan manual dan menggunakan program diperoleh nilai yang sama dan jika terdapat perbedaan hal tersebut dipengaruhi oleh pembulatan nilai pada saat perhitungan.

Contoh 2:

1. Menentukan persamaan diferensial parsial yang akan diselesaikan, yaitu persamaan Poisson sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + g = 0$$

Dimana: T : suhu
 x : absis
 y : koordinat
 g : $\frac{q(\Delta x^2)}{k}$

2. Menurunkan persamaan di atas dengan deret Taylor

Untuk menurunkan persamaan di atas, berarti menggunakan deret Taylor dengan dua variabel bebas $T(x, y)$ yaitu dengan cara menambahkan variabel tambahan dengan mengikuti pola sebagaimana persamaan (2.4) dan didukung dengan penjelasan 2.1.2.4 Tentang turunan terhadap variabel lain (persamaan 2.15) sehingga deret Taylor dengan dua variabel bebas $T(x, y)$ adalah seperti persamaan (3.1).

Dari persamaan (3.1) kita dapat melihat turunan pertama terhadap x dan y atau diferensial maju yaitu persamaan (3.2) dan persamaan (3.2):

Sebagaimana penjelasan 2.1.2.4, persamaan (3.2) dan persamaan (3.1), merupakan turunan pertama terhadap variabel x dan y dalam bentuk diferensial maju. Untuk mendapatkan turunan kedua dapat dilakukan dengan cara sebagai berikut:

1. Jika turunan pertama berupa diferensial maju, maka turunan kedua diselesaikan dalam bentuk diferensial mundur.
2. Jika turunan pertama berupa diferensial mundur, maka turunan kedua diselesaikan dalam bentuk diferensial maju.

Karena persamaan (3.1) dan persamaan (3.2) merupakan persamaan diferensial maju, maka turunan kedua akan diselesaikan dengan cara diferensial mundur, yaitu:

Turunan kedua terhadap variabel x dan y dapat dituliskan seperti persamaan (3.4) dan persamaan (3.5):

Setelah diketahui turunan kedua fungsi T terhadap x dan y , kemudian disubstitusikan pada persamaan Poisson atau persamaan distribusi suhu, sehingga diperoleh:

$$\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2} + \frac{q}{k} = 0 \quad (3.13)$$

Untuk ukuran Δx dan Δy yang sama, maka persamaan di atas disederhanakan menjadi:

$$T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1} + \frac{q(\Delta x^2)}{k} = 0$$

atau

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} + \frac{q(\Delta x^2)}{k} = 0 \quad (3.14)$$

3. Mengkontruksi Persamaan Liebmann

Persamaan Liebmann dikonstruksi dari persamaan (3.14) di atas menjadi:

$$T_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} + \frac{q(\Delta x^2)}{k}}{4} \quad (3.15)$$

dan memecahkan secara iterasi untuk $i=1$ sampai n dan $j=1$ sampai m .

Persamaan (3.15) selanjutnya diselesaikan secara Iterasi dengan persamaan over-relaksasi yaitu persamaan (3.9)

4. Menentukan solusi persamaan diferensial parsial dengan metode Liebmann.

Secara umum, dari persamaan perambatan panas dengan q adalah laju perpindahan suhu, T adalah distribusi suhu pada jarak x dan y , yang mempunyai panjang L dan tinggi K . Oleh karena nilai T pada tepi plat diketahui suhunya (kondisi batas) dan pada saat sebelum perambatan, nilai pada titik-titik dalamnya adalah nol (kondisi awal) maka penyelesaian persamaan adalah menghitung T pada x dan y tertentu.

Untuk persamaan diferensial parsial

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{q(\Delta x^2)}{k} = 0, \quad 0 \leq x \leq L \text{ dan } 0 \leq y \leq K$$

$$T(0, y) = 10$$

$$T(L, y) = 150$$

$$T(x, 0) = 50$$

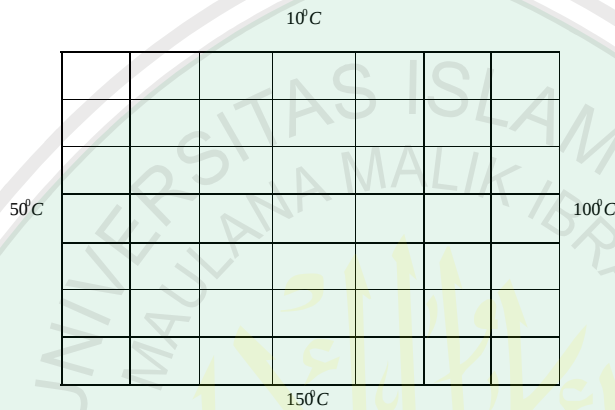
$$T(x, K) = 100$$

diketahui : $\Delta x = 0,1$

$\Delta y = 0,1$

$q = 10000 \text{ Btu/hr ft}$

$k = 40 \text{ Btu/hr ft}$



Gambar: Pelat yang dipanaskan dengan kondisi batas tertentu

Pada saat pelat dipanaskan, dan suhu pada bagian tepi pelat dijaga konstan.

Dengan metode Liebmann hitunglah titik-titik dalam pelat tersebut!

Jawab:

Untuk mengetahui solusi perambatan panas pada masing-masing titik dengan metode Liebmann, dapat dilakukan dengan menggunakan persamaan (3.13). Memecahkan secara iterasi untuk $i = 0$ sampai n , dan $j = 1$ sampai m . selanjutnya persamaan tersebut diselesaikan secara iterasi dengan persamaan *over-relaksasi* atau persamaan (3.9), dengan λ adalah koefisien relaksasi, yang besarnya dapat diambil antar 1 hingga 2, atau sama dengan perhitungan pada contoh 1 yaitu diperoleh $\lambda = 1.5$.

Iterasi dapat dihentikan jika kesalahan relatifnya sudah mencapai batas yang disyaratkan. Besarnya kesalahan relatif dapat dihitung menggunakan persamaan (3.10):

Sehingga diperoleh solusi sebagai berikut:

Pada kondisi awal atau Iterasi ke-0

Nilai nol di bawah ini merupakan nilai pada kondisi awal.

10	10	10	10	10	10	10	10	10
50	0	0	0	0	0	0	0	100
50	0	0	0	0	0	0	0	100
50	0	0	0	0	0	0	0	100
50	0	0	0	0	0	0	0	100
50	0	0	0	0	0	0	0	100
50	0	0	0	0	0	0	0	100
50	0	0	0	0	0	0	0	100
150	150	150	150	150	150	150	150	150

solusi pada Iterasi I dengan cara Liebmann, maka pada titik $T_{i,j}$ dari persamaan

(3.13) diperoleh :

$$T_{1,1} = \frac{0 + 50 + 0 + 10 + \left(\frac{10000 \times (0.1)^2}{40} \right)}{4} = 15,63$$

dari persamaan over-relaksasi (ambil $\lambda = 1.5$) diperoleh:

$$T_{1,1} = 1.5(15,63) + (1 - 1.5)0 = 23.45$$

Untuk $T_{2,1}$ diperoleh:

$$T_{2,1} = \frac{0 + 23.45 + 0 + 10 + 2.5}{4} = 8.99$$

dari persamaan over-relaksasi diperoleh:

$$T_{2,1} = 1.5(8.99) + (1 - 1.5)0 = 13.49$$

Untuk $T_{3,1}$ diperoleh:

$$T_{3,1} = \frac{0 + 13.49 + 0 + 10 + 2.5}{4} = 6.5$$

dari persamaan over-relaksasi diperoleh:

$$T_{3,1} = 1.5(6.5) + (1 - 1.5)0 = 9.75$$

Untuk $T_{4,1}$ diperoleh:

$$T_{4,1} = \frac{0 + 9.75 + 0 + 10 + 2.5}{4} = 5.56$$

dari persamaan over-relaksasi diperoleh:

$$T_{4,1} = 1.5(5.56) + (1 - 1.5)0 = 8.34$$

Untuk $T_{5,1}$ diperoleh:

$$T_{5,1} = \frac{0 + 8.34 + 0 + 10 + 2.5}{4} = 5.21$$

dari persamaan over-relaksasi diperoleh:

$$T_{5,1} = 1.5(5.21) + (1 - 1.5)0 = 7.82$$

Untuk $T_{6,1}$ diperoleh:

$$T_{6,1} = \frac{0 + 7.82 + 0 + 10 + 2.5}{4} = 5.08$$

dari persamaan over-relaksasi diperoleh:

$$T_{6,1} = 1.5(5.08) + (1 - 1.5)0 = 7.62$$

Untuk $T_{7.1}$ diperoleh:

$$T_{7,1} = \frac{100 + 7.62 + 0 + 10 + 2.5}{4} = 30.03$$

dari persamaan over-relaksasi diperoleh:

$$T_{7,1} = 1.5(30.03) + (1 - 1.5)0 = 45.05$$

Untuk $T_{1.2}$ diperoleh:

$$T_{1.2} = \frac{0 + 50 + 0 + 23.45 + 2.5}{4} = 18.99$$

dari persamaan over-relaksasi diperoleh:

$$T_{1.2} = 1.5(18.99) + (1 - 1.5)0 = 28.49$$

Untuk $T_{2,2}$ diperoleh:

$$T_{2.2} = \frac{0 + 28.49 + 0 + 13.49 + 2.5}{4} = 11.12$$

dari persamaan over-relaksasi diperoleh:

$$T_{2,2} = 1.5(11.12) + (1 - 1.5)0 = 16.68$$

iterasi dilanjutkan sampai iterasi pada titik $T_{7.7}$ sehingga diperoleh nilai seperti di bawah ini.

Nilai Iterasi I distribusi suhu pada persamaan Poisson yaitu:

[illegible]

Iterasi dapat dihentikan jika kesalahan relatifnya sudah mencapai batas toleransi yang disyaratkan.

Analisis Numerik

Untuk efisiensi waktu, tenaga dan pikiran dapat digunakan software matlab (program persamaan Liebmann) sebagai alat bantu untuk mencari solusi distribusi suhu pada saat pada logam 2 dimensi pada soal di atas, dengan cara memasukkan data-data sebagai berikut:

1. Luas plat 2 dimensi (banyaknya kolom dan baris pada matrik), yang dinotasikan dengan L .
2. Jarak interval x , yang dinotasikan dengan dx
3. Laju perpindahan suhu, yang dinotasikan dengan q .
4. Koefisien konduktifitas, yang dinotasikan dengan k .
5. Besar kesalahan (error) yang diinginkan.

Misal:

Diberikan masukan data sebagai berikut:

1. Luas plat 2 dimensi, yang dinotasikan dengan $L = 8$
2. Jarak interval x , yang dinotasikan dengan $dx = 0.1$
3. Laju perpindahan suhu, yang dinotasikan dengan $q = 10000$
4. koefisien konduktifitas, yang dinotasikan dengan $k = 40$
5. Besar kesalahan (error) yang diinginkan, $error = 0.0001$

Jawab:

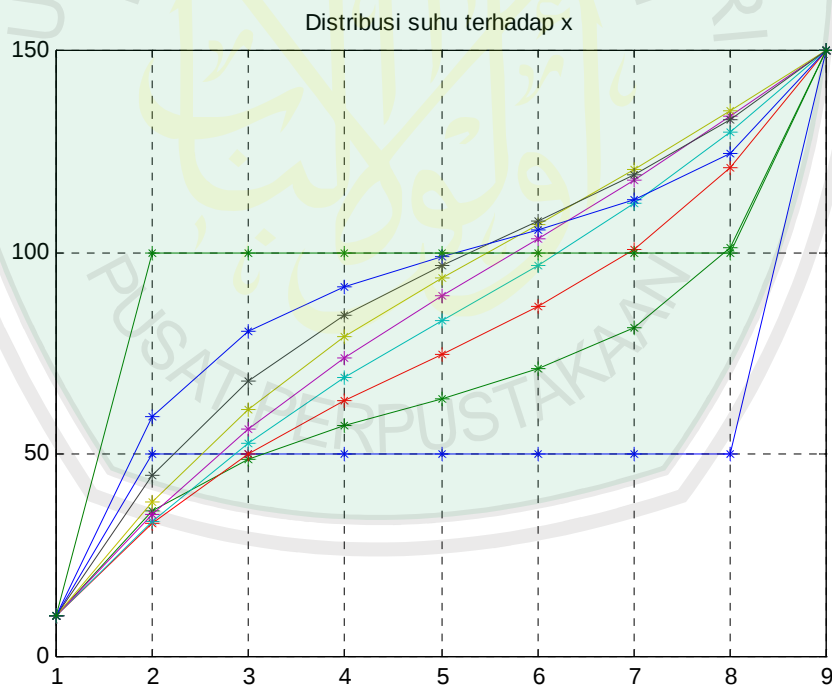
1. Berdasarkan masukan data tersebut, sehingga diperoleh solusi persamaan distribusi suhu yang diformulasikan dalam bentuk matrik U dengan ordo 9×9 , yaitu:

U = nilai pada Iterasi ke 27

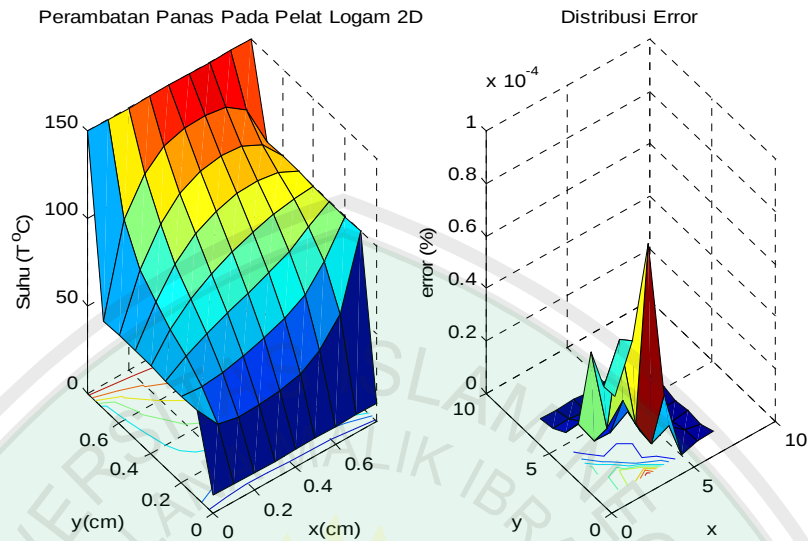
10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000
50.0000	36.1531	33.0785	33.4150	35.1819	38.3747	44.6595	59.4118	100.0000
50.0000	49.0340	50.2461	52.8996	56.4378	61.1576	68.3514	80.4879	100.0000
50.0000	57.2369	63.4720	68.9996	74.0123	78.9664	84.6005	91.6883	100.0000
50.0000	63.9417	74.9056	83.1143	89.1452	93.5953	96.8959	99.1649	100.0000
50.0000	71.1242	86.5944	96.9068	103.3591	106.8736	107.7228	105.5756	100.0000
50.0000	81.4606	100.9409	112.0593	118.0107	120.3173	119.0462	112.9145	100.0000
50.0000	101.2775	121.1493	129.8789	133.8071	134.8387	132.7303	124.5362	100.0000
150.0000	150.0000	150.0000	150.0000	150.0000	150.0000	150.0000	150.0000	150.0000

Banyaknya iterasi yang dilakukan = : 27

Waktu Komputasi = 0.08



Gambar: 3.4. Gambar distribusi suhu dengan sumber panas, dengan kesalahan 0.0001 terhadap x



Gambar: 3.6. Gambar distribusi suhu dengan sumber panas, dengan kesalahan 0.0001

Untuk memperoleh keadaan setimbang dengan kesalahan maksimal 0.0001 pada setiap titik $T_{i,j}$ untuk persamaan Poisson, dilakukan iterasi sebanyak 27 kali. Pada gambar pertama terlihat untuk daerah yang berwarna merah adalah daerah yang mempunyai suhu tinggi yaitu suhu di atas 120°C , untuk daerah yang berwarna orange adalah daerah yang bersuhu antara 100°C sampai 120°C , untuk daerah yang berwarna kuning adalah daerah yang bersuhu antara 85°C sampai 99°C , untuk daerah yang berwarna hijau adalah daerah yang bersuhu antara 70°C sampai 84°C , dan untuk daerah yang berwarna biru adalah daerah yang bersuhu dibawah 70°C , yang artinya semakin rendah suhu pada gambar tersebut maka warnanya semakin gelap (biru tua).

Pada gambar kedua adalah gambar kesalahan relatif dari distribusi suhu, kesalahan adalah mempunyai gambar yang bergelombang artinya banyak titik

yang mempunyai kesalahan besar. Tetapi kesalahan yang tertinggi terletak pada titik $T_{2,2}$ dengan nilai kesalahan sebesar $2,1 \times 10^{-5}\%$

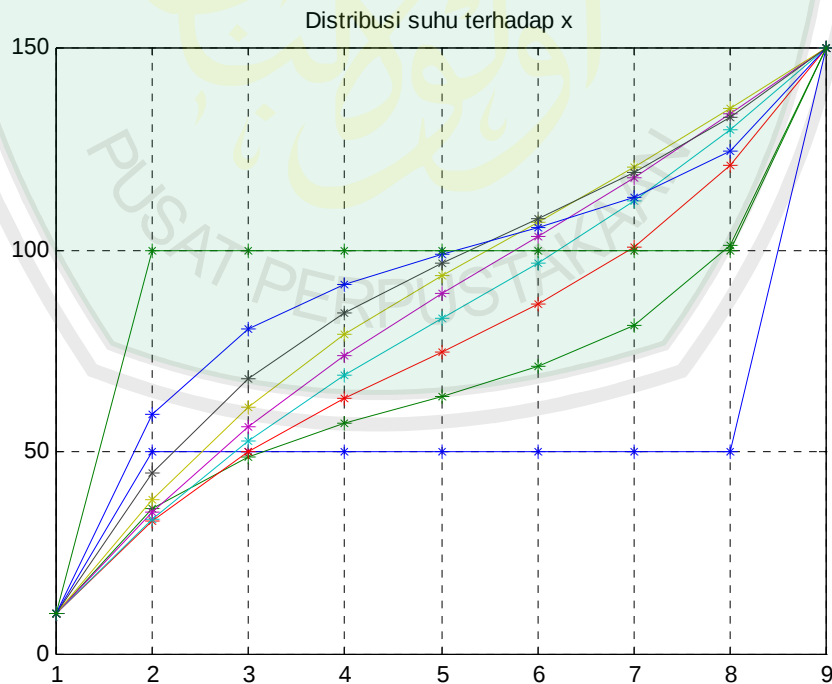
2. Untuk perhitungan distribusi suhu dengan kesalahan relatif 0.00001

U = nilai Iterasi ke 31

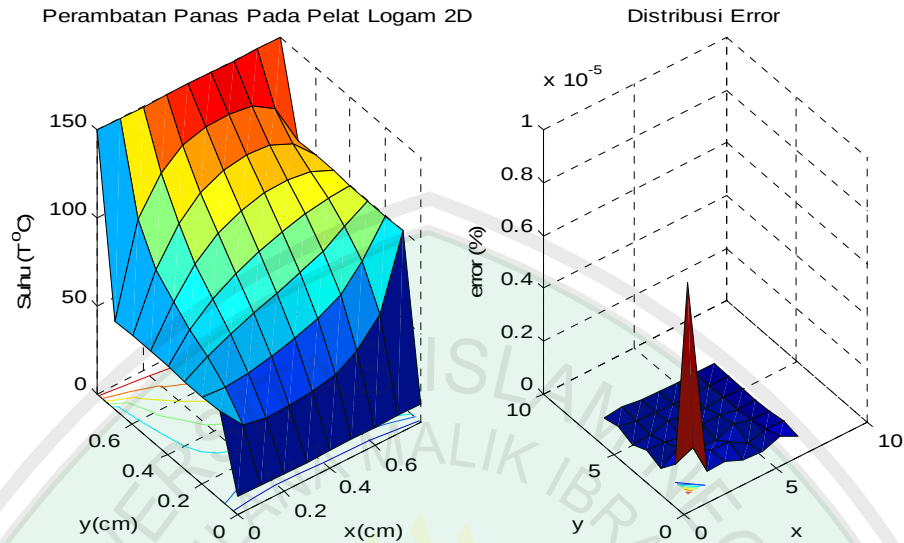
10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000
50.0000	36.1531	33.0786	33.4150	35.1819	38.3747	44.6595	59.4118	100.0000
50.0000	49.0340	50.2461	52.8996	56.4378	61.1576	68.3514	80.4879	100.0000
50.0000	57.2369	63.4720	68.9995	74.0123	78.9664	84.6005	91.6883	100.0000
50.0000	63.9417	74.9056	83.1143	89.1452	93.5953	96.8959	99.1649	100.0000
50.0000	71.1242	86.5944	96.9068	103.3591	106.8736	107.7228	105.5756	100.0000
50.0000	81.4606	100.9409	112.0593	118.0107	120.3173	119.0462	112.9145	100.0000
50.0000	101.2775	121.1493	129.8789	133.8071	134.8387	132.7303	124.5362	100.0000
150.0000	150.0000	150.0000	150.0000	150.0000	150.0000	150.0000	150.0000	150.0000

Banyaknya iterasi yang dilakukan = : 31

Waktu Komputasi = 0.08



Gambar: 3.7. Gambar distribusi suhu dengan sumber panas, dengan kesalahan 0.00001 terhadap x



Gambar: 3.7. Gambar distribusi suhu dengan sumber panas, dengan kesalahan 0.00001

Untuk memperoleh keadaan setimbang dengan kesalahan maksimal 0.00001 pada setiap titik $T_{i,j}$ untuk persamaan Poisson, dilakukan iterasi sebanyak 31 kali dengan waktu komputasi 0.08. Pada gambar pertama terlihat untuk daerah yang berwarna merah adalah daerah yang mempunyai suhu tinggi yaitu suhu di atas 120°C , untuk daerah yang berwarna orange adalah daerah yang bersuhu antara 100°C sampai 120°C , untuk daerah yang berwarna kuning adalah daerah yang bersuhu antara 85°C sampai 99°C , untuk daerah yang berwarna hijau adalah daerah yang bersuhu antara 70°C sampai 84°C , dan untuk daerah yang berwarna biru adalah daerah yang bersuhu dibawah 70°C , yang artinya semakin rendah suhu pada gambar tersebut maka warnanya semakin gelap (biru tua).

Pada gambar kedua adalah gambar kesalahan relatif dari distribusi suhu, kesalahan terbesar berada $T_{1,7}$, dengan nilai kesalahan yaitu $1,5 \times 10^{-6}\%$.

Dari kedua penyelesaian yaitu pada persamaan Laplace dan persamaan Poisson di atas terlihat jelas bahwa pada persamaan Poisson titik-titik interiornya mempunyai nilai yang lebih besar dari nilai pada titik-titik interior pada persamaan Laplace, karena persamaan Poisson merupakan persamaan distribusi suhu dengan sumber panas di daerah tinjauan sehingga dipengaruhi oleh laju perpindahan suhu dan koefisien konduktifitas, sedangkan pada persamaan Laplace tidak.



BAB IV

PENUTUP

4.1. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan, dapat diperoleh kesimpulan bahwa

1. Model persamaan distribusi suhu dengan metode Liebmann yaitu

$$T_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}}{4} \text{ yang diperoleh dari penurunan persamaan}$$

Laplace dengan menggunakan deret Taylor. selanjutnya persamaan tersebut diselesaikan secara iterasi dengan persamaan *over-relaksasi* atau persamaan

$$T_{i,j}^{new} = \lambda T_{i,j}^{new} + (1 - \lambda) T_{i,j}^{old}, \text{ dengan } \lambda \text{ adalah koefisien relaksasi, yang}$$

besarannya dapat diambil nilai antara 1 hingga 2.

2. Solusi persamaan distribusi panas keadaan tunak secara numerik menggunakan metode Liebmann dengan nilai batas pada keliling plat, masing-masing dengan nilai

$$T(0,y) = 10^{\circ}C, \quad T(x,0) = 50^{\circ}C, \quad T(x,K) = 100^{\circ}C, \quad T(L,y) = 150^{\circ}C \text{ dan}$$

dengan nilai awal nol pada titik interiornya, diperoleh nilai setimbang dengan kesalahan maksimal 0.0001 yaitu pada iterasi yang ke 28 dan titik yang mempunyai kesalahan terbesar yaitu titik $T_{4,7}$. Sedangkan nilai

setimbang dengan kesalahan maksimal 0.00001 yaitu pada iterasi ke 31 dan titik yang mempunyai kesalahan terbesar pada titik $T_{1,7}$.

Solusi persamaan distribusi panas keadaan tunak dengan sumber panas secara numerik menggunakan metode Liebmann dengan nilai batas

pada keliling plat, masing-masing dengan nilai $T(0,y)=10^{\circ}C$, $T(x,0)=50^{\circ}C$, $T(x,K)=100^{\circ}C$, $T(L,y)=150^{\circ}C$ dan dengan nilai awal nol pada titik interiornya, diperoleh nilai setimbang dengan kesalahan maksimal 0.0001 yaitu pada iterasi yang ke 27 dan titik yang mempunyai kesalahan terbesar yaitu titik $T_{2,2}$. Sedangkan nilai setimbang dengan kesalahan maksimal 0.00001 yaitu pada iterasi ke 31 dan titik yang mempunyai kesalahan terbesar pada titik $T_{1,7}$.

4.2. Saran

Persamaan diferensial parsial dapat diselesaikan secara numerik menggunakan metode Liebmann. Untuk penelitian selanjutnya dapat menggunakan metode ini pada logam 3 dimensi, atau dapat menggunakan metode lain dan seiring perkembangan ilmu pengetahuan dapat menggunakan software lain yang lebih baik sebagai alat bantu sehingga diperoleh nilai yang lebih akurat lagi.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdusysykir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN-Malang Press.
- Bagustris. 2008. Kecepatan Cahaya Itu Relatif. <http://bagustris.blogspot.com/2007/08/kecepatan-cahaya-itu-relatif.html> yang direkam pada 12 Jan 2008 13:12:48 GMT.
- Chapra. 2002. *Numerical Methods for Engineers With Software and Programing Applications*. USA: Mc. Graw Hill.
- Dahlan, M, 2003. *Kamus Induk Istilah Ilmiah*. Surabaya: Target Press.
- Djojodiharjo, Harijono. 2000. *Metode Numerik*. Jakarta: PT. Gramedia Pustaka Utama.
- Dumairy. 2003. *Matematika Terapan Untuk Bisnis dan Ekonomi*. Edisi Kedua. Yogyakarta: BPFE.
- Edwin J. Purcell, Dale Varberg. Dkk. 1990. *Kalkulus dan Geometri Analitis*. Edisi Keempat. Jakarta: Erlangga.
- Fakultas Sains dan Teknologi. 2004. *Buku Pedoman Penulisan Skripsi*. Malang: Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Malang.
- Holman. 1997. *Perpindahan Kalor*. Edisi Keenam. Jakarta Erlangga.
- Kreith, Frank & Arko Prijono. 1986. *Prinsip-prinsip Perpindahan Panas*. Edisi Ketiga. Jakarta: Erlangga.
- Kusumah, Yaya S. 1989. *Persamaan Diferensial*. Jakarta.
- Leithold, Louis. 1991. *Kalkulus dan 1 Jkur Analitik*. Edisi Kelima. Jakarta: Erlangga.
- Mardalis. 1999. *Metode Penelitian Suatu Pendekatan Proposal*. Jakarta: Bumi Aksara.

Nainggolan, Dian Fansuri. 2007. Prinsip Dasar Listrik Menurut Al Quran. <http://www.waspada.co.id/Mimbar-Jumat/Artikel-Jumat/Prinsip-Dasar-Listrik-Menurut-Al-Qur-an.html> yang direkam pada 30 Nov 2007 08:16:54 GMT.

Setiawan, Agus. 2006. *Pengantar Metode Numerik*. Yogyakarta: Andi.

Triatmojo, Bambang. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer*. Yogyakarta: Beta Offset.

Wahyudi, Imam. 2002. *Kajian Metode Transformasi Fourier Dalam Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial Orde Dua Dengan Dua Variabel Bebas*. Malang. Universitas Brwijaya Malang.

W. Culp, Archie. 1996. *Prinsip-Prinsip Konversi Energi*. Jakarta: Erlangga.

<http://www.harunyahya.com/indo/buku/semesta008.htm> yang direkam pada 24 Des 2007 02:54:47 GMT.

Lampiran 1: Program pada persamaan Laplace

```
clear;
close;
clc;
disp('=====')
disp(' ')
disp('Program Pencari Solusi Persamaan Diferensial Parsial')
disp('Dengan Metode Liebmann')
disp('Copyright by Rofika Kamalia')
disp(' ')
disp('=====')
disp('Persamaan Diferensial parsial :')
disp('     $d^2T/dt^2 = -d^2T/dx^2$ ');
disp('Kondisi Batas :');
disp('     $dx = dy = 0.1 \text{ cm}$ ');
disp('=====')
disp('=====')
disp(' ');
m = input('Masukkan besarnya luas pelat 2D (mm^2), Luas = ');
error = input('Masukkan besar error yang diinginkan, error = ');

% inisialisasi parameter
tic;
M=m+1;
N=M;
%iter=200;
% iter_max=200;
U=zeros(M,N);
U(:,1)=50;
U(:,end)=100;
U(1,:)=10;
U(end,:)=150;
T_old=U;
e=1+zeros(M-1,N-1);
h=1;

% proses
while any(any(e >= error))
%for h=1:iter
    for j=2:M-1
        for i=2:N-1
            U(i,j)=(U(i+1,j)+U(i-1,j)+U(i,j+1)+U(i,j-1))/4;
            U(i,j)=1.5*U(i,j)+(-0.5)*T_old(i,j);
        end
    end
    T_new(:, :, h)=U;
    ee=abs((T_new(:, :, h)-T_old)./T_new(:, :, h))*100;
    e=ee(2:M-1,2:N-1);
    T_old=U;
    h=h+1;
%end
end
U
jumlah_iter = h-1;
```

```

disp(' ');
disp(['Banyaknya iterasi yang dilakukan = : ',
num2str(jumlah_iter)]);
disp(['Waktu Komputasi = ',num2str(toc)])
pause;
% Plotting Grafik

x=0:.1:m/10;
y=0:.1:m/10;
subplot(1,2,1);
surf(x,y,U)
axis([0 m/10 0 m/10 0 150])
xlabel('x(cm)')
ylabel('y(cm)')
zlabel('Suhu (T ^oC)')
title('Perambatan Panas Pada Pelat Logam 2D')
subplot(1,2,2);
surf(e);
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('error (%)')
title('Distribusi Error')

```

Lampiran 2: Program pada persamaan Poisson

```
clear;
close;
clc;
disp('=====')
disp(' ')
disp('Program Pencari Solusi Persamaan Diferensial Parsial')
disp('Dengan Metode Liebmann')
disp('Copyright by Rofika Kamalia')
disp(' ')
disp('=====')
disp('Persamaan Diferensial parsial :')
disp('     $d^2T/dt^2 = -d^2T/dx^2$ ');
disp('Kondisi Batas :');
disp('     $dx = dy = 0.1 \text{ m}$ ');
disp('=====')
disp('=====')
disp(' ');
m = input('Masukkan besarnya luas pelat 2D (mm^2), Luas = ');
dx = input('Masukkan jarak interval x, dx = ');
q = input('Masukkan nilai q, q= ');
k = input('Masukkan nilai k, k= ');
error = input('Masukkan besar error yang diinginkan, error = ');

% inisialisasi parameter
tic;
M=m+1;
N=M;
%iter=200;
% iter_max=200;
U=zeros(M,N);
U(:,1)=50;
U(:,end)=100;
U(1,:)=10;
U(end,:)=150;
T_old=U;
e=1+zeros(M-1,N-1);
h=1;

% proses
while any(any(e >= error))
    %for h=1:iter
        for j=2:M-1
            for i=2:N-1
                U(i,j)=(U(i+1,j)+U(i-1,j)+U(i,j+1)+U(i,j-1)+
                (q*dx^2)/k)/4;
                U(i,j)=1.5*U(i,j)+(-0.5)*T_old(i,j);
            end
        end
        T_new(:, :, h)=U;
        ee=abs((T_new(:, :, h)-T_old)./T_new(:, :, h))*100;
        e=ee(2:M-1,2:N-1);
        T_old=U;
        h=h+1;
    %end
```

```

end
U

jumlah_iter = h-1;

disp(' ');
disp(['Banyaknya iterasi yang dilakukan = : ',
num2str(jumlah_iter)]);
disp(['Waktu Komputasi = ',num2str(toc)])
pause;
% Plotting Grafik

x=0:.1:m/10;
y=0:.1:m/10;
subplot(1,2,1);
surfc(x,y,U)
axis([0 m/10 0 m/10 0 150])
xlabel('x(cm)')
ylabel('y(cm)')
zlabel('Suhu (T ^oC)')
title('Perambatan Panas Pada Pelat Logam 2D')
subplot(1,2,2);
surfc(e);
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('error (%)')
title('Distribusi Error')

```

[illegible]

Nilai pada Iterasi IV

[illegible]

Iterasi ke 28

[illegible]

Iterasi ke 31

[illegible]

Nilai Iterasi I

[illegible]

Nilai Iterasi II

[illegible]

Nilai Iterasi III

[illegible]

Nilai Iterasi IV

[illegible]

Nilai Iterasi Ke 27

[illegible]

Nilai Iterasi Ke 31

[illegible]

This document was created with Win2PDF available at <http://www.daneprairie.com>.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.

