

KETERHUBUNGAN PADA GRAF BERATURAN

SKRIPSI

Oleh:
LULUK NURHOLIDAH
NIM. 04510030



JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2008

KETERHUBUNGAN PADA GRAF BERATURAN

SKRIPSI

Diajukan Kepada :
Universitas Islam Negeri Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
LULUK NURHOLIDAH
NIM. 04510030



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2008**

KETERHUBUNGAN PADA GRAF BERATURAN

SKRIPSI

Oleh:

LULUK NURHOLIDAH

NIM. 04510030

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji

Tanggal:

14 Oktober 2008

Pembimbing I

Pembimbing II

Wahyu Henky Irawan, M.Pd

NIP: 150 300 415

Achmad Nashichuddin, MA

NIP. 150 302 531

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M. Si

NIP. 150 318 321

KETERHUBUNGAN PADA GRAF BERATURAN

SKRIPSI

Oleh:

LULUK NURHOLIDAH

NIM. 04510030

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal 20 Oktober 2008

Susunan Dewan Penguji		Tanda Tangan
1. Penguji Utama	: <u>Abdussakir, M. Pd</u> NIP. 150 327 247	()
2. Ketua	: <u>Evawati Alisah, M. Pd</u> NIP. 150 291 271	()
3. Sekretaris	: <u>Wahyu Henky Irawan, M.Pd</u> NIP: 150 300 415	()
4. Anggota	: <u>Achmad Nashichuddin, MA</u> NIP. 150 302 531	()

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M. Si
NIP. 150 318 321

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : LULUK NURHOLIDAH

NIM : 04510030

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan hasil tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 17 Oktober 2008

Yang membuat pernyataan

Luluk Nurholidah

NIM. 04510030

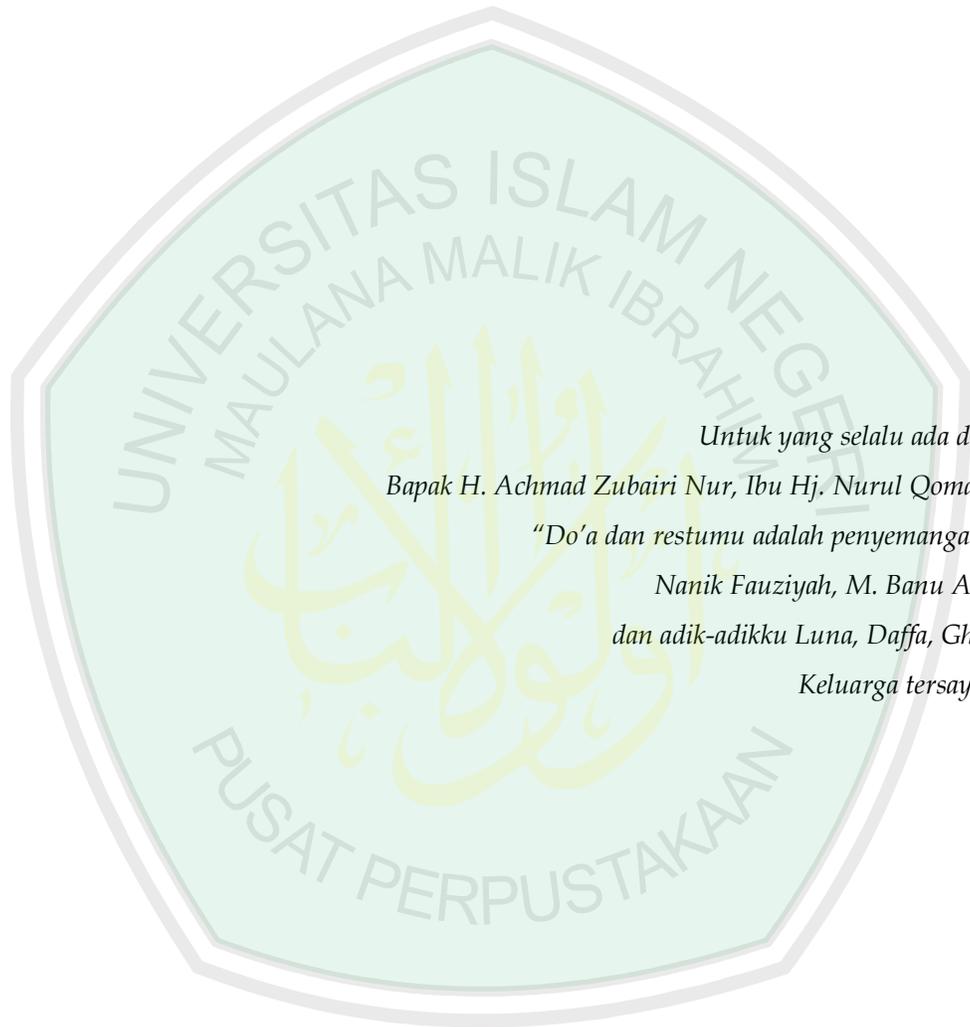
MOTTO

“Sebaik-baik Manusia adalah
Yang Paling Bermanfaat Bagi
Orang Lain”

(HR. Bukhari dan Muslim)

“Tiada yang Sempurna di Dunia ini dan
Semuanya Pasti akan Kembali padaNya”

(Penulis)



*Untuk yang selalu ada dihati
Bapak H. Achmad Zubairi Nur, Ibu Hj. Nurul Qomariah*

"Do'a dan restumu adalah penyemangatku"

*Nanik Fauziyah, M. Banu Arifin
dan adik-adikku Luna, Daffa, Ghanis
Keluarga tersayang.*

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Alhamdulillahirrobbil 'alamin, segala puji syukur ke hadirat Allah SWT atas limpahan rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, hingga penulis mampu menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul “Keterhubungan Pada Graf Beraturan”.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, iringan doa dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, terutama kepada:

1. Bapak Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Malang .
2. Bapak Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU, D.Sc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
3. Ibu Sri Harini, M.Si, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
4. Bapak Wahyu Henky Irawan, M.Pd, selaku dosen pembimbing dan Achmad Nashichuddin, MA selaku dosen pembimbing agama, yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan pengarahan selama penulisan skripsi ini.
5. Seluruh Dosen Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang yang telah memberikan ilmu pengetahuan kepada penulis selama di bangku kuliah, serta seluruh karyawan dan staf UIN Malang.
6. Teman-teman Matematika angkatan 2004, terima kasih atas doa serta kenangan yang kalian berikan semuanya tidak akan mungkin terlupakan.
7. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, atas keikhlasan untuk membantu penulis ucapkan terima kasih.

Penulisan skripsi ini bermaksud untuk meningkatkan pengetahuan dan wawasan kepada khalayak umum khususnya mahasiswa jurusan matematika. Penulis menyadari tak ada gading yang tak retak, begitu pula dalam tulisan skripsi ini masih banyak kekurangan didalamnya. Oleh karena itu, perlu penyempurnaan

kembali yang mungkin nantinya dapat disempurnakan oleh pembaca yang tertarik mengkaji tentang keterhubungan.

Semoga skripsi ini bermanfaat dan dapat menambah wawasan keilmuan khususnya Matematika. Amien.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, 15 Oktober 2008

Penulis



DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI	iii
DAFTAR GAMBAR	v
ABSTRAK	vii
BAB I : PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Tujuan Penelitian	3
1.4 Batasan Masalah	4
1.5 Manfaat Penelitian	4
1.6 Metode Penelitian	4
1.7 Sistematika Penulisan	6
BAB II : KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Graf	8
2.1.1 Definisi Graf	8
2.1.2 Derajat Suatu Titik	11
2.1.3 Jalan dan Lintasan	14
2.1.4 Jenis-Jenis Graf	16
2.1.5 Keterhubungan n-titik dan Keterhubungan Sisi pada Graf	21
2.2 Konsep Keterhubungan antara Kholiq dan HambaNya (Manusia).....	23
2.2.1 Hubungan Manusia dengan Tuhannya.....	24
2.2.2 Hubungan Manusia dengan Manusia.....	28
BAB III: PEMBAHASAN	
3.1 Keterhubungan Titik Pada Graf C Beraturan 2.....	36
3.2 Keterhubungan Sisi Pada Graf C Beraturan 2	40
3.3 Pola Graf Beraturan 3.....	45
3.4 Keterhubungan Titik Pada Graf L Beraturan 3.....	46
3.5 Keterhubungan Sisi Pada Graf L Beraturan 3.....	51

3.6 Tinjauan Agama Berdasarkan Hasil Pembahasan.....	56
--	----

BAB IV: PENUTUP

4.1 Kesimpulan	62
4.2 Saran	62

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN



DAFTAR GAMBAR

No.	Gambar	Halaman
2.1	Graf G	8
2.2	Graf H.....	9
2.3	Graf G	10
2.4	H Subgraf dari G.....	10
2.5	Graf dengan Derajat Titik	11
2.6	Graf Terhubung (<i>connected</i>) G.....	12
2.7	G_1 Terhubung, G_2 tidak terhubung.....	13
2.8	Hasil Kali Kartesius dari Dua Graf.....	14
2.9	Jalan dan Lintasan	15
2.10	Graf Komplit K_1, K_2, K_3, K_4	16
2.11	Graf Bipartisi G dan H	17
2.12	Graf Bipartisi Komplit $K_{1,3}, K_{2,3}$, dan $K_{3,3}$	17
2.13	Graf Sikel C_3, C_4, C_5 dan C_6	18
2.14	Graf Lintasan P_2, P_3 dan P_n	18
2.15	Graf Tangga $P_2 \times P_5$	19
2.16	Graf Kubus Q_1, Q_2 dan Q_3	20
2.17	T_1 adalah Hutan dan T_2 adalah Pohon.....	20
2.18	Graf G_1 Beraturan 2 dan G_2 Graf Beraturan 3.....	21
2.19	Graf P	22
2.20	Gambaran <i>Hablun min Allah wa Hablun min An-Nas</i>	24
3.1	Graf C_3	36
3.2	Graf C'_3	36
3.3	Graf C_4	37
3.4	Graf C_4	37
3.5	Graf C_5	38
3.6	Graf C'_5	38
3.7	Graf C_6	39
3.8	Graf C'_6	39
3.9	Graf C_3	41
3.10	Graf C'_3	41
3.11	Graf C_4	42
3.12	Graf C'_4	42
3.13	Graf C_5	43
3.14	Graf C'_5	43
3.15	Graf C_6	44

3.16	Graf C'_6	44
3.17	Graf L_4	47
3.18	Graf L'_4	47
3.19	Graf L_6	48
3.20	Graf L'_6	48
3.21	Graf L_8	49
3.22	Graf L'_8	49
3.23	Graf L_{10}	50
3.24	Graf L'_{10}	50
3.25	Graf L_4	52
3.26	Graf L'_4	52
3.27	Graf L_6	53
3.28	Graf L'_6	53
3.29	Graf L_8	54
3.30	Graf L'_8	54
3.31	Graf L_{10}	55
3.32	Graf L'_{10}	55

ABSTRAK

Nurholidah, Luluk. 2008. **Keterhubungan Pada Graf Beraturan**. Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.

Pembimbing: (I) Wahyu Henky Irawan, M.Pd

(II) Achmad Nashichuddin, MA

Kata Kunci: Keterhubungan, Graf beraturan.

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang banyak digunakan, karena teori-teorinya dapat diterapkan pada cabang-cabang ilmu matematika yang lain atau untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari seperti penjadwalan mata kuliah, perbaikan jaringan telekomunikasi, dan lain-lain. Salah satu pembahasan dalam teori graf yang masih jarang dibahas adalah tentang keterhubungan. Dalam penelitian sebelumnya keterhubungan yang dibahas hanya pada pembuktian-pembuktian teorema yang terkait saja. Kemudian dalam skripsi ini penulis mengembangkannya dengan membahas keterhubungan pada graf beraturan. Dalam kajian ini, graf beraturan yang digunakan adalah graf beraturan dua dan graf beraturan tiga.

Keterhubungan dalam graf ada dua macam, yaitu keterhubungan titik dan keterhubungan sisi. Keterhubungan titik pada graf G yang dinotasikan dengan $\kappa(G)$ didefinisikan dengan minimum titik yang apabila dihapus dari graf G akan membuat graf tersebut tidak terhubung atau menjadi graf trivial. Keterhubungan sisi pada graf G yang dinotasikan dengan $\alpha(G)$ adalah minimum sisi yang apabila dihapus dari graf G akan membuat graf tersebut tidak terhubung atau menjadi graf trivial.

Pada pembahasan diperoleh suatu teorema yaitu:

1. Suatu graf C_n dengan order n ($n \geq 3$) beraturan 2 maka $\kappa(C_n) = 2$ atau keterhubungan titiknya adalah 2.
2. Suatu graf C_n dengan order n ($n \geq 3$) beraturan 2 maka $\alpha(C_n) = 2$ atau keterhubungan sisinya adalah 2.
3. Suatu graf L_n dengan order n ($n \geq 4$) beraturan 3 maka $\kappa(L_n) = 3$ atau keterhubungan titiknya adalah 3.
4. Suatu graf L_n dengan order n ($n \geq 4$) beraturan 3 maka $\alpha(L_n) = 3$ atau keterhubungan sisinya adalah 3.

Untuk penulisan skripsi selanjutnya, penulis menyarankan untuk mengkaji masalah pola keterhubungan titik dan keterhubungan sisi pada graf beraturan secara umum.



BAB I

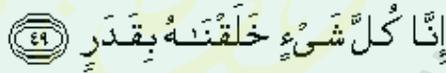
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Menurut Abdul Aziz (2006:v), matematika adalah salah satu ilmu pasti yang mengkaji abstraksi ruang, waktu, dan angka. Matematika juga mendeskripsikan realitas alam semesta dalam bahasa lambang, sehingga suatu permasalahan dalam realitas alam akan lebih mudah dipahami.

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdusysyahir, 2007:79).

Dalam Al Qur'an surat Al Qamar ayat 49 disebutkan:



Artinya : Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran.

Ayat di atas menjelaskan bahwa alam dan isinya diciptakan oleh Allah dengan ukuran, takaran, dan hitungan yang seimbang. Jadi matematika sebenarnya telah ada sejak zaman dahulu, manusia hanya menyimbolkan dari fenomena-fenomena yang ada dalam kehidupan sehari-hari.

Masalah yang sering kali muncul di tengah-tengah kehidupan masyarakat seringkali membutuhkan matematika. Dengan bantuan bahasa lambang dalam matematika permasalahan tersebut lebih mudah untuk dipahami, lebih mudah dipecahkan, atau bahkan dapat ditunjukkan bahwa suatu persoalan tidak

mempunyai penyelesaian. Oleh karena itu suatu permasalahan perlu dikaji dan dianalisis dan kemudian dicari model matematikanya. Salah satu cabang matematika yang banyak digunakan untuk menyelesaikan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari adalah teori graf, karena teori-teorinya mudah untuk diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari, seperti mencari jarak terpendek untuk tukang pos dalam menyampaikan surat, masalah penjadwalan, jaringan telekomunikasi, ilmu komputer dan lain-lain.

Salah satu materi dalam graf adalah keterhubungan titik dan keterhubungan sisi. Keterhubungan titik merupakan minimum titik yang apabila dihapus akan membuat graf tidak terhubung atau menjadi graf trivial, sedangkan keterhubungan sisi merupakan minimum sisi yang apabila dihapus akan membuat graf tidak terhubung atau menjadi graf trivial. Keterhubungan dapat diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari seperti mencari keterputusan dalam silsilah keluarga, memperbaiki jaringan telekomunikasi dan juga nampak pada hubungan antara manusia dengan manusia dan manusia dengan tuhanNya atau *Hablun Min Allah Wa Hablun Min An-Nass*. Dalam Islam diajarkan untuk saling menjaga hubungan silaturahmi antar sesama manusia. Jika hubungan antar manusia dan manusia dengan Tuhannya tidak sempurna maka tidak akan sempurna pula iman seseorang. Seperti dalam hadist yang mempunyai arti :

"Dari Anas bin Malik radhiallâhu 'anhu dari Nabi Shallallahu 'alaihi wasallam, beliau bersabda: "Tidaklah (sempurna) iman seseorang di antara kalian hingga dia mencintai saudaranya sebagaimana dia mencintai dirinya sendiri". (H.R.Bukhari dan Muslim).

Berdasarkan keterangan di atas maka penulis bermaksud untuk membahas tentang keterhubungan pada suatu graf. Selain itu pembahasan tentang

keterhubungan sebelumnya juga jarang dibahas. Oleh karena penulis tertarik untuk mengkajinya dengan judul “Keterhubungan Pada Graf Beraturan”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam skripsi ini adalah:

1. Bagaimana pola keterhubungan titik pada graf beraturan dua?
2. Bagaimana pola keterhubungan sisi pada graf beraturan dua?
3. Bagaimana pola keterhubungan titik pada graf beraturan tiga?
4. Bagaimana pola keterhubungan sisi pada graf beraturan tiga?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penulisan skripsi ini adalah:

1. Untuk mengetahui pola keterhubungan titik pada graf beraturan dua.
2. Untuk mengetahui pola keterhubungan sisi pada graf beraturan dua.
3. Untuk mengetahui pola keterhubungan titik pada graf beraturan tiga.
4. Untuk mengetahui pola keterhubungan sisi pada graf beraturan tiga.

1.4 Batasan Penelitian

Agar pembahasan dalam skripsi ini lebih terfokus, maka penulis hanya membatasi skripsi ini pada graf beraturan dua dan graf beraturan tiga. Graf beraturan tiga dalam skripsi ini adalah graf tangga yang ditambah sisi diagonal atau sisi yang menghubungkan titik paling ujung ke titik ujung lainnya. Hal ini karena pada bentuk graf beraturan tiga tidak berlaku secara umum bahwa keterhubungan titik dan sisinya adalah 3.

1.5 Manfaat Penelitian

1. Bagi penulis

Penelitian ini digunakan sebagai tambahan informasi dan wawasan pengetahuan tentang teori graf, khususnya tentang keterhubungan.

2. Bagi lembaga

Hasil penelitian ini dapat digunakan sebagai tambahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di jurusan matematika untuk mata kuliah Teori Graf.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan (*library research*) atau kajian pustaka, yakni melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi-informasi serta objek yang digunakan dalam pembahasan masalah tersebut. Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah :

1. Merumuskan masalah

Sebelum peneliti melakukan penelitian, terlebih dahulu disusun rencana penelitian bermula dari suatu masalah tentang keterhubungan pada graf beraturan.

2. Mengumpulkan Data.

Mengumpulkan data dari literatur *Graphs & Digraphs* (Gary Chartrand dan Linda Lesniak) dan literatur pendukung, baik yang bersumber dari buku, jurnal, artikel, diktat kuliah, internet, dan lainnya yang berhubungan dengan permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini.

3. Menganalisis Data

Langkah-langkah yang diambil untuk menganalisis data dalam penelitian ini adalah :

- a. Menggambar beberapa graf beraturan dua dan graf beraturan tiga.
- b. Mencari pola keterhubungan titik pada graf beraturan dua dan graf beraturan tiga yang kemudian menghasilkan teorema dan dibuktikan.
- c. Mencari pola keterhubungan sisi pada graf beraturan dua dan graf beraturan tiga yang kemudian menghasilkan teorema dan dibuktikan.

4. Membuat Kesimpulan

Kesimpulan dalam skripsi ini berupa hasil atau teorema dari keterhubungan titik pada graf beraturan dua dan graf beraturan tiga, dan teorema keterhubungan sisi pada graf beraturan dua dan graf beraturan tiga.

5. Melaporkan

Langkah terakhir dari kegiatan ini adalah menyusun laporan dari penelitian yang telah dilakukan, yaitu berupa skripsi sebagai syarat memperoleh gelar sarjana.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi ini lebih terarah, mudah ditelaah dan dipahami, maka digunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab dengan rumusan sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Pendahuluan meliputi latar belakang, rumusan masalah, tujuan masalah, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN PUSTAKA

Bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang pengertian graf, *incident* dan *adjacent*, derajat titik pada graf, graf terhubung, komponen graf, macam-macam graf, keterhubungan titik, keterhubungan sisi, dan kajian keagamaan.

BAB III PEMBAHASAN

Pembahasan berisi tentang bagaimana pola keterhubungan titik pada graf beraturan dua dan graf beraturan tiga serta bagaimana pola keterhubungan sisi pada graf beraturan dua dan graf beraturan tiga

BAB IV PENUTUP

Pada bab ini akan dibahas tentang kesimpulan dan saran.



BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Graf

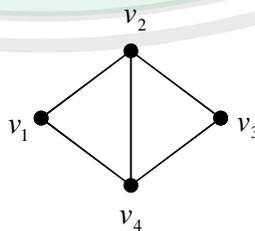
2.1.1 Definisi Graf

Definisi 1

Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di V yang disebut sebagai sisi (Chartrand dan Lesniak, 1986: 4).

Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$. Sedangkan banyaknya unsur di V disebut *order* dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di E disebut *size* dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G , maka *order* dan *size* dari G tersebut cukup ditulis dengan p dan q (Chartrand dan Lesniak, 1986: 4).

Contoh 2.1



Gambar 2.1 Graf G

Graf G memuat himpunan titik $|V|$ dan sisi $|G|$ yaitu :

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

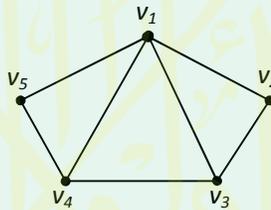
$$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4), (v_4, v_1)\}$$

Graf G mempunyai *order* 4 atau $p = 4$ dan *size* 5 atau $q = 5$.

Definisi 2

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v . Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G , maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), u dan e serta v dan e disebut terkait langsung (*incident*). Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$. (Chartrand dan Lesniak, 1986:4)

Contoh 2.2



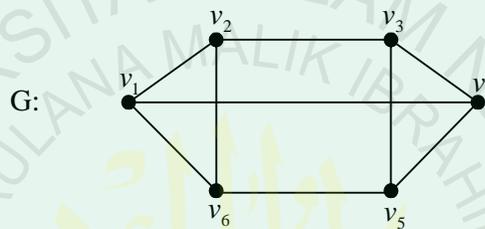
Gambar 2.2 Graf H

Dari Gambar 2.2 pada graf H , titik v_2 dan v_3 adalah *adjacent* atau terhubung langsung tetapi v_2 dan v_5 tidak. Titik v_1 dan sisi (v_1v_2) dan (v_1v_5) adalah terkait langsung dengan titik v_1 .

Definisi 3

Graf H disebut subgraf dari G jika himpunan titik di H adalah subset dari himpunan titik-titik di G dan himpunan sisi di H adalah subset dari himpunan sisi di G . Dapat ditulis $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Jika H adalah subgraf G , maka dapat ditulis $H \subseteq G$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 8).

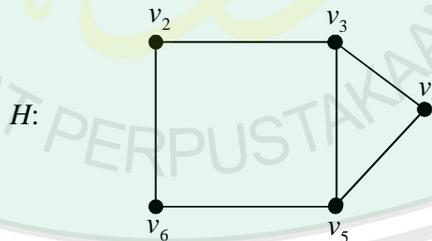
Contoh 2.3



Gambar 2.3 Graf G

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} \text{ dan}$$

$$E(G) = \{v_1 v_2, v_1 v_6, v_1 v_4, v_2 v_3, v_2 v_6, v_3 v_4, v_3 v_5, v_4 v_5, v_5 v_6, v_6 v_5\}$$



Gambar 2.4 H Subgraf dari G

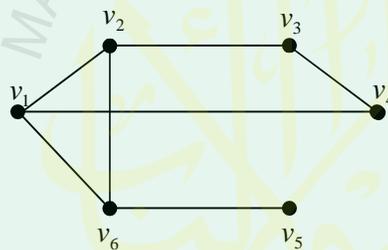
Gambar 2.3 dan 2.4 menunjukkan bahwa H adalah subgraf G .

2.1.2 Derajat Suatu Titik

Definisi 4

Derajat titik v pada graf G , ditulis dengan $\deg(v)$, adalah banyaknya sisi yang terkait langsung pada v . Dengan kata lain, banyaknya sisi yang memuat v sebagai titik ujung. Titik v dikatakan genap atau ganjil tergantung dari $\deg(v)$ genap atau ganjil (Chartrand dan Lesniak 1986: 7, Sutarno 2005: 69).

Contoh 2.4



$$\deg_G(v_1) = 3$$

$$\deg_G(v_2) = 3$$

$$\deg_G(v_3) = 2$$

$$\deg_G(v_4) = 2$$

$$\deg_G(v_5) = 1$$

$$\deg_G(v_6) = 3$$

Gambar 2.5 Graf dengan Derajat Titik

Teorema 1

Jika graf G dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

maka $\sum_{i=1}^n \deg_G(v_i) = 2q$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 7)

Bukti:

Setiap sisi terkait langsung dengan 2 titik. Bila derajat tiap titik tersebut dijumlahkan maka sisi tersebut dihitung 2 kali.

Akibat Teorema 1

Pada sebarang graf, banyaknya titik yang berderajat ganjil adalah genap (Chartrand dan Lesniak, 1986: 7).

Bukti:

Misalkan graf G dengan titik sebanyak q , maka ambil W yang memuat himpunan titik ganjil di G serta U yang memuat himpunan titik genap di G . Dari teorema 1 maka diperoleh:

$$\sum_{v \in V(G)} \deg_G v = \sum_{v \in W} \deg_G v + \sum_{v \in U} \deg_G v = 2q$$

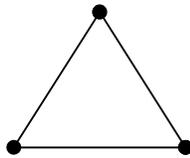
dengan demikian karena $\sum_{v \in U} \deg_G v$ genap, maka $\sum_{v \in W} \deg_G v$ juga genap.

Sehingga $|G|$ adalah genap.

Definisi 5

Misalkan u dan v titik berbeda pada graf G . Maka titik u dan v dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika terdapat lintasan $u - v$ di G . Sedangkan suatu graf G dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika untuk setiap titik u dan v di G terhubung (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Contoh 2.5



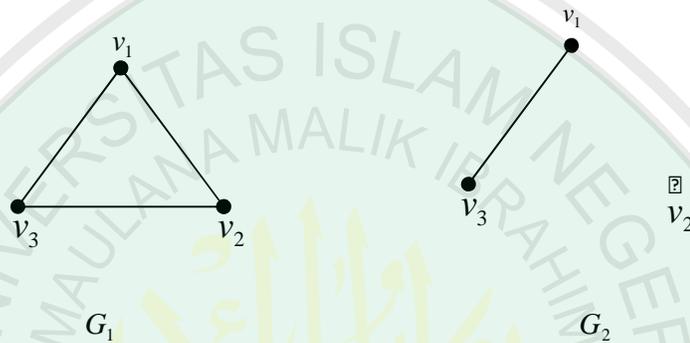
Gambar 2.6 Graf Terhubung (*connected*) G

Definisi 6

Komponen dari graf adalah subgraf terhubung maksimal dari G yang dinotasikan dengan $k(G)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 28).

Jadi setiap graf terhubung hanya mempunyai satu komponen. Sedangkan untuk graf tak terhubung memiliki sedikitnya dua komponen.

Contoh 2.6



Gambar 2.7 G_1 Terhubung, G_2 tidak terhubung

Dari gambar 2.8 G_1 Terhubung, G_2 tidak terhubung dan graf G_1 mempunyai satu komponen, dan graf G_2 mempunyai dua komponen.

Definisi 7

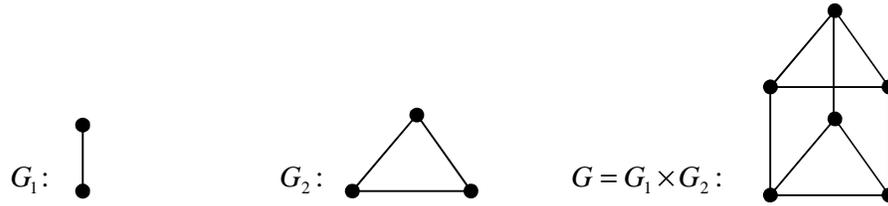
Hasil kali kartesius dari graf G_1 dan G_2 adalah graf yang dinotasikan $G = G_1 \times G_2$ dan mempunyai himpunan titik $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$, dan dua titik (u_1, u_2) dan (v_1, v_2) dari graf G terhubung langsung jika dan hanya jika

$$u_1 = v_1 \text{ dan } u_2v_2 \in E(G_2)$$

atau

$$u_2 = v_2 \text{ dan } u_1v_1 \in E(G_1) \quad (\text{Chartrand and Lesniak, 1986: 11}).$$

Contoh 2.7



Gambar 2.8 Hasil Kali Kartesius dari Dua Graf

2.1.3 Jalan dan Lintasan

Definisi 8

Sebuah jalan (*walk*) $u - v$ di graf G adalah barisan berhingga (tak kosong)

$$W : u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n = v$$

yang berselang seling antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik u dan diakhiri dengan titik v sedemikian hingga untuk $0 < i \leq n$, maka $e_i = v_{i-1}v_i$ adalah sisi di G . v_0 disebut titik awal, v_n disebut titik akhir, v_1, v_2, \dots, v_{n-1} disebut titik internal, dan n menyatakan panjang dari W (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

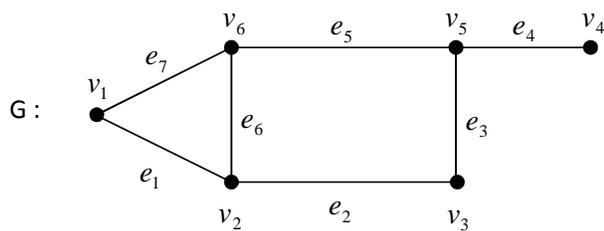
Definisi 9

Trail $u - v$ adalah jalan $u - v$ yang semua sisinya berbeda dan boleh mengulang titik (Chartrand dan Lesniak, 1986: 26).

Definisi 10

Jalan *terbuka* yang semua sisi dan titiknya berbeda disebut *lintasan*. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa setiap lintasan pasti trail, tetapi tidak semua trail merupakan lintasan (Wilson and Watkins, 1989: 35).

Contoh 2.8



Gambar 2.9 Jalan dan Lintasan

Contoh jalan pada graf G dalam gambar 2.9 adalah :

$$v_4, e_4, v_5, e_3, v_3, e_2, v_2, e_6, v_6, e_7, v_1, e_1, v_2.$$

Contoh trail pada graf G dalam gambar 2.9 adalah :

$$v_5, e_3, v_3, e_2, v_2, e_6, v_6, e_5, v_5, e_4, v_4.$$

Contoh lintasan pada graf G dalam gambar 2.9 adalah :

$$v_3, e_2, v_2, e_1, v_1, e_7, v_6, e_5, v_5, e_4, v_4.$$

Definisi 11

Sirkuit adalah sebuah jalan tertutup (*closed trail*) dan melewati sisi yang berbeda pada Graf G (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Definisi 11

Sirkuit $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, e_n, v_n, v_1$ dengan $n \geq 3$ dan v_i berbeda untuk setiap i disebut Sikel (*cycle*) (Chartrand dan Lesniak, 1986: 28).

Contoh 2.9

Contoh sirkuit pada graf G dalam gambar 2.9 adalah :

$$v_5, e_5, v_6, e_7, v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_5$$

Contoh Sikel pada graf G dalam gambar 2.9 adalah:

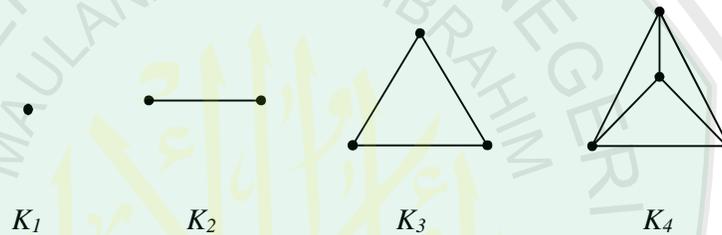
$$v_5, e_5, v_6, e_6, v_2, e_2, v_3, e_3, v_5$$

2.1.4 Jenis-Jenis Graf

1. Graf Komplit

Definisi 12

Graf komplit (*Complete Graph*) adalah graf dengan setiap pasang titik yang berbeda dihubungkan langsung oleh satu sisi. Graf komplit dengan n titik dinyatakan dengan K_n (Purwanto, 1998:21).



Gambar 2.10 Graf Komplit K_1, K_2, K_3, K_4

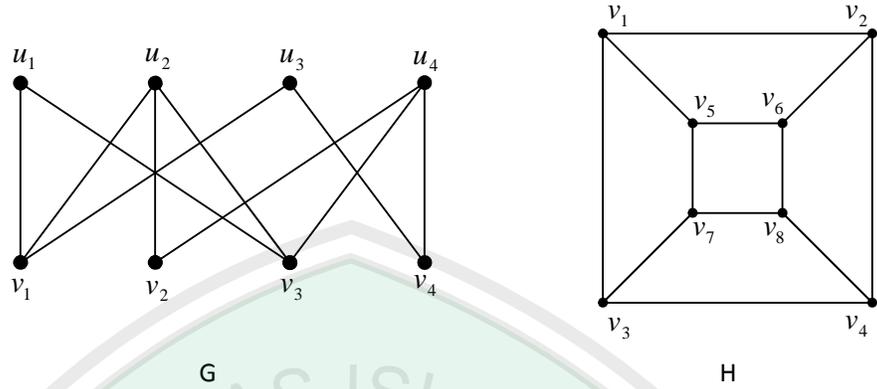
2. Graf Bipartisi

Definisi 13

Graf bipartisi (*bipartite graph*) adalah graf yang himpunan titiknya dapat dipisahkan menjadi dua himpunan tak kosong X dan Y sehingga masing-masing sisi di graf tersebut hanya menghubungkan satu titik di X dan satu titik di Y ; X dan Y disebut himpunan partisi (Purwanto, 1998:21).

Contoh 2.10

Pada Gambar 2.12 G adalah graf bipartisi dengan himpunan partisi $X = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ dan $Y = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ demikian juga H adalah graf bipartisi dengan himpunan partisi $X = \{v_1, v_4, v_6, v_7\}$ dan $Y = \{v_2, v_3, v_5, v_8\}$.



Gambar 2.11 Graf Bipartisi G dan H

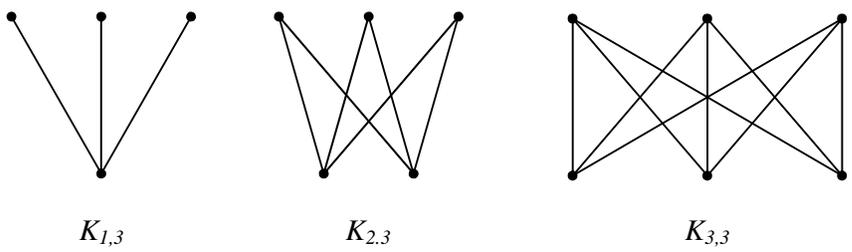
3. Graf Bipartisi Komplit

Definisi 14

Graf bipartisi komplit (*complete bipartite graph*) adalah graf bipartisi dengan himpunan partisi X dan Y sehingga masing-masing titik di X dihubungkan dengan masing-masing titik di Y oleh tepat satu sisi. Jika $|X| = m$ dan $|Y| = n$, maka graf bipartisi tersebut dinyatakan dengan $K_{m,n}$. (Purwanto, 1998:22).

Contoh 2.11

Graf $K_{1,3}$, $K_{2,3}$, dan $K_{3,3}$ terlihat pada gambar berikut



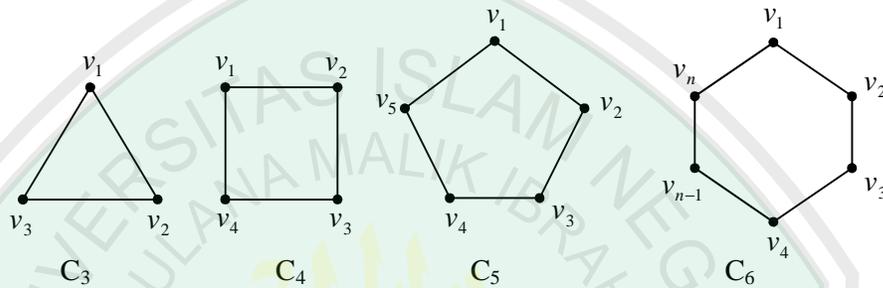
Gambar 2.12 Graf Bipartisi Komplit $K_{1,3}$, $K_{2,3}$, dan $K_{3,3}$

4. Graf Sikel

Definisi 15

Graf sikel dengan n titik, $n \geq 3$, dinotasikan dengan C_n , dengan n bilangan asli (Purwanto, 1998:22).

Contoh 2.12



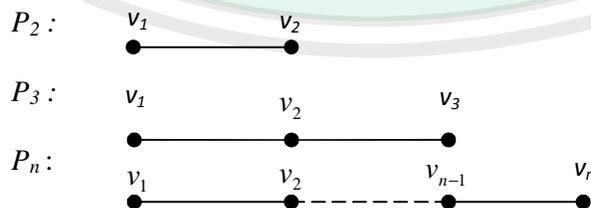
Gambar 2.13 Graf Sikel C_3, C_4, C_5 dan C_6

5. Graf Lintasan

Graf yang terdiri dari satu lintasan disebut graf lintasan. (Purwanto, 1998:22).

Graf lintasan dengan n titik dinotasikan dengan P_n , dengan n bilangan asli.

Contoh 2.13



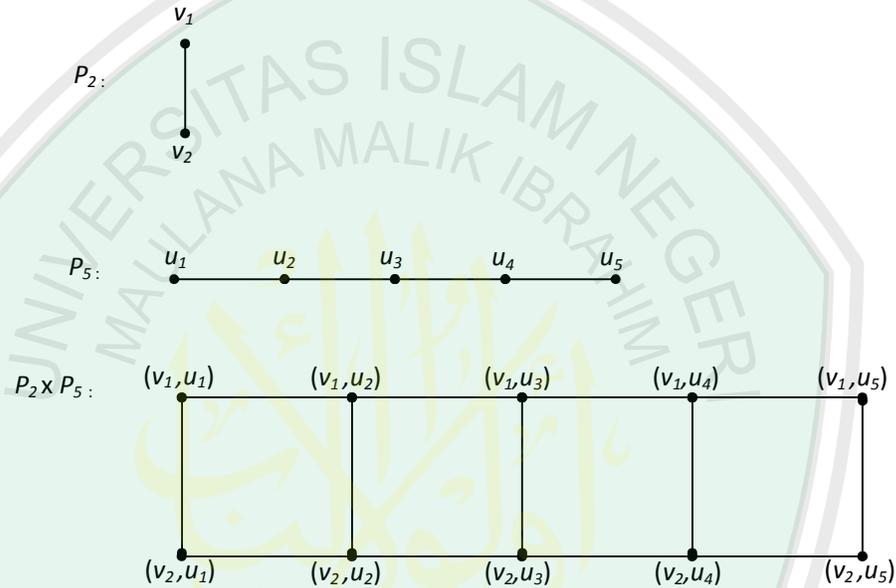
Gambar 2.14 Graf Lintasan P_2, P_3 dan P_n

Jadi secara umum graf P_n mempunyai n titik dan $n - 1$ sisi.

6. Graf Tangga

Graf tangga (*ladder*) adalah graf yang dibangun dari hasil kali Kartesius graf lintasan P_2 dan P_n , yaitu $P_2 \times P_n$. Graf tangga dinotasikan dengan L_n (Cahyono dalam Wati, 2000:24).

Contoh 2.14



Gambar 2.15 Graf Tangga $P_2 \times P_5$

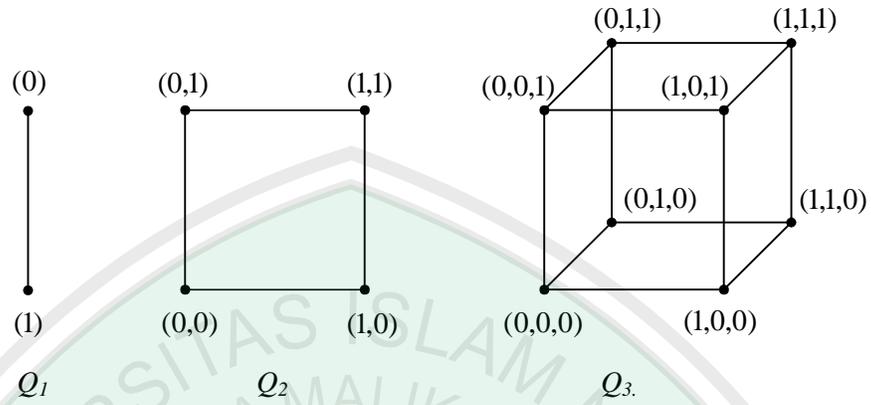
7. Graf Kubus

Defnisi 16

Graf kubus (*cube graph*) adalah graf yang himpunan titiknya berupa himpunan tupel-n binar (*binary n-tupel*) (a_1, a_2, \dots, a_n) , yaitu a_i adalah 0 atau 1, $i = 1, 2, 3, \dots, n$, dan dua titik terhubung langsung jika dan hanya jika dua tupel yang bersesuaian berbeda tepat satu di tempat. Graf kubus yang diperoleh dinyatakan dengan Q_n (Purwanto, 1998:23).

Contoh 2.15

Berikut ini adalah contoh Graf Q_1 , Q_2 dan Q_3 .



Gambar 2.16 Graf Kubus Q_1 , Q_2 dan Q_3

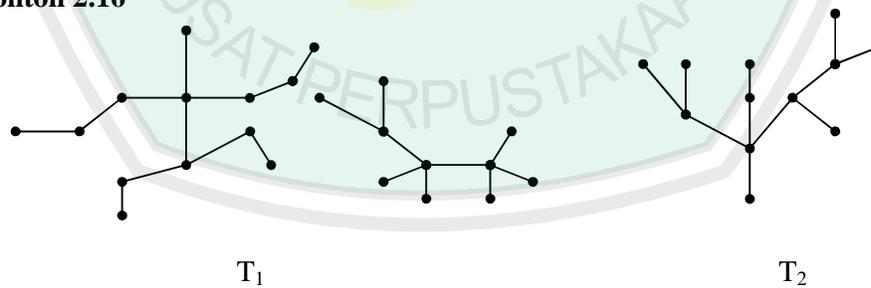
8. Hutan (forest)

Definisi 17

Hutan (*forest*) adalah graf yang tidak memuat siklus. Hutan yang terhubung disebut pohon (*tree*) (Purwanto, 1998:23).

Pada Gambar 2.16, graf T_2 adalah pohon, yang tentu saja juga hutan (*forest*), sedang T_1 adalah hutan yang bukan pohon.

Contoh 2.16



Gambar 2.17 T_1 adalah Hutan dan T_2 adalah Pohon

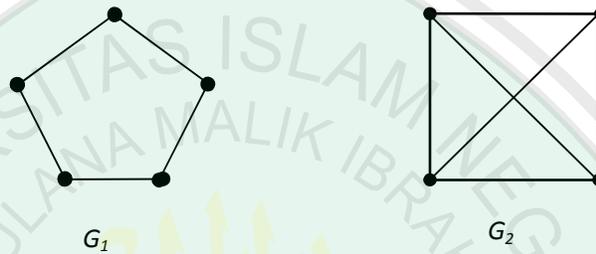
9. Graf Beraturan

Definisi 18

Sebuah graf disebut graf beraturan jika semua titiknya berderajat sama (Sutarno, 2005:88).

Berikut ini adalah graf contoh graf beraturan :

Contoh 2.17



Gambar 2.18 Graf G_1 Beraturan 2 dan G_2 Graf Beraturan 3

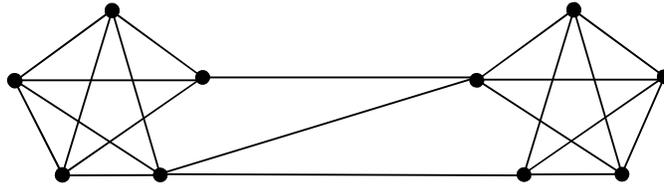
2.15 Keterhubungan Titik dan Keterhubungan Sisi pada Graf

Definisi 19

Keterhubungan titik $\kappa(G)$ pada graf G adalah minimum titik yang apabila dihapus dari graf G akan membuat graf tersebut tidak terhubung atau menjadi graf trivial (Sutarno, 2005:94 dan Chartrand dan Lesniak, 1986:152).

Graf komplit K_p tidak dapat menjadi tidak terhubung hanya dengan menghilangkan satu titik saja, namun dengan menghilangkan $p-1$ tidak akan menghasilkan K_1 , maka $\kappa(K_p) = p-1$. Hal ini mengakibatkan bahwa graf nontrivial G mempunyai keterhubungan nol jika dan hanya jika G tidak terhubung.

Contoh 2.18



Gambar 2.19 Graf P

Keterhubungan titik pada graf P di Gambar 2.19 adalah 2 atau $\kappa(P) = 2$.

Definisi 20

Keterhubungan sisi $\alpha(G)$ pada graf G adalah minimum sisi yang apabila dihapus dari graf G akan membuat graf tersebut tidak terhubung atau menjadi graf trivial. (Sutarno, 2005:93 dan Chartrand dan Lesniak, 1986:152).

Contoh 2.19

Keterhubungan sisi pada graf G dalam Gambar 2.19 adalah 3 atau $\alpha(G) = 3$

Teorema 4

Untuk setiap graf G, maka $\kappa(G) \leq \alpha(G) \leq \delta(G)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:153).

Bukti :

Misalkan $v \in V(G)$ sehingga derajat $v = \delta(G)$. Penghapusan $\delta(G)$ sisi dari G yang berinsiden dengan v menghasilkan G' dimana v terisolasi sehingga G' menjadi tidak terhubung atau trivial; oleh karena itu $\alpha(G) \leq \delta(G)$.

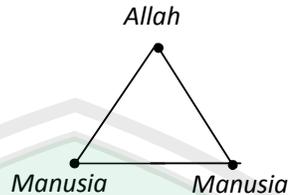
Sekarang akan diuji ketaksamaan yang lain. Jika $\alpha(G)=0$, maka G adalah tidak terhubung atau trivial sehingga $\kappa(G)=0$. Jika $\alpha(G)=1$ maka G terhubung dan mengandung jembatan sehingga $G \cong K_2$ atau G terhubung dan mengandung titik potong, jadi $\kappa(G)=1$. Dalam kasus yang lain, $\kappa(G)=\alpha(G)$. Selanjutnya diasumsikan $\alpha(G) \geq 2$.

Terdapat himpunan $\alpha(G)$ pada G sehingga G menjadi terhubung. Penghapusan $\alpha(G)-1$ dari sisi tersebut, menghasilkan sebuah graf terhubung dengan sebuah jembatan $e=uv$. Masing-masing sisi $\alpha(G)-1$ merupakan titik yang berbeda yang berinsiden dari u dan v . Jika penghapusan titik-titik tersebut menghasilkan graf H yang tidak terhubung, maka $\kappa(G) < \alpha(G)$. Pada sisi lain jika H terhubung, maka $H \cong K_2$ atau H punya titik potong. Pada sisi lain, terdapat titik pada graf H yang apabila dihapus akan menghasilkan graf tidak terhubung atau trivial. Oleh karena itu $\kappa(G) \leq \alpha(G)$.

2.2 Konsep Keterhubungan antara Kholiq dan HambaNya (Manusia)

Secara umum beberapa konsep dari disiplin ilmu telah dijelaskan dalam Al-Qur'an, salah satunya adalah matematika. Teori graf yang merupakan salah satu cabang matematika tersebut menurut definisinya adalah himpunan yang tidak kosong yang memuat elemen-elemen yang disebut titik, dan suatu daftar pasangan tidak terurut elemen itu yang disebut sisi. Jika di integrasikan dengan Islam, perumpamaan elemen-elemen tersebut di antaranya adalah Pencipta (Allah) dan hamba (manusia), sedangkan sisi atau garis yang menghubungkan elemen-elemen tersebut diibaratkan suatu hubungan antara sang Khaliq dengan hambaNya

(*Hablun min Allah*) dan hubungan antara manusia dengan manusia (*Hablun min An-Nas*).



Gambar 2.20 Gambaran *Hablun min Allah wa Hablun min An-Nas*

2.2.1 Hubungan Manusia dengan Tuhannya

Allah adalah Pencipta segala sesuatu. Dia menciptakan manusia dalam bentuk sebaik-baik kejadian dan menganugerahkan kedudukan terhormat kepada manusia di hadapan ciptaan-Nya yang lain.

Kedudukan seperti itu ditandai dengan pemberian daya fikir, kemampuan berkreasi dan kesadaran moral. Potensi itulah yang memungkinkan manusia memerankan fungsi sebagai khalifah dan hamba Allah. Dalam kehidupan sebagai khalifah, manusia memberanikan diri untuk mengemban amanat berat yang oleh Allah ditawarkan kepada makhluk-Nya. Sebagai hamba Allah, manusia harus melaksanakan ketentuan-ketentuan-Nya. Untuk itu, manusia dilengkapi dengan kesadaran moral yang selalu harus dirawat, jika manusia tidak ingin terjatuh ke dalam kedudukan yang rendah.

Dengan demikian, dalam kehidupan manusia sebagai ciptaan Allah, terdapat dua pola hubungan manusia dengan Allah, yaitu pola yang didasarkan pada kedudukan manusia sebagai khalifah Allah dan sebagai hamba Allah. Kedua pola ini dijalani secara seimbang, lurus dan teguh, dengan tidak menjalani yang satu sambil mengabaikan yang lain. Sebab memilih salah satu pola saja akan

membawa manusia kepada kedudukan dan fungsi kemanusiaan yang tidak sempurna. Sebagai akibatnya manusia tidak akan dapat mengejawentahkan prinsip tauhid secara maksimal.

Pola hubungan dengan Allah juga harus dijalani dengan ikhlas, artinya pola ini dijalani dengan mengharapkan keridloan Allah. Sehingga pusat perhatian dalam menjalani dua pola ini adalah ikhtiar yang sungguh-sungguh. Sedangkan hasil optimal sepenuhnya kehendak Allah. Dengan demikian, berarti diberikan penekanan menjadi insan yang mengembangkan dua pola hubungan dengan Allah. Dengan menyadari arti niat dan ikhtiar, sehingga muncul manusia-manusia yang berkesadaran tinggi, kreatif dan dinamik dalam berhubungan dengan Allah, namun tetap taqwa dan tidak pongah Kepada Allah.

Dengan karunia akal, manusia berfikir, merenungkan dan berfikir tentang ke-Maha-anNya, yakni ke-Mahaan yang tidak tertandingi oleh siapapun. Akan tetapi manusia yang dilengkapi dengan potensi-potensi positif memungkinkan dirinya untuk menirukan fungsi ke-Maha-anNya itu. Dalam diri manusia terdapat fitrah suci yang selalu memproyeksikan tentang kebaikan dan keindahan. Sehingga tidak mustahil ketika manusia melakukan sujud dan dzikir kepadaNya Manusia berarti tengah menjalankan fungsi Al Quddus. Ketika manusia berbelas kasih dan berbuat baik kepada tetangga dan sesamanya, maka ia telah memerankan fungsi Arrahman dan Arrahim dan seterusnya. Atau pendek kata, manusia dengan anugrah akal dan seperangkat potensi yang dimilikinya yang dikerjakan dengan niat yang sungguh-sungguh, akan memungkinkan manusia menggapai dan memerankan fungsi-fungsi Asma'ul Husna.

Di dalam melakukan pekerjaannya itu, manusia diberi kemerdekaan untuk memilih dan menentukan dengan cara yang paling disukai. Dari semua pola tingkah lakunya manusia akan mendapatkan balasan yang setimpal dan sesuai yang diupayakan. Karenanya manusia dituntut untuk selalu memfungsikan secara maksimal kemerdekaan yang dimilikinya, baik secara perorangan maupun secara bersama-sama dalam konteks kehidupan di tengah-tengah alam dan kerumunan masyarakat, sebab perubahan dan perkembangan hanyalah miliknya, oleh dan dari manusia itu sendiri.

Sekalipun di dalam diri manusia dikaruniai kemerdekaan sebagai esensi kemanusiaan untuk menentukan dirinya, namun kemerdekaan itu selalu dipagari oleh keterbatasan-keterbatasan, sebab perputaran itu semata-mata tetap dikendalaikan oleh kepastian-kepastian yang Maha Adil—lagi Maha Bijaksana,yang semua alam ciptaanNya ini selalu tunduk pada sunnahNya, pada keharusan universal atau takdir. Jadi manusia bebas berbuat dan berusaha (ikhtiar) untuk menentukan nasibnya sendiri, apakah dia menjadi mukmin atau kafir, pandai atau bodoh, kaya atau miskin, manusia harus berlomba-lomba mencari kebaikan, tidak terlalu cepat puas dengan hasil karyanya. Tetapi harus sadar pula dengan keterbatasan- keterbatasannya, karena semua itu terjadi sesuai sunnatullah, hukum alam dan sebab akibat yang selamanya tidak berubah, maka segala upaya harus disertai dengan tawakkal. Dari sini dapat dipahami bahwa manusia dalam hidup dan kehidupannya harus selalu dinamis, penuh dengan gerak dan semangat untuk berprestasi secara tidak fatalistis. Dan apabila usaha itu belum berhasil, maka harus ditanggapi dengan lapang dada, qona'ah (menerima) karena disitulah

sunnatullah berlaku. Karenanya setiap usaha yang dilakukan harus disertai dengan sikap tawakkal kepadaNya (Abdullah, 2007).

Pola yang kedua yaitu manusia sebagai hamba Allah, sebagai seorang hamba maka kita wajib melaksanakan apa yang diperintahkan dan menjauhi yang dilarang. Salah satu contohnya adalah ibadah yang sering dilakukan sehari-hari yaitu sholat. Seperti yang telah disebutkan dalam surat surat Al-Bayyinah ayat 5 :

وَمَا أُمِرُوا إِلَّا لِيَعْبُدُوا اللَّهَ مُخْلِصِينَ لَهُ الدِّينَ حُنَفَاءَ وَيُقِيمُوا الصَّلَاةَ
وَيُؤْتُوا الزَّكَاةَ وَذَلِكَ دِينُ الْقَيِّمَةِ ﴿٥﴾

Artinya : Padahal mereka tidak disuruh kecuali supaya menyembah Allah dengan memurnikan ketaatan kepada-Nya dalam (menjalankan) agama yang lurus, dan supaya mereka mendirikan shalat dan menunaikan zakat; dan yang demikian itulah agama yang lurus (Al-Bayyinah : 5).

Hal yang lebih memperburuk lagi, sikap Ahl al-Kitab dan kaum musyrikin itu adalah bahwa mereka enggan percaya serta berselisih satu sama lain padahal mereka tidak diperintahkan kecuali supaya mereka menyembah yakni beribadah dan tunduk kepada Allah yang maha esa dengan menunaikan secara bulat untukNya semata-mata ketaatan sehingga tidak mempersekutukanNya dengan sesuatu apapun dan sedikit persekutuan pun dalam menjalankan agama lagi bersikap lurus secara mantap dengan selalu cenderung kepada kebajikan. Dan juga mereka diperintahkan supaya mereka melaksanakan sholat secara baik dan bersinambungan dan menunaikan zakat secara sempurna sesuai dengan ketentun

yang ditetapkan. Dan yang demikian itulah agama yang sangat lurus bukan seperti yang selama ini mereka lakukan.

Penyebutan sholat dan zakat, walau sudah ditentukan termasuk bagian dari ibadah yang diperintahkan sebelumnya penyebutannya secara khusus bertujuan menekankan pentingnya menjalin hubungan baik dengan Allah dan sesama manusia yang dilambangkan dengan sholat dan zakat itu (Shihab, 2002 : 445)

Disebutkan pada surat At-Taubah ayat 11:

فَإِنْ تَابُوا وَأَقَامُوا الصَّلَاةَ وَآتَوُا الزَّكَاةَ فَإِخْوَانُكُمْ فِي
الدِّينِ وَنُفَصِّلُ الْآيَاتِ لِقَوْمٍ يَعْلَمُونَ ﴿١١﴾

Artinya : Jika mereka bertaubat, mendirikan sholat dan menunaikan zakat, maka (mereka itu) adalah saudara-saudaramu seagama. Dan Kami menjelaskan ayat-ayat itu bagi kaum yang mengetahui.(At-Taubah 11).

2.2.2 Hubungan Manusia dengan Manusia

Kenyataan bahwa Allah meniupkan ruhNya kepada materi dasar manusia menunjukkan, bahwa manusia berkedudukan mulia di antara ciptaan-ciptaan Allah. Memahami ketinggian eksistensi dan potensi yang dimiliki manusia, manusia mempunyai kedudukan yang sama antara yang satu dengan yang lainnya. Sebagai warga dunia manusia adalah satu dan sebagai warga negara manusia adalah sebangsa, sebagai mukmin manusia adalah bersaudara.

Tidak ada kelebihan antara yang satu dengan yang lainnya, kecuali karena ketaqwaannya. Setiap manusia memiliki kekurangan dan kelebihan, ada yang menonjol pada diri seseorang tentang potensi kebaikannya, tetapi ada pula yang

terlalu menonjol potensi kelemahannya, agar antara satu dengan yang lainnya saling mengenal, selalu memadu kelebihan masing-masing untuk saling kait mengkait atau setidaknya manusia harus berlomba dalam mencari dan mencapai kebaikan. Oleh karena itu manusia dituntut untuk saling menghormati, bekerjasama, tolong menolong, menasehati, dan saling mengajak kepada kebenaran demi kebaikan bersama.

Manusia telah dan harus selalu mengembangkan tanggapannya terhadap kehidupan. Tanggapan tersebut pada umumnya merupakan usaha mengembangkan kehidupan berupa hasil cipta, rasa, dan karsa manusia. Dengan demikian maka hasil itu merupakan budaya manusia, yang sebagian dilestarikan sebagai tradisi, dan sebagian diubah. Pelestarian dan perubahan selalu mewarnai kehidupan manusia. Inipun dilakukan dengan selalu memuat nilai-nilai yang telah disebut di bagian awal, sehingga budaya yang bersesuaian bahkan yang merupakan perwujudan dari nilai-nilai tersebut dilestarikan, sedang budaya yang tidak bersesuaian diperbaharui.

Kerangka bersikap tersebut mengisyaratkan bergerak secara dinamik dan kreatif dalam kehidupan manusia. Manusia dituntut untuk memanfaatkan potensinya yang telah dianugerahkan oleh Allah SWT. Melalui pemanfaatan potensi diri itu justru manusia menyadari asal mulanya, kejadian, dan makna kehadirannya di dunia.

Dengan demikian pengembangan berbagai aspek budaya dan tradisi dalam kehidupan manusia dilaksanakan sesuai dengan nilai dalam hubungan dengan Allah, manusia dan alam selaras dengan perkembangan kehidupan dan mengingat perkembangan suasana. Memang manusia harus berusaha menegakan

iman, taqwa dan amal shaleh guna mewujudkan kehidupan yang baik dan penuh rahmat di dunia. Di dalam kehidupan itu sesama manusia saling menghormati harkat dan martabat masing-masing, berderajat, berlaku adil dan mengusahakan kebahagiaan bersama. Untuk diperlukan kerjasama yang harus didahului dengan sikap keterbukaan, komunikasi dan dialog antar sesama. Semua usaha dan perjuangan ini harus terus-menerus dilakukan sepanjang sejarah.

Melalui pandangan seperti ini pula *kehidupan bermasyarakat, berbangsa dan bernegara* dikembangkan. Kehidupan bermasyarakat, berbangsa dan bernegara merupakan kerelaan dan kesepakatan untuk bekerja sama serta berdampingan setara dan saling pengertian. Bermasyarakat, berbangsa dan bernegara dimaksudkan untuk mewujudkan cita-cita bersama: hidup dalam kemajuan, keadilan, kesejahteraan dan kemanusiaan. Tolok ukur bernegara adalah keadilan, persamaan hukum dan perintah serta adanya permusyawaratan.

Nilai-nilai yang dikembangkan dalam hubungan antar manusia tercakup dalam persaudaraan antar manusia, persaudaraan sesama Islam, persaudaraan sesama warga bangsa dan persaudaraan sesama umat manusia. Perilaku persaudaraan ini, harus menempatkan manusia pada posisi yang dapat memberikan kemanfaatan maksimal untuk diri dan lingkungan persaudaraan (Abdullah, 2007).

Dalam Islam pun telah diajarkan bahwa salah satu penyempurna dari keimanan seseorang terhadap Allah Swt. adalah bagaimana manusia mampu menjaga hubungan persaudaraan dan tali silaturahmi antar sesama manusia. Sehingga dapat dikatakan bahwa tidak sempurna iman seseorang jika belum

mampu menjaga dengan baik hubungan manusia yang lainnya. seperti hadist yang diriwayatkan oleh Anas bin Malik R.A. yang artinya :

"Dari Anas bin Malik radhiallâhu 'anhu dari Nabi Shallallahu 'alaihi wasallam, beliau bersabda: "Tidaklah (sempurna) iman seseorang diantara kalian hingga dia mencintai saudaranya sebagaimana dia mencintai dirinya sendiri". (H.R.Bukhari dan Muslim).

Dalam hadits di atas, Rasulullah menjelaskan bahwa salah satu dari ciri kesempurnaan iman seseorang adalah dia memberikan porsi kecintaan terhadap saudara nya se-iman melebihi cintanya pada dirinya sendiri. Hadits yang diriwayatkan oleh Anas bin Malik diatas, menunjukkan bahwa seorang Mukmin merasa senang dan gembira bila saudaranya se-iman merasakan hal yang sama dengan yang dia rasakan. Begitu juga, dia ingin agar saudaranya itu mendapatkan kebaikan seperti yang dianugerahkan kepadanya. Hal ini bisa terealisasi manakala ada seorang mukmin secara sempurna terselamatkan dari penyakit dengki dan ngibul. Sebab sifat dengki mengindikasikan bahwa si pendengki tidak suka bila kebaikan seseorang melebihi dirinya atau bahkan menyamainya. Dia ingin agar kelebihan yang ada padanya selalu diatas orang lain dan tidak ada orang yang menyainginya sedangkan keimanan mengindikasikan sebaliknya; yaitu agar semua orang-orang yang beriman sama-sama diberikan kebaikan seperti dirinya tanpa dikurangi sedikitpun.

Jika masing-masing individu di suatu masyarakat merasa saling mengasihi serta terikat satu sama lain niscaya banyak dari permasalahan lingkungan maupun kegelisahan hidup yang mereka hadapi akan dapat diselesaikan. Hal ini disebabkan mayoritas dari problem sosial yang muncul berasal dari perselisihan

pribadi diantara individu yang kemudian merembet kepada timbulnya rasa marah, dendam, dan permusuhan.

Jika kita merujuk kepada pedoman yang ditinggalkan Rasulullah SAW. Maka akan kita temukan banyak wasiat beliau yang berbicara tentang pentingnya menjaga persaudaraan. Diantaranya beliau bersabda yang artinya :

“Seorang muslim adalah saudara bagi muslim yang lain. Oleh karena itu, dia tidak boleh mengkhianatinya, membohonginya, maupun merendharkannya. Seorang muslim diharamkan mengganggu kehormatan, harta, maupun jiwa muslim yang lain. Takwa itu berada disini (sambil menunjuk dada beliau). Selain orang muslim sudah dipandang melakukan kejahatan meski sekedar mengejek saudaranya sesama muslim.” (HR Tirmidzi)

Rasulullah saw. juga bersabda, yang artinya :

“Muslim yang lain adalah saudara bagi masing-masing kalian. Oleh karena itu, berbuat baiklah terhadap mereka, damaikanlah apabila terjadi perselisihan di antara mereka, minta tolonglah kepada mereka terhadap hal-hal yang tidak dapat kalian hadapi, serta bantulah mereka dalam menghadapi hal-hal yang tidak mampu mereka atasi”. (HR Ahmad)

(Riyadh, 2007 : 103)

Dalam al-Qur'an juga disebutkan dalam surat Al-Hujurat ayat 10 :

إِنَّمَا الْمُؤْمِنُونَ إِخْوَةٌ فَأَصْلِحُوا بَيْنَ أَخَوَيْكُمْ وَاتَّقُوا اللَّهَ
لَعَلَّكُمْ تُرْحَمُونَ ﴿١٠﴾

Artinya : Orang-orang beriman itu sesungguhnya bersaudara. Sebab itu damaikanlah (perbaikilah hubungan) antara kedua saudaramu itu dan takutlah terhadap Allah, supaya kamu mendapat rahmat.

Ayat di atas menjelaskan *sesungguhnya orang-orang mukmin* yang mantap imannya serta dihipunkan oleh keimanan, kendati tidak seketurunan *adalah* bagaikan *bersaudara* seketurunan. Karena itu wahai orang beriman yang terlibat langsung dalam pertikaian antar kelompok-kelompok *damaikanlah* walau pertikaian itu hanya terjadi *antara kedua saudara kamu* apalagi jika jumlah yang bertikai lebih dari *dua orang dan bertakwalah kepada Allah* yakni jagalah diri kamu agar kamu tidak ditimpa bencana, baik akibat pertikaian itu maupun selainnya. *Supaya kamu mendapatkan rahmat* antara lain rahmat persatuan dan kesatuan.

Tahabathaba'i menulis bahwa hendaknya menyadari bahwa firman-Nya :
“*Sesungguhnya orang-orang mukmin adalah bersaudara*” merupakan ketentuan syariat berkaitan dengan persaudaraan antara orang-orang mukmin dan yang mengakibatkan dampak keagamaan serta hak-hak yang ada yang ditetapkan agama. Hubungan kekeluargaan anak, bapak atau saudara, ada yang ditetapkan agama atau undang-undang serta memiliki dampak tertentu seperti hak kewarisan, nafkah, keharaman kawin dan lain-lain, dan ada juga yang ditetapkan hanya berdasar ketentuan umum yakni hubungan pertalian keturunan dan rahim. Dua

orang anak yang lahir dari dua ibu bapak melalui perkawinan yang sah menurut agama adalah dua saudara yang diakui oleh agama. Sekaligus diakui berdasar pada ketentuan umum yakni akibat kelahirannya dari ibu dan bapak yang sama. Tetapi jika salah seorang dari kedua anak tadi lahir akibat perzinahan, maka yang ini bukanlah anak yang sah yang diakui agama walaupun dia adalah anak yang lahir dari sumber sperma dan rahim ibu yang sama. Anak itu adalah anak hanya berdasarkan pada ketentuan umum, bukan ketentuan agama. Demikian juga anak angkat. Boleh jadi sementara peraturan menilainya sebagai anak, tetapi Islam tidak menilainya sebagaimana halnya anak kandung. Nah jika demikian, persaudaraan beraneka ragam dan memiliki dampak yang bermacam-macam. Ada persaudaraan umum yang tidak memiliki dalam dalam ajaran agama seperti lahirnya dua orang dari ayah dan ibu yang sama. Ada juga persaudaraan yang memiliki dampak tertentu yang ditetapkan agama, misalnya dalam pernikahan dan kewarisan. Atau persaudaraan berdasar persusuan, yang juga memiliki dampaknya pada pernikahan, walau tidak pada kewarisan. Dengan demikian, persaudaraan antar sesama manusia pun berbeda-beda, walau semua dapat dinamai saudara.

Ayat di atas mengisyaratkan dengan sangat jelas bahwa persatuan dan kesatuan serta hubungan harmonis antar anggota masyarakat kecil atau besar akan melahirkan limpahan rahmat bagi mereka semua. Sebaliknya, perpecahan dan keretakan hubungan mengundang lahirnya bencana buat mereka yang pada puncaknya dapat melahirkan pertumpahan darah dan perang saudara (Shihab, 2002:247).

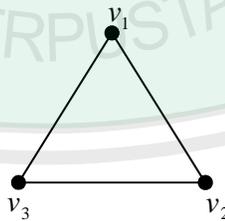
BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Keterhubungan Titik pada Graf C Beraturan 2

Graf terhubung beraturan 2 tidak lain adalah graf sikel dengan order n dan $n \geq 3$ yang dinotasikan dengan C_n .

1. Graf terhubung beraturan 2 dengan order 3 dapat digambar seperti Gambar 3.1. Misal titiknya diberi nama v_1, v_2 dan v_3 . Jika dipilih satu titik yang dihapus maka semua sisi yang terhubung pada titik tersebut juga terhapus berakibat grafnya masih terhubung. Maka dari itu keterhubungan titiknya haruslah lebih dari satu atau $\kappa(C_3) > 1$. Pilih dua titik misal v_1 dan v_2 untuk dihapus maka semua sisi yang terhubung pada titik-titik tersebut juga terhapus maka akan diperoleh C'_3 graf trivial dengan titik yaitu v_3 yaitu seperti Gambar 3.2. Jadi keterhubungan titik pada graf C_3 adalah 2 atau $\kappa(C_3) = 2$.

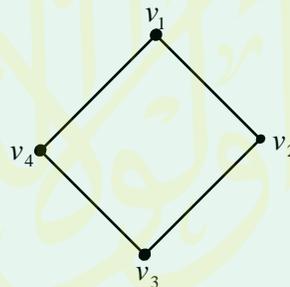


Gambar 3.1 Graf C_3

□

Gambar 3.2 Graf C'_3

2. Graf terhubung sederhana beraturan 2 dengan order 4 adalah graf C_4 , dapat digambar seperti Gambar 3.3. Misal titiknya diberi nama v_1, v_2, v_3 dan v_4 . Jika dipilih satu titik yang dihapus maka semua sisi yang terhubung pada titik tersebut juga terhapus berakibat grafnya masih terhubung. Maka dari itu keterhubungan titiknya haruslah lebih dari satu atau $\kappa(C_4) > 1$. Pilih dua titik, misal v_1 dan v_3 untuk dihapus maka semua sisi yang terhubung pada titik-titik tersebut juga terhapus berakibat grafnya tidak terhubung sehingga terbentuk graf baru yaitu graf C'_4 dengan dua komponen yaitu titik v_2 dan titik v_4 seperti pada Gambar 3.4. Jadi keterhubungan titik pada graf C_4 adalah 2 atau $\kappa(C_4) = 2$.



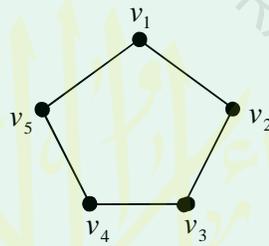
Gambar 3.3 Graf C_4



Gambar 3.4 Graf C_4

3. Graf terhubung sederhana beraturan 2 dengan order 5 adalah graf C_5 , dapat digambar seperti Gambar 3.5. Misal titiknya diberi nama v_1, v_2, v_3, v_4 dan v_5 . Jika dipilih satu titik yang dihapus maka semua sisi

yang terhubung pada titik tersebut juga terhapus berakibat grafnya masih terhubung. Maka dari itu keterhubungan titiknya haruslah lebih dari satu atau $\kappa(C_5) > 1$. Pilih dua titik misal v_1 dan v_3 untuk dihapus maka semua sisi yang terhubung pada titik-titik tersebut juga terhapus berakibat grafnya tidak terhubung sehingga terbentuk graf baru yaitu graf C'_5 dengan dua komponen yaitu satu komponen dengan titik v_2 dan satu komponen dengan titik v_4 dan v_5 seperti pada Gambar 3.6. Jadi keterhubungan titik pada graf C_5 adalah 2 atau $\kappa(C_5) = 2$.



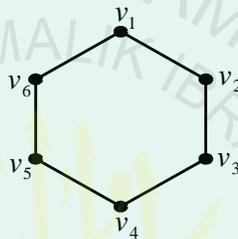
Gambar 3.5 Graf C_5



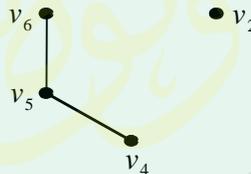
Gambar 3.6 Graf C'_5

4. Graf terhubung sederhana beraturan 2 dengan order 6 adalah graf C_6 , dapat digambar seperti Gambar 3.7. Misal titiknya diberi nama v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 dan v_6 . Jika dipilih satu titik yang dihapus maka semua sisi yang terhubung pada titik tersebut juga terhapus berakibat grafnya masih terhubung. Maka dari itu keterhubungan titiknya haruslah lebih dari satu

atau $\kappa(C_6) > 1$. Pilih dua titik misal v_1 dan v_3 untuk dihapus maka semua sisi yang terhubung pada titik-titik tersebut juga terhapus berakibat grafnya tidak terhubung sehingga terbentuk graf baru yaitu graf C'_6 dengan dua komponen yaitu satu komponen dengan titik v_2 dan satu komponen dengan titik v_4, v_5 dan v_6 seperti pada Gambar 3.8. Jadi keterhubungan titik pada graf C_6 adalah 2 atau $\kappa(C_6) = 2$.



Gambar 3.7 Graf C_6



Gambar 3.8 Graf C'_6

Dari beberapa gambar di atas maka dapat diperoleh suatu teorema:

Teorema :

Suatu graf C_n dengan order n ($n \geq 3$) beraturan 2 maka $\kappa(C_n) = 2$ atau keterhubungan titiknya adalah 2.

Bukti :

Graf C_n dengan $n \geq 3$ mempunyai $\delta(C_n) = 2$. Dengan demikian maka

$$\kappa(C_n) \leq \delta(C_n) = 2$$

atau

$$\kappa(C_n) \leq 2$$

Jika pada C_n dibuang 1 titik, maka graf yang diperoleh tetap terhubung.

Jadi :

$$\kappa(C_n) > 1$$

atau

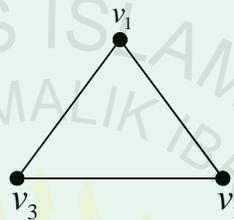
$$2 \leq \kappa(C_n)$$

Karena $\kappa(C_n) \leq 2$ dan $2 \leq \kappa(C_n)$ maka disimpulkan $\kappa(C_n) = 2$

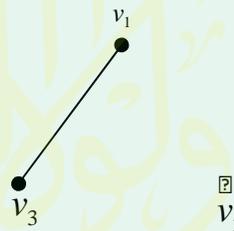
3.2 Keterhubungan Sisi pada Graf C Beraturan 2

1. Graf terhubung beraturan 2 dengan order 3 adalah graf C_3 , dapat digambar seperti Gambar 3.9. Misal titiknya diberi nama v_1, v_2 dan v_3 dan sisinya diberi nama v_1v_2, v_2v_3 dan v_3, v_1 . Jika dipilih satu sisi yang dihapus maka graf yang diperoleh tetap terhubung. Maka dari itu keterhubungan sisinya haruslah lebih dari satu atau $\alpha(C_3) > 1$. Pilih dua

sisi misal v_1v_2 dan v_2v_3 untuk dihapus maka akan diperoleh graf yang tidak terhubung sehingga terbentuk graf baru yaitu graf C'_3 dengan dua komponen yaitu satu komponen dengan titik v_2 dan satu komponen dengan titik v_2 dan v_3 seperti pada Gambar 3.10. Jadi keterhubungan sisi pada graf C_3 adalah 2 atau $\alpha(C_3) = 2$.



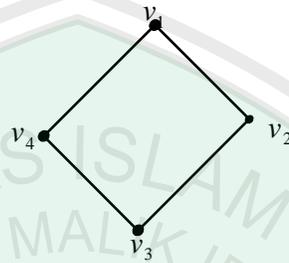
Gambar 3.9 Graf C_3



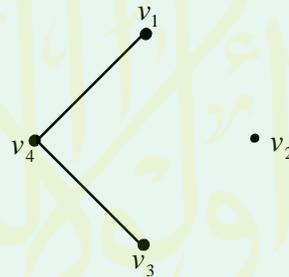
Gambar 3.10 Graf C'_3

2. Graf terhubung beraturan 2 dengan order 4 adalah graf C_4 , dapat digambar seperti Gambar 3.11. Misal titiknya diberi nama v_1, v_2, v_3 dan v_4 sisinya diberi nama v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4 dan v_4v_1 . Jika dipilih satu sisi yang dihapus maka graf yang diperoleh tetap terhubung. Oleh karena itu keterhubungan sisinya haruslah lebih dari satu atau $\alpha(C_4) > 1$. Pilih dua sisi misal v_1v_2 dan v_2v_3 untuk dihapus maka akan diperoleh graf yang tidak terhubung sehingga terbentuk graf baru yaitu graf C'_4 dengan dua

komponen yaitu satu komponen dengan titik v_2 dan satu komponen dengan titik v_1, v_3 dan v_4 seperti pada Gambar 3.12. Jadi keterhubungan sisi pada graf C_4 adalah 2 atau $\alpha(C_4) = 2$.



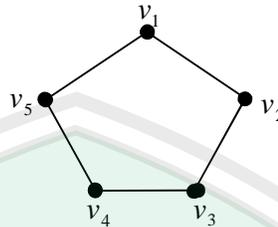
Gambar 3.11 Graf C_4



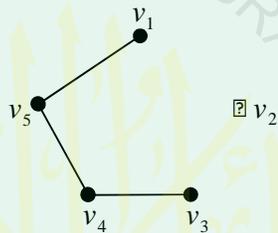
Gambar 3.12 Graf C'_4

3. Graf terhubung beraturan 2 dengan order 5 adalah graf C_5 , dapat digambar seperti Gambar 3.13. Misal titiknya diberi nama v_1, v_2, v_3, v_4 dan v_5 , sisinya diberi nama $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5$ dan v_5v_1 . Jika dipilih satu sisi yang dihapus maka graf yang diperoleh tetap terhubung. Oleh karena itu keterhubungan sisinya haruslah lebih dari satu atau $\alpha(C_5) > 1$. Pilih dua sisi misal v_1v_2 dan v_2v_3 untuk dihapus maka diperoleh graf yang tidak terhubung sehingga terbentuk graf baru yaitu graf C'_5 dengan dua komponen yaitu satu komponen dengan titik v_2 dan satu komponen

dengan titik v_1, v_3, v_4 dan v_5 seperti pada Gambar 3.14. Jadi keterhubungan sisi pada graf C_5 adalah 2 atau $\alpha(C_5) = 2$.

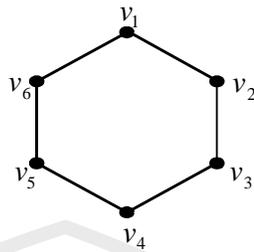


Gambar 3.13 Graf C_5

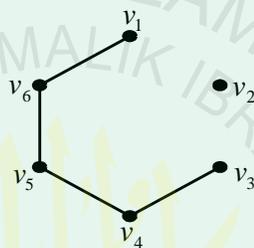


Gambar 3.14 Graf C_5'

4. Graf terhubung beraturan 2 dengan order 6 adalah graf C_6 , dapat digambar seperti gambar 3.15. Misal titiknya diberi nama v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 dan v_6 , sisinya diberi nama $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6$ dan v_6v_1 . Jika dipilih satu sisi yang dihapus maka graf yang diperoleh tetap terhubung. Oleh karena itu keterhubungan sisinya haruslah lebih dari satu atau $\alpha(C_6) > 1$. Pilih dua sisi misal v_1v_2 dan v_2v_3 untuk dihapus maka diperoleh graf yang tidak terhubung sehingga terbentuk graf baru yaitu graf C_6' dengan dua komponen yaitu satu komponen dengan titik v_2 dan satu komponen dengan titik v_1, v_3, v_4, v_5 dan v_6 seperti pada gambar 3.16. Jadi keterhubungan sisi pada graf C_6 adalah 2 atau $\alpha(C_6) = 2$.



Gambar 3.15 Graf C_6



Gambar 3.16 Graf C_6'

Dari beberapa gambar di atas maka dapat diperoleh suatu Teorema:

Teorema :

Suatu graf C_n dengan order n ($n \geq 3$) beraturan 2, maka $\alpha(C_n) = 2$ atau keterhubungan sisinya adalah 2.

Bukti :

Graf C_n dengan $n \geq 3$ mempunyai $\delta(C_n) = 2$. Dengan demikian maka

$$\alpha(C_n) \leq \delta(C_n) = 2$$

atau

$$\alpha(C_n) \leq 2$$

Jika pada C_n dibuang 1 sisi, maka graf yang diperoleh tetap terhubung.

Jadi

$$\alpha(C_n) > 1$$

atau

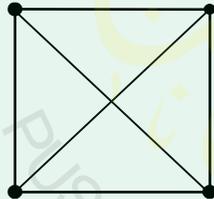
$$2 \leq \alpha(C_n)$$

Karena $\alpha(C_n) \leq 2$ dan $2 \leq \alpha(C_n)$ maka disimpulkan $\alpha(C_n) = 2$.

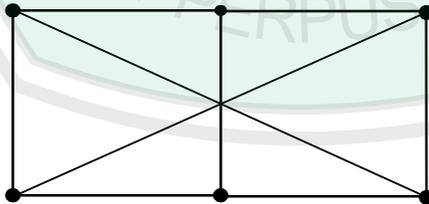
3.3 Pola Graf Beraturan 3

Graf beraturan pada skripsi ini tidak lain adalah graf tangga yang ditambah sisi diagonal atau sisi yang menghubungkan titik paling ujung ke titik ujung lainnya yang dinotasikan dengan L_n .

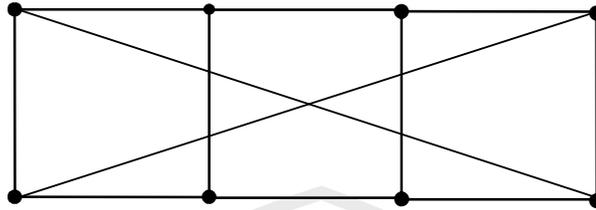
- a. Graf dengan banyak titik 4 atau L_4 , gambarnya adalah :



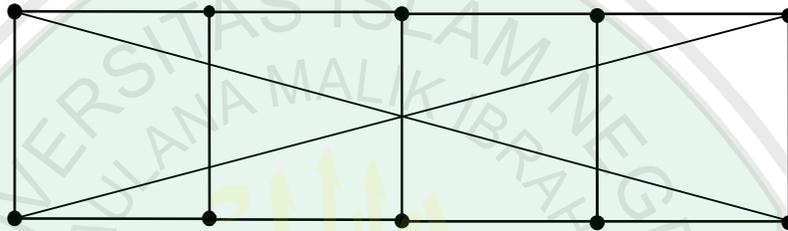
- b. Graf dengan banyak titik 6 atau L_6 , gambarnya adalah



c. Graf dengan banyak titik 8 atau L_8 , gambarnya adalah



d. Graf dengan banyak titik 10 atau L_{10} , gambarnya adalah

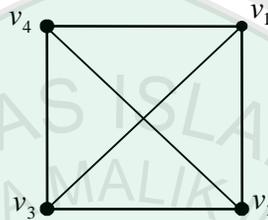


Graf terhubung beraturan 3 ini mempunyai minimal titik 4, dan graf ini hanya berlaku untuk order genap. Graf dengan banyak titik ganjil tidak dapat beraturan 3. Untuk menggambar graf beraturan 3 ini dilakukan hanya dengan menambah 2 titik pada samping graf sebelumnya (minimal pada graf L_4) kemudian pindah/tarik sisi-sisi diagonalnya hingga ke titik yang paling ujung kanan.

3.4 Keterhubungan Titik pada Graf L_n Beraturan 3

1. Graf terhubung beraturan 3 dengan order 4 adalah graf L_4 , dapat digambar seperti Gambar 3.17. Misal titiknya diberi nama v_1, v_2, v_3 dan v_4 . Jika dipilih satu titik yang dihapus maka semua sisi yang terhubung pada titik tersebut juga terhapus berakibat grafnya masih terhubung, dan Jika dipilih dua titik yang dihapus maka semua sisi yang terhubung pada titik tersebut juga akan terhapus berakibat grafnya masih terhubung. Oleh karena itu

keterhubungan titiknya haruslah lebih dari dua atau $\kappa(L_4) > 2$. Pilih tiga titik misal v_1 , v_2 dan v_3 untuk dihapus maka akan diperoleh graf trivial dengan titik yaitu v_4 seperti pada Gambar 3.18. Jadi keterhubungan titik pada graf L_4 adalah 3 atau $\kappa(L_4) = 3$.



Gambar 3.17 Graf L_4

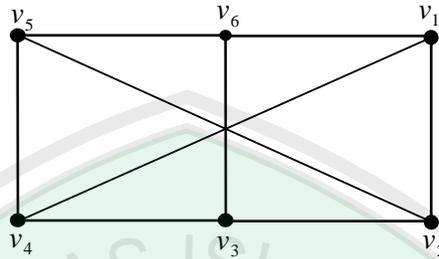


Gambar 3.18 Graf L'_4

2. Graf terhubung beraturan 3 dengan order 6 dapat digambar seperti Gambar 3.19. Misal titiknya diberi nama v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 dan v_6 . Jika dipilih satu titik yang dihapus maka semua sisi yang terhubung pada titik tersebut juga terhapus berakibat grafnya masih terhubung, dan Jika dipilih dua titik yang dihapus maka semua sisi yang terhubung pada titik tersebut juga akan terhapus berakibat grafnya masih terhubung. Oleh karena itu keterhubungan titiknya haruslah lebih dari dua atau $\kappa(L_6) > 2$. Pilih tiga titik misal v_1 , v_2 dan v_5 untuk dihapus maka akan diperoleh graf yang tidak terhubung sehingga terbentuk graf baru yaitu graf L'_6 dengan tiga komponen yaitu satu komponen dengan titik v_2 , satu komponen dengan

titik v_4 dan satu komponen dengan titik v_6 , seperti pada Gambar 3.20.

Jadi keterhubungan titik pada graf L_6 adalah 3 atau $\kappa(L_6) = 3$.



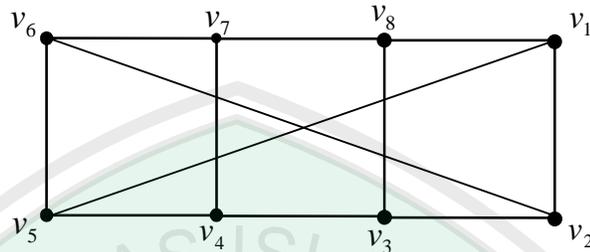
Gambar 3.19 Graf L_6



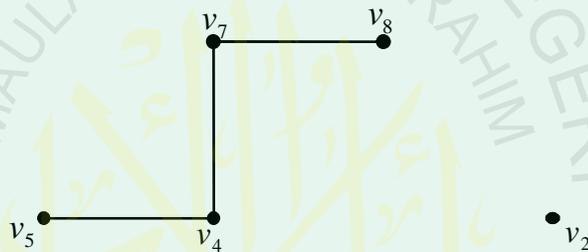
Gambar 3.20 Graf L'_6

3. Graf terhubung beraturan 3 dengan order 8 dapat digambar seperti Gambar 3.21. Misal titiknya diberi nama $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$ dan v_8 . Jika dipilih satu titik yang dihapus maka semua sisi yang terhubung pada titik tersebut juga terhapus berakibat grafnya masih terhubung, dan Jika dipilih dua titik yang dihapus maka semua sisi yang terhubung pada titik tersebut juga akan terhapus berakibat grafnya masih terhubung. Oleh karena itu keterhubungan titiknya haruslah lebih dari dua atau $\kappa(L_8) > 2$. Pilih tiga titik misal v_1, v_3 dan v_6 untuk dihapus maka akan diperoleh graf yang tidak terhubung sehingga terbentuk graf baru yaitu graf L'_8 dengan dua komponen yaitu satu komponen dengan titik v_2 dan satu

komponen dengan titik v_4, v_5, v_7 dan v_8 seperti pada Gambar 3.22. Jadi keterhubungan titik pada graf L_6 adalah 3 atau $\kappa(L_8) = 3$.



Gambar 3.21 Graf L_8

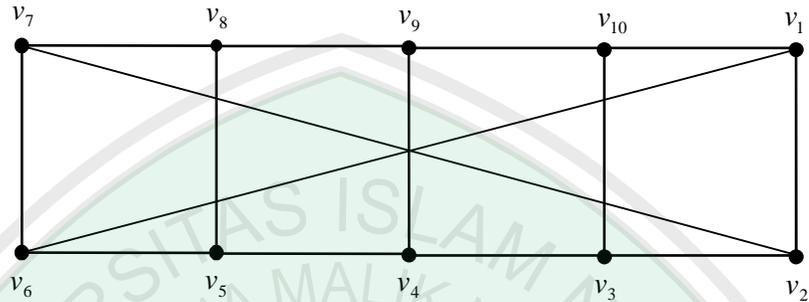


Gambar 3.22 Graf L'_8

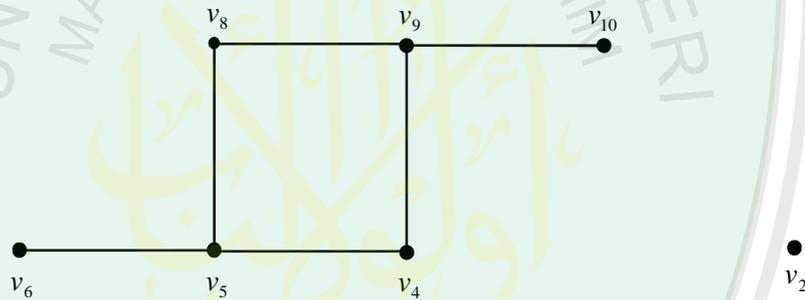
4. Graf terhubung beraturan 3 dengan order 10 dapat digambar seperti Gambar 3.23. Misal titiknya diberi nama $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9$ dan v_{10} . Jika dipilih satu titik yang dihapus maka semua sisi yang terhubung pada titik tersebut juga terhapus berakibat grafnya masih terhubung, dan Jika dipilih dua titik yang dihapus maka semua sisi yang terhubung pada titik tersebut juga akan terhapus berakibat grafnya masih terhubung. Oleh karena itu keterhubungan titiknya haruslah lebih dari dua atau $\kappa(L_{10}) > 2$. Pilih tiga titik misal v_1, v_3 dan v_7 untuk dihapus maka akan diperoleh graf yang tidak terhubung sehingga terbentuk graf baru yaitu graf L'_{10} dengan dua komponen yaitu satu komponen dengan titik v_2 dan

satu komponen dengan titik v_4, v_5, v_7 dan v_8 seperti pada Gambar 3.24.

Jadi keterhubungan titik pada graf L_{10} adalah 3 atau $\kappa(L_{10}) = 3$.



Gambar 3.23 Graf L_{10}



Gambar 3.24 Graf L'_{10}

Dari beberapa gambar di atas maka dapat diperoleh suatu teorema:

Teorema :

Suatu graf L_n terhubung sederhana dengan order n ($n \geq 4$) beraturan 3 maka $\kappa(L_n) = 3$ atau keterhubungan titiknya adalah 3.

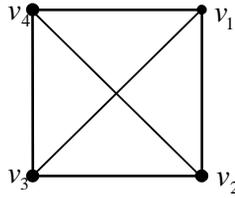
Bukti :

Graf terhubung sederhana dengan order n ($n \geq 4$) adalah graf tangga yang ditambah sisi diagonal atau sisi yang menghubungkan titik paling ujung ke

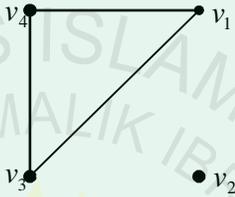
titik ujung lainnya yang dinotasikan dengan L_n . Pada graf L_n dipilih titik v_2 , dimana v_2 terhubung dengan v_1 , v_3 dan $\frac{v_{n+4}}{2}$. Jika titik v_1 , v_3 dan $\frac{v_{n+4}}{2}$ dihapus maka titik v_2 akan menjadi graf trivial atau tak terhubung. Jadi keterhubungan titik pada graf L_n adalah 3 atau $\kappa(L_n) = 3$.

3.5 Keterhubungan Sisi pada Graf L_n Beraturan 3

1. Graf terhubung beraturan 3 dengan order 4 dapat digambar seperti Gambar 3.25. Misal titiknya diberi nama v_1, v_2, v_3 dan v_4 dan sisinya diberi nama $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_1, v_1v_3$ dan v_4v_2 . Jika dipilih satu sisi yang dihapus maka graf yang diperoleh tetap terhubung, dan jika dipilih dua sisi untuk dihapus maka graf yang diperoleh juga akan tetap terhubung. Oleh karena itu keterhubungan sisinya haruslah lebih dari dua atau $\alpha(L_4) > 2$. Pilih tiga sisi misal v_1v_2, v_2v_3 dan v_3v_4 yang dihapus maka akan diperoleh graf yang tidak terhubung sehingga terbentuk graf baru yaitu graf L'_4 dengan dua komponen yaitu satu komponen dengan titik v_2 dan satu komponen dengan titik v_1, v_3, v_4 seperti pada Gambar 3.26. Jadi keterhubungan sisi pada graf L_4 adalah 2 atau $\alpha(L_4) = 2$.

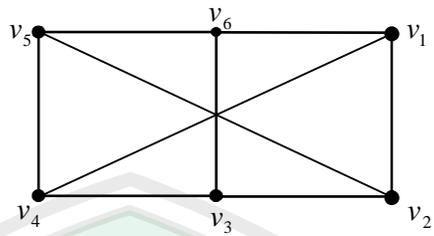


Gambar 3.25 Graf L_4

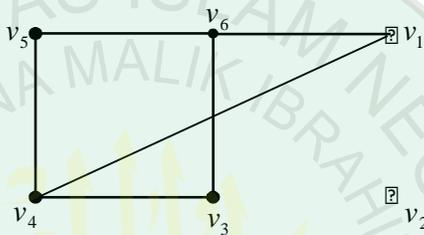


Gambar 3.26 Graf L'_4

2. Graf terhubung beraturan 3 dengan order 6 adalah graf L_6 dapat digambar seperti Gambar 3.27. Misal titiknya diberi nama v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 dan v_6 , sisinya diberi nama $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_1, v_1v_4, v_5v_2$ dan v_6v_3 . Jika dipilih satu sisi yang dihapus maka graf yang diperoleh tetap terhubung, dan jika dipilih dua sisi untuk dihapus maka graf yang diperoleh juga akan tetap terhubung. Oleh karena itu keterhubungan sisinya haruslah lebih dari dua atau $\alpha(L_6) > 2$. Pilih tiga sisi misal v_1v_2, v_2v_3 dan v_4v_5 untuk dihapus maka diperoleh graf yang tidak terhubung sehingga terbentuk graf baru yaitu graf L'_6 dengan dua komponen yaitu satu komponen dengan titik v_2 dan satu komponen dengan titik v_1, v_3, v_4, v_5 dan v_6 seperti pada Gambar 3.28. Jadi keterhubungan sisi pada graf L_6 adalah 3 atau $\alpha(L_6) = 3$.



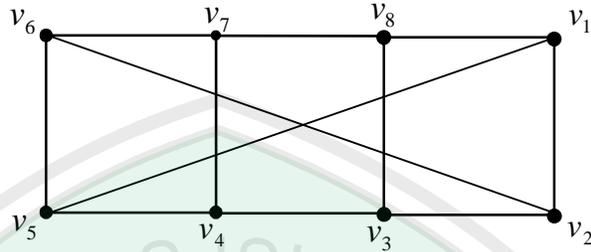
Gambar 3.27 Graf L_6



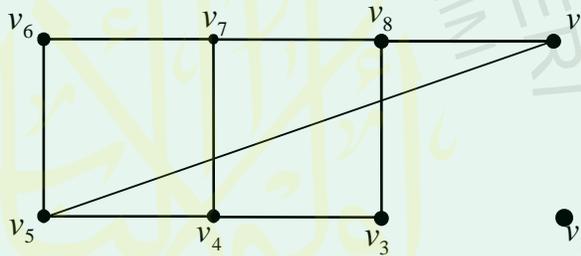
Gambar 3.28 Graf L'_6

3. Graf terhubung beraturan 3 dengan order 8 adalah graf L_8 dapat digambar seperti Gambar 3.29. Misal titiknya diberi nama $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$ dan v_8 , sisinya diberi nama $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7, v_7v_8, v_8v_1, v_1v_5, v_6v_2, v_7v_4$ dan v_8v_3 . Jika dipilih satu sisi yang dihapus maka graf yang diperoleh tetap terhubung, dan jika dipilih dua sisi untuk dihapus maka graf yang diperoleh juga akan tetap terhubung. Oleh karena itu keterhubungan sisinya haruslah lebih dari dua atau $\alpha(L_8) > 2$. Pilih tiga sisi misal v_1v_2, v_2v_3 dan v_6v_2 untuk dihapus maka diperoleh graf yang tidak terhubung sehingga terbentuk graf baru yaitu graf L'_8 dengan dua komponen yaitu satu komponen dengan titik v_2 dan satu komponen dengan titik $v_1, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$ dan v_8 seperti pada

Gambar 3.30. Jadi keterhubungan sisi pada graf L_8 adalah 3 atau $\alpha(L_8) = 3$.



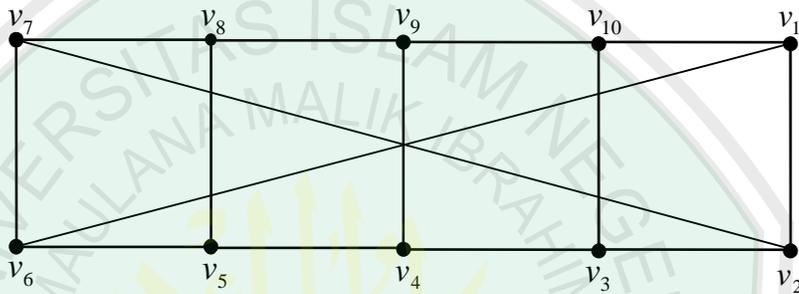
Gambar 3.29 Graf L_8



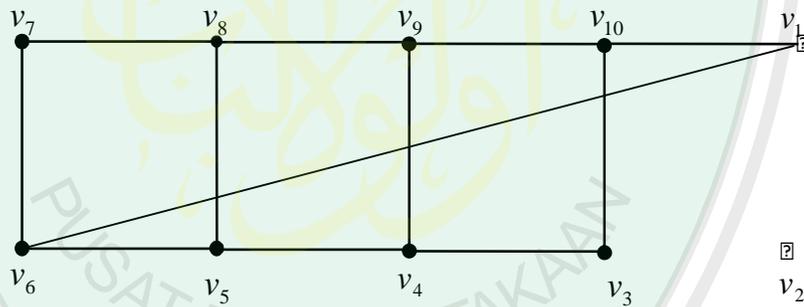
Gambar 3.30 Graf L'_8

4. Graf terhubung beraturan 3 dengan order 10 adalah graf L_{10} dapat digambar seperti Gambar 3.31. Misal titiknya diberi nama $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9$ dan v_{10} , sisinya diberi nama $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7, v_7v_8, v_8v_9, v_9v_{10}, v_1v_6, v_2v_7, v_3v_{10}, v_4v_9$ dan v_5v_8 . Jika dipilih satu sisi yang dihapus maka graf yang diperoleh tetap terhubung, dan jika dipilih dua sisi untuk dihapus maka graf yang diperoleh juga akan tetap terhubung. Oleh karena itu keterhubungan sisinya haruslah lebih dari dua atau $\alpha(L_{10}) > 2$. Pilih tiga sisi misal v_1v_2, v_2v_3 dan

v_2v_7 untuk dihapus maka diperoleh graf yang tidak terhubung sehingga terbentuk graf baru yaitu graf L'_{10} dengan dua komponen yaitu satu komponen dengan titik v_2 dan satu komponen dengan titik $v_1, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9$ dan v_{10} seperti pada Gambar 3.32. Jadi keterhubungan sisi pada graf L_{10} adalah 3 atau $\alpha(L_8) = 3$.



Gambar 3.31 Graf L_{10}



Gambar 3.32 Graf L'_{10}

Dari beberapa gambar di atas maka dapat diperoleh suatu teorema:

Teorema :

Suatu graf L dengan order n ($n \geq 4$) beraturan 3 maka $\alpha(L_n) = 3$ atau keterhubungan sisinya adalah 3.

Bukti :

Graf terhubung dengan order n ($n \geq 4$) adalah graf tangga yang ditambah sisi diagonal atau sisi yang menghubungkan titik paling ujung ke titik ujung lainnya yang dinotasikan dengan L_n .

Pada graf L_n pilih v_2 , dimana v_2 terhubung dengan v_1 , v_3 dan $v_{\frac{n+4}{2}}$.

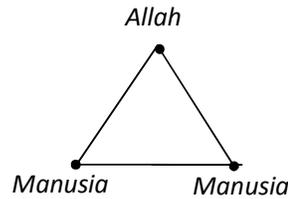
Sehingga sisi yang terhubung dengan v_2 adalah v_2v_1, v_2v_3 dan $v_2v_{\frac{n+4}{2}}$.

Jika sisi tersebut dihapus maka v_2 tak terhubung dengan v_1 , v_3 dan $v_{\frac{n+4}{2}}$,

sehingga grafnya tak terhubung. Jadi keterhubungan sisi pada graf L_n adalah 3 atau $\alpha(L_n) = 3$.

3.6 Tinjauan Agama Berdasarkan Hasil Pembahasan

Keterhubungan titik pada graf beraturan di atas diperoleh untuk graf terhubung sederhana dengan order n ($n \geq 3$) beraturan 2 maka $\kappa(C_n) = 2$ atau keterhubungan titiknya adalah 2. Dengan kata lain misal terdapat sebuah graf terhubung dengan order n dan $n \geq 3$, jika dipilih dua titik untuk dihapus maka graf yang dihasilkan akan tidak terhubung. Keterhubungan sisi pada graf beraturan di atas diperoleh untuk graf terhubung dengan order n ($n \geq 3$) beraturan 2 maka $\alpha(C_n) = 2$ atau keterhubungan sisinya adalah 2. Dengan kata lain misal terdapat sebuah graf terhubung dengan order n dan $n \geq 3$, jika di pilih dua sisi untuk dihapus maka graf yang dihasilkan akan tidak terhubung. Hal ini jika direlevansikan dengan kajian agama adalah sama dengan konsep *Hablun min Allah wa Hablun min An-Nas* yang dapat digambar seperti berikut :



Dalam kehidupan nyata *Hablun min Allah* dapat terlihat jelas, misalnya melaksanakan sholat lima waktu, puasa, zakat, dan lain-lain. Seperti dalam surat At-Taubah ayat 11 dan surat Al-Bayyinah ayat 5 :

وَمَا أُمِرُوا إِلَّا لِيَعْبُدُوا اللَّهَ مُخْلِصِينَ لَهُ الدِّينَ حُنَفَاءَ وَيُقِيمُوا الصَّلَاةَ
وَيُؤْتُوا الزَّكَاةَ وَذَلِكَ دِينُ الْقَيِّمَةِ ﴿٥﴾

Artinya : Padahal mereka tidak disuruh kecuali supaya menyembah Allah dengan memurnikan ketaatan kepada-Nya dalam (menjalankan) agama yang lurus, dan supaya mereka mendirikan shalat dan menunaikan zakat; dan yang demikian itulah agama yang lurus (Al-Bayyinah : 5).

فَإِنْ تَابُوا وَأَقَامُوا الصَّلَاةَ وَعَآتُوا الزَّكَاةَ فَإِخْوَانُكُمْ فِي
الدِّينِ وَنُفِصِلُ الْآيَاتِ لِقَوْمٍ يَعْلَمُونَ ﴿١١﴾

Artinya : Jika mereka bertaubat, mendirikan shalat dan menunaikan zakat, maka (mereka itu) adalah saudara-saudaramu seagama. Dan Kami menjelaskan ayat-ayat itu bagi kaum yang mengetahui.(At-Taubah 11).

Ayat di atas menjelaskan bahwa manusia disuruh menyembah hanya kepada Allah, hal ini menegaskan bahwa seorang muslim haruslah benar-benar menjaga agamanya dengan iman dan menyembah hanya kepada Allah.

Hablun min Allah juga tidak terlepas dengan *Hablun min An-Nas* , karena jika hanya mengambil salah satu jalan yaitu dekat sekali dengan Allah tetapi ternyata tidak mau peduli dengan lingkungan sekitar, maka hal itu sama saja tidak sempurna. Seperti yang disebutkan dalam sebuah hadist riwayat Anas bin Malik R.A. yang artinya :

"Dari Anas bin Malik radhiallâhu 'anhu dari Nabi Shallallahu 'alaihi wasallam, beliau bersabda: "Tidaklah (sempurna) iman seseorang diantara kalian hingga dia mencintai saudaranya sebagaimana dia mencintai dirinya sendiri". (H.R.Bukhari dan Muslim).

Dalam hadits di atas, Rasulullah menjelaskan bahwa salah satu dari ciri kesempurnaan iman seseorang adalah dia memberikan porsi kecintaan terhadap saudara se-iman melebihi cintanya pada dirinya sendiri. Hadits yang diriwayatkan oleh Anas bin Malik di atas, menunjukkan bahwa seorang mukmin merasa senang dan gembira bila saudaranya se-iman merasakan hal yang sama dengan yang dia rasakan. Begitu juga, dia ingin agar saudaranya itu mendapatkan kebaikan seperti yang dianugerahkan kepadanya. Hal ini bisa terealisasi manakala ada seorang mukmin secara sempurna terselamatkan dari penyakit dengki. Sebab sifat dengki mengindikasikan bahwa si pendengki tidak suka bila kebaikan seseorang melebihi dirinya atau bahkan menyamainya. Dia ingin agar kelebihan yang ada padanya selalu di atas orang lain dan tidak ada orang yang menyainginya sedangkan

keimanan mengindikasikan sebaliknya; yaitu agar semua orang-orang yang beriman sama-sama diberikan kebaikan seperti dirinya tanpa dikurangi sedikitpun.

Jika masing-masing individu disuatu masyarakat merasa saling mengasihi serta terikat satu sama lain niscaya banyak dari permasalahan lingkungan maupun kegelisahan hidup yang mereka hadapi akan dapat diselesaikan. Hal ini disebabkan permasalahan yang muncul berasal dari perselisihan pribadi di antara individu yang kemudian merembet kepada timbulnya rasa marah, dendam, dan permusuhan.

Jika merujuk kepada pedoman yang ditinggalkan rasulullah SAW. Maka akan ditemukan banyak wasiat beliau yang berbicara tentang pentingnya menjaga persaudaraan. Di antaranya beliau bersabda yang artinya :

“Seorang muslim adalah saudara bagi muslim yang lain. Oleh karena itu, dia tidak boleh menghianatinya, membohonginya, maupun merendhkannya. Seorang muslim diharamkan mengganggu kehormatan, harta, maupun jiwa muslim yang lain. Takwa itu berada disini (sambil menunjuk dada beliau). Selain orang muslim sudah dipandang melakukan kejahatan meski sekedar mengejek saudaranya sesama muslim.” (HR Tirmidzi)

Rasulullah saw. juga bersabda, yang artinya :

“Muslim yang lain adalah saudara bagi masing-masing kalian. Oleh karena itu, berbuat baiklah terhadap mereka, damaikanlah apabila terjadi perselisihan di antara mereka, minta tolonglah kepada mereka terhadap hal-hal yang tidak dapat kalian hadapi, serta bantulah mereka dalam menghadapi hal-hal yang tidak mampu mereka atasi” (HR Ahmad).

Hadits di atas memberi tahu kepada sesama muslim, bahwa sesama muslim adalah saudara. Sesama saudara maka akan saling melindungi dan saling menjaga, tidak saling menggunjing karena menggunjing merupakan sebuah karakter buruk yang tidak memberikan suatu manfaat. Kata bijak mengatakan bahwa “sesama muslim bagaikan satu tubuh, apabila ada salah satu organ yang luka maka seluruh badan akan terasa sakit”.

Dari penjelasan di atas dapat ditarik sebuah kesimpulan bahwa hubungan manusia dengan tuhanNya adalah berbentuk ibadah sedangkan hubungan manusia dan manusia adalah bagaimana menjalin sebuah tali persaudaraan, yang mana kedua hal tersebut harus berjalan selaras. Jika hal tersebut telah berjalan selaras maka nantinya akan membentuk jiwa yang selaras dan teratur pula, yaitu manusia yang berbudi pekerti luhur. Jika telah terbentuk manusia yang berbudi pekerti luhur maka akan membentuk pula sebuah keluarga yang baik, jika keluarga itu baik maka akan terbentuk masyarakat yang baik dan jika terbentuk masyarakat yang baik maka akan terbentuk sebuah negara yang baik pula.

Hal ini jika diasumsikan dalam sebuah graf seperti sebuah graf terhubung di atas, apabila dua elemen titiknya dihapus maka akan membuat graf tersebut tidak terhubung. Begitu pula dengan *Hablun min Allah wa Hablun min An-Nas*. Jika salah satu hubungan tersebut tidak terjalin dengan baik maka tidak akan sempurna iman seseorang dan tidak akan terbentuk pula sebuah kehidupan yang teratur. Seperti telah disebutkan pada surat al-Hujurat ayat 10 :

إِنَّمَا الْمُؤْمِنُونَ إِخْوَةٌ فَأَصْلِحُوا بَيْنَ أَخَوَيْكُمْ وَاتَّقُوا اللَّهَ
لَعَلَّكُمْ تُرْحَمُونَ ﴿١٠﴾

Artinya : Orang-orang beriman itu sesungguhnya bersaudara. Sebab itu damaikanlah (perbaikilah hubungan) antara kedua saudaramu itu dan takutlah terhadap Allah, supaya kamu mendapat rahmat (Al-Hujurat : 10).

Menurut Shihab (2002:247) ayat di atas mengisyaratkan dengan sangat jelas bahwa persatuan dan kesatuan serta hubungan harmonis antar anggota masyarakat kecil atau besar akan melahirkan limpahan rahmat bagi mereka semua dan sebaliknya, perpecahan dan keretakan hubungan mengundang lahirnya bencana buat mereka yang pada puncaknya dapat melahirkan pertumpahan darah dan perang saudara. Begitu pula dengan menjaga hubungan kepada sang khaliq, karena jika tidak berpegang teguh kepada agama maka hidup tidak akan sempurna.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada Bab III, maka dapat diambil kesimpulan, antara lain:

5. Suatu graf C_n terhubung dengan order n ($n \geq 3$) beraturan 2 maka $\kappa(C_n) = 2$ atau keterhubungan titiknya adalah 2.
6. Suatu graf C_n terhubung dengan order n ($n \geq 3$) beraturan 2 maka $\alpha(C_n) = 2$ atau keterhubungan sisinya adalah 2.
7. Suatu graf L_n terhubung dengan order n ($n \geq 4$) beraturan 3 maka $\kappa(L_n) = 3$ atau keterhubungan titiknya adalah 3.
8. Suatu graf L_n terhubung dengan order n ($n \geq 4$) beraturan 3 maka $\alpha(L_n) = 3$ atau keterhubungan sisinya adalah 3.

4.2 Saran

Pembahasan pada skripsi ini hanya difokuskan pada masalah keterhubungan titik dan keterhubungan sisi pada graf beraturan dua dan graf beraturan tiga. Maka dari itu untuk penulisan skripsi selanjutnya, penulis menyarankan untuk mengkaji masalah pola keterhubungan titik dan keterhubungan sisi pada graf beraturan secara umum.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdullah. Makalah Diklat MAPABA, Nilai Dasar Pergerakan. 2008.
- Abdusysykir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.
- Aziz, Abdul dan Abdusysykir. 2006. *Analisis Matematis Terhadap Filsafat Al-Qur'an*. Malang: UIN Malang Press.
- Chartrand, Gery and Lesniak, Linda. 1986. *Graphs and Digraphs Second Edition*. California: a Division of Wadsworth, Inc.
- Fitria, Lala. 2007. Pelabelan *Super Sisi Ajaib (Super Edge Magic Labeling)* pada *Graph star $K_{1,n}$ (n bilangan asli)*. UIN Malang: Skripsi, tidak diterbitkan.
- Mahalli, K.H. Ahmad Mudjib. 2004. *Hadist-hadist Muttafaq Alaih Bagian Ibadat*. Rawamangun : Prenada Media.
- Purwanto, 1998. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP Malang.
- Riyadh, Dr. Saad. 2007. *Jiwa dalam Bimbingan Rasulullah*. Jakarta : Gema Insani.
- Sutarno, Drs. Heri, 2005. *Matematika Diskrit*. Malang : UM Malang.
- Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Misbah Volume 5 Pesan, Kesan & Keserasian Al Qur'an*. Ciputat: Lentera Hati.
- Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Misbah Volume 13 Pesan, Kesan & Keserasian Al Qur'an*. Ciputat: Lentera Hati.
- Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Misbah Volume 15 Pesan, Kesan & Keserasian Al Qur'an*. Ciputat: Lentera Hati.
- Wati, Sutrisna. 2006. Digraf Eksentrik Dari Graf Tangga L_n Dan Graf Bipartisi Lengkap $K_{m,n}$. Universitas Muhammadiyah Malang : Skripsi, tidak diterbitkan.
- Wilson. Robin J dan Walkins, John J. 1990. *Graphs An Introductory Approach: A first Course in Discrete Mathematic*. New York: John Wiley & Sons, Inc.