MENTENTUKAN ORDER MINIMUM *f* (*r*, *n*) DARI

GRAF BERATURAN–*r* DAN BERGIRTH–*n*

SKRIPSI

Oleh:
IKA MAS'ULLAH RAHMAWATI
NIM. 03510002

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2008

MENTENTUKAN ORDER MINIMUM *f* (*r*, *n*) DARI GRAF BERATURAN–*r* DAN BERGIRTH–*n*

SKRIPSI

Diajukan Kepada :
Universitas Islam Negeri Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
IKA MAS'ULLAH RAHMAWATI
NIM. 03510002

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2008

MENTENTUKAN ORDER MINIMUM *f* (*r*, *n*) DARI GRAF BERATURAN–*r* DAN BERGIRTH–*n*

SKRIPSI

Oleh:
IKA MAS'ULLAH RAHMAWATI
NIM. 03510002

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji

Tanggal: 28 Maret 2008

Pembimbing I	Pembimbing II
Abdussakir, M.Pd	Munirul Abidin, M.Ag
NIP. 150 327 247	NIP. 150 321 634

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M. Si
NIP. 150 318 321

LEMBAR PENGESAHAN

MENENTUKAN ORDER MINIMUM *f* (*r*, *n*) DARI GRAF BERATURAN–*r* DAN BERGIRTH–*n*

SKRIPSI

Oleh:
IKA MAS'ULLAH RAHMAWATI
NIM : 03510002

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal, 12 April 2008

SUSUNAN DEWAN PENGUJI			TANDA TANGAN
1.	Penguji Utama	Dr. Yus M. Cholily, M.Si	1 ________________
2.	Ketua Penguji	Wahyu H. Irawan, M.Pd NIP. 150 300 415	2 ________________
3.	Sekretaris Penguji	Abdussakir, M.Pd NIP. 150 327 247	3 ________________
4.	Anggota Penguji	Munirul Abidin, M.Ag NIP. 150 321 634	4 ________________

Mengetahui dan Mengesahkan
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi

<u>Sri Harini, M.Si</u>
NIP. 150 318 321

MOTTO

شَهۡرُ رَمَضَانَ ٱلَّذِيٓ أُنزِلَ فِيهِ ٱلۡقُرۡءَانُ هُدٗى لِّلنَّاسِ وَبَيِّنَٰتٖ مِّنَ ٱلۡهُدَىٰ
وَٱلۡفُرۡقَانِۚ فَمَن شَهِدَ مِنكُمُ ٱلشَّهۡرَ فَلۡيَصُمۡهُۖ وَمَن كَانَ مَرِيضًا أَوۡ عَلَىٰ سَفَرٖ
فَعِدَّةٞ مِّنۡ أَيَّامٍ أُخَرَۗ يُرِيدُ ٱللَّهُ بِكُمُ ٱلۡيُسۡرَ وَلَا يُرِيدُ بِكُمُ ٱلۡعُسۡرَ
وَلِتُكۡمِلُواْ ٱلۡعِدَّةَ وَلِتُكَبِّرُواْ ٱللَّهَ عَلَىٰ مَا هَدَىٰكُمۡ وَلَعَلَّكُمۡ تَشۡكُرُونَ
١٨٥

……. Allah menghendaki kemudahan bagimu, dan tidak menghendaki kesukaran bagimu. dan hendaklah kamu mencukupkan bilangannya dan hendaklah kamu mengagungkan Allah atas petunjuk-Nya yang diberikan kepadamu, supaya kamu bersyukur.

(QS. Al Baqarah 185)

Membaca Hanyalah menggerakkan Pikiran saja,

Tetapi membaca disertai dengan menulis akan menggerakkan

Dunia.

PERSEMBAHAN

Karya ilmiah ini kupersembahkan untuk orang-orang yang aku cintai

Ibu, Ayah, Bapak dan Mak, semoga aku bisa menjadi kebanggaan bagi kalian.

Adekku Miftah, Ahmad 'n Hida, i love you all

Suamiku tersayang yang selalu mensupport penulis dalam segala hal. I love you n I miss you.

Fikri, evita, inay, mei, asis, dani, ipunk, arina, deni, n yang lainnya yang g bisa penulis sebutkan satu persatu. Terimakasih atas dukungan dan doanya.

Semua temen2 jurusan Matematika angkatan '03 perjuangan, kebersamaan yang kita lakukan bersama Harus dijaga dan dilaminating dalam hati kita masing2.

KATA PENGANTAR

Syukur alhamdulillah kehadirat Allah SWT. yang telah melimpahkan rahmat, taufik serta hidayah dan inayah-Nya sehingga skripsi dengan judul "Menentukan Order Minimum f (r, n) dari Graf Beraturan–*r* dan Bergirth–*n*" ini dapat terselesaikan dengan baik. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca, terutama dalam pengembangan di bidang matematika.

Keberhasilan penulisan skripsi ini tidak lepas dari bimbingan, pengarahan, dan bantuan dari berbagai pihak baik berupa pikiran, motivasi, tenaga, maupun do'a dan restu. Karena itu penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Bapak Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
2. Bapak Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D. Sc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.
3. Ibu Sri Harini, M.Si selaku ketua jurusan matematika yang telah memberikan ijin dan kemudahan kepada penulis untuk menyusun skripsi.
4. Bapak Abdussakir, M.Pd selaku dosen pembimbing dan Bapak Munirul Abidin, M.Ag selaku dosen pembimbing agama yang telah memberikan bimbingan dan petunjuk dalam menyelesaikan skripsi ini.
5. Bapak dan Ibu dosen, staf fakultas, dan jurusan matematika serta Bapak Satpam yang selalu membantu dan memberikan dorongan semangat semasa kuliah.

6. Ayah Qodim dan ibunda Maslikhah yang tidak pernah berhenti memberikan kasih sayang, do’a, dan dorongan semangat kepada penulis semasa kuliah hingga akhir pengerjaan skripsi ini.
7. Bapak Ali dan Mak Kholifah yang selalu memberi semangat kepada penulis, sehingga penulis menjadi manusia yang bersabar.
8. Selamed yang selalu mendukung, menemani, dan memberikan semangat serta membuat hari-hari penulis begitu menyenangkan, terima kasih atas semua perhatian dan kebahagiaan.
9. Teman – teman matematika ’03 terima kasih atas semua kenangan dan kegilaan kalian semasa kuliah.
10. Semua pihak yang telah mendukung terselesaikannya skripsi ini.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat. Amin

Malang, Maret 2008

Penyusun

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Rahmawati, Ika Mas'ullah. 2008. *Menentukan Order Minimum f(r, n) Dari Graf Beraturan–r dan Bergirth–n*. Skripsi, Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Malang.
Dosen Pembimbing: (I) Abdussakir, M.Pd (II) Munirul Abidin, M.Ag

Kata Kunci : Order Minimum, girth, graf

Matematika merupakan salah satu disiplin ilmu yang sangat berpengaruh pada disiplin ilmu lainnya. Salah satu cabang dari disiplin ilmu matematika adalah teori graf, dimana graf adalah himpunan tidak kosong dari elemen-elemen yang disebut titik dengan menghubungkan sepasang titik.

$f\,(r,\ n)$ adalah order minimum dari graf yang beraturan–r dan bergirth–n. Skripsi ini membahas tentang penentuan order minimum $f\,(r,\ n)$ dari graf yang beraturan–r dan bergirth–n. Secara umum, metode pembuktian dalam penelitian skripsi ini menggunakan metode standar dalam matematika, antara lain induksi matematika. Dalam skripsi ini penulis akan menunjukkan order minimum $f\,(r,\ n)$.

Berdasarkan hasil pembahasan skripsi ini diperoleh bahwa :

$f\,(2,\ n) = n,\ \forall n \in N,\ n \geq 3$
$f\,(3, 3) = 4$
$f\,(3, 4) = 6$
$f\,(3, 5) = 10$
$f\,(3, 6) = 14$
$f\,(3, 7) = 24$
$f\,(3, 8) = 30$
$f\,(r,\ 4) = 2r,\ \forall r \in N,\ r \geq 2$
$f\,(4, 3) = 5$
$f\,(4, 4) = 8$
$f\,(4, 5) = 19$
$f\,(4, 6) = 26$

Pada pembahasan skripsi ini penulis hanya membahas $f\,(2,\ n) = n,\ \forall n \in N,\ n \geq 3$, $f\,(3,\ n)$, untuk n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, $f\,(r,\ 4) = 2r,\ \forall r \in N,\ r \geq 2$, $f\,(4,\ n)$, untuk n = 3, 4, 5, 6, oleh karena itu diharapkan pada skripsi yang lain dapat dikembangkan penentuan order minimum $f\,(r,\ n)$, seperti $f\,(5,\ n)$ dan seterusnya.

BAB I

PENDAHULUAN

I.1 Latar Belakang

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan oleh Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi. Sungguh tidak salah jika dinyatakan bahwa Allah adalah Maha matematis (Abdusysyakir,2007:79-80). Maka tidak diragukan lagi bahwa Al Quran merupakan peletak dasar kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi bagi umat Islam.

Allah berfirman dalam surat Al Qamar : 49 sebagai berikut:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَٰهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya : "Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran"

Selain itu juga terdapat dalam surat Al Furqan ayat 2:

ٱلَّذِي لَهُۥ مُلْكُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُن لَّهُۥ شَرِيكٌ
فِي ٱلْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

Artinya : "yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu bagiNya dalam kekuasaan(Nya), dan dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya"

Semua yang ada di alam ini, ada ukurannya, ada hitungannya, ada rumusnya atau ada teoremanya. Ahli matematika atau fisika tidak membuat suatu rumus sedikitpun, tetapi mereka hanya menemukan rumus atau teorema tersebut. Apabila dalam kehidupan terdapat suatu permasalahan, manusia harus berusaha untuk menemukan selesaiannya atau solusinya.

Dalam menentukan rumus atau teorema perlu adanya pembuktian kebenaran, apakah rumus atau teorema tersebut benar atau salah. Misalkan rumus atau teorema tersebut tidak jelas, maka jangan dilakukan atau diikuti.

Allah berfirman dalam surat Al Israa' : 36 sebagai berikut:

وَلَا تَقْفُ مَا لَيْسَ لَكَ بِهِۦ عِلْمٌۚ إِنَّ ٱلسَّمْعَ وَٱلْبَصَرَ وَٱلْفُؤَادَ كُلُّ أُوْلَٰٓئِكَ كَانَ عَنْهُ مَسْـُٔولًا ٣٦

Artinya : "Dan janganlah kamu mengikuti apa yang kamu tidak mempunyai pengetahuan tentangnya. Sesungguhnya pendengaran, penglihatan dan hati, semuanya itu akan diminta pertanggungan jawabnya".

Dan apabila bukti tersebut benar, maka tunjukkan bukti dari kebenaran tersebut. Allah berfirman dalam surat Al Baqarah : 111 sebagai berikut:

وَقَالُواْ لَن يَدْخُلَ ٱلْجَنَّةَ إِلَّا مَن كَانَ هُودًا أَوْ نَصَٰرَىٰۗ تِلْكَ أَمَانِيُّهُمْۗ قُلْ هَاتُواْ بُرْهَٰنَكُمْ إِن كُنتُمْ صَٰدِقِينَ ١١١

Artinya : "Dan mereka (Yahudi dan Nasrani) berkata: "Sekali-kali tidak akan masuk surga kecuali orang-orang (yang beragama) Yahudi atau Nasrani." Demikian itu (hanya) angan-angan mereka yang kosong belaka. Katakanlah: "Tunjukkanlah bukti kebenaranmu jika kamu adalah orang yang benar."

Para ahli kitab, baik Yahudi maupun Nasrani, mereka menganggap bahwa tidak akan masuk surga terkecuali golongan mereka sendiri. Untuk menolak dan membatalkan anggapan mereka itu hanyalah angan-angan yang timbul dari khayalan mereka sendiri, yaitu agar terhindar dari siksa serta anggapan bahwa yang bukan golongan mereka akan terjerumus ke dalam siksa dan tidak memperoleh nikmat sedikitpun. Dalam ayat tersebut Allah SWT seakan–akan meminta bukti kebenaran yang menguatkan anggapan mereka bahwa mereka dapat mengemukakan bukti-bukti yang benar maka dugaan mereka benar. Dalam ayat ini terdapat isyarat bahwa suatu pendapat yang tidak didasarkan bukti-bukti yang benar maka tidak akan diterima.

Matematika merupakan salah satu ilmu yang banyak manfaatnya dalam kehidupan sehari-hari. Karena banyak sekali permasalahan dalam kehidupan yang dapat diselesaikan dengan menggunakan rumus atau teorema. Matematika adalah salah satu displin ilmu yang merupakan cabang ilmu pengetahuan yang mempunyai banyak kelebihan dibandingkan ilmu pengetahuan yang lain. Seiring dengan perkembangan teknologi, matematika juga mengalami perkembangan yang membuat keinginan para ilmuwan untuk mengembangkannya juga semakin meningkat. Di antara cabang matematika yang menarik untuk ditulis lebih lanjut adalah teori graf.

Sebuah graf G berisikan dua himpunan yaitu himpunan hingga tak kosong $V(G)$ yang mana elemen-elemennya disebut titik dan himpunan hingga (mungkin kosong) $E(G)$ yang elemen-elemennya disebut sisi, sedemikian hingga setiap elemen E (G) adalah sebuah pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986 : 4).

Sebuah jalan (walk) di graf G adalah sebuah barisan berhingga (tak kosong) $W= v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots , e_k, v_k$ yang suku-sukunya bergantian titik dan sisi, sedemikian hingga untuk $1 \leq i \leq k$, v_{i-1} dan v_i adalah titik-titik akhir dari sisi e_i (Chartrand dan Lesniak, 1986 : 26).

Jika semua titik di jalan W berbeda, maka jalan W disebut lintasan (path). Panjang suatu lintasan ditentukan oleh banyaknya sisi dalam lintasan tersebut (Chartrand dan Lesniak, 1986 : 26).

Jalan tertutup tak trivial dan semua sisinya berbeda disebut sirkuit. Sedangkan sirkuit yang mempunyai titik internal berbeda disebut sikel (Chartrand dan Lesniak, 1986 : 28). Panjang sikel terpendek pada graf disebut girth (Chartrand dan Lesniak, 1986 : 35).

Salah satu bahasan dalam graf yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah menentukan order minimum $f(r, n)$ dari graf yang beraturan-r dan bergirth-n.

I.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah dalam skripsi ini adalah bagaimana menentukan order minimum $f(r, n)$.

I. 3 Tujuan Penulisan

Skripsi ini disusun dengan tujuan untuk menjelaskan cara menentukan order minimum $f(r, n)$.

1.4 Batasan Masalah

Dalam penulisan skripsi ini, penulis memberikan batasan sebagai berikut :

a. $f\ (2, n)$, untuk setiap $n \in N, n \geq 3$

b. $f\,(3, n)$, untuk n = 3, 4, 5, 6, 7, 8

c. $f\,(4, n)$, untuk n = 3, 4, 5, 6

d. $f\,(r, 4)$, untuk setiap $r \in N, r \geq 2$

I. 4 Manfaat Penulisan

Penulisan skripsi ini diharapkan dapat bermanfaat terutama bagi :

1. Penulis
   a. Sebagai bentuk pengembangan ilmu yang telah penulis dapatkan selama di bangku kuliah
   b. Sebagai bahan referensi dalam menambah pengetahuan tentang order minimum $f\,(r, n)$ dari graf beraturan–r dan bergirth–n
2. Pembaca
   a. Sebagai titik awal pembahasan yang bisa dilanjutkan atau lebih dikembangkan
   b. Sebagai wahana dalam menambah khazanah keilmuan
3. Lembaga

   Hasil penulisan skripsi ini diharapkan dapat menambah bahan kepustakaan di lembaga khususnya di fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang sehingga dapat dijadikan sebagai sarana pengembangan wawasan keilmuan terutama bidang matematika

I. 5 Sistematika Pembahasan

Dalam penulisan skripsi ini digunakan sistematika pembahasan yang terdiri dari empat bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa sub bab dengan rumusan sebagai berikut :

BAB I PENDAHULUAN

Pendahuluan meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penulisan, batasan masalah, manfaat penulisan dan sistematika pembahasan.

BAB II KAJIAN TEORI

Bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang Graf, Komponen-komponen Graf, Derajat Suatu Titik, Graf terhubung, Graf Lingkaran, Graf Komplit, Graf Komplit Bipartisi, Graf n–cage, Kajian Keagamaan.

BAB III PEMBAHASAN

Pada pembahasan ini membahas tentang penentuan order minimum $f(r, n)$ dari graf beraturan- r dan bergirth-n serta tinjauan agama terhadap hasil pembahasan.

BAB IV PENUTUP

Merupakan bab terakhir di skripsi ini yang berisi kesimpulan dan saran

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Graf

2.1.1 Definisi Graf

Definisi 1

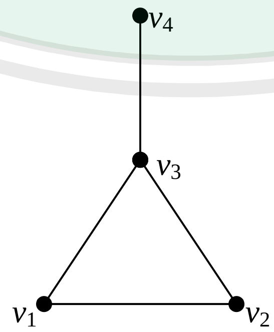
Suatu graf G adalah suatu pasangan himpunan (V, E) dimana V adalah himpunan tak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik (*vertex*), dan E adalah himpunan dari pasangan takberurutan dari titik-titik berbeda di V yang disebut sisi (*edge*). Himpunan titik di graf G ditulis $V(G)$ dan himpunan sisi di graf G dilambangkan dengan $E(G)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Contoh :

Misal $G : (V,E)$ dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$E(G) = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_3, v_4)\}$

Jadi graf G digambar sebagai berikut :



Gambar 2.1 Graf G

Definisi 2

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), u dan e serta v dan e disebut terkait langsung (*incident*). Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$. (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Dari definisi di atas, maka dapat digambarkan sebagai berikut :

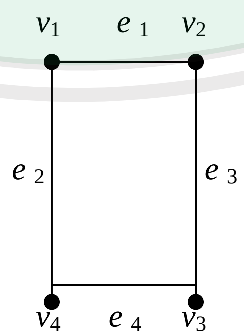
Gambar 2.2 Sisi $e = (u, v)$ yang Menghubungkan Titik u dan v

Karena $e = (u, v)$ sisi di G, maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), sedangkan e dan u serta e dan v disebut terkait langsung (*incident*).

Definisi 3

Banyaknya unsur di V disebut *order* dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$, dan banyaknya unsur di E disebut *size* dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Contoh :



Gambar 2.3 Graf G dengan order 4 dan size 4

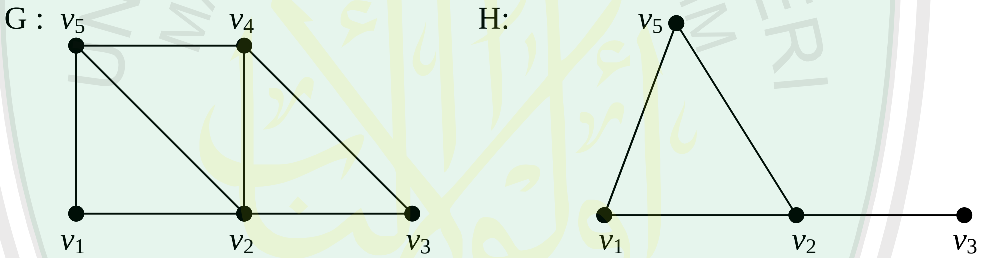
Dari gambar diatas diperoleh $p(G) = 4$ yaitu $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan

$q(G) = 4$ yaitu $\{e_1, e_3,, e_4,, e_2\}$

Definisi 4

Graf H disebut subgraf dari graf G jika himpunan titik di H adalah subset dari himpunan titik di G dan himpunan sisi di H adalah subset dari himpunan sisi di G.{dapat ditulis $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$}. Jika H adalah subgraf G, maka dapat ditulis $H \subset G$ (Chartrand dan Lesniak, 1986 : 8).

Contoh :



Gambar 2.4 *H* subgraf *G*

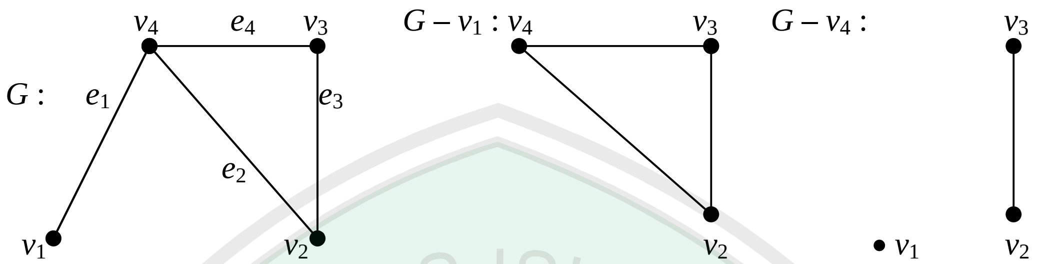
Secara sederhana subgraf dari graf G dapat dibentuk dengan menghapus titik dan sisi.

Definisi 5

Misal G adalah graf dengan $|V(G)| \geq 2$ dan $v \in V(G)$, maka $G - v$ adalah subgraf G dengan himpunan titik $V(G) - \{v\}$ dan sisinya adalah semua sisi di G yang tidak terkait langsung dengan v (Chartrand dan Lesniak, 1986:8).

Contoh :

$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$



(a) (b) (c)

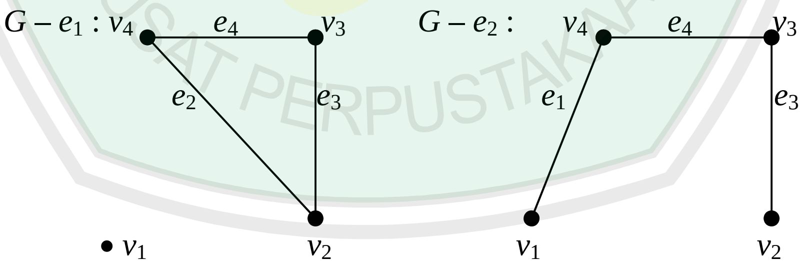
Gambar 2.5 Penghapusan Titik pada Graf G.

Definisi 6

Misal G adalah graf dan $e \in E(G)$ maka $G - e$ adalah subgraf G yang himpunan titiknya adalah $V(G)$ dan himpunan sisinya adalah $E(G) - \{e\}$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:9).

Contoh :

Merujuk pada gambar 2.5 (a) maka dapat diperoleh :



Gambar 2.6 Penghapusan Sisi dari Graf G

2.1.2 Komponen-komponen Graf

1. Titik (vertices)

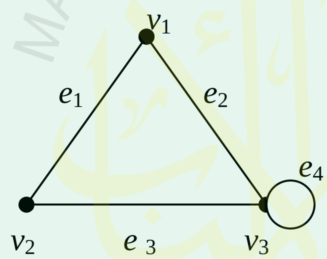
   Noktah-noktah yang menyajikan obyek pada suatu graf disebut titik.

2. Sisi (edge)

   Garis yang menunjukkan keterhubungan antara titik-titik disebut sisi, serta setiap sisi menghubungkan tepat dua titik. Sisi ganda adalah dua garis yang sejajar yang menghubungkan dua titik.

3. Loop

   Loop adalah sebuah sisi yang menghubungkan titik pada dirinya sendiri.



Gambar 2.7 Graf *G* yang memuat loop.

2.2 Derajat Suatu Titik

Derajat dari suatu titik v di graf G adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung dengan v yang ditulis dengan $deg_G\ v$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:9).

Jika v adalah titik pada graf G, maka semua himpunan titik di G yang terhubung langsung dengan v disebut lingkungan yang ditulis dengan $N(v_i)$. Jika dari kedua definisi itu dihubungkan, maka derajat titik v di graf G adalah banyaknya anggota dalam lingkungan $N(v_i)$.

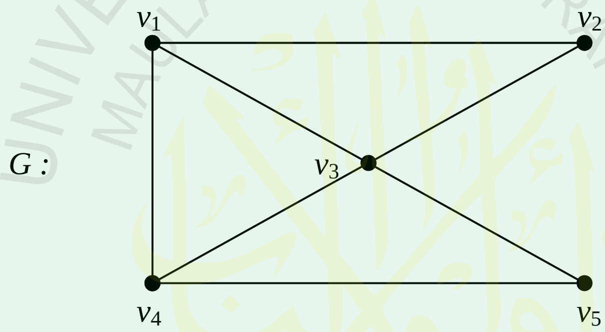
Teorema 1

Jika G adalah suatu graf dengan order p dan size q serta $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_p\}$, maka $\sum_{i=1}^{p} \deg_G(v_i) = 2q$

<u>Bukti :</u>

Setiap sisi adalah terkait langsung dengan dua titik. Jika setiap derajat titik dihitung, maka setiap sisi dihitung dua kali.

Contoh :



Gambar 2.8 Derajat Suatu Titik pada Graf G

Pada Gambar 2.8 graf G mempunyai himpunan titik-titik, yaitu :

$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisi, yaitu :

$E(G) = \{(v_1, v_2), (v_1, v_4), (v_2, v_3), (v_3, v_1), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_5)\}$

Lingkungan dari graf G pada Gambar 2.8 adalah sebagai berikut :

$N(v_1) = \{v_2, v_3, v_4\}$

$N(v_2) = \{v_1, v_3\}$

$N(v_3) = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$

$N(v_4) = \{v_1, v_3, v_5\}$

$N(v_5) = \{v_3, v_4\}$

Sehingga derajat titik pada Gambar 2.8 adalah :

$\deg_G(v_1) = 3$

$\deg_G(v_2) = 2$

$\deg_G(v_3) = 4$

$\deg_G(v_4) = 3$

$\deg_G(v_5) = 2$

Jumlah derajat dari kelima titik pada graf *G* yang mempunyai tujuh sisi itu adalah :

$m = 3 + 2 + 4 + 3 + 2 = 14 = 2 . 7$

Jadi jumlah derajat titik pada graf *G* adalah dua kali jumlah sisinya.

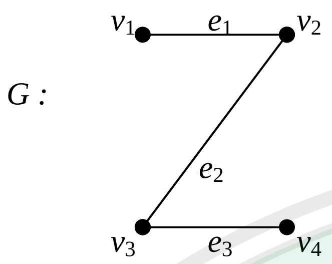
2.3 Graf Terhubung

Dalam graf *G* *jalan u – v* adalah barisan berselang-seling.

$W : u = v_0,, e_1, v_1, e_2,, v_2,, \dots , v_{n-1}, e_n,, v_n = v$

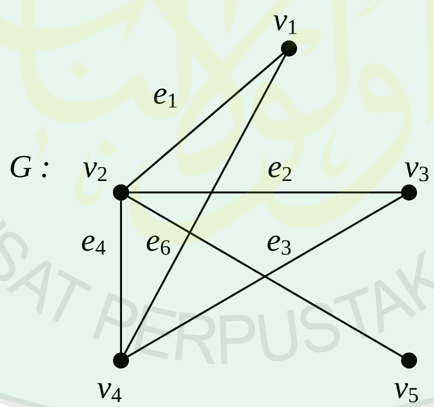
antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik dan diakhiri dengan titik dengan $e_i = v_i\ v_{i-1}$ adalah sisi di *G*. v_0 disebut *titik awal* dan v_n adalah *titik akhir* dan $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}$ disebut *titik internal*. Adapun *n* menyatakan panjang dari W. (Chartrand dan Lesniak, 1986:27).

Contoh :



Gambar 2.9 Jalan pada Graf G

Graf G pada gambar di atas diperoleh $W_1 = v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4$ atau $W_1 = v_1, v_2, v_3, v_4$ adalah suatu jalan yang diawali dan diakhiri dengan titik, yaitu v_1 sebagai *titik awal* dan v_4 sebagai *titik akhir* dengan $e_1 = (v_1, v_2)$, $e_2 = (v_2, v_3)$, $e_3 = (v_3, v_4)$ adalah sisi dari graf G. Pada $W_2 = v_1, v_2, v_4, v_3$ bukan termasuk jalan karena tidak ada sisi (v_2, v_n) di G.



Gambar 2.10 Contoh Jalan Tertutup, Jalan Terbuka, Trail dan Lintasan

Jalan yang tidak mempunyai sisi disebut *jalan trivial*. Jika $v_0 = v_n$, maka W disebut *jalan tertutup*. Jika semua sisi W berbeda, maka W disebut *trail*. (Chartrand dan Lesniak, 1986:28). Perhatikan pada Gambar 2.10

$$W_1 = v_2, v_1, v_4, v_3, v_2$$

adalah *jalan tertutup* dan sekaligus *trail*, karena semua sisinya berbeda atau sisi yang dilalui tidak ada yang lebih dari satu kali.

$$W_2 = v_2, v_4, v_3, v_2, v_1, v_4, v_3, v_2, v_5$$

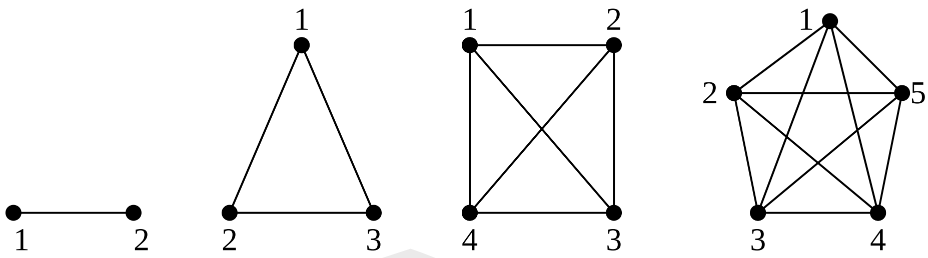
adalah *jalan terbuka* tetapi bukan *trail*, karena sisi (v_4, v_3) dilalui lebih dari satu kali atau pada W_2 tersebut terdapat sisi yang sama. Jalan terbuka yang semua titiknya berbeda disebut *lintasan*. Dengan demikian setiap *lintasan* pasti *trail*, tetapi tidak semua *trail* merupakan *lintasan* . (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Trail tertutup dan tak trivial pada graf G disebut sirkuit di G. Sirkuit yang semua titik internalnya berbeda kecuali $v_0 = v_n$ disebut *sikel*. Sikel dengan panjang n disebut *sikel* – n (C_n) dengan n bilangan asli. Sikel pada graf harus mempunyai panjang tiga atau lebih.

Graf order n yang berbentuk lintasan disebut graf lintasan dan ditulis P_n. Graf order n yang berbentuk sikel disebut graf sikel dan ditulis C_n. Graf lintasan dapat diperoleh dari graf sikel (C_n) dengan menghilangkan salah satu sisi sebarang. Panjang sikel terpendek pada graf disebut *girth*. (Chartrand dan Lesniak, 1986:5).

2.4 Graf Komplit

Graf komplit adalah graf yang setiap titiknya saling terhubung langsung ke semua titik yang lain. Graf komplit dengan n titik dilambangkan dengan K_n. Jumlah sisi pada graf komplit adalah $\frac{n(n-1)}{2}$.

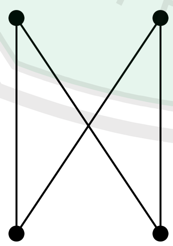


Gambar 2.12 Graf Komplit K_2, K_3, K_4, dan K_5

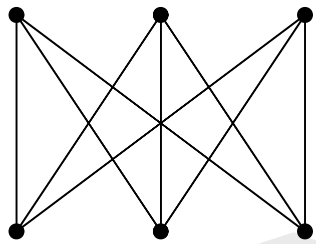
2.6 Graf Komplit Bipartisi

Graf bipartisi adalah graf yang himpunan titiknya dapat dipisahkan menjadi dua himpunan tak kosong *X* dan *Y* sehingga masing-masing sisi di graf tersebut menghubungkan satu titik di *X* dan satu titik di *Y* ; *X* dan *Y* disebut himpunan partisi (Purwanto, 1998:21).

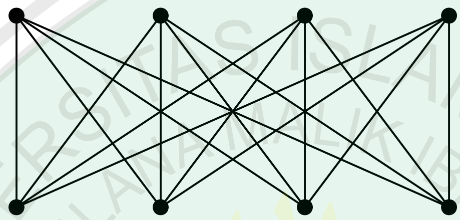
Graf komplit bipartisi adalah graf bipartisi dengan himpunan partisi *X* dan *Y* sehingga masing-masing titik di *X* dihubungkan langsung dengan masing-masing titik di *Y* oleh tepat satu sisi. Jika $|X| = m$ dan $|Y| = n$, maka graf bipartisi tersebut dinyatakan dengan *K*(*m*, *n*).



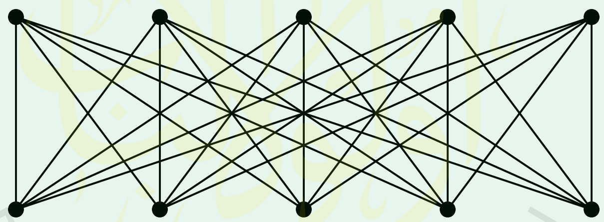
Gambar 2.13 Graf Komplit Bipartisi *K*(2, 2)



Gambar 2.14 Graf Komplit Bipartisi *K*(3, 3)



Gambar 2.15 Graf Komplit Bipartisi *K*(4, 4)

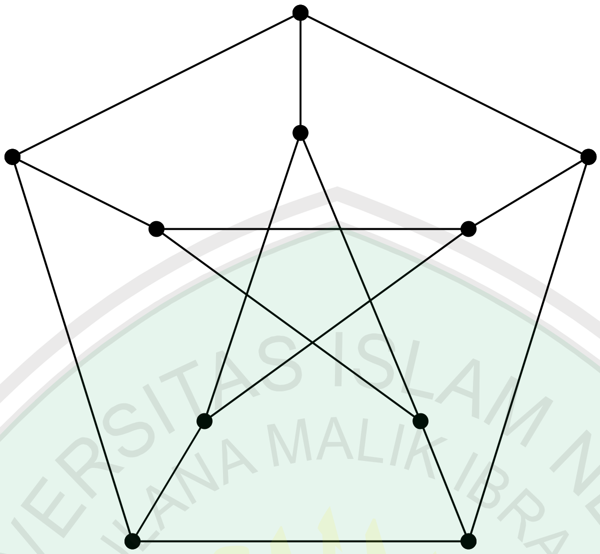


Gambar 2.16 Graf Komplit Bipartisi *K*(5, 5)

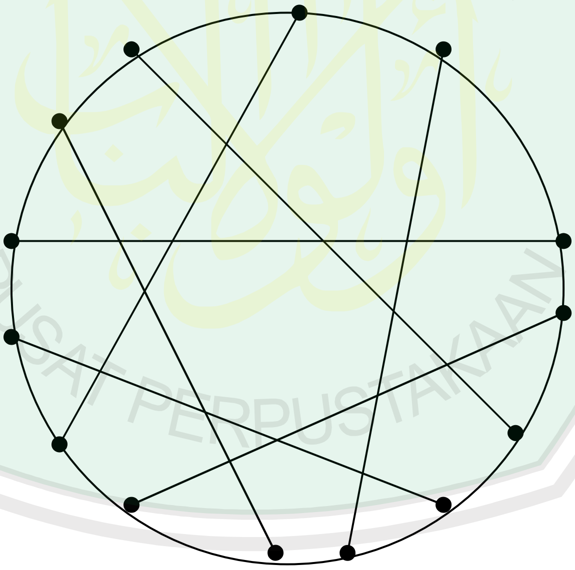
2.7 Graf n–cage

f (*r*, *n*) adalah order minimum dari graf yang beraturan-*r* dan bergirth-*n*. Graf (3, *n*) cages di sebut juga graf *n*-cages. Notasi graf [*r*, *n*] mengindikasikan graf yang beraturan-*r* dan mempunyai girth-*n*. Jadi (*r*, *n*) cages adalah graf [*r*, *n*].

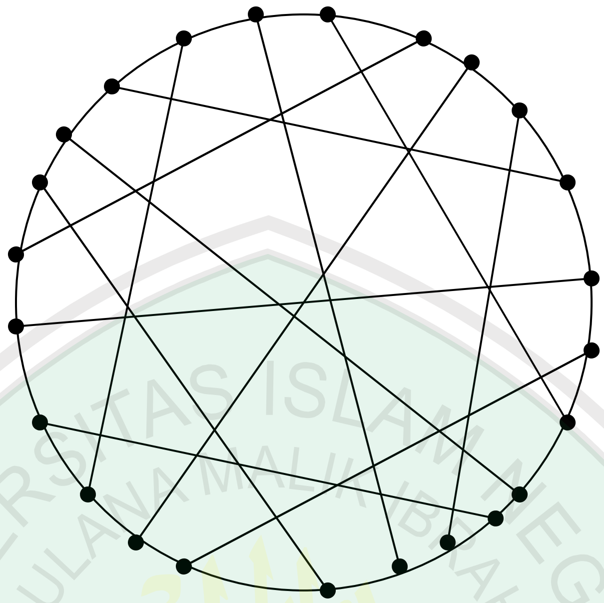
Macam-macam graf *n*–cage, sebagai berikut :



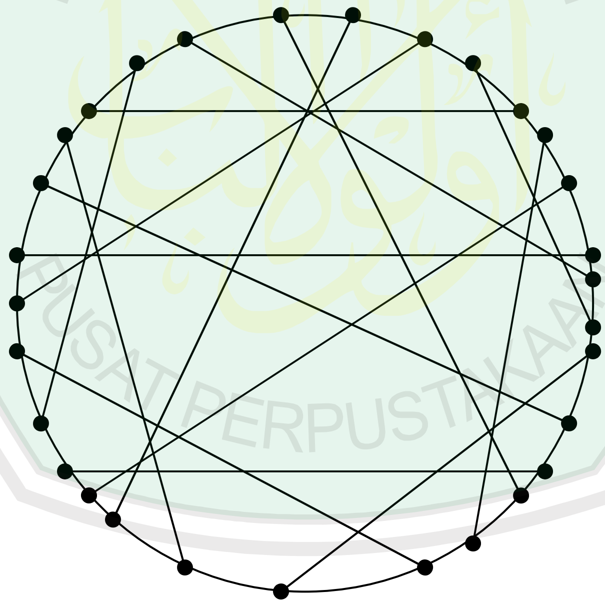
Gambar 2.17 Graf Petersen (5–Cage)



Gambar 2.18 Graf Heawood (6–Cage)



Gambar 2.19 Graf Mc Gee (7–Cage)



Gambar 2.20 Graf Tutte–Coxeter (8–Cage)

2.8 Kajian Keagamaan

Matematika disebut ilmu hitung karena pada hakikatnya matematika berkaitan dengan masalah hitung menghitung. Pengerjaan operasi hitung untuk mencari hasil dilakukan dalam pembelajaran matematika mulai tingkat dasar sampai perguruan tinggi. Dalam pengerjaan operasi hitung, seseorang dituntut untuk bersikap teliti, cermat, dan tepat. Langkah demi langkah pengerjaan diteliti dan dicermati. Setelah diperoleh hasilnya, hasil itu perlu dicek lagi apakah sudah menjawab permasalahan atau tidak.

2.8.1 Konsep Graf dalam Al-Qur'an

Al-Quran merupakan kitab suci yang banyak menyimpan rahasia-rahasia baik dalam dunia nyata maupun ghaib, baik kehidupan masa sekarang ataupun masa yang akan datang, dan kini mulai banyak dikaji oleh para ilmuwan. Karena tanpa disadari bahwa Al-Quran sebenarnya menjadi acuan dalam berbagai hal bukan hanya sekedar sebagai pelengkap. Dari Al-Quran banyak ilmu-ilmu yang dapat digali di antaranya ilmu matematika, contohnya hukum mawaris. Surat yang berkaitan dengan mawaris salah satunya adalah surat An-Nisa' ayat 11 yang menerangkan bagian yang harus diperoleh seorang anak laki-laki yaitu dua kali anak perempuan. Dari sini dapat dilihat suatu perhitungan secara matematis yaitu berkaitan dengan operasi perkalian.

Dari uraian di atas, tidak menutup kemungkinan masih banyak topik-topik dalam matematika yang belum dikaji dan peneliti yakin masih banyak yang belum terungkap. Dalam skripsi ini, topik yang diambil adalah salah satu dari teori dalam matematika yang disebut teori graf. Substansi dari teori graf ini adalah adanya titik dan sisi.

Semua yang ada di alam ini, ada ukurannya dan ada hitungannya.

Allah berfirman dalam surat Al Qamar : 49 sebagai berikut:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَٰهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya : "Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran".

Pengertian ukuran yang terdapat dalam ayat di atas dapat diasumsikan sebagai titik dalam suatu graf. Jika dua titik pada suatu graf diasumsikan sebagai suatu benda dan dihubungkan dengan suatu sisi, maka hal ini memiliki artian bahwa dua benda tersebut mempunyai suatu hubungan dan mempunyai nilai atau bobot tertentu. Jika dua titik dalam suatu graf diasumsikan sebagai suatu kejadian dan dihubungkan dengan suatu sisi, maka dapat diambil suatu pengertian bahwa ada dua kejadian yang mempunyai hubungan dan mempunyai nilai atau bobot.

Dalam teori Islam elemen-elemen yang dimaksud meliputi Pencipta (Allah) dan hamba-hambanya, sedangkan sisi atau garis yang menghubungkan elemen-elemen tersebut adalah bagaimana hubungan antara Allah dengan hambanya dan juga hubungan sesama hamba yang terjalin, *Hablun min Allah wa Hablun min An-Nas*. Sehingga dengan demikian, hal ini menunjukkan adanya suatu hubungan atau keterkaitan antara titik yang satu dengan titik yang lain.

Isra' dan Mi'raj memiliki makna transedental yang sangat tinggi. Secara terminologi, Isra' dan Mi'raj memang memuat dua peristiwa yang berbeda meski keduanya merupakan kesatuan proses yang memiliki pelajaran penting.

Allah berfirman dalam surat Al Israa :1 sebagai berikut:

سُبْحَٰنَ ٱلَّذِىٓ أَسْرَىٰ بِعَبْدِهِۦ لَيْلًا مِّنَ ٱلْمَسْجِدِ ٱلْحَرَامِ
إِلَى ٱلْمَسْجِدِ ٱلْأَقْصَا ٱلَّذِى بَٰرَكْنَا حَوْلَهُۥ لِنُرِيَهُۥ
مِنْ ءَايَٰتِنَآ ۚ إِنَّهُۥ هُوَ ٱلسَّمِيعُ ٱلْبَصِيرُ ﴿١﴾

Artinya: ”*Maha Suci Allah, yang Telah memperjalankan hamba-Nya pada suatu malam dari Al Masjidil Haram ke Al Masjidil Aqsha yang Telah kami berkahi sekelilingnya agar kami perlihatkan kepadanya sebagian dari tanda-tanda (kebesaran) kami. Sesungguhnya dia adalah Maha mendengar lagi Maha Mengetahui*.”

Isra’ adalah perjalanan Nabi Muhammad dari Masjidilharam di Mekah ke Masjidil Aqsha di Palestina. Sementara itu, Mi’raj adalah perjalanan Nabi Muhammad dari Masjidil Aqsha di Planet Bumi ke Sidratulmuntaha. Terkait dengan dua peristiwa diatas, maka dua kejadian ini dapat digambarkan sebagai berikut:

(a) (b)

Gambar 1. (a) Representasi Isra’ dan Mi’raj berdasarkan tempat

(b) Representasi Isra’ dan Mi’raj

Ket: a. Masjidil Haram di Mekah — d. Isra’

b. Masjidil Aqsha di Palestina — e. Mi’raj

c. Sidratulmuntaha

Pada gambar 1 (a) terlihat bahwa ada tiga titik yang dihubungkan oleh tiga sisi. Hal ini jika Isra’ dan Mi’raj dilihat dari tempat kejadian secara berurutan. Pada gambar 1 (b) terlihat bahwa ada dua titik yang dihubungkan oleh satu sisi. Hal ini jika Isra’ dan Mi’raj dilihat dari kejadiannya secara beruntun yaitu Nabi diIsra’kan dulu baru di Mi’rajkan oleh Allah.

Isra’ dan Mi’raj merupakan kejadian yang mengagumkan, dimana Nabi memerlukan waktu hanya semalam saja untuk menyinggahi ketujuh langit dan tempat-tempat yang diberkahi dan bersejarah. Padahal, jika dipikirkan secara rasional kejadian itu sangatlah tidak mungkin.

Sarang lebah juga dapat dipandang berdasar teori graf.

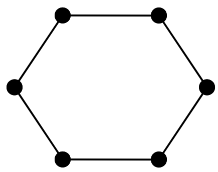
Allah berfirman dalam surat An-Nahl :68 sebagai berikut:

وَأَوْحَىٰ رَبُّكَ إِلَى ٱلنَّحْلِ أَنِ ٱتَّخِذِى مِنَ ٱلْجِبَالِ بُيُوتًا وَمِنَ
ٱلشَّجَرِ وَمِمَّا يَعْرِشُونَ ﴿٦٨﴾

Artinya:” *Dan Tuhanmu mewahyukan kepada lebah: "Buatlah sarang-sarang di bukit-bukit, di pohon-pohon kayu, dan di tempat-tempat yang dibikin manusia*.”

Sarang lebah dapat dilihat langsung dari bentuk sarangnya, dimana terdapat sisi-sisi dan titik-titik sebagai pengait sisi-sisinya. Selama jutaan tahun, lebah telah menggunakan struktur segi enam untuk membangun sarangnya.

Sarang lebah dapat digambarkan sebagai berikut;



Graf sarang lebah

Dari gambar di atas, graf sarang lebah terdiri dari 6 titik dan 6 sisi, dan bisa juga disebut sebagai graf lingkaran (sikel). Pada graf sarang laba-laba banyaknya titik dan sisi tergantung pada besar kecilnya sarang tersebut. Secara umum bila sarangnya semakin besar, maka banyaknya sisi dan titik juga semakin banyak.

BAB III

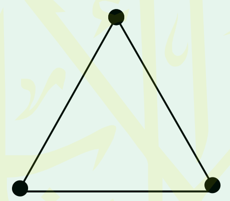
PEMBAHASAN

3.1 Menentukan *f* (2, *n*)

f (2, *n*) adalah order terkecil sehingga graf tersebut beraturan–2 dan bergirth–*n*. Untuk menentukan *f* (2, *n*) dilakukan dengan langkah berikut :

1. Mencari *f* (2, 3)

   f (2, 3) adalah graf yang beraturan–2 dan bergirth–3 (memiliki sikel terpendek–3) maka graf nya akan berbentuk C_3, yaitu :

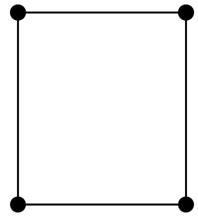
   

   Karena graf yang diperoleh berbentuk C_3, maka order terkecilnya 3

   Jadi *f* (2, 3) = 3

2. Mencari *f* (2, 4)

   Graf yang beraturan–2 dan bergirth–4 (memiliki sikel terpendek–4) maka graf nya akan berbentuk C_4, yaitu :

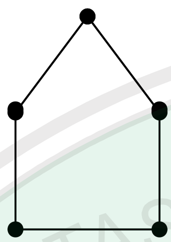
   

   Karena graf yang diperoleh berbentuk C_4, maka order terkecilnya 4

   Jadi *f* (2, 4) = 4

3. Mencari $f(2, 5)$

   Graf yang beraturan–2 dan bergirth–5 (memiliki sikel terpendek–5) maka graf nya akan berbentuk C_5, yaitu :

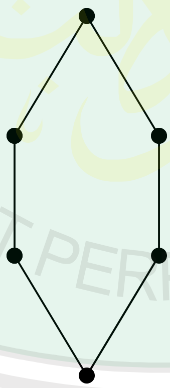


   Karena graf yang diperoleh berbentuk C_5, maka order terkecilnya 5

   Jadi $f(2, 5) = 5$

4. Mencari $f(2, 6)$

   Graf yang beraturan–2 dan bergirth–6 (memiliki sikel terpendek–6) maka graf nya akan berbentuk C_6, yaitu :

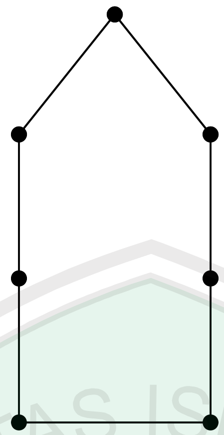


   Karena graf yang diperoleh berbentuk C_6, maka order terkecilnya 6

   Jadi $f(2, 6) = 6$

5. Mencari $f(2, 7)$

   Graf yang beraturan–2 dan bergirth–7 (memiliki sikel terpendek–7) maka graf nya akan berbentuk C_7, yaitu :



Karena graf yang diperoleh berbentuk C_7, maka order terkecilnya 7

Jadi $f(2, 7) = 7$

Dari beberapa contoh di atas diperoleh bahwa :

$f(2, 3) = 3$

$f(2, 4) = 4$

$f(2, 5) = 5$

$f(2, 6) = 6$

$f(2, 7) = 7$

Terlihat pola bahwa $f(2, n) = n$, untuk n bilangan asli, dan menghasilkan teorema $f(2, n) = n$, untuk $n \geq 3$.

Teorema

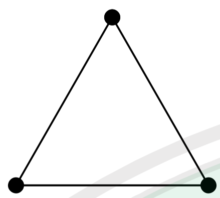
$\boldsymbol{f(2, n) = n}$, untuk $n \geq 3$

Bukti :

Teorema tersebut akan dibuktikan dengan cara induksi matematika

Untuk $n = 3$

$f\,(2, 3) = 3$ seperti pada contoh, akan diperoleh gambar

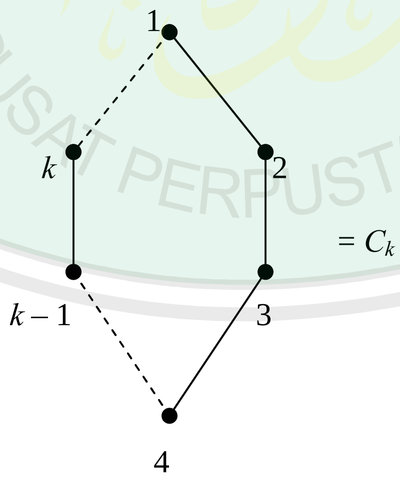


Jadi untuk $n = 3$ benar.

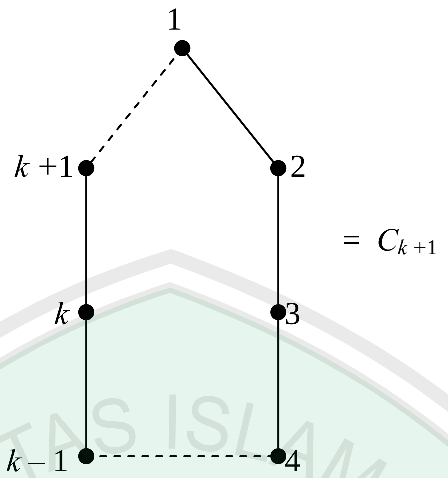
Asumsikan benar untuk $n = k$, yaitu $f\,(2, k) = k$.

$f\,(2, k) = k$ artinya graf beraturan–2 dan bergirth–k mempunyai order terkecil (minimal) k.

Akan dibuktikan benar untuk $n = (k + 1)$, yaitu $f\,(2, k+1) = k + 1$. Misal G graf mempunyai order terkecil k sehingga G beraturan–2 dan bergirth–k, maka graf yang diperoleh akan berbentuk graf sikel (C_k), yaitu :



Jika G ditambah 1 titik, tetapi G harus tetap beraturan–2, sehingga graf G bergirth–k +1, maka graf yang diperoleh akan berbentuk :



Jadi G beraturan–2 dan bergirth–$k+1$.

Disimpulkan $f(2, k+1) = k+1$.

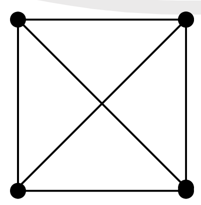
Sesuai prinsip induksi matematika, maka **f (2, n) = n**, $\forall\, n \in N$

3.2 Menentukan *f* (3, *n*)

$f(3, n)$ adalah order terkecil sehingga graf tersebut beraturan–3 dan bergirth–n. Untuk menentukan $f(3, n)$ dilakukan dengan langkah berikut :

1. Mencari $f(3, 3)$

Graf yang beraturan–3 dan bergirth–3 (memiliki sikel terpendek–3) maka grafnya akan berbentuk :

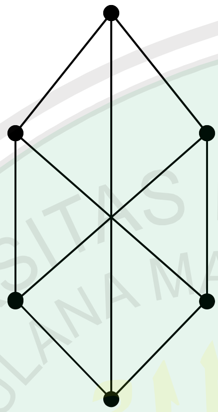


Graf yang diperoleh memiliki order terkecil 4.

Jadi $f(3, 3) = 4$

2. Mencari $f(3, 4)$

Graf yang beraturan–3 dan bergirth–4 (memiliki sikel terpendek–4) maka grafnya akan berbentuk :

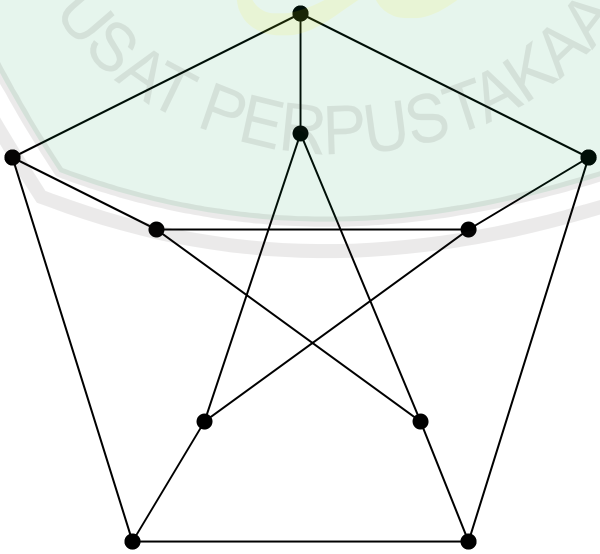


Graf yang diperoleh memiliki order terkecil 6.

Jadi $f(3, 4) = 6$

3. Mencari $f(3, 5)$

Graf yang beraturan–3 dan bergirth–5 (memiliki sikel terpendek–5) maka grafnya akan berbentuk :

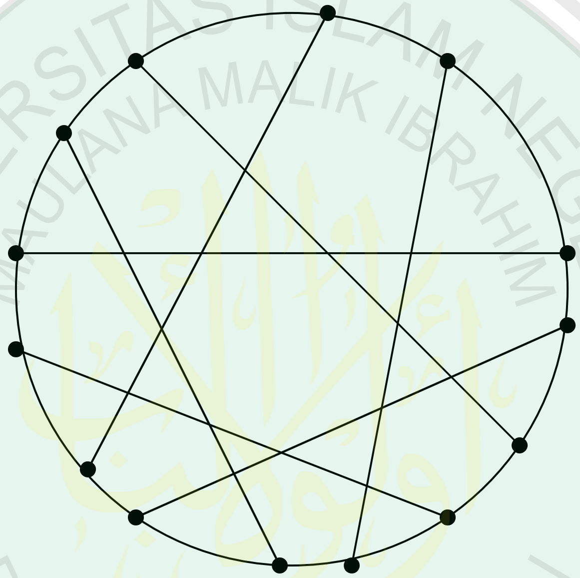


Karena graf yang diperoleh berbentuk graf Petersen (5–cage), maka order terkecilnya 10.

Jadi $f(3, 5) = 10$

4. Mencari $f(3, 6)$

Graph yang beraturan–3 dan bergirth–6 (memiliki sikel terpendek–6) maka graphnya akan berbentuk :

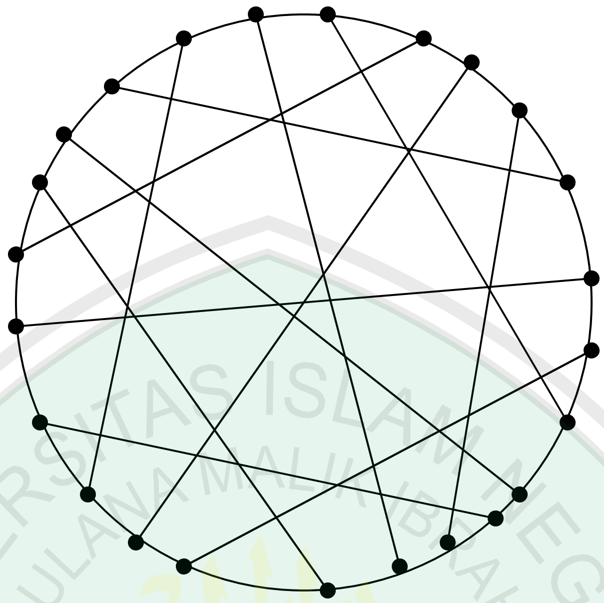


Karena graf yang diperoleh berbentuk graf Heawood (6–cage), maka order terkecilnya 14.

Jadi $f(3, 6) = 14$

5. Mencari $f(3, 7)$

Graf yang beraturan–3 dan bergirth–7 (memiliki sikel terpendek–7) maka grafnya akan berbentuk :

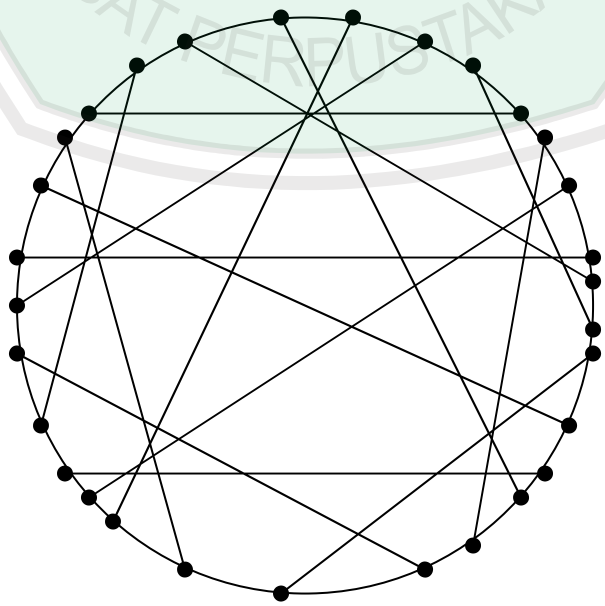


Karena graf yang diperoleh berbentuk graf Mc Gee (7–cage), maka order terkecilnya 24.

Jadi $f(3, 7) = 24$

6. Mencari $f(3, 8)$

Graf yang beraturan–3 dan bergirth–8 (memiliki sikel terpendek–8) maka grafnya akan berbentuk :



Karena graf yang diperoleh berbentuk graf Tutte–Coxeter (8–cage), maka order terkecilnya 30.

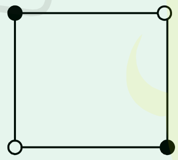
Jadi $f(3, 8) = 30$

3.3 Menentukan *f* (*r*, 4)

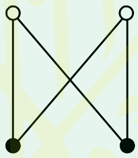
f $(r,4)$ adalah order terkecil sehingga graf tersebut beraturan–r dan bergirth–4. Untuk menentukan $f(r, 4)$ dilakukan dengan langkah berikut :

1. Mencari $f(2, 4)$

   Graf yang beraturan–2 dan bergirth–4 (memiliki sikel terpendek–4) maka grafnya akan berbentuk :

   atau

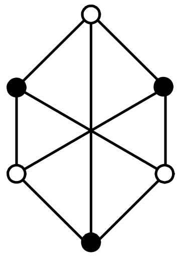
   

   Graf yang diperoleh memiliki order terkecil 4.

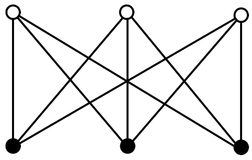
   Jadi $f(2, 4) = 4$

2. Mencari $f(3, 4)$

   Graf yang beraturan–3 dan bergirth–4 (memiliki sikel terpendek–4) maka grafnya akan berbentuk :

   atau

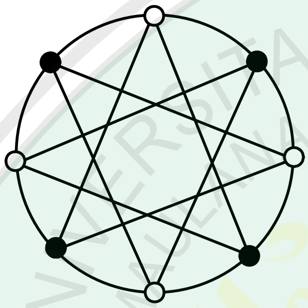
   

Graf yang diperoleh memiliki order terkecil 6.

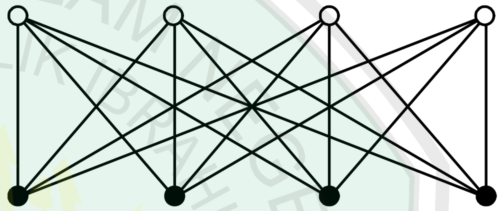
Jadi $f(3, 4) = 6$

3. Mencari $f(4, 4)$

   Graf yang beraturan–4 dan bergirth–4 (memiliki sikel terpendek–4) maka grafnya akan berbentuk :



atau

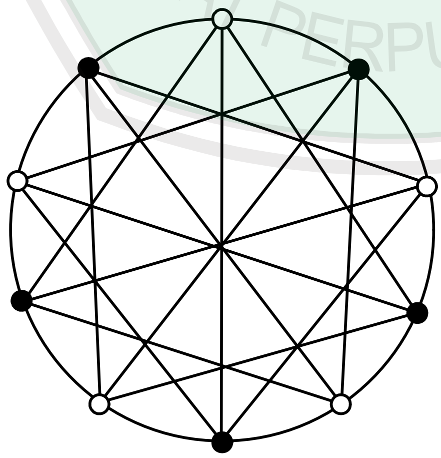


Graf yang diperoleh memiliki order terkecil 8.

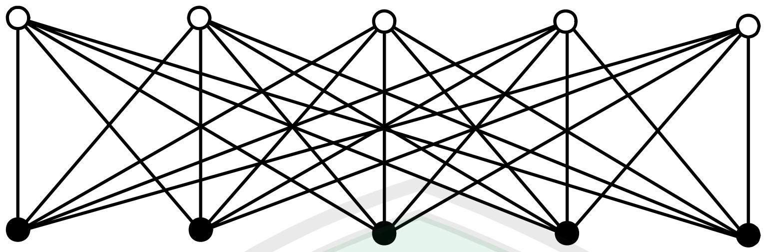
Jadi $f(4, 4) = 8$

4. Mencari $f(5, 4)$

   Graf yang beraturan–5 dan bergirth–4 (memiliki sikel terpendek–4) maka grafnya akan berbentuk :



atau

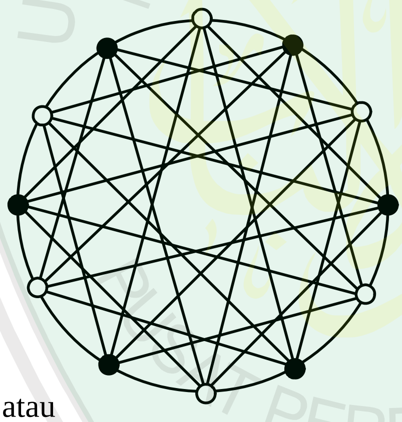


Graf yang diperoleh memiliki order terkecil 10.

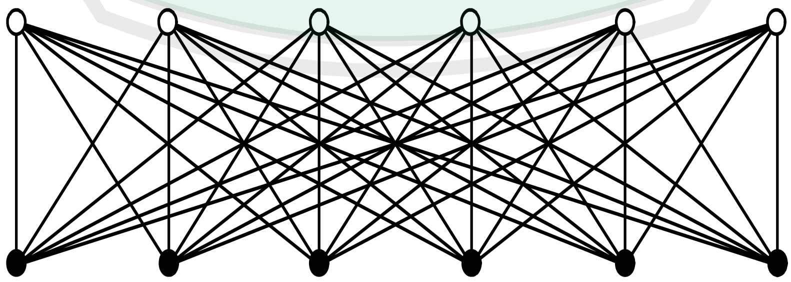
Jadi $f(5, 4) = 10$

5. Mencari $f(6, 4)$

Graf yang beraturan–6 dan bergirth–4 (memiliki sikel terpendek–4) maka grafnya akan berbentuk :



atau



Graf yang diperoleh memiliki order terkecil 12.

Jadi $f(6, 4) = 12$

Dari beberapa contoh di atas diperoleh bahwa :

$f(2, 4) = 4$

$f(3, 4) = 6$

$f(4, 4) = 8$

$f(5, 4) = 10$

$f(6, 4) = 12$

Terlihat pola bahwa $f(r, 4) = 2r$, untuk r bilangan asli, dan menghasilkan teorema $f(r, 4) = 2r$, untuk $r \geq 2$.

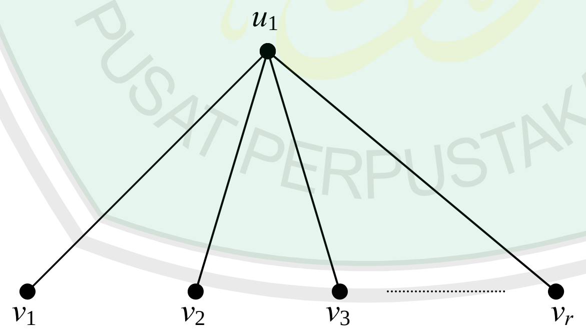
Teorema

$f(r, 4) = 2r$, untuk $r \geq 2$

Bukti :

Misalkan G adalah graf $(r, 4)$ dan misalkan $u_1 \in V(G)$.

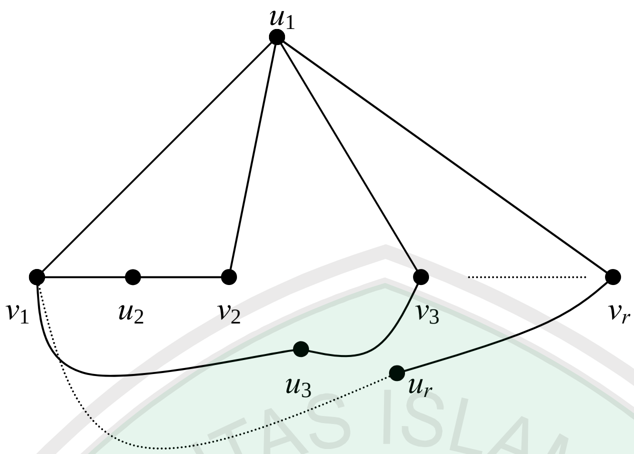
$v_1, v_2, v_3, \ldots, v_r$ adalah titik-titik yang terhubung langsung dengan u_1.



v_1 tidak akan terhubung langsung (adjacent) dengan $v_2, v_3, \ldots, v_r$.

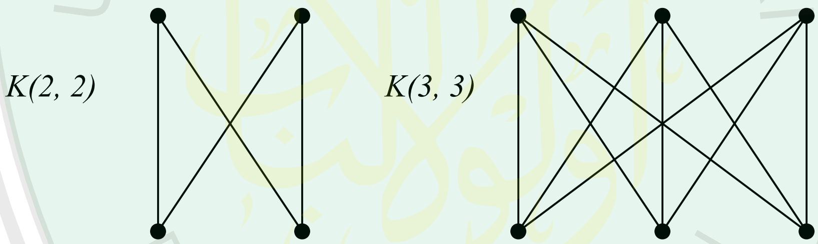
Karena jika v_1 adjacent dengan $v_2, v_3, \ldots, v_r$ maka G akan bergirth–3.

Jadi G memerlukan paling sedikit (r–1) titik tambahan, yaitu $u_2, u_3, \ldots, u_r$.



Jadi $f(r, 4) \geq 2r$.

Padahal graf komplit bipartisi (K (m, n)) adalah graf yang beraturan–r, bergirth–4 dan memiliki order 2r, seperti pada gambar berikut :



Pada gambar di atas diperoleh bahwa :

a. K (2, 2) adalah graf yang beraturan-2, bergirth-4 dan memiliki order terkecil 4.

b. K (3, 3) adalah graf yang beraturan-3, bergirth-4 dan memiliki order terkecil 6.

Jadi K (m, n) adalah graf yang beraturan–r, bergirth–4 dan memiliki order terkecil 2r, maka $f(r, 4) \leq 2r$.

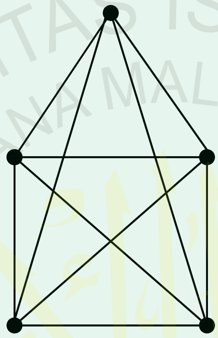
Karena $f(r, 4) \geq 2r$ dan $f(r, 4) \leq 2r$ maka $f(r, 4) = 2r$

3.4 Menentukan *f* (4, *n*)

f (4, *n*) adalah order terkecil sehingga graf tersebut beraturan–4 dan bergirth–*n*. Untuk menentukan *f* (4, *n*) dilakukan dengan langkah berikut :

1. Mencari *f* (4, 3)

   Graf yang beraturan–4 dan bergirth–3 (memiliki sikel terpendek–3) maka grafnya akan berbentuk :

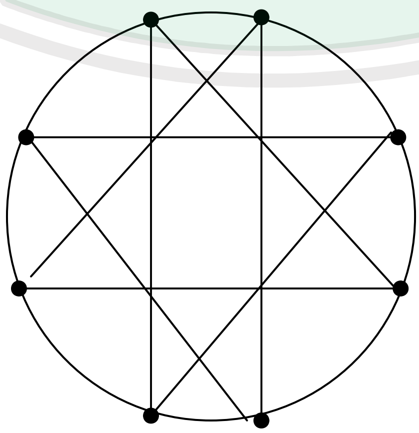
   

   Graf yang diperoleh memiliki order terkecil 5.

   Jadi *f* (4, 3) = 5

2. Mencari *f* (4, 4)

   Graf yang beraturan–4 dan bergirth–4 (memiliki sikel terpendek–4) maka grafnya akan berbentuk :

Graf yang diperoleh memiliki order terkecil 8.

Jadi $f(4, 4) = 8$

3. Mencari $f(4, 5)$

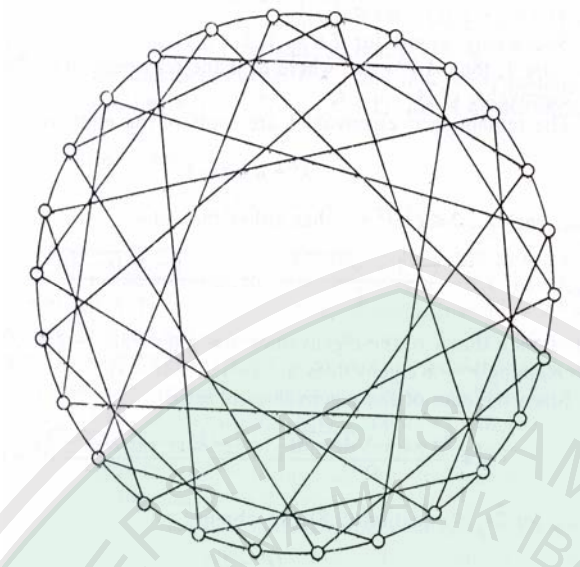
   Graf yang beraturan–4 dan bergirth–5 (memiliki sikel terpendek–5) maka grafnya akan berbentuk :

   Graf yang diperoleh memiliki order terkecil 19.

   Jadi $f(4, 5) = 19$

4. Mencari $f(4, 6)$

   Graf yang beraturan–4 dan bergirth–5 (memiliki sikel terpendek–5) maka grafnya akan berbentuk :



Graf yang diperoleh memiliki order terkecil 26.

Jadi $f(4, 6) = 26$

3.5 Tinjauan Agama Berdasarkan Hasil Pembahasan

Sesuai pada Bab I dan Bab II sebelumnya, yang telah membahas mengenai konsep teori graf beserta relevansinya dalam agama islam, maka pada Bab III ini penulis akan memberikan analisis/ penjelasan mengenai tinjauan agama dari hasil pembahasan tentang teori graf tersebut.

Dalam penentuan order minimum dari graf, jika dikaitkan dengan kajian agama adalah sejajar dengan ayat yang menyebutkan bahwa segala sesuatu yang ada di dunia ini diciptakan oleh Allah SWT. sesuai dengan kadar dan ukurannya dan ditata-Nya dengan sedemikian rapi.

Allah berfirman dalam surat Al-Qamar : 49 sebagai berikut :

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَٰهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: "Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran" (*Q.S. Al-Qamar:* 49).

Berdasarkan ayat di atas yang menyebutkan masalah kadar dan ukuran dari segala yang ada di muka bumi yang menurut penafsiran Shihab (2002: 482) yakni *ketentuan* dan *sistem yang telah ditetapkan terhadap segala sesuatu yang ada di muka bumi ini,* sehingga dengan kekuasaan-Nya maka semua akan terlihat rapi dan sempurna. Sama halnya dengan masalah penentuan order minimum dari suatu graf, yang banyak membutuhkan ukuran yang berarti aturan-aturan dan rumus-rumus yang digunakan untuk menemukan jumlah titik pada graf dengan mudah.

Penemuan sekaligus pembuktian rumus-rumus yang digunakan dalam penentuan order minimum dari graf yang beraturan–*r* dan bergirth–*n* ini selain bertujuan untuk menemukan jumlah titik pada graf dengan mudah, juga dimaksudkan untuk mendapatkan gambar graf yang lebih indah. Setelah mengetahui dengan jelas hasil dari pembahasan di atas yang intinya adalah menemukan rumus untuk order minimum dari graf yang beraturan–*r* dan bergirth–*n*. Pembuktian sekaligus penggambaran dari graf ternyata semuanya telah benar terbukti, walaupun ada beberapa yang tidak dapat ditemukan rumusnya karena tidak memiliki pola.

Jika dikaitkan dengan kajian agama Islam, hal ini dapat direlevansikan dengan Al-Qur’an yang menyebutkan bahwa kebenaran sesuatu tidak cukup hanya dengan bentuk ucapan, dan tulisan saja, tetapi perlu dibuktikan.

Allah berfirman dalam surat Al-Baqarah : 111 sebagai berikut :

وَقَالُوا۟ لَن يَدْخُلَ ٱلْجَنَّةَ إِلَّا مَن كَانَ هُودًا أَوْ نَصَٰرَىٰ ۗ تِلْكَ أَمَانِيُّهُمْ ۗ قُلْ
هَاتُوا۟ بُرْهَٰنَكُمْ إِن كُنتُمْ صَٰدِقِينَ ﴿١١١﴾

Artinya : "Dan mereka (Yahudi dan Nasrani) berkata: "Sekali-kali tidak akan masuk surga kecuali orang-orang (yang beragama) Yahudi atau Nasrani." Demikian itu (hanya) angan-angan mereka yang kosong belaka. Katakanlah: "Tunjukkanlah bukti kebenaranmu jika kamu adalah orang yang benar."

Para ahli kitab, baik Yahudi maupun Nasrani, mereka menganggap bahwa tidak akan masuk surga terkecuali golongan mereka sendiri. Untuk menolak dan membatalkan anggapan mereka itu hanyalah angan-angan yang timbul dari khayalan mereka sendiri, yaitu agar terhindar dari siksa serta anggapan bahwa yang bukan golongan mereka akan terjerumus ke dalam siksa dan tidak memperoleh nikmat sedikitpun. Dalam ayat tersebut Allah SWT seakan–akan meminta bukti kebenaran yang menguatkan anggapan mereka bahwa mereka dapat mengemukakan bukti-bukti yang benar maka dugaan mereka benar. Dan meskipun arti dari ayat tersebut terdapat tuntunan yang mengemukakan bukti, namun maknanya menyatakan ketidakbenaran dakwaan mereka karena mereka tidak akan dapat mengemukakan bukti. Dalam ayat ini terdapat isyarat bahwa suatu pendapat yang tidak didasarkan bukti-bukti yang benar maka tidak akan diterima.

Allah tidak menggunakan perantara dan tidak memerintahkan siapapun termasuk Nabi Muhammad SAW. Untuk menjawab kebohongan itu. Allah menyatakan : Yang demikian itu, yakni ucapan tersebut, dan ucapan-ucapan mereka yang lain, yang sangat jauh dari kebenaran hanya (*Amaani*) angan-angan belaka yang lahir dari kebohongan yang disampaikan oleh pendeta-pendeta Yahudi tanpa ada dasarnya dan mereka hanya menduga-duga.

Selanjutnya, Allah SWT. tidak memerlukan bukti dari mereka menyangkut kebohongan mereka, karena Allah Maha Mengetahui segala sesuatu. Tetapi manusia perlu tahu. Karena itu, di sini Allah memerintahkan Nabi Muhammad SAW.: katakanlah wahai Muhammad kepada mereka, ”*Tunjukkanlah kepada kami bukti kebenaran kamu jika kamu adalah orang yang benar*”. Bukti yang dimaksud di sini adalah berupa wahyu Illahi, karena surga dan neraka adalah wewenang Allah. Hanya Dia yang mengetahui siapa yang berhak memasukinya. Nabi Muhammad SAW. pun tidak tahu. Itu sebabnya, maka bukti kebenaran yang dituntut adalah informasi-Nya, yakni wahyu-wahyu yang disampaikan kepada utusan-utusan-Nya (Shihab, 2002: 296-297).

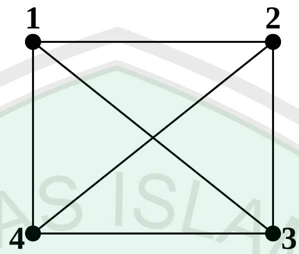
Sebuah graf dapat direpresentasikan sebagai silaturrahim antar umat islam. Arti silaturrahim adalah ikatan yang mengikat sesama manusia yang berupa ikatan iman yang menuntut haknya agar dijaga dalam rasa saling mencintai karena Allah SWT.

Allah berfirman dalam surat Al-Hujurat : 10 sebagai berikut :

إِنَّمَا ٱلْمُؤْمِنُونَ إِخْوَةٌ فَأَصْلِحُوا۟ بَيْنَ أَخَوَيْكُمْ ۚ وَٱتَّقُوا۟ ٱللَّهَ
لَعَلَّكُمْ تُرْحَمُونَ ﴿١٠﴾

Artinya : ”Orang-orang beriman itu sesungguhnya bersaudara. Sebab itu damaikanlah (perbaikilah hubungan) antara kedua saudaramu itu dan takutlah terhadap Allah, supaya kamu mendapat rahmat”.

Dalam teori graf, manusia diasumsikan sebagai himpunan titik. Apabila antar manusia tersebut menjalin silaturrahim dengan baik, maka diasumsikan dengan garis. Bentuk graf dari silaturrahim antar umat manusia, sebagai berikut :



Gambar representasi manusia yang menjalin silaturrahim

Pada gambar di atas terlihat ada empat titik yang semuanya saling terhubung langsung. Hal ini dapat digambarkan bahwa antar manusia tersebut terjalin silaturrahim yang baik.

Allah SWT. memerintahkan agar setiap manusia menyambung hubungan baik dengan orang fakir, tetangga, kerabat dan sanak famili. Apabila manusia memutuskan apa yang diperintahkan oleh Allah untuk dihubungkan, maka ikatan sosial masyarakat akan hancur berantakan, kerusakan menyebar di setiap tempat, kekacauan terjadi dimana-mana.

Ternyata setelah banyak mempelajari matematika yang merupakan ilmu hitung – menghitung serta banyak mengetahui mengenai masalah yang terdapat dalam matematika yang dapat direlevansikan dalam agama Islam sesuai dengan konsep-konsep yang ada dalam Al-Qur'an, maka akan dapat menambah keyakinan diri akan kebesaran Allah SWT selaku sang pencipta yang serba Maha, salah satunya adalah Maha Matematis. Karena Dialah sang raja yang sangat cepat dan teliti dalam semua masalah perhitungan (Abdusysyakir, 2007: 83).

Allah berfirman dalam surat Al- Baqarah : 202 sebagai berikut :

أُوْلَٰٓئِكَ لَهُمْ نَصِيبٌ مِّمَّا كَسَبُواْۚ وَٱللَّهُ سَرِيعُ ٱلْحِسَابِ ٢٠٢

Artinya: "Mereka itulah orang-orang yang mendapat bahagian daripada yang mereka usahakan; dan Allah sangat cepat perhitungan-Nya" (*Q.S. Al-Baqarah:* 202).

Al-Qur'an juga memerintahkan manusia untuk berfikir, sebagaimana firman Allah dalam surat Ali Imran :190 sebagai berikut :

إِنَّ فِي خَلْقِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَٱخْتِلَٰفِ ٱلَّيْلِ وَٱلنَّهَارِ
لَأٓيَٰتٖ لِّأُوْلِي ٱلْأَلْبَٰبِ ١٩٠

Artinya :"Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal" (*Q.S. Ali Imran:* 190).

Dalam tafsir Al-Maraghi penjelasan ayat 190 di atas adalah sesungguhnya dalam tatanan langit dan bumi serta keindahan perkiraan dan keajaiban ciptaan Allah, juga dalam silih bergantinya siang dan malam secara teratur sepanjang tahun yang dapat dirasakan secara langsung pengaruhnya pada tubuh dan cara berpikir manusia karena pengaruh panas matahari, dinginnya malam dan pengaruhnya yang ada dalam dunia *flora* dan *fauna* dan sebagainya merupakan tanda bukti keesaan Allah, kesempurnaan pengetahuan dan kekuasaannya. Sedangkan *Ulul Albab* adalah orang-orang yang mau menggunakan pikirannya untuk mengambil faedah darinya, mengambil hidayah darinya, mengambarkan keagungan Allah dan mau mengingat hikmah akal dan keutamaannya.

Dalam menyelesaikan suatu permasalahan dalam matematika harus dikerjakan dengan cermat dan teliti, karena dalam Al Quran Allah telah berfirman dalam surat Maryam : 94 sebagai berikut :

لَّقَدْ أَحْصَىٰهُمْ وَعَدَّهُمْ عَدًّا ﴿٩٤﴾

Artinya :" Sesungguhnya Allah telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti" (*Q.S. Maryam:* 94).

Kata *ahsahum*, dipahami oleh sebagian ulama' sebagai Dia yang mengetahui kadar setiap peristiwa dan rinciannya, baik yang terjangkau oleh makhluk maupun yang tidak dapat mereka jangkau, seperti hembusan nafas, rincian perolehan rizki dan kadar untuk masa kini dan mendatang. Jadi Allah yang mengetahui amat teliti rincian segala sesuatu dari segala segi jumlah dan kadarnya, panjang dan lebarnya, jauh dan dekatnya, tempat dan waktunya, kadar cahaya dan gelapnya, sebelum, sedang / ketika dan saat wujudnya dan lain-lain.

Begitu juga refleksinya dalam kehidupan, bahwa dalam menyelesaikan suatu permasalahan harus dikerjakan dengan hati-hati dan teliti serta tidak boleh tergesa-gesa. Dalam setiap melangkah harus tetap berpedoman pada aturan-aturan yang telah ditetapkan. Jadi dengan mempelajari matematika, dapat menambah keimanan dan ketaqwaan, karena apa yang ada dalam Al Quran juga sejalan dengan apa yang ada pada matematika.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

1. Mencari pola melalui contoh-contoh khusus.
2. Setelah mendapat pola, maka pola tersebut dinyatakan sebagai teorema.
3. Teorema selanjutnya dibuktikan kebenarannya.

   Hasil dari langkah-langkah di atas adalah :

$f(2, n) = n, \ \forall n \in N, n \geq 3$

$f(3, 3) = 4$

$f(3, 4) = 6$

$f(3, 5) = 10$

$f(3, 6) = 14$

$f(3, 7) = 24$

$f(3, 8) = 30$

$f(r, 4) = 2r, \ \forall r \in N, r \geq 2$

$f(4, 3) = 5$

$f(4, 4) = 8$

$f(4, 5) = 19$

$f(4, 6) = 26$

4.2 Saran

Pada skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pada pokok bahasan masalah penentuan order minimum dari graf yang beraturan–r dan bergirth–n antara lain penentuan $f(2, n)$, $f(3, n)$, $f(r, 4)$, $f(4, n)$. Maka dari itu, untuk penulisan skripsi selanjutnya, penulis menyarankan kepada pembaca untuk mengkaji masalah penentuan order minimum $f(r, n)$ yang lain, seperti $f(5, n)$ dan seterusnya.

DAFTAR PUSTAKA

Abdusysyakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Al-Maragi, Ahmad Mustofa. 1994. *Tafsir Al- Maragi*. CV. Toha Putra Semarang: Semarang.

Al-Murakfuri, Syaikh Shafiyyurrahman. 2006. *Shahih Tafsir Ibnu Katsir Jilid 1*. Bogor: Pustaka Ibnu Katsir.

Chartrand, Gery and Lesniak, Linda. 1986. *Graphs and Digraphs Second Edition*. California: a Division of Wadsworth, Inc.

Purwanto, 1998. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP Malang.

Rahman, Afzalur. 1992. *Al Qur'an Sumber Ilmu Pengetahuan*. Jakarta: Rineka Cipta.

Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Misbah Volume 1 Pesan, Kesan & Keserasian Al Qur'an*. Ciputat: Lentera Hati.

Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Misbah Volume 13 Pesan, Kesan & Keserasian Al Qur'an*. Ciputat: Lentera Hati.

DEPARTEMEN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345
Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI

Nama **: Ika Mas'ullah Rahmawati**

Nim **: 03510002**

Jurusan **: Matematika**

Dosen Pembimbing **: I. Abdussakir, M.Pd**

II . Munirul Abidin, M.Ag

Judul skripsi **: Menentukan order minimum *f* (*r*, *n*) dari Graf beraturan–*r* dan bergirth–*n***

No	Tanggal	Hal yang Dikonsultasikan	Tanda Tangan
1	18 April 2007	Proposal	1.
2	18 Mei 2007	Revisi Proposal	2.
3	16 Oktober 2007	Konsultasi BAB I, II	3.
4	30 Oktober 2007	Revisi BAB I, II	4.
5	14 November 2007	Revisi BAB I, II	5.
6	21 November 2007	Revisi BAB I, II	6.
7	3 Desember 2007	Konsultasi BAB III	7.
8	12 Januari 2008	Revisi BAB III	8.
9	29 Januari 2008	Revisi BAB III	9.
10	15 Pebruari 2008	Konsultasi BAB IV	10.
11	20 Pebruari 2008	Konsultasi Keagamaan	11.
12	28 Maret 2008	ACC Keagamaan	12.
13	28 Maret 2008	ACC Keseluruhan	13.

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321