

UKURAN LEBESGUE DALAM GARIS BILANGAN REAL

SKRIPSI

Oleh:

MUTHMAINNAH

NIM : 04510004



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
Oktober 2008**

UKURAN LEBESGUE DALAM GARIS BILANGAN REAL

SKRIPSI

Oleh:
MUTHMAINNAH
NIM: 04510004



JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
Oktober 2008

UKURAN LEBESGUE DALAM GARIS BILANGAN REAL

SKRIPSI

Diajukan Kepada :
Universitas Islam Negeri Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
MUTHMAINNAH
NIM : 04510004

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
Oktober 2008**

UKURAN LEBESGUE DALAM GARIS REAL

SKRIPSI

Oleh:

MUTHMAINNAH

NIM : 04510004

Telah Disetujui untuk Diuji

Malang, ... Oktober 2008

Dosen Pembimbing I,

Dosen Pembimbing II,

Drs. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 150 327 240

Ach. Nashichuddin, MA.
NIP. 150 302 531

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M. Si
NIP. 150 318 321

UKURAN LEBESGUE DALAM GARIS BILANGAN REAL

SKRIPSI

Oleh:

MUTHMAINNAH

NIM: 04510004

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal:

20 Oktober 2008

Susunan Dewan Penguji:

Tanda Tangan

- | | | |
|------------------|---|-----|
| 1. Penguji Utama | : <u>Wahyu H. Irawan, M.Pd</u>
NIP. 150 300 415 | () |
| 2. Ketua | : <u>Sri Harini, M.Si</u>
NIP. 150 318 321 | () |
| 3. Sekretaris | : <u>Drs. Usman Pagalay, M.Si</u>
NIP. 150 327 240 | () |
| 4. Anggota | : <u>Ach. Nashichuddin, MA.</u>
NIP. 150 302 531 | () |

**Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika**

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321

UKURAN LEBESGUE DALAM GARIS BILANGAN REAL

SKRIPSI

Oleh:

MUTHMAINNAH

NIM: 04510004

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal:

20 Oktober 2008

Susunan Dewan Penguji:

Tanda Tangan

- | | | |
|------------------|---|-----|
| 1. Penguji Utama | : <u>Wahyu H. Irawan, M.Pd</u>
NIP. 150 300 415 | () |
| 2. Ketua | : <u>Sri Harini, M.Si</u>
NIP. 150 318 321 | () |
| 3. Sekretaris | : <u>Drs. Usman Pagalay, M.Si</u>
NIP. 150 327 240 | () |
| 4. Anggota | : <u>Ach. Nashichuddin, MA.</u>
NIP. 150 302 531 | () |

**Mengetahui dan Mengesahkan,
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi**

Prof. Drs. Sutiman B. Sumitro, SU., DSc.
NIP. 130 809 123

PERSEMBAHAN

Alhamdulillah wa syukurillah.

Dari relung hati yang terdalam.

Kuucap beribu syukur atas nikmat, taufik, hidayah, dan maunah-Mu Ya Allah

Yang semoga selalu memberikan Ridho-Nya.

Sholawat ma'a salam kuhaturkan keharibaan-Mu penyejuk hati, penyempurna akhlaq, kekasih Allah Sayyidul Wujud Rasululah Saw yang telah memberiku kebanggaan dengan menjadi salah satu dari umatnya.

Kupersembahkan karya tulis ini untuk

Ibunda tercinta Ibu Ruchaniyah atas doa, pengorbanan materiil, maupun moril, serta spiritul dan ridhonya yang tulus dan terus memberiku kekuatan, spirit, motivasi, dukungan, bimbingan, arahan, dorongan, semangat, pemikiran, masukan yang selalu mengiringi langkah penulis untuk terus berjuang.

Aby M. Mansur, S. Ag yang selalu menjadi sumber inspirasi dan teladan untuk terus berkarya serta optimis.

Adik Mauidhotul Husna yang selalu memberikan bantuan dengan ikhlas dan tanpa mengeluh dalam menyelesaikan skripsi ini.

Kakek Burhan, nenek Fathonah, kakek Abdul Manaf, nenek Taslimah yang senantiasa mendo'akan, dan memberikan nasihat-nasihat untuk tidak pernah ada kata malas dan putus asa.

Syukron katsiir 'Alaa ...

Halaty Hj. Zainiyah, amy H. Ghufron, halaty Hj. Shofiyah, Akhy Fathur Rozi, akhy M. Cholid, ukhty Nisful Laili, ukhty Muhimmatul Fatati, Fatanur Baity Tsulutsya, ukhty Khusnul Khotimah, shoby Rifqi Abdillah, dan shoby Ali.

MOTTO

BERPIKIR DAN BERDZIKIR

Hidup ini adalah keyakinan dan perjuangan, dan perjuangan seseorang mukmin sejati tidak akan berhenti kecuali ketika kedua telapak kakinya telah menginjak pintu surga.

Saat sesuatu menjadi sebuah teka-teki.

Harus dilalui penuh percaya diri.

Saat sesuatu menjadi sebuah teka-teki.

Dan harus tetap dilalui untuk mengungkap misteri.

Terbanglah menantang.

Prestasi membentang jadilah biang.

Jadilah biang!

Jadilah biang!

Jadilah biang!

SURAT PERNYATAAN

Dengan ini, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

NAMA : MUTHMAINNAH.
NIM : 04510004.
JURUSAN : MATEMATIKA.
FAKULTAS : SAINS dan TEKNOLOGI.
JUDUL SKRIPSI : UKURAN LEBESGUE DALAM GARIS BILANGAN
REAL.

Dengan ini saya menyatakan, bahwa dalam skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan pada suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya, juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain., kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka, serta skripsi ini merupakan hasil karya cipta saya, bukan jiplakan dan tiruan dari skripsi orang lain.

Malang, 23 Oktober 2008

MUTHMAINNAH
NIM. 04510004

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, segala puja dan puji syukur kehadiran Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufiq, hidayah, dan mau'nah, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Ukuran Lebesgue dalam Garis Real" ini diberi anugerah oleh Allah berupa kelancaran, sehingga dapat diselesaikan tepat sesuai dengan jadwal rencana kerja yang telah terstruktur.

Shalawat serta salam tetap terhaturkan dan tercurah limpahkan keharibaan Nabi besar Muhammad S.A.W. selaku pembawa berita gembira bagi orang yang beriman dan pemberi peringatan bagi orang yang menentanginya, serta sebagai utusan yang membawa risalah dan menyempurnakan akhlaq manusia.

Skripsi merupakan karya ilmiah yang disusun oleh mahasiswa Program Sarjana (SI) sebelum dinyatakan lulus sebagai seorang sarjana pada bidang ilmu tertentu. Skripsi berjudul "Ukuran Lebesgue dalam Garis Real" ini ditulis bukan bermaksud untuk membuktikan teorema-teorema dan lemma-lemma yang terdapat dalam ukuran Lebesgue dalam garis real, karena penulis tidak memiliki kemampuan itu. Skripsi ini mencoba menjelaskan, mendetailkan, dan memaparkan, serta memberi cara lain untuk membuktikan kebenaran teorema-teorema dan lemma-lemma yang sudah terdapat pada buku-buku referensi ukuran Lebesgue yang sebagian besar masih berbahasa Inggris dan yang pembuktian teoremanya masih belum detail menimbulkan kesulitan, pertama untuk memahami bahasa Inggris itu sendiri, dan kedua memahami materi yang memang sangat abstrak.

Skripsi ukuran Lebesgue dalam garis real ini disajikan dalam empat bagian besar, meliputi: (a) Pendahuluan, yang memuat latar belakang diambilnya judul ukuran Lebesgue dalam garis real yang juga diintegrasikan dengan QS Al – Qomar ayat 49, rumusan masalah, tujuan penulisan, manfaat penulisan, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan, (b) Kajian teori, memuat himpunan berhingga dan himpunan tak berhingga, operasi himpunan yang diperumum, penutup atau closure, partisi, lingkungan atau *neighborhood*, sifat kelengkapan pada \mathfrak{R} , interval, titik interior dan himpunan buka dalam \mathfrak{R} , titik limit, himpunan tertutup, himpunan denumerabel dan kontabel, compact sets: Teorema Heine-Borel, barisan monoton, dan nilai mutlak, serta tafsir dan penjelasan QS Al-Qomar ayat 49, (c) Pembahasan, memuat teorema-teorema, lemma-lemma, bukti-bukti, dan contoh-contohnya, serta integrasi pembuktian kebenaran teorema-teorema dan lemma-lemma ukuran Lebesgue dalam garis real dengan QS Al-Qomar ayat 49, dan (d) Penutup, memuat kesimpulan hasil penelitian dan saran untuk penelitian selanjutnya.

Penyusunan skripsi ini tidak terlepas dari iringan do'a dan besarnya motivasi, dukungan, bimbingan, arahan, dorongan, semangat, spirit, pemikiran, serta bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan kali ini, suatu kebanggaan bagi penulis untuk memberikan penghargaan dan ucapan terima kasih yang akan disampaikan kepada :

5. Bapak Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor UIN Malang.
6. Bapak Prof. Drs. Sutiman B. Sumitro, SU., DSc., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang beserta stafnya.

7. Ibu Sri Harini, M.Si, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.
8. Bapak Drs. Usman Pagalay, M.Si, selaku Dosen Pembimbing Skripsi, yang telah memberikan pengarahan dalam menganalisis data dan membuktikan teorema, lemma, serta corollary, memberikan bimbingan dalam menyelesaikan soal-soal tentang ukuran Lebesgue, serta telah memaparkan dengan jelas jawaban dari semua pertanyaan yang penulis ajukan dalam menyelesaikan skripsi ini.
9. Bapak Ach. Nashichuddin, MA., selaku Dosen Pembimbing II, yang telah memberikan pengarahan dalam menganalisis, menafsirkan ayat-ayat Al – Qur'an, dan memberikan penjelasan tentang integrasi antara QS Al – Qomara ayat 49 dan ukuran Lebesgue dalam garis real, serta telah memaparkan dengan jelas jawaban dari semua pertanyaan yang penulis ajukan dalam menyelesaikan skripsi ini.
10. Abi Moh. Mansur, S.Ag, ibu Ruchaniyah, dan adik Mauidhotul Husna, serta segenap keluarga yang telah meridhoi dan banyak berkorban baik materiil maupun moril, serta spirituil yang berupa do'a yang selalu mengiringi setiap langkah penulis.
11. Saudara dan sahabat seperjuangan yang seangkatan jurusan matematika Fakultas Sains dan Teknologi yang telah memberikan sumbangsih berupa masukan, pemikiran, dan ide demi kelancaran selama penyelesaian skripsi berlangsung.

Dan pihak-pihak lain yang selalu membantu.

Semoga segala yang beliau lakukan menjadi amal sholeh mendapat ridho Allah SWT. Keterbatasan ilmu yang dimiliki penulis, menjadi celah timbulnya kekurangan, jauh dari sempurna, dan kesalahan. Oleh karena itu, penulis menerima dan mengharapkan masukan, saran, kritik, dan teguran dari semua evaluator dan pembaca demi kesempurnaan skripsi ini. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat dan dapat menjadi literatur penambah wawasan dalam aspek pengajaran bidang matematika dan khususnya pada masalah ukuran. Amiin.

Malang, Oktober 2008

Penulis.



DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSETUJUAN	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
HALAMAN PERSEMBAHAN	iv
HALAMAN MOTTO	v
SURAT PERNYATAAN	vi
KATA PENGANTAR	vii
DAFTAR ISI	xi
ABSTRAK	xiv
 BAB I : PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	7
1.3 Tujuan	7
1.4 Manfaat	7
1.5 Batasan Masalah	8
1.6 Metode Penelitian	9
1.7 Sistematika Penulisan	10
 BAB II : KAJIAN TEORI	
2.1 Himpunan Berhingga dan Himpunan Tak Berhingga	11
2.2 Operasi Himpunan yang Diperumum	12
2.3 Penutup atau Closure	14

2.4 Partisi.....	15
2.5 Lingkungan atau Neighborhood.....	16
2.6 Sifat Kelengkapan pada \mathfrak{R}	18
2.7 Interval.....	22
2.8 Titik Interior dan Himpunan Buka dalam \mathfrak{R}	25
2.9 Titik Limit.....	28
2.10 Himpunan Tertutup	31
2.11 Himpunan Denumarable dan Kontable	33
2.12 Compact sets: Teorema Heine – Borel	38
2.13 Barisan Monoton	41
2.14 Nilai Mutlak	45
2.15 Tafsir dan Penjelasan QS Al – Qomar ayat 49	48

BAB III : PEMBAHASAN

3.1 Ukuran Kumpulan Terbuka Terbatas	54
3.2 Ukuran Kumpulan Tertutup Terbatas.....	70
3.3 Pengaitan Antara QS Al- Qomar Ayat 49 dan Ukuran Lebesgue.....	89

BAB IV : PENUTUP

4.1 Kesimpulan	97
4.2 Saran.....	98
4.2.1 Bagi Jurusan Matematika Fakultas Sains dan	

Teknologi UIN Malang.....	98
4.2.2. Bagi Peneliti selanjutnya.....	98
DAFTAR PUSTAKA	99
CURICULLUM VITAE	100



ABSTRAK

Muthmainnah. 2008. **Ukuran Lebesgue Dalam Garis Bilangan Real.**

Pembimbing: Drs. Usman Pagalay, M.Si. dan Ach. Nashichuddin, MA.

Kata Kunci: Ukuran Lebesgue, Garis, Bilangan real.

Ukuran Lebesgue pertama kali ditemukan oleh Henry Leon Lebesgue, pada tahun 1875-1944. Ukuran Lebesgue dari A yang dinotasikan $\mu(A)$ merupakan ukuran himpunan $A \subset \mathfrak{R}$ (ukuran dari suatu bilangan real nonnegatif). Oleh karena itu, ukuran Lebesgue dinobatkan sebagai pembuka pintu teori tentang ukuran dalam garis bilangan real. Berdasarkan latar belakang tersebut, penelitian ini dilakukan dengan tujuan untuk: menyebutkan, mendiskripsikan, menganalisis, dan membuktikan teorema-teorema yang berlaku pada ukuran Lebesgue dalam garis real.

Penelitian ini lebih bersifat analisis dan dilakukan dengan cara studi literatur dengan mempelajari buku-buku teks penunjang dan konsultasi dengan dosen pembimbing. Dalam hal ini penulis akan memaparkan dan menjelaskan definisi, menganalisis dan membuktikan kebenaran teorema-teorema ukuran Lebesgue yang terdiri dari: (1) Ukuran kumpulan terbuka terbatas, (2) Ukuran kumpulan tertutup terbatas, (3) Ukuran luar dan ukuran dalam, (4) Ukuran kumpulan terukur terbatas yang populer dengan Uji Caratheodory.

Teorema-teorema yang dianalisis dan dibuktikan kebenarannya, antara lain:

(1) Jika M menyatakan koleksi kumpulan terbuka terbatas dan μ menyatakan fungsi ukuran, maka $\mu: M \rightarrow \mathfrak{R}$ bersifat:

$$(a) 0 \leq \mu(G) < \infty (G \in M);$$

$$(b) G_i \in M (i = 1, 2), G_1 \subseteq G_2 \Rightarrow \mu(G_1) \leq \mu(G_2);$$

$$(c) G_i \in M (i = 1, 2, \dots), G_i \cap G_j = \emptyset, (i \neq j) \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_i);$$

$$(d) G_i \in M (i = 1, 2, \dots) \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_i).$$

(2) Jika H menyatakan koleksi kumpulan tertutup terbatas, maka $\mu: H \rightarrow \mathfrak{R}$ bersifat:

$$(a) 0 \leq \mu(F) < \infty (F \in H);$$

$$(b) F_i \in H (i = 1, 2), F_1 \subseteq F_2 \Rightarrow \mu(F_1) \leq \mu(F_2);$$

$$(c) F_i \in H (i = 1, 2, \dots), F_i \cap F_j = \emptyset, (i \neq j) \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(F_i).$$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang.

Matematika merupakan suatu ilmu yang mempunyai obyek kajian abstrak, yang universal yang mendasari perkembangan teknologi modern, dan mempunyai peran penting dalam berbagai disiplin serta mengembangkan daya pikir manusia. sehingga memuat variabel-variabel yang bermanfaat bagi disiplin ilmu lain. Dalam hal ini memacu pengguna matematika lebih berwawasan luas karena tidak dibatasi oleh suatu konsep tertentu. Pola pikir matematika bersifat deduktif yaitu dari obyek yang umum menuju suatu pengambilan suatu kesimpulan, sehingga dapat menjembatani menuju langkah selanjutnya.

Aplikasi matematika dapat diamati dalam proses penyelesaian suatu permasalahan yang dimodelkan dalam konsep matematika. Dengan memperhatikan semesta pembicaranya, konsep tersebut akan lebih mudah diselesaikan dan dapat diambil suatu perkiraan yang mendekati suatu kesimpulan. Jika suatu permasalahan itu kompleks, maka dapat dibentuk sistem matematika. Sehingga aplikasi-aplikasi matematika seperti perkembangan pesat di bidang teknologi informasi dan komunikasi dewasa ini dilandasi oleh perkembangan matematika yang menitikberatkan pada perbedaan aspek-aspek teori. Dari sudut pandang adanya macam-macam aspek teori tersebut, ilmu matematika memperlebar cakupan pemahamannya pada beberapa cabang, seperti matematika analisis, statistik, dan pemrograman (Parzynski, 1982:149).

Analisis matematika modern atau kalkulus lanjutan tidak menekankan pada perhitungan dan rumus atau aturan, tetapi pembahasannya didasarkan pada pengembangan konsep dasar dan teori dengan menggunakan penalaran untuk memperoleh prinsip-prinsip yang berupa definisi, aksioma, lemma, corollary, dan teorema-teorema beserta pembuktiannya. Sedangkan klasifikasi materi dan pendekatannya memang bersifat sangat abstrak dan intuitif untuk memahami dan mengembangkan metode-metode dan teknik-teknik yang dipergunakan dalam bukti-bukti. Sehingga suatu pemahaman yang baik sangat diperlukan untuk kesuksesan dalam mempelajari analisis matematika. Selain itu, analisis mendominasi wilayah dari matematika. Karena ide-idenya merupakan dasar dan keutamaan yang tidak hanya didefinisikan saja, tetapi artinya diterima secara universal (Golbert, 1976:2).

Himpunan dalam matematika didiskripsikan sebagai suatu suku, suatu himpunan adalah koleksi yang didefinisikan dengan jelas dari obyek-obyek yang disebut elemen-elemen atau anggota-anggota, sedangkan suku hanya didefinisikan artinya untuk beberapa mekanisme yang keberadaannya digunakan untuk menentukan suatu anggota dari himpunan. Adapun himpunan merupakan suatu konsep yang paling penting dalam analisis matematika dan aplikasi-aplikasinya menduduki suatu peranan pusat dalam materi panjang selang suatu interval (Paul, 1978:49).

Suatu barisan adalah suatu yang domain (daerah asal) nya adalah himpunan bilangan asli, sedangkan fungsi-fungsi yang didefinisikan pada N (bilangan-bilangan asli) adalah suatu subset dari \mathfrak{R} (bilangan-bilangan real) yang dapat

menunjukkan nilai dari suatu barisan. Selain itu, konsep barisan digunakan sebagai alat dan ide limit dari suatu barisan yang mempersiapkan simbol lebih umum yaitu limit fungsi. Sehingga barisan adalah ide dasar untuk semua limit dan fungsi, sedangkan untuk fungsi–fungsi terbatas pada limit merupakan dasar dari kalkulus (Paul, 1978:216).

Himpunan bilangan real mempunyai sifat–sifat analog untuk barisan dari bilangan real. Barisan dan himpunan dari bilangan real dapat disebut sebagai koleksi–koleksi dari bilangan real. Suatu himpunan sebagai bagian dari struktur suatu barisan dan digunakan dalam suatu spectrum matematika yang luas. Sedangkan range dari suatu barisan adalah suatu himpunan yang sifat–sifatnya dapat menolong dalam menentukan karakteristik–karakteristik dari barisan. Jika range dari barisan dinotasikan $\{a_n\}$ yang didefinisikan $\{a_n \mid n \in \mathfrak{R}\}$ dan terbatas, maka barisannya adalah $\{a_n\}$ itu sendiri. Tetapi sebaliknya, syarat perlu dari suatu barisan yang konvergen adalah terbatas. Karena mempunyai satu titik cluster (titik limit). Sehingga himpunan analog dari suatu titik cluster (titik limit) dari suatu barisan dengan pengkhususan–pengkhususan tertentu pada definisinya (Manfred, 2001:23).

Kekontinuan adalah konsep yang paling penting dalam matematika analisis, dan aplikasi–aplikasinya menduduki suatu peranan pusat dalam materi panjang selang suatu interval. Suatu fungsi yang kontinu merupakan pengertian tertentu dari suatu ukuran.

Definisi–definisi dan teorema–teorema dalam himpunan dan barisan sangat dibutuhkan dalam mengkonstruksi ukuran. Oleh sebab itu, dipergunakan

perluasan sistem bilangan real yang merupakan subyek aktual dan bagian penting untuk memulai ide yang lebih dasar serta aproksimasi dari suatu ukuran. Sehingga suatu himpunan dan barisan memicu perkembangan beberapa teori ukuran, antara lain ukuran pada ring, ukuran Hausdorff, ukuran Haar, dan ukuran Spectral. Sedangkan setiap himpunan yang mempunyai pendekatan yang baik dari himpunan-himpunan kompak (Compact sets) memperkenalkan ukuran luar (Outer measure) dan ukuran dalam (Inner measure) (Paul, 1978:73).

Teori ukuran merupakan suatu ilmu utama yang termasuk di dalam kelompok analisis dan merupakan pembahasan pokok dalam kalkulus, serta merupakan salah satu topik yang terdepan. Seperti ilmu-ilmu yang lain dalam matematika, maka teori ukuran modern bukanlah subyek mati dan masih tetap berkembang luas seperti ilmu-ilmu lainnya baik dari segi teori maupun pemakaiannya. Selain itu, konsep ukuran lebih menekankan pada variabel real dengan teori utama kalkulus modern.

Teori ukuran didasarkan pada suatu teori dari himpunan terukur. Ide dan gagasan teori ukuran berasal dari suatu himpunan yang dalam urutannya didasarkan pada ide primitif dan klasik dari ukuran (volume) suatu interval. Pendekatan alternatif dari suatu ukuran akan mempertimbangkan suatu keluarga dari himpunan dan mengasumsikan bahwa mereka semua mempunyai ukuran. Hal itu mengasumsikan bahwa setiap anggota dari himpunan dapat diklasifikasikan dalam anggota yang memenuhi dasar dan syarat dari suatu ukuran (Paul, 1978:121).

Berasal dari asumsi tersebut, maka pada tahun 1875–1944 Henry Leon Lebesgue, seorang matematikawan Prancis mencermati fenomena generalisasi panjang atau ukuran selang. Selanjutnya Lebesgue menyusun suatu ukuran yang sangat diperlukan dalam banyak wilayah matematika yang dikenal dengan nama **ukuran Lebesgue**. Ukuran Lebesgue dari A yang dinotasikan $\mu(A)$ merupakan ukuran himpunan $A \subset \mathfrak{R}$ (ukuran dari suatu bilangan real nonnegatif). Sedangkan dengan menggunakan ukuran Luar, Lebesgue menyusun teori ukuran luar Lebesgue. Ukuran luar Lebesgue ini merupakan ukuran luar yang teratur, sehingga bahwa suatu ukuran menyebabkan timbulnya ukuran luar dan bahwa ukuran luar juga menyebabkan suatu ukuran. Keduanya merupakan suatu ketentuan yang alami. Lalu dengan menggunakan ukuran dalam, Lebesgue menyusun teori ukuran dalam Lebesgue (Frank, 1993:60).

Selanjutnya Lebesgue memperluas daerah definisi ukurannya pada ukuran kumpulan terbuka dan tertutup terbatas yang mendasarkan masing–masing definisinya pada teorema Caratheodory. Kemudian dengan struktur komplit dari himpunan–himpunan, maka Lebesgue memperluas daerah definisi fungsi ukuran pada garis real atau meletakkannya dalam ruang dimensi \mathfrak{R} . Dalam hal ini suatu tugas yang nontrivial untuk menentukan terdapatnya himunan–himpunan terukur atau tidak. Fungsi–fungsi pada \mathfrak{R} diasumsikan pada sifat variasi dari garis real \mathfrak{R} . Jadi ukuran Lebesgue dinobatkan sebagai pembuka pintu teori tentang ukuran dalam garis real. Dengan menggunakan ukuran Lebesgue, maka Lebesgue menciptakan dan menyusun suatu teori integral baru yang dikenal dengan nama integral Lebesgue, sebab penerapan ukuran Lebesgue pada integral Lebesgue,

mengakibatkan bahwa integral Lebesgue memberikan perluasan indah dari integral Riemann dan integral Stieltjes, karena integral Lebesgue membuat lebih banyak fungsi dapat diintegrasikan, tetapi tidak berlaku sebaliknya. Jadi ukuran Lebesgue dalam integral Lebesgue termasuk pembahasan baru dalam analisis matematika modern (Frank, 1993:121).

Sains mengungkapkan bahwa alam semesta ini tidak terjadi secara kebetulan. "Tuhan tidak sedang bermain dadu", ungkap Albert Einstein. Semua berdasarkan perhitungan, ukuran, dan perencanaan yang matang, bahkan ketika dentuman besar pertama dimana Allah, dengan kata "Kun-Nya", Jadilah, menciptakan alam semesta dalam hitungan $t = 0$ hingga 10^{-43} detik. Stephen Hawking mengatakan "Seandainya pada saat dentuman besar terjadi kurang atau lebih cepat seperjuta detik saja, maka alam semesta tidak akan seperti ini (Abah, 2007:19).

Firman Allah dalam surat Al – Qomar ayat 49

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ

Artinya: Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran.

Berdasarkan QS Al – Qomar ayat 49, uraian dan pemaparan tersebut, dalam skripsi ini akan mengitlakan "**UKURAN LEBESGUE DALAM GARIS BILANGAN REAL**". Dibahas juga sifat-sifat dasar, teorema-teorema, dan lemma-lemma, serta pembuktian kebenarannya.

1.2. Rumusan Masalah.

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah dalam skripsi ini adalah :

Apa teorema-teorema dan bagaimana pembuktiannya pada ukuran Lebesgue dalam garis bilangan real ?

1.3. Tujuan Penulisan.

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, maka tujuan dalam penulisan skripsi ini adalah :

Menyebutkan dan mendiskripsikan, serta membuktikan teorema-teorema yang berlaku pada ukuran Lebesgue dalam garis bilangan real.

1.4. Manfaat Penulisan.

Penulisan skripsi ini bermanfaat bagi :

- 1.4.1. Penulis, yaitu sebagai penambah pengetahuan tentang teori-teori yang terkait dengan teori ukuran.
- 1.4.2. Pembaca, yaitu sebagai wahana dalam menambah khazanah keilmuan dan sebagai titik awal pembahasan yang bisa dilanjutkan atau lebih dikembangkan.
- 1.4.3. Lembaga, yaitu sebagai tambahan pengetahuan dan pustaka yang terkait dengan teori ukuran.

1.5. Batasan Masalah.

Supaya pembahasan lebih terfokus, maka dalam skripsi ini penulis membuat batasan masalah dalam pembahasan, yaitu bahwa materi ukuran Lebesgue yang dianalisis mencakup, antara lain:

12. Ukuran kumpulan terbuka terbatas,

Jika M menyatakan koleksi kumpulan terbuka terbatas dan μ menyatakan fungsi ukuran, maka $\mu: M \rightarrow \mathfrak{R}$ dibatasi oleh:

$$0 \leq \mu(G) < \infty (G \in M)$$

13. Ukuran kumpulan tertutup terbatas,

Jika H menyatakan koleksi kumpulan tertutup terbatas, maka

$$\mu: H \rightarrow \mathfrak{R} \text{ dibatasi oleh: } 0 \leq \mu(F) < \infty (F \in H);$$

14. Ukuran luar kumpulan terbatas,

$$\text{Ukuran luar, dibatasi oleh: } 0 \leq \mu^*(E) \leq \infty (E \in 2^{\mathfrak{R}});$$

15. Ukuran dalam kumpulan terbatas,

Ukuran dalam $\mu_*: 2^{\mathfrak{R}} \rightarrow \mathfrak{R}^*$, yang dibatasi

$$\text{oleh: } 0 \leq \mu_*(E) \leq \infty (E \in 2^{\mathfrak{R}}).$$

16. Kumpulan terukur terbatas,

Jika A menyatakan koleksi kumpulan terukur terbatas dan μ

menyatakan fungsi ukuran, maka $\mu: A \rightarrow \mathfrak{R}$, dibatasi oleh:

$$0 \leq \mu(E) < \infty, (E \in A).$$

Dengan menerapkan teori dan konsep secara mendetail tentang himpunan, barisan, dan fungsi kontinu. Karena himpunan, barisan, dan fungsi kontinu sangat

berkaitan, menyangkut, dan mendukung sehingga teorema dari ukuran Lebesgue terbukti kebenarannya.

1.6. Metode Penelitian.

Skripsi ini merupakan penelitian yang berjenis analisis dan dilakukan dengan cara studi literatur dengan mempelajari buku-buku teks penunjang, karya-karya ilmiah yang disajikan dalam bentuk jurnal, laporan penelitian, dan konsultasi dengan dosen pembimbing yang dalam hal ini selaku praktisi dan sekaligus pemateri atau nara sumber, baik dalam proses perencanaan, pengerjaan, revisi sampai menuju penyelesaian masalah. Dalam hal ini penulis akan membuktikan teorema-teorema pada ukuran Lebesgue dalam garis bilangan real. Selain itu, penulis akan memaparkan dan menjelaskan definisi, sifat-sifat dasar diskriptif, dan teorema-teorema dari himpunan, barisan, dan fungsi kontinu yang mendasari dan mempunyai kaitan erat dengan teorema ukuran Lebesgue.

Adapun metode penelitian penulis, yaitu suatu metode pengumpulan data yang dilakukan dengan cara mempelajari buku-buku teks sebagai sumber data yang mengandung materi-materi yang banyak berhubungan dengan analisis matematika tentang teori ukuran dalam garis bilangan real, khususnya ukuran Lebesgue, serta dalam skripsi ini penulis membuktikan teorema-teorema sebagai data dengan menentukan konsep yang diperoleh dari literatur.

Adapun teknik analisis dengan metode kualitatif, yaitu metode yang menyebutkan definisi-definisi, lalu pengumpulan teorema-teorema untuk dibuktikan kebenarannya, setelah itu mengambil contoh-contoh yang berkaitan

dengan teorema-teorema ukuran Lebesgue, menyelesaikan contoh-contoh dengan menerapkan teorema-teorema yang telah dibuktikan kebenarannya, kemudian langkah terakhir menarik kesimpulan.

1.7. Sistematika Penulisan.

Skripsi ini terdiri dari empat BAB, antara lain :

BAB I PENDAHULUAN, memuat latar belakang yang juga diintegrasikan dengan QS Al – Qomar ayat 49, rumusan masalah, tujuan penulisan, manfaat penulisan, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN TEORI, memuat definisi-definisi, teorema-teorema beserta pembuktiannya dan contoh-contoh pada konsep himpunan dan barisan, serta tafsir dan penjelasan QS Al-Qomar ayat 49.

BAB III PEMBAHASAN, memuat teorema-teorema, bukti-bukti, dan contoh-contoh ukuran Lebesgue dalam garis real, serta integrasi antara QS Al-Qomar ayat 49 dengan ukuran Lebesgue dalam garis bilangan real.

BAB IV PENUTUP, memuat kesimpulan hasil penelitian dan saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1. Himpunan Berhingga dan Himpunan Tak Berhingga.

2.1.1. Definisi :

Jika $A_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ dengan n bilangan asli, didefinisikan himpunan berhingga sebagai berikut :

Himpunan H disebut himpunan berhingga atau *finite* jika dan hanya jika $H \neq \emptyset$ atau ada himpunan A_n sedemikian hingga $H \cong A_n$ (H ekuivalen dengan A_n) untuk suatu n bilangan asli.

Berdasarkan definisi tersebut di atas bisa dikatakan suatu himpunan *finite* jika banyaknya anggota himpunan tersebut merupakan bilangan cacah tertentu.

Pada himpunan berhingga (*finit*) pengertian ekuivalen mempunyai konsekuensi bahwa $A \cong B$ (A ekuivalen dengan B) jika dan hanya jika $n(A) = n(B)$ (jumlah anggota himpunan A sama dengan jumlah anggota himpunan B). Tetapi hal ini tidak berlaku jika A dan B himpunan Tak berhingga (*infinit*) (Wahyudin, 1985:18).

Contoh :

Himpunan berhingga

1. $B = \{p, q, r, s, t\}$ adalah contoh himpunan *finit* karena $n(A) = 5$ atau $B \cong A_n$.
2. $C = \{a \mid a \text{ prima dan } 2 \leq a \leq 30\}$.

Himpunan Tak Berhingga

1. $G = \{1,3,5,7,\dots\}$.
2. $P = \{x \mid x \text{ bilangan prima}\}$.
3. $\mathfrak{R} =$ Himpunan bilangan real.
4. $I = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\} = [-1,1]$.

2.2. Operasi Himpunan yang Diperumum.

2.2.1. Definisi :

Himpunan yang dituliskan dengan lambang A_i dinamakan himpunan berindeks, dan i disebut sebagai indeks, dengan

$I = \{i \mid i \in N, N \text{ himpunan bilangan asli}\}$ disebut sebagai himpunan indeks.

Kelas dari himpunan berindeks ditulis

$\{A_i, i \in I\}$ atau $\{A_i\}_{i \in I}$ atau hanya ditulis $\{A_i\}$ (Wahyudin, 1985:8).

Contoh :

$$D_n = \{x \mid x \in N, x \text{ kelipatan dari } n \in N\};$$

$$D_n = \{1,2,3,4,\dots\};$$

$$D_n = \{2,4,6,8,\dots\};$$

$$D_n = \{3,6,9,12,\dots\} \text{ dan seterusnya.}$$

Jika operasi gabungan dan irisan dilakukan berulang dengan memperluas sifat asosiatif kepada sejumlah himpunan yang banyaknya berhingga yang termuat dalam kelas himpunan $\{A_i\}_{i \in I}$ dengan $I = \{1,2,3,\dots,n\}$, maka diperoleh :

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n.$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n.$$

2.2.2. Definisi :

$\bigcup_{i \in I} A_i$ terdiri dari unsur-unsur yang berbeda pada paling sedikit satu unsur dalam A_i dimana $i \in I$, atau lebih singkat ditulis :

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I, x \in A_i\}$$

$\bigcap_{i \in I} A_i$ terdiri dari unsur-unsur yang merupakan unsur dari setiap A_i , dimana $i \in I$, atau singkat ditulis :

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i, \forall i \in I\} \text{ (Wahyudin, 1985:9).}$$

Contoh :

1. Misalkan $A_1 = \{1,10\}$, $A_2 = \{2,4,6,10\}$, $A_3 = \{3,6,9\}$, $A_4 = \{4,8\}$, $A_5 = \{5,6,10\}$

dan jika $I = \{2,3,5\}$, maka

$$\bigcup_{i \in I} A_i = A_2 \cup A_4 \cup A_5 = \{2,3,4,5,6,8,10\}.$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = A_2 \cap A_4 \cap A_5 = \{6\}.$$

2. Misalkan $B_n = \left[0, \frac{1}{n}\right]$, $n \in N$ himpunan bilangan asli, maka

$$\bigcap_{i \in N} B_i = \{0\} \text{ dan } \bigcap_{i \in N} B_i = [0,1].$$

2.3. Penutup atau Closure.

2.3.1. Definisi :

Penutup atau closure dari A ditulis \bar{A} adalah irisan dari semua himpunan bagian tutup dari X yang memuat A .

Dengan kata lain, jika $\{F_i : i \in I\}$ adalah kelas dari semua himpunan bagian tutup dari X yang memuat A , maka

$$\bar{A} = \bigcap_i F_i$$

berdasarkan uraian tersebut tentu \bar{A} merupakan irisan dari semua himpunan tutup dan \bar{A} merupakan superset tutup terkecil yang memuat A , yaitu

$$A \subset \bar{A} \subset F$$

2.3.2. Aksioma Kuratowski :

1. $\bar{\emptyset} = \emptyset$.
2. $A \subset \bar{A}$.
3. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.
4. $\overline{\bar{A}} = \bar{A}$ (Wahyudin, 1985:31).

Contoh :

1. Misalkan $A = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$ himpunan bagian dari himpunan bilangan

real \mathfrak{R} , maka A mempunyai tepat satu titik limit yaitu 0.

$$\text{Jadi } \bar{A} = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}.$$

2. Setiap bilangan real $a \in \mathfrak{R}$ adalah titik kumpul dari himpunan bilangan rasional Q .

Jadi penutup atau closure dari Q adalah himpunan bilangan real \mathfrak{R} yaitu

$$\overline{Q} = \mathfrak{R}.$$

2.4. Partisi.

2.5.1. Definisi :

Partisi suatu himpunan adalah kelas himpunan bagian tak kosong dari suatu himpunan yang memenuhi sifat sebagai berikut :

1. Gabungan seluruh himpunan bagian dalam kelas tersebut merupakan himpunan itu sendiri.
2. Sebarang dua himpunan bagian tidak sama dari kelas tersebut saling asing.

Atau dengan kata lain jika himpunannya adalah A , maka partisi dari A adalah kelas himpunan bagian $\{ B_i \}_{i \in I}$ dari himpunan A yang memenuhi :

1. $\bigcap_{i \in I} B_i = A$ dan
2. Untuk sebarang i, j berlaku salah satu $B_i = B_j$ atau $B_i \cap B_j = \emptyset$ (Wahyudin,

1985:9).

Contoh :

1. Misalkan $A = \{ 1, 2, 3, \dots, 9, 10 \}$.

$$B_1 = \{ 1, 3 \}, B_2 = \{ 7, 8, 10 \}, B_3 = \{ 2, 5, 6 \}, \text{ dan } B_4 = \{ 4, 9 \}.$$

Kelas $B = \{ B_1, B_2, B_3, B_4 \}$ memenuhi sifat sebagai berikut :

$B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \} = A$ dan untuk sebarang i, j diman $i, j \in I = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ berlaku $B_i = B_j$ dan $B_i \cap B_j = \phi$, maka $B = \{ B_1, B_2, B_3, B_4 \}$ disebut partisi dari A .

3. Jika N himpunan asli, B himpunan bilangan genap, dan G himpunan bilangan ganjil, maka $\{ B, G \}$ merupakan partisi dari N .

2.5. Lingkungan atau Neighborhood.

2.5.1. Definisi :

Misalkan $a \in \mathfrak{R}$ dan $\varepsilon > 0$. Himpunan

$$V_\varepsilon(a) = \{x \in \mathfrak{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}.$$

disebut lingkungan ε dari a .

Lingkungan dari a adalah sebarang himpunan yang memuat lingkungan ε dari a untuk suatu $\varepsilon > 0$.

Untuk semua $a \in \mathfrak{R}$ dan $\varepsilon > 0$, maka $V_\varepsilon(a) = \{x \in \mathfrak{R} \mid a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$.

Jadi jika $y \in V_\varepsilon(a)$, berarti $a - \varepsilon < y < a + \varepsilon$.

2.5.2. Teorema :

Misal $a \in \mathfrak{R}$.

Jika $x \in \mathfrak{R}$ termuat dalam sebarang lingkungan dari a , maka $x = a$.

Bukti :

Karena x termuat dalam sebarang lingkungan dari a , maka $x \in V_\varepsilon(a)$, untuk setiap $\varepsilon > 0$.

Andaikan $x \neq a$, maka $x - a \neq 0$, sehingga $|x - a| > 0$.

Pilih $\varepsilon = |x - a|$, maka $x \in V_\varepsilon(a)$. Berarti $|x - a| < |x - a| < \varepsilon = |x - a|$.

Diperoleh $|x - a| < |x - a|$. Hal ini jelas tidak mungkin.

Jadi terbukti bahwa $x = a$.

2.5.3. Definisi :

Misalkan p adalah titik dalam X . Himpunan $N \subset X$ disebut *neighborhood* dari titik p jika dan hanya jika N adalah *superset* dari suatu himpunan buka G yang memuat p atau G_p , ditulis dengan notasi $N_{\text{neigh.p}}$. neighborhood disebut juga sebagai tetangga atau lingkungan atau sekitaran. Secara simbolik dapat didefinisikan sebagai berikut :

$N_{\text{neigh.x}} \Leftrightarrow N$ superset dari G_x dengan $x \in G_x \subset N$, dimana G_x himpunan buka yang memuat x .

Kata lain dari pernyataan " N neighborhood titik p " adalah " p titik interior dari N ".

Kelas dari semua neighborhood dari $p \in X$ ditulis N_p dan disebut "Sistem Tetangga" dari p (Abdusysyahir, 2006:33).

Contoh :

1. Misalkan $a \in \mathfrak{R}$ dimana \mathfrak{R} himpunan bilangan riil. Maka setiap interval tertutup $[a - \delta, a + \delta]$ dengan pusat a adalah neighborhood dari a , karena interval tersebut memuat interval buka $(a - \delta, a + \delta)$ yang memuat a .
2. Demikian juga jika $p \in \mathfrak{R}^2$, maka setiap daerah tutup $\{q \in \mathfrak{R}^2 \mid d_{(p,q)} \leq \delta, \delta > 0\}$ dengan pusat p juga neighborhood dari p

karena daerah tutup tersebut memuat daerah buka atau cakram buka dengan pusat p .

Untuk sistem lingkungan N_p dari suatu titik $p \in X$ ada 4 sifat yang disebut sebagai " Aksioma Neighborhood " seperti dinyatakan dalam proporsisi sebagai berikut :

1. $N_p \neq \emptyset$ dan p termasuk ke dalam tiap anggota N_p .
2. Irisan dari dua anggota N_p termasuk dalam N_p .
3. Setiap superset dari anggota N_p termasuk dalam N_p .
4. Setiap anggota $N \in N_p$ adalah superset dari anggota $G \in N_p$ dengan G adalah neighborhood dari setiap titik dari G , yaitu $G \in N_p$, untuk setiap $g \in G$ (Wahyudin, 1985:35).

2.6. Sifat Kelengkapan pada \mathfrak{R} .

2.6.1. Definisi :

Misalkan $E \subseteq \mathfrak{R}$.

E disebut **terbatas di atas** (*bounded above*) jika terdapat $v \in \mathfrak{R}$ sehingga

$$x \leq v$$

untuk semua $x \in E$, dan v disebut **batas atas** (*upper bound*) untuk E .

E disebut **terbatas dibawah** (*bounded below*) jika terdapat $u \in \mathfrak{R}$ sehingga

$$u \leq x$$

untuk semua $x \in E$, dan u disebut **batas bawah** (*lower bound*) untuk E .

E disebut **terbatas** (*bounded*) jika terbatas diatas dan terbatas dibawah (Abdusysyagir, 2006:34).

Contoh :

1. Misalkan $A = \{1,2,3,4,5,6\}$. Himpunan A terbatas di atas karena $a \leq 6$, untuk semua $a \in A$. Himpunan A juga terbatas di bawah karena $0 \leq a$, untuk semua $a \in A$. Semua bilangan real $u \leq 6$ merupakan batas atas untuk A , dan semua bilangan real $u \leq 1$ merupakan batas bawah untuk A . Jadi, himpunan A adalah terbatas.
2. Himpunan bilangan asli $N = \{1,2,3,4,\dots\}$ terbatas di bawah dan 1 merupakan batas bawah, tetapi tidak terbatas di atas. Jika diberikan $v \in \mathfrak{R}$, maka terdapat $n \in N$ sehingga $n > v$.
3. Himpunan $E = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\} = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in N\right\}$ terbatas di atas oleh sebarang bilangan real $v \geq 1$ dan terbatas di bawah oleh sebarang bilangan real $u \leq 0$. batas atas terkecil adalah 1 dan batas bawah terbesar adalah 0.
4. Himpunan kosong, yaitu \emptyset , terbatas di atas dan terbatas di bawah oleh semua bilangan $x \in \mathfrak{R}$. Dengan demikian, \emptyset tidak mempunyai batas atas terkecil dan batas bawah terbesar.

2.6.2. Definisi :

Misalkan $E \subseteq \mathfrak{R}, E \neq \emptyset$, dan terbatas di atas. $v \in \mathfrak{R}$ disebut **batas atas terkecil** (*supremum*) dari E jika

1. $x \leq v$, untuk semua $x \in E$.
2. $v \leq s$, untuk semua s batas atas dari E .

Definisi di atas menyatakan bahwa agar $v \in \mathfrak{R}$ menjadi supremum dari E , maka (1) v haruslah batas atas dari E , dan (2) v selalu kurang dari batas atas yang lain dari E .

2.6.3. Definisi :

Misalkan $E \subseteq \mathfrak{R}, E \neq \emptyset$, dan terbatas di atas. $u \in \mathfrak{R}$ disebut **batas bawah**

terbesar (*infimum*) dari E jika :

1. $u \leq x$, untuk semua $x \in E$.
2. $s \leq u$, untuk semua s batas atas dari E .

Definisi di atas menyatakan bahwa agar $u \in \mathfrak{R}$ menjadi infimum dari E maka (1) u haruslah batas bawah dari E , dan (2) u selalu lebih dari batas bawah yang lain di E .

Suatu himpunan paling banyak mempunyai satu supremum atau infimum. Jika supremum dan infimum dari suatu himpunan E ada, maka masing – masing dinotasikan

$$\sup E \text{ dan } \inf E$$

2.6.4. Aksioma Sifat Supremum pada \mathfrak{R} .

Setiap himpunan tak kosong di \mathfrak{R} dan terbatas di atas mempunyai supremum.

2.6.5. Teorema :

Setiap himpunan tak kosong di \mathfrak{R} dan terbatas di bawah mempunyai infimum.

Bukti :

Misalkan $E \subseteq \mathfrak{R}, E \neq \emptyset$, dan terbatas di bawah.

Definisikan $S = \{-x \mid x \in E\}$. Jika u batas bawah dari E , maka

$$u \leq x, \text{ untuk semua } x \in E.$$

Diperoleh

$$-x \leq -u, \text{ untuk semua } x \in E.$$

Jadi $(-u)$ adalah batas atas dari S .

Karena S tidak kosong dan terbatas di atas, maka S mempunyai supremum.

Jika v adalah supremum dari S , maka $(-v)$ adalah infimum dari E .

2.6.6. Teorema: (Sifat Archimedes).

Jika $x \in \mathfrak{R}$, maka terdapat bilangan asli $n \in N$ sehingga $x < n$.

Bukti :

Misalkan $x \in \mathfrak{R}$, dan andaikan tidak ada $n \in N$ sehingga $x < n$. Berarti, untuk semua $n \in N$ berlaku $n \leq x$.

Jadi, N terbatas di atas oleh x .

Karena $N \neq \emptyset$ dan terbatas di atas maka N mempunyai supremum, sebut $v \in \mathfrak{R}$.

Karena $v - 1 < v$, maka ada $m \in N$ sehingga $v - 1 < m$.

Diperoleh

$$v < m + 1$$

Karena $m + 1 \in N$, berarti v bukan batas atas dari N . Kontradiksi dengan v supremum dari N .

Terbukti terdapat bilangan asli $n \in N$ sehingga $x < n$.

2.6.7. Teorema: (Sifat Kepadatan pada \mathfrak{R})

Misalkan $x, y \in \mathfrak{R}$ dengan $x < y$. Maka ada bilangan rasional r sehingga

$$x < r < y.$$

Bukti :

Tanpa mengurangi sifat keumuman, misalkan $x > 0$, karena $y - x > 0$, maka

terdapat $n \in \mathbb{N}$ sehingga $\frac{1}{y-x} < n$. Diperoleh $ny - nx > 1$ atau $ny > nx + 1$

Karena $nx > 0$, maka terdapat $m \in \mathbb{N}$ sehingga $m - 1 < nx < m$, sehingga $m < nx + 1$. Jadi diperoleh $m < ny$.

Jadi $nx < m < ny$, dan dengan mengambil $r = \frac{m}{n}$ diperoleh $x < r < y$

(Abdusyaykir, 2006:38).

2.7. Interval.

Definisi :

Himpunan bilangan real \mathfrak{R} dapat digambarkan dalam garis lurus yang disebut sebagai garis bilangan real.

Misalkan $a, b \in \mathfrak{R}$, dengan $a < b$, suatu himpunan bilangan real sebagai berikut:

$$A_1 = \{x \in \mathfrak{R} \mid a < x < b\}.$$

$$A_2 = \{x \in \mathfrak{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

$$A_3 = \{x \in \mathfrak{R} \mid a < x \leq b\}.$$

$$A_4 = \{x \in \mathfrak{R} \mid a \leq x < b\}.$$

Himpunan bilangan real tersebut menyatakan suatu interval atau selang, secara berurutan dinyatakan sebagai berikut :

$A_1 = (a, b)$ disebut sebagai *interval terbuka*, tidak termasuk kedua titik ujung.

$A_2 = [a, b]$ disebut sebagai *interval tertutup*, termasuk kedua titik ujung.

$A_3 = (a, b]$ disebut sebagai *interval buka–tutup*, tidak termasuk titik ujung a , tetapi termasuk ujung b .

$A_4 = [a, b)$ disebut sebagai *interval tutup–buka*, termasuk titik ujung a , tetapi tidak termasuk ujung b .

Suatu interval yang memuat sebarang titik x biasanya dilambangkan dengan I_x .

Sedangkan himpunan bilangan real berikut :

$$B_1 = \{x \in \mathfrak{R} \mid x > a\} = (a, \infty).$$

$$B_2 = \{x \in \mathfrak{R} \mid x \geq a\} = [a, \infty).$$

$$B_3 = \{x \in \mathfrak{R} \mid x < a\} = (-\infty, a).$$

$$B_4 = \{x \in \mathfrak{R} \mid x \leq a\} = (-\infty, a].$$

$$B_5 = \{x \mid x \in \mathfrak{R}\} = (-\infty, \infty).$$

Disebut sebagai interval tak berhingga atau interval tak terbatas (*unbounded*)

Sifat–sifat interval :

Misalkan M adalah kelas dari semua interval pada garis real, termasuk di dalamnya \emptyset dan interval tunggal $a = [a, a]$. Maka interval memiliki sifat–sifat sebagai berikut :

1. Irisan dua interval adalah interval, yaitu :

$$\text{Jika } I_1 \in M \text{ dan } I_2 \in M, \text{ maka } I_1 \cap I_2 \in M.$$

2. Gabungan dua interval yang tidak saling asing adalah interval, yaitu :

$$\text{Jika } I_1 \in M \text{ dan } I_2 \in M, \text{ dan } I_1 \cap I_2 \neq \emptyset, \text{ maka } I_1 \cup I_2 \in M.$$

3. Selisih dua interval yang tidak dapat dibandingkan adalah interval, yaitu :

Jika $I_1 \in M$ dan $I_2 \in M$, dan $I_1 \not\subset I_2, I_2 \not\subset I_1$, maka $I_1 - I_2 \in M$

(Manfred, 2001:13).

Contoh :

Misalkan $I_1 = [2,4)$ dan $I_2 = (3,8)$, maka

$$I_1 \cap I_2 = (3,4) \text{ dan } I_1 \cup I_2 = [2,8)$$

$$I_1 - I_2 = [2,3] \text{ dan } I_2 - I_1 = [4,8)$$

2.7.1. Definisi :

Interval $I_n, n \in N$ disebut interval bersarang (*nested interval*) jika

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \dots$$

Contoh :

Jika $I_n = [0,1], n \in N$, maka $I_n \supseteq I_{n+1}$ untuk masing-masing $n \in N$.

Demikian, maka $I_n = \left[0, \frac{1}{n}\right], n \in N$ adalah interval bersarang.

Interval $M_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right], n \in N$ juga merupakan interval bersarang.

Hal ini dapat dibuktikan, yaitu :

$$M_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \text{ setiap } n \in N.$$

$$I_1 = (-1,1)$$

$$I_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$I_3 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Sehingga $I_n \supseteq I_{n+1}$.

Jadi terbukti bahwa $M_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right], n \in \mathbb{N}$ juga merupakan interval bersarang

(Abdusysykir, 2006:39).

2.8. Titik Interior dan Himpunan Buka dalam \mathfrak{R} .

2.8.1. Definisi:

Misalkan $E \subseteq \mathfrak{R}, p \in E$ disebut titik interior dari E jika terdapat lingkungan dari p sehingga $V \subseteq E$. Himpunan semua titik interior dari E dinotasikan dengan $\text{int}(E)$, dan disebut interior dari E .

Perlu diingat kembali bahwa lingkungan V dari titik p adalah himpunan yang memuat $V_\varepsilon(p)$, untuk suatu $\varepsilon > 0$. Dengan demikian, dapat dikatakan $p \in E$ adalah titik interior dari E jika terdapat $\varepsilon > 0$ sehingga $V_\varepsilon(p) \subseteq E$.

Contoh :

Misalkan $E(a, b]$ dengan $a < b$. Setiap titik p sehingga $a < p < b$ adalah titik interior dari E . Titik b bukan titik interior karena untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka $V_\varepsilon(b) = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ memuat titik yang bukan anggota E .

2.8.2. Definisi:

Misalkan $E \subseteq \mathfrak{R}$.

E disebut himpunan buka di \mathfrak{R} jika semua titik di E adalah titik interior dari E .

Contoh :

1. Interval terbuka (a,b) di \mathfrak{R} adalah himpunan buka di \mathfrak{R} . Himpunan bilangan real \mathfrak{R} adalah himpunan buka dan himpunan kosong \emptyset adalah himpunan buka di \mathfrak{R} .

Sebab kita dapat mengambil $I_p = A(\forall p \in A)$ yang berarti terpenuhi

$$p \in I_p = A, \text{ berarti pula } p \in I_p \subset A.$$

2. Himpunan semua bilangan real \mathfrak{R} sendiri merupakan himpunan buka. Sebab setiap titik di \mathfrak{R} tentu titik interior, yaitu ada interval terbuka yang memuatnya dan ia himpunan bagian \mathfrak{R} , yaitu $p \in I_p \subset \mathfrak{R}$.

3. Interval tertutup $B = [a,b]$ bukan himpunan buka. Sebab untuk sebarang interval terbuka yang memuat a dan b , yaitu $(a,b) \subset \mathfrak{R}$, memuat titik di luar B . Atau dengan kata lain titik a maupun b tidak dapat termuat dalam interval terbuka (a,b) bagian dari \mathfrak{R} . Dalam hal ini titik ujung a dan b bukan titik interior.

4. Himpunan kosong \emptyset adalah himpunan buka. Sebab tidak ada titik di \emptyset yang bukan titik interior.

Atau $(\forall x \in B). x \text{ titik interior} \Rightarrow B \text{ terbuka}$. (ini benar berdasarkan definisi).

Untuk $(\forall x \in \emptyset). x \text{ titik interior} \Rightarrow \emptyset \text{ terbuka}$. (secara logika implikasi tersebut benar walaupun alasannya salah).

5. Semua interval tak berhingga dalam \mathfrak{R} adalah himpunan terbuka.

$$\{x \mid x > a\} = (a, \infty)$$

$$\{x \mid x < a\} = (-\infty, a)$$

$$\{x \mid x \in \mathfrak{R}\} = (-\infty, \infty) = \mathfrak{R}$$

Sedangkan interval tertutup yang tidak berhingga bukan himpunan buka, yaitu $[a, \infty), (-\infty, a]$ karena $a \in \mathfrak{R}$ bukan titik interior dari $[a, \infty), (-\infty, a]$.

Berikut dibuktikan teorema yang merupakan *Teorema Fundamental* tentang himpunan buka.

2.8.3. Teorema :

1. Gabungan dari himpunan buka dalam \mathfrak{R} adalah himpunan buka, yaitu jika G_k buka, maka $\bigcup_i G_i$ buka.
2. Irisan dari himpunan buka yang banyaknya berhingga adalah himpunan buka, yaitu jika G_k buka, maka $\bigcap_i G_i$ buka, dimana i bilangan asli tertentu (berhingga).

Bukti :

1. $\{G_i\}$ keluarga himpunan buka dalam \mathfrak{R} . Ambil sebarang $x \in G_k$. Karena G_k terbuka, maka x merupakan titik interior dari G_k atau ada interval terbuka I_k sedemikian hingga $x \in I_k \subset \bigcup_i G_i$, sehingga $\bigcup_i G_i$ buka.
2. Misalkan diketahui sebarang kelas himpunan $\{G_1, G_2, G_3\} x \in \bigcap_1^3 G_i$. Jika G_i buka, maka $(\exists I_{ix}). x \in S_{ix} \subset G_i, i = 1, 2, 3$.

Jika $\bigcap_i G_i = \emptyset$, jelas \emptyset adalah buka.

$x \in \bigcap_i G_i$ tentu

Andaikan $S_{ix} = (a_i, b_i), i = 1, x \in G_i, i = 1, 2, 3$.

Ambil $\lambda = \sup.(a_1, a_2, a_3), \lambda = a_k$ dengan $d_{(a_k, x)}$ minimum,

$\mu = \inf (b_1, b_2, b_3)$, $\mu = b_k$ dengan $d_{(b_k, x)}$ maksimum.

Tentu $x \in (\lambda, \mu) \subset \bigcap_i G_i$ dengan $n = 3$. maka $\bigcap_i G_i$ buka.

Untuk $\{G_i\}$ dimana $G_i = \left(-\frac{1}{x}, \frac{1}{x}\right)$ dengan $i = 1, 2, 3, \dots$ akan

diperoleh $\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i = \{0\}$ tidak buka (Wahyudin, 1987:38).

2.9. Titik Limit.

2.9.1. Definisi :

Misalkan $S \subseteq \mathfrak{R}$.

$x \in \mathfrak{R}$ disebut titik cluster atau titik limit dari S jika masing-masing lingkungan- ε dari x memuat $y \in S$ dengan $x \neq y$.

$x \in S$ yang bukan titik cluster disebut titik terisolasi dan S .

Pada definisi titik limit atau titik cluster, tidak diharuskan bahwa x adalah unsur di S . Sesuai definisi, $x \in \mathfrak{R}$ adalah titik limit dari S jika

$$V_{\tau}(x) \cap S \setminus \{x\} \neq \emptyset$$

Untuk setiap $\varepsilon > 0$. Berdasarkan definisi, dapat juga dinyatakan bahwa $x \in S$ adalah titik terisolasi jika terdapat $\varepsilon > 0$ sehingga

$$V_{\tau}(x) \cap S = \{x\}$$

Contoh :

1. Jika S adalah interval buka $(0,1)$, maka semua titik pada interval tutup $[0,1]$ adalah titik limit dari S . Perhatikan bahwa 0 dan 1 bukan titik di S .

2. Semua *singleton*, yaitu himpunan yang hanya memuat satu unsur, tidak mempunyai limit.
3. Sebarang himpunan berhingga tidak mempunyai titik limit. Himpunan bilangan asli N tidak mempunyai titik limit meskipun N adalah himpunan tak berhingga.
4. Himpunan $S = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in N \right\}$ mempunyai satu titik limit, yaitu 0.

2.9.2. Definisi lain :

Misalkan $A \subset \mathfrak{R}$, dimana \mathfrak{R} himpunan bilangan real. Suatu titik $p \in \mathfrak{R}$ disebut titik limit (*limit point*) atau titik kumpul (*accumulation point*) dari A jika dan hanya jika setiap himpunan buka G yang memuat p yang biasa ditulis G_p , memuat anggota A yang bukan p .

Secara simbolik didefinisikan sebagai berikut :

Titik $p \in \mathfrak{R}$ merupakan titik limit A jika dan hanya jika $(\forall G_p \text{ buka}).$

$$G_p \cap A - \{p\} \neq \emptyset \text{ atau } (\forall G_p \text{ buka}). (A \cap G_p - \{p\}) \neq \emptyset.$$

Himpunan titik–titik limit dari A disebut himpunan *derived* A ditulis A' .

Dari pengertian titik limit tersebut jika dibandingkan dengan definisi titik limit pada ruang matriks sebenarnya tidak berbeda isi, hanya berbeda term atau istilah *neighborhood* yang ternyata juga himpunan buka.

Contoh :

1. Dalam (\mathfrak{R}^1, d) dengan $d_{(a,b)} = |a - b|$

Jika $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n = 1, 2, 3, \dots \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}$, maka 0 adalah titik limit dari A

karena sebarang himpunan buka G dengan $0 \in G$ memuat interval terbuka $(-a_1, a_2) \subset G$ dengan $-a_1 < 0 < a_2$ memuat titik-titik dari A .

Sehingga titik limit 0 dari A tidak termasuk dalam A , demikian juga bahwa A tidak memuat titik-titik limit yang lainnya. Jadi himpunan derivednya merupakan singleton, yaitu $A' = \{0\}$.

2. Misalkan $Q = \{x \mid x \text{ bilangan rasional}\}$. Setiap bilangan $p \in \mathbb{R}$ tentu merupakan titik limit dari Q , sebab setiap himpunan buka memuat bilangan rasional yang merupakan titik dari q .
3. Himpunan bilangan bulat $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ tidak mempunyai titik limit, sehingga $Z' = \emptyset$.

2.9.3. Teorema Bolzano Weierstrass.

Ada atau tidaknya titik-titik limit untuk macam-macam himpunan merupakan pertanyaan yang penting. Karena dalam kenyataannya tidak setiap himpunan mempunyai titik limit. Teorema berikut yang dinamakan Teorema Bolzano - Weierstrass akan memberikan gambaran tentang permasalahan tersebut.

2.9.4. Teorema:

Jika himpunan A tak berhingga dan terbatas atau bounded dari bilangan real, maka sekurang-kurangnya A mempunyai satu titik limit.

Bukti :

Bounded, berarti tentu ada interval tertutup $[a, b]$ yang memuat A , atau $A \subset [a, b]$.

Ambil $c = \frac{a+b}{2}$. Dibentuk $[a, c], [c, b]$ ambil yang memuat tak hingga anggota

A , misalkan $[a, c]$ namakan $[a_1, b_1]$.

Kemudian ambil $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ dan seterusnya seperti proses di atas.

Akan diperoleh $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots$, masing-masing memuat tak hingga elemen A .

Panjang interval $[a_n, b_n]$ adalah $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$. Ini mendekati 0 jika $n \rightarrow \infty$

jadi semua interval $[a_n, b_n]$ memuat titik x_0 sedemikian hingga $\lim a_n = \lim b_n = x_0$. Titik x_0 inilah titik limit dari A sebab untuk setiap interval

$[\overline{a_n}, \overline{b_n}] \supset [a_n, b_n]$, sehingga $x_0 \in (\overline{a_n}, \overline{b_n})$.

Jadi benar sekurang-kurangnya ada satu titik limit dari A (Wahyudin, 1987:38).

2.10. Himpunan Tertutup.

2.10.1. Definisi:

$A \subset \mathfrak{R}$ disebut himpunan tertutup atau himpunan tutup (*closed set*) jika dan hanya jika komplemen A yaitu A^c himpunan buka.

2.10.2. Teorema :

A tertutup jika dan hanya jika titik limit dari A termuat di A .

Bukti :

1. A tertutup maka titik limit dari a termuat di A .

A tertutup berarti A^c terbuka, oleh karena itu $(\forall b \in A^c)$ b titik interior A^c .

Berarti $(\exists I_b), b \in I_b \subset A^c$, sehingga diperoleh $I_b \cap A = \emptyset$, yang juga berarti tidak semua I_b memuat elemen A . Jadi b bukan titik limit A^c atau titik limit A tidak di A^c , tetapi harus di A .

2. Titik limit A termuat di A maka A tertutup.

Ambil $b \in A^c$

b bukan titik limit a , jadi $(\exists I_b), b \in I_b$ dan $I_b \cap A = \emptyset$

jadi $b \in I_b \subset A^c$, yang berarti A^c terbuka, maka A tertutup.

Contoh :

1. Interval tertutup $[a, b]$ adalah himpunan tertutup, sebab :

Lihat komplementnya $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$ merupakan interval terbuka, berarti merupakan himpunan buka.

Jadi $[a, b]$ merupakan himpunan tertutup.

2. Himpunan $a = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$ adalah tidak tertutup karena 0 adalah titik

limit dari A dan $0 \notin A$.

3. \emptyset dan \mathbb{R} adalah himpunan tertutup karena \emptyset^c dan \mathbb{R}^c masing-masing merupakan himpunan buka.

- Interval buka–tutup $a = (a, b]$ adalah titik buka karena $b \in A$ bukan titik interior dari A , dan A tidak tutup karena $a \notin A$ bukan titik limit dari A (Wahyudin, 1987:42).

2.11. Himpunan Denumarabel dan Kontabel.

2.11.1. Definisi :

- Sebarang himpunan X disebut *denumarabel* jika dan hanya jika X ekuivalen dengan himpunan bilangan asli N , yaitu $X \cong N$.
- Suatu himpunan disebut *kontabel* jika dan hanya jika himpunan tersebut berhingga atau *denumarabel* (*enumerabel*).
- Suatu himpunan dikatakan *non–denumarabel* jika dan hanya jika himpunan tersebut tak berhingga dan tidak ekuivalen dengan himpunan bilangan asli N , berarti himpunan tersebut tidak *kontabel*.

Contoh :

- Himpunan dari barisan tak hingga a_1, a_2, \dots dari unsur–unsur yang berbeda merupakan himpunan yang *denumarabel*, karena barisan tersebut terdapat fungsi *bijeksi* dari domain himpunan bilangan asli N dengan rumus $f(n) = a_n$.
- Himpunan–himpunan $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$, $\{1, -2, 3, -4, 5, \dots, (-1)^{n-1}n, \dots\}$ dan himpunan $\{(1,1), (4,8), (9,27), \dots, (n^2, n^3), \dots\}$ juga himpunan *denumarabel*.
- Hasil kali himpunan $N \times N$ dengan N himpunan bilangan asli, maka barisannya dapat dinyatakan sebagai himpunan tak hingga

$N \times N = \{(1,1), (2,1), (1,2), (1,3), (2,2), \dots\}$, sehingga himpunan $N \times N$ juga menunjukkan himpunan *denumerabel*.

4. Misalkan $S = \{1^2, 2^2, 3^2, \dots\}$, Maka fungsi $f(n) = n^2$ adalah fungsi satu-satu dari S pada N . Jadi $S \cong N$ dan dengan demikian S *kontabel*.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa himpunan bilangan bulat Z adalah *kontabel*. Untuk menunjukkan bahwa $N \cong Z$, dapat juga dilakukan dengan menunjukkan bahwa $Z \cong N$. Definisikan fungsi f dari Z ke N dengan

$$F(x) = \begin{cases} \frac{n}{2} & (n \text{ genap}) \\ -\frac{(n-1)}{2} & (n \text{ ganjil}) \end{cases}$$

Maka fungsi f adalah *bijeksi* dari Z ke N . Dengan demikian, maka $Z \cong N$.

Jadi Z adalah *kontabel*.

2.11.2. Teorema :

Jika $f : A \rightarrow B$ adalah fungsi satu-satu dan B *kontabel*, maka A *kontabel*.

Bukti :

Jelas bahwa A berhingga (*finit*).

Andaikan A tak berhingga (*infinite*).

Sekarang $A \cong f(A)$, dimana $f(A)$, adalah *range* dari f .

Sehingga *infinite*.

Karena $f(A), f(A) \subseteq B$, maka B infinite (suatu himpunan *finit* tidak mempunyai subset-subset *infinite*).

Berdasarkan hipotesis, maka B *kontable* dan B harus *infinite kontabel*.

Misalkan $Q: N \rightarrow B$ fungsi *bijektif* (fungsi satu-satu dan *onto*) dan ditunjukkan bahwa $b_n = Q(n)$ untuk setiap $n \in N$.

Maka $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$

Sekarang andaikan k_1 bilangan asli pertama sedemikian hingga $b_{k_1} \in f(A)$.

Andaikan k_2 bilangan asli pertama yang lebih besar dari k_1 , sedemikian hingga $b_{k_2} \in f(A)$.

Andaikan k_3 bilangan asli pertama yang lebih besar dari k_2 sedemikian hingga $b_{k_3} \in f(A)$ dan seterusnya. Maka $f(A) = \{b_{k_1}, b_{k_2}, b_{k_3}, \dots\}$.

Definisikan $g: f(A) \rightarrow N$ dengan $g(b_{k_j}) = j$, untuk $j = 1, 2, 3, \dots$

Jelas bahwa g fungsi satu-satu dan *onto* (*bijektif*)

Tetapi jika f fungsi satu-satu dari A fungsi *onto* $f(A)$. Oleh karena itu, $g \circ f$ adalah fungsi satu-satu dari A dan fungsi *onto* N .

Berdasarkan $A \cong N$.

Akibatnya A adalah *kontabel*.

2.11.4. Corollary:

Setiap himpunan bagian dari himpunan *kontabel* adalah himpunan yang *kontabel*.

2.11.5. Teorema:

Jika A dan B *infinite kontabel*, maka $A \times B$ *infinite kontable*.

Bukti:

Karena A dan B himpunan *infinite countable* dapat ditulis $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ dan

$$B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$$

Untuk suatu fungsi korespondensi satu-satu antara $A \times B$, dan N dinyatakan, yaitu:

$$(a_1, b_1)(a_1, b_2)(a_1, b_3) \dots$$

$$(a_2, b_1)(a_2, b_2)(a_2, b_3) \dots$$

$$(a_3, b_1)(a_3, b_2)(a_3, b_3) \dots$$

.....

elemen-elemen pada $A \times B$ didefinisikan dengan fungsi $Q: A \times B \rightarrow N$

Maka fungsi satu-satu dari $A \times B$ yang *onto* ke N .

Jadi $A \times B$ *infinite countable*.

2.11.6. Teorema:

Untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$, dimana $a < b$, interval terbuka (a, b) dan *uncountable*.

Bukti :

Jelas bahwa (a, b) *infinite*, maka terdapat suatu korespondensi satu-satu

$Q: N \rightarrow (a, b)$ dan elemen-elemen dalam (a, b) dinyatakan dengan

$(a, b) = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ dimana $x_n = Q(n)$ untuk setiap $n \in N$.

Hal ini kontradiksi dengan $x \in (a, b)$ yang tidak dinyatakan dalam x_1, x_2, x_3, \dots, x tidak di range Q .

Sehingga dikontradiksikan bahwa Q onto pada (a, b) .

Pertama didefinisikan $y_1 = x_1$, misalkan $y_2 = x_j$, dimana j adalah bilangan asli pertama yang lebih besar dari 1, sedemikian hingga $x_j < y_1$.

Jika tidak terdapat j , maka setiap bilangan $x \in (a, y_1)$ hilang dari pernyataan sebelumnya.

Kemudian misalkan $y_3 = x_k$, dimana k adalah bilangan asli yang lebih besar dari pada j , sedemikian hingga $x_k \in (y_2, y_1)$.

Jika tidak terdapat k , maka setiap bilangan real $x_k \in (y_2, y_1)$ hilang dari pernyataan sebelumnya.

Kemudian misalkan $y_4 = x_l$, dimana l adalah bilangan asli pertama yang lebih besar dari pada k , sedemikian hingga $x_l \in (y_2, y_3)$.

Jika terdapat l , maka setiap bilangan real $x \in (y_2, y_3)$ hilang dari daftar semula.

Kemudian misalkan $y_5 = x_m$, dimana m adalah bilangan asli pertama yang lebih besar dari l , sedemikian hingga $x_m \in (y_4, y_3)$.

Jika terdapat m , maka setiap bilangan real $x \in (y_4, y_3)$ hilang dari pernyataan semula.

Proses selanjutnya pilih y_{n+1} untuk meneruskan pendekatan nilai x dalam x_1, x_2, x_3, \dots diantara y_n dan y_{n-1} jika ada suatu nilai.

Sehingga untuk bilangan genap memenuhi $y_2 < y_4 < y_6 < \dots$, sedangkan bilangan ganjil memenuhi $y_1 > y_3 > y_5 > \dots$

Maka himpunan $\{y_2, y_4, y_6, \dots\}$ terbatas di atas atau $x = \sup\{y_2, y_4, y_6, \dots\}$ ada.

Sekarang jika $x = y_{2n}$ untuk beberapa $n \in N$, maka $x < y_{2n+2}$, hal ini kontradiksi dengan kenyataan bahwa x batas atas dari himpunan $\{y_2, y_4, y_6, \dots\}$

Oleh karena itu, $x > y_{2n}$ untuk setiap $n \in N$.

Jika $x = y_{2n-1}$ untuk setiap $n \in N$, maka $x > y_{2n+1}$

Sehingga kontradiksi dari fakta bahwa x terbatas di atas dari himpunan $\{y_2, y_4, y_6, \dots\}$ dari nilai x dalam daftar x_1, x_2, x_3, \dots

Akibatnya x tidak terlihat dalam daftar x_1, x_2, x_3, \dots

Tetapi jelas bahwa $x \in (y_2, y_1) \subset (a, b)$ dan x dalam (a, b) tidak dalam *range* dari Q .

Sehingga (a, b) *unkontabel*.

Sedangkan untuk interval I yang terdiri dari beberapa interval terbuka (a, b) dan karena itu setiap I *unkontabel*.

Jadi untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$, dimana $a < b$, interval terbuka (a, b) dan *unkontabel* (Abdusysyahir, 2006:42).

2.12. Compact sets: Teorema Heine – Borel.

2.12.1. Definisi:

A himpunan, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ adalah kompak jika dan hanya jika memenuhi pernyataan berikut:

Jika $A \subset \bigcup_{i \in I} G_i$ dan setiap G_i terbuka, maka terdapat $i_1, \dots, i_n \in I$ sedemikian

hingga $A \subset \bigcup_{k=1}^n G_{i_k}$.

2.12.2. Teorema Heine – Borel:

A himpunan di \mathfrak{R}^n adalah kompak jika dan hanya jika himpunan tersebut tertutup dan terbatas.

Bukti :

Asumsikan A kompak.

Akan dibuktikan bahwa A tertutup dan terbatas.

Untuk menunjukkan bahwa A tertutup, harus dibuktikan bahwa A^c terbuka.

Ambil $x \in A^c$, maka himpunan–himpunan terbuka didefinisikan

$$G_k = \{y \mid d(x, y) > k^{-1}\} \quad k = 1, 2, \dots$$

Karena gabungan dari himpunan–himpunan G_k adalah $\mathfrak{R}^n \cong \{x\}$.

Berdasarkan hal tersebut, maka A termasuk atau terkandung di dalam gabungan ini.

Karena A kompak, maka A harus termasuk di dalam gabungan suatu bilangan berhingga (*finit*) dari himpunan–himpunan G_k .

Karena himpunan–himpunan ini membentuk suatu barisan, maka terdapat k sedemikian hingga $a \subset G_k$.

Tetapi hal ini berakibat $G_k^c \subset A^c$ yang dapat didefinisikan

$$G_k^c = \{y \mid d(x, y) \leq k^{-1}\} \subset A^c \quad k = 1, 2, \dots$$

Oleh karena itu x adalah titik interior dari A^c .

Dan terbukti bahwa A^c adalah himpunan buka.

Jadi terbukti bahwa A adalah himpunan tertutup.

Kemudian akan dibuktikan bahwa A adalah jika A *kompak*, maka A terbatas.

Bukti:

Asumsikan A tertutup dan terbatas dan asumsikan bahwa A tidak *kompak*.

Jika a tidak *kompak*, maka terdapat suatu koleksi dari himpunan-himpunan terbuka G_i sedemikian hingga $A \subset \bigcup_{i \in I} G_i$, tetapi koleksi gabungan G_i yang mengandung A bukan koleksi finit.

Berarti $\bigcup_{i \in I} G_i$ yang mengandung A adalah koleksi *infinit*.

Sehingga $\bigcup A \neq \emptyset$ dan $\bigcup A \neq N_n$, untuk suatu $n \in N$.

Karena $\bigcup_{i \in I} G_i$ koleksi *infinit* dan A adalah himpunan tertutup.

Berdasarkan teorema tertutup:

A tertutup jika dan hanya jika titik limit dari a termuat di A .

Ambil $i \in \mathfrak{R}$ titik limit dari A , maka setiap himpunan buka G yang memuat i yang ditulis G_i memuat anggota A yang bukan i .

Ambil interval tertutup $[a, b] \in G_i$

Sehingga $[a, b]$ memuat A atau $A \subset [a, b]$

Dan karena A terbatas di atas dan terbatas di bawah, maka A dikatakan terbatas (*bounded*) (Frank, 1993:23).

2.13. Barisan Monoton.

2.13.1. Definisi:

Misalkan $X = (x_n)$ adalah barisan bilangan real.

$X = (x_n)$ disebut monoton naik (monoton tidak turun) jika

$$x_n \leq x_{n+1},$$

Untuk semua $n \in N$.

$X = (x_n)$ disebut monoton turun (monoton tidak naik) jika

$$x_n \geq x_{n+1},$$

Untuk semua $n \in N$.

$X = (x_n)$ disebut monoton jika monoton naik atau monoton turun.

Contoh :

Barisan $X = (x_n) = (2, 4, 6, \dots, 2n, \dots)$ adalah monoton naik.

Barisan $Y = (y_n) = (-1, -2, -3, \dots, -n, \dots)$ adalah monoton turun.

Barisan $Z = (z_n) = (-1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots)$ adalah tidak monoton naik dan tidak monoton turun.

2.13.2. Teorema:

Jika $X = (x_n)$ barisan bilangan real yang monoton naik dan terbatas di atas, maka $X = (x_n)$ konvergen.

Bukti :

Diketahui $X = (x_n)$ monoton naik, dan misalkan

$$E = \{x_n \mid n \in N\}.$$

Maka $E \neq \emptyset$ dan terbatas di atas. Misalkan $x = \sup E$.

Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang.

Karena $x - \varepsilon$ bukan batas atas, maka $\exists K \in \mathbb{N}$ sehingga

$$x - \varepsilon < x_K < x.$$

Karena (x_n) monoton naik, maka

$$x - \varepsilon < x_n < x, \text{ untuk semua } n \geq K.$$

Jadi jika $n \geq K$, diperoleh

$$-\varepsilon < x_n - x < \varepsilon.$$

Terbukti bahwa (x_n) konvergen ke x .

Suatu hal penting yang perlu dicatat dari Teorema 2.4.2. adalah bahwa barisan monoton naik dan terbatas di atas, konvergen ke *supremum* himpunan suku-sukunya.

2.13.3. Teorema:

Jika $X = (x_n)$ barisan bilangan real yang monoton turun dan terbatas di bawah, maka $X = (x_n)$ konvergen.

Bukti:

Diketahui $X = (x_n)$ monoton turun, dan misalkan

$$E = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Maka $E \neq \emptyset$ dan terbatas di atas. Misalkan $x = \inf E$.

Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang.

Karena $x - \varepsilon$ bukan batas atas, maka $\exists K \in \mathbb{N}$ sehingga

$$x < x_K < x - \varepsilon.$$

Karena (x_n) monoton turun, maka

$$x < x_n < x - \varepsilon, \text{ untuk semua } n \geq K.$$

Jadi jika $n \geq K$, diperoleh

$$-\varepsilon < x_n - x < \varepsilon.$$

Terbukti bahwa (x_n) konvergen ke x .

Suatu hal penting yang perlu dicatat dari Teorema 2.4.3. adalah bahwa barisan monoton turun dan terbatas di bawah, konvergen ke infimum himpunan suku-sukunya.

Contoh:

Misalkan $X = (x_n)$ barisan bilangan real dengan

$$x_1 = 1, \text{ dan } x_{n+1} = \frac{1}{4}(2x_n + 3), n \geq 1.$$

Akan ditunjukkan bahwa $\lim x_n = \frac{3}{2}$.

Dengan induksi matematika, akan ditunjukkan bahwa $X = (x_n)$ adalah monoton naik.

Untuk $n = 1$, diperoleh

$$x_1 = 1, \text{ dan } x_2 = \frac{5}{4}.$$

Jadi untuk $n = 1$, terbukti bahwa $x_1 \leq x_2$.

Asumsikan bahwa untuk $n = k$, berlaku $x_k \leq x_{k+1}$, dan akan dibuktikan bahwa

$$x_{k+1} \leq x_{k+2}.$$

Karena

$$x_k \leq x_{k+1}$$

Maka diperoleh

$$2x_k \leq 2x_{k+1}$$

$$2x_k + 3 \leq 2x_{k+1} + 3$$

$$\frac{1}{4}(2x_k + 3) \leq \frac{1}{4}(2x_{k+1} + 3)$$

$$x_{k+1} \leq x_{k+2}.$$

Sesuai prinsip induksi matematika, terbukti bahwa

$$x_n \leq x_{n+1}.$$

Untuk semua $n \in N$.

Jadi $X = (x_n)$ adalah monoton naik.

Kedua akan ditunjukkan bahwa $X = (x_n)$ adalah terbatas di atas.

Sebelumnya telah diketahui bahwa $x_1 \leq x_2 < 2$.

Akan ditunjukkan bahwa $x_n < 2$, untuk semua $n \in N$.

Untuk $n = 1, 2$ telah terbukti benar.

Asumsikan benar untuk $n = k$, bahwa $x_k < 2$. Akan ditunjukkan bahwa $x_{k+1} < 2$

Karena $x_k < 2$, maka diperoleh

$$2x_k < 4$$

$$2x_k + 3 < 7$$

$$\frac{1}{4}(2x_k + 3) < \frac{7}{4} < 2$$

$$x_{k+1} < 2.$$

Sesuai prinsip induksi matematika, maka $x_k < 2$, untuk semua $n \in N$.

Karena (x_n) monoton naik dan terbatas di atas, maka (x_n) konvergen.

Misalkan (x_n) konvergen ke x . Karena (x_{n+1}) adalah subbarisan dari (x_n) , maka (x_{n+1}) juga konvergen ke x .

Jadi,

$$\lim(x_{n+1}) = \lim\left[\frac{1}{4}(2x_n + 3)\right]$$

$$\lim(x_{n+1}) = \lim(2 \lim x_n + 3)$$

$$4x = 2x + 3$$

Diperoleh, $x = \frac{3}{2}$. Jadi, $\lim x = \frac{3}{2}$ (Abdussyakir, 2006:68).

2.14. Nilai Mutlak.

2.14.1. Definisi:

Jika $a \in \mathfrak{R}$, nilai mutlak dari a , ditulis $|a|$, didefinisikan dengan

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{jika } a \geq 0 \\ -a, & \text{jika } a < 0 \end{cases}$$

Contoh :

$|5| = 5$, karena $5 \geq 0$ dan $|-4| = -(-4) = 4$, karena $-4 < 0$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Jika $a \neq 0$, maka $-a \neq 0$, dan dengan demikian, maka $|a| > 0$

2.14.2. Teorema:

- a. $|-a| = |a|$, untuk setiap $a \in \mathfrak{R}$.
- b. $|a-b| = |b-a|$, untuk setiap $a, b \in \mathfrak{R}$.
- c. $|ab| = |a||b|$, untuk setiap $a, b \in \mathfrak{R}$.
- d. $\sqrt{a^2} = |a|$ untuk setiap $a \in \mathfrak{R}$.
- e. Jika $r \in \mathfrak{R}, r > 0$, maka $|a| < r$ jika dan hanya jika $-r < a < r$.
- f. $-|a| < a < |a|$, untuk setiap $a \in \mathfrak{R}$.

Bukti :

a. Misal $a \in \mathfrak{R}$ sebarang.

Jika $a = 0$, maka $-a = 0$, sehingga diperoleh $|a| = 0 = |-a|$.

Jika $a > 0$, maka $-a < 0$, sehingga diperoleh $|a| = a = -(-a) = |-a|$.

Jika $a < 0$, maka $-a > 0$, sehingga diperoleh $|a| = -a = |-a|$.

Karena $a \in \mathfrak{R}$ sebarang, maka disimpulkan

$$|-a| = |a|, \text{ untuk setiap } a \in \mathfrak{R}.$$

2.14.3. Teorema: **Ketaksamaan Segitiga.**

$|a+b| \leq |a| + |b|$, untuk setiap $a, b \in \mathfrak{R}$.

Bukti :

Misalkan $a, b \in \mathfrak{R}$ sebarang.

$$0 \leq (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2$$

Sesuai dengan Teorema 2.14.1. bagian (c), diperoleh

$$|a+b| = \sqrt{(a+b)^2} \leq \sqrt{(|a| + |b|)^2} = |a| + |b|.$$

Sebagai konsekuensi dari ketaksamaan segitiga, diperoleh dua ketaksamaan yang sangat berguna berikut ini.

2.14.4. Teorema:

Untuk setiap $a, b, c \in \mathfrak{R}$, maka

a. $|a - b| \leq |a - c| + |c - b|$.

b. $|a - b| \leq |a| + |b|$.

c. $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Bukti :

a. Jika $a, b, c \in \mathfrak{R}$, maka sesuai ketaksamaan segitiga, diperoleh

$$|a - b| = |(a - c) + (c - b)| \leq |a - c| + |c - b|.$$

Secara umum, untuk $a, b, c \in \mathfrak{R}$, jarak Euclide $d(a, b)$ antara a dan b didefinisikan dengan: $d(a, b) = |a - b|$

Contoh :

$$d(-2, 5) = |(-2) - 5| = |-7| = 7 \text{ dan } d(1, 7) = |1 - 7| = |-6| = 6.$$

Jarak d dapat juga dipandang sebagai fungsi dari $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$ ke \mathfrak{R} , yang memiliki sifat

1. $d(x, y) \geq 0$, dan $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$.

2. $d(x, y) = d(y, x)$.

3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Untuk semua $x, y, z \in \mathfrak{R}$. Sifat yang terakhir juga disebut ketaksamaan segitiga (Abdusysyahir, 2006:31).

2.15. Tafsir dan Penjelasan QS Al – Qomar ayat 49.

Menurut tafsir Al – Maragi Juz 26, 1993:175,

بِقَدَرٍ – Bi Qadar: menurut usuran yang telah termaktub dalam Lauhul Mahfudz.

Allah SWT menerangkan bahwa segala sesuatu yang ada dalam kehidupan di dunia ini tidaklah terjadi secara kebetulan, akan tetapi dengan keputusan dan ketentuan Allah (qada' dan qadar-Nya). Apabila Allah menghendaki sesuatu perkara, maka hanya mengatakan kepadanya, "Jadilah!", maka perkara itupun terjadi.

Sesungguhnya segala yang terjadi di dalam kehidupan ini, hādala dengan ketentuan Allah dan pembentukannya, menurut ketentuan Hikmah-Nya Yang Maha Bijaksana dan aturan-Nya yang menyeluruh dan sesuai dengan sunnah-sunnah yang dia letakkan pada makhluk-Nya.

Semakna dengan ayat ini hādala firman Allah Ta'ala:

وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَرَهُ تَقْدِيرًا

Artinya: Dan Dia telah menciptakan segala sesuatu dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya (Al – Furqon, 25:2).

Dan firman-Nya pula, yang mempunyai arti: Sucikanlah nama Tuhanmu yang paling tinggi, Yang menciptakan, dan menyempurnakan (penciptan-Nya), dan yang menentukan kadar (masing-masing) dan memberi petunjuk (Al – A'la, 87:1-3).

Sedangkan menurut hadits shahih, "Mohon ampun kepada Allah dan janganlah bersikap lemah. Jika kamu ditimpa suatu perkara, maka katakanlah,

Allah telah menentukan, dan apapun yang Dia kehendaki, Dia laksanakan, Dan janganlah kamu mengucapkan, 'Sekiranya aku melakukan begini tentu begitu', Karena kata-kata sekiranya akan membukakan peranan setan”.

Sedangkan menurut hadits lain yang diriwayatkan dari Ibnu Abbas, bahwa Rasulullah SAW. Pernah bersabda, ”Dan ketahuilah, bahwa sekiranya umat itu sepakat untuk memberi sesuatu manfaat kepadamu yang tidak ditulis oleh Allah untukmu, niscaya mereka takkan dapat membahayakan kamu. Pena-pena telah kering dan lembaran-lembaran telah dilipat”,

2.15.2. Menurut Tafsir Al-Misbakh Volume 13 (M. Quraish Shihab, 2002:481).

Kata *Qadar* pada Qs Al-Qomar ayat 49 diperselisihkan maknanya oleh para ulama. Dari segi bahasa kata tersebut dapat berarti *kadar tertentu* yang tidak bertambah atau tidak berkurang, atau tidak *kuasa*. Tetapi karena ayat tersebut berbicara tentang segala sesuatu yang berada dalam kuasa Allah, maka adalah lebih tepat memahaminya dalam arti *ketentuan* dan *sistem yang ditetapkan terhadap segala sesuatu*. Tidak hanya terbatas pada salah satu aspek saja. Manusia misalnya, telah ada *kadar yang ditetapkan* Allah baginya. Selaku jenis makhluk ia dapat makan, minum, dan berkembang biak melalui *sistem yang ditetapkan-Nya*. Manusia memiliki potensi baik dan buruk. Ia dituntut untuk mempertanggung jawabkan pilihannya. manusia dianugrahi Allah petunjuk dengan kedatangan rasul untuk membimbing mereka. Akal pun dianugrahan-Nya kepada mereka, demikian seterusnya yang kesemuanya dan yang selainnya termasuk dalam *sistem* yang sangat tepat, teliti, dan akurat yang telah ditetapkan

sistem dan *kadar* bagi ganjaran atau balasan-Nya yang akan diberikan kepada setiap orang.

Ayat tersebut menjelaskan salah satu ketentuan Allah menyangkut takdir dan pengaturan-Nya terhadap makhluk.

2.15.3. Menurut Tafsir Munir.

QS Al-Qomar ayat 49 ditafsirkan dengan memberikan banyak contoh menyangkut peraturan Allah itu serta keseimbangan yang dilakukan-Nya antar makhluk. Binatang-binatang pemakan burung-burung kecil, misalnya jumlahnya sangat sedikit karena hanya beberapa biji telur yang dapat dihasilkannya. Dia pun tidak dapat hidup kecuali di tempat-tempat tertentu yang terbatas, namun usianya panjang. Seandainya dengan yang panjang itu, ia menghasilkan banyak anak-anak, maka pastilah burung-burung kecil akan habis diterkamnya sehingga punah, atau pastilah berkurang jumlahnya sehingga dapat mengurangi pula fungsi burung-burung kecil itu dalam kehidupan ini. Demikianlah salah satu contoh pengaturan Allah dalam memelihara keseimbangan faktor kelanjutan eksistensi dan kepunahan. Contoh lain adalah lalat tidak dapat bertahan hidup lebih dari dua minggu. Seandainya dia hidup beberapa tahun dengan kemampuan bertelur sebanyak itu, maka pastilah persada bumi ini dipenuhi oleh lalat, dan kehidupan sekian makhluk, khususnya manusia akan menjadi mustahil. Tetapi itu semua berjalan berdasarkan sistem pengaturan dan kadar yang ditentukan oleh Allah di alam raya ini. Kuman-kuman pun demikian makhluk ini adalah makhluk hidup yang terbanyak dan yang paling cepat berkembang biak serta paling kuat membunuh. Namun dia adalah makhluk yang paling rendah kemampuannya

bertahan hidup dan paling singkat usianya. Jutaan yang mati karena udara dingin atau panas, atau cahaya dan lain-lain, serta hanya sebagian kecil yang dapat mengalahkan manusia dan binatang. Seandainya kuman-kuman itu memiliki kemampuan bertahan yang lebih besar dari yang dimilikinya atau usianya lebih panjang, maka pastilah ia menghancurkan kehidupan dan makhluk hidup lainnya.

Selanjutnya dalam rangka pengaturan dan kadar yang ditetapkan Allah atas segala sesuatu itu, kita melihat bahwa setiap makhluk hidup diberi senjata untuk membentengi dirinya dalam melawan serangan musuh-musuhnya atau menghindari bahaya kepunahannya. Senjata itu beraneka ragam dan berbeda-beda antara satu dengan yang lain. Ular-ular kecil dilengkapi dengan racun atau kelincihan bergerak, sedang ular-ular besar mempunyai otot yang sangat kuat, tetapi jatrang yang memiliki racun. Demikian seterusnya, sampai kepada manusia.

Tidak ada satu pun yang Allah ciptakan sia-sia tanpa tujuan yang benar dan kesemuanya diberi potensi yang sesuai dan dengan kadar yang cukup untuk melaksanakan fungsinya, dan semuanya kait berkait, tunjang menunjang dalam satu keseimbangan.

Firman Allah dalam QS Al-Hijr/15:85-86, yang artinya:

”Dan tidaklah Kami ciptakan langit dan bumi dan apa yang ada di antara keduanya, melainkan dengan benar. Dan sesungguhnya saat (kiamat) itu pasti akan datang, maka maafkanlah (mereka) dengan cara yang baik. Sesungguhnya Tuhanmu, Dia-lah Yang Maha Pencipta lagi Maha Mengetahui”.

Firman Allah dalam QS Ad-Dukhan/44:38-40, yang artinya:

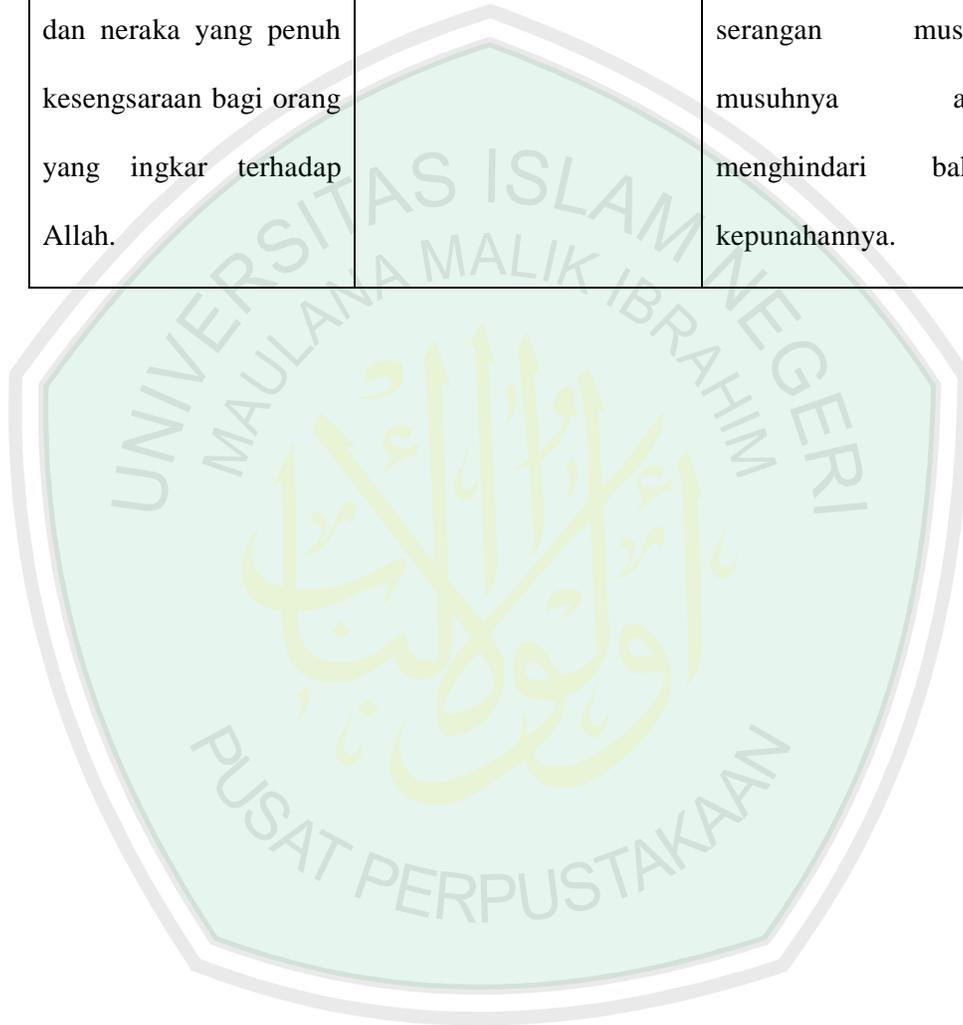
”Dan tidaklah Kami ciptakan langit dan bumi dan segala yang ada diantara keduanya dengan bermain-main. Kami tidak menciptakan keduanya melainkan dengan haq, tetapi kebanyakan mereka tidak mengetahui. Sesungguhnya hari Keputusan (hari Kiamat) itu adalah waktu yang dijanjikan abagi mereka semuanya”.

Demikianlah Allah mengaitkan penciptaan dan hikmahnya dengan hari Pembalasan sehingga sangat wajar ayat di atas mengaitkan penciptaan dan hikmahnya dengan hari Pembalasan sehingga sangat wajar ayat di atas mengaitkan uraian tentang siksa di hari Kemudian, (ayat 46) dengan para pendurhaka (ayat 47-48), dan pengaturan serta hikmah penciptaan (ayat 49).

Dari ketiga tafsir tersebut, dapat disusun tabel yang dapat menunjukkan perbedaan pendapat tentang kata *Qadar*, sebagai berikut:

TAFSIR AL-MARAGI	TAFSIR AL-MISBAKH	TAFSIR MUNIR
Arti secara umum: menurut ukuran yang telah termaktub dalam Lauhul Mahfuz.	Arti secara umum: kadar tertentu yang tidak bertambah dan tidak berkurang, atau berarti kuasa.	Arti secara umum: kadar yang cukup untuk melaksanakan fungsinya dalam atau keseimbangan.
Pendukung tafsirnya: QS Al-Furqon ayat 2.	Pendukung tafsirnya: QS Al-A’la ayat 1-3.	Pendukung tafsirnya: QS Al-Hijr ayat 85-86 dan QS Ad-Dukhan ayat 38-40.
Contoh: penciptaan	Contoh: akal diciptakan	Contoh: setiap makhluk

surga yang penuh dengan kenikmatan bagi orang yang bertaqwa dan neraka yang penuh kesengsaraan bagi orang yang ingkar terhadap Allah.	dan dianugerahkan-Nya dalam sistem yang sangat tepat, teliti, dan akurat.	diberi senjata untuk membentengi dirinya dalam melawan serangan musuh-musuhnya atau menghindari bahaya kepunahannya.
---	---	--



BAB III

PEMBAHASAN

Konsepsi ini merupakan perumuman (generalisasi) panjang selang, juga dapat dipandang sebagai perumuman distribusi massa batang berdimensi satu. Konsepsi ukuran suatu kumpulan dikembangkan sebagai berikut. Ukuran suatu selang didefinisikan sebagai panjang selang tersebut. Selanjutnya, didefinisikan ukuran kumpulan terbuka sebagai jumlah panjang selang komponennya. Jika F suatu kumpulan tertutup dan I selang tertutup terkecil yang mengandung F , maka $I - F$ merupakan kumpulan terbuka. Ukuran F didefinisikan sebagai $\mu(F) = \mu(I) - \mu(I - F)$, dimana μ menyatakan ukuran. Jika E suatu kumpulan sembarang, didefinisikan ukuran dalam $\mu_*(E)$ dan ukuran luar $\mu^*(E)$. E disebut terukur, jika $\mu_*(E) = \mu^*(E)$.

Ukuran luar suatu kumpulan memainkan peranan yang lebih besar dari pada ukuran dalam, karena ukuran dalam dinyatakan melalui ukuran kumpulan tertutup, sedangkan ukuran kumpulan tertutup dinyatakan dalam ukuran luar. Disamping itu keterukuran suatu kumpulan dapat dinyatakan semata-mata dengan ukuran luar.

3.1. Ukuran Kumpulan Terbuka Terbatas.

Kumpulan terbuka yang paling sederhana adalah selang terbuka, jadi wajarlah untuk mendefinisikan ukuran selang terbuka terlebih dahulu.

3.1.1. Definisi :

Ukuran selang terbuka (a,b) dengan $a,b \in \mathfrak{R}$, notasi $\mu(a,b)$ didefinisikan sebagai :

$$\mu(a,b) = b - a.$$

Ukuran dari selang terbuka (a,∞) atau $(-\infty,b)$ atau $(-\infty,\infty)$ didefinisikan sebagai ∞ .

3.1.2. Teorema :

Jika J menyatakan koleksi selang terbuka (terbatas atau tak terbatas), maka ukuran adalah suatu fungsi yang bersifat :

- (a) $0 \leq \mu(I) \leq \infty$, ($I \in J$); jadi $\mu : J \rightarrow \mathfrak{R}^*$, dimana \mathfrak{R}^* adalah sistem bilangan real yang diperluas ($\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R} \cup \{\infty\}$).
- (b) μ invarian terhadap translasi, jadi $\mu(a+I) = \mu(I)$.

Bukti :

(a) Trivial.

(A) Definisi interval tertutup.

$$\text{Jelas bahwa } [0, \infty] = \{\mu(I) \in \mathfrak{R} \mid 0 \leq \mu(I) \leq \infty\}.$$

(B) Definisi fungsi-fungsi terbatas, bahwa :

Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ dikatakan terbatas, dengan dibuktikan terdapat

Suatu bilangan real $M > 0$ sedemikian hingga $\{f(x)\} \leq M$ untuk setiap

$x \in A$.

Berdasarkan (A) dan (B) diperoleh :

Bahwa suatu ukuran dilambangkan dengan μ dibatasi oleh suatu interval terbatas yaitu $[0, \infty]$.

Maka $|\mu(I)| \leq M$, dengan $M = \max(0, \infty)$ dan $I \in J$, dimana J menyatakan koleksi selang terbuka (terbatas atau tidak terbatas), serta $I \in [0, \infty]$.

Sehingga $\mu: J \rightarrow \mathfrak{R}^*$, dimana \mathfrak{R}^* adalah sistem bilangan real yang diperluas ($\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R} \cup \{\infty\}$).

Selain itu, μ merupakan barisan bilangan real.

Benar bahwa μ adalah fungsi dari J ke \mathfrak{R}^* , karena hal itu merupakan definisi dari barisan bilangan real.

Sehingga μ adalah fungsi variasi terbatas pada $[0, \infty]$.

Dan jelas bahwa μ adalah fungsi himpunan tak berhingga (infinite) J ke himpunan tak berhingga (infinite) \mathfrak{R}^* .

Jadi ukuran adalah suatu fungsi dari $J \rightarrow \mathfrak{R}^*$ yang bersifat terbatas pada $[0, \infty]$.

Jadi terbukti.

(b) Trivial.

(A) Special rectangles (persegi panjang-persegi panjang yang istimewa)

Setiap simbol $[a, b]$ untuk interval tertutup $a \leq x \leq b$ dalam \mathfrak{R} pada \mathfrak{R}^n

suatu special rectangles merupakan suatu himpunan yang berbentuk :

$$\begin{aligned} I &= [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \\ &= \{ x \in \mathfrak{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \} \end{aligned}$$

Sehingga didefinisikan

$$\mu(I) = (a_i - b_i) \dots (b_n - a_n)$$

(B) Translation (translasi).

Jika $A \subset \mathfrak{R}^n$ dan $Z \in \mathfrak{R}^n$, maka dapat didefinisikan

$$Z + A = \{z + x \mid x \in A\}$$

Disebut suatu himpunan translasi dari A .

Berdasarkan (A) dan (B), diperoleh :

Jika $I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ adalah suatu special rectangles,

Maka $Z + I = [z_1 + a_1, z_1 + b_1] \times \dots \times [z_n + a_n, z_n + b_n]$

Akan dibuktikan: μ invarian terhadap translasi, jadi $\mu(a + I) = \mu(I)$.

Jika $I \subset \mathfrak{R}^n$ dan $a \in \mathfrak{R}^n$, maka jelas bahwa :

$$I = [p_1, q_1] \times \dots \times [p_n, q_n]$$

$$\Rightarrow a + I = \{a + x \mid x \in I\}$$

$$= [a_1 + p_1, a_1 + q_1] \times \dots \times [a_n + p_n, a_n + q_n]$$

$$\Leftrightarrow \mu(a + I) = [(a_1 + q_1) - (a_1 + p_1)] \times \dots \times [(a_n + q_n) - (a_n + p_n)] \text{ (Definisi 3.1.1.)}$$

$$= [a_1 + q_1 - a_1 - p_1] \times \dots \times [a_n + q_n - a_n - p_n] \text{ (Sifat distributif)}$$

$$= [a_1 - a_1 - q_1 - p_1] \times \dots \times [a_n + a_n - q_n - p_n] \text{ (Sifat komutatif)}$$

$$= [0 - q_1 - p_1] \times \dots \times [0 + q_n - p_n] \text{ (Unsur invers)}$$

$$= [q_1 - p_1] \times \dots \times [q_n - p_n] \text{ (Sifat identitas)}$$

$$= \mu(I) \text{ (Berdasarkan definisi awal)}$$

Jadi terbukti.

Contoh:

Andaikan A adalah himpunan dari bilangan-bilangan dalam selang tertutup $[0,1]$ yang diekspansi.

Buktikan bahwa $\mu(A) = 0$!

Bukti:

Jika $A \subset \mathfrak{R}^n$ dan $Z \subset \mathfrak{R}^n$

Ambil $1 \in Z$

Maka jelas bahwa

$$Z + A = \{1 + [0,1] \mid [0,1] \in A\}$$

$$= [1+0, 1+0] \times \dots \times [1+1, 1+1]$$

$$\Rightarrow \mu(Z + A) = [(1+0) - (1-0)] \times \dots \times [(1+1) - (1-1)]$$

$$= [1-1] \times \dots \times [2-2]$$

$$= 0 \times \dots \times 0$$

$$= 0$$

$$\mu(Z + A) = \mu(0)$$

Berdasarkan Teorema 3.1.2. bagian (b), diperoleh:

$$\mu(Z + A) = \mu(A)$$

$$\text{Sehingga } \mu(Z + A) = \mu(0) = \mu(A)$$

Jadi terbukti bahwa $\mu(A) = 0$.

3.1.3. Definisi :

Misalkan M suatu kumpulan terbuka dan terbatas di \mathfrak{R}^1 . Sehingga ada koleksi $\{(a_n, b_n) : n = 1, 2, \dots\}$ yang memenuhi :

1. $a_n \notin M, b_n \notin M \ (n = 1, 2, \dots)$;
2. $(a_m, b_m) \cap (a_n, b_n) = \emptyset \ (m \neq n)$;
3. $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$.

Ukuran M , notasi $\mu(M)$ didefinisikan sebagai :

$$\mu(M) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(a_n, b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(b_n - a_n).$$

Perlu diperhatikan bahwa $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)$ merupakan suatu bilangan real.

3.1.4. Lemma :

(a) Jika $\{(a_n, b_n) : n = 1, 2, \dots, m\}$ menyatakan suatu koleksi berhingga selang terbuka yang saling lepas dan (a_n, b_n) terkandung dalam suatu selang terbuka

$I_n \ (n = 1, 2, \dots, m)$ maka $\sum_{n=1}^m (b_n - a_n) \leq \mu(I)$.

(b) Jika $\{(a_n, b_n) : n = 1, 2, \dots\}$ menyatakan suatu koleksi terbilang selang terbuka

yang saling lepas dan $(a_n, b_n) \subseteq I \ (n = 1, 2, \dots)$, maka $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) \leq \mu(I)$.

Bukti :

(a) Telah diketahui bahwa $\{(a_n, b_n) : n = 1, 2, \dots, m\}$ dan tanpa mengurangi keumuman pembuktian, dimisalkan bahwa :

$$a_1 < a_2 < \dots < a_m \text{ dan } b_1 < b_2 < \dots < b_m$$

Sehingga berdasarkan teorema *denumarabel* karena himpunan $(a_n, b_n) \cong N$

(bilangan asli) merupakan himpunan yang *denumarable*. bahwa :

Jika $\{A_1, A_2, A_3, \dots\}$ merupakan kelas himpunan *denumerable* dari himpunan yang *denumerable*, maka $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ juga

Akibat dari teorema tersebut adalah jika $\{A_i\}_{i \in I}$ merupakan kelas himpunan kontabel dari himpunan yang kontabel dari himpunan yang kontabel, maka $\bigcup_{i \in I} A_i$ juga merupakan himpunan *kontable*.

Diperoleh :

$$a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq a_{m-1} \leq b_{m-1} \leq a_m \leq b_m$$

Karena $b_{m-1} \leq a_m$

Jelas bahwa $b_n \leq a_{n+1}$ dengan $n = 1, 2, \dots, m-1$

Telah diketahui bahwa (a_n, b_n) selang terbuka yang saling lepas, sehingga

$$(a_i, b_i) \cap (a_j, b_j) = \emptyset \text{ dengan } (i \neq j)$$

Karena diketahui bahwa (a_n, b_n) terkandung dalam selang terbuka I dimisalkan

bahwa: $I = (p, q)$ maka berdasarkan teorema *kontable* bahwa :

Setiap himpunan bagian dari himpunan *kontable* adalah himpunan yang *kontable*

Maka $p \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \dots \leq a_{m-1} \leq b_{m-1} \leq a_m \leq b_m \leq q$

Sehingga $h = (q - b_m) + (a_m - b_{m-1}) + \dots + (a_2 - b_1) + (a_1 - p) \geq 0$

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m (b_n - a_n) &\leq \sum_{n=1}^m (b_n - a_n) + \sum_{n=1}^m (a_{n+1} - b_n) \\ &= \sum_{n=1}^m (b_n - a_n) + \sum_{n=1}^m (a_m - b_{m-1}) \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^m (b_n - a_n) + h$$

Karena $\mu(I) = \sum_{n=1}^m (b_n - a_n) + h$

Sehingga $\mu(I) \geq \sum_{n=1}^m (b_n - a_n)$

Jadi terbukti.

(b) (A) Bukti Lemma 3.1.4. bagian (a)

Untuk setiap m berlaku $\sum_{n=1}^m (b_n - a_n) \leq \mu(I)$

(B) Barisan monoton naik .

$\sum_{n=1}^m (b_n - a_n)$ adalah barisan bilangan real, hal ini sesuai dengan catatan.

Karena pada Lemma 3.1.4. bagian (a) diketahui bahwa :

$$b_n - a_n \geq 0 \text{ sehingga } a_n \leq b_n$$

Benar bahwa

$$a_1 < a_{1+1} = a < a_2 \text{ dan } b_1 < b_{1+1} = b_1 < b_2$$

Secara umum dapat ditulis

$$a_n < a_{n+1} \text{ dan } b_n < b_{n+1}$$

untuk semua $n \in \mathbb{N}$

Jadi barisan $\sum_{n=1}^m (b_n - a_n)$ monoton naik.

(C) Teorema :

Jika $\{x_n\}$ barisan bilangan real yang monoton naik dan terbatas di atas,

maka $\{x_n\}$ konvergen dan $\lim x_n = \sup x_n$.

Berdasarkan (A), (B), dan analog dengan teorema (C), diperoleh :

Bahwa deret $\sum_{n=1}^m (b_n - a_n)$ konvergen

dan $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) \leq \mu(I)$.

Jadi terbukti.

Contoh:

Buktikan!

Jika $\{E_0, E_1, E_2, \dots\}$ adalah suatu barisan dari himpunan-himpunan dalam P ,

sedemikian hingga $E_0 \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, maka $\mu(E_0) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$

Bukti:

Misalkan $E_i = [a_i, b_i]$ dengan $i = 0, 1, 2, \dots, \infty$ dan ambil $\varepsilon > 0$ sebarang

Sedemikian hingga $\varepsilon < b_0 - a_0$ atau $\varepsilon - b_0 < a_0$ sehingga $a_0 < b_0 - \varepsilon$

Untuk setiap $\delta > 0$, jika $F_0 = [a_0, b_0 - \varepsilon]$ dan $A_i = \left(a_i - \frac{\delta}{2^i}, b_i \right)$ dengan

$i = 0, 1, 2, \dots, \infty$, maka $F_0 \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

Jika terdapat bilangan bulat positif n sedemikian hingga $F_0 \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$, serta

berdasarkan definisi 3.1.3. dan Lemma bagian (b), diperoleh

$$\begin{aligned}\mu(E_0) - \varepsilon &= (b_0 - a_0) - \varepsilon < \sum_{i=1}^n \left(b_i \left(a_i - \frac{\delta}{2^i} \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(b_i - a_i + \frac{\delta}{2^i} \right)\end{aligned}$$

Sehingga $\mu(E_0) - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) + \delta$, untuk setiap ε dan δ sebarang

Jadi terbukti.

3.1.5 Teorema :

Jika I dan J dua selang terbuka dengan $I \subseteq J$, maka $\mu(I) \leq \mu(J)$.

Bukti :

Trivial.

I dan J dua selang terbuka dengan $I \subseteq J$.

Karena I dan J adalah himpunan terbuka.

Jelas bahwa J mengandung semua anggota himpunan I atau $\forall I$ terkandung di dalam J .

Karena $\mu(I)$ adalah batas atas dari himpunan bilangan-bilangan di ruas kanan,

Jelas bahwa $\mu(I)$ adalah batas atas untuk beberapa himpunan yang terkandung dalam J .

Oleh karena itu, $\mu(I)$ juga adalah batas atas untuk himpunan yang lebih kecil di sebelah paling kiri.

Berdasarkan Aksioma sifat supremum pada \mathfrak{R} , bahwa :

Setiap himpunan tak kosong di \mathfrak{R} dan terbatas di atas mempunyai supremum.

Sehingga berdasarkan definisi ukuran dari himpunan buka bahwa :

$$\mu(G) = \sup \{ \mu(P) \mid P \subset G, P \text{ suatu himpunan terbuka} \}.$$

Diperoleh :

$$\begin{aligned} I \subseteq J &\Rightarrow \sup\{\mu(x) \mid x \subseteq I\} \subseteq \sup\{\mu(x) \mid x \subseteq J\} \\ &= \mu(I) \leq \mu(J) \end{aligned}$$

Jadi terbukti.

Contoh:

Buktikan!

Jika $I_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, dengan $I_n \supseteq I_{n+1}$ untuk masing-masing $n \in \mathbb{N}$,
maka $\mu(I_n) \geq \mu(I_{n+1})$.

Bukti:

Karena $n \in \mathbb{N}, n = 1, 2, 3, \dots, \infty$

$$\text{Jika } I_1 = (-1, 1)$$

$$I_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$I_3 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Maka $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \dots$

Berdasarkan Teorema 3.1.5. maka $\mu(I_n) \geq \mu(I_{n+1})$

Jadi terbukti.

Keterangan: Interval $I_n, n \in \mathbb{N}$ disebut interval bersarang (nested interval).

Buktikan!

Jika E adalah suatu himpunan ukuran Lebesgue positif, ukuran finite (berhingga), dan jika $0 \leq \alpha \leq 1$, maka terdapat suatu interval buka sedemikian hingga

$$\mu(E \cap u) \geq \alpha \mu(u)$$

Bukti:

Misal U terdiri dari semua himpunan-himpunan terbuka.

Berdasarkan definisi, diperoleh

$$\mu(E) = \inf \{ \mu(u) : E \subset u \in U \}$$

Sehingga dapat ditemukan suatu himpunan terbuka u_0 sedemikian hingga $E \subset u_0$ dan $\alpha \mu(u_0) \leq \mu(E)$

Jika $\{u_n\}$ barisan dari interval-interval terbuka yang gabungannya adalah u_0 ,

$$\text{maka } \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \mu(u_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E \cap u_n)$$

Akibatnya diperoleh

$$\alpha \mu(u_n) \leq \mu(E \cap u_n)$$

Jika interval u_n diganti dengan u , maka $\alpha \mu(u) \leq \mu(E \cap u)$

Jadi terbukti.

3.1.6. Definisi :

$$\mu(\emptyset) = 0.$$

Ukuran kumpulan terbuka tak terbatas didefinisikan = ∞

3.1.7. Teorema :

Jika M menyatakan koleksi kumpulan terbuka di \mathfrak{R}^1 (terbatas atau tak terbatas) dan G menyatakan koleksi kumpulan terbuka di M maka ukuran yang di batasi pada M memenuhi :

- (a) $0 \leq \mu(G) \leq \infty (G \in M)$, jadi $\mu: M \rightarrow \mathfrak{R}^*$;
- (b) Jika $G_1 \subseteq G_2$, maka $\mu(G_1) \leq \mu(G_2)$;
- (c) Jika $G_i \cap G_j = \emptyset (i \neq j)$, maka $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_i)$;
- (d) $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_i)$.

Bukti :

(a) Trivial.

(A) Definisi interval tertutup.

Jelas bahwa $[0, \infty] = \{\mu(G) \in \mathfrak{R}^1 \mid 0 \leq \mu(G) \leq \infty\}$.

(B) Definisi fungsi-fungsi terbatas, bahwa :

Suatu fungsi $f: A \rightarrow B$ dikatakan terbatas, dengan dibuktikan terdapat suatu bilangan real $S > 0$ sedemikian hingga $\{f(x)\} \leq S$ untuk setiap $x \in A$.

Berdasarkan (A) dan (B) diperoleh :

Bahwa suatu ukuran dilambangkan dengan μ dibatasi oleh suatu interval terbatas yaitu $[0, \infty]$,

Maka $|\mu(G)| \leq S$, dengan $S = \max(0, \infty)$ dan $G \in M$, dimana m menyatakan koleksi selang terbuka (terbatas atau tidak terbatas), serta $G \in [0, \infty]$.

Sehingga $\mu: J \rightarrow \mathfrak{R}^*$, dimana \mathfrak{R}^* adalah sistem bilangan real yang diperluas

$$(\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R} \cup \{\infty\}).$$

Selain itu, μ merupakan barisan bilangan real.

Benar bahwa μ adalah fungsi dari M ke \mathfrak{R}^* , karena hal itu merupakan definisi dari barisan bilangan real.

Sehingga μ adalah fungsi variasi terbatas pada $[0, \infty]$

Jadi ukuran adalah suatu fungsi dari $M \rightarrow \mathfrak{R}^*$ yang bersifat terbatas pada $[0, \infty]$.

Jadi terbukti.

(b) G_1 dan G_2 menyatakan koleksi selang terbuka di \mathfrak{R}^1 .

Berdasarkan definisi himpunan buka, bahwa :

Misalkan $G_1, G_2 \subseteq \mathfrak{R}^1$, karena $G_1 \subseteq G_2$, maka $(G_1 \subseteq G_2) \subseteq \mathfrak{R}^1$

G_1 dan G_2 disebut himpunan buka di \mathfrak{R}^1 jika semua titik di G_1 dan G_2 adalah titik interior dari E .

Sehingga misalkan $G_1 = \{\delta_i : i = 1, 2, \dots\}$ dan $G_2 = \{\Delta_k : k = 1, 2, \dots\}$

Karena diketahui bahwa $G_1 \subseteq G_2$

Jelas bahwa $\forall \delta_i$ terkandung di dalam satu dan hanya satu Δ_k .

Jadi koleksi $\{\delta_i\}$ dapat dikelompokkan menjadi sub koleksi $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ yang saling

lepas,

Sehingga $\delta_i \in \Delta_k \Leftrightarrow \delta_i \subseteq \Delta_k$

$$\mu(G_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\delta_i) = \sum_k \left(\sum_{\delta_i \in \Delta_k} \mu(\delta_i) \right)$$

Karena $\sum_{\delta_i \in \Delta_k} \mu(G_i) \leq \mu(\Delta_k)$,

$$\text{Maka } \mu(G_i) = \sum_k \left(\sum_{\delta_i \in \Delta_k} \mu(\delta_i) \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\Delta_k) = \mu(G_2)$$

Karena $\delta_i \subseteq \Delta_k$ atau berdasarkan Teorema 3.1.5 :

$$\Rightarrow \mu(G_i) \subseteq \mu(\Delta_k)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_i) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\Delta_k)$$

$$= \mu(G_1) \leq \mu(G_2)$$

Jadi terbukti.

(c.) Misalkan $\{ \delta_k : k = 1, 2, \dots \}$ koleksi selang komponen dari $G_i (i = 1, 2, \dots)$.

Karena diketahui $G_i \cap G_j = \emptyset (i \neq j)$

Berdasarkan Teorema himpunan buka, bahwa :

Jelas bahwa $\{ \delta_k : k = 1, 2, \dots; i = 1, 2, \dots \}$ koleksi selang komponen dari

$$G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup \dots \cup G_{\infty} = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$$

$$\text{Sehingga } \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu(\delta_k) \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_i)$$

Analog dengan suatu Lemma, bahwa :

Jika $\{I_k\}_{k=1}^N$ adalah suatu koleksi berhingga dari suatu interval, maka $\bigcup I_k$ adalah

ukuran dan $|\bigcup I_k| = \sum |I_k|$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu(\delta_k) \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_i)$$

Jadi terbukti.

Cara lain :

Misalkan M_i koleksi kumpulan terbuka terbatas dengan $i = 1, 2, \dots, \infty$

Diberikan $\varepsilon > 0$, pilih N_i koleksi kumpulan terbuka, sedemikian hingga

$$M_i \subset N_i \text{ dan } \mu(M_i) - \mu(N_i) < \varepsilon \dots\dots\dots (1)$$

Maka $\mu(M_i) \leq \mu(N_i) + \varepsilon$

Ambil G_i dengan $i = 1, 2, \dots, \infty$

$$\text{Sedemikian hingga } M_i - N_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{Oleh karena itu, } \mu(M_i) - \mu(N_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_i)$$

Dan hal ini telah memenuhi untuk ditunjukkan bahwa $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_i) \leq \varepsilon$.

Dari persamaan (1) dan (2), diperoleh :

$$\mu(M_i) - \mu(N_i) \leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i\right) \leq \varepsilon$$

sedangkan $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_i) \leq \varepsilon$.

Jadi terbukti.

(d) Misalkan $G_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{k_i}$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, \infty$

Misalkan $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$, berdasarkan Teorema himpunan buka, bahwa :

Jadi $G = \bigcup_i J_i$, dengan $\{J_i : i = 1, 2, \dots\}$ koleksi selang komponen dari G .

Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang. Pilih N sehingga $\sum_{i=N+1}^{\infty} \mu(J_i) < \frac{\varepsilon}{2}$

Berdasarkan Teorema 3.1.7. bagian (c)

$$\text{Maka } \mu(G) = \sum_{i=1}^N \mu(J_i) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Ambil k_i suatu selang terbuka untuk setiap $i = 1, 2, \dots, N$

$$\text{Sehingga } K_i \subseteq J_i \text{ dan } \mu(j_i) < \mu(k_i) + \frac{\varepsilon}{2N}$$

$$\text{Maka } \mu(G) < \sum_{i=1}^N \mu(k_i) + \varepsilon \dots\dots\dots (1)$$

Karena $K_i \subseteq J_i$ dan $J_i \subseteq G_i$ atau

$$\text{Karena } \bigcup_{i=1}^N K_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i,$$

Maka ada sejumlah berhingga I_{k_i} ,

Sebut $I_{k_1, i_1}, I_{k_2, i_2}, \dots, I_{k_r, i_r}$

$$\text{Sehingga } \bigcup_{i=1}^N K_i \subseteq I_{k_1, i_1} \cup I_{k_2, i_2} \cup \dots \cup I_{k_r, i_r}.$$

Benar bahwa jika $\bigcup_{i=1}^N K_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$ dan $\bigcup_{i=1}^N K_i$ adalah gabungan himpunan terbuka,

Maka $\bigcup_{i=1}^N K_i$ berisi atau subset sejati dari gabungan sejumlah himpunan berhingga

(finite).

Dan berdasarkan Definisi Compact sets

Dapat disimpulkan bahwa kumpulan $\bigcup_{i=1}^N K_i$ adalah compact.

Karena $K_i \cap K_j = \emptyset (i \neq j)$ dan berdasarkan teorema 3.1.7. bagian (c)

Maka

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^N K_i\right) = \sum_{i=1}^N \mu(K_i) \leq \mu(I_{k_1, i_1}) + \mu(I_{k_2, i_2}) + \dots + \mu(I_{k_r, i_r}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_i) \dots \dots \dots (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2), diperoleh :

$$\mu(G) < \sum_{i=1}^N \mu(K_i) + \varepsilon < \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_i)$$

sehingga $\mu(G) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_i) + \varepsilon$ dan karena $\varepsilon > 0$ sebarang,

$$\text{Maka } \mu(G) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_i)$$

$$\text{Diperoleh } \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_i)$$

Jadi terbukti.

Contoh:

Buktikan!

$$\text{Jika } G_1 = G_2 = [0,1], \text{ maka } \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_i)$$

Bukti:

$$\text{Jika } G_1 = G_2 = [0,1]$$

$$\text{Maka } \mu(G_1 \cup G_2) = 1$$

$$\text{Dan } \mu(G_1) + \mu(G_2) = 2$$

Sehingga $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_i)$

Jadi terbukti.

Buktikan!

Andaikan A_1, A_2, A_3, \dots adalah himpunan-himpunan terukur dan andaikan $d \in \mathbb{N}$, serta untuk setiap titik $x \in \mathfrak{R}^n$ tidak lebih dari sama dengan d pada A_k .

Buktikan bahwa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \leq d \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \quad (\text{jika } d \geq 1).$$

Bukti:

Ambil \mathcal{E} yang menyatakan koleksi semua himpunan tidak kosong yang merupakan subset dari \mathbb{N} , tetapi tidak lebih dari bilangan-bilangan d .

Untuk setiap $s \in \mathcal{E}$ yang didefinisikan suatu himpunan A_s , sehingga diperoleh

Jika $s = \{k_1, \dots, k_l\}$ dan $s^c = \{j_1, j_2, \dots\}$ (dengan $l \geq d$)

Ambil $A_s = A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_l} \cap A_{j_1}^c \cap A_{j_2}^c \cap \dots$

Akan ditunjukkan bahwa $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{s \in \mathcal{E}} A_s$

Maka diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{s \in \mathcal{E}} \mu(A_s) \right) \\ &= \sum_{s \in \mathcal{E}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_s) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{s \in \mathcal{E}} \mu(A_s) \times (\text{bilangan anggota-anggota dari } s) \\
&\leq \sum_{s \in \mathcal{E}} \mu(A_s) d \\
&= d \mu \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right)
\end{aligned}$$

Jadi terbukti.

3.2. Ukuran Kumpulan Tertutup Terbatas.

3.2.1. Definisi :

Misalkan F suatu kumpulan tertutup terbatas. Sehingga $[a, b]$ adalah selang tertutup terkecil yang mengandung F , dimana $a = \inf F$ dan $b = \sup F$.

Selanjutnya $[a, b] - F$ adalah kumpulan terbuka.

Ukuran F , notasi $\mu(F)$ didefinisikan sebagai :

$$\mu(F) = (b - a) - \mu([a, b] - F).$$

3.2.2. Teorema :

Jika F suatu kumpulan tertutup dan terbatas, maka $\mu(F) \geq 0$.

Bukti :

Misalkan $[a, b]$ selang tertutup terkecil yang mengandung F sedangkan F suatu kumpulan tertutup.

Berdasarkan Lemma, diperoleh :

$[a, b] - F$ adalah kumpulan terbuka,

Sehingga $[a, b] - F \subseteq [a, b]$ sedemikian hingga $[a, b] - F \subseteq (a, b)$

$$\Rightarrow ([a,b] - F) \leq \mu(a,b)$$

Berdasarkan Definisi ukuran selang terbuka, (a,b) , notasi $\mu(a,b)$ didefinisikan sebagai $\mu(a,b) = b - a$.

$$\Rightarrow \mu([a,b] - F) \leq b - a$$

$$\Rightarrow \mu[a,b] - \mu(F) \leq b - a$$

$$\Rightarrow \mu[a,b] - \mu(F) - (b - a) \leq 0$$

$$\Rightarrow \mu(I - F) - (b - a) \leq 0$$

$$\Rightarrow -\mu(I - F) + (b - a) \geq 0$$

$$= (b - a) - \mu(I - F) \geq 0$$

Berdasarkan definisi awal $\Rightarrow \mu(F) \geq 0$

Jadi terbukti.

3.2.3. Lemma :

Jika (c,d) suatu selang terbuka yang mengandung kumpulan tertutup F , maka

$$\mu(F) = \mu(c,d) - \mu((c,d) - F).$$

Bukti :

Karena diketahui (c,d) suatu kumpulan terbuka dan F kumpulan tertutup, maka berdasarkan lemma $(c,d) - F$ adalah kumpulan terbuka

Berdasarkan definisi himpunan, bahwa :

$$A - B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B \}$$

Berdasarkan defunusi titik limit atau titik cluster, bahwa :

$x \in \mathfrak{R}$ adalah titik limit dari S jika $V_\varepsilon(x) \cap S \setminus \{x \neq \emptyset\}$ dan berdasarkan Teorema

himpunan tertutup, bahwa titik limit F termuat di F , maka F tertutup.

Ambil $[a, b] \in F^c$, $[a, b]$ bukan titik limit F ,

Sehingga $(\exists(c, d) - [a, b])$ dan $((c, d) - [a, b]) \cap ([a, b] - F) = \emptyset$

Maka $[a, b] \in ((c, d) - [a, b]) \subset F^c$

Berarti F^c terbuka, maka F tertutup.

Diperoleh :

$$\begin{aligned} & ((c, d) - [a, b]) \cap ([a, b] - F) = \emptyset \\ \Rightarrow \mu((c, d) - F) &= \mu((c, d) - [a, b]) + \mu([a, b] - F) \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mu((c, d) - [a, b]) = \mu((c, d) - F) - \mu([a, b] - F)$$

$$\Rightarrow \mu((c, d) - [a, b]) = \mu((c, d) - F) + \mu(F - [a, b]) \text{ (Berdasarkan sifat distributif).}$$

$$\Rightarrow \mu((c, d) - [a, b]) = \mu(c, d) - \mu(F) + \mu(F) - \mu[a, b]$$

$$\Rightarrow \mu((c, d) - [a, b]) = \mu(c, d) - \mu[a, b] \text{ (Berdasarkan invers).}$$

$$\Rightarrow \mu((c, d) - [a, b]) = \mu((c, d) - [a, b])$$

Berdasarkan Definisi ukuran terbuka

$$\text{Jelas bahwa } (c, d) - [a, b] = (a, c) \cup (b, d) \dots \dots \dots (2)$$

$$\text{Sehingga } \mu((c, d) - [a, b]) = (a - c) + (d - b)$$

Kemudian persamaan (2) disubstitusikan ke persamaan (1), diperoleh :

$$\mu((c, d) - F) = (a - c) + (d - b) + \mu([a, b] - F)$$

$$= (d - c) - (b - a) + \mu([a, b] - F) \text{ (Berdasarkan sifat komutatif).}$$

$$\Rightarrow \mu((c, d) - F) = \mu(c, d) - \mu(F)$$

Berdasarkan Definisi awal, diperoleh :

$$- \mu(F) = \mu((c, d) - F) - \mu(c, d) \text{ atau}$$

$$\mu(F) = \mu(c, d) = \mu(c, d) - \mu((c, d) - F)$$

Jadi terbukti.

Contoh:

Buktikan!

Jika C adalah himpunan kompak dan U, V adalah himpunan-himpunan terbuka sedemikian hingga $C \subset U \cup V$, maka $\mu(C) \subset \mu(U \cup V)$, maka terdapat himpunan-himpunan kompak D dan E sedemikian hingga $D \subset U, E \subset V$, dan $C = D \cup E$, maka $\mu(D) \subset \mu(U)$ dan $\mu(C) = \mu(D \cup E)$

Bukti:

Karena $C - V$ dan $C - U$ masing-masing himpunan-himpunan kompak, terdapat dua himpunan terbuka \tilde{U} dan \tilde{V} sedemikian hingga $C - U \subset \tilde{U}$ dan $C - V \subset \tilde{V}$, maka $\mu(C - U) \subset \mu(\tilde{U})$ dan $\mu(C - V) \subset \mu(\tilde{V})$

Dapat ditulis $D = C - \tilde{U}$ dan $E = C - \tilde{V}$

$$\text{Maka } \mu(D) = \mu(C - \tilde{U}) \text{ dan } \mu(E) = \mu(C - \tilde{V})$$

Berdasarkan hal tersebut, secara mudah dapat dibuktikan bahwa $D \subset U, E \subset V$

Maka $\mu(D) \subset \mu(U), \mu(E) \subset \mu(V)$ dan bahwa D dan E adalah himpunan

kompak, karena $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \emptyset$

Diperoleh

$$\begin{aligned}
D \cup E &= (C - \tilde{U}) \cup (C - \tilde{V}) \\
&= C - (\tilde{U} \cap \tilde{V}) \\
&= C
\end{aligned}$$

Maka $\mu(D \cup E) = \mu(C)$

Jadi terbukti.

3.2.4. Teorema :

Jika F_1 dan F_2 dua kumpulan tertutup terbatas dengan $F_1 \subseteq F_2$, maka

$$\mu(F_1) \leq \mu(F_2).$$

Bukti :

Misalkan I selang terbuka yang mengandung F_1 dan F_2

Berdasarkan lemma, diperoleh :

$I - F_1$ dan $I - F_2$ adalah kumpulan terbuka.

Berdasarkan sifat komplement, diperoleh :

$$F_1 \subseteq F_2, \text{ maka } I - F_1 \subseteq I - F_2$$

Sehingga $\{\mu(I) \mid I \subset F_1\} \subset \{\mu(I) \mid I \subset F_2\}$

$$\Rightarrow \mu(I - F_2) \leq \mu(I - F_1) \dots \dots \dots (1)$$

Berdasarkan definisi awal,

Sehingga diperoleh :

$$-\mu(I - F) = \mu(F) - (b - a)$$

$$\Rightarrow \mu(I - F) = -\mu(F) + (b - a)$$

$$\Rightarrow \mu(I - F) = (b - a) - \mu(F) \dots \dots \dots (2)$$

Kemudian persamaan (2) disubstitusikan ke persamaan (1), diperoleh :

$$\mu(I - F_2) \leq \mu(I - F_1)$$

$$(b - a) - \mu(F_2) \leq (b - a) - \mu(F_1)$$

$$\{(b - a) - \mu(F_2)\} - (b - a) \leq \{(b - a) - \mu(F_1)\} - (b - a)$$

$$\{-\mu(F_2) + (b - a)\} - (b - a) \leq \{-\mu(F_1) + (b - a)\} - (b - a) \text{ (Sifat komutatif).}$$

$$-\mu(F_2) + \{(b - a) - (b - a)\} \leq -\mu(F_1) + \{(b - a) - (b - a)\} \text{ (Sifat asosiatif).}$$

$$-\mu(F_2) + 0 \leq -\mu(F_1) + 0 \text{ (Berdasarkan sifat invers).}$$

$$-\mu(F_2) \leq -\mu(F_1) \text{ (Berdasarkan sifat identitas).}$$

$$\Leftrightarrow \mu(F_2) \geq \mu(F_1) \text{ atau } \mu(F_1) \leq \mu(F_2)$$

Jadi terbukti.

Contoh:

Buktikan!

Jika $I_n = \left[0, \frac{1}{n}\right]$, $\forall n \in N$, dengan $I_n \supseteq I_{n+1}$ untuk masing-masing $n \in N$, maka

$$\mu(I_n) \geq \mu(I_{n+1}).$$

Bukti:

Karena $n \in N$, $n = 1, 2, 3, \dots, \infty$

$$\text{Jika } I_1 = (0, 1)$$

$$I_2 = \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

$$I_3 = \left(0, \frac{1}{3}\right)$$

Maka $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \dots$

Berdasarkan Teorema 3.2.4. maka $\mu(I_n) \geq \mu(I_{n+1})$

Misalkan $G(0,1)$, maka $G - I_1$ dan $G - I_2$

Atau $(0,1) - [0,1]$ dan $(0,1) - \left[0, \frac{1}{2}\right]$ kumpulan terbuka

Hal ini berakibat $(0,1) - [0,1] \subseteq (0,1) - \left[0, \frac{1}{2}\right]$

Jadi $\mu((0,1) - [0,1]) \leq \mu\left((0,1) - \left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$

Atau $\mu(I_n) \geq \mu(I_{n+1})$

Jadi terbukti.

Keterangan: Interval $I_n, n \in \mathbb{N}$ disebut interval bersarang (nested interval).

Buktikan!

Jika $\{E_0, E_1, E_2, \dots\}$ adalah suatu barisan dari himpunan-himpunan dalam P

sedemikian hingga $E_0 \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, maka $\mu(E_0) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$

Bukti:

Ditulis $E_i = [a_i, b_i)$, dengan $i = 1, 2, \dots, \infty$

Jika $a_0 = b_0$

Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang sedemikian hingga $\varepsilon < b_0 - a_0$

Untuk semua $\delta > 0$, jika ditulis $F_0 = [a_0, b_0 - \varepsilon]$ dan $U_i = \left(a_i - \frac{\delta}{2^i}, b_i\right)$ dengan

$i = 1, 2, \dots, \infty$, maka $F_0 \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$

Dan oleh karena itu, berdasarkan Teorema Heine - Borel terdapat suatu bilangan

bulat positif n sedemikian hingga $F_0 \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \mu(E_0) - \varepsilon &= (b_0 - a_0) - \varepsilon < \sum_{i=1}^n \left(b_i - a_i + \frac{\delta}{2^i}\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) + \delta \end{aligned}$$

Karena ε dan δ sebarang

Jadi terbukti.

3.2.5. Teorema :

Jika F suatu kumpulan tertutup terbatas dan G suatu kumpulan terbuka terbatas dengan $F \subseteq G$, maka $\mu(F) \leq \mu(G)$.

Bukti :

Berdasarkan teorema himpunan buka bahwa

Gabungan dari himpunan buka dalam \mathfrak{R} adalah himpunan buka, yaitu jika G_1

buka, maka $\bigcup_i G_i$ buka.

Dan karena himpunan kosong \emptyset adalah himpunan buka di \mathfrak{R} , maka $F \subseteq G$

Misalkan I suatu selang terbuka yang mengandung G karena diketahui $F \subseteq G$

Jelas bahwa I juga mengandung F

Sehingga berdasarkan lemma, bahwa

$I - F$ kumpulan terbuka

Benar bahwa $I = G \cup (I - F)$

Karena $G \subseteq I$, $F \subseteq I$, dan $F \subseteq G$

Maka $G \cap (I - F) \neq \emptyset$

Sehingga $\mu(I) \leq \mu(G) + \mu(I - F)$

$$\Rightarrow \mu(I) - \mu(I - F) \leq \mu(G)$$

Berdasarkan definisi awal bahwa $\mu(F) = (b - a) - \mu((b - a) - F)$

Kemudian disubstitusikan, sehingga diperoleh :

$$\mu(I) - \mu(I - F) \leq \mu(G)$$

$$\Rightarrow \mu(F) \leq \mu(G).$$

Jadi terbukti bahwa jika F suatu kumpulan tertutup terbatas dan G suatu kumpulan terbuka terbatas dengan $F \subseteq G$, maka $\mu(F) \leq \mu(G)$.

Contoh:

Buktikan!

Jika $C = [0,1]$ himpunan kompak, $U = (0,1)$ himpunan terbuka, dan

$$\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \subset (0,1), \text{ maka } \mu\left(\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]\right) \subset \mu((0,1))$$

Maka terdapat himpunan C_0 dan U_0 sedemikian hingga $C \subset U_0 \subset C_0 \subset U$, maka

$$\mu(C) \subset \mu(U_0) \subset \mu(C_0) \subset \mu(U)$$

Bukti:

Misalkan terdapat V suatu himpunan terbuka dan terbatas sedemikian hingga

$$C \subset V \subset U,$$

Maka berdasarkan Teorema 3.2.5. diperoleh $\mu(C) \subset \mu(V) \subset \mu(U)$

Asumsikan bahwa U terbatas.

Ambil f fungsi dalam F sedemikian hingga $f(x)=0$, untuk setiap x dalam

$$C = [0,1] \text{ dan } f(x)=1, \text{ untuk } x \text{ dalam } X - U.$$

Sehingga dapat ditulis

$$U_0 = \left\{ x : f(x) < \frac{1}{2} \right\} \text{ dan } C_0 = \left\{ x : f(x) \leq \frac{1}{2} \right\}$$

$$\text{Jelas bahwa } \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right] \subset \left[0, \frac{1}{2} \right] \subset \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \subset (0,1)$$

$$\text{Atau } C \subset U_0 \subset C_0 \subset U,$$

Berdasarkan Teorema 3.2.5. diperoleh

$$\mu([0,1]) \subset \mu\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) \subset \mu\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) \subset \mu((0,1))$$

$$\text{Atau } \mu(C) \subset \mu(U_0) \subset \mu(C_0) \subset \mu(U)$$

Jadi terbukti.

3.2.6. Teorema :

Jika G suatu kumpulan terbuka terbatas dan M menyatakan himpunan kumpulan

$$\text{tertutup, maka } \mu(G) = \sup_{F \in M, F \subseteq G} \mu(F)$$

Bukti :

Berdasarkan teorema 3.2.5. bahwa $\mu(F) \leq \mu(G)$ jika $F \in M, F \subseteq G$

Dan berdasarkan definisi batas atas, bahwa

Karena $\mu(F) \leq \mu(G)$

Sehingga $\mu(G) =$ batas atas (*upper bound*) himpunan $\{\mu(F) : F \in M, F \subseteq G\}$

Misalkan $\varepsilon > 0$ sebarang, akan dibuktikan adanya suatu $F_0 \in M, F_0 \subseteq G$ dan

$$\mu(F_0) > \mu(G) - \varepsilon$$

Misalkan $\{(a_k, b_k) : k = 1, 2, \dots\}$ koleksi selang komponen terbatas

$$\Rightarrow \mu(G) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(a_k, b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(b_k - a_k)$$

pilih n sehingga $\mu(G) - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{k=1}^n (b_k - a_k) \dots\dots\dots (1)$

untuk setiap $k = 1, 2, \dots, n$

pilih selang tertutup $[c_k, d_k]$, sehingga $[c_k, d_k] \subseteq (a_k, b_k)$ dan

Berdasarkan definisi 3.1.1. pada ukuran terbuka terbatas

Maka $\mu(c_k, d_k) = d_k - c_k$

Berdasarkan Teorema 3.2.5.

$$\Rightarrow \mu(c_k, d_k) = d_k - c_k \leq \mu(a_k, b_k) = (b_k - a_k)$$

Sehingga $\mu(c_k, d_k) = d_k - c_k > (b_k - a_k) - \frac{\varepsilon}{2N} \dots\dots\dots (2)$

Definisikan $F_0 = \bigcup_{k=1}^n [c_k, d_k]$, maka $F_0 \in M, F_0 \subseteq G$

Berdasarkan definisi 3.1.3. pada ukuran kumpulan terbuka terbatas

$$\Rightarrow \mu(F_0) = \sum_{k=1}^n \mu[c_k, d_k] = \sum_{k=1}^n (d_k - c_k) \dots\dots\dots (3)$$

dengan menggabungkan persamaan (1), (2), dan (3), diperoleh :

$$\Rightarrow \mu(F_0) = \sum_{k=1}^n (d_k - c_k) > \sum_{k=1}^n \left((b_k - a_k) - \frac{\varepsilon}{2N} \right) > \mu(G) - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{sehingga } \Rightarrow \mu(F_0) = \sum_{k=1}^n (d_k - c_k) > \sum_{k=1}^n \left((b_k - a_k) - \frac{\varepsilon}{2N} \right) > \mu(G) - \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \mu(F_0) > \mu(G) - \varepsilon$$

Berdasarkan definisi batas atas terkecil (*supremum*).

$\mu(G)$ disebut batas atas terkecil (*supremum*), jika

1. $\mu(F) \leq \mu(G)$
2. $\mu(G) \leq \mu(F_0)$ untuk semua $\mu(F_0)$ batas atas.

Definisi tersebut menyatakan bahwa agar $\mu(G)$ menjadi *supremum*.

Jadi terbukti bahwa jika G suatu kumpulan terbuka terbatas dan M menyatakan

himpunan kumpulan tertutup, maka $\mu(G) = \sup_{F \in M, F \subseteq G} \mu(F)$

Contoh:

Ambil $G = (0,1) \subset H = (0,10)$ dan ambil $F = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right] \subset M[0,10]$ sedemikian hingga

$$F \subseteq G,$$

$$\text{Sehingga } (1) = \sup_{F \in M, F \subseteq G} \left(\frac{1}{6} \right)$$

$$\text{Maka } \mu(G) = \sup_{F \in M, F \subseteq G} \mu(F)$$

3.2.7. Teorema :

Jika F suatu kumpulan tertutup terbatas dan M menyatakan himpunan semua

kumpulan terbuka, maka $\mu(F) = \inf_{G \in H, G \supseteq F} \mu(G)$

Bukti :

Berdasarkan teorema 3.2.5. bahwa

$$\mu(F) \leq \mu(G) \text{ jika } G \in H, G \supseteq F$$

berdasarkan definisi batas bawah, bahwa

$$\text{karena } \mu(F) \leq \mu(G)$$

sehingga $\mu(F)$ = batas bawah (lower bound) himpunan $\{\mu(G) : G \in H, G \supseteq F\}$

Misalkan $\varepsilon > 0$ sebarang akan dibuktikan adanya suatu $G_0 \in H, G_0 \supseteq F$ dan

$$\mu(F) > \mu(G_0) - \varepsilon$$

Berdasarkan lemma dan definisi 3.2.1.

Misalkan I suatu selang terbuka yang mengandung F (kumpulan tertutup terbatas),

maka $I - F$ adalah suatu kumpulan terbuka

Berdasarkan teorema 3.2.6. bahwa

Pilih selang tertutup F_0 , sehingga $F_0 \subseteq I - F$

Berdasarkan teorema 3.2.5.

$$\Rightarrow \mu(F_0) \leq \mu(I - F)$$

Berdasarkan sifat kebalikan dan teorema 3.2.6. bahwa

Untuk $\varepsilon > 0$ sebarang ada suatu $F_0 \in M$

$$\Rightarrow \mu(F_0) > \mu(I - F) - \varepsilon$$

Definisikan $G_0 = I - F_0$, maka $G_0 \in H, G_0 \supseteq F$ dan $\mu(G_0) = \mu(I - F_0)$

$$\Rightarrow \mu(G_0) > \mu(I) - \mu(F_0)$$

Karena telah diketahui bahwa $F_0 \subseteq I - F$ dan diambil sebarang $\varepsilon > 0$, sehingga

kedua ruas masing – masing ditambahkan dengan $\mu(I)$

$$\Rightarrow \mu(G_0) = \mu(I) - \mu(F_0) < \mu(I) - \mu(I - F) + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \mu(G_0) = \mu(I) - \mu(F_0) \leq \mu(I) - \mu(I) + \mu(F) + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \mu(G_0) = \mu(I) - \mu(F_0) \leq +\mu(0) + \mu(F) + \varepsilon \text{ (berdasarkan sifat invers)}$$

$$\Rightarrow \mu(G_0) = \mu(I) - \mu(F_0) \leq \mu(F) + \varepsilon \text{ (berdasarkan sifat identitas)}$$

$$\Rightarrow \mu(G_0) = \mu(F) + \varepsilon$$

Berdasarkan sifat kebalikan, diperoleh :

$$\Leftrightarrow \mu(F) > \mu(G_0) - \varepsilon$$

Berdasarkan definisi batas bawah terbesar (*infimum*), bahwa

$\mu(F)$ disebut batas bawah terbesar (*infimum*), jika

1. $\mu(F) \leq \mu(G)$
2. $\mu(G_0) \leq \mu(F)$ untuk semua $\mu(F_0)$ batas bawah.

Definisi tersebut menyatakan bahwa agar $\mu(F)$ menjadi *infimum*.

Jadi terbukti bahwa Jika F suatu kumpulan tertutup terbatas dan M menyatakan

himpunan semua kumpulan terbuka , maka $\mu(F) = \inf_{G \in H, G \supseteq F} \mu(G)$

Contoh:

$$\text{Ambil } F = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right] \subset M = [0,10]$$

Dan ambil $G = (0,1) \subset H(0,10)$ sedemikian hingga $G \supseteq F$

$$\text{Sehingga } \left(\frac{1}{6} \right) = \inf_{G \in H, G \supseteq F} (1)$$

$$\text{Maka } \mu(F) = \inf_{G \in H, G \supseteq F} \mu(G)$$

3.2.8. Teorema :

Jika $F_i \in M (i = 1, 2, \dots, n)$ dan $F_i \cap F_j = \emptyset (i \neq j)$, maka $\mu\left(\bigcup_{i=1}^n F_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(F_i)$

Bukti :

Pembuktiannya dengan menggunakan *induksi matematika*.

- Akan dibuktikan : benar untuk $n = 2$

Jika $F_i \in M (i = 1, 2)$ dan $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, maka $\mu(F_1 \cup F_2)$

Misalkan $I_1 = [a_1, b_1]$ selang tertutup terkecil yang mengandung F_1 , dan

Misalkan $I_2 = [a_2, b_2]$ selang tertutup terkecil yang mengandung F_2 .

Karena $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, maka berdasarkan definisi dalam interval tertutup, bahwa

$$[a_1, b_1] = \{x \in \mathfrak{R} \mid a_1 \leq x \leq b_1\}, \text{ sehingga } a_1 < b_1, \text{ dan}$$

$$[a_2, b_2] = \{x \in \mathfrak{R} \mid a_2 \leq x \leq b_2\}, \text{ sehingga } a_2 < b_2.$$

$$\Rightarrow a_1 < b_1 < a_2 < b_2$$

Sehingga $I = [a_1, b_2]$ adalah selang tertutup terkecil yang mengandung

$$F = F_1 \cup F_2$$

Berdasarkan lemma bahwa

$$I_1 - F_1 \text{ adalah kumpulan terbuka, sebut } G_1 = I_1 - F_1 \text{ dan}$$

$$I_2 - F_2 \text{ adalah kumpulan terbuka, sebut } G_2 = I_2 - F_2$$

$$\Rightarrow G = I - F = I - (F_1 \cup F_2) \dots\dots\dots (1)$$

berdasarkan teorema himpunan buka, bahwa

Gabungan dari himpunan buka dalam \mathfrak{R} adalah himpunan buka, yaitu jika G

buka, maka $\bigcup_i G_i$ buka.

$$\Rightarrow G = G_1 \cup G_2 \cup \{x \in \mathfrak{R} \mid b_1 < x < a_2\}$$

$$\Rightarrow G = G_1 \cup G_2 \cup (b_1, a_2) \dots \dots \dots (2)$$

dengan mensubstitusi persamaan (2) ke (1) :

$$\Rightarrow G = I - (F_1 \cup F_2)$$

$$\Rightarrow G_1 \cup G_2 \cup (b_1, a_2) = I - (F_1 \cup F_2)$$

$$\Leftrightarrow I - (F_1 \cup F_2) = G_1 \cup G_2 \cup (b_1, a_2)$$

$$\Rightarrow I = G_1 \cup G_2 \cup (b_1, a_2) + (F_1 \cup F_2)$$

$$\Rightarrow I = G_1 \cup G_2 \cup (b_1, a_2) \cup (F_1 \cup F_2)$$

$$\Rightarrow I = (G_1 \cup F_1) \cup (G_2 \cup F_2) \cup (b_1, a_2)$$

$$\Rightarrow I = I_1 \cup I_2 \cup (b_1, a_2) \dots \dots \dots (3)$$

Karena $G = I - F$ pada persamaan (1), maka $\mu(G) = \mu(I) - \mu(F)$

$$\text{Sehingga } \mu(F) = \mu(I) - \mu(G) \dots \dots \dots (4)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3) pada (4)

$$\Rightarrow \mu(F) = (\mu(I_1) + \mu(I_2) + \mu(b_1, a_2)) - \mu(G) \dots \dots \dots (5)$$

Dengan mensubstitusi persamaan (2) pada (5)

$$\Rightarrow \mu(F) = (\mu(I_1) + \mu(I_2) + \mu(b_1, a_2)) - (\mu(G_1) + \mu(G_2) + \mu(b_1, a_2))$$

$$\Rightarrow \mu(F) = \mu(I_1) + \mu(I_2) + \mu(b_1, a_2) - \mu(G_1) - \mu(G_2) - \mu(b_1, a_2) \text{ (sifat distributif).}$$

$$\Rightarrow \mu(F) = \mu(I_1) + \mu(I_2) - \mu(G_1) - \mu(G_2) \text{ (berdasarkan sifat invers)}$$

$$\Rightarrow \mu(F) = (\mu(I_1) - \mu(G_1)) + (\mu(I_2) - \mu(G_2))$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4)

$$\Rightarrow \mu(F) = \mu(F_1) + \mu(F_2)$$

$$\Leftrightarrow \mu(F_1 \cup F_2) = \mu(F_1) + \mu(F_2)$$

Jadi terbukti benar untuk $n = 2$ bahwa jika $F_i \in M (i = 1, 2)$ dan $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, maka

$$\mu(F_1 \cup F_2)$$

- Asumsikan benar untuk $n = k$

$$F_i \in M (i = 1, 2, \dots, k) \text{ dan } F_i \cap F_j = \emptyset (i \neq j), \text{ maka } \mu\left(\bigcup_{i=1}^k F_i\right) = \sum_{i=1}^k \mu(F_i)$$

- Akan dibuktikan : benar untuk $n = k + 1$

Karena $F_i \cap F_j = \emptyset (i \neq j)$ dan $F_i \in M (i = 1, 2, \dots, k)$, maka $\bigcup_{i=1}^k F_i \in M$ dan jika

$$F_i = F_{k+1} \text{ dan } F_j = \bigcup_{i=1}^k F_j \in M$$

$$\Rightarrow F_{k+1} \cap \left(\bigcup_{i=1}^k F_i\right) = \emptyset$$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} F_i\right) = \mu\left(\left(\bigcup_{i=1}^k F_i\right) \cup F_{k+1}\right)$$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} F_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^k F_i\right) \cup \mu(F_{k+1})$$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} F_i\right) = \sum_{i=1}^k \mu(F_i) + \mu(F_{k+1})$$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} F_i\right) = \sum_{i=1}^{k+1} \mu(F_i)$$

Jadi benar untuk $n = k + 1$, bahwa $\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} F_i\right) = \sum_{i=1}^{k+1} \mu(F_i)$

Karena untuk $n = 2$ benar, untuk $n = k$ diasumsikan benar, dan untuk $n = k + 1$ benar, sehingga menurut induksi matematika terbukti bahwa Jika

$$F_i \in M (i = 1, 2, \dots, n) \text{ dan } F_i \cap F_j = \emptyset (i \neq j), \text{ maka } \mu \left(\bigcup_{i=1}^n F_i \right) = \sum_{i=1}^n \mu(F_i)$$

Adapun pembuktian secara sederhana :

(A) Teorema 3.1.7. bagian (c), bahwa

$$\text{Jika } G_i \cap G_j = \emptyset (i \neq j), \text{ maka } \mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_i)$$

(B) Teorema, bahwa :

Tiap – tiap himpunan tak hingga (*infinite*) memuat himpunan bagian yang *denumerabel*.

Berdasarkan (A) dan (B), diperoleh :

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^n F_i &\subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \text{ dan } \sum_{i=1}^n \mu(F_i) \subset \sum_{i=1}^{\infty} \mu(F_i) \\ \Rightarrow \mu \left(\bigcup_{i=1}^n F_i \right) &\leq \mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) \text{ dan } \sum_{i=1}^n \mu(F_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(F_i) \end{aligned}$$

Jadi terbukti benar bahwa $F_i \in M (i = 1, 2, \dots, n)$ dan $F_i \cap F_j = \emptyset (i \neq j)$, maka

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^n F_i \right) = \sum_{i=1}^n \mu(F_i) \leq \mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(F_i) \text{ atau } \mu \left(\bigcup_{i=1}^n F_i \right) = \sum_{i=1}^n \mu(F_i)$$

Contoh:

Buktikan!

$$\text{Jika } F_1 = [1, 2], F_2 = [5, 6], \text{ dan } F_1 \cap F_2 = \emptyset, \text{ maka } \mu \left(\bigcup_{i=1}^2 F_i \right) = \sum_{i=1}^2 \mu(F_i)$$

Bukti:

Misalkan $I_1 = [0,2] \supset F_1 = [1,2]$

Dan $I_2 = [4,6] \supset F_2 = [5,6]$

Ambil $G_1 = I_1 - F_1 = [0,2] - [0,1] = [0,1]$

Dan $G_2 = I_2 - F_2 = [4,6] - [5,6] = [4,5]$

$$\begin{aligned}\mu(F_1) + \mu(F_2) &= (\mu(I_1) - \mu(G_1)) + (\mu(I_2) - \mu(G_2)) \\ &= (\mu([0,2]) - \mu([0,1])) + (\mu([4,6]) - \mu([4,5])) \\ &= \mu([1,2]) + \mu([5,6]) \\ &= 1 + 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

Karena $G = I - F = i - (F_1 \cup F_2)$, maka $F_1 \cup F_2 = I - G$

$$\begin{aligned}\text{Sehingga } \mu(F_1 \cup F_2) &= \mu(I - G) \\ &= \mu((I_1 \cup I_2) - (G_1 \cup G_2)) \\ &= \mu([0,2] \cup [4,6] - [0,1] \cup [4,5]) \\ &= \mu([0,2] - [0,1] \cup [4,6] - [4,5]) \\ &= ([1,2] \cup [5,6]) \\ &= 1 + 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

Jadi terbukti.

3.3. Integrasi Antara QS Al – Qomar Ayat 49 dengan Ukuran Lebesgue dalam Garis Bilangan Real.

Matahari, bumi, bulan, serta planet-planet yang lain. Semuanya berbentuk bola. Bukankah bola merupakan bangun geometri? Perhatikan bentuk lintasan

bumi saat mengelilingi matahari, demikian juga lintasan-lintasan planet lain saat mengelilingi matahari. Lintasannya berbentuk elips. Bukankah elips merupakan bangun geometri? Bukankah geometri merupakan cabang matematika? Berdasarkan fakta ini, tidaklah salah jika kemudian Galileo mengatakan “Mathematics is the language with which God created the universe”.

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi. Sungguh, tidak salah kiranya jika penulis menyatakan bahwa Allah maha matematis.

Semua yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitungan-hitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya. Ahli matematika atau fisika tidak membuat suatu rumus sedikitpun. Mereka hanya menemukan rumus atau persamaan. Albert Einstein tidak membuat rumus $e = mc^2$, dia hanya menemukan dan menyibolkannya dalam bahasa matematika. Lihatlah bagaimana Archimedes menemukan hitungan mengenai volume benda melalui media air. Hukum Archimedes itu sudah ada sebelumnya, dan dialah yang menemukan pertama kali melalui hasil menelaah dan membaca ketetapan Allah (Abdusysykir, 2007:79).

Semua jenis ukuran ditetapkan melalui perhitungan-perhitungan. Dan semua bentuk perhitungan tersebut menghasilkan suatu ukuran yang digambarkan dalam angka-angka. Satuan ukuran panjang, berat, volume, kecepatan, tinggi nada, dan lain-lain.

Perhitungan digunakan di seluruh aspek kehidupan tanpa ada batasan ruang dan waktu. Hasil dari perhitungan menjadikan sebuah ukuran. Apakah ada kehidupan ini dimana satuan ukuran tidak terlihat? Bahkan metode penelitian yang bersifat kualitatifpun dapat dikonversi menjadi ukuran yang kuantitatif dengan menggunakan skala Likert. Betapa pentingnya ukuran bagi berlangsungnya proses kehidupan. Bagi manusia, ukuran yang ditetapkan dalam satuan angka, merupakan hal yang sangat berarti. Satuan ukuran ditetapkan dalam seluruh dimensi kehidupan dan keberlangsungan manusia dan alam semesta yang meliputi ukuran jarak, waktu, gaya energi, massa, dan sebagainya. Tidak terhitung banyaknya jenis ukuran yang dipergunakan oleh manusia untuk melakukan perhitungan dalam segala aspek kehidupan.

Segala ketentuan-ketentuan yang berlaku dalam bilangan angka di hamparan semesta raya merupakan bagian dari master plan penciptaan-Nya dalam hitungan matematis yang teramat tinggi. Oleh karena itu, seluruh karya cipta-Nya sejak dentuman besar hingga saat ini berjalan dalam keteraturan. Dan detik ini tanpa disadari oleh para penggunan teknologi, semua bentuk teknologi yang kita pergunkan dari radio, televisi, komunikasi (handphone, internet, dan lain-lain) dan bahkan teknologi tingkat tinggi dan tercanggih sekalipun menggunakan bahasa yang sama: matematika.

Seorang ahli matematika harus mempelajari angka-angka, permutasi, dan sifat-sifatnya. Aspek ini disebut aritmatika atau perhitungan. Ketika berhadapan dengan persamaan atau untuk mengetahui sesuatu yang belum diketahui tetapi dapat disimbolkan dengan rumus dan persamaan, maka lahirlah aljabar. Dan

ketika berhadapan dengan format, ukuran, dan posisi, maka lahirlah geometri. Banyak orang berpendapat bahwa antara aritmatika, aljabar, dan geometri adalah tiga hal yang berbeda, padahal sesungguhnya. Semua saling bekerja sama, saling membantu dan terkait satu sama lain, sehingga terbentuk sebuah komposisi alam semesta yang sangat sempurna dan menakjubkan.

Pada masa-masa mutakhir ini, pemodelan-pemodelan matematika yang dilakukan manusia sebenarnya bukan membuat sesuatu yang baru. Pada hakikatnya, mereka hanya mencari persamaan-persamaan atau rumus-rumus yang berlaku pada suatu fenomena. Bahkan, wabah seperti demam berdarah, malaria, tuberkolosis, bahkan flu burung ternyata mempunyai aturan-aturan yang matematis. Sungguh, segala sesuatu telah diciptakan dengan ukuran, perhitungan, rumus, atau persamaan tertentu yang rapi dan teliti (Abdusysykir, 2007:80).

Dari benda yang paling besar hingga benda yang tidak nampak oleh kita telah ditetapkan-Nya dengan beraneka macam. Segala sesuatu diciptakan-Nya menurut ukurannya masing-masing. Dan fenomena ukuran menjadi lebih menarik lagi tatkala ditemukan bahwa banyak struktur materi di alam semesta di bentuk oleh struktur "Proporsi Agung" atau "Golden Ratio" atau "Rasio Emas", 1.618 yang banyak ditemukan di alam semesta, juga pada manusia (proporsi tubuh, DNA) (Salma, 2007:24).

Dan Stephen Hawking, yang pada awalnya tidak membutuhkan hipotesis Tuhan dalam mempelajari alam semesta, meyakini adanya unsur matematika yang mengagumkan yang melekat di dalam struktur kosmos, sehingga akhirnya dia mengatakan, "Tuhanlah yang berbicara dengan bahasa itu"(Gholsani, 1995:23).

Beberapa peristiwa akan berakibat fatal pada kehidupan manusia apabila masalah ukuran di abaikan begitu saja. Contohnya yang terjadi pada sebuah pesawat luar angkasa Mars Climate Orbiter (MCO) pada tanggal 30 September 1999, yang sedang melakukan penjelajahan orbit planet Mars mengalami kecelakaan. Setelah diselidiki, ternyata petaka tersebut bukan disebabkan oleh kurang canggihnya teknologi yang dipakai, tapi karena ketidaksesuaian aplikasi sistem satuan antara NASA sebagai operator dengan Lockheed Martin Astronautics pabrik pembuatnya. NASA terbiasa menggunakan satuan internasional (Kilometer, Gram, Newton) sementara Lockheed Martin terbiasa dengan satuan Inggris (Mil, Pound).

Pada abad ke-13, raja Mesir, Ramses II (1290-1224 SM) ketika sedang membangun piramida merasakan kesulitan karena setiap daerah kekuasaannya mengirimkan bantuan dalam ukuran yang berbeda. Hingga akhirnya Ramses II merentangkan lebar tangannya, dan berkata “Sejak saat ini satuan panjang yang dipakai hanyalah satu: jarak dari ujung sikuku hingga ke ujung jari tengahku”. Maka lahirlah standar satuan panjang di Mesir yang dinamakan Kubit, berasal dari bahasa Latin Cubitus yang berarti siku.

Pada abad ke-18, dunia dipenuhi berbagai satuan panjang antara lain: kaki (feet), inci, yard, dan sebagainya. Bahkan sebuah satuan yang sama ternyata diartikan berbeda di masing-masing negara ada yang disebut kaki Belanda, kaki Jerman, kaki Italia, dan lainnya. Lebih membingungkan lagi perbedaanpun terjadi didalam setiap negara. Saat itu terdapat 55 buah jenis standar satuan kaki di Belanda, dan 30 buah di Jerman. Untuk mengatasi masalah perbedaan ukuran ini,

Mouton, seorang matematikawan Prancis, mengusulkan agar dibuat sebuah standar panjang yang global. Patokan yang akan dipakai adalah dalam ukuran bumi (Salma, 2007:25).

Dengan bantuan pemerintah Prancis sebuah standar satuan panjang diumumkan, yaitu meter (berasal dari bahasa Yunani, metron, yang berarti mengukur). Besarnya nilai satu meter saat itu memiliki dua definisi yaitu sebagai panjang setengah lintasan pendulum yang bergerak selama satu detik dan satu persepuluh juta panjang seperempat keliling bumi (diambil garis lurus yang menghubungkan kutub, melalui Paris, hingga ke garis katulistiwa).

Tahun 1791, setelah meletusnya Revolusi Prancis, Akademi Ilmu Pengetahuan Prancis memilih definisi kedua dengan alasan gaya gravitasi bumi berbeda untuk setiap lokasi. Tahun 1960 pada saat Conference Generale des Poids et Mesures (CGPM) dibuatlah definisi baru tentang satuan meter yang mengacu pada panjang gelombang radiasi krypton-86. Di tahun 1983, dalam forum yang sama, definisi tersebut diubah kembali untuk meminimalkan ketidakpastian yaitu 1 meter adalah panjang lintasan yang dilalui cahaya pada ruang hampa selama interval waktu satu per 299.792.458 detik (Salma, 2007:26).

Dari contoh di atas semakin membuktikan bahwa penciptaan-Nya memiliki tujuan dan tidak sekedar bermain dadu (kebetulan seperti salah satu perkataan Einstein yang terkenal "Tuhan tidak sedang bermain dadu"). Pernyataan ini sebenarnya telah kadaluarsa bila kita memperhatikan bahwa 1200 tahun sebelum pernyataan Einstein, Al-Qur'an sudah mengatakannya dengan tegas

(Hought,2004:27). "Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran" (Al-Qomar/54:49).

Matematika itu pada dasarnya berkaitan dengan pekerjaan menghitung, termasuk teori ukuran Lebesgue, sehingga tidak salah jika kemudian ada yang menyebut matematika adalah ilmu hitung atau ilmu al – hisab. Dalam urusan hitung menghitung ini, Allah adalah rajanya. Allah sangat cepat dalam menghitung dan sangat teliti. Kita perhatikan ayat-ayat Al – Qur'an yang menjelaskan bahwa Allah sangat teliti.

Aktivitas memperhatikan, memikirkan, memahami, menggunakan akal yang banyak dianjurkan oleh Allah SWT dalam Al – Qur'an merupakan sebuah rangkaian metode penelitian ilmiah untuk menghasilkan teori-teori ilmiah untuk menghasilkan teori-teori ilmu pengetahuan, yang semuanya terkandung dalam 2 kegiatan yaitu membaca dan menulis, seperti halnya Allah memberikan Al – Kitab yang berarti tulisan dan Al – Qur'an yang berarti bacaan. Dan dengan Qalam Allah memproses penciptaan dan pengembangan alam semesta beserta isinya, baik yang di langit maupun di bumi, baik yang tampak maupun yang tidak, berjalan hingga detik ini dalam keteraturan dan ketentuan-Nya dalam bentuk ukuran, massa, kecepatan, dan seluruh perhitungan di jagad raya dengan ketelitian yang tidak banding dan tidak akan ada yang mampu untuk menandingi-Nya. Semuanya dalam satuan angka.

Allah telah menciptakan segala sesuatu di alam semesta dengan "Ukuran yang tepat", dan jika terlihat penyimpangan ini disebabkan karena ilmu pengetahuan masih terlalu dini untuk memahaminya.

Islam tidak mengenal pertentangan antara sains dan agama. Belum ada kasus seperti kasus Galileo dalam islam, yang dihukum pancung oleh gereja. Islam terbuka bagi segala macam ilmu. Bukti yang nyata adalah bagaimana Al – Qur'an menyebut sekitar 750 ayat yang berkaitan dengan penciptaan alam semesta ($\frac{1}{8}$ dari ayat Al-Qur'an) dan puluhan ayat yang berakhir dengan anjuran dan perintah untuk memperhatikan, memikirkan, menggunakan akal, dan memahami tanda-tanda ciptaan-Nya di alam semesta.

Puluhan ayat yang berakhir dengan anjuran dan perintah untuk memperhatikan, memikirkan, menggunakan akal, dan memahami tanda-tanda ciptaan-Nya di alam semesta. Begitu pula dengan definisi ukuran Lebesgue yang merupakan salah satu ukuran yang diciptakan oleh Allah SWT yang kemudian ditemukan oleh Henry Leon Lebesgue, juga harus diperhatikan, dipikirkan, dipahami, dan dibuktikan kebenaran teorema-teoremanya.

BAB IV PENUTUP

4.1. Kesimpulan.

Jika M menyatakan koleksi kumpulan terbuka terbatas dan μ menyatakan fungsi ukuran, maka $\mu : M \rightarrow \mathfrak{R}$ bersifat:

$$(a) 0 \leq \mu(G) < \infty (G \in M);$$

$$(b) G_i \in M (i = 1, 2), G_1 \subseteq G_2 \Rightarrow \mu(G_1) \leq \mu(G_2);$$

$$(c) G_i \in M (i = 1, 2, \dots), G_i \cap G_j = \phi, (i \neq j) \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_i);$$

$$(d) G_i \in M (i = 1, 2, \dots) \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_i).$$

Jika H menyatakan koleksi kumpulan tertutup terbatas, maka $\mu : H \rightarrow \mathfrak{R}$ bersifat:

$$(a) 0 \leq \mu(F) < \infty (F \in H);$$

$$(b) F_i \in H (i = 1, 2), F_1 \subseteq F_2 \Rightarrow \mu(F_1) \leq \mu(F_2);$$

$$(c) F_i \in H (i = 1, 2, \dots), F_i \cap F_j = \phi, (i \neq j) \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(F_i).$$

4.2. Saran.

Teorema–teorema dan lemma–lemma dalam Ukuran Lebesgue dalam Garis Real cukup menarik untuk dibuktikan oleh penulis, karena sangat banyak berhubungan dengan teorema–teorema dan lemma–lemma yang telah diperoleh selama dibangku perkuliahan, khususnya di dalam mata kuliah bidang matematika analisis.

Selaku penulis dan pengamat, maka dalam hal ini ada beberapa saran yang sifatnya konstruktif yang bisa diberikan demi kemajuan dan perkembangan ilmu matematika di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.

4.2.1. Bagi Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.

Pada hasil penelitian dalam skripsi yang dilakukan diharapkan dapat menginformasikan dan memberikan ilmu, wawasan, serta pengetahuan kepada lembaga akan pentingnya masalah Ukuran Lebesgue dalam Garis Real. Karena hal itu di perlukan untuk menyelesaikan masalah integral Lebesgue.

Sehingga lembaga dapat memberikan bahasan tersebut di dalam bangku perkuliahan.

4.2.2. Bagi Peneliti Selanjutnya.

Mengembangkan dan memperluas tema yang sudah diteliti dalam skripsi studi literatur ini, terutama ditekankan pada pembahasan Ukuran Lebesgue di Ruang Euclide \mathfrak{R}^n .

Atas perhatian dan kebijaksanaannya, sebelum dan sesudahnya penulis ucapkan terima kasih.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdusysysakir. 2006. *Analysis Real I*. Malang: UIN Malang Press.
- Abdusysykir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.
- Bartle, R. G. and Serbet, D. R. 1994. *Introduction to Real Analysis*. New York: John Wiley and Sons.
- Depag RI. 1989. *Al – Quran dan Terjemahannya*. Surabaya: CV. Jaya Sakti.
- Echols, John M dan Hasan Shadily. 1976. *Kamus Inggris Indonesia*. Jakarta: Gramedia.
- Goldbert, R. 1976. *Method of Real Analysis, 2nd edition*. New York: John Wiley and Sons.
- Halmos, Paul R. 1978. *Measure Theory*. New York: Springer–Verlag Toppan Company.
- Hutahaean. 1980. *Fungsi Riil*. Bandung: Institut Teknologi Bandung.
- Jones, Frank. 1993. *Lebesgue Integration on Euclidean Space*. London: Jones and Bartlett Publishers International.
- Mustafa Al – Maragi, Ahmad. 1993. *Terjemah Tafsir Al – Maragi Juz 26*. Semarang: CV. Toha Putra Semarang.
- Parzynski and Zipse. 1982. *Introduction to Mathematical Analysis*. New York: Mc Grow–Hill Book Company.
- Quraish Shihab, Muhammad. 2002. *Tafsir Al-Misbakh*. Jakarta: Lentara hati.
- Salma, Abah. 2007. *Keseimbangan Matematika dalam Al – Qur'an*. Jakarta: Republika.
- Stoll, Manfred. 2001. *Introduction to Real Analysis, 2nd edition*. New York: Addison Wesley Longmann, Inc.
- Wahyudin. 1987. *Dasar-dasar Topologi*. Bandung: Tarsito.
- Wheeden, Richard L. dan Zygmund, Antoni. 1977. *Measure and Integral An Introduction to Real Analysis*. New York: Madison Avenue.

CURICULUM VITAE

Nama Lengkap : MUTHMAINNAH.

Tempat/tanggal lahir: Pasuruan, 10 Oktober 1985.

Alamat : Jl. Salak No.481 RT. 04 RW. 03 Kidul Dalem,
Kec. Bangil, Kab. Pasuruan, Jawa Timur.

Pendidikan terakhir : Semester IX Jurusan Matematika Fakultas Sains dan
Teknologi.

Graduasi Pendidikan :

TK Islam Khodijah Bangil (Pasuruan) Tahun 1992.

SDNU/MINU Bangil (Pasuruan) Tahun 1998.

MTs. Ma'arif Bangil (Pasuruan) Tahun 2001.

SMA Negeri I Bangil (Pasuruan) Tahun 2004.

UIN Jurusan Matematika (Malang) Tahun 2004 – sekarang.

UIN Program Akta Mengajar VI (Malang) Tahun 2007 – sekarang