MENYELESAIKAN SISTEM KONGRUENSI LINEAR DENGAN METODE ELIMINASI-SUBTITUSI DAN METODE INVERS MATRIKS

(Menggunakan 3 kongruensi 3 variabel dan 4 kongruensi 4 variabel)

Oleh

Abdur Rohman Wahid

03510039

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MALANG

2007

MENYELESAIKAN SISTEM KONGRUENSI LINEAR DENGAN METODE ELIMINASI-SUBTITUSI DAN METODE INVERS MATRIKS

(Menggunakan 3 kongruensi 3 variabel dan 4 kongruensi 4 variabel)

SKRIPSI

Oleh:

Abdur Rohman Wahid
NIM: 03510039

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MALANG
MALANG
2007

MENYELESAIKAN SISTEM KONGRUENSI LINEAR DENGAN METODE ELIMINASI-SUBTITUSI DAN METODE INVERS MATRIKS
(Menggunakan 3 kongruensi 3 variabel dan 4 kongruensi 4 variabel)

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:

Abdur Rohman Wahid
NIM: 03510039

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MALANG
MALANG
2007

MENYELESAIKAN SISTEM KONGRUENSI LINEAR DENGAN METODE ELIMINASI-SUBTITUSI DAN METODE INVERS MATRIKS (Menggunakan 3 kongruensi 3 variabel dan 4 kongruensi 4 variabel)

Oleh:

Abdur Rohman Wahid
NIM: 03510039

Telah Disetujui untuk Diuji

Malang, 11 Desember 2007

Dosen Pembimbing I,	Dosen Pembimbing II,
Drs.H.Turmudi, M.Si	**Ach Nasihchuddin, M.A.**
NIP 150 209 630	**NIP 150 302 531**

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M. Si
NIP 150 318 321

MENYELESAIKAN SISTEM KONGRUENSI LINEAR DENGAN METODE ELIMINASI-SUBTITUSI DAN METODE INVERS MATRIKS (Menggunakan 3 kongruensi 3 variabel dan 4 kongruensi 4 variabel)

SKRIPSI

OLEH

ABDUR ROHMAN WAHID
NIM 03510039

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal:

17 Desember 2007

Susunan Dewan Penguji:		**Tanda Tangan**
1. Penguji Utama	**: Wahyu H. Irawan, M.Pd**	**( )**
2. Ketua	**: Evawati Alisah, M.Pd**	**( )**
3. Sekretaris	**: Drs.H.Turmudi, M.Si**	**( )**
4. Anggota	**: Ach Nasihuddin, M.A**	**( )**

Mengetahui dan Mengesahkan
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M. Si
NIP 150 318 321

MOTTO

وَمَن يَتَوَكَّلْ عَلَى ٱللَّهِ فَهُوَ حَسْبُهُۥٓ ۚ

Barangsiapa yang bertawakkal kepada Allah niscaya Allah akan mencukupkan (keperluan)nya

وَعِبَادُ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱلَّذِينَ يَمْشُونَ عَلَى ٱلْأَرْضِ هَوْنًا وَإِذَا خَاطَبَهُمُ
ٱلْجَٰهِلُونَ قَالُوا۟ سَلَٰمًا

Dan hamba-hamba Tuhan yang Maha Penyayang itu (ialah) orang-orang yang berjalan di atas bumi dengan rendah hati dan apabila orang-orang jahil menyapa mereka, mereka mengucapkan kata-kata (yang mengandung) keselamatan.

قُلْ إِن كُنتُمْ تُحِبُّونَ ٱللَّهَ فَٱتَّبِعُونِى يُحْبِبْكُمُ ٱللَّهُ وَيَغْفِرْ لَكُمْ ذُنُوبَكُمْ ۗ

Katakanlah: "Jika kamu (benar-benar) mencintai Allah, ikutilah Aku, niscaya Allah mengasihi dan mengampuni dosa-dosamu."

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Segala puji bagi Allah SWT karena atas rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Malang.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Untuk itu, iringan do'a dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, utamanya kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
2. Prof. Drs Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.
3. Ibu Sri Harini, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.
4. Bapak Drs.H.Turmudi,M.Si yang telah bersedia meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan dan pengarahan selama penulisan skripsi di bidang matematika..
5. Bapak Ach.Nasihchuddin M.A yang telah bersedia meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan dan pengarahan selama penulisan skripsi di bidang kajian keislaman.
6. Segenap dosen pengajar atas ilmu yang telah diberikan kepada penulis.

7. Alm Ayah dan Ibunda tercinta dan segenap keluarga yang senantiasa memberikan do'a dan dukungan yang terbaik bagi penulis.
8. Teman-teman Matematika, terutama angkatan 2003 beserta semua pihak yang telah membantu penyelesaian skripsi ini.

Dalam penyusunan skripsi ini tentunya masih terdapat banyak kesalahan dan kekurangan, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran demi perbaikan skripsi ini. Akhirnya, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Amien.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang,10 Desember 2007

Penulis

DAFTAR ISI

ABSTRAK

Wahid, Abdur Rohman. 2007. **Menyelesaikan Sistem Kongruensi Linear Dengan Metode Eliminasi-Subtitusi Dan Metode Invers Matriks (Menggunakan 3 Kongruensi 3 Variabel Dan 4 Kongruensi 4 Variabel).** Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang
Pembimbing: Drs.Turmudi,M. Si
Ach.Nasihchuddin, M.A.

Kata Kunci: Kongruensi Linier,Eliminasi-Subtitusi,Invers Matriks,Adil.

Kongruensi adalah Salah satu bahasan dalam teori bilangan. kongruensi mempunyai sifat-sifat yang sama dengan persamaan dalam aljabar.Dalam kongruensi masalah utamanya adalah menentukan bilangan bulat x sehingga memenuhi kongruensi $f(x) \equiv 0 \pmod{m}$; f(x) adalah polynomial dengan koefisien bulat.Kongruensi yang paling sederhana adalah kongruensi yang berderajat satu,yang pangkat tertinggi variabel terikatnya adalah 1, dan disebut kongruensi linier. Jika dalam dalam aljabar dikenal dengan persamaan linier yang berbentuk $ax = b$; $a \neq 0$, maka dalam teori bilangan dikenal kongruensi linier yang berbentuk $ax \equiv b \pmod{m}$.

Sistem kongruensi linier ini dalam penggunaannya dapat diselesaikan dengan dua metode yaitu dengan metode Eliminasi-Subtitusi dan metode Invers Matriks. Metode Eliminasi-Subtitusi merupakan gabungan 2 metode. Dalam penyelesaiannya metode Subtitusi biasanya bekeja lebih lambat dalam menentukan variabel pertama, tapi sangat cepat menentukan variabel kedua setelah variabel pertama diketahui. Sementara metode Eliminasi justru lebih cepat menentukan variabel pertama tapi lebih lambat dalam menentukan variabel kedua karena proses eliminasi diulang lagi dari awal.

Invers Matriks merupakan salah satu cara terbaik dalam penyelesaian kongruensi linier, karena dalam penyelesaian ini menggunakan 3 dan 4 variabel serta 3 dan 4 kongruensi. Maka suatu kongruensi nantinya dibentuk suatu matriks, kemudian dicari matriks inversnya.

Kesamaan erat kaitannya dengan adil atau keadilan, karena dalam proses penyelesaiannya sistem kongruensi menentukan suatu variabel sehingga menghasilkan suatu hasil yang sama atau berimbang. Dan adil merupakan sifat yang selalu diperintahkan kepada manusia dan banyak terdapat didalam Al-qur’an. Sedangkan sistem kongruensi sendiri lebih efisien jika menggunakan sebuah metode dalam proses penyelesaiannya, maka metode eliminasi-subtitusi dan invers matrik bisa digunakan untuk menyelesaikan sistem kongruensi linier ini,dimana menggunakan tiga kongruensi tiga variabel dan empat kongruensi empat variabel

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Matematika secara umum didefinisikan sebagai bidang ilmu yang mempelajari pola dari struktur, perubahan, dan ruang; secara informal, dapat pula disebut sebagai ilmu tentang bilangan dan angka. Dalam pandangan formalis, matematika adalah penelaahan struktur abstrak yang didefinisikan secara aksioma dengan menggunakan logika simbolik dan notasi matematika; ada pula pandangan lain, misalnya yang dibahas dalam filosofi matematika. Matematika ialah ilmu dasar yang mendasari ilmu pengetahuan lain. (http://www.infofx-teori bilangan.htm.org.com).

Teori bilangan adalah cabang dari ilmu matematika yang mempelajari sifat-sifat bilangan bulat,beberapa sifat dari bilangan bulat adalah tertutup, komutatif asosiatif,identitas dan semuanya berlaku terhadap operasi penjumlahan dan perkalian bilangan bulat.

Salah satu bahasan dalam teori bilangan adalah kongruensi linier. Sebenarnya kongruensi mempunyai sifat-sifat yang sama dengan persamaan dalam aljabar. Dalam aljabar,masalah utamanya adalah menentukan akar-akar persamaan yang dinyatakan dengan $f(x) = 0$; $f(x)$ adalah suatu polynomial.demikian halnya dengan kongruensi, permasalahannya adalah menentukan bilangan bulat x sehingga memenuhi kongruensi $f(x) \equiv 0 \pmod{m}$; $f(x)$ adalah polynomial dengan koefisien bulat.

Kongruensi yang paling sederhana adalah kongruensi yang berderajat satu,yang pangkat tertinggi variabel terikatnya adalah 1, dan disebut kongruensi linier. Jika dalam dalam aljabar dikenal dengan persamaan linier yang berbentuk $ax = b$; $a \neq 0$, maka dalam teori bilangan dikenal kongruensi linier yang berbentuk $ax \equiv b \pmod{m}$.

Dalam penyelesaian masalah kongruensi ini, hal yang paling mendasar adalah bagaimana menentukan bilangan bulat x sehingga memenuhi kongruensi $f(x) \equiv 0 \pmod{m}$. Menentukan x dalam kongruensi ini, sebenarnya sama halnya dengan menentukan penyelesaian sistem persamaan linier, dimana ada beberapa metode atau cara yang digunakan dalam menyelesaikannya, dan ini sangat sulit jika diselesaikan dengan cara biasa, karena dalam penyelesaiannya kami menggunakan 3 dan 4 variabel sehingga dengan cara biasa akan terasa sulit dan membutuhkan waktu yang lama dan kurang sistematis, dan penyelesaian ini akan lebih efisien jika menggunakan suatu metode.

Sistem kongruensi linier ini dalam penggunaannya dapat diselesaikan dengan dua metode yaitu dengan metode Eliminasi-Subtitusi dan metode Invers Matriks. Alasan dari menggunakan kedua metode tersebut adalah bahwa keduanya merupakan cara yang tepat dalam proses penyelesaian sistem kongruensi linier, hal ini disebabkan bahwa menyelesaikan suatu sistem kesamaan dengan metode Eliminasi-Subtitusi dan Invers matriks dapat mempercepat proses penyelesaian dan menghasilkan suatu hasil yang akurat.

Metode Eliminasi-Subtitusi merupakan gabungan 2 metode. Dalam penyelesaiannya metode Subtitusi biasanya bekeja lebih lambat dalam menentukan variabel pertama, tapi sangat cepat menentukan variabel kedua setelah variabel pertama diketahui. Sementara metode Eliminasi justru lebih cepat menentukan variabel pertama tapi lebih lambat dalam menentukan variabel kedua karena proses eliminasi diulang lagi dari awal.

Invers Matriks merupakan salah satu cara terbaik dalam penyelesaian kongruensi linier, karena dalam penyelesaian ini menggunakan 3 dan 4 variabel serta 3 dan 4 kongruensi. Maka suatu kongruensi nantinya dibentuk suatu matriks, kemudian dicari matriks inversnya, misal

Ax = B, menghasilkan x = $A^{-1}\ B$, sehingga dapat dicari variabel-variabel x-nya.

Sistem persamaan secara tidak langsung memuat suatu unsur atau hasil yang sama atau berimbang, dalam proses penyelesaiannya sistem kongruensi menentukan suatu variabel sehingga menghasilkan suatu hasil yang sama atau berimbang, dari berimbang itulah kajian agama yang kami gunakan adalah mengenai ”Adil”, adil merupakan salah satu dari sifat-sifat Allah (Asmaul Husna). Dalam Al-Qur’an sendiri Allah selalu memerintahkan kepada umat-Nya untuk berlaku Adil, karena dengan keadilan segala persoalan-persoalan didunia akan terasa damai dan tenteram jika seluruh umat manusia melaksanakan perintah adil dalam perilaku kesehariannya, karena dengan keadilan pula akan membawa manusia kepada ketakwaan, sesuai dengan firmannya :

ٱعۡدِلُواْ هُوَ أَقۡرَبُ لِلتَّقۡوَىٰۖ

” *Berlakulah adil, karena adil itu lebih dekat dengan taqwa*”.(Al-Maidah: 8).

Di samping itu Allah juga mencintai Orang-orang yang berbuat adil seperti pada surat Al Hujurat Ayat 9

فَإِن فَآءَتْ فَأَصْلِحُوا۟ بَيْنَهُمَا بِٱلْعَدْلِ وَأَقْسِطُوٓا۟ ۖ إِنَّ ٱللَّهَ يُحِبُّ ٱلْمُقْسِطِينَ ﴿٩﴾

"*Kalau dia telah surut, damaikanlah antara keduanya menurut keadilan, dan hendaklah kamu berlaku adil; sesungguhnya Allah mencintai orang-orang yang berlaku adil*".

Dalam pembahasannya Adil sendiri kami kaitkan dengan persoalan-persoalan atau persengketaan yang merajalela di permukaan, akibat dari tidak adanya rasa adil dikalangan manusia, dan juga tentang prinsip keadilan itu sendiri menurut dalil-dalil Naqli maupun Aqli.

Dalam proses penyelesaiannya bentuk umum yang digunakan sebagai berikut :

$$
\begin{array}{c}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \equiv b_1 \pmod{c} \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \equiv b_2 \pmod{c} \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \equiv b_m \pmod{c}
\end{array}
$$

Dengan a_{ij} dan $b_i \in R$, i = 1, 2$\cdots$, m ; j = 1, 2$\cdots$, n

Terutama sistem kongruensi linier dengan 3 kongruensi 3 variabel dan 4 kongruensi 4 variabel? Karena pada semua literatur dan buku-buku yang ada kaitannya dengan kongruensi linier hanya membahas sistem kongruensi linier 1 dan 2 variabel saja. Dari alasan itulah, maka penulis tertarik untuk mengangkat permasalahan dengan mengambil judul **"MENYELESAIKAN SISTEM KONGRUENSI LINEAR DENGAN METODE ELIMINASI-SUBTITUSI DAN METODE INVERS MATRIKS (Menggunakan 3 kongruensi 3 variabel dan 4 kongruensi 4 variabel)**.

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas dalam penulisan ini, maka rumusan masalahnya adalah

1. Bagaimana menentukan solusi umum sistem kongruensi linier dengan Metode Eliminasi-Subtitusi?
2. Bagaimana menentukan solusi umum sistem kongruensi linier dengan Metode Invers Matriks?

C. Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan ini adalah

1. Untuk menentukan solusi umum sistem kongruensi linier dengan Metode Eliminasi-Subtitusi.
2. Untuk menentukan solusi umum sistem kongruensi linier dengan Metode Invers Matriks.

D. Manfaat Penulisan

Manfaat yang diharapkan dari skripsi ini adalah dapat digunakan berdasarkan kepentingan sebagai berikut :

1. Bagi Penulis
   a. menambah pengetahuan dan keilmuan tentang kongruensi linier
   b. menambah wawasan tentang bagaimana menyelesaikan sistem kongruensi linier dengan metode eliminasi-subtitusi dan Invers matriks

2. Bagi Lembaga

Untuk menambah bahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan

3. Bagi Peneliti dan Mahasiswa

Sebagai bahan informasi dan bahan kepustakaan

E. Batasan Masalah

Agar tidak terjadi kesimpangsiuran dalam penulisan skripsi ini, maka penulis membatasi masalah yaitu bagaimana menyelesaikan sistem kongruensi linier dengan metode Eliminasi-Subtitusi dan metode Invers Matriks dengan 3 variabel 3 kongruensi dan 4 variabel 4 kongruensi.

F. Metode Penelitian

Dalam penulisan skripsi ini penulis menggunakan kajian literatur yaitu kajian yang menggunakan metode penelitian perpustakaan (Library Research), yaitu penelitian yang dilakukan didalam perpustakaan dengan tujuan mengumpulkan data dan informasi dengan bantuan bermacam material yang terdapat diruang perpustakaan seperti, buku-buku, majalah, catatan, dokumen dan sebagainya (Mardalis, 1989: 28)

Dengan demikian skripsi ini akan dilakukan berdasarkan kajian pustaka yang diambil dari buku-buku yang relevan sebagai bahan pendukung.

G. Sistematika Pembahasan

Dalam penulisan skripsi, dibagian awal penulis menyajikan konsep dasar sistem kongruensi linier dilanjutkan dengan cara penyelesaiannya, dengan sistematika sebagai berikut :

BAB I. Membahas tentang pendahuluan yang berisi latar belakang masalah, dimana latar belakang masalah ini dikemukakan dengan alasan penulis mengangkat topik ini, rumusan masalah, batasan masalah untuk memfokuskan pembahasan, tujuan penulisan skripsi yang berisi tentang tujuan penulis membahas topik ini, manfaat penulisan ini, kajian yang digunakan penulis serta sistematika pembahasan.

BAB II. Teori pendukung yang dibagi menjadi tujuh bagian. Pertama bilangan bulat, keterbagian, kongruensi, kongruensi linier, matriks dan invers matriks, SPL dan kajian keagamaan.

BAB III. Memaparkan tentang penyelesaian sistem kongruensi linier dengan metode eliminasi-subtitusi dan metode invers matriks dengan 3 kongruensi 3 variabel dan 4 kongruensi 4 variabel serta mengulas kajian keagamaan.

BAB IV. Berisi tentang penutup berupa kesimpulan dan saran

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Bilangan Bulat

Sistem bilangan bulat terdiri atas himpunan bilangan bulat Z = {...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...} dengan operasi biner penjumlahan (+) dan perkalian (x).untuk setiap a, b dan c bilangan-bilangan bulat sebarang,maka dengan sistem ini mempunyai sifat-sifat sebagai berikut :

1. Sifat tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian

   $\forall$ a, b $\in$ Z maka berlaku a + b dan a x b $\in$ Z
2. Sifat komutatif terhadap operasi penjumlahan dan perkalian

   $\forall$ a, b $\in$ Z maka berlaku a + b = b + a dan a x b = b x a
3. Sifat asosiatif terhadap operasi penjumlahan dan perkalian

   $\forall$ a, b, c $\in$ Z maka berlaku a + (b + c) = (a + b) + c dan a x (b x c) = a x c + b x c
4. Sifat distribusi kiri dan kanan perkalian terhadap penjumlahan

   $\forall$ a, b $\in$ Z maka berlaku a x (b + c) = a x b + a x c dan (a + b) x c = a x c + b x c
5. Identitas penjumlahan

   Untuk setiap a dalam Z ada elemen 0 dalam Z sehingga a + 0 = 0 + a = a, 0 dinamakan elemen identitas penjumlahan
6. Invers Penjumlahan

   Untuk setiap a dalam Z ada elemen-elemen dalam Z sehingga a + -a = -a + a = 0, -a dinamakan invers penjumlahan dari a.

7. Identitas perkalian

   Untuk setiap a dalam Z ada elemen 1 dalam Z sehingga a x 1 = 1 x a, 1 dinamakan elemen identitas perkalian.

8. Perkalian dengan nol

   Jika a dalam Z, maka 0 x a = a x 0 = 0

   (Marhan dalam Dewi,2004: 7)

2.2 Keterbagian

Bilangan-bilangan pembagi, kelipatan dan bilangan prima maupun komposit adalah konsep yang telah diketahui dan dipelajari sekurang-kurangnya pada masa Euclid, sekitar 350 SM. Ide dasarnya dikembangkan pada bagian berikut :

Definisi 2.2.1:

Suatu bilangan bulat b habis dibagi oleh bilangan bulat a dengan (a $\neq$ 0) jika ada bilangan bulat x sedemikian hingga b = a x dan ditulis $a|b$, dibaca a membagi b, b habis dibagi a, a faktor b atau b kelipatan dari a, dan $a \nmid$ b dibaca a tidak membagi b, b tidak habis dibagi a, a bukan faktor b atau b bukan kelipatan dari a (Niven, 1991 : 4).

1. $5|15$ sebab ada bilangan bulat 3 sehingga 15 = 5.3 atau $\frac{15}{5} = 3$
2. $-3|21$ sebab ada bilangan bulat -7 sehingga 21 = (-3).(-7) atau $\frac{21}{-3} = -7$

3. $3 \nmid 7$ dikatakan tidak membagi 7 karena tidak ada bilangan bulat k sehingga berlaku k.2 = 7

Teorema 2.2.1

Untuk suatu bilangan bulat a,b,c berlaku :

1. $a|b$, maka $a|bc$ untuk setiap bilangan bulat c ;
2. $a|b$ dan $b|c$ maka $a|c$
3. $a|b$ dan $a|c$ maka $a|(bx+cy)$ untuk setiap bilangan bulat x dan y
4. $a|b$ dan $b|a$ maka a = $\pm b$,a $\neq 0$, $a|b$ jika dan hanya jika $ma|mb$

(Muhsetyo,1995:21)

Bukti teorema ;

1. $a|b$, maka $a|bc$ untuk setiap bilangan bulat c.

Dari definisi II.2.1 bahwa $a|b$ maka $\exists$ x $\in$ Z sehingga ax = b

Akibatnya berlaku pula bahwa bc = (ax)c = a(xc) $\forall$bilangan bulat c,karena pada bilangan bulat berlaku sifat tertutup terhadapa perkalian, maka terdapatlah bilangan bulat p = xc sehingga bc = ap. Jadi $a|bc$

2. $a|b$ dan $b|c$ maka $a|c$

Dari definisi II.2.1 bahwa $a|b$ maka $\exists$ x $\in$ Z sehingga ax = b dan $a|b$ maka $\exists$ y $\in$ Z sehingga b y = c maka :

a x = b untuk x $\in$ Z

a x = $\frac{c}{y}$, karena b y = c

(a x) y = c

a (x y) = c, dan

(a x)(y) = c

(x y) a = c maka $a|bc$

Terbukti.

Karena perkalian dari bilangan bulat bersifat tertutup, maka x y adalah bilangan bulat yang tunggal. Jadi teorema diatas berlaku.

2.3 Kongruensi

Definisi 2.3.1

Misalkan a,b,m $\in$ Z

a disebut kongruensi dengan b modulo m, ditulis dengan a $\equiv$ b(mod m). Jika a-b habis dibagi m yaitu m | a – b, jika a-b tidak habis dibagi m, yaitu m $\nmid$ a-b, maka ditulis a $\not\equiv$ b (mod m) dibaca a tidak kongruensi dengan b modulo m (Kenneth, 1985: 77).

Karena a-b habis dibagi oleh m jika dan hanya jika a-b habis dibagi oleh m, maka a $\equiv$ b (mod m) jika dan hanya jika a $\equiv$ b(mod -m), sehingga akan diambil nilai modulo m yang positif (Muhsetyo,1995:77).

Contoh :

1 15 $\equiv$3(mod 4) sebab 4 | (15-3) atau 4 | 12

2. 17 $\not\equiv$ 7(mod 3) sebab 3 $\nmid$ (17-7) atau 3 $\nmid$ 10

Kongruensi berasal dari bahasa latin yang berarti agreeing atau koresponden beberapa modulo yang berarti ukuran kecil. Carl Fiedrich Gauss

(1777-1855),seorang matematisi terbesar sepanjang masa diakui sebagai dasar penyusunan dalam ide kongruen dari suatu bilangan bulat sebagai kelanjutan dari teori bilangan yang pernah dikemukakan oleh Piere de Fermat pada abad ke-17. (Oysteiro,1984:209).

Teorema 2.3.2

Ditentukan a,b,c,d,m,x $\in$ Z, m $\neq 0$

Kongruensi memenuhi sifat-sifat :

1. Simetris

   Jika a $\equiv$ b (mod m) maka b $\equiv$ a (mod m)

2. Reflektif

   a $\equiv$ a (mod m) untuk semua a $\in$ Z

3. Transitif

   Jika a $\equiv$ b (mod m) dan b $\equiv$ c (mod m), maka a $\equiv$ c(mod m)

4. Jika a $\equiv$ b (mod m) maka a x $\equiv$ b x (mod m)
5. Jika a $\equiv$ b (mod m) dan c $\equiv$d (mod m), maka a + b $\equiv$c + d(mod m)
6. Jika a $\equiv$ b (mod m) dan c $\equiv$d (mod m),maka a.c $\equiv$ b . d(mod m).
7. Jika a $\equiv$b (mod m) dan d/m, d > 0, maka a $\equiv$ b (mod m)
8. Jika a $\equiv$ b (mod m) maka ac $\equiv$ bc(mod mc) untuk c > 0

(Niven,1991:48)

Teorema 2.3.3

Ditentukan m > 0 dan a,x,y $\in$ Z

1. jika a x $\equiv$ a y (mod m) maka x $\equiv$ y(mod $\frac{a}{a,m}$)

2. jika a x $\equiv$a y (mod m) dan (a,m) = 1 maka x $\equiv$ y (mod m)

(Niven,1991 : 49).

2.4. Kongruensi linier

Definisi 2.4.1

Ditentukan f(x) adalah suatu polinomial dengan koefisien-koefisisen bulat, dan $\{a_0, a_1, a_2 ... a_{m-1}\}$ adalah suatu sistem residu yang lengkap modulo m (William,1976:66)

Banyaknya persamaan kongruensi f(x) ≡ 0 (mod m) adalah banyaknya a_i $\{a_i$ =0,1,2,...m-1$\}$ yang memenuhi kongruensi f(a_i)≡0 (mod m)

Contoh :

Diketahui f(x) = 3x – 9

Banyaknya selesaian dari f(x) = 3x – 9 ≡ o (mod 6), atau 3x -9 ≡0 (mod 6) ditentukan oleh sistem residu modulo 6 yang lengkap yaitu {0,1,2,3,4,5}. Dari x = a_i $\{a_i$ =0,1,2,3.4.5$\}$dapat ditentukan bahwa :

f(0) = 3.0 – 9 = -9 ≢0 (mod 6)

f(1) = 3.1 – 9 = -6 ≡0 (mod 6)

f(2) = 3.2 – 9 = -3 ≢0 (mod 6)

f(3) = 3.3 – 9 = 0 ≡0 (mod 6)

f(4) = 3.4 – 9 = 3 ≢0 (mod 6)

f(5) = 3.5 – 9 = 6 ≡0 (mod 6)

sehingga nilai-nilai x yang memenuhi 3x – 9 ≡ 0 (mod 6) adalah x = 1, x = 3 dan x = 5. jadi banyaknya penyelesaian kongruensi 3x – 9 ≡ 0 (mod 6) adalah tiga yaitu x = 1. x = 3 dan x = 5.

Definisi 2.4.2

Kongruensi $a\,x \equiv b \pmod m$ dengan $a,b,m \in Z$, $a \neq 0$dan $m > 0$. disebut dengan kongruensi linier (Muhsetyo, 1995: 98)

Contoh :

1. kongruensi linear $6x \equiv 11 \pmod 8$ tidak mempunyai penyelesaian sebab dari unsur-unsur sistem residu modulo 8 yang lengkap, yaitu $\{0,1,2,3,...,7\}$, tidak ada satupun yang memenuhi $6x \equiv 11 \pmod 8$
2. kongruensi linear $6x \equiv 18 \pmod 3$ mempunyai tiga penyelesaian $x = 0 + 3r$, $x = 1 + 3r$ dan $x = 2 + 3r$ dengan $r \in Z$. Nilai-nilai x didalam $\{ 0,1,2 \}$ memenuhi $6x \equiv 18 \pmod 3$
3. kongruensi linear $4x \equiv 2 \pmod 5$ mempunyai satu penyelesaian $x = 3 + 5t$ $(t \in Z)$ sebab $4 . 3 = 12 \equiv 2 \pmod 5$ dan $x = 3$ merupakan satu-satunya nilai dari sistem residu modulo 5 yang lengkap, yaitu $\{0,1,2,3,4\}$ yang memenuhi $4\,x \equiv 2 \pmod 5$

Teorema 2.4.3

Jika $(a,m) \mid d$ maka kongruensi linear $ax \equiv b \pmod m$ tidak mempunyai solusi.

Bukti :

Misalkan $(a,m) \mid d$, maka $d \mid a$ dan $d \mid b$, akibatnya $d \mid (ax - b)$ untuk setiap bilangan bulat x, karena $m \equiv qd$ untuk suatu bilangan bulat q dan $d \mid (ax - b)$ maka $m \mid (ax - b)$. Hal ini menunjukkan jika $(a,m) \mid b$ tidak ada bilangan bulat x sedemikian hingga $ax \equiv b \pmod m$. Jadi terbukti.

Contoh :

FPB (6,9) = 3 dan $3 \nmid 7$ maka kongruensi linear $6x \not\equiv 7 \pmod 9$ tidak mempunyai solusi.

2.5. Matriks

Matriks adalah suatu susunan bilangan berbentuk segiempat. Bilangan-bilangan dalam susunan itu disebut *Anggota* dalam matriks tersebut.

Beberapa contoh matriks adalah :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \pi & e \\ 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$$

Ukuran matriks diberikan oleh jumlah baris (garis horisontal) dan kolom (garis vertikal) yang dikandungnya. Misalnya, matriks pertama dalam contoh 1 mempunyai tiga baris dan dua kolom, sehingga ukurannya adalah 3 kali 2 (ditulis 3 kali 2). Dalam suatu uraian ukuran, angka pertama selalu mempunyai jumlah baris dan angka kedua menyatakan jumlah kolom. Matriks-matriks lainnya pada contoh masing-masing mempunyai ukuran 1 x 4, 3 x 3, 2 x 1, dan 1 x 1. sebuah matriks dengan hanya satu kolom disebut *matriks kolom* (atau *vektor kolom*), dan sebuah matriks dengan hanya satu baris disebut *matriks baris* (atau *vektor baris*). Jadi, dalam contoh mariks 2 x 1 adalah sebuah matriks kolom, matriks 1 x 4 adalah sebuah matriks, dan baris 1 x 1 adalah sebuah matriks baris dan matriks kolom.(Anton: 2000: 45).

Anggota pada baris i dan kolom j dari sebuah matriks A akan dinyatakan sebagai a_{ij} . Jadi, sebuah matriks umum 3 x 4 bisa ditulis sebagai

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

Dan sebuah matriks umum m x n sebagai

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Jika keringkasan notasi diinginkan, matriks yang sebelumnya bisa ditulis sebagai

$$\left[a_{ij}\right]_{m\,x\,n} \quad \text{atau} \quad \left[a_{ij}\right]$$

Notasi pertama digunakan jika dalam diskusi tersebut kita perlu mengetahui ukurannya dan yang kedua jika ukuran tidak perlu ditekankan. Biasanya, kita akan menyamakan anggotanya. Jadi, untuk sebuah matriks B pada umumnya kita akan menggunakan b_{ij} untuk anggotanya pada baris i dan kolom j dan untuk sebuah matriks kita akan menggunakan c_{ij} .

2.5.1. Operasi-operasi pada matriks

2.5.1.1. Matriks Jumlah

Definisi :

Dua matriks didefinisikan ***sama*** jika keduanya mempunyai ukuran yang sama dan anggota-anggotanya yang berpadanan sama.

Dalam notasi matriks, jika $A = [\ a_{ij}\ ]$ dan $B = [\ b_{ij}\ ]$ mempunyai ukuran yang sama, maka A dan B jika dan hanya jika $(A)_{ij} = (B)_{ij}$, atau secara setara, $a_{ij} = b_{ij}$ untuk semua *i* dan *j*. (Anton: 2000: 47).

Ada dua matriks : A dan B, dengan ukuran m dan n yang sama.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Penjumlahan matriks A dan B, A + B :

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Rumus penjumlahan Matriks

1. A + B = B + A (hukum komutatif)
2. A + (B + C) = (A + B) + C (hukum assosiatif)
3. k(A + B) = kA + kB = (A + B)k, k skalar (perkalian skalar)

Perkalian skalar itu sendiri :

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Maka :

1. A + B = $\begin{pmatrix} 2+4 & -1+5 & 3+6 \\ -2+7 & 4+8 & 1+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 9 \\ 5 & 12 & 10 \end{pmatrix}$

2. 5A = $\begin{pmatrix} 5.2 & 5.(-1) & 5.3 \\ 5.(-2) & 5.4 & 5.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 15 \\ -10 & 20 & 5 \end{pmatrix}$

2.5.1.2 Perkalian Matriks

Definisi :

Misalkan 2 matriks A = (a_{ij}) dan B (b_{ij}) sedemikian rupa sehingga jumlah kolom A = jumlah baris B, atau Am.p dan Bp.n, maka matriks AB adalah sesuatu matriks hasil perkalian A dan B dimana elemen-elemennya dihasilkan dengan mengalikan baris-baris A kepada kelompok B (Rasyad:2003:23).

$$AB = \begin{pmatrix} A_1.B_1 & A_1.B_2 & \cdots & A_1.B_n \\ A_2.B_1 & A_2.B_2 & \cdots & A_2.B_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_m.B_1 & A_m.B_2 & \cdots & A_m.B_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Yaitu} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & c_{ij} \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Dimana $c_{ij} = a_{i1} \,.\, b_{ij} + a_{i2} \,.\, b_{2j} + \ldots + a_{ip}\, b_{pj} = \sum_{k=1} a_{ik} .b_{kj}$.

definisi diatas tak berlaku jika $A_{m.p}$ dan $B_{q.n}$ dimana p$\neq$q

contoh :

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.1+1.2 & 2.1+1.0 \\ 4.1+3.2 & 4.1+3.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2+1.4 & 1.1+1.3 \\ 2.2+0.4 & 2.1+0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Contoh ini menunjukkan bahwa perkalian matriks adalah tidak bersifat komutatif artinya A.B dan B.A tidak selamanya sama.

Rumus-rumus perkalian matriks

1. (A.B)C = A(B.C)
2. A(B + C) = A.B + A.C
3. (B + C)A = BA + CA

2.5.2 Invers Matriks

Definisi:

Jika A adalah sebuah matriks bujur sangkar, dan jika sebuah matriks B yang berukuran sama bisa didapatkan sedemikian sehingga $AB = BA = I$, maka A disebut ***bisa dibalik*** dan B disebut invers dari A.

Contoh : matriks

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{adalah invers dari } A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Karena

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Dan

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad \text{(Anton: 2000: 65).}$$

Rumus umum invers matriks di ordo 2x2 sebagai berikut :

Jika P = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, untuk mendapatkan invers P.

Dipergunakan perkalian matriks dan kesamaan 2 buah matriks sebagai berikut.

Misalkan $P^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dan P. P^{-1} = I

Jadi $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bu \\ cx+dz & cy+du \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ a) ax + bz = 1 dan b) ay + bu = 0

cx + dz = 0 cy + du = 1

penyelesain sistem persamaan ini adalah:

a) ax + bz = 1

cx + dz = 0

jika persamaan pertama dikalikan dengan dan persamaan kedua dikalikan dengan b diperoleh :

$\Leftrightarrow$ adx + bdx = d

bcx + bdx = 0 -

(ad - bc) x = d atau x = $\dfrac{d}{ad-bc}$

Dengan subtitusi diperoleh dz = -cx atau z $= \dfrac{-c}{ad-bc}$

b) ay + bu = 0

cy + du = 0

jika persamaan pertama dikalikan d, dan persamaan kedua dikalikan dengan b diperoleh:

$\Leftrightarrow$ ady + bdu = d

$\underline{\text{bcy + bdu = 0}}$ -

(ad - bc) y = -b atau y = $\dfrac{-b}{ad-bc}$

Dengan subtitusi diperoleh:

bu = -ay atau u = $\dfrac{a}{ad-bc}$

nilai x,y,z dan u ada apabila ad – bc ≠ 0

jadi $P^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$

atau $P^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ dengan ad – bc ≠ 0

contoh : tentukan invers matriks P = $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

penyelesaian : P = $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, maka $P^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

jadi $P^{-1} = \dfrac{1}{20-18}\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \dfrac{-3}{2} & \dfrac{5}{2} \end{pmatrix}$

2.5.2.1 Sifat-sifat Invers

Ada beberapa sifat yang perlu diketahui yaitu :

1) jika A matriks bujur sangkar maka invers A adalah tunggal. (Subagio suharti : 1986:4.7)

bukti : misalkan invers matriks A adalah B dan C dengan $B \neq C$ maka,

$AB = BA = I$ dan $AC = CA = I$

$B = BI$ sifat matriks identitas

$= B(AC)$ sebab $AC = I$

$= (BA)C$ sebab assosiatif

$= IC$ sebab $BA = I$

$= C$ sifat matriks identitas

$B = C$ jadi invers matriks A tunggal.

2) Invers hasil kali 2 buah matriks A dan B sama dengan hasil kali invers masing-masing matriks dengan urutan yang berlawanan.

Jadi $(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$ (Subagio suharti : 1986:4.8)

Bukti : telah diketahui bahwa $AA^{-1} = A^{-1}A$ dan $BB^{-1} = B^{-1}B = I$

Begitu pula $(AB)(AB)^{-1} = (AB)^{-1}(AB) = I$

Sekarang perhatikan perkalian matriks berikut,

$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1}$ assosiatif

$= A\,I\,A^{-1}$ karena $BB^{-1} = I$

$= A\,A^{-1}$

$= I$

$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B$ assosiatif

$= B^{-1}\ I\ B$ karena $A^{-1}A = I$

$= B^{-1}B$

$= I$

Jadi $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Contoh : jika $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ tunjukkan bahwa

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Penyelesaian : jika $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ maka $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Jika $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ maka $B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

$$B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 10 & -16 \\ -13 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -\frac{13}{2} & \frac{21}{2} \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 21 & 16 \\ 13 & 10 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{210-208}\begin{pmatrix} 10 & -16 \\ -13 & 21 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 10 & -16 \\ -13 & 21 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -\frac{13}{2} & \frac{21}{2} \end{pmatrix}$$

Jadi $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3) jika A matriks nonsingular maka invers dari invers A adalah A.

Jadi $(A^{-1})^{-1} = A$. (Subagio suharti: 4.9)

Bukti :

A^{-1} invers dari A

Jadi $A\,A^{-1} = A^{-1}A = I$ atau $A^{-1}A = A\,A^{-1} = I$

Jika $A\,A^{-1} = A^{-1}A = I$ dengan A matriks yang telah diketahui maka

A^{-1} invers dari A

Jika $A^{-1}A = A\,A^{-1} = I$ dengan A^{-1} matriks yang telah diketahui maka A adalah invers dari A^{-1} yang dinyatakan dengan A $(A^{-1})^{-1}$.

Contoh :

Jika $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$,tunjukkan bahwa invers dari invers A adalah A atau $(A^{-1})^{-1} = A$

Penyelesaian : jika $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ maka $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ atau $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{3} \\ -1 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$

Jika $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{3} \\ -1 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$ maka

$$(A^{-1})^{-1} = \frac{1}{\frac{5}{3} - \frac{4}{3}}\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 3 \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Jadi $(A^{-1})^{-1} = A$

Catatan :

Matriks singular adalah matriks yang mempunyai invers

4) matriks identitas adalah invers dirinya sendiri karena I.I = I.I = I

5) jika matriks nonsingular maka $A^{-n} = (A^{-1})^{n}$.(Subagio suharti: 4.10)

bukti :

A^{n} = A . A . A ... A dengan n faktor

A^{0} = I

A^{-1} = invers matriks A

$A^{-n} = A^{-1} . A^{-1} . A^{-1} ... A^{-1}$ dengan n faktor

$= (A^{-1})^{n}$

Jadi $A^{-n} = (A^{-1})^{n}$

6) jika A matriks non singular maka

$(A^{n})^{-1} = (A^{-1})^{n}$ dengan n = 0,1,2,3,4... (Subagio suharti: 4.10)

Bukti :

Telah diketahui bahwa, jika A dan B matriks nonsingular maka,

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

$$A^n = A \,.\, A \,.\, A \,...\, A \text{ dengan n faktor}$$

$$(A^n)^{-1} = (A \,.\, A \,.\, A \,...\, A)^{-1}$$

$$= A^{-1} \,.\, A^{-1} \,.\, A^{-1} \,...\, A^{-1} \text{ dengan n faktor}$$

$$= (A^{-1})^n$$

Jadi $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

2.6. Sistem persamaan Linier (SPL)

Sistem persamaan linier (SPL) merupakan suatu sistem persamaan dimana suku-suku peubah (seperti x dan y) berderajat satu (jadi tidak mempunyai pangkat lebih dari satu) dan sistem persamaan linier merupakan suatu himpunan berhingga dari persamaan-persamaan linier dalam peubah (variabel) x dan peubah y, yang secara umum dapat didefinisikan persamaan linier dalam n peubah $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sebagai persamaan linier yang dinyatakan dalam bentuk

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \equiv b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \equiv b_2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \equiv b_m$$

Dimana $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dan $b \in R$

Sistem persamaan linier bisa diselesaikan dengan dua metode yaitu : 1) dengan eliminasi-subtitusi, dan 2) dengan invers matriks. Yang dapat dijabarkan sebagai berikut :

2.6.1. Menyelesaikan SPL dengan Eliminasi-Subtitusi

Metode subtitusi artinya mengganti nilai variabel dengan nilai tertentu sehingga persamaan menjadi kalimat benar. Atau subtitusi adalah memasukkan nilai salah satu variabel ke variabel lain. Misalkan mensubtitusikan nilai x = x_1 yang diperoleh untuk mendapatkan y_1. Atau mensubtitusikan y_1 yang diperoleh untuk mendapatkan x_1 yang nantinya Himpunan Penyelesaian $\{(x_1, x_2)\}$.

Eliminasi mempunyai arti proses mengeliminasi (menghilangkan) salah satu variabel untuk menentukan nilai variabel lainnya dan sebaliknya. Sedangkan subtitusi-eliminasi adalah proses penggabungan 2 metode penyelesaian dalam persamaan linier dimana metode eliminasi digunakan untuk mendapatkan nilai variabel pertama dan hasilnya disubtitusikan ke persamaan untuk mendapatkan nilai variabel kedua. (kurnianingsih Sri, dkk:2004:93)

Metode eliminasi-subtitusi merupakan gabungan 2 metode antara metode eliminasi-subtitusi. Dimana dalam menentukan penyelesaian SPL (Sistem persamaan linier) dengan metode subtitusi dan eliminasi, dapat disimpulkan bahwa metode subtitusi bekerja lebih lambat dalam menentukan variabel pertama, tapi sangat cepat menentukan variabel pertama diketahui. Sementara metode eliminasi justru lebih cepat menemukan variabel pertama tapi lebih lambat dalam menemukan variabel kedua karena proses eliminasi diulang lagi dari awal.

Cara terbaik menyelesaikan SPL adalah dengan menggabungkan metode eliminasi dan subtitusi. Metode eliminasi digunakan untuk mendapatkan variabel pertama dan hasilnya disubtitusikan ke persamaan untuk mendapatkan variabel kedua.

Contoh : tentukan himpunan penyelesaian dari SPLDV (Sistem persamaan Linier Dua peubah) berikut :

$$\begin{cases} 3p + 2q = 8..........(1) \\ 2p + q \quad = 5.........(2) \end{cases}$$

Penyelesaian :

$$\begin{array}{ll} 3p + 2q = 8\left|x2\right| & 6p + 4q = 16 \\ 2p + q \quad = 5\left|x2\right| & \underline{6p + 3q = 15} \quad - \end{array}$$

q = 1

subtitusikan q = 1 ke (2)

2p + 1 = 5

2p = 4

p = 2 $\quad \therefore \quad \{(2,1)\}$

2.6.2. Menyelesaikan SPL dengan Invers Matriks

Sebuah matriks kuadrat dikatakan dapat dibalikkan jika ada matriks B sedemikian rupa sehingga memenuhi kondisi : A B = B A = I, dimana I = matriks identitas. $AB_1 = B_1A = I$ dan $AB_2 = B_2A = I$ disimpulkan :

$B_1 = B_1I = B_1(A B_2) = (B_1A) B_2 = I B_2 = B_2$

Matriks B disebut *matriks kebalikan (invers matriks)* dari matriks A atau matriks invers A, dinyatakan dengan A^{-1}. Hubungan antara B dan A adalah simetris artinya B = matriks invers A tetapi A juga matriks invers matriks B. (Rasyad, 2003:37)

Contoh : tentukan persamaan SPLTV berikut dengan Invers Matriks

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

$$-x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

Penyelesaian : persamaan

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

$$-x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

Dapat ditulis dalam bentuk :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A X B

Misal A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, AC = I dimana I = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dan C = invers matriks A.

Selanjutnya untuk mendapatkan Matriks C maka

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & 1 & 4 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

(I|C)

Dari operasi diatas maka dapat diketahui bahwa $A^{-1} = C =$ Matriks invers

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 3 \\ 7 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Dan dengan rumus : $A^{-1} . A . x = A^{-1} . B$

$x = A^{-1} . B$ maka dapat dicari variabel-variabel x-nya

jadi,

$$x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 3 \\ 7 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -20 \\ 29 \end{pmatrix}$$

2.7. Kajian Keagamaan

2.7.1. Definisi Adil

Adil berarti ”tidak berat sebelah atau memihak”, ”berpihak serta berpegang pada kebenaran”, ”tidak sewenang-sewenang atau zalim”, dan seimbang serta sepatutnya”. Kata al-’adl mempunyai banyak arti. Bahkan salah satu dari 99 nama Allah SWT (al-asma’ al-Husna) adalah al-’adl. (Azra: 2005: 82)

Kata adil dalam pengertian ”keadilan” merupakan yang paling banyak terdapat dalam Al-Qur’an, seperti dalam surah *asy-Syura* (42) ayat 15 ; *an-Nisa* (4) ayat 3, 58, dan 129; *al-Maidah* (5) ayat 8; *al-an’am* (6) ayat 152 ; *Al-A’raf* (7) ayat 159 da 181; *an-Nahl* (16) ayat 76 dan 90 ; dan *al-Hujurat* (49) ayat 9. adapun yang berarti ”keseimbangan” terdapat dalam surah *al-Infitar* (82) ayat 7 dan *al-Maidah* (5) ayat 95 yang berarti ” kebenaran” terdapat pada surah *al-Baqarah* (2) ayat 282.

Di samping itu, kata *al-’adl* dalam al-Qur’an juga digunakan untuk pengertian yang sangat berbeda dari pengertian di atas. Yakni :

(1) *Al-Adl* dapat berarti ” menyandarkan perbuatan kepada selain Allah, menyimpang dari kebenaran”, seperti pada surah *an-Nisa’* (4) ayat 135;

فَلَا تَتَّبِعُوا۟ ٱلْهَوَىٰٓ أَن تَعْدِلُوا۟

”Maka janganlah kamu mengikuti hawa nafsu karena ingin menyimpang dari kebenaran.” (an-Nisa’:135)

(2) Adil dapat berarti Membuat sekutu bagi Allah, mempersekutukan Allah (musyrik), seperti pada surah *al-An’am* (6) ayat 1 dan 150

ثُمَّ ٱلَّذِينَ كَفَرُوا۟ بِرَبِّهِمْ يَعْدِلُونَ ۝١

" namun orang-orang yang kafir mempersekutukan (sesuatu) dengan Tuhan mereka." (Al An'aam:1)

وَلَا تَتَّبِعْ أَهْوَآءَ ٱلَّذِينَ كَذَّبُوا۟ بِـَٔايَـٰتِنَا وَٱلَّذِينَ لَا يُؤْمِنُونَ بِٱلْـَٔاخِرَةِ وَهُم بِرَبِّهِمْ

يَعْدِلُونَ ﴿١٥٠﴾

"dan janganlah kamu mengikuti hawa nafsu orang-orang yang mendustakan ayat-ayat Kami, dan orang-orang yang tidak beriman kepada kehidupan akhirat, sedang mereka mempersekutukan Tuhan mereka" (Al An'aam:150)

(3) Adil bermakna menebus (tebusan), seperti pada surah *al-Baqarah* (2) ayat 48 dan 123 serta surah *al-An'am* (6) ayat 70.

وَلَا يُقْبَلُ مِنْهَا شَفَـٰعَةٌ وَلَا يُؤْخَذُ مِنْهَا عَدْلٌ وَلَا هُمْ يُنصَرُونَ ﴿٤٨﴾

"dan (begitu pula) tidak diterima syafa'at dan tebusan dari padanya, dan tidaklah mereka akan ditolong." (Al Baqarah:48)

وَلَا يُقْبَلُ مِنْهَا عَدْلٌ وَلَا تَنفَعُهَا شَفَـٰعَةٌ وَلَا هُمْ يُنصَرُونَ ﴿١٢٣﴾

"dan tidak akan diterima suatu tebusan daripadanya dan tidak akan memberi manfaat sesuatu syafa'at kepadanya dan tidak (pula) mereka akan ditolong"
(Al Baqarah:123)

وَإِن تَعْدِلْ كُلَّ عَدْلٍ لَّا يُؤْخَذْ مِنْهَآ

"Dan jika ia menebus dengan segala macam tebusanpun, niscaya tidak akan diterima itu daripadanya." (Al An'aam:70)

Kata *al-'adl* juga bermakna sama dengan *al-'adil*, orang yang adil (jamak: *al-'udul*). Dalam Al-Qur'an, kata ini digunakan, baik dalam pengertian *zawa 'adlin* (dua orang [subyek]   yang memiliki sifat yang adil; QS.5.95 dan 106) maupun *zawai 'adlin* (dua orang [obyek] yang memiliki sifat adil; QS. 65:2).

Sa’id in Jabir, seorang ulama hadis, mengatakan bahwa *al-’adl* mempunyai empat pengertian.

(1) dalam bidang hukum, *al-’adl* berarti ”berlaku adil”. Dalam hal ini Allah SWT berfirman,

وَإِذَا حَكَمْتُم بَيْنَ ٱلنَّاسِ أَن تَحْكُمُوا۟ بِٱلْعَدْلِ ۚ

”...Apabila menetapkan hukum di antara manusia, supaya kamu menetapkan dengan adil...” (An Nisaa':58)

(2) Dalam perkataan, *al-’adl* berarti ” benar dan jujur ”. Allah SWT berfirman,

وَإِذَا قُلْتُمْ فَٱعْدِلُوا۟

”...dan apabila kamu berkata, maka hendaklah kamu berlaku adil...”

(Al An'aam:152)

(3) *Al-’adl* berarti ”tebusan”. Allah SWT berfirman,

وَإِن تَعْدِلْ كُلَّ عَدْلٍ لَّا يُؤْخَذْ مِنْهَآ ۗ

”...dan jika ia menebus dengan segala macam tebusan pun, niscaya tidak akan diterima itu daripadanya...”(QS.6:70).

(4) *Al-’adl* bisa juga berarti ” kemusyrikan”. Allah SWT berfirman,

ثُمَّ ٱلَّذِينَ كَفَرُوا۟ بِرَبِّهِمْ يَعْدِلُونَ ﴿١﴾

”...Namun, orang-orang yang kafir mempersekutukan (sesuatu) dengan Tuhan mereka” (QS.6:1).

Di samping *al-'adl*, dalam bahasa Arab digunakan juga kata *al-'adl*, dalam bahasa Indonesia dua kata ini mempunyai arti yang sama, yakni keadilan. Namun dalam bahasa Arab keduanya digunakan dalam konteks yang berbeda. Kata *al-'adl* digunakan dalam perkara keadilan yang menggunakan kalbu dan rasio sebagai ukurannya. Adapun *al-'adl* digunakan dalam kasus yang dapat dipantau dengan panca indera,seperti timbangan, hitungan, dan ukuran. Dalam mengukur dan menimbang, keadilan berarti "kesesuaian dengan ukuran yang sebenarnya". Dalam pembagian, keadilan berarti "kesamaan antara bagian-bagian dari barang yang dibagi".

Adil dalam ajaran Islam ada dua macam. Pertama, adil mutlak, yang tidak terikat. Dalam pengertian ini, manusia sangat membutuhkan fungsi akal untuk mengetahui kebaikan atau keadilan itu. Adil dalam hal ini lebih dekat pada pengertian "kebaikan atau kebenaran". Karena tidak terikat (mutlak), hukum mengenai keadilan dalam pengertian ini tidak pernah dihapuskan sepanjang masa, dari satu syariat (agama Allah SWT) ke syariat yang lain. Pelaksanaannya merupakan kewajiban. Adil ini tidak sama dengan balas-membalas. Karenanya, apabila seseorang membunuh bukan berarti dia juga harus dibunuh. Kedua, adil yang hanya diketahui melalui Al-Qur'an atau hadist Nabi SAW. Adil dalam pengertian ini dalam perjalanan sejarah agama Allah SWT dapat mengalami perubahan atau penghapusan hukum karena ajaran agama yang baru, seperti kisas dan denda jinayah (pidana dalam Islam). (Azra: 2005: 82)

Keadilan dalam Islam merupakan kewajiban agama. Pentingnya sikap dan sifat adil dalam islam dapat dilihat dai hadist nabi SAW : " ilmu itu ada tiga, diantaranya adalah kewajiban berlaku adil dalam membagi" (HR. Abu Dawud dan Ahmad bin Hanbal).

Sifat adil dalam ilmu fiqh merupakan syarat bagi orang yang akan bertindak sebagai : (1) saksi dalam segala perkara, seperti dalam masalah pernikahan, pencatatan utang, dan dalam perkara hukum, (2) hakim, dan (3) penguasa. Dalam hal ini, adil berarti "tidak berat sebelah atau memihak", " berpihak atau berpegang pada kebenaran", atau " tidak sewenang-wenang atau zalim".

Dalam ilmu hadist, sifat adil merupakan syarat bagi seorang periwayat, hadist yang diriwayatkan oleh orang yang dipandang tidak adil tidak dianggap sahih. Dalam hal ini adil berarti "berpihak dan berpegang pada kebenaran". Orang yang adil adalah orang yang perkataan dan keputusannya diridhai Allah SWT. Rifat Fauzi Abdul Muthalib, pakar ilmu hadis di University Cairo, Mesir, menyatakan bahwa adil dalam kaitannya dengan periwayatan hadist berarti " sifat yang melekat pada seseorang sehingga orang itu selalu bertakwa (menjauhi perbuatan buruk berupa kefasikan dan bid'ah) dan berkepribadian baik". Orang yang adil dalam pengertian ini akan menjauhi larangan agama, tidak melakukan dosa besar dan kecil. (Azra: 2005: 83)

Imam Syafi'i berpendapat bahwa adil berarti " dapat dipercaya dalam bidang agama, benar dalam berbicara, dan tidak pernah berbohong". Akan tetapi, adil dalam pengertian ini bukan berarti bahwa orang yang memiliki sifat itu sama sekali bebas dari dosa, karena tidak ada manusia yang demikian terjaga. Dalam hal ini, Sa'id bin Musayyab (15 H/637 M-94 H/713 M),tokoh taibiin Madinah, mengatakan bahwa tidak ada seseorang pun dari kalangan ulama dan penguasa yang bebas dari cacat, tetapi ada diantara mereka yang cacatnya sangat sedikit sehingga tidak diperhitungkan. Imam Abu Yusuf, Imam Mujtahid Mazhab hanafi mengatakan,

” barang siapa yang terbebas dari dosa besar yang menyebabkan ia sesuai ancaman Allah akan masuk neraka, sementara perbuatan baiknya melebihi perbuatan buruknya, adalah orang yang adil.”

Orang yang tidak adil adalah orang zalim, baik bagi dirinya sendiri maupun dan terutama terhadap orang lain. Berbuat zalim terhadap orang lain (*fahisyah*) termasuk dosa besar (QS.53:32 dan 3 :135), oleh karena itu, orang yang tidak berlaku adil diancam dengan siksa yang berat di akhirat. Di dunia, orang yang tidak adil, sebagaimana pelaku dosa besar lainnya, diperlakukan sebagai orang fasik, yaitu tidak boleh diangkat menjadi penguasa (pejabat) dan hakim. Di samping itu, riwayat (hadist), kesaksian, dan kewaliannya tidak diterima. (Azra: 2005: 83)

2.7.2. Makna Adil dalam Al-Qur’an

Sebenarnya, di dalam Al-Qur’an kata yang berakar dari *’adl* itu lebih banyak disebut, yakni sebanyak 28 kali, sedangkan dari *qsth* disebut sebanyak 25 kali. Dari kata itu ada pula yang berbentuk kata kerja, misalnya yang terdapat dalam al-Qur’an surah al-Infithar/ 82:7. tiga ayat sebelum dan sesudahnya berbunyi sebagai berikut :

يَٰٓأَيُّهَا ٱلۡإِنسَٰنُ مَا غَرَّكَ بِرَبِّكَ ٱلۡكَرِيمِ ٦ ٱلَّذِي خَلَقَكَ فَسَوَّىٰكَ فَعَدَلَكَ ٧ فِيٓ
أَيِّ صُورَةٖ مَّا شَآءَ رَكَّبَكَ ٨

"Hai manusia, apakah yang telah memperdayakan kamu (berbuat durhaka) terhadap Tuhanmu Yang Maha Pemurah. Yang telah menciptakan kamu lalu menyempurnakan kejadianmu dan menjadikan (susunan tubuh)mu seimbang, dalam bentuk apa saja yang Dia kehendaki, Dia menyusun tubuhmu."

Dalam ayat tersebut,*'adala* berarti "membuat seimbang." disitu diinformasikan kepada manusia bahwa tubuh manusia itu secara keseluruhan disusun menurut prinsip-prinsip keseimbangan. Dengan prinsip-prinsip itu manusia mencapai susunan yang sempurna. Keseimbangan dapat digambarkan dengan susunan dan sistem tubuh manusia yang serba seimbang. Dengan demikian, salah satu dimensi keadilan adalah keseimbangan.

Pengertian keseimbangan atau seimbang itu terdapat pula dalam kata *al-qisthas al-mustaqim*. Contoh ini diberikan oleh Al-Qur'an surah al-Isra'/ 17:35 :

وَأَوۡفُواْ ٱلۡكَيۡلَ إِذَا كِلۡتُمۡ وَزِنُواْ بِٱلۡقِسۡطَاسِ ٱلۡمُسۡتَقِيمِۚ ذَٰلِكَ خَيۡرٞ وَأَحۡسَنُ تَأۡوِيلٗا ٣٥

"Dan sempurnakanlah takaran apabila kamu menakar, dan timbanglah dengan neraca yang benar. Itulah yang lebih utama (bagimu) dan lebih baik akibatnya. "

Keadilan dalam ayat itu, digambarkan dengan cara orang menimbang, misalnya menimbang emas dan perak. Cara menimbang yang sempurna adalah jika orang menimbang dengan ukuran yang benar, yaitu seimbang antara yang di sebelah kiri dan di sebelah kanan. Karena itu, lambang keadilan adalah gambar dewi yang sedang menimbang dengan menutup matanya, yang menggambarkan ketidakberpihakkan kepada salah satu diantara yang dipertimbangkan. (Rahardjo: 1996: 373)

Pengertian tentang adil atau keadilan itu di dalam al-Qur’an memang diekspresikan dalam beberapa kata, selain *’adl* dan *qisth*, umpamanya *ahkam*, *qawam*, *amtsal*, *iqtashada*, *shadaqa*, *shidiq*,atau *barr*. Adil sebenarnya adalah sifat Allah sendiri dan Allah adalah Hakim yang paling adil (Q.S Hud/11:45).

Dengan mempergunakan kata *qawam*, al-Qur’an surah al-Furqan /25: 67, juga menggambarkan perilaku yang mengandung makna adil, yaitu yang berbunyi:

وَٱلَّذِينَ إِذَآ أَنفَقُواْ لَمۡ يُسۡرِفُواْ وَلَمۡ يَقۡتُرُواْ وَكَانَ بَيۡنَ ذَٰلِكَ قَوَامًا ﴿٦٧﴾

”Dan orang-orang yang apabila membelanjakan (harta), mereka tidak berlebihan, dan tidak (pula) kikir, dan adalah (pembelanjaan itu) di tengah-tengah antara yang demikian.”

Dari ayat ini, sifat adil itu dimanifestasikan dengan pertimbangan yang seimbang. Umpamanya saja, dalam pembelanjaan kekayaan atau pendapatan, seorang yang adil itu tidak berlebihan, tidak terlalu kikir, melainkan ditengah-tengah antara kedua kecenderungan itu. Orang yang bisa menahan diri dan tidak berlebih-lebihan atau tidak ekstrem, adalah orang yang adil. Sifat adil itu bukan semata-mata bagi kepentingan dirinya sendiri, tetapi juga dengan mempertimbangkan kepentingan orang lain.

Sebenarnya *qawam* berarti ” pendirian yang teguh ” atau ” berdiri tegak.” dalam berdiri tegak itu orang tidak terombang-ambing ke kiri atau ke kanan. Dan jika pun bergerak, ia bergerak dengan seimbang sehingga tidak jatuh. Di sini terkandung unsur fleksibelitas yang menyebabakan seseorang tidak menyimpang.

Inilah watak seorang pemimpin atau seorang yang bertanggung jawab, seperti seorang kepala rumah tangga. Seorang lelaki dalam rumah tangga adalah *qawwam* atau pemimpin (Q.S. an-Nisa'/4:34). Ayat ini tidak menunjukkan bahwa laki-laki itu lebih kuat dari perempuan, melainkan untuk memberikan pengertian bahwa lelaki itu, dalam suatu rumah tangga, harus bertanggung-jawab. Jika mampu, atau jika keadaan memaksa, maka seorang perempuan bisa pula menjadi pemimpin, dan untuk itu ia harus mampu bertindak adil. (Rahardjo: 1996: 374)

Dalam ayat 135 surat yang sama, istilah *qawwam*, bergandengan dengan kata *qisth*. Di situ *qawwam* berarti seorang penegak, atau orang yang bertugas menegakkan sesuatu dan sebagai penegak, ia harus mempertahankan, memelihara atau menjamin yang ditegakkan itu (*securer*). Sebagai penegak dan penjamin, maka seorang itu harus mampu menjalankan fungsi atau tugasnya dengan karakter yang adil. Ayat itu berbunyi demikian :

۞ يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوا۟ كُونُوا۟ قَوَّٰمِينَ بِٱلْقِسْطِ شُهَدَآءَ لِلَّهِ وَلَوْ عَلَىٰٓ أَنفُسِكُمْ أَوِ ٱلْوَٰلِدَيْنِ وَٱلْأَقْرَبِينَ ۚ إِن يَكُنْ غَنِيًّا أَوْ فَقِيرًا فَٱللَّهُ أَوْلَىٰ بِهِمَا ۖ فَلَا تَتَّبِعُوا۟ ٱلْهَوَىٰٓ أَن تَعْدِلُوا۟ ۚ وَإِن تَلْوُۥٓا۟ أَوْ تُعْرِضُوا۟ فَإِنَّ ٱللَّهَ كَانَ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرًا ﴿١٣٥﴾

"Wahai orang-orang yang beriman, jadilah kamu orang yang benar-benar penegak keadilan, menjadi saksi Karena Allah biarpun terhadap dirimu sendiri atau ibu bapa dan kaum kerabatmu. jika ia Kaya ataupun miskin, Maka Allah lebih tahu kemaslahatannya. Maka janganlah kamu mengikuti hawa nafsu Karena ingin menyimpang dari kebenaran. dan jika kamu memutar balikkan (kata-kata) atau enggan menjadi saksi, Maka Sesungguhnya Allah adalah Maha mengetahui segala apa yang kamu kerjakan."

Seorang yang disebut saksi itu bukan hanya saksi dalam pengadilan, tetapi juga saksi dalam berbagai hal. Seorang pengamat atau wartawan juga seorang saksi atas kejadian. Sebagai saksi, ia harus bersikap adil. Lebih-lebih dalam pengadilan yang langsung berhubungan dengan soal hukuman. Seorang yang benar-benar bertindak adil adalah yang tetap jujur, sekalipun hal itu menyangkut dirinya sendiri, ibu, bapak, atau kerabatnya. Artinya, dalam bersaksi itu tidak bohong atau tidak berpihak kepada seseorang yang telah menyimpang dari kebenaran. (Rahardjo: 1996: 375)

Sebenarnya, dalam al-Qur'an terdapat pengertian-pengertian yang mengandung unsur keadilan, misalnya dalam istilah *iqtashada* yang artinya moderat, pertengahan jujur atau lurus. Sebagai contoh, dalam al-qur'an surah al-Maidah/5:66 disebutkan adanya kelompok orang-orang Yahudi dan Nasrani yang benar-benar dan jujur menjalankan ajaran *Tawrat* dan *Injil*. Mereka itu, karena kejujuran yang mereka lakukan, akan mendapat rahmat dari Tuhan. Golongan seperti itu disebut sebagai *al-ummat al-muqtashidah*.

Gambaran adil bisa pula diberikan kepada aliran, pandangan, adat istiadat, keyakinan (agama), atau cara hidup. Pengertian itu diungkapkan dengan istilah *thariqat*. Bangsa mesir umpamanya, merasa memiliki *thariqah* yang mapan. Penguasa mesir mmerasa khawatir bahwa kedatangan Nabi Musa a.s. dan Nabi Harun a.s. akan menyebabkan lenyapnya pandangan hidup dan cara hidup mereka (Q.s. Thaha/20:63). Pengertian itu disebut sebagai *thariqat al-mustla*. Dalam ayat 104, istilah itu diterjemahkan juga menjadi ”jalan lurus” yang dalam ayat 63 diartikan sebagai ”kedudukan yang utama.” Di situ, yang disebut adil adalah yang kokoh, mapan, sudah benar, dan dapat berdiri dengan tegak.

Dalam kata adil terkandung ”kebenaran” atau ”yang benar.” pengertian ini diekspresikan dengan kata *shadaqa*. Umpamanya saja dalam Al-Qur’an surah Bani Isra’il/ 17:80, tertulis do’a yang begitu baik dan populer, yang perlu diucapkan setiap orang :

وَقُل رَّبِّ أَدۡخِلۡنِي مُدۡخَلَ صِدۡقٖ وَأَخۡرِجۡنِي مُخۡرَجَ صِدۡقٖ وَٱجۡعَل لِّي مِن لَّدُنكَ سُلۡطَٰنٗا نَّصِيرٗا ٨٠

Dan Katakanlah: "Ya Tuhan-ku, masukkanlah Aku secara masuk yang benar dan keluarkanlah (pula) Aku secara keluar yang benar dan berikanlah kepadaku dari sisi Engkau kekuasaan yang menolong.

Pemahaman terhadap do’a itu memerlukan pengalaman hidup. Kadang-kadang orang memasuki persolaan dimana ia berada dalam posisi yang sulit atau berada di pihak yang salah. Kalau ia berusaha keluar dari masalah, mungkin ia akan memasuki masalah lain yang lebih besar. Kalau ia ingin keluar maka ia harus mendapatkan jalan keluar yang baik (*just outgoing*). (Rahardjo: 1996: 376)

BAB III

PEMBAHASAN

Penyelesaian sistem kongruensi linier dengan 3 kongruensi 3 variabel dan 4 kongruensi 4 variabel agar mempunyai tepat satu selesaian digunakan metode eliminasi-subtitusi dan invers matriks yang dipaparkan melalui selesaian sistem kongruensi linier dibawah ini

3.1. Menyelesaikan sistem kongruensi linier Tiga Kongruensi Tiga Variabel

Definisi :

Sistem kongruensi linier dengan tiga kongruensi tiga variabel dan bermodulo m adalah :

$ax + by + cz \equiv d \pmod{m}$

$ex + fy + gz \equiv h \pmod{m}$

$ix + jy + kz \equiv l \pmod{m}$

untuk $a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l \in Z$ dengan $m > 0$

Contoh :

$3x + 2y + z \equiv 6 \pmod{7}$ dan $4x + 3y + 2z \equiv 6 \pmod{7}$, sistem kongruensi linier tersebut terdiri dari tiga kongruensi dan tiga variabel yang tidak diketahui dan bermodulo sama yaitu 7.

3.1.1. Menyelesaikan sistem kongruensi linier tiga kongruensi tiga variabel dengan Eliminasi-Subtitusi.

Menyelesaikan kongruensi linier dengan tiga kongruensi tiga variabel langkah pertama yang harus dilakukan adalah menentukan det-nya dan menentukan apakah kongruensi tersebut mempunyai selesaian, menentukan eliminasi, kemudian salah satu variabel hasil eliminasi disubtitusikan pada salah satu sistem kongruensi linier (salah satu dari soal).

Misalkan sistem kongruensi linier dengan tiga kongruensi tiga variabel

ax + by + cz $\equiv$ d (mod m)

ex + fy + gz $\equiv$ h (mod m)

ix + jy + kz $\equiv$ l (mod m)

untuk a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l $\in$ Z dengan m > 0, jika (Δ,m) = 1

sistem kongruensi diatas mempunyai penyelesaian dengan ketentuan sebagai berikut :

misal : $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & j & k \end{bmatrix}$ Dimana $\det(A) = \left(\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ e & f & g & e & f \\ i & j & k & i & j \end{array}\right)$

= (afk + bgi + cej) – (cfi + agj + bek)

(i) det (A) = 0 maka A tidak punya invers sehingga tidak dapat diketahui nilai x, y dan z yang memenuhi sistem kongruensi, dengan kata lain tidak ada selesaian.

(ii) det (A) $\neq$ 0, maka A punya invers sehingga dapat ditentukan nilai x, y dan z yang memenuhi sistem kongruensi.

Uraian:

1) Untuk det (A) = 0

det (A) = (afk + bgi + cej) – (cfi + agj + bek) = 0

- $afk - bek = 0$

  $af - be = 0$

  $$\begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} = 0$$

  $$\frac{a}{e} - \frac{b}{f} = 0$$

  $$\therefore \frac{a}{e} = \frac{b}{f}$$

- $afk - agj = 0$

  $fk - gj = 0$

  $$\begin{vmatrix} f & g \\ j & k \end{vmatrix} = 0$$

  $$\frac{f}{j} - \frac{g}{k} = 0$$

  $$\therefore \frac{f}{j} = \frac{g}{k}$$

- $afk - cfi = 0$

  $ak - ci = 0$

  $$\begin{vmatrix} a & c \\ i & k \end{vmatrix} = 0$$

  $$\frac{a}{i} - \frac{c}{k} = 0$$

  $$\therefore \frac{a}{i} = \frac{c}{k}$$

- $bgi - agj = 0$

  $bi - aj = 0$

  $$\begin{vmatrix} b & a \\ j & i \end{vmatrix} = 0$$

  $$\frac{b}{j} - \frac{a}{i} = 0$$

  $$\therefore \frac{b}{j} = \frac{a}{i}$$

- $bgi - cfi = 0$

  $bg - cf = 0$

  $$\begin{vmatrix} b & c \\ f & g \end{vmatrix} = 0$$

  $$\frac{b}{f} - \frac{c}{g} = 0$$

  $$\therefore \frac{b}{f} = \frac{c}{g}$$

- $bgi - bek = 0$

  $gi - ek = 0$

  $$\begin{vmatrix} g & e \\ k & i \end{vmatrix} = 0$$

  $$\frac{g}{k} - \frac{e}{i} = 0$$

  $$\therefore \frac{g}{k} = \frac{e}{i}$$

- $cej - cfi = 0$

  $ej - fi = 0$

  $$\begin{vmatrix} e & f \\ i & j \end{vmatrix} = 0$$

  $$\frac{e}{i} - \frac{f}{j} = 0$$

  $$\therefore \frac{e}{i} = \frac{f}{j}$$

- $cej - agj = 0$

  $ce - ag = 0$

  $$\begin{vmatrix} c & a \\ g & e \end{vmatrix} = 0$$

  $$\frac{c}{g} - \frac{a}{e} = 0$$

  $$\therefore \frac{c}{g} = \frac{a}{e}$$

- $cej - bek = 0$

  $cj - bk = 0$

  $$\begin{vmatrix} c & b \\ k & j \end{vmatrix} = 0$$

  $$\frac{c}{k} - \frac{b}{j} = 0$$

  $$\therefore \frac{c}{k} = \frac{b}{j}$$

Sehingga $\frac{a}{e}=\frac{b}{f}=\frac{c}{g}$ *atau* $\frac{a}{i}=\frac{b}{j}=\frac{c}{k}$ *atau* $\frac{e}{i}=\frac{f}{j}=\frac{g}{k}$

Jika suatu kongruensi memenuhi salah satu syarat seperti diatas, maka sistem kongruensi tersebut *tidak punya selesaian*.

2) Untuk det (A) $\neq 0$

det (A) = (afk + bgi + cej) – (cfi + agj + bek) $\neq 0$

- afk – bek $\neq 0$

  af – be $\neq 0$

  $\begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} \neq 0$

  $\frac{a}{e}-\frac{b}{f} \neq 0$

  $\therefore \frac{a}{e} \neq \frac{b}{f}$

- afk – agj $\neq 0$

  fk – gj $\neq 0$

  $\begin{vmatrix} f & g \\ j & k \end{vmatrix} \neq 0$

  $\frac{f}{j}-\frac{g}{k} \neq 0$

  $\therefore \frac{f}{j} \neq \frac{g}{k}$

- afk – cfi $\neq 0$

  ak – ci $\neq 0$

  $\begin{vmatrix} a & c \\ i & k \end{vmatrix} \neq 0$

  $\frac{a}{i}-\frac{c}{k} \neq 0$

  $\therefore \frac{a}{i} \neq \frac{c}{k}$

- bgi – agj $\neq 0$

  bi – aj $\neq 0$

  $\begin{vmatrix} b & a \\ j & i \end{vmatrix} \neq 0$

  $\frac{b}{j}-\frac{a}{i} \neq 0$

  $\therefore \frac{b}{j} \neq \frac{a}{i}$

- bgi – cfi $\neq 0$

  bg – cf $\neq 0$

  $\begin{vmatrix} b & c \\ f & g \end{vmatrix} \neq 0$

  $\frac{b}{f}-\frac{c}{g} \neq 0$

  $\therefore \frac{b}{f} \neq \frac{c}{g}$

- bgi – bek $\neq 0$

  gi – ek $\neq 0$

  $\begin{vmatrix} g & e \\ k & i \end{vmatrix} \neq 0$

  $\frac{g}{k}-\frac{e}{i} \neq 0$

  $\therefore \frac{g}{k} \neq \frac{e}{i}$

- cej – cfi $\neq 0$

  ej – fi $\neq 0$

  $$\begin{vmatrix} e & f \\ i & j \end{vmatrix} \neq 0$$

  $$\frac{e}{i} - \frac{f}{j} \neq 0$$

  $$\therefore \frac{e}{i} \neq \frac{f}{j}$$

- cej – agj $\neq 0$

  ce – ag $\neq 0$

  $$\begin{vmatrix} c & a \\ g & e \end{vmatrix} \neq 0$$

  $$\frac{c}{g} - \frac{a}{e} \neq 0$$

  $$\therefore \frac{c}{g} \neq \frac{a}{e}$$

- cej – bek $\neq 0$

  cj – bk $\neq 0$

  $$\begin{vmatrix} c & b \\ k & j \end{vmatrix} \neq 0$$

  $$\frac{c}{k} - \frac{b}{j} \neq 0$$

  $$\therefore \frac{c}{k} \neq \frac{b}{j}$$

Sehingga $\frac{a}{e} \neq \frac{b}{f} \neq \frac{c}{g}$ *atau* $\frac{a}{i} \neq \frac{b}{j} \neq \frac{c}{k}$ *atau* $\frac{e}{i} \neq \frac{f}{j} \neq \frac{g}{k}$

Jika suatu kongruensi memenuhi salah satu syarat seperti diatas, maka sistem kongruensi tersebut *punya satu selesaian*.

Sedangkan jika syaratnya adalah

$$\frac{a}{e} \neq \frac{b}{f} \neq \frac{c}{g} = \frac{d}{h} \quad atau \quad \frac{a}{i} \neq \frac{b}{j} \neq \frac{c}{k} = \frac{d}{l} \quad atau \quad \frac{e}{i} \neq \frac{f}{j} \neq \frac{g}{k} = \frac{h}{l}$$

maka sistem kongruensi tersebut *punya tak hingga banyak selesaian*.

Kemudian menentukan modulonya

dimana $\Delta = \left(\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ e & f & g & e & f \\ i & j & k & i & j \end{array}\right) = ((\text{ afk} + \text{bgi} + \text{cej}) - (\text{ cfi} + \text{agj} + \text{bek })),$ maka

sistem kongruensi linier tersebut mempunyai tepat satu selesaian modulo m, yaitu:

$x \equiv \overline{\Delta}(\text{ bgl} + \text{chj} + \text{dfk }) - (\text{ bhk} + \text{cfl} + \text{dgj }) \pmod m$

$y \equiv \overline{\Delta}(\text{ dgi} + \text{hak} + \text{lce }) - (\text{ dek} + \text{hei} + \text{lag }) \pmod m$

$z \equiv \overline{\Delta}(\text{ afl} + \text{beh} + \text{dej }) - (\text{ ahj} + \text{dif} + \text{bel }) \pmod m$

dimana $\overline{\Delta}$ adalah invers Δ modulo m

Bukti :

$ax + by + cz \equiv d \pmod m$...............(1)

$ex + fy + gz \equiv h \pmod m$...............(2)

$ix + jy + kz \equiv l \pmod m$................(3)

mengeleminasi pers. (1) dan pers. (2)

$$\begin{array}{l|c|l} ax + by + cz \equiv d \pmod m & \times g & agx + bgy + cgz \equiv dg \pmod m \\ ex + fy + gz \equiv h \pmod m & \times c & \underline{ecx + fcy + gcz \equiv hc \pmod m} \quad - \end{array}$$

$(ag - ec)x + (bg - fc)y \equiv (dg - hc) \pmod m$............(4)

mengeleminasi pers. (1) dan pers. (3)

$$\begin{array}{l|c|l} ax + by + cz \equiv d \pmod m & \times k & akx + bky + ckz \equiv dk \pmod m \\ ix + jy + kz \equiv l \pmod m & \times c & \underline{icx + jcy + kcz \equiv lc \pmod m} \quad - \end{array}$$

$(ak - ic)x + (bk - jc)y \equiv (dk - lc) \pmod m$............(5)

mengeleminasi pers. (4) dan pers. (5)

$$\begin{array}{l|l|} (ag - ec)x + (bg - fc)y \equiv (dg - hc) \pmod{m} & x\ (bk - jc) \\ (ak - ic)x + (bk - jc)y \equiv (dk - lc) \pmod{m} & x\ (dg - fc) \end{array}$$

$$(ag - ec)(bk - jc)x + (bg - fc)(bk - jc)y \equiv (dg - hc)(bk - jc) \pmod{m}$$

$$\underline{(ak - ic)(bg - fc)x + (bk - jc)(bg - fc)y \equiv (dk - lc)(bg - fc) \pmod{m}}\ -$$

$$\{(ag - ec)(bk - jc) - (ak - ic)(bg - fc)\}x \equiv (dg - hc)(bk - jc) - (dk - lc)(bg - fc) \pmod{m}$$

Mengalikan ruas kiri terlebih dahulu :

$$\{(ag - ec)(bk - jc) - (ak - ic)(bg - fc)\}x$$

$$\{ (agbk - agje - ecbk + ecje) - (akbg - akfc - iebg + iefc) \}\ x$$

$$\{ agbk - agje - ecbk + ecje - akbg + akfc + iebg - iefc \}\ x$$

$$\{ akbg - akbg - acgj + ackf - cbek + cbig + ccej - ccfi \}\ x$$

$$\{ - ac(gj - kf) - cb(ek - ig) + cc(ej - fi) \}\ x$$

$$\{ - a(gj - kf) - b(ek - ig) + c(ej - fi) \}\ x$$

$$\{ - agj + afk - bek + big + cej - cfi \}x$$

$$(afk + bgi + cej) - (cfi + agj + bek)\ x$$

Kemudian mengalikan ruas yang kanan, yakni :

$$(dg - hc)(bk - jc) - (dk - lc)(bg - fc) \pmod{m}$$

$$\{ (dgbk - dgjc - hcbk + hcjc) - (dkbg - dkfc - lcbg + lcfc) \} \pmod{m}$$

$$\{ dgbk - dgjc - hcbk + hcjc - dkbg + dkfc + lcbg - lcfc \} \pmod{m}$$

$$\{ jcdg + jchc - bchk + bcgl + cf\,dk - cfcl \} \pmod{m}$$

$$\{ - j(dg - hc) - b(hk - gl) + f(dk - cl) \} \pmod{m}$$

$$\{- dgj + chj - bhk + bgl + dfk - cfl \} \pmod{m}$$

$$(bgl + chj + dfk) - (bhk + cfl + dgj) \pmod{m}$$

Sehingga

$(afk + bgi + cej) - (cfi + agj + bek)\, x \equiv (bgl + chj + dfk) - (bhk + cfl + dgj)$ (mod m)

Karena $\Delta \equiv (afk + bgi + cej) - (cfi + agj + bek)$, maka

$\Delta x \equiv (bgl + chj + dfk) - (bhk + cfl + dgj)$ (mod m)

Dengan $\overline{\Delta}$ (invers dari Δ mod m) diperoleh :

$\overline{\Delta} . \Delta\, x \equiv \overline{\Delta}\, (bgl + chj + dfk) - (bhk + cfl + dgj)$ (mod m)

$x \equiv \overline{\Delta}\, (bgl + chj + dfk) - (bhk + cfl + dgj)$ (mod m)

dengan langkah yang sama kemudian mencari nilai y

$$\begin{array}{l|l|} (ag - ec)x + (bg - fc)y \equiv (dg - hc) \text{ (mod m)} & x\,(ak - ie) \\ (ak - ie)x + (bk - jc)y \equiv (dk - lc) \text{ (mod m)} & x\,(ag - ec) \end{array}$$

$(ag - ec)(ak - ie)\, x + (bg - fc)(ak - ie)\, y \equiv (dg - hc)(ak - ie)$ (mod m)

$\underline{(ak - ie)(ag - ec)\, x + (bg - fc)(ag - ec) y \equiv (dk - lc)(ag - ec) \text{ (mod m)}}$ -

$\{(bg - fc)(ak - ie) - (bg - fc)(ag - ec)\} y \equiv (dg - hc)(ak - ie) - (dk - lc)(ag - ec)$ (mod m)

Sehingga menjadi :

$(afk + bgi + ceg) - (cfi + agj + bek)\, y \equiv (dk - lc)(ag - ec) - (dg - hc)(ak - ie)$ (mod m)

Sekarang mengalikan

$(dk - lc)(ag - ec) - (dg - hc)(ak - ie)$ (mod m)

$\{ dkag - dkec - lcag + lcec - (dkag - dgie - hcak + hcie) \}$(mod m)

$\{ - dkec - lcag + lcec + dgic + hcak - hcie \}$ (mod m)

$\{ - dc(ke - gi) - lc(ag - ec) + hc(ak - ic) \}$ (mod m)

$\{ - d(ke - gi) - l(ag - ec) + h(ak - ic) \}$ (mod m)

$\{ - dke + dgi - lag + lec + hak - hic \}$ (mod m)

$(dgi + hak + lce) – (dek + hei + lag) \pmod m$

Maka menjadi

$(afk + bgi + ceg) – (cfi + agj + bek)y \equiv (dgi + hak + lce) – (dek + hei + lag) \pmod m$

Karena $\Delta \equiv (afk + bgi + cej) – (cfi + agj + bek)$, maka

$\Delta y \equiv (dgi + hak + lce) – (dek + hei + lag) \pmod m$

Dengan $\overline{\Delta}$ (invers dari Δ mod m) diperoleh :

$\overline{\Delta} . \Delta\ y \equiv \overline{\Delta}(dgi + hak + lce) – (dek + hei + lag) \pmod m$

$y \equiv \overline{\Delta}(dgi + hak + lce) – (dek + hei + lag) \pmod m$

langkah selanjutnya menentukan nilai z :

seperti halnya diatas pertama mengeleminasi pers. (1) dan pers. (2)

$$\begin{array}{l|l|l}
ax + by + cz \equiv d \pmod m & x\ e & aex + bey + cez \equiv de \pmod m \\
ex + fy + gz \equiv h \pmod m & x\ a & \underline{eax + fay + gaz \equiv ha \pmod m}\ _ \\
 & & (be - fa)y + (ce – ga)z \equiv (de – ha) \pmod m ....(4)
\end{array}$$

mengeleminasi pers. (1) dan pers. (3)

$$\begin{array}{l|l|l}
ax + by + cz \equiv d \pmod m & x\ i & aix + biy + ciz \equiv di \pmod m \\
ix + jy + kz \equiv l \pmod m & x\ a & \underline{iax + jay + kaz \equiv la \pmod m}\ _ \\
 & & (bi - ja)y + (ci – ka)z \equiv (di – la) \pmod m ....(5)
\end{array}$$

mengeleminasi pers. (4) dan pers. (5)

$$\begin{array}{l|l|}
(be - fa)y + (ce – ga)z \equiv (de – ha) \pmod m & x\ (bi – ja) \\
(bi - ja)y + (ci – ka)z \equiv (di – la) \pmod m & x\ (be – fa)
\end{array}$$

$(be - fa)(bi - ja)y + (ce – ga)(bi - ja)z \equiv (de – ha)(bi - ja) \pmod m$

$\underline{(bi - ja)(be - fa)y + (ci – ka)(be - fa)z \equiv (di – la)(be - fa) \pmod m}\ -$

$\{(ce – ga)(bi - ja) - (ci – ka)(be - fa)\}z \equiv (de – ha)(bi - ja) - (di – la)(be - fa) \pmod m$

Mengalikan ruas kiri terlebih dahulu :

{(ce – ga) (bi – ja) – (ci – ka) (be – fa)}z

{(cebi – ceja – gabi + gaja) – (cibe – cifa – kabe + kafa)}z

{ cebi – ceja – gabi + gaja – cibe + cifa + kabe – kafa}z

{ – ca (ej – if) – ga(bi – ja) + ka (be – fa) } z

{ – c (ej – if) – g (bi – ja) + k (be – fa) } z

{ – cej + cif – gbi + gja + kbe – kfa } z

(cif + agj + bek) – (cej + afk + bgi) z ....(dikalikan min (-)), menjadi

(afk + bgi + cej) – (cfi + agj + bek) z

Kemudian mengalikan ruas yang kanan, yakni :

(de – ha) (bi - ja) - (di – la) (be- fa) (mod m)

(debi – deja – habi + haja) – (dibe – difa – labe + lafa) (mod m)

(debi – deja – habi + haja – dibe + difa + labe – lafa) (mod m)

(– dej – hbi + hja + dif + lbe – laf) (mod m)

(ahj + dif + bel) – (afl + beh dej) (mod m) ....(dikalikan min (-)), menjadi

(afl + beh dej) – (ahj + dif + bel) (mod m)

Sehingga

(afk + bgi + cej) – (cfi + agj + bek) z ≡ (afl + beh dej) – (ahj + dif + bel) (mod m)

Karena $\Delta \equiv$ (afk + bgi + cej) – (cfi + agj + bek), maka

$\Delta z \equiv$ (bgl + chj + dfk) – (bhk + cfl + dgj) (mod m)

Dengan $\overline{\Delta}$ (invers dari Δ mod m) diperoleh :

$\overline{\Delta} . \Delta z \equiv \overline{\Delta}$ (bgl + chj + dfk) – (bhk + cfl + dgj) (mod m)

$z \equiv \overline{\Delta}$ (bgl + chj + dfk) – (bhk + cfl + dgj) (mod m)

▲ terbukti

Contoh :

➢ Tidak Punya penyelesaian

Tentukan penyelesaian dari sistem kongruensi dengan tiga kongruensi tiga variabel berikut :

$2x + 3y + 2z \equiv 3 \pmod 7$

$2x + 3y + 2z \equiv 5 \pmod 7$

$3x + 2y + z \equiv 7 \pmod 7$

Pada contoh diatas sistem kongruensi tersebut tidak punya penyelesaian, karena sebagaimana syarat $\frac{a}{e} = \frac{b}{f} = \frac{c}{g}$

Yakni, $\frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{2}{2}$

➢ Punya tak hingga banyak selesaian

Tentukan penyelesaian dari sistem kongruensi dengan tiga kongruensi tiga variabel berikut :

$3x + 4y + 6z \equiv 3 \pmod 7$

$2x + 4y + 3z \equiv 3 \pmod 7$

$3x + 2y + z \equiv 7 \pmod 7$

Pada contoh diatas sistem kongruensi tersebut tidak punya penyelesaian, karena sebagaimana syarat $\frac{a}{e} \neq \frac{b}{f} \neq \frac{c}{g} = \frac{d}{i}$

Yakni, $\frac{3}{2} \neq \frac{4}{4} \neq \frac{6}{3} = \frac{3}{3}$

- Punya Satu Penyelesaian

contoh : tentukan penyelesaian dari sistem kongruensi dengan tiga kongruensi tiga variabel berikut :

$2x + 3y + 2z \equiv 3 \pmod 7$

$2x + y + z \equiv 5 \pmod 7$

$3x + 2y + z \equiv 7 \pmod 7$

Terlebih dahulu periksa apakah punya tepat satu selesaian sebagaimana syarat

$\frac{a}{e} \neq \frac{b}{f} \neq \frac{c}{g} \quad dan \quad \frac{a}{i} \neq \frac{b}{j} \neq \frac{c}{k}$

Kemudian menentukan determinan sehingga punya tepat satu selesaian

$$\text{mencari} : \Delta = \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) = 2 + 9 + 8 - 6 - 4 - 6 = 3 \pmod 7,\ (3,7) = 1$$

$2x + 3y + 2z \equiv 3 \pmod 7$............(1)

$2x + y + z \equiv 5 \pmod 7$............(2)

$3x + 2y + z \equiv 7 \pmod 7$............(3)

(1) $2x + 3y + 2z \equiv 3 \pmod 7$

(2) $\underline{2x + y + z \equiv 5 \pmod 7}$ _

$2y + z \equiv -2 \pmod 7$...............(4)

$$z \equiv \frac{-2y-2}{2} \pmod 7$$

$$z \equiv -y - 1 \pmod 7$$

$$
\begin{array}{lll|c|l}
(2) & 2x + y + z \equiv 5 \pmod 7 & & \times 3 & 6x + 3y + 3z \equiv 15 \pmod 7 \\
(3) & 3x + 2y + z \equiv 7 \pmod 7 & & \times 2 & \underline{6x + 4y + 2z \equiv 14 \pmod 7} \; - \\
 & & & & \quad -y + z \equiv 1 \pmod 7 ......(5)
\end{array}
$$

Kemudian subtitusikan $z \equiv -y - 1 \pmod 7$ ke persamaan (5) sehingga

$$
\begin{aligned}
-y + (-y - 1) &\equiv 1 \pmod 7 \\
-2y - 1 &\equiv 1 \pmod 7 \\
-2y &\equiv 2 \pmod 7 \\
y &\equiv -1 \pmod 7 \\
y &\equiv 6 \pmod 7
\end{aligned}
$$

untuk mengetahui nilai z maka nilai y disubtitusikan ke persamaan (5), sehingga

$$
\begin{aligned}
z &\equiv -y - 1 \pmod 7 \\
&\equiv -6 - 1 \pmod 7 \\
z &\equiv -7 \pmod 7 \text{ atau } z \equiv 0 \pmod 7
\end{aligned}
$$

kemudian subtitusikan ke salah satu persamaan (2) sehingga diperoleh :

$$
\begin{aligned}
2x + y + z &\equiv 5 \pmod 7 \\
2x + 6 + 0 &\equiv 5 \pmod 7 \\
2x + 6 &\equiv 5 \pmod 7 \\
2x &\equiv -1 \; (\text{mod })
\end{aligned}
$$

Karena 4 adalah invers dari 2 modulo 7, yang diperoleh

dari 7 x ...?...= 1 (mod 7), maka kedua ruas diatas dikalikan dengan 4 sehingga diperoleh :

$$
\begin{aligned}
4. 2x &\equiv 4(-1) \pmod 7 \\
x &\equiv -4 \pmod 7 \\
x &\equiv 3 \pmod 7
\end{aligned}
$$

selanjutnya untuk mengetahui dan mengecek kebenaran penyelesaian tersebut dengan mensubtitusikan kembali ke sistem linear awal sebagai berikut :

$2x + 3y + 2z \equiv 2.3 + 3.6 + 2.0 \equiv 24 \pmod 7 \equiv 3 \pmod 7$

$2x + y + z \equiv 2.3 + 1.6 + 1.0 \equiv 12 \pmod 7 \equiv 5 \pmod 7$

$3x + 2y + z \equiv 3.3 + 2.6 + 1.0 \equiv 21 \pmod 7 \equiv 7 \pmod 7$

3.1.2. Menyelesaikan sistem kongruensi linier tiga kongruensi tiga variabel dengan Invers Matriks.

Salah satu metode penyelesaian sistem kongruensi yang lain adalah dengan metode invers matriks.

Invers matriks A modulo m, dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem yang berbentuk $A.X \equiv B \pmod m$, dengan syarat (det A,m) =1 yang berarti det A $\neq 0$. pada bentuk tersebut kedua ruas dapat dikalikan dengan $\overline{A}$, diperoleh :

$\overline{A}\,(A \,.\, X) \equiv \overline{A} \,.\, B \pmod m$

$(\overline{A}.A)\,X \equiv \overline{A} \,.\, B \pmod m$

$X \equiv \overline{A} \,.\, B \pmod m$

Sehingga dapat ditentukan selesaian x dalam bentuk $\overline{A} \,.\, B \pmod m$.

Diberikan bentuk umum :

$ex + fy + gz \equiv h \pmod m$

$ax + by + cz \equiv d \pmod m$

$ix + jy + kz \equiv l \pmod m$

untuk $a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l \in Z$ dengan $m > 0$, jika $(\Delta,m) = 1$

sistem kongruensi diatas mempunyai penyelesaian menggunakan invers matriks dengan ketentuan sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & j & k \end{bmatrix}$$

Dimana det (A) = $\left(\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ e & f & g & e & f \\ i & j & k & i & j \end{array}\right)$ = ((afk + bgi + cej) – (cfi + agj + bek)

$A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} Adj(A)$ dengan syarat :

1. det (A) = 0 atau $|A| = 0$,

maka A tidak punya Invers sehingga x tidak punya penyelesaian, karena $\frac{1}{0} = \infty$

2. det (A) $\neq$ 0 atau $|A| \neq 0$,

Maka dapat dibalik dan mempunyai invers, sesuai teorema

det (A^{-1}) = $\dfrac{1}{\det(A)}$, det (A) $\neq$ 0

dalam pembuktian menggunakan invers matriks ini, langkah yang kami gunakan dalam menentukan invers yakni menggunakan operasi baris elementer.

$$A^{-1} = E_k \ldots E_2 E_1 I_n$$

Yakni A^{-1} dapat diperoleh dengan mengalikan dari sebelah kiri berturut-turut dengan matriks Elementer E_2, E_1, … E_k .

Misal dalam bentuk umum :

ax + by + cz $\equiv$ d (mod m)

ex + fy + gz $\equiv$ h (mod m)

ix + jy + kz $\equiv$ l (mod m)

Dapat ditulis dalam bentuk :

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ h & i & j \end{pmatrix}} \underset{X}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \underset{B}{\begin{pmatrix} d \\ h \\ l \end{pmatrix}} \text{ (mod } m\text{)}$$

Misal A = $\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ h & i & j \end{pmatrix}\right)$, AC = I dimana I = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

dan C = invers matriks A.

Selanjutnya untuk mendapatkan Matriks C maka

$$\left(\left.\begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ h & i & j \end{pmatrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \text{menggunakan operasi baris elementer} \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\left| \underbrace{\begin{matrix} r & s & t \\ u & v & w \\ x & y & z \end{matrix}}_{\textit{Invers}}\right.\right)$$

(I|C)

Dari operasi diatas maka dapat diketahui bahwa A^{-1} = C = Matriks invers

A = $\begin{pmatrix} r & s & t \\ u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix}$

Dan dengan rumus : A^{-1} . A . x = A^{-1} . B

x = A^{-1} . B maka dapat dicari variabel-variabel x-nya

jadi,

$$x = \begin{pmatrix} r & s & t \\ u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx + sy + tz \\ ux + vy + wz \\ xx + yy + zz \end{pmatrix}$$

Contoh :

Tentukan sistem kongruensi linear berikut melalui metode invers matriks?

$2x + 3y + 2z \equiv 3 \pmod 7$

$2x + y + z \equiv 5 \pmod 7$

$3x + 2y + z \equiv 7 \pmod 7$

Penyelesaian :

$2x + 3y + 2z \equiv 3 \pmod 7$

$2x + y + z \equiv 5 \pmod 7$

$3x + 2y + z \equiv 7 \pmod 7$

Deteminan pada kongruensi tersebut det (A) $\neq 0$, maka punya invers dan bisa diselesaikan, kemudian langkah selanjutnya dapat dibentuk dalam matriks :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \pmod 7 \text{ dengan mengalikan } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AC = 1, \text{ dimana } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } C = \text{invers matriks } A$$

Selanjutnya untuk mendapatkan matriks C maka :

$$4b_1 \equiv \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \pmod 7 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 12 & 8 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \pmod 7$$

$$\equiv \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \pmod 7$$

$$b_2 - 2b_1 \equiv \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \pmod 7 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & -1 & -8 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \pmod 7$$

$$\equiv \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \pmod 7$$

$$3b_2 \equiv \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \pmod 7 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 18 & 18 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \pmod 7$$

$$\equiv \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \pmod 7$$

$$b_3 - 3b_1 \equiv \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \pmod 7 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -13 & -2 & -12 & 0 & 1 \end{array}\right] \pmod 7$$

$$\equiv \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \pmod 7$$

$$b_3 - b_2 \equiv \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \pmod 7 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right] \pmod 7$$

$$\equiv \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & 1 \end{array}\right] \pmod 7$$

$$b_1 - 5b_2 \equiv \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & 1 \end{array}\right] \pmod 7 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -19 & -16 & -15 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & 1 \end{array}\right] \pmod 7$$

$$\equiv \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & 1 \end{array}\right] (\text{mod } 7)$$

$$b_1 - 2b_3 \equiv \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & 1 \end{array}\right] (\text{mod } 7) \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & 1 \end{array}\right] (\text{mod } 7)$$

$$\equiv \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & 1 \end{array}\right] (\text{mod } 7)$$

$$b_2 - 4b_3 \equiv \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & 1 \end{array}\right] (\text{mod } 7) \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -16 & -13 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & 1 \end{array}\right] (\text{mod } 7)$$

$$\equiv \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \underbrace{5 \quad 4 \quad 1}_{\textit{Invers}} \end{array}\right] (\text{mod } 7)$$

Dari operasi diatas dapat diketahui bahwa A^{-1} = C = invers matriks

$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 5 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ dan dengan rumus $A^{-1}.A.X = A^{-1}.B$

$X = A^{-1}.B$ maka dapat dicari variabel-variabelnya

$$X \equiv \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 5 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 2.3 + 5.5 + 5.7 \\ 5.3 + 1.5 + 3.7 \\ 5.3 + 4.5 + 1.7 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 66 \\ 41 \\ 42 \end{bmatrix} (\text{mod } 7),$$

$$\text{Maka } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} (\text{mod } 7)$$

Jadi ini menunjukkan bahwa selesaian dari sistem kongruensi tersebut diatas adalah :

x ≡3 (mod 7), y ≡6 (mod 7), z ≡0 (mod 7)

3.2. Menyelesaikan sisitem kongruensi linier Empat Kongruensi Empat Variabel

Pada penyelesaian sistem kongruensi linier empat kongruensi empat variabel tidaklah berbeda dengan penyelesaian kogruensi linier tiga kongruensi tiga variabel sebagaimana telah dituliskan di pembahasan sebelumnya, sedangkan penyelesaian sistem kongruensi dengan empat kongruensi empat variabel sebagai berikut :

aw + bx + cy + dz ≡e (mod m)

fw + gx + hy + iz ≡ j (mod m)

kw + lx + my + nz≡o (mod m)

pw + qx + ry + sz ≡ t (mod m)

Untuk a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t dengan m > 0, jika (Δ,m) = 1

Dimana $\Delta = \left[\begin{array}{cccc|ccc} a & b & c & d & a & b & c \\ e & f & g & h & e & f & g \\ i & j & k & l & i & j & k \\ m & n & o & p & m & n & o \end{array}\right]$

= ((*afkp* + *bglm* + *chin* + *dejo*) – (*dgjm* + *ahkn* + *belo* + *cfip*)), maka sistem kongruensi linier tersebut mempunyai tepat satu selesaian modulo m.

3.2.1. Menyelesaikan sistem kongruensi linier Empat kongruensi Empat variabel dengan Eliminasi-Subtitusi.

Menyelesaikan kongruensi linier dengan empat kongruensi empat variabel langkah pertama yang harus dilakukan adalah menentukan det-nya, dan menentukan syarat apakah sistem kongruensi tersebut mempunyai penyelesaian, menentukan eliminasi , kemudian salah satu variabel hasil eliminasi disubtitusikan pada salah satu sistem kongruensi linier (salah satu dari soal). Setelah masing-masing variabel mempunyai nilai, maka dapat ditentukan inversnya. Untuk lebih jelasnya akan diberikan dibawah ini :

Diberikan kongruensi dengan bentuk umum :

$$aw + bx + cy + dz \equiv e \pmod{m}$$

$$fw + gx + hy + iz \equiv j \pmod{m}$$

$$kw + lx + my + nz \equiv o \pmod{m}$$

$$pw + qx + ry + sz \equiv t \pmod{m}$$

Untuk a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t dengan m > 0, jika (Δ,m) = 1 sistem kongruensi diatas mempunyai penyelesaian dengan ketentuan sebagai berikut :

a).Tak Punya penyelesaian

dengan syarat :

$$\frac{a}{f}=\frac{b}{g}=\frac{c}{h}=\frac{d}{i} \quad atau \quad \frac{a}{p}=\frac{b}{q}=\frac{c}{r}=\frac{d}{s} \quad atau \quad \frac{f}{a}=\frac{g}{b}=\frac{h}{c}=\frac{i}{d}$$

$$\frac{a}{k}=\frac{b}{l}=\frac{c}{m}=\frac{d}{n} \quad atau \quad \frac{f}{p}=\frac{g}{q}=\frac{h}{r}=\frac{i}{s} \quad atau \quad \frac{f}{k}=\frac{g}{l}=\frac{h}{m}=\frac{i}{n}$$

$$\frac{k}{a}=\frac{l}{b}=\frac{m}{c}=\frac{n}{d} \quad atau \quad \frac{k}{p}=\frac{l}{q}=\frac{m}{r}=\frac{n}{s} \quad atau \quad \frac{p}{f}=\frac{q}{k}=\frac{r}{l}=\frac{s}{m}$$

$$\frac{k}{f}=\frac{l}{g}=\frac{m}{h}=\frac{n}{i} \quad atau \quad \frac{p}{a}=\frac{q}{b}=\frac{r}{c}=\frac{s}{d} \quad atau \quad \frac{p}{k}=\frac{q}{l}=\frac{r}{m}=\frac{s}{n}$$

b). Punya tak hingga banyak selesaian

dengan syarat

$$\frac{a}{f}\neq\frac{b}{g}\neq\frac{c}{h}\neq\frac{d}{i}=\frac{e}{j} \quad atau \quad \frac{a}{p}\neq\frac{b}{q}\neq\frac{c}{r}\neq\frac{d}{s}=\frac{e}{t} \quad atau \quad \frac{f}{a}\neq\frac{g}{b}\neq\frac{h}{c}\neq\frac{i}{d}=\frac{j}{e}$$

$$\frac{a}{k}\neq\frac{b}{l}\neq\frac{c}{m}\neq\frac{d}{n}=\frac{e}{o} \quad atau \quad \frac{f}{p}\neq\frac{g}{q}\neq\frac{h}{r}\neq\frac{i}{s}=\frac{j}{t} \quad atau \quad \frac{f}{k}\neq\frac{g}{l}\neq\frac{h}{m}\neq\frac{i}{n}=\frac{j}{o}$$

$$\frac{k}{a}\neq\frac{l}{b}\neq\frac{m}{c}\neq\frac{n}{d}=\frac{o}{e} \quad atau \quad \frac{k}{p}\neq\frac{l}{q}\neq\frac{m}{r}\neq\frac{n}{s}=\frac{o}{t} \quad atau \quad \frac{p}{f}\neq\frac{q}{k}\neq\frac{r}{l}\neq\frac{s}{m}=\frac{t}{n}$$

$$\frac{k}{f}\neq\frac{l}{g}\neq\frac{m}{h}\neq\frac{n}{i}=\frac{o}{j} \quad atau \quad \frac{p}{a}\neq\frac{q}{b}\neq\frac{r}{c}\neq\frac{s}{d}=\frac{t}{e} \quad atau \quad \frac{p}{k}\neq\frac{q}{l}\neq\frac{r}{m}\neq\frac{s}{n}=\frac{t}{o}$$

c). Punya Satu Penyelesaian

dengan syarat

$$\frac{a}{f}\neq\frac{b}{g}\neq\frac{c}{h}\neq\frac{d}{i} \quad atau \quad \frac{a}{p}\neq\frac{b}{q}\neq\frac{c}{r}\neq\frac{d}{s} \quad atau \quad \frac{f}{a}\neq\frac{g}{b}\neq\frac{h}{c}\neq\frac{i}{d}$$

$$\frac{a}{k}\neq\frac{b}{l}\neq\frac{c}{m}\neq\frac{d}{n} \quad atau \quad \frac{f}{p}\neq\frac{g}{q}\neq\frac{h}{r}\neq\frac{i}{s} \quad atau \quad \frac{f}{k}\neq\frac{g}{l}\neq\frac{h}{m}\neq\frac{i}{n}$$

$$\frac{k}{a}\neq\frac{l}{b}\neq\frac{m}{c}\neq\frac{n}{d} \quad atau \quad \frac{k}{p}\neq\frac{l}{q}\neq\frac{m}{r}\neq\frac{n}{s} \quad atau \quad \frac{p}{f}\neq\frac{q}{k}\neq\frac{r}{l}\neq\frac{s}{m}$$

$$\frac{k}{f}\neq\frac{l}{g}\neq\frac{m}{h}\neq\frac{n}{i} \quad atau \quad \frac{p}{a}\neq\frac{q}{b}\neq\frac{r}{c}\neq\frac{s}{d} \quad atau \quad \frac{p}{k}\neq\frac{q}{l}\neq\frac{r}{m}\neq\frac{s}{n}$$

Kemudian menentukan modulonya

$$\text{Dimana } \Delta = \left[\begin{array}{cccc|ccc} a & b & c & d & a & b & c \\ e & f & g & h & e & f & g \\ i & j & k & l & i & j & k \\ m & n & o & p & m & n & o \end{array}\right]$$

= ((*afkp* + *bglm* + *chin* + *dejo*) – (*dgjm* + *ahkn* + *belo* + *cfip*)), maka sistem kongruensi linier tersebut mempunyai tepat satu selesaian modulo m.

Contoh : tentukan penyelesaian dari sistem kongruensi, empat kongruensi empat variabel berikut ini :

3w + x + 2y + 2z ≡ 4 (mod 5)

w + 2x + 3y + z ≡ 4 (mod 5)

2w + x + 3y + z ≡ 5 (mod 5)

3w + 2x + y + 2z ≡ 2 (mod 5)

Jawab :

Dari contoh di atas sistem kongruensi tersebut sesuai dengan syarat

$$\frac{a}{f} \neq \frac{b}{g} \neq \frac{c}{h} \neq \frac{d}{i} \quad atau \quad \frac{a}{p} \neq \frac{b}{q} \neq \frac{c}{r} \neq \frac{d}{s} \quad atau \quad \frac{f}{a} \neq \frac{g}{b} \neq \frac{h}{c} \neq \frac{i}{d}$$

$$\frac{a}{k} \neq \frac{b}{l} \neq \frac{c}{m} \neq \frac{d}{n} \quad atau \quad \frac{f}{p} \neq \frac{g}{q} \neq \frac{h}{r} \neq \frac{i}{s} \quad atau \quad \frac{f}{k} \neq \frac{g}{l} \neq \frac{h}{m} \neq \frac{i}{n}$$

$$\frac{k}{a} \neq \frac{l}{b} \neq \frac{m}{c} \neq \frac{n}{d} \quad atau \quad \frac{k}{p} \neq \frac{l}{q} \neq \frac{m}{r} \neq \frac{n}{s} \quad atau \quad \frac{p}{f} \neq \frac{q}{k} \neq \frac{r}{l} \neq \frac{s}{m}$$

$$\frac{k}{f} \neq \frac{l}{g} \neq \frac{m}{h} \neq \frac{n}{i} \quad atau \quad \frac{p}{a} \neq \frac{q}{b} \neq \frac{r}{c} \neq \frac{s}{d} \quad atau \quad \frac{p}{k} \neq \frac{q}{l} \neq \frac{r}{m} \neq \frac{s}{n}$$

Maka Punya Satu Penyelesaian

Kemudian menentukan determinannya sehingga memenuhi dan FPBnya adalah 1 sehingga punya satu selesaian :

$$\Delta = \left|\begin{array}{cccc|ccc} 3 & 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right|$$

$= 36 + 9 + 8 + 2 – 18 – 18 – 1 – 16 = 2 \pmod 5$, $(2,5) = 1$

Berarti tepat satu selesaian.

Selanjutnya dengan langkah berikut :

$3w + x + 2y + 2z \equiv 4 \pmod 5$................. (1)

$w + 2x + 3y + z \equiv 4 \pmod 5$..................(2)

$2w + x + 3y + z \equiv 5 \pmod 5$..................(3)

$3w + 2x + y + 2z \equiv 2 \pmod 5$...................(4)

Mengeleminasi pers. (1) dengan pers. (2) sebagai berikut

$$\begin{array}{l|c|l} 3w + x + 2y + 2z \equiv 4 \pmod 5 & \times 1 & 3w + x + 2y + 2z \equiv 4 \pmod 5 \\ w + 2x + 3y + z \equiv 4 \pmod 5 & \times 3 & 3w + 6x + 9y + 3z \equiv 12 \pmod 5 \quad - \\ \hline & & -5x – 7y – z \equiv -8 \pmod 5 \\ & & -5x – 7y – z \equiv 2 \pmod 5 \text{.........(5)} \end{array}$$

Selanjutnya mengeleminasi pers.(3) dengan pers. (4)

$$\begin{array}{l|c|l} 2w + x + 3y + z \equiv 5 \pmod 5 & \times 3 & 6w + 2x + 9y + 3z \equiv 15 \pmod 5 \\ 3w + 2x + y + 2z \equiv 2 \pmod 5 & \times 2 & 6w + 3x + 2y + 4z \equiv 4 \pmod 5 \quad - \\ \hline & & -x + 7y – z \equiv 11 \pmod 5 \\ & & -x + 7y – z \equiv 1 \pmod 5 \text{..........(6)} \end{array}$$

Kemudian mengeliminasi pers.(1) dengan pers. (3)

$$\begin{array}{l|c|l}
3w + x + 2y + 2z \equiv 4 \pmod 5 & x\ 2 & 6w + 2x + 4y + 4z \equiv 8 \pmod 5 \\
2w + x + 3y + z \equiv 5 \pmod 5 & x\ 3 & \underline{6w + 3x + 9y + 3z \equiv 15 \pmod 5} \ - \\
 & & -x - 5y + z \equiv -7 \pmod 5 \\
 & & -x - 5y + z \equiv 3 \pmod 5 \text{..........(7)}
\end{array}$$

Dan mengeliminasi pers.(2) dengan pers.(4)

$$\begin{array}{l|c|l}
w + 2x + 3y + z \equiv 4 \pmod 5 & x\ 3 & 3w + 6x + 9y + 3z \equiv 12 \pmod 5 \\
3w + 2x + y + 2z \equiv 2 \pmod 5 & x\ 1 & \underline{3w + 2x + y + 2z \equiv 2 \pmod 5} \ - \\
 & & 4x + 8y + z \equiv 10 \pmod 5 \\
 & & 4x + 8y + z \equiv 0 \pmod 5 \text{..........(8)}
\end{array}$$

Selanjutnya mengeliminasi pers.(5) dengan (6)

$$\begin{array}{l}
-5x - 7y - z \equiv 2 \pmod 5 \\
\underline{-x + 7y - z \equiv 1 \pmod 5} \ + \\
-6x - 2z \equiv 3 \pmod 5 \text{............................(9)}
\end{array}$$

Kemudian mengeliminasi pers.(7) dengan (8)

$$\begin{array}{l|c|l}
-x - 5y + z \equiv 3 \pmod 5 & x8 & -8x - 40y + 8z \equiv 24 \pmod 5 \\
4x + 8y + z \equiv 2 \pmod 5 & x\ 5 & \underline{20x + 40y + 5z \equiv 0 \pmod 5} \ + \\
 & & 12x + 13z \equiv 24 \pmod 5 \\
 & & 12x + 13z \equiv 4 \pmod 5 \text{..........(10)}
\end{array}$$

Dan langkah terakhir adalah mengeliminasi pers.(9) dengan pers.(10)

$$\begin{array}{l|c|l}
-6x - 2z \equiv 3 \pmod 5 & x2 & -12x - 4z \equiv 6 \pmod 5 \\
12x + 13z \equiv 4 \pmod 5 & x\ 1 & \underline{12x + 13z \equiv 4 \pmod 5} \ +
\end{array}$$

$$9z \equiv 10 \pmod 5$$

$$4z \equiv 0 \pmod 5$$

$$z \equiv 0 \pmod 5 \text{ ....(11)}$$

setelah diketahui nilai dari suatu z maka langkah selanjutnya adalah mensubtitusikan ke suatu persamaan.

Subtitusikan nilai z pers.(11) ke pers.(10).

$$12x + 13z \equiv 4 \pmod 5$$

$$12x + 13.0 \equiv 4 \pmod 5$$

$$12x \equiv 4 \pmod 5$$

$$2x \equiv 4 \pmod 5$$

$$x \equiv 2 \pmod 5 \text{..............(12)}$$

selanjutnya subtitusikan pers.(11),(12) ke pers.(7)

$$-x - 5y + z \equiv 3 \pmod 5$$

$$-2 - 5y + 0 \equiv 3 \pmod 5$$

$$-5y \equiv 5 \pmod 5$$

$$y \equiv -1 \pmod 5 \text{ atau}$$

$$y \equiv 4 \pmod 5 \text{................(13)}$$

dan selanjutnya subtitusikan pers.(11),(12),(13) ke pers.(2)

$$w + 2x + 3y + z \equiv 4 \pmod 5$$

$$w + 2.2 + 3.4 + 0 \equiv 4 \pmod 5$$

$$w + 16 \equiv 4 \pmod 5$$

$$w \equiv -12 \pmod 5$$

$$w \equiv 3 \pmod 5$$

jadi, $w \equiv 3 \pmod 5$, $x \equiv 2 \pmod 5$,

$y \equiv 4 \pmod 5$, $z \equiv 0 \pmod 5$

selanjutnya untuk mengetahui dan mengecek kebenaran penyelesaian tersebut dengan mensubtitusikan kembali ke sistem linear awal sebagai berikut :

$3w + x + 2y + 2z \equiv 3.3 + 2 + 2.4 + 2.0 \equiv 19 \equiv 4 \pmod 5$

$w + 2x + 3y + z \equiv 3 + 2.2 + 3.4 + 0 \equiv 19 \equiv 4 \pmod 5$

$2w + x + 3y + z \equiv 2.3 + 2 + 3.4 + 0 \equiv 20 \equiv 5 \pmod 5$

$3w + 2x + y + 2z \equiv 3.3 + 2.2 + 4 + 2.0 \equiv 17 \equiv 2 \pmod 5$

3.2.2. Menyelesaikan sistem kongruensi linier Empat kongruensi Empat variabel dengan Invers matriks.

Menyelesaikan sistem kongruensi dengan menggunakan invers matriks dengan empat kongruensi empat variabel,pada intinya hampir sama dengan menyelesaikan tiga kongruensi tiga variabel yakni menyelesaikan sistem yang berbentuk $A.X \equiv B \pmod m$, dengan syarat (det A,m) =1 yang berarti det $A \neq 0$. pada bentuk tersebut kedua ruas dapat dikalikan dengan $\overline{A}$, diperoleh :

$$\overline{A}\,(A \,.\, X) \equiv \overline{A} \,.\, B \pmod m$$

$$(\overline{A}\,.A)\,X \equiv \overline{A} \,.\, B \pmod m$$

$$X \equiv \overline{A} \,.\, B \pmod m$$

Sehingga dapat ditentukan selesaian x dalam bentuk $\overline{A}\,.\,B \pmod m$.

Misal dalam bentuk umum :

aw + bx + cy + dz ≡e (mod m)

fw + gx + hy + iz ≡ j (mod m)

kw + lx + my + nz≡o (mod m)

pw + qx + ry + sz ≡ t (mod m)

Untuk a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t dengan m > 0

Dapat ditulis dalam bentuk :

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ f & g & h & j \\ k & l & m & n \\ p & q & r & s \end{pmatrix}} \underset{X}{\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \underset{B}{\begin{pmatrix} e \\ j \\ o \\ t \end{pmatrix}} \pmod{m}$$

Misal A = $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ f & g & h & j \\ k & l & m & n \\ p & q & r & s \end{pmatrix}$, AC = I dimana I = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

dan C = invers matriks A.

Selanjutnya untuk mendapatkan Matriks C maka

$\left(\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ f & g & h & j \\ k & l & m & n \\ p & q & r & s \end{pmatrix}\left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right.\right)$ menggunakan operasi baris elementer sehingga

menjadi $\left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right.\left|\underbrace{\begin{matrix} K & L & M & N \\ O & P & Q & R \\ S & T & U & V \\ W & X & Y & Z \end{matrix}}_{\text{Invers}}\right)$

(I|C)

Dari operasi diatas maka dapat diketahui bahwa A^{-1} = C = Matriks invers

$$A = \begin{pmatrix} K & L & M & N \\ O & P & Q & R \\ S & T & U & V \\ W & X & Y & Z \end{pmatrix}$$

Dan dengan rumus : $A^{-1} . A . x = A^{-1} . B$

$x = A^{-1} . B$ maka dapat dicari variabel-variabel x-nya

jadi,

$$x = \begin{pmatrix} K & L & M & N \\ O & P & Q & R \\ S & T & U & V \\ W & X & Y & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Kw + Lx + My + Nz \\ Ow + Px + Qy + Rz \\ Sw + Tx + Uy + Vz \\ Ww + Xx + Yy + Zz \end{pmatrix}$$

Contoh :

Tentukan sistem kongruensi linear berikut melalui metode invers matriks?

$3w + x + 2y + 2z \equiv 4 \pmod 5$

$w + 2x + 3y + z \equiv 4 \pmod 5$

$2w + x + 3y + z \equiv 5 \pmod 5$

$3w + 2x + y + 2z \equiv 2 \pmod 5$

Penyelesaian:

$3w + x + 2y + 2z \equiv 4 \pmod 5$

$w + 2x + 3y + z \equiv 4 \pmod 5$

$2w + x + 3y + z \equiv 5 \pmod 5$

$3w + 2x + y + 2z \equiv 2 \pmod 5$

Dari kongruensi diatas, determinannya tidak sama dengan nol, det (A) ≠ 0 maka sistem tersebut mempunyai invers dan bisa diselesaikan. Kemudian dapat dibuat dan dibentuk dalam matriks :

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \text{(mod 5) dengan mengalikan A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{AC = 1, dimana I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{dan C adalah invers matriks}$$

Selanjutnya untuk mendapatkan matriks C maka :

Dalam menentukan invers matriks kali ini kami mencoba mengabaikan suatu modulo 5, karena dengan menggunakan modulo kami rasa cukup mudah dalam proses penyelesaiannya, apakah tanpa menggunakan modulo hasilnya akan sama ? Seperti proses dibawah ini :

$$b_1 - b_3 = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$b_2 - b_1 = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{matrix} b_3 - 2b_1 \\ b_4 - 3b_1 \end{matrix} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & -3 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$b_2 - b_3 = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & -3 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & -3 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$b_3 - b_2 = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & -3 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -2 & -3 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & -3 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$b_4 - 2b_2 =$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -2 & -3 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & -3 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -2 & -3 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & -5 & -2 & 7 & 1 \end{array}\right]$$

$b_4 - b_3 =$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -2 & -3 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & -5 & -2 & 7 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -2 & -3 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$\frac{b_3}{6} =$
$-1(b_4)$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -2 & -3 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{3} & \frac{-3}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$b_1 - b_4 =$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{3} & \frac{-3}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{3} & \frac{-3}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$b_2 - b_4 =$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{3} & \frac{-3}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{3} & \frac{-3}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$b_3 + \frac{2}{3} b_4 =$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{3} & \frac{-3}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$b_2 + b_3 =$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$b_1 + b_3 =$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \underbrace{\left.\begin{array}{cccc} \frac{-1}{6} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-2}{3} \\ 2 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right]}_{\textit{Invers mariks}}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-1}{6} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-2}{3} \\ 2 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & -3 & 2 \\ 5 & 3 & -3 & -4 \\ 12 & 6 & -12 & -6 \end{bmatrix}$$

Dari operasi diatas dapat diketahui bahwa A^{-1} = C = invers matriks

$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ dan dengan rumus $A^{-1}.A.X = A^{-1}.B$

$X = A^{-1}.B$ maka dapat dicari variabel-variabelnya

$$X \equiv \begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & -3 & 2 \\ 5 & 3 & -3 & -4 \\ 12 & 6 & -12 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} -4 & -12 & +15 & +4 \\ -4 & +12 & -15 & +4 \\ 20 & +12 & -15 & -8 \\ 48 & +24 & -60 & -12 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \pmod 5,$$

$$\text{Maka} \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \pmod 5$$

Jadi ini menunjukkan bahwa selesaian dari sistem kongruensi tersebut di atas adalah :

$z \equiv 3 \pmod 5$,$x \equiv 2 \pmod 5$, $y \equiv 4 \pmod 5$, $z \equiv 0 \pmod 5$

3.3. Kajian Adil mengenai hasil selesaian suatu kongruensi

يَٰٓأَيُّهَا ٱلۡإِنسَٰنُ مَا غَرَّكَ بِرَبِّكَ ٱلۡكَرِيمِ ٦ ٱلَّذِي خَلَقَكَ فَسَوَّىٰكَ فَعَدَلَكَ ٧ فِيٓ
أَيِّ صُورَةٖ مَّا شَآءَ رَكَّبَكَ ٨

"Hai manusia, apakah yang telah memperdayakan kamu (berbuat durhaka) terhadap Tuhanmu Yang Maha Pemurah. Yang telah menciptakan kamu lalu menyempurnakan kejadianmu dan menjadikan (susunan tubuh)mu seimbang, dalam bentuk apa saja yang Dia kehendaki, Dia menyusun tubuhmu."

Dalam ayat tersebut,*'adala* berarti "membuat seimbang." disitu diinformasikan kepada manusia bahwa tubuh manusia itu secara keseluruhan disusun menurut prinsip-prinsip keseimbangan. Dengan prinsip-prinsip itu manusia mencapai susunan yang sempurna. Keseimbangan dapat digambarkan dengan susunan dan sistem tubuh manusia yang serba seimbang. Dengan demikian, salah satu dimensi keadilan adalah keseimbangan.

Pengertian keseimbangan atau seimbang itu terdapat pula dalam kata *al-qisthas al-mustaqim*. Contoh ini diberikan oleh Al-Qur'an surah al-Isra'/ 17:35 :

وَأَوۡفُواْ ٱلۡكَيۡلَ إِذَا كِلۡتُمۡ وَزِنُواْ بِٱلۡقِسۡطَاسِ ٱلۡمُسۡتَقِيمِۚ ذَٰلِكَ خَيۡرٞ وَأَحۡسَنُ تَأۡوِيلٗا ٣٥

"Dan sempurnakanlah takaran apabila kamu menakar, dan timbanglah dengan neraca yang benar. Itulah yang lebih utama (bagimu) dan lebih baik akibatnya. "

Keadilan dalam ayat itu, digambarkan dengan cara orang menimbang, misalnya menimbang emas dan perak. Cara menimbang yang sempurna adalah jika orang menimbang dengan ukuran yang benar, yaitu seimbang antara yang di sebelah kiri dan di sebelah kanan. Karena itu, lambang keadilan adalah gambar dewi yang sedang menimbang dengan menutup matanya, yang menggambarkan ketidakberpihakkan kepada salah satu diantara yang dipertimbangkan.

Sedangkan jika dikaitkan dengan hasil penyelesaian sistem kongruensi linier, maka penentuan variabel merupakan salah satu sebab suatu persamaan tersebut menjadi sama, dengan kata lain antara ruas kiri dan kanan menghasilkan hasil yang sama atau seimbang.

$2x + 3y + 2z \equiv 3 \pmod 7$

$2x + y + z \equiv 5 \pmod 7$

$3x + 2y + z \equiv 7 \pmod 7$

Pada contoh sistem kongruensi linier dengan tiga variabel seperti contoh diatas, menunjukkan bahwa ruas kanan dan kiri dibatasi oleh tanda kongruen, ini tanda bahwa sisi kanan dan sisi kiri mempunyai besaran yang sama, tetapi dalam sistem kongruensi tersebut bahwa sisi kiri, yang terdiri dari $2x + 3y + 2z$, $2x + y + z$, $3x + 2y + z$ adalah membutuhkan suatu penyelesaian sehingga hasilnya sama atau seimbang dengan ruas kanan. Maka seperti pada pembahasan diatas penyelesaian sistem kongruensi tersebut menggunakan suatu metode, yakni Eliminasi-Subtitusi dan Invers matriks. Dari proses penyelesaian tersebut nilai variabel didapat

$x \equiv 3 \pmod 7$

$y \equiv 6 \pmod 7$

$z \equiv 0 \pmod 7$, kemudian hasil dari penentuan varibel itu disubtitusikan kepada sistem kongruensi linier

$$2x + 3y + 2z \equiv 2.3 + 3.6 + 2.0 \equiv 24 \pmod 7 \equiv 3 \pmod 7$$

$$2x + y + z \equiv 2.3 + 1.6 + 1.0 \equiv 12 \pmod 7 \equiv 5 \pmod 7$$

$$3x + 2y + z \equiv 3.3 + 2.6 + 1.0 \equiv 21 \pmod 7 \equiv 7 \pmod 7$$

Setelah disubtitusikan maka dari masing-masing ruas kiri dan kanan menjadi sama/ seimbang.

BAB IV

PENUTUP

4.1. Kesimpulan

Berdasarkan pada pembahasan BAB III, maka penulis dapat menarik suatu kesimpulan bahwa dalam menyelesaikan suatu kongruensi linier ternyata menggunakan metode eliminasi-subtitusi maupun metode invers matriks sangat sesuai dan tepat serta menghasilkan hasil yang akurat, apalagi ketika membahas suatu kongruensi yang mempunyai banyak variabel, dan hasil dari kedua metode tersebut adalah sama. Ini menunjukkan bahwa suatu sistem kongruensi linier dengan 3 kongruensi 3 variabel maupun 4 kongruensi 4 variabel mempunyai tepat satu selesaian.

4.2. Saran

Dari penulisan skripsi ini tentunya masih jauh dari sempurna, kekurangan serta kelemahan penulis menjadi salah satu penyebab ketidaksempurnaan penelitian dan juga berpengaruh terhadap hasil penyusunan skripsi ini, oleh karenanya penulis mengharapkan saran-saran serta kritik yang membangun dari para pembaca sekalian untuk dapat menutupi kelemahan dan kekurangan yang terdapat dalam tulisan ini yang penulis sendiri tidak mengetahuinya. Disamping itu penulis menyarankan agar para pembaca dapat mengembangkan tulisan ini pada variabel 5 dan seterusnya, terlebih-lebih didalam menyelesaikan sistem kongruensi linier dapat menggunakan metode-metode yang lain atau menggunakan suatu pemograman sehingga hasil yang dicapai lebih efisien dan praktis.

DAFTAR PUSTAKA

Adams,William W. Goldstein,larny Joel.1976, *Introduction to Number Theory.Englewood Cliffs*,New Jersey, By Prentice Hall,Inc..

Anton, Howard. 2000.*Aljabar Linier Elementer*. Terjemahan Oleh Pantur Silaban. Jakarta. Erlangga.

Azra, Azyumardi Prof. Dr. M.A. 2005. *Ensiklopedi Islam*. Jakarta. PT.ICHTIAR BARU VAN HOEVE.

Chusnah,Dewi Annisaul.2004, *Menyelesaikan Sistem Persamaan Kongruensi Linear Simultan.* Malang,Fakultas Sains & Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang

http://www.infofx – *Matematika-Teori bilangan*.htm.org.com.13 Juli 2007

Kenneth.1985. *Elementary Theory and its Application Addition*. Wesley : Massachutetts(PP.452)

Kurnianingsih, Sri,dkk. 2004.*Matematika Untuk SMA kelas X*. Jakarta : Erlangga

Muhsetyo,Gatot.1994/1995. *Dasar-Dasar Teori Bilangan.*Malang, Departemen pendidikan dan kebudayaan Institut Keguruan dan Ilmu Pendidikan.

Mardalis. 1987. *Metode Penelitian*. Jakarta : Ghalia Indonesia

Niven,I,Zulkarnaen,HS and Montgomery,HL,1991, *An Introduction to the Theory of Number.*Canada : Jhon Wiley & Son,Inc.

Ore,Oystein,1984, *Number Theory and its History*, New York: Mc Graw. Hill,PP 370.

Rahardjo, M. Dawan. Prof. M.1996.*Ensiklopedi Al-Qur'an*. Tafsir Sosial Berdasarkan konsep-konsep kunci. Jakarta : Penerbit PARAMADINA

Rasyad, Rasdihan.2003. *Aljabar Linier Untuk Umum*. Jakarta : Grasindo

Subagio,Suharti.1986.*Matriks*. Jakarta : Karunika Jakarta Utara.