PENENTUAN MOMEN KE-3 DAN KE-4 DARI DISTRIBUSI GAMMA, BETA DAN WEIBULL

SKRIPSI

Oleh :

EVITA NURYANI
NIM : 03510001

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2008

PENENTUAN MOMEN KE-3 DAN KE-4 DARI DISTRIBUSI GAMMA, BETA DAN WEIBULL

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri (UIN) Malang
Untuk memenuhi Salah Satu Persyaratan
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh :

Evita Nuryani
NIM : 03510001

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2008

HALAMAN PERSETUJUAN

PENENTUAN MOMEN KE-3 DAN KE-4 DARI DISTRIBUSI GAMMA, BETA DAN WEIBULL

SKRIPSI

Oleh :

Evita Nuryani
NIM. 03510001

Telah diperiksa dan disetujui untuk diuji

Tanggal : Maret 2008

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Sri Harini, M. Si NIP. 150 318 321	Munirul Abidin, M. Ag NIP. 150 321 634

Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321

HALAMAN PENGESAHAN

PENENTUAN MOMEN KE-3 DAN KE-4 DARI DISTRIBUSI GAMMA, BETA DAN WEIBULL

SKRIPSI

Oleh:
Evita Nuryani
NIM. 05310001

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memenuhi Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal : 16 April 2008

Susunan Dewan Penguji :			Tanda Tangan
1.	Penguji Utama	Drs. H. Turmudi, M.Si NIP. 150 290 630	1.
2.	Ketua Penguji	Abdussakir, M.Pd NIP. 150 327 247	2.
3.	Seketaris	Sri Harini, M.Si NIP. 150 381 321	3.
4.	Anggota	Munirul Abidin, M.Ag NIP. 150 321 634	4.

Mengetahui dan Mengesahkan
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi

<u>Sri Harini, M.Si</u>
NIP. 150 381 321

MOTTO

وَمَا كَانَ لِنَفۡسٍ أَن تُؤۡمِنَ إِلَّا بِإِذۡنِ ٱللَّهِۚ وَيَجۡعَلُ

ٱلرِّجۡسَ عَلَى ٱلَّذِينَ لَا يَعۡقِلُونَ ١٠٠

Dan tidak ada seorangpun akan beriman kecuali dengan izin Allah;
dan Allah menimpakan kemurkaan kepada orang-orang yang tidak
mempergunakan akalnya.

(Qs. Yunus : 100)

HALAMAN PERSEMBAHAN

Kupersembahkan karya yang sederhana ini untuk ….

Ayahanda M. Rifai dan Ibunda Lies Fadyani,
yang telah bersusah payah dalam membesarkan,
mendidik, dan memberikan segenap cinta kasih kepadaku.
Semoga Allah Swt memberikan kebahagiaan di dunia dan akhirat.

Kedua adikku, semoga jadi anak yang pinter, sholih & sholihah

Seluruh Guru dan Dosenku yang dengan ikhlas
telah memberikan ilmu kepadaku. Terima kasih banyak atas
ilmu yang telah Engkau berikan, semoga menjadi ilmu yang
manfa'at dan barokah.

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Alhamdulillah, Segala puji syukur ke hadirat Allah Swt, karena hanya atas segala rahmat dan hidayah-Nya penelitian ini dapat diselesaikan, hingga tersusun sebuah skripsi "*Penentuan Momen Ke-3 dan Ke-4 Dari Distribusi Gamma, Beta Dan Weibull*". Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat dalam memperoleh gelar Sarjana Sains (S. Si) pada Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Untuk itu, iringan do'a dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, utamanya kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D. Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.
3. Sri Harini, M. Si, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang sekaligus Dosen Pembimbing I skripsi.
4. Munirul Abidin, M.Ag selaku Dosen Pembimbing II terima kasih atas segala masukan dan kesabaran dalam membimbing sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
5. Seluruh Dosen Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang yang telah memberikan ilmu pengetahuan kepada penulis.

6. Seluruh karyawan dan staf Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
7. Bapak dan Ibu tercinta M. Rifa'i dan Lies Fadyani yang dengan sepenuh hati memberikan dukungan moril maupun spirituil serta ketulusan do'anya sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan.
8. Seluruh teman-teman Matematika angkatan 2003
9. Seluruh teman-teman kos Sukada, terima kasih kalian sudah menjadi teman dalam suka dan duka
10. Dan semua pihak yang telah membantu namun tidak bisa disebutkan satu persatu.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa masih banyak terdapat kekurangan dalam penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, dengan kerendahan hati, penulis mengharapkan saran dan kritik dari semua pihak yang bermanfaat pada penulisan selanjutnya. Akhir kata, semoga skripsi ini bermanfaat bagi semua pihak pada umumnya dan bagi penulis sendiri pada khususnya.

Malang, Desember 2007

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL .... **i**
HALAMAN PERSETUJUAN .... **ii**
HALAMAN PENGESAHAN .... **iii**
HALAMAN MOTTO .... **iv**
HALAMAN PERSEMBAHAN .... **v**
KATA PENGANTAR .... **vi**
DAFTAR ISI .... **viii**
DAFTAR GAMBAR .... **x**
ABSTRAK .... **xi**

BAB I PENDAHULUAN
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 4
1.3 Tujuan Penelitian 4
1.4 Batasan Masalah 4
1.5 Manfaat Kajian 4
1.6 Metode Penelitian 5
1.7 Sistematika Pembahasan 6

BAB II KAJIAN TEORI
2.1 Peubah Acak & Distribusinya 7
2.1.1 Peubah Acak 7
2.1.2 Distribusi Peubah Acak 8
2.1.2.1 Ditribusi Peubah Acak Diskret 8
2.1.2.2 Distribusi Peubah Acak Kontinu 9
2.2 Beberapa Distribusi Kontinu Khusus 11
2.2.1 Distribusi Gamma 11
2.2.2 Distribusi Beta 14
2.2.3 Distribusi Weibull 17
2.3 Ekspektasi dan Variansi 19
2.3.1 Nilai Harapan (Ekspektasi) 19
2.3.2 Variansi 23

2.4 Momen Dan Fungsi Pembangkit Momen 25
2.4.1 Momen 25
2.4.2 Fungsi Pembangkit Momen.. 29
2.5 Skewness Dan Kurtosis Sebagai Fungsi Dari Momen...................................... 34
2.5.1 Skewness 34
2.5.2 Kurtosis 35
2.6 Kajian Keagamaan 36
2.6.1 Allah Sebagai Zat Yang Ahli Matematis 36
2.6.2 Segala Sesuatu Yang Diciptakan Allah Ada Ukurannya 40
2.6.3 Perintah Untuk Melaksanakan Segala Sesuatu Secara Tepat Berdasarkan Perhitungan 42

BAB III PEMBAHASAN
3.1 Penentuan Momen ke-3 dan ke-4 dari Distribusi Gamma, Beta dan Weibull 46
3.1.1 Distribusi Gamma 46
3.1.2 Distribusi Beta 52
3.1.3 Distribusi Weibull 61
3.2 Tinjauan Agama Terhadap Hasil Pembahasan... 72

BAB IV PENUTUP
4.1 Kesimpulan.. 77
4.2 Saran... 78

DAFTAR PUSTAKA
LAMPIRAN

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1. Grafik Luas Daerah Selang 10

Gambar 2. Grafik Distribusi Gamma 13

Gambar 2. Grafik Distribusi Beta 17

Gambar 3. Grafik Distribusi Weibull 18

Gambar 4. Kemencengan Suatu Sebaran 35

Gambar 5. Jenis Kurva Kurtosis 36

ABSTRAK

Nuryani, Evita. 2007. *Penentuan Momen ke-3 dan ke-4 dari Distribusi Gamma, Beta dan Weibull.* Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Malang. Pembimbing: 1). Sri Harini, M. Si. 2). Munirul Abidin, M. Ag.

Kata kunci: Peubah acak, momen, fungsi pembangkit momen, skewness, kurtosis

Dalam statistika, rata-rata dan varian sebenarnya merupakan hal istimewa dari kelompok ukuran lain yang disebut Momen, dari momen ini pula beberapa ukuran lain dapat diturunkan. Pada sebagian besar buku-buku yang membahas mengenai momen ini baik dalam literatur berbahasa Indonesia maupun literatur berbahasa Inggris, pembahasan momen masih dalam ruang lingkup terbatas, yakni pembahasannya hanya terbatas pada momen pertama dan kedua secara umum. Namun dalam konteks ini momen dapat dikembangkan sampai pada momen ke-3 dan ke-4, sehingga akan memudahkan dalam menentukan kemencongan dan kesetangkupan serta berat kedua ujung suatu distribusi. Momen dari suatu suatu peubah acak X didefinisikan dalam 2 bagian yaitu, momen tak terpusat dari suatu peubah acak X, dan momen terpusat dari suatu peubah acak X.

Metode yang digunakan dalam penentuan momen ke-3 dan momen ke-4 dari peubah acak X adalah dengan mengetahui momen pertama dan momen kedua terlebuh dahulu yaitu dengan menurunkan secara berulang fungsi pembangkit momen.

Jika momen tak terpusat pertama menyatakan mean dan momen pusat kedua menyatakan varian, maka pada momen ketiga yang dibagi dengan pangkat tiga simpangan baku disebut koefisien skewness (kemencongan kurva), sedangkan momen pusat keempat yang dibagi dengan pangkat empat simpangan baku disebut koefisien kurtosis (pemuncakan kurva).

Pada distribusi gamma, beta, dan Weibull memiliki kurva yang tak beraturan dimana kurva tersebut menggambarkan ketidak normalan suatu distribusi sehingga diperlukan momen ke-3 dan ke-4 untuk menentukan besarnya kemencongan dan pemuncakan kurva.

Koefisien skewness distribusi gamma adalah $\gamma_1 = \dfrac{2}{\sqrt{\alpha}}$, koefisien skewness distribusi beta adalah $\gamma_1 = \dfrac{2(-\alpha+\beta)\sqrt{\alpha+\beta+1}}{(\alpha+\beta+2)\sqrt{\alpha\beta}}$, sedangkan koefisien skewness distribusi Weibull adalah

$$\gamma_1 = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{3}{\beta}+1\right) - 3\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right) + 2\Gamma^3\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right]}{\left(\sqrt{\left[\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right) - \Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)^2\right]}\right)^3}$$

Kurtosis dari distriusi gamma adalah $\gamma_1 = \frac{6}{\alpha} + 3$, kurtosis dari distribusi beta adalah $\gamma_2 = \frac{3\alpha\beta\left(2\alpha^2 + \alpha^2\beta - 2\alpha\beta + \alpha\beta^2 + 2\beta^2\right)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^4}$, dan kurtosis dari distribusi Weibull adalah

$$\gamma_2 = \frac{\alpha^{-\frac{4}{\beta}}\left[\Gamma\left(\frac{4}{\beta}+1\right) - 4\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\Gamma\left(\frac{3}{\beta}+1\right) + 6\,\Gamma^2\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right) - 3\Gamma^4\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right]}{\alpha^{-\frac{4}{\beta}}\left[\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right)\Gamma^2\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right]^2}$$

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika adalah suatu ilmu pengetahuan yang menyediakan suatu kerangka sistematis yang dapat dipelajari. Dalam matematika murni, definisi, aksioma serta teorema-teorema dinyatakan secara tepat dengan menggunakan lambang-lambang. Lambang yang digunakan menyatakan konsep abstrak yang nilainya dinyatakan oleh definisinya.

Sejak awal kehidupan manusia, matematika merupakan alat Bantu untuk mengatasi sebagian permasalahan yang ada disekitar lingkungan hidupnya, baik yang berkaitan dengan perhitungan matematis maupun masalah terapan. Oleh karena itu matematika digunakan untuk membantu merumuskan peubah-peubah yang penad, menyatakan anggapan-anggapan yang diperlukan secara tepat, membangun analisis yang logis, serta mempertimbangkan analisis verbal dari berbagai peubah yang diperbandingkan. Sebagai sebuah ilmu yang senantiasa berkembang, statistika tak luput dari hasrat untuk menerapkan matematika di dalam bahasan-bahasannya. Berbagai konsep matematika kini menjadi alat analisis yang penting dalam ilmu statistik. Ilmu statistik moderen memang cenderung menjadi semakin sistematis.

Menurut Abdusysyakir (2007) alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta seta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi. Sungguh, tidak salah kiranya jika menyatakan bahwa Allah Maha Matematis. Firman Allah dalam al-Quran surat Al-Qomar ayat 49.

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya : *"Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran."*

Semua yang ada di alam ini, ada ukurannya, ada hitungannya, ada rumusnya atau ada persamaannya. Ahli matematika atau ahli fisika tidak membuat rumus sedikitpun, tetapi mereka hanya menemukan rumus atau persamaan tersebut. Apabila dalam kehidupan terdapat suatu permasalahan manusia harus berusaha untuk menemukan selesaiannya dan solusinya.

Mempelajari matematika sesuai dengan paradigma *ulul albab*, dimana kemampuan intelektual semata tidak cukup untuk belajar matematika, tetapi perlu didukung secara bersamaan dengan kemampuan emosional dan spiritual. Pola pikir deduktif dan logis dalam matematika sangat bergantung pada kemampuan intuitif dan imajinatif. Hal ini dilakukan dengan paradigma *ulul albab*, yang mengembangkan pendekatan rasionalis, empiris, dan logis.

Pada hakekatnya pokok pembahasan statistika mencakup kegiatan-kegiatan, gagasan-gagasan serta hasil yang sangat beraneka ragam. Mereka yang mendalami ilmu dibidang biasanya memaklumi kenyataan bahwa disiplin ini tebagi dua golongan besar yaitu statistik terapan dan metode statistik. Statistik terapan merupakan isi prakti dari statistik yang dibedakan menjadi dua, yaitu statistik deduktif (deskriptif) dan statistik induktif (inferensia). Sedangkan metode statistik merupakan teori murni atau teori dasar yang berurusan dengan penelitian-

penelitian tentang basis matematika yang digunakan dalam metode statistik. Pembuktian rumus-rumus statistik yang digunakan, dan pengujian terhadap kesyahihan atau kebenaran konsep statistika secara umum (Ngapuli, 1992 : 1).

Dalam statistika, rata-rata dan varian sebenarnya merupakan hal istimewa dari kelompok ukuran lain yang disebut ”Momen”, dari momen ini pula beberapa ukuran lain dapat diturunkan. Pada sebagian besar buku-buku yang membahas mengenai momen ini baik dalam literatur berbahasa Indonesia maupun literatur berbahasa Inggris, pembahasan momen masih dalam ruang lingkup terbatas, yakni pembahasannya hanya terbatas pada momen pertama dan kedua secara umum.

Pada distribusi probabilitas normal yang paling penting di dalam keseluruhan statistik adalah distribusi normal, dimana memiliki grafik yang disebut kurva normal, yang berbentuk lonceng, yang menggambarkan kurang lebih beberapa fenomena yang terjadi dialam, industri, dan digunakan pula dalam penelitian (Walpole & dkk, 2003 : 217). Sedangkan pada distribusi gamma, beta, dan weibull memiliki grafik yang disebut kurva tak beraturan yang mana kurva tersebut menggambarkan ketidaknormalan layaknya kurva normal. Sehingga dengan menentukan momen pertama dan kedua saja tidaklah cukup dan diperlukan momen ke-3 dan momen ke-4 untuk menentukan kemencongan dan keruncingan dari distribusi tersebut.

Dalam statistika matematika sering dijumpai beberapa bentuk fungsi, salah satunya yaitu yang sering disebut sebagai fungsi pembangkit momen. Menurut Walpole (1995) kegunaan yang jelas dari fungsi pembangkit momen ialah untuk menentukan momen distribusi. Bila fungsi pembangkit momen suatu peubah acak memang ada, fungsi itu dapat dipakai untuk membangkitkan atau menemukan seluruh momen suatu peubah acak tersebut. Jika diketahui fungsi pembangkit momen, maka dapat ditentukan momen-momennya, yaitu dengan menurunkan fungsi pembangkit momen hingga n kali. Dapat diketahui momen pertamanya adalah mean dan momen kedua adalah variansinya.

Dari latar belakang diatas, penulis akan mengkaji tentang ”Penentuan Momen Ke-3 Dan Ke-4 Dari Distribusi Gamma, Beta, Dan Weibull”.

1.1 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, maka permasalahannya dapat dirumuskan sebagai berikut, yaitu bagaimana cara penentuan momen ke-3 dan momen ke-4 dari distribusi gamma, beta serta Weibull.

1.2 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah, maka tujuan penulisan skripsi ini yaitu untuk mengetahui cara penentuan momen ke-3 dan ke-4 dari distribusi gamma, beta dan Weibull.

1.3 Batasan Masalah

Mengingat sangat luas dan kompleksnya teori yang membahas tentang hal-hal yang berkaitan dengan momen, maka dalam penulisan ini dibatasi dengan menggunakan momen tak terpusat dan momen pusat.

1.4 Manfaat Kajian

Dengan mengusai materi pembahasan fungsi pembangkit momen, maka akan diketahui fungsi distribusinya, sehingga memudahkan penentuan momen dan fungsi pembangkit momen dari suatu distribusi.

1.5 Metode Penelitian

Dalam penulisan skripsi ini penulis menggunakan kajian literatur atau penelitian pustaka, yaitu penelitian yang bertujuan untuk mengumpulkan data dan informasi dengan bantuan bermacam-macam material yang terdapat diruang perpustakaan, seperti: buku-buku, dokumentasi, catatan, jurnal dan internet. Langkah-langkah penelitian yang penulis lakukan adalah:

1. Dalam studi literatur, penulis mengumpulkan beberapa penunjang, dengan cara membaca dan memahami materi yang berkaitan dengan momen dan fungsi pembangkit momen variabel acak kontinu serta distribusi-distribusi probabilitas kontinu khusus seperti distribusi gamma, beta dan weibull. Literatur tersebut berupa buku-buku statistik matematika, teori peluang, analisis matematika dan yang lainnya yang dapat membantu penulis dalam mengumpulkan data dan informasi.
2. Setelah memperoleh bahan pustaka, maka langkah berikutnya adalah memilih fungsi pembangkit momen

$$M_x(t) = E\left(e^{tx}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\ f(x)\ dx$$

3. Langkah selanjutnya mencari nilai dari momen ke-3 dan ke-4 dari distribusi gamma, beta dan weibull dengan cara menurunkan rumus dari fungsi pembangkit momen tersebut.

Bahan-bahan pustaka tersebut harus dibahas secara kritis dan mendalam sehingga mendukung gagasan atau ide untuk menghasilkan kesimpulan dan saran.

1.6 Sistematika Pembahasan

Agar penulisan skripsi ini lebih terarah, mudah ditelaah dan dipahami, maka digunakan sistematika pembahasan yeng terdiri dari empat bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab dengan rumusan sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Pendahuluan meliputi: latar belakang permasalahan, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat kajian, metode penelitian, dan sistematika pembahasan.

BAB II KAJIAN TEORI

Bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang peubah acak & distribusinya, beberapa distribusi kontinu khusus, ekspektasi dan variansi, momen dan fungsi pembangkit momen, skweness & kurtosis.

BAB III PEMBAHASAN

Pembahasan berisi tentang bagaimana menemukan nilai momen ke-3 dan ke-4 dari distribusi gamma, beta dan Weibull, penentuan momen ke-3 dan ke-4 dari distribusi gamma, beta dan Weibull.

BAB IV PENUTUP

Pada bab ini akan dibahas tentang kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Peubah Acak & Distribusinya

2.1.1 Peubah Acak

Definisi 2.1:

Peubah acak adalah suatu fungsi yang menghubungkan sebuah bilangan real dengan setiap unsur di dalam ruang contoh.

(Walpole & Dkk, 2003 : 74)

Peubah acak dilambangkan dengan huruf kapital X dan huruf kecilnya dalam hal ini x, untuk menyatakan salah satu diantara nilai-nilainya. Dengan demikian suatu bilangan X merupakan ukuran dari karakteristik yang diletakkan pada setiap kejadian dasar dari ruang contohnya. Peubah acak diklasifikasikan menjadi 2 macam, yaitu peubah acak diskret dan peubah acak kontinu.

(Wibisono, 2005 : 222)

Definisi 2.2 : X disebut peubah acak diskret bila X peubah acak yang hanya mendapat nilai berhingga atau banyaknya terbilang.

(Dudewicz & Mishra, 1995: 83)

Contoh 2.1: Sebuah kantong berisi 10 kelereng yang terdiri dari 4 kelereng merah (M) dan 6 kelereng hitam (H). Dalam kantong diambil 2 kelereng berturut-turut, hasil yang mungkin untuk x sebagai peubah acak X yang menyatakan banyaknya kereng merah yang diambil. Jadi ruang contohnya { HH, MH,, HM, MM } dan peubah acak X = { 0, 1, 1, 2 }

Definisi 2.3 : X disebut sebagai peubah kontinu jika elemennya dapat dinyatakan dalam selang interval, sehingga nilainya dapat berupa bilangan bulat maupun pecahan.

(Supramono, 1993 : 34)

Contoh 2.2 : Pengamatan terhadap jumlah kendaraan yang melintas di jalan protokoler sudirman. Bila *X* menyatakan peubah acak jumlah kendaraan yang melintas, maka *X* = { 0, 1, 2, 3, ... }

2.1.2 Distribusi Peubah Acak

2.1.2.1 Distribusi Peubah Acak Diskret

Seringkali untuk memudahkan perhitungan semua probabilitas peubah acak dinyatakan dalam suatu fungsi nilai-nilai *X* seperti *f(x)* yaitu $f(x) = P(X = x)$. Pada peubah acak diskret, setiap nilainya dapat dikaitkan dengan probabilitas. Himpunan pasangan yang berurutan $[x, f(x)]$ disebut distribusi probabilitas peubah acak *X*. Sebuah distribusi yang mencantumkan semua kemungkinan nilai peubah acak diskret berikut probabilitasnya disebut distribusi probabilitas diskret (Wibisono, 2005 : 224).

Peubah acak diskrit dapat dinyatakan sebagai:

$$F(x) = \sum P_X(x) \tag{2.1}$$

dimana $P_X(x)$ adalah suatu fungsi probabilitas jika dan hanya jika:

1. $P_X(x) \geq 0$ untuk semua x
2. $\sum_{i=1}^{\infty} P_X(x_i) = 1$

Contoh 2.3 : Tentukan distribusi bagi keluarga Markus yang merencanakan tiga anak dengan *X* menyatakan peubah anak laki-laki.

Penyelesaian:

Semua kemungkinan nilai *x* berikut probabilitasnya dapat dibuat tabel distribusi sebagi berikut :

x	0	1	2	3	
$P(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	jumlah $=1$

dalam keluarga Markus yang merencanakan 3 anak., peubah acak *X* yaitu banyaknya anak laki-laki mengaitkan probabilitas sebesar $\frac{1}{8}$ pada nilai peubah acak tidak ada anak laki-laki, probabilitas sebesar $\frac{3}{8}$ pada nilai peubah acak 1 anak laki-laki, sebesar $\frac{3}{8}$ pada nilai peubah acak 2 anak laki-laki dan sebesar $\frac{1}{8}$ pada nilai peubah acak semua anaknya laki-laki.

2.1.2.2 Distribusi Peubah Acak Kontinu

Distribusi probabilitas bagi peubah acak kontinu tidak dapat disajikan dalam bentuk tabel, akan tetapi distribusinya dapat dinyatakan dalam persamaan yang merupakan fungsi nilai-nilai peubah acak kontinu dan dapat digambarkan dalam bentuk kurva (Wibisono, 2005 : 226).

Peubah acak kontinu dapat dinyatakan sebagai:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx \tag{2.2}$$

dimana $f_X(x)$ adalah fungsi probabilitas jika dan hanya jika:

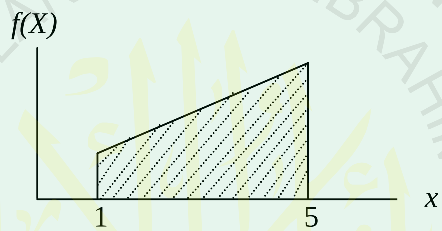
1. $f_X(x) \geq 0$ untuk semua x

2 $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$

(Dudewicz & Misra, 1995 : 149)

Contoh 2.4 **:** Sebuah peubah acak kontinu X yang mengambil nilai antara $x=1$ dan $x=5$ mempunyai fungsi probabilitas $f(x)=\frac{x+2}{20}$. (a) Buktikan bahwa $P(1< X <5)=1$. (b). Hitung $P(X<3)$ dan (c). $P(2< X <4{,}5)$.

Penyelesaian :



Gambar 1. Grafik Luas daerah selang $x=1$ dan $x=5$

a) bentuk kurva adalah trapezium dengan luas sama dengan alas dikalikan jumlah kedua sisi sejajar dibagi 2. Sehingga $L=(5-1)\frac{f(1)+f(5)}{2}$ karena

$$f(1)=\frac{3}{20} \text{ dan } f(2)=\frac{7}{20} \text{ maka } P(1< X <5)=4\left(\frac{3/20 + 7/20}{2}\right)=1$$

b) Pada $f(3)=\frac{5}{20}$, tetapi $f(1)=\frac{3}{20}$ sehingga

$$P(X<3)=(3-1)\left(\frac{3/20+5/20}{2}\right) = 0{,}40$$

c) Pada $f(2)=\frac{4}{20}$ dan $f(4{,}5)=\frac{6{,}5}{20}$ sehingga

$$P(2< X <4{,}5)=(4{,}5-2)\left(\frac{4/20+6{,}5/20}{2}\right)=0{,}66$$

2.2 Beberapa Distribusi Probabilitas Kontinu Khusus

2.2.1 Distribusi Gamma

Meskipun distribusi normal dapat digunakan untuk memecahkan berbagai permasalahan teknik sains, masih banyak sekali keadaan yang memerlukan jenis-jenis kepekatan berbeda. Distribusi gamma memainkan peranan yang sangat penting dalam tori antrian dan masalah keandalan (reliabilitas).

Definisi 2.4 :

Jika α suatu bilangan real sebarang dengan $\alpha > 0$, fungsi gamma dari α adalah:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy \qquad (2.3)$$

Definisi 2.5 :

Jika *X* suatu peubah acak kontinu, maka fungsi prbabilitas dari distribusi gamma diberikan oleh

$$f(x)\begin{cases} \left(\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}\right) x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases} \qquad (2.4)$$

(Rosenkrantz, 1997 : 227)

Teorema 2.1 :

Jika *f(X)* adalah fungsi probabilitas dari distribusi gamma, maka

$$M(t) = \frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha}}$$

(Freund & Walpole, 1987 : 214)

Bukti :

Karena distribusi gamma merupakan distribusi dari peubah acak kontinu, maka fungsi pembangkit momen adalah

$$M_x(t) = E\left(e^{tx}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} . f(x)\, dx$$

$$M_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} . \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\beta^{\alpha}}\, x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} . \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\beta^{\alpha}}\, x^{\alpha-1}\, e^{-\frac{x}{\beta} + tx}\, dx$$

Misal : $y = \frac{x\,(1-\beta t)}{\beta}$, dan $x = \frac{\beta y}{(1-\beta t)}$ maka $dx = \frac{\beta}{1-\beta t}\, dy$

dari persamaan di atas dapat diperoleh fungsi pembangkit momen :

$$M_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\beta^{\alpha}} \left(\frac{\beta y}{(1-\beta t)}\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{\frac{\beta y}{(1-\beta t)}}{\beta} + \frac{t \beta y}{(1-\beta t)}} \left(\frac{\beta}{1-\beta t}\right) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\beta^{\alpha}} \left(\frac{\beta}{(1-\beta t)}\right)^{\alpha-1} y^{\alpha-1}\, e^{-y} \left(\frac{\beta}{1-\beta t}\right) dy$$

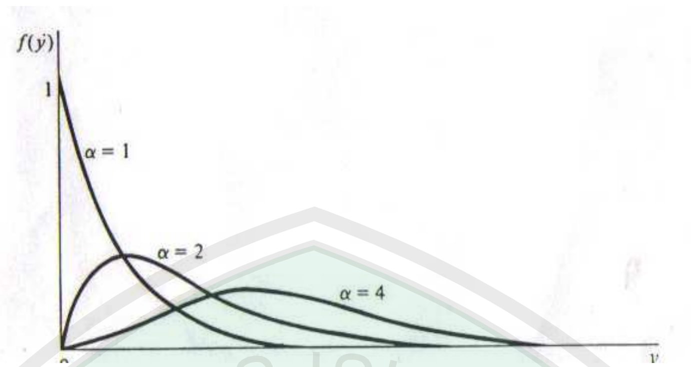
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\beta^{\alpha}} \left(\frac{\beta}{(1-\beta t)}\right)^{\alpha} y^{\alpha-1}\, e^{-y}\, dy$$

$$= \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha}}\, y^{\alpha-1}\, e^{-y}\, dy$$

$$= \frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha}}$$

Jadi fungsi pembangkit momen distribusi gamma adalah

$$M(t) = \frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha}} \qquad (2.5)$$



Gambar 2. Grafik Distribusi Gamma

Contoh 2.5: Di dalam kajian biomedis dengan tikus suatu penelitian dosis-tanggapan digunakan bertahan menentukan pengaruh dosis bahan racun pada waktu hidup mereka. Bahan racun tersebut adalah zat yang secara teratur dibuang ke atmosfer dari bahan bakar jet. Untuk suatu dosis bahan racun tertentu kajian tersebut menentukan bahwa waktu bertahannya dalam minggu, mengikui sebaran Gamma dengan $\alpha = 5$ dan $\beta = 10$. Berapakah probabilitas seekor tikus hidup lebih lama dari 60 minggu?

Penyelesaian: Ambil peubah acak *X* sebagai waktu bertahan (waktu kematian). Probabilitas yang dibutuhkan adalah

$$P(X \le x) = \int_0^x \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\,\beta^{\alpha}}\ dx$$

$$P(X \le 60) = \int_0^{60} \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\Gamma(5)\,\beta^{5}}\ dx$$

Integral di atas dapat dipecahkan melalui penggunaan fungsi gamma tak lengkap yang menjadi fungsi distribusi kumulatif bagi distribusi gamma. Fungsi ini ditulis sebagai :

$$F(x;\alpha) = \int_0^x \frac{y^{\alpha-1}e^{-y}}{\Gamma(\alpha)}\ dy$$

jika kita ambil $y = \frac{x}{\beta}$ dan $x = \beta\, y$, kita dapatkan

$$P(X \le 60) = \int_0^6 \frac{y^{4-1}e^{-y}}{\Gamma(5)}\ dy$$

yang ditunjukkan sebagai $F(6\,;5)$ tentu saja untuk msalah ini, probabilitas tikus bertahan tidak lebih lama dari pada 60 hari diberikan oleh

$$P(X \le 60) = F(6\,;5) = 0{,}715$$

2.2.2 Distribusi Beta

Definisi 2.6:

Fungsi Beta $B(\alpha,\beta)$ didefinisikan dengan integral

$$B(\alpha,\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{\alpha-1}(1-X)^{\beta-1}\,dx \qquad (2.6)$$

(Rosenkrantz, 1997:166)

Definisi 2.7 :

Jika X suatu peubah acak kontinu, maka fungsi probabilitas dari distribusi beta diberikan oleh:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & \text{for} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{selainnya} \end{cases} \qquad (2.7)$$

Dimana $\alpha > 0$ dan $\beta > 0$

(Freund & Walpole, 1987 : 215)

Teorema 2.2 :

$$\beta(m,n) = \beta(n,m) \tag{2.8}$$

Bukti:

(Dudewicz & Mishra. 1995 : 157)

Dengan menggunakan transformasi $x = 1 - y$, didapat

$$\begin{aligned}
\beta(m,n) &= \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx \\
&= \int_0^1 (1-y)^{m-1}\,y^{n-1}\,dy \\
&= \int_0^1 y^{n-1}\,(1-y)^{m-1}\,dy \\
&= \beta(n,m)
\end{aligned}$$

Teorema 2.3 : $\beta(m,n) = \dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

Bukti :

Dengan mengambil $z = x^2$, didapat

$$\Gamma(m) = \int_0^\infty z^{m-1}e^{z}\,dx = 2\int_0^\infty x^{2m-1}e^{-x^2}$$

demikian pula, $\Gamma(n) = 2\int_0^\infty y^{2n-1}e^{-y^2}$, kemudian

$$\begin{aligned}
\Gamma(m)\Gamma(n) &= 2\left[\left(\int_0^\infty x^{2m-1}e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_0^\infty y^{2n-1}e^{-y^2}\,dy\right)\right] \\
&= 4\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2m-1}y^{2n-1}e^{-\left(x^2+y^2\right)}\,dx\,dy
\end{aligned}$$

transformasikan ke polar koordinat, $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$

$$\Gamma(m)\Gamma(n)=4\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^{\infty}\rho^{2(m+n)-1}e^{-\rho^2}\cos^{2m-1}\phi\sin^{2n-1}\phi\;\;d\rho\;d\phi$$

$$=4\left(\int_0^{\infty}\rho^{2(m+n)-1}e^{-\rho^2}\;d\rho\right)\left(\int_0^{\pi/2}\cos^{2m-1}\phi\sin^{2n-1}\phi\;\;d\phi\right)$$

$$=2\,\Gamma(m+n)\int_0^{\pi/2}\cos^{2m-1}\phi\sin^{2n-1}\phi\;\;d\phi$$

$$=\Gamma(m+n)\,\beta(m,n)$$

dengan demikian $\beta(m,n)=\dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

Teorema 2.4 : $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$

Bukti : Untuk: $\alpha=\alpha+1 \;\;\rightarrow\;\; \Gamma(\alpha+1)=\int_0^{\infty} x^{\alpha+1-1}e^{-x}\;dx$

$$=\int_0^{\infty} x^{\alpha}\;e^{-x}\quad dx$$

misalkan $u=x^{\alpha} \;\;\rightarrow\;\; du=\alpha\;x^{\alpha-1}\;dx$

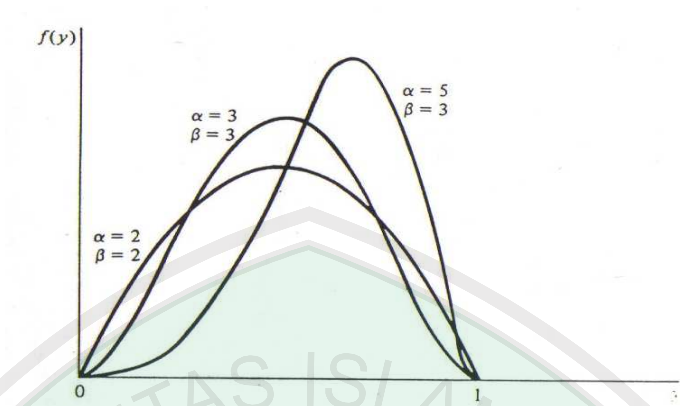
$v=-e^{-x} \;\rightarrow\; dv=e^{-x}\;dx$

sehingga $\Gamma(r+1)\;=\int_0^{\infty}u\;dv\;=\left[uv\right]_0^{\infty}-\int_0^{\infty}v\;du$

$$=\left[uv\right]_0^{\infty}+\int_0^{\infty}e^{-x}\;\alpha\,x^{\alpha-1}\;dx$$

$$=0+\alpha\int_0^{\infty}e^{-x}x^{\alpha-1}\;dx$$

$$=\alpha\,\Gamma(\alpha)$$



Gambar 3. Grafik Distribusi Beta

2.2.3 Distribusi Weibull

Teknologi modern telah memungkinkan orang merancang banyak sistem yang rumit yang penggunaannya, atau barangkali keamanannya, bergantung pada keandalan berbagai komponen dalam sistem tersebut. Sebagai contoh, suatu sekring mungkin putus, tiang baja mungkin melengkung, atau alat pengindera panas tak bekerja. Komponen yang sama dalam lingkungan yang sama akan rusak dalam waktu yang berlainan yang tak dapat diramalkan.

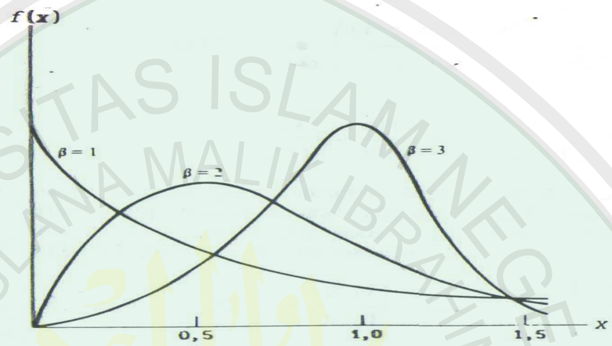
Definisi 2.8:

Peubah acak kontinu X berdistribusi Weibull, dengan parameter α dan β, jika fungsi probabilitas berbentuk

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^{\beta}} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad \text{untuk } x \text{ lainnya} \end{cases} \tag{2.9}$$

dengan $\alpha > 0$ dan $\beta > 0$

Grafik distribusi weibull untuk $\alpha = 1$ dan berbagai parameter β digambarkan pada Gambar 4. Dapat dilihat bahwa kurva tersebut berubah bentuknya untuk nilai parameter yang berbeda terutama parameter β. jika $\beta = 1$, distribui weibull berubah menjadi distribuai Eksponensial. untuk nilai $\beta > 1$, kurva tersebut menyerupai kurva normal, tetapi menampilkan beberapa kemencengan.



Gambar 4. Grafik Distribusi Weibull

Contoh 2.6 :

Perhatikanlah bahwa fungsi laju kegagalan diberikan oleh

$$Z(t) = \alpha \beta t^{\beta - 1}, \quad t > 0$$

jika dan hanya jika distribusi waktu kegagalan merupakan distribusi Weibull

$$f(t) = \alpha \beta t^{\beta - 1} e^{-\alpha x^{\beta}} \;, t > 0$$

Penyelesaian :

Asumsikan bahwa $Z(t) = \alpha \beta t^{\beta - 1}, \quad t > 0$. Kemudian bisa ditulis

$$f(t) = Z(t)\, R(t)$$

dengan $\quad R(t) = c\, e^{-\int Z(t)\, dt} = c\, e^{-\int \alpha \beta t^{\beta - 1}\, dt} = c\, e^{-x\, t^{\beta}}$

Dari keadaan bahwa $R(0) = 1$ kita dapatkan bahwa $c = 1$. Sehingga

$$R(t) = e^{-\alpha t^{\beta}}$$

dan $$f(t) = \alpha\,\beta\,t^{\beta-1}e^{-\alpha\,x^{\beta}} \quad , t > 0$$

sekarang, asumsikan bahwa

$$f(t) = \alpha\,\beta\,t^{\beta-1}e^{-\alpha\,x^{\beta}} \quad , t > 0$$

maka $Z(t)$ ditentukan dengan menuliskan $Z(t) = \dfrac{f(t)}{R(t)}$

dengan

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - \int_0^t \alpha\beta x^{\beta-1}\, e^{-\alpha\,x^{\beta}}\, dx = 1 + \int_0^t de^{-\alpha\,x^{\beta}} \; = e^{-\alpha\,x^{\beta}}$$

maka

$$Z(t) = \frac{\alpha\,\beta\,t^{\beta-1}\; e^{-\alpha\,t^{\beta}}}{e^{-\alpha\,t^{\beta}}} = \alpha\,\beta\,t^{\beta-1}\,,\;\; t > 0$$

2.3 Ekspektasi & Variansi

2.3.1 Nilai Harapan (Ekspektasi)

Definisi 2.9 :

Jika *X* adalah suatu peubah acak diskrit dan *p(x)* adalah fungsi peluang dari *X*, maka nilai harapan (ekspektasi) dari peubah acak *X* adalah:

$$E(X) = \sum_{x \in X} x P_X(x) \tag{2.10}$$

Definisi 2.10 :

Jika *X* adalah suatu peubah acak kontinu dan *f(x)* adalah fungsi padat dari *X* maka nilai harapan (ekspektasi) dari peubah acak *X* adalah:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx \tag{2.11}$$

(Dudewicz & Mishra, 1995: 246)

Contoh 2.7:

Misalkan *X* suatu peubah acak dengan fungsi padat peluang

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{27}{490}\left(3x^2 - 2x\right) & , \quad \text{jika} \quad \dfrac{2}{3} < x < 3 \\ 0 & , \quad \text{untuk yang lainnya} \end{cases}$$

Hitung nilai mean *E(X)*

Penyelesaian: Persamaan (2.11) pada definisi 2.10, maka:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx$$

$$= \int_{2/3}^{3} x \frac{27}{490}\left(3x^2 - 2x\right) dx$$

$$= \frac{27}{490} \int_{2/3}^{3} \left(3x^3 - 2x^2\right) dx$$

$$= \frac{27}{490}\left[\frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3\right]_{2/3}^{3}$$

$$= \frac{283}{120}$$

$$= 2.36$$

Definisi 2.11 :

Misalkan *X* suatu peubah acak dengan fungsi padat peluang *f* dan *g* suatu fungsi dari *X*. Nilai harapan dari *X* adalah:

$$E[g(X)] = \sum g(x) f(x) \qquad \text{untuk } X \text{ diskrit, dan} \qquad (2.12)$$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\, dx \qquad \text{untuk } X \text{ kontinu} \qquad (2.13)$$

(Barnes. 1994 : 100)

Contoh 2.8: Misalkan fungsi padat peluang $f(x)=\frac{1}{6}$, hitung $E[g(X)]$ dengan

$g(X)=2X^2+1$.

Penyelesaian: Menurut persamaan 2.13 pada definisi 2.11, maka

$$E[g(X)]=\sum g(x)f(x)$$

$$=\sum_{x=1}^{6}\left(2X^2+1\right)\cdot\frac{1}{6}$$

$$=\left(2\cdot 1^2+1\right)\cdot\frac{1}{6}\ +\ \ldots\ +\left(2\cdot 6^2+1\right)\cdot\frac{1}{6}\quad =\frac{94}{3}$$

Teorema 2.5 : Bila a dan b konstanta, maka

$$E(aX+b)=aE(X)+b \tag{2.14}$$

(Walpole & Myers, 1995:161)

Bukti: Menurut persamaan (2.11) pada definisi 2.10, maka

$$E(aX+b)=\int_{-\infty}^{\infty}(ax+b)f(x)\,dx$$

$$=a\int_{-\infty}^{\infty}x\ f(x)\,dx\ +\ b\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx$$

$$=a\ E(X)\ +\ b\cdot 1$$

$$=a\ E(X)\ +\ b$$

Akibat (1). Bila $a=0$ maka $E(b)=b$

Akibat (2). Bila $b=0$ maka $E(aX)=aE(X)$

Teorema 2.6 : Sifat-sifat nilai harapan (ekspektasi).

Bila c suatu tetapan dan $g(X), g_1(X),$ dan $g_2(X)$ fungsi yang harapannya ada, maka

1. $E(c) = c;$
2. $E(cg(X)) = cEg(X)$
3. $E(g_1(X) + g_2(X)) = Eg_1(X) + Eg_2(X);$
4. $Eg_1(X) \leq Eg_2(X)$ *jika* $g_1(x) \leq g_2(x)$ untuk semua x;
5. $|Eg(X)| \leq E|g(X)|$

Bukti : (Dimisalkan X adalah peubah acak kontinu)

1. $E(c) = \int_{-\infty}^{\infty} cf_X(x)\,dx$

   $= c\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx$

   $= c(1)$ (Menurut definisi 2.3, $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$)

   $= c$

2. $E(c\,g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} c\,g(x)\,f_X(x)\,dx$

   $= c\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,f_X(x)\,dx$

   $= c\,E\,g(X)$

3. $E(g_1(x) + g_2(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} (g_1(x) + g_2(x))\,f_X(x)\,dx$

   $= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)\,f_X(x)\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} g_2(x)\,f_X(x)\,dx$

   $= E\,g_1(x) + E\,g_2(x)$

sesuai dengan sifat integral $\int (a+b)x\ dx = \int a\,x\,dx + \int b\,x\,dx$ dengan *a* dan *b* adalah suatu konstanta.

4. $E\,g_1(X) \le E\,g_2(X)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)\, f_X(x)\, dx \le \int_{-\infty}^{\infty} g_2(x)\, f_X(x)\, dx \qquad \text{jika } g_1(x) \le g_2(x)$$

(Dudewicz & Mishra, 1995 : 249)

Sifat-sifat ini juga dapat dibuktikan untuk peubah acak diskrit dengan cara yang sama.

2.3.2 Variansi

Definisi 2.12:

Misalkan *X* peubah acak dengan distribusi peluang *f* dan rataan μ. Variansi *X* adalah

$$\sigma^2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = \sum_x (x-\mu)^2\ f(x) \tag{2.15}$$

bila *X* diskrit dan

$$\sigma^2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2\ f(x)\ dx \tag{2.16}$$

bila *X* kontinu

(Walpole Myers, 1995 : 148)

Teorema 2.7:

Bila variansi *X* adalah $\mathrm{Var}(x)$, maka

$$\mathrm{Var}(\mathrm{x}) = E(X^2) - \mu^2 \tag{2.17}$$

Bukti:

$$\operatorname{var}(x) = E\,(X-\mu)^2$$

$$= E\left(X^2 - 2\mu X \;+ \mu\right)$$

$$= E\left(X^2\right) - 2\mu\, E(X) + \mu^2$$

$$= E\left(X^2\right) - 2\mu^2 + \mu^2$$

$$= E\left(X^2\right) - \mu^2$$

Teorema 2.8: $\operatorname{var}(aX+b) = a^2 \operatorname{var}(x)$ (2.18)

Bukti: $\operatorname{var}(aX+b) = E\left[(aX+b) - E\,(aX+b)\right]^2$

$$= E\left[a(X) + b \quad - \quad Ea(X) + b\right]^2$$

$$= E\left[a(X) - Ea(X) + b - b\right]^2$$

$$= E\left[a(X) - Ea(X)\right]^2$$

$$= E\left[\,a\,(X - EX)\right]^2$$

$$= E\left[a^{\,2}(X-\mu)^2\right]$$

$$= a^2 E\,(X-\mu)^2$$

$$= a^2 \operatorname{var}(x)$$

(Dudewich & Mishra,1995 : 255)

Contoh 2.9 :

Misalkan *X* suatu peubah acak dengan fungsi padat peluang *f(x)*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5}\ , & \text{jika} \quad 25 < x < 40 \\ 0 & \text{, untuk yang lainnya} \end{cases}$$

maka varian dari *X* adalah :

dengan menggunak teorema 2.7 maka:

$$\operatorname{Var}(x) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X) = \int_{25}^{40} x \frac{1}{15}\, dx = 32.5$$

$$E(X^2) = \int_{25}^{40} x^2 \frac{1}{15}\, dx = 1075$$

sehingga :

$$\operatorname{Var}(x) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$= 32.5 - 1075^2$$

$$= 18{,}75$$

2.4 Momen & Fungsi Pembangkit Momen

2.4.1 Momen

Momen merupakan nilai harapan suatu gejala acak, misalkan; seorang penjudi yang tertarik mengetahui harapan kemenangannya dalam suatu permainan, seorang pedagang dalam harapan keuntungan dari produksinya, dan lain sebagainya. Momen dibedakan menjadi 2, yaitu momen tak terpusat dan momen terpusat.

Definisi 2.13:

Misalkan X suatu peubah dengan fungsi distribusi $F(x)$. Momen tak terpusat ke-n dari X adalah $\mu_n = E(X^n)$

Definisi 2.14:

Misalkan *X* suatu peubah dengan fungsi distribusi *F(x)*. Momen pusat ke-*n* dari *X* adalah $\mu_n^{'} = E\left(X - \mu\right)^n$. (Dudewich & Mishra, 1995 : 251)

Definisi 2.15 : Momen tak terpusat $\left(\mu_1\right)$ pertama disebut mean suatu distribusi dasi *x*, atau mean dari *x*, dan dinotasikan dengan μ.

Definisi 2.16 : Momen pusat kedua $\left(\mu_2^{'} = E(X - \mu)^2\right)$ disebut varian suatu distribusi dari *x*, atau varian dari *x*, dan dinotasikan dengan $\left(\sigma^2\right)$.

(Freund & Walpole, 1987 : 147))

Dari dua definisi di atas, dapat diuraikan dalam 2 kasus yang berbeda, yaitu untuk peubah acak diskrit dan peubah acak kontinu.

1. Peubah acak diskrit
   a. Momen tak terpusat

Momen tak terpusat ke-1

$$\begin{aligned}\mu_1 &= E\left(X\right)\\ &= \sum_{x \in X} x\ f(x)\end{aligned}$$

Momen tak terpusat ke-2

$$\begin{aligned}\mu_2 &= E\left(X^2\right)\\ &= \sum_{x \in X} x^2\ f(x)\end{aligned}$$

$\vdots$

Momen tak terpusat ke-*n*

$$\begin{aligned}\mu_n &= E\left(X^n\right)\\ &= \sum_{x \in X} x^n\ f(x)\end{aligned}$$

b. Momen pusat

Momen pusat ke-1

$$\mu_1^{'} = E(X-\mu)$$
$$= \sum_{x \in X} (X-\mu)\, f(x)$$

Momen pusat ke-2

$$\mu_2^{'} = E(X-\mu)^2$$
$$= \sum_{x \in X} (X-\mu)^2\; f(x)$$

$\vdots$

Momen pusat ke-*n*

$$\mu_n^{'} = E(X-\mu)^n$$
$$= \sum_{x \in X} (X-\mu)^n\; f(x)$$

2. Peubah acak kontinu

a. Momen tak terpusat

Momen tak terpusat ke-1

$$\mu_1 = E(X)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx$$

Momen tak terpusat ke-2

$$\mu_2 = E(X^2)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx$$

$\vdots$

Momen tak terpusat ke-*n*

$$\mu_n = E\left(X^n\right)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot f(x)\, dx$$

b. Momen pusat

Momen pusat ke-1

$$\mu_1^{'} = E(X - \mu)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} (X - \mu) \cdot f(x)$$

Momen pusat ke-2

$$\mu_2^{'} = E(X - \mu)^2$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} (X - \mu)^2 \cdot f(x)$$

$\vdots$

Momen pusat ke-*n*

$$\mu_n^{'} = E(X - \mu)^n$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} (X - \mu) \cdot f(x)$$

Hubungan berikut terdapat di antara momen-momen (tak terpusat) dan momen-momen (pusat):

$$\mu_2^{'} = E(X - \mu)^2 = \sigma^2 = \mu_2 - \mu_1^2$$

$$\mu_3^{'} = E(X - \mu)^3 = \mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3$$

$$\mu_4^{'} = E(X - \mu)^4 = \mu_4 - 4\mu_1\mu_3 + 6\mu_1^2\mu_2 - 3\mu_1$$

(Larsen & Marx, 1986 : 181)

2.4.2 Fungsi Pembangkit Momen

Menurut Ronald dan Raymond (1995). Kegunaan yang jelas dari fungsi pembangkit momen ini adalah untuk menentukan momen-momen distribusi. Akan tetapi, kegunaan yang terpenting adalah untuk mencari distribusi dari fungsi peubah acak.

(Walpole & Myers. 1995 : 306)

Definisi 2.17 :

Fungsi pembangkit momen dari suatu peubah acak X didefinisikan untuk setiap bilangan riil t sebagai $M_x(t) = E\left(e^{tx}\right)$. (Dudewich & Mishra, 1995 : 300)

Dari definisi 2.17, dapat diuraikan dalam 2 kasus yang berbeda, yaitu untuk peubah acak diskrit dan peubah acak kontinu.

Fungsi pembangkit momen untuk peubah acak diskrit yaitu:

$$M_x(t) = E\left(e^{tx}\right) = \sum_x e^{tx} . f(x) \qquad (2.19)$$

Fungsi pembangkit momen untuk peubah acak kontinu yaitu:

$$M_x(t) = E\left(e^{tx}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} . f(x)\, dx \qquad (2.20)$$

(Spiegel, 1991:80)

Contoh 2.7:

Tentukan fungsi pembangkit momen dengan X adalah peubah acak kontinu dengan fungsi padat peluang

$$f(x) = \begin{cases} e^{x} & \text{jika } x > 0 \\ 0 & \text{untuk yang lainnya} \end{cases}$$

Penyelesaian:

$$M_x(t) = E\left(e^{tx}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} . f(x)\, dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{tx} \cdot e^{-x}\, dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(t-1)x}\, dx$$

$$= \frac{1}{1-t} e^{-(1-t)x} \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{1-t}$$

Teorema 2.9 :

Bila fungsi pembangkit momen $M_X(t)$ dari peubah acak X ada untuk $|t| \leq T$, untuk $T > 0$, maka $E\left(X^n\right)$ ada $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ dan $E\left(X^n\right) = M_X^{(n)}(0)$

$$= \frac{d^n}{dt^n} M_X(t) \Big|_{t=0}$$

(Dudewich & Mishra, 1995 : 300)

Bukti :

Diketahui bahwa $M_x(t) = E\left(e^{tx}\right)$

Dengan menggunakan deret Maclaurin adalah $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \ldots$

Jika y diganti tX maka $e^y = 1 + tX + \frac{(tX)^2}{2!} + \frac{(tX)^3}{3!} + \ldots$

Sehingga diperoleh

$$M_x(t) = E\left(e^{tx}\right)$$

$$= E\left(1 + tX + \frac{(tX)^2}{2!} + \frac{(tX)^3}{3!} + \dots\right)$$

$$= E(1) + E(tX) + E\left(\frac{(tX)^2}{2!}\right) + E\left(\frac{(tX)^3}{3!}\right) + \dots$$

$$= 1 + t(EX) + \frac{(t)^2}{2!}E(X^2) + \frac{(t)^3}{3!}E(X^3) + \dots + \frac{t^n}{n!}E(X^n) + \dots$$

$$M'_X(t) = 0 + (EX) + t\,E(X^2) + \frac{(t)^2}{2!}E(X^3) + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}E(X^n) + \dots$$

$M'_X(0) = E(X)$ Momen ke-1 dari peubah acak X

$M''_X(t) = 0 + E(X^2) + t\,E(X^3)$

$M''_X(0) = E(X^2)$ Momen ke-2 dari peubah acak X

$M^{(3)}_X(t) = E(X)^3$

$M^{(3)}_X(0) = E(X^3)$ Momen ke-3 dari peubah aca

$\vdots$

Sampai turunan ke-*n*

Jadi untuk mendapatkan momen ke-*n* dari suatu peubah acak *X* adalah dengan menurunkan fungsi pembangkit momen sebanyak *n* kali dan memasukkan nilai variabelnya sama dengan nol, sehingga terbukti bahwa $E(X^n) = \frac{d_n}{dt^n} M_X(t)\Big|_{t=0}$

Teorema 2.10 :

Jika $M_X(t)$ adalah fungsi pembangkit momen dari peubah acak *X* dan *a* adalah suatu konstanta, maka fungsi pembangkit momen dari *aX* adalah

$$M_{aX}(t) = M_X(at) \qquad (2.21)$$

(Spiegel, 1991 : 80)

Bukti: $M_{aX}(t) = E\left(e^{taX}\right)$

$$= E\left(e^{(ta)X}\right)$$

$$= M_X(ta)$$

$$= M_X(at)$$

Teorema 2.11 :

Jika $M_X(t)$ adalah fungsi pembangkit momen dari peubah acak *X*, *a* dan *b* adalah suatu konstanta, maka fungsi pembangkit momen dari $aX + b$ adalah:

$$M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at) \qquad (22.2)$$

Bukti **:**

$$M_{aX+b}(t) = E\left(e^{(aX+b)t}\right)$$

$$= E\left(e^{atX+bt}\right)$$

$$= E\left(e^{(at)X}\right)\cdot E\left(e^{bt}\right)$$

$$= M_X(at)\cdot e^{bt}$$

$$= e^{bt}\cdot M_X(at)$$

Definisi 2.18 :

Fungsi pembangkit momen gabungan dari $X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots, X_n$ didefinisikan untuk bilangan riil $t_1, t_2, \ldots\ldots\ldots, t_n$ sebagai:

$$M_{X_1,\ldots\ldots X_n}(t_1,\ldots\ \ldots,t_n) = E\left(e^{t_1X_1+\ldots\ldots\ldots+t_nX_n}\right) \qquad (2.23)$$

(Dudewicz & Mishra, 1995 : 305)

Teorema 2.12 :

Misal fungsi pembangkit momen gabungan dari (X_1, X_2) ada, maka X_1 dan X_2 peubah acak bebas jika $M_{X_1,X_2}(t_1,t_2) = M_{X_1}(t_1) \cdot M_{X_2}(t_2)$

Bukti:

$$\begin{aligned} M_{X_1,X_2}(t_1,t_2) &= E\left(e^{t_1X_1+t_2X_2}\right) \\ &= E\left(e^{t_1X_1} \cdot e^{t_2X_2}\right) \\ &= E\left(e^{t_1X_1}\right) \cdot E\left(e^{t_2X_2}\right) \\ &= M_{X_1}(t_1) \cdot M_{X_2}(t_2) \end{aligned}$$

Teorema 2.13:

Misal $X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots, X_n$ peubah acak yang berdistribusi identik dan bebas

Misalkan $Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots\ldots\ldots + a_nX_n$ maka fungsi pembangkit momen dari Y adalah:

$$M_Y(t) = M_{X1}(a_1t) \cdot M_{X2}(a_2t) \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot M_{Xn}(a_nt) \qquad (2.24)$$

(Dudewicz, 1995 : 313)

Bukti : $M_Y(t) = E\left(e^{tY}\right)$

$$\begin{aligned} &= E\left(e^{t(a_1X_1+a_2X_2+\ldots\ldots\ldots+a_nX_n)}\right) \\ &= E\left(e^{(a_1X_1t+a_2X_2t+\ldots\ldots\ldots+a_nX_nt)}\right) \\ &= E\left(e^{a_1X_1t} \cdot e^{a_2X_2t} \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot e^{a_nX_nt}\right) \\ &= E\left(e^{a_1X_1t}\right) \cdot E\left(e^{a_2X_2t}\right) \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot E\left(e^{a_nX_nt}\right) \\ &= E\left(e^{(a_1t)X_1}\right) \cdot E\left(e^{(a_2t)X_2}\right) \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot E\left(e^{(a_nt)X_n}\right) \\ &= M_{X1}(a_1t) \cdot M_{X2}(a_2t) \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot M_{Xn}(a_nt) \end{aligned}$$

2.5 Skewness & Kurtosis Sebagai Fungsi dari Momen

2.5.1 Skewness

Dalam banyak kasus, suatu sebaran frekuensi yang teramati akan memiliki bentuk sebaran yang tidak normal, sehingga sangat berguna apabila memiliki sebuah statistik yang mengukur seberapa jauh penyimpangan bentuk sebaran itu dari bentuk sebaran normal. Skewness digunakan untuk menunjukkan simetris tidaknya bentuk kurva yang dihasilkan dari sebaran suatu gugus data.

Skewness atau kemencengan suatu kurva memiliki arti bahwa salah satu ekor dari kurva lebih menjulur dibandingkan ekor lain. Pada kurva semacam itu, nilai rata-rata dan median tidak akan tepat berada di satu titik yang sama. Dikatakan bahwa distribusi itu menceng ke kanan, atau memiliki kemencengan positif (*positif skewness*), sebaliknya disebut menceng kekiri, atau memiliki kemencengan negatif (*negatif skewness*), bergantung dari apakah ekor kanan atau kiri yang lebih menjulur.

Suatu ukuran kemencengan yang paling banyak digunakan adalah dengan menggunakan momen pusat ketiga dibagi dengan pangkat tiga simpangan baku yang dinyatakan sebagai koefisien skewness (γ_1)

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3^{'}}{\sigma^3} \tag{2.25}$$

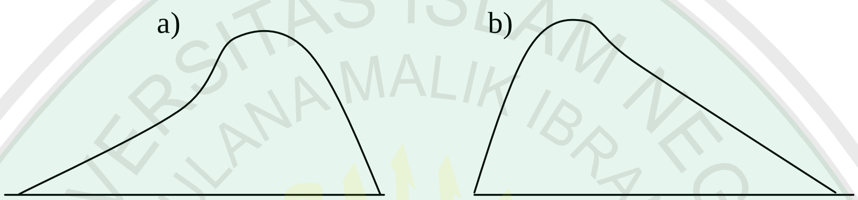
Ukuran diatas sering dinyatakan dalam $b_1 = \gamma_1^2$. Untuk kurva yang simetris sempurna, misalnya kurva normal $b_1 = \gamma_1^2$ adalah nol.

(Harinaldi. 2005 : 43)

Nilai skewness dapat digunakan sebagai indikator kesetangkupan berdasarkan kriteria berikut:

$$\gamma_1 \begin{cases} < 0 : \text{sebaran menjulur negatif atau sebaran menjulur kekiri (a)} \\ = 0 : \text{sebaran normal (simetrik)} \\ > 0 : \text{sebaran menjulur positif atau sebaran menjulur kekanan (b)} \end{cases}$$

Hal tersebur dapat digambarkan dalam kurva berikut:



Gambar 5. Kemencengan suatu sebaran
a) negatip b) Positip

2.5.2 Kurtosis

Menurut Sembiring (1995 : 11), kurtosis menyangkut momen keempat dan mengukur datar atau runcingnya puncak sebaran dibandingkan dengan sebaran normal. Kurtosis disebut juga pemuncakan kurva. Ukuran kurtosis menggunakan momen pusat keempat dibagi dengan pangkat empat simpangan baku yang didefinisikan sebagai koefisien kurtosis.

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4'}{\sigma^4} \tag{2.26}$$

ukuran ini sering dinyatakan sebagai b_2. Untuk suatu distribusi normal, $b_2 = \gamma_2 = 3$. Dengan alasan ini kurtosis kadang-kadang didefinisiskan sebagai $\gamma_2 = b_2 - 3$. Sehingga :

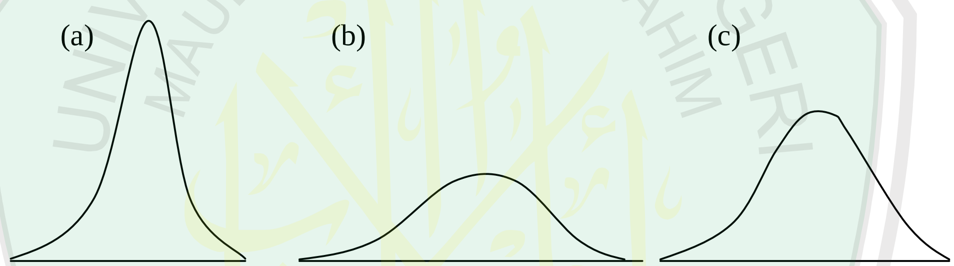
$$\gamma_2 = \frac{\mu_4'}{\sigma^4} - 3 \tag{2.27}$$

Kriteria nilai kurtosis untuk mendeteksi kelandaian kurva adalah sebagai berikut:

a. Bila $\gamma_2 > 0$, maka bentuk sebaran kurva leptokurik yaitu kurva yang mempunyai puncak relatif tinggi / runcing. (a)

b. Bila $\gamma_2 = 0$, maka bentuk sebaran kurva mesokurtik, yaitu mempunyai puncak ceper / rata-rata. (b)

c. Bila $\gamma_2 < 0$, maka bentuk sebaran kurva platikurtik yaitu kurva yang mempunyai puncak tidak terlalu runcing atau ceper. (c)



Gambar 6. Jenis Kurva Kurtosis
a. Leptokurtik b. Mesokurtik c. Platikurtik

2.6 Kajian Keagamaan

2.6.1 Allah Zat Yang Ahli Matematis

Matematika itu pada dasarnya berkaitan dengan pekerjaan menghitung, sehingga tidak salah jika kemudian ada yang menyebut matematika adalah ilmu hitung atau *ilmu al-hisab*. Dalam urusan hitung menghitung ini, Allah adalah rajanya. Allah sangat cepat dalam menghitung dan sangat teliti. Al-Quran menjelaskan bahwa Allah sangat cepat dalam membuat perhitungan dan sangat teliti. Dalam Al-Quran surat An-Nur ayat 39 disebutkan:

وَٱلَّذِينَ كَفَرُوٓاْ أَعۡمَٰلُهُمۡ كَسَرَابِۭ بِقِيعَةٖ يَحۡسَبُهُ ٱلظَّمۡـَٔانُ مَآءً حَتَّىٰٓ إِذَا جَآءَهُۥ لَمۡ يَجِدۡهُ شَيۡـٔٗا وَوَجَدَ ٱللَّهَ عِندَهُۥ فَوَفَّىٰهُ حِسَابَهُۥۗ وَٱللَّهُ سَرِيعُ ٱلۡحِسَابِ ٣٩

Artinya: *"Dan orang-orang kafir amal-amal mereka adalah laksana fatamorgana di tanah yang datar, yang disangka air oleh orang-orang yang dahaga, tetapi bila didatanginya air itu dia tidak mendapatinya sesuatu apapun. dan didapatinya (ketetapan) Allah disisinya, lalu Allah memberikan kepadanya perhitungan amal-amal dengan cukup dan Allah adalah sangat cepat perhitungan-Nya."*

Dalam Al-Quran surat Maryam ayat 94 disebutkan:

لَّقَدۡ أَحۡصَىٰهُمۡ وَعَدَّهُمۡ عَدّٗا ٩٤

Artinya: *"Sesungguhnya Allah Telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti."*

Dalam Al-Quran surat Al-An'am ayat 62 disebutkan:

ثُمَّ رُدُّوٓاْ إِلَى ٱللَّهِ مَوۡلَىٰهُمُ ٱلۡحَقِّۚ أَلَا لَهُ ٱلۡحُكۡمُ وَهُوَ أَسۡرَعُ ٱلۡحَٰسِبِينَ ٦٢

Artinya: *"Kemudian mereka (hamba Allah) dikembalikan kepada Allah, Penguasa mereka yang sebenarnya. Ketahuilah bahwa segala hukum (pada hari itu) kepunyaanNya. dan dialah pembuat perhitungan yang paling cepat."*

Dalam Al-Quran Surat Al-Baqarah ayat 202 disebutkan:

أُوْلَٰٓئِكَ لَهُمۡ نَصِيبٞ مِّمَّا كَسَبُواْۚ وَٱللَّهُ سَرِيعُ ٱلۡحِسَابِ ٢٠٢

Artinya: *"Mereka Itulah orang-orang yang mendapat bahagian daripada yang mereka usahakan; dan Allah sangat cepat perhitungan-Nya."*

Matematika juga berkenaan dengan masalah statistik. Statistik adalah cabang dari ilmu matematika yang berkaitan dengan pengumpulan data, pengolahan data, penyajian data, analisis data, dan penarika kesimpulan data. Dalam masalah mengumpulkan data yaitu mencatat atau membukukan data, Allah juga ahlinya. Dalam Al-Quran surat Al-Kahfi ayat 49 disebutkan:

وَوُضِعَ ٱلۡكِتَٰبُ فَتَرَى ٱلۡمُجۡرِمِينَ مُشۡفِقِينَ مِمَّا فِيهِ وَيَقُولُونَ يَٰوَيۡلَتَنَا مَالِ
هَٰذَا ٱلۡكِتَٰبِ لَا يُغَادِرُ صَغِيرَةٗ وَلَا كَبِيرَةً إِلَّآ أَحۡصَىٰهَاۚ وَوَجَدُواْ مَا
عَمِلُواْ حَاضِرٗاۗ وَلَا يَظۡلِمُ رَبُّكَ أَحَدٗا ٤٩

Artinya: *“Dan diletakkanlah kitab, lalu kamu akan melihat orang-orang bersalah ketakutan terhadap apa yang (tertulis) di dalamnya, dan mereka berkata: "Aduhai celaka kami, Kitab apakah ini yang tidak meninggalkan yang kecil dan tidak (pula) yang besar, melainkan ia mencatat semuanya; dan mereka dapati apa yang Telah mereka kerjakan ada (tertulis). dan Tuhanmu tidak menganiaya seorang juapun".”*

Kalau Allah memang Maha Matematis, apakah Allah juga mengetahui tentang integral? *Subhanallah*, Maha Suci Allah dari sifat-sifat kekurangan dan ketidaktahuan. Ilmu yang dimiliki manusia tidak ada apa-apanya jika dibanding ilmu Allah. Kemampuan manusia tidak ada apa-apa jika dibanding dengan kemampuan Allah. Apa yang diketahui manusia, Allah mengetahuinya, bahkan lebih mengetahuinya. Jangankan yang diketahui manusia, yang tidak diketahui manusiapun Allah mengetahuinya.

Matematika tidak lain adalah ilmu yang menjadi alat kebutuhan manusia. Matematika telah diciptakan dan sengaja disediakan untuk menuntun manusia memahami kebesaran dan kekuasaan Allah. Matematika itu tidak lain adalah *makhluq*, Allah adalah *khaliq*nya. *Khaliq* jelas mengetahui dengan detil mengenai *makhluq*nya. Jangankan integral dan deferensial, bahkan apa yang belum diketahui dan belum dilakukan manusia dalam matematika, Allah sudah mengetahuinya. Ilmu Allah sangat luas tiada batas, Allah mengetahui yang ghaib dan yang nampak (Abdusysyakir, 2007 : 88). Sebagaimana firman Allah dalam Al-quran surat Al-An'am ayat 73.

وَهُوَ ٱلَّذِى خَلَقَ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضَ بِٱلْحَقِّ ۖ وَيَوْمَ يَقُولُ كُن فَيَكُونُ ۚ قَوْلُهُ ٱلْحَقُّ ۚ وَلَهُ ٱلْمُلْكُ يَوْمَ يُنفَخُ فِى ٱلصُّورِ ۚ عَٰلِمُ ٱلْغَيْبِ وَٱلشَّهَٰدَةِ ۚ وَهُوَ ٱلْحَكِيمُ ٱلْخَبِيرُ ﴿٧٣﴾

Artinya: *"Dan dialah yang menciptakan langit dan bumi dengan benar. dan benarlah perkataan-Nya di waktu dia mengatakan: "Jadilah, lalu terjadilah", dan di tangan-Nyalah segala kekuasaan di waktu sangkakala ditiup. dia mengetahui yang ghaib dan yang nampak. dan dialah yang Maha Bijaksana lagi Maha Mengetahui."*

Dalam surat Al-Mukminun ayat 92.

عَٰلِمِ ٱلْغَيْبِ وَٱلشَّهَٰدَةِ فَتَعَٰلَىٰ عَمَّا يُشْرِكُونَ ﴿٩٢﴾

Artinya: "*Yang mengetahui semua yang ghaib dan semua yang nampak, Maka Maha Tinggilah dia dari apa yang mereka persekutukan.*"

Tidak ada sesuatupun yang lepas dari pengetahuan Allah, termasuk hal-hal dalam matematika yang dianggap rumit oleh manusia. Allah berfirman dalam Al-quran surat Al-An'am ayat 59.

۞ وَعِندَهُۥ مَفَاتِحُ ٱلْغَيْبِ لَا يَعْلَمُهَآ إِلَّا هُوَ ۚ وَيَعْلَمُ مَا فِى ٱلْبَرِّ وَٱلْبَحْرِ ۚ وَمَا تَسْقُطُ مِن وَرَقَةٍ إِلَّا يَعْلَمُهَا وَلَا حَبَّةٍ فِى ظُلُمَٰتِ ٱلْأَرْضِ وَلَا رَطْبٍ وَلَا يَابِسٍ إِلَّا فِى كِتَٰبٍ مُّبِينٍ ﴿٥٩﴾

Artinya: "*Dan pada sisi Allah-lah kunci-kunci semua yang ghaib; tidak ada yang mengetahuinya kecuali dia sendiri, dan dia mengetahui apa yang di*

> *daratan dan di lautan, dan tiada sehelai daun pun yang gugur melainkan dia mengetahuinya (pula), dan tidak jatuh sebutir biji-pun dalam kegelapan bumi, dan tidak sesuatu yang basah atau yang kering, melainkan tertulis dalam Kitab yang nyata (Lauh Mahfudz)".”*

Jadi kalau di bumi ini ada ilmu matematika, maka Allah adalah ahlinya, yang paling mengetahuinya, Dialah ahli matematika (matematisi) yang serba maha. Kalau dibumi ada ilmu biologi, maka Allah yang paling tahu tentang biologi. Kalau di bumi ada ilmu fisika, maka Allah yang paling tahu tentang fisika. Tidak ada yang tersembunyi bagi Allah sesuatupun yang terjadi di bumi bahkan di langit. Allah berfirman dalam Al-quran surat Ali-Imran ayat 5.

إِنَّ ٱللَّهَ لَا يَخۡفَىٰ عَلَيۡهِ شَيۡءٞ فِي ٱلۡأَرۡضِ وَلَا فِي ٱلسَّمَآءِ ﴿٥﴾

Artinya: *“Sesungguhnya bagi Allah tidak ada satupun yang tersembunyi di bumi dan tidak (pula) di langit.”*

2.6.2 Segala Sesuatu yang Diciptakan Allah Ada Ukurannya

Perkembangan sains yang luar biasa yang dicapai para ilmuwan matematika, biologi, kimia dan fisika telah melampaui seluruh ramalan masa depan manusia dan membuat banyak orang terkagum-kagum.

Perkembangan dan pemanfaatan sains yang luar biasa berkat kemajuan teknologi yang pesat tersebut, tiada lain merupakan bukti yang menunjukkan keagungan dan kekuasaan Allah SWT serta kebijaksanaan dan kesempurnaan ciptaan-Nya. Selain itu, perkembangan ilmiah tersebut juga membuktikan bahwa Allah SWT adalah benar-benar Sang Pencipta yang telah menciptakan alam semesta ini.

Perkembangan dan pemanfaatan sains juga membuktikan bahwa alam semesta tidaklah tercipta secara kebetulan, karena di dalamnya terdapat peraturan yang sangat teliti dan hukum yang sangat rapi untuk mengendalikan dan menjalankan alam semesta. Di samping itu dalam alam semesta terdapat sifat-sifat khas yang sudah disiapkan sedemikian rupa, sehingga dapat sesuai untuk segala benda dan makhluk yang ada di dalamnya. Semua ini menafikan kemungkinan bahwa alam semesta tercipta secara kebetulan, sebab suatu peristiwa kebetulan tidak akan mampu melahirkan peraturan yang teliti dan hukum yang rapi. Adanya peraturan dan hukum alam yang sangat akurat ini, tentu saja mengharuskan adanya Sang Pengatur dan Sang Pencipta yang Maha Berkuasa dan Maha Bijaksana (Anonymous. http://Hbmulyana.Wordpress.Com/. Diakses tanggal 6 februari 2008).

Allah SWT telah berfirman :

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَٰهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: *"Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran."*

Dalam Al-Quran surat Ar-Ra'du ayat 8 disebutkan:

.......وَكُلُّ شَيْءٍ عِندَهُۥ بِمِقْدَارٍ ﴿٨﴾

Artinya : *"....dan segala sesuatu pada sisi-Nya ada ukurannya."*

Dalam Al-Quran surat Al-Furqann ayat 2 disebutkan:

.........وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

Artinya: ".....dan dia Telah menciptakan segala sesuatu, dan dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya"

Ayat-ayat Allah ada yang tertulis dalam kitab suci al-Quran dan ada pula yang tidak tertulis di dalamnya, yaitu yang terbentang di jagad raya. Ayat 8 dari surat Ar-Ra'du dan ayat 2 dari surat Al-Furqan diatas menjelaskan bahwa Allah menciptakan segala sesuatu dengan kadar ukuran yang telah ditetapkan. Dengan kata lain tidak ada ayat Allah, baik yang tertulis maupun yang terbentang itu ada atau terjadi begitu saja, tanpa disengaja. Semua sudah direncanakan, diperhitungkan, dan diatur oleh-Nya, bukan merupakan sesuatu yang kebetulan.

Apabila disengaja, tentu ada maksud dan tujuannya. Maksud dan tujuan Allah membuat itu semua ada yang bisa langsung dipahami manusia namun ada juga yang memerlukan penafsiran. Saat manusia memerlukan penafsiran, bisa jadi makna sebenarnya dari ayat-ayat Allah itu tersingkap, tetapi mungkin juga penafsiran itu tidak atau belum mencapai makna sebenarnya. Namun yang pasti, manusia memang diperintahkan untuk terus menelaah dan mengkaji ayat-ayat Allah.

2.6.3 Perintah Melaksanakan Segala Sesuatu Secara Tepat Berdasarkan Perhitungan

Sebagaimana telah kita ketahui bahwa menurut Al-Quran, manusia adalah makhluk yang berpotensi untuk menguasai ilmu pengetahuan. Allah-lah yang mengajari manusia semua hal yang sebelumnya tidak diketahuinya:

عَلَّمَ ٱلۡإِنسَٰنَ مَا لَمۡ يَعۡلَمۡ ٥

Artinya: *"Dia mengajar kepada manusia apa yang tidak diketahuinya."* (Surat Al-Alaq ayat 5)

Didorong dan dirangsang oleh studi al-Quran, kaum muslim memulai pengembangan ilmu matematika dengan pengetahuan tentang bilangan *(‘ilm al-adad)* dan ilmu hitung *(‘ilm hisab).* Ilmu ini menduduki tempat istemewa dalam ilmu pengetahuan islam. Sumber-sumber kajian matematika, sebagaimana sumber ilmu pengetahuan lainnya dalam islam, adalah konsep Tauhid, yaitu keesaan Allah. Kecintaan kaum muslim kepada matematika langsung terkait dengan bilangan pokok dalam keimanan mereka, yakni Tuhan Yang Satu (Tauhid).

Menelusuri pandangan al-Quran tentang ilmu pengetahuan, mengundang kita menengok sekian banyak ayat al-Quran yang berbicara tentang alam raya yang terhampar luas dilangit dan di bumi disediakan sebagai bahan untuk memperoleh ilmu pengetahuan. Maka kita sebagai makhluk Allah Swt, harus bisa menggunakan apa-apa yang ada di langit dan di bumi dengan sebaik-baiknya dalam kehidupan sehari-hari. Seperti yang dijelaskan pada surat Al-A’laa ayat 2-3, yang berbunyi sebagi berikut :

ٱلَّذِى خَلَقَ فَسَوَّىٰ ۝٢ وَٱلَّذِى قَدَّرَ فَهَدَىٰ ۝٣

Artinya : " *2. Yang Menciptakan, dan menyempurnakan (penciptaan-Nya), 3. Dan yang menentukan kadar (masing-masing) dan memberi petunjuk.”*

Pengerjaan operasi hitung untuk mencari hasil dilakukan dalam pembelajaran matematika mulai tingkat dasar sampai perguruan tinggi. Dalam pengerjaannya, maka seseorang dituntut untuk bersikap teliti, cernat, hemat, cepat dan tepat. Saat mengerjakan masalah matematika seseorang sebenarnya dituntut untuk mengerjakan dengan teliti dan cermat. Jangan sampai ada pengerjaan atau langkah yang salah. Langkah demi langkah pengerjaan diteliti dan dicermati.

Setelah diperoleh hasilnya, hasil itu perlu dicek lagi apakah sudah menjawab permasalahan atau tidak. Intinya, matematika mengajari seseorang untuk jeli dan berhati-hati dalam melangkah (Abdusysyakir, 2007 : 70).

Dalam AL-Quran aspek matematika dijelaskan dalam surat Al-An'am ayat 152:

وَأَوْفُوا۟ ٱلْكَيْلَ وَٱلْمِيزَانَ بِٱلْقِسْطِ ۖ لَا نُكَلِّفُ نَفْسًا إِلَّا وُسْعَهَا ۖ.........

Artinya: *"......dan sempurnakanlah takaran dan timbangan dengan adil. kami tidak memikulkan beban kepada sesorang melainkan sekedar kesanggupannya....."*

Dan dalam surat Hud ayat 85 disebutkan:

وَيَٰقَوْمِ أَوْفُوا۟ ٱلْمِكْيَالَ وَٱلْمِيزَانَ بِٱلْقِسْطِ ۖ وَلَا تَبْخَسُوا۟ ٱلنَّاسَ
أَشْيَآءَهُمْ وَلَا تَعْثَوْا۟ فِى ٱلْأَرْضِ مُفْسِدِينَ ﴿٨٥﴾

Artinya: *"Dan Syu'aib berkata: "Hai kaumku, cukupkanlah takaran dan timbangan dengan adil, dan janganlah kamu merugikan manusia terhadap hak-hak mereka dan janganlah kamu membuat kejahatan di muka bumi dengan membuat kerusakan."*

Ayat-ayat di atas jelas-jelas meletakkan dasar keadilan bagi para ahli matematika dan statistika. Mereka harus bekerja keras menghitung bilangan-bilangan yang secara tepat berdasarkan ukuran (takaran), sehingga semua pihak yang berkepentingan bisa merasa keadilan. Tidak boleh ada selisih atau inkonsistensi dalam hitungan. Semuanya harus dilaksanakan secara seksama dan akurat sehingga menghasilkan kebenaran yang sahih. Semangat inilah yang amat ditekankan oleh Al-Quran. Ketetapan serta akurasi perhitungan yang dilakukan oleh para ahli matematika bukan saja dilakukan demi menjamin keadilan kepada siapa saja yang berkepentingan, melainkan juga demi memperoleh informasi yang benar berdasarkan bilangan dan angka yang disajikan kepada mereka dan demi menjaga keadilan terhadap semua pihak dalam segala keadaan. Dengan demikian, dapat dinyatakan disini bahwa Al-Quran boleh jadi telah banyak mendorong manusa untuk malakukan penelitian tentang persamaan matematis. Al-Quran bukan saja telah mendorong mereka untuk menghitung bilangan-bilangan secara tepat berdasarkan data-data serta ukuran-ukuran yang mereke miliki menurut kaidah-kaidah saintifik, melainkan juga mendorong mereka memelihara hubungan yang erat dengan Sang Pencipta melalui hasil-hasil perhitungan yang dilakukannya. Itulah sebabnya, mengapa matematika diklaim sebagai memiliki kedudukan yang "istemewa" dalam sains Islam.

Dalam kerajaan Allah, terdapat neraca dengan keseimbangan dan keadilan yang amat sempurna. Dia memerintahkan agar kesempurnaan itu dipelihara sebaik-baiknya dalam setiap aspek kehidupan manusia, terlebih lagi dalam hal ketepatan dan keakuratan penentuan angka dan bilangan serta ukuran yang menjadi dasar bagi beroperasinya bidang industri dan sains. Dari semua usaha para ahli matematika yang bekerja keras membuat perhitungan dengan akurasi yang tinggi, ada Allah Yang Maha Menghitung (Rahman, 2007:130).

Dalam Surat An-Nisa' ayat 86 dijelaskan :

.... إِنَّ ٱللَّهَ كَانَ عَلَىٰ كُلِّ شَىْءٍ حَسِيبًا ﴿٨٦﴾

Artinya: *".....Sesungguhnya Allah memperhitungkan segala sesuatu."*

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Penentuan Momen Ke-3 Dan Momen Ke-4 Dari Disri Gamma, Beta Dan Weibull

3.1.1 Distribusi Gamma

Untuk mendapatkan momen ke-3 dan momen ke-4 dari distribusi gamma adalah dengan menurunkan persamaan (2.5) sebanyak 4 kali dan memasukkan nilai variabelnya sama dengan nol.

1. Momen pertama

   a. Momen tak terpusat pertama

$$\mu_1 = E(X) = \left.\frac{d\, M_X(t)}{d\,t}\right|_{t=0}$$

$$= \left.\frac{d\,(1-\beta t)^{-\alpha}}{dt}\right|_{t=0}$$

$$= -\alpha(1-\beta t)^{-\alpha-1}(-\beta)\Big|_{t=0}$$

$$= -\alpha(1-\beta\cdot 0)^{-\alpha-1}(-\beta)$$

$$= -\alpha\,(-\beta)$$

$$= \alpha\,\beta$$

Jadi momen tak terpusat pertama adalah

$$\mu_1 = E(X) = \alpha\,\beta$$

2. Momen Kedua

a. Momen tak terpusat kedua

$$\mu_2 = E\left(X^2\right) = \left.\frac{d^2\ M_X(t)}{d\,t^2}\right|_{t=0}$$

$$= \left.\frac{d^2\left(1-\beta t\right)^{-\alpha}}{dt^2}\right|_{t=0}$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\left(\frac{d\left(1-\beta t\right)^{-\alpha}}{dt}\right)\right|_{t=0}$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\left(-\alpha\left(1-\beta t\right)^{-(\alpha+1)}\left(-\beta\right)\right)\right|_{t=0}$$

$$= -\alpha\left(-\left(\alpha+1\right)\right)\left(1-\beta t\right)^{-(\alpha+2)}\left(-\beta\right)^2\ \Big|_{t=0}$$

$$= -\alpha\ \left(-\left(\alpha+1\right)\right)\left(1-\beta\cdot 0\right)^{-(\alpha+2)}\left(-\beta\right)^2$$

$$= -\alpha\,\beta^2\left(-\left(\alpha+1\right)\right)$$

$$=\ \alpha^2\beta^2 + \alpha\,\beta^2$$

Jadi momen tak terpusat keduanya adalah

$$\mu_2 = E\left(X^2\right) = \left(\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^2\right)$$

b. Momen pusat kedua

$$\mu_2^{'} = E\ \left(X-\mu_1\right)^2$$

$$= E\left(X^2 - 2\mu_1 X\ + \mu_1\right)$$

$$= E\left(X^2\right) - 2\mu_1\ E\left(X\right)\ + \mu_1^{\ 2}$$

$$= \mu_2 - 2\mu_1^2 + \mu_1^2$$

$$= \mu_2 - \mu_1^2$$

$$= \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^2 - (\alpha\beta)^2$$

$$= \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^2 - \alpha^2\beta^2$$

$$= \alpha\,\beta^2$$

Jadi momen pusat keduanya adalah

$$\mu_2^{'} = E\,(X - \mu_1)^2 = \sigma^2 = \alpha\,\beta^2$$

3. Momen Ketiga

a. Momen tak terpusat ketiga

$$\mu_3 = E\left(X^3\right) = \left.\frac{d_3\,M_X(t)}{d\,t^3}\right|_{t=0}$$

$$= \left.\frac{d^3 (1-\beta t)^{-\alpha}}{dt^3}\right|_{t=0}$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2\,(1-\beta t)^{-\alpha}}{dt^2}\right)\right|_{t=0}$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\left(-\alpha(-(\alpha+1))\,(1-\beta t)^{-(\alpha+2)}\,(-\beta)^2\right)\right|_{t=0}$$

$$= \left.-\alpha\,(\alpha+1)\,(\alpha+2)\,(1-\beta\cdot t)^{-(\alpha+3)}\,(-\beta)^3\right|_{t=0}$$

$$= -\alpha\,(\alpha+1)\,(\alpha+2)\,(1-\beta\cdot 0)^{-(\alpha+3)}\,(-\beta)^3$$

$$= -\alpha\,(\alpha+1)\,(\alpha+2)\,(-\beta)^3$$

$$= \left(\alpha\,\beta^3\right)\left(\alpha^2 + 3\alpha + 2\right)$$

$$= \alpha^3\beta^3 + 3\alpha^2\beta^3 + 2\alpha\beta^3$$

Jadi momen tak terpusat ketiganya adalah

$$\mu_3 = E\left(X^3\right) = \alpha^3\beta^3 + 3\alpha^2\beta^3 + 2\alpha\beta^3$$

b. Momen pusat ketiga

$$\begin{aligned}
\mu_3^{'} &= E\left(X-\mu_1\right)^3 \\
&= E\left[\left(X-\mu_1\right)^2\left(X-\mu_1\right)\right] \\
&= E\left[\left(X^2-2\mu_1X+\mu_1^2\right)\left(X-\mu_1\right)\right] \\
&= E\left(X^3-2\mu_1X^2+\mu_1^2X-\mu_1X^2+2\mu_1^2X-\mu_1^3\right) \\
&= E\left(X^3-3\mu_1X^2+3\mu_1^2X-\mu_1^3\right) \\
&= E\left(X^3\right)-3\mu_1E\left(X^2\right)+3\mu_1^2E\left(X\right)-\mu_1^3 \\
&= \mu_3-3\mu_1\mu_2+3\mu_1^2\mu_1-\mu_1^3 \\
&= \mu_3-3\mu_1\mu_2+3\mu_1^3-\mu_1^3 \\
&= \mu_3-3\mu_1\mu_2+2\mu_1^3 \\
&= \alpha^3\beta^3+3\alpha^2\beta^3+2\alpha\beta^3-3\left(\alpha\beta\right)\left(\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^2\right)+2\left(\alpha\beta\right)^3 \\
&= \alpha^3\beta^3+3\alpha^2\beta^3+2\alpha\beta^3-3\alpha^3\beta^3+3\alpha^2\beta^3+2\alpha^3\beta^3 \\
&= 2\alpha\beta^3
\end{aligned}$$

Jadi momen pusat ketiganya adalah

$$\mu_3^{'} = E\left(X-\mu_1\right)^3 = 2\alpha\beta^3$$

Jika momen tak terpusat pertama $\left(\mu_1\right)$ menyatakan mean $\left(\mu\right)$ dan momen puasat kedua $\left(\mu_2^{'}\right)$ menyatakan varian $\left(\sigma^2\right)$, maka pada momen pusat ketiga $\left(\mu_3^{'}\right)$ yang dibagi dengan pangkat 3 simpangan baku (σ) menyatakan koefisien Skewness(γ_1).

$$\gamma_1 = \frac{E\left(X-\mu_1\right)^3}{\sigma^3}$$

$$= \frac{\mu_3^{'}}{\sigma^2 \cdot \sigma}$$

$$= \frac{2\ \alpha\beta^3}{\alpha\beta^2 \sqrt{\alpha\beta^2}}$$

$$= \frac{2\alpha\beta^3}{\alpha\beta^3 \sqrt{\alpha}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$$

4. Momen Keempat

   a. Momen tak terpusat keempat

$$\mu_4 = E\left(X^4\right) = \left.\frac{d_4 M_X(t)}{d\,t^4}\right|_{t=0}$$

$$= \left.\frac{d^4 (1-\beta t)^{-\alpha}}{dt^4}\right|_{t=0}$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\left(\frac{d^3 (1-\beta t)^{-\alpha}}{dt^3}\right)\right|_{t=0}$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\ \left(-\alpha\,(\alpha+1)\,(\alpha+2)\,(1-\beta.t)^{-(\alpha+3)}(-\beta)^3\right)\right|_{t=0}$$

$$= \left. -\alpha\,(\alpha+1)\,(\alpha+2)\,(-(\alpha+3))\,(1-\beta.t)^{-(\alpha+4)}(-\beta)^4\ \right|_{t=0}$$

$$= -\alpha\,(\alpha+1)\,(\alpha+2)\,(-(\alpha+3))\,(1-\beta.0)^{-(\alpha+4)}(-\beta)^4$$

$$= \left(-\alpha\beta^4\right)\left(-\left(\alpha^3 + 6\alpha^2 + 11\alpha + 6\right)\right)$$

$$= \alpha^4\beta^4 + 6\alpha^3\beta^4 + 11\alpha^2\beta^4 + 6\alpha\beta^4$$

Jadi momen tak terpusat keempatnya adalah

$$\mu_4 = E\left(X^4\right) = \alpha^4\beta^4 + 6\alpha^3\beta^4 + 11\alpha^2\beta^4 + 6\alpha\beta^4$$

b. Momen pusat keempat

$$\mu_4^{'} = E\left(X - \mu\right)^4$$

$$= E\left[\left(X - \mu_1\right)^2\left(X - \mu_1\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left(X^2 - 2\mu_1 X + \mu_1^2\right)\left(X^2 - 2\mu_1 X + \mu_1^2\right)\right]$$

$$= E\left(X^4 - 2\mu_1 X^3 + \mu_1^2 X^2 - 2\mu_1 X^3 + 4\mu_1^2 X^2 - 2\mu_1^3 X + \mu_1^2 X^2 - 2\mu_1^3 X + \mu_1^4\right)$$

$$= E\left(X^4 - 4\mu_1 X^3 + 6\mu_1^2 X^2 - 4\mu_1^3 X + \mu_1^4\right)$$

$$= E\left(X^4\right) - 4\mu_1 E\left(X^3\right) + 6\mu_1^2 E\left(X^2\right) - 4\mu_1^3 E\left(X\right) + \mu_1^4$$

$$= \mu_4 - 4\mu_1\mu_3 + 6\mu_1^2\mu_2 - 3\mu_1^4$$

$$= \alpha^4\beta^4 + 6\alpha^3\beta^4 + 11\alpha^2\beta^4 + 6\alpha\beta^4 - 4\left(\alpha\beta\right)\left(\alpha^3\beta^3 + 3\alpha^2\beta^3 + 2\alpha\beta^3\right) + 6\left(\alpha\beta\right)^2\left(\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^2\right) - 3\left(\alpha\beta\right)^4$$

$$= \alpha^4\beta^4 + 6\alpha^3\beta^4 + 11\alpha^2\beta^4 + 6\alpha\beta^4 - 4\alpha^4\beta^4 + 12\alpha^3\beta^4 + 8\alpha^2\beta^4 + 6\alpha^4\beta^4 + 6\alpha^2\beta^4 - 3\alpha^4\beta^4$$

$$= 3\alpha^2\beta^4 + 6\alpha\beta^4$$

Jadi momen pusat keempatnya adalah

$$\mu_4^{'} = E\left(X - \mu\right)^4 = 3\alpha^2\beta^4 + 6\alpha\beta^4$$

Sehingga pada momen pusat keempat $(\mu_4^{'})$ yang dibagi dengan pangkat empat simpangan baku (σ^4) menyatakan kurtosis (γ_2).

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4^{'}}{\sigma^4}$$

$$= \frac{\mu_4^{'}}{(\sigma^2)^2}$$

$$= \frac{3\alpha^2\beta^4 \quad + \quad 6\alpha\beta^4}{(\alpha\beta^2)^2}$$

$$= \frac{\alpha\beta^2(3\alpha\beta^2 + 6\beta^2)}{\alpha\beta^2 \cdot \alpha\beta^2}$$

$$= \frac{\beta^2(3\alpha + 6)}{\alpha\,\beta^2}$$

$$= \frac{3\alpha + 6}{\alpha} \quad = \frac{6}{\alpha} + 3$$

3.2 Distribusi Beta

Untuk mendapatkan momen ke-3 dan momen ke-4 dari definisi beta adalah dengan menurunkan persamaan (2.20) sebanyak 4 kali dengan *f(x)* pada persamaan (2.7) dan memasukkan variabelnya sama dengan nol.

1. Momen pertama

   a. Momen pusat pertama

$$\mu_1 = E(X) = \left.\frac{dM_X(t)}{dt}\right|_{t=0}$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx\right)\right|_{t=0}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x e^{tx} f(x) dx \bigg|_{t=0}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\, \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{1-\beta}\, dx$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{-\infty}^{\infty} x^{\alpha+1-1} (1-x)^{\beta-1}\, dx$$

dari persamaan (2.6) pada definisi 2.6 diperoleh:

$$\mu_1 = E(X) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} B(\alpha+1, \beta)$$

karena: $B(\alpha, \beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$

maka: $\mu_1 = E(X) = \dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} B(\alpha+1, \beta)$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

Jadi momen pertama tak terpusat dari distribusi beta adalah

$$\mu_1 = E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

2. Momen kedua

a. Momen tak terpusat kedua

$$\mu_2 = E\left(X^2\right) = \left.\frac{d^2 M_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0}$$

$$= \left.\frac{d^2}{dt^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx\right)\right|_{t=0}$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx\right)\right)\right|_{t=0}$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x e^{tx} f(x)dx\right)\right|_{t=0}$$

$$= \left.\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{tx} f(x)dx\right|_{t=0}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \; f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{-\infty}^{\infty} x^{\alpha+2-1}(1-x)^{\beta-1} dx$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} B(\alpha+2,\beta)$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha+2)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{(\alpha+1)\,\alpha\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)\,\Gamma(\alpha+\beta)}$$

$$= \frac{(\alpha+1)\alpha}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}$$

Jadi momen tak terpusat kedua adalah

$$\mu_2 = E\left(X^2\right) = \frac{(\alpha+1)\alpha}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}$$

b. Momen pusat kedua

$$\mu_2^{'} = E\left(X-\mu_1\right)^2$$

$$= E\left(X^2 - 2\mu_1 X + \mu_1\right)$$

$$= E\left(X^2\right) - 2\mu_1 \; E\left(X\right) + \mu_1^{\,2}$$

$$= \mu_2 - 2\mu_1^2 + \mu_1^2$$

$$= \mu_2 - \mu_1^2$$

$$= \frac{(\alpha+1)\alpha}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)} - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2$$

$$= \frac{(\alpha+1)\alpha\,(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2} - \frac{\alpha^2\,(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$$

$$= \frac{\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha^2 + \alpha\beta - \left(\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha^2\right)}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$$

$$= \frac{\alpha\,\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$$

Jadi momen pusat keduanya adalah

$$\mu_2^{'} = E\left(X-\mu_1\right)^2 = \sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$$

3. Momen ketiga

a. Momen tak terpusat ketiga

$$\mu_3 = E\left(X^3\right) = \left.\frac{d^3 M_X(t)}{dt^3}\right|_{t=0}$$

$$= \left.\frac{d^3}{dt^3}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx\right)\right|_{t=0}$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2}{dt^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx\right)\right)\right|_{t=0}$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{tx} f(x)dx\right)\right|_{t=0}$$

$$= \left.\int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{tx} f(x)dx\right|_{t=0}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{tx} f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{-\infty}^{\infty} x^{\alpha+3-1}(1-x)^{\beta-1} dx$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} B(\alpha+3,\beta)$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+3)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+3)}$$

$$= \frac{(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha}{(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}$$

Jadi momen tak terpusat ketiga adalah

$$\mu_3 = E(X)^3 = \frac{(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha}{(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}$$

b. Momen pusat ketiga

$$\mu_3^{'} = E(X-\mu_1)^3$$

$$= E\left[(X-\mu_1)^2(X-\mu_1)\right]$$

$$= E\left[(X^2-2\mu_1X+\mu_1^2)(X-\mu_1)\right]$$

$$= E\left(X^3-2\mu_1X^2+\mu_1^2X-\mu_1X^2+2\mu_1^2X-\mu_1^3\right)$$

$$= E\left(X^3-3\mu_1X^2+3\mu_1^2X-\mu_1^3\right)$$

$$= E\left(X^3\right)-3\mu_1E\left(X^2\right)+3\mu_1^2E(X)-\mu_1^3$$

$$= \mu_3-3\mu_1\mu_2+3\mu_1^2\mu_1-\mu_1^3$$

$$= \mu_3-3\mu_1\mu_2+3\mu_1^3-\mu_1^3$$

$$= \mu_3-3\mu_1\mu_2+2\mu_1^3$$

$$= \frac{(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha}{(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}-3\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\left(\frac{(\alpha+1)\alpha}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}\right)+2\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^3$$

$$= \left(\frac{(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha(\alpha+\beta)^2}{(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^3}\right)-\left(\frac{3\alpha^2(\alpha+1)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta)^3}\right)+\left(\frac{2\alpha^3(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^3}\right)$$

$$= \frac{-2\alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2}{(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^3}$$

Jadi momen pusat ke tiga adalah

$$\mu_3^{'} = E(X-\mu_1)^3 = \frac{-2\alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2}{(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^3}$$

Jika momen (tak terpusat) pertama (μ_1) menyatakan mean (μ), dan momen (pusat) kedua $(\mu_2^{'})$ menyatakan varian (σ^2), maka momen (pusat) ketiga $(\mu_3^{'})$ yang dibagi dengan pangkat tiga simpangan baku (σ) menyatakan koefisien Skewness (γ_1).

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3^{'}}{\sigma^3}$$

$$= \frac{\mu_3^{'}}{\sigma^2 \cdot \sigma}$$

$$= \frac{\mu_3^{'}}{E(X-\mu_1)^2 \cdot \sqrt{E(X-\mu_1)^2}}$$

$$= \frac{\dfrac{-2\alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2}{(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^3}}{\dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2} \cdot \sqrt{\dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}}}$$

$$= \frac{2(-\alpha+\beta)\sqrt{\alpha+\beta+1}}{(\alpha+\beta+2)\sqrt{\alpha\beta}}$$

4. Momen keempat

   a. Momen tak terpusat keempat

$$\mu_4 = E(X^4) = \left.\frac{d^4 M_X(t)}{dt^4}\right|_{t=0}$$

$$= \left.\frac{d^4}{dt^4}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,dx\right)\right|_{t=0}$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\left(\frac{d^3}{dt^3}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,dx\right)\right)\right|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{tx} f(x) dx\right)\Bigg|_{t=0}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{tx} f(x) dx\Bigg|_{t=0}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^4 f(x)\ dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} x^{\alpha+4-1}(1-x)^{\beta-1}\ dx$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\ B(\alpha+4,\beta)$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+4)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+4)}$$

$$= \frac{(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)\,\alpha}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}$$

Jadi momen tak terpusat keempat adalah

$$\mu_4 = E(X^4) = \frac{(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)\,\alpha}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}$$

b. momen pusat keempat

$$\mu_4^{'} = E(X-\mu)^4$$

$$= E\left[(X-\mu_1)^2(X-\mu_1)^2\right]$$

$$= E\left[\left(X^2 - 2\mu_1 X + \mu_1^2\right)\left(X^2 - 2\mu_1 X + \mu_1^2\right)\right]$$

$$= E\left(X^4 - 2\mu_1 X^3 + \mu_1^2 X^2 - 2\mu_1 X^3 + 4\mu_1^2 X^2 - 2\mu_1^3 X + \mu_1^2 X^2 - 2\mu_1^3 X + \mu_1^4\right)$$

$$= E\left(X^4 - 4\mu_1 X^3 + 6\mu_1^2 X^2 - 4\mu_1^3 X + \mu_1^4\right)$$

$$= E(X^4) - 4\mu_1 E(X^3) + 6\mu_1^2 E(X^2) - 4\mu_1^3 E(X) + \mu_1^4$$

$$= \mu_4 - 4\mu_1\mu_3 + 6\mu_1^2\mu_2 - 3\mu_1^4$$

$$= \left(\frac{(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)} \right) -$$

$$4\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\left(\frac{(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha}{(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}\right) +$$

$$6\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2\left(\frac{(\alpha+1)\alpha}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}\right) - 3\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^4$$

$$= \frac{6\alpha^3\beta + 3\alpha^3\beta^2 - 6\alpha^2\beta^2 + 3\alpha^2\beta^3 + 6\alpha\beta^2}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^4}$$

$$= \frac{3\alpha\beta\left(2\alpha^2 + \alpha^2\beta - 2\alpha\beta + \alpha\beta^2 + 2\beta^2\right)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^4}$$

Jadi momen pusat keempat adalah

$$\mu_4^{'} = E(X-\mu_1)^4 = \frac{3\alpha\beta\left(2\alpha^2 + \alpha^2\beta - 2\alpha\beta + \alpha\beta^2 + 2\beta^2\right)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^4}$$

Sehingga pada momen pusat keempat $\left(\mu_4^{'}\right)$ yang dibagi dengan pangkat empat simpangan baku $\left(\sigma^4\right)$ menyatakan kurtosis $\left(\gamma_2\right)$.

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4^{'}}{\sigma^4}$$

$$= \frac{\mu_4^{'}}{\left(\sigma^2\right)^2}$$

$$= \frac{\dfrac{3\alpha\beta\left(2\alpha^2 + \alpha^2\beta - 2\alpha\beta + \alpha\beta^2 + 2\beta^2\right)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^4}}{\left(\dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}\right)^2}$$

$$= \frac{3\left(2\alpha^2 + \alpha^2\beta - 2\alpha\beta + \alpha\beta^2 + 2\beta^2\right)(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)}$$

3.3 Distribusi Weibull

Untuk mendapatkan momen ke-3 dan momen ke-4 dari distribusi Weibull adalah dengan menurunkan persamaan (2.20) sebanyak 4 kali dan memasukkan variabelnya sama dengan nol

1. Momen pertama

   a. Momen pusat pertama

$$\mu_1 = E(X) = \left.\frac{dM_X(t)}{dt}\right|_{t=0}$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx\right)\right|_{t=0}$$

$$= \left.\int_{-\infty}^{\infty} xe^{tx} f(x)dx\right|_{t=0}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\, \alpha\, \beta\, x^{\beta-1}\, e^{-\alpha x^{\beta}}\, dx$$

$$= \alpha\,\beta \int_{-\infty}^{\infty} x^{\beta+1-1}\, e^{-\alpha x^{\beta}}\, dx$$

misalkan: $y = \alpha x^{\beta}$, maka $x = \frac{y^{1/\beta}}{\alpha^{1/\beta}}$, dan $dx = \frac{1}{\beta}\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\beta}}}\, y^{\frac{1}{\beta}-1}$

sehingga:

$$\mu_1 = E(X) = \alpha\beta \int_{-\infty}^{\infty} x^{\beta+1-1} e^{-\alpha x^{\beta}} \, dx$$

$$= \alpha\beta \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{y^{\frac{1}{\beta}}}{\alpha^{\frac{1}{\beta}}} \right)^{\beta+1-1} e^{-\alpha\left(\frac{y^{\frac{1}{\beta}}}{\alpha^{\frac{1}{\beta}}}\right)^{\beta}} \frac{1}{\beta} \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\beta}}} \; y^{\frac{1}{\beta}-1} \, dy$$

$$= \alpha\beta \frac{1}{\beta} \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\beta}}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{y}{\alpha} \right)^{\frac{\beta+1-1}{\beta}} e^{-\alpha\left(\frac{y}{\alpha}\right)} y^{\frac{1}{\beta}-1} \, dy$$

$$= \alpha \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\beta}}} \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{\frac{\beta+1-1}{\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} y^{\frac{\beta+1-1}{\beta}+\frac{1}{\beta}-1} e^{-y} dy$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha^{\frac{1}{\beta}+\frac{\beta+1-1}{\beta}}} \int_{-\infty}^{\infty} y^{\frac{1}{\beta}+1-1} e^{-y} dy$$

$$= \alpha\, \alpha^{-\left(\frac{1}{\beta}+1\right)} \int_{-\infty}^{\infty} y^{\frac{1}{\beta}+1-1} e^{-y} dy$$

$$= \alpha^{-\frac{1}{\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} y^{\frac{1}{\beta}+1-1} e^{-y} dy$$

dengan menggunakan fungsi gamma pada persamaan 2.3, definisi 2.4, sehingga diperoleh

$$\mu_1 = E(X) = \alpha^{-\frac{1}{\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} y^{\frac{1}{\beta}+1-1} e^{-y} dy$$

$$= \alpha^{-\frac{1}{\beta}} \, \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1 \right)$$

Jadi momen tak terpusat pertamanya adalah

$$\mu_1 = E(X) = \alpha^{-\frac{1}{\beta}} \, \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1 \right)$$

2. Momen kedua

a. Momen tak terpusat kedua

$$\mu_2 = E\left(X^2\right) = \left.\frac{d^2 M_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0}$$

$$= \left.\frac{d^2}{dt^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx\right)\right|_{t=0}$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx\right)\right)\right|_{t=0}$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x e^{tx} f(x)dx\right)\right|_{t=0}$$

$$= \left.\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{tx} f(x)dx\right|_{t=0}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \; f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \;\alpha\;\beta\; x^{\beta-1}\; e^{-\alpha x^\beta}\; dx$$

$$= \alpha\,\beta \int_{-\infty}^{\infty} x^{\beta+2-1}\, e^{-\alpha x^\beta}\; dx$$

Misalkan: $y = \alpha x^\beta$, maka $x = \frac{y^{1/\beta}}{\alpha^{1/\beta}}$ dan $dx = \frac{1}{\beta}\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\beta}}} y^{\frac{1}{\beta}-1}$

sehingga:

$$\mu_2 = E\left(X^2\right) = \alpha\,\beta \int_{-\infty}^{\infty} x^{\beta+2-1} e^{-\alpha x^{\beta}}$$

$$= \alpha\,\beta \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{y^{\frac{1}{\beta}}}{\alpha^{\frac{1}{\beta}}}\right)^{\beta+2-1} e^{-\alpha\left(\frac{y^{\frac{1}{\beta}}}{\alpha^{\frac{1}{\beta}}}\right)^{\beta}} \frac{1}{\beta}\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\beta}}}\; y^{\frac{1}{\beta}-1}\, dy$$

$$= \alpha\,\beta \frac{1}{\beta}\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\beta}}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\frac{\beta+2-1}{\beta}} e^{-\alpha\left(\frac{y}{\alpha}\right)} y^{\frac{1}{\beta}-1}\; dy$$

$$= \alpha \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\beta}}}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{\beta+2-1}{\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} y^{\frac{\beta+2-1}{\beta}+\frac{1}{\beta}-1} e^{-y} dy$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha^{\frac{1}{\beta}+\frac{\beta+2-1}{\beta}}} \int_{-\infty}^{\infty} y^{\frac{2}{\beta}+1-1}\, e^{-y} dy$$

$$= \alpha\,\alpha^{-\left(\frac{2}{\beta}+1\right)} \int_{-\infty}^{\infty} y^{\frac{2}{\beta}+1-1}\, e^{-y} dy$$

$$= \alpha^{-\frac{2}{\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} y^{\frac{2}{\beta}+1-1}\, e^{-y} dy$$

$$= \alpha^{-\frac{2}{\beta}}\; \Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right)$$

Jadi momen tak terpusat keduanya adalah

$$\mu_2 = E\left(X^2\right) = \alpha^{-\frac{2}{\beta}}\; \Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right)$$

b. Momen pusat kedua

$$\mu_2^{'} = E\left(X-\mu_1\right)^2$$

$$= E\left(X^2 - 2\mu_1 X + \mu_1\right)$$

$$= E\left(X^2\right) - 2\mu_1 E\left(X\right) + \mu_1^2$$

$$= \mu_2 - 2\mu_1^2 + \mu_1^2$$

$$= \mu_2 - \mu_1^2$$

$$= \alpha^{-\frac{2}{\beta}} \Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right) - \left(\alpha^{-\frac{1}{\beta}} \Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right)^2$$

$$= \alpha^{-\frac{2}{\beta}} \Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right) - \left(\alpha^{-\frac{2}{\beta}} \left[\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)^2\right]\right)$$

$$= \alpha^{-\frac{2}{\beta}} \left[\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right) - \Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)^2\right]$$

Jadi momen pusat keduanya adalah

$$\mu_2^{'} = E\left(X^2\right) = \sigma^2 = \alpha^{-\frac{2}{\beta}} \left[\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right) - \Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)^2\right]$$

3. Momen ketiga

a. Momen tak terpusat ketiga

$$\mu_3 = E\left(X^3\right) = \left.\frac{d^3 M_X(t)}{dt^3}\right|_{t=0}$$

$$= \left.\frac{d^3}{dt^3}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,dx\right)\right|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2}{dt^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx\right)\right)\Bigg|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{tx} f(x)dx\right)\Bigg|_{t=0}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{tx} f(x)dx\Bigg|_{t=0}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \; f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \; \alpha \; \beta \; x^{\beta-1} \; e^{-\alpha x^{\beta}} \; dx$$

$$= \alpha \beta \int_{-\infty}^{\infty} x^{\beta+3-1} e^{-\alpha x^{\beta}} \; dx$$

Misalkan: $y = \alpha x^{\beta}$, maka $x = \frac{y^{1/\beta}}{\alpha^{1/\beta}}$, dan $dx = \frac{1}{\beta}\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\beta}}} y^{\frac{1}{\beta}-1}$, sehingga:

$$\mu_3 = E\left(X^3\right) = \alpha \beta \int_{-\infty}^{\infty} x^{\beta+3-1} e^{-\alpha x^{\beta}}$$

$$= \alpha \beta \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{y^{\frac{1}{\beta}}}{\alpha^{\frac{1}{\beta}}}\right)^{\beta+3-1} e^{-\alpha\left(\frac{y^{\frac{1}{\beta}}}{\alpha^{\frac{1}{\beta}}}\right)^{\beta}} \frac{1}{\beta} \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\beta}}} \; y^{\frac{1}{\beta}-1} \; dy$$

$$= \alpha \beta \frac{1}{\beta} \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\beta}}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\frac{\beta+3-1}{\beta}} e^{-\alpha\left(\frac{y}{\alpha}\right)} y^{\frac{1}{\beta}-1} \; dy$$

$$= \alpha \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\beta}}} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{\beta+3-1}{\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} y^{\frac{\beta+3-1}{\beta}+\frac{1}{\beta}-1} e^{-y} dy$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha^{\frac{1}{\beta}+\frac{\beta+3-1}{\beta}}} \int_{-\infty}^{\infty} y^{\frac{3}{\beta}+1-1} e^{-y} dy$$

$$= \alpha\, \alpha^{-\left(\frac{3}{\beta}+1\right)} \int_{-\infty}^{\infty} y^{\frac{3}{\beta}+1-1} e^{-y} dy$$

$$= \alpha^{-\frac{3}{\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} y^{\frac{3}{\beta}+1-1} e^{-y} dy$$

$$= \alpha^{-\frac{3}{\beta}}\, \Gamma\left(\frac{3}{\beta}+1\right)$$

Jadi momen tak terpusat ketiganya adalah

$$\mu_3 = E\left(X^3\right) = \alpha^{-\frac{3}{\beta}}\, \Gamma\left(\frac{3}{\beta}+1\right)$$

b. Momen pusat ketiga

$$\mu_3' = E\left(X-\mu_1\right)^3$$

$$= E\left[\left(X-\mu_1\right)^2\left(X-\mu_1\right)\right]$$

$$= E\left[\left(X^2-2\mu_1 X+\mu_1^2\right)\left(X-\mu_1\right)\right]$$

$$= E\left(X^3-2\mu_1 X^2+\mu_1^2 X-\mu_1 X^2+2\mu_1^2 X-\mu_1^3\right)$$

$$= E\left(X^3-3\mu_1 X^2+3\mu_1^2 X-\mu_1^3\right)$$

$$= E\left(X^3\right)-3\mu_1 E\left(X^2\right)+3\mu_1^2 E\left(X\right)-\mu_1^3$$

$$= \mu_3-3\mu_1\mu_2+3\mu_1^2\mu_1-\mu_1^3$$

$$= \mu_3-3\mu_1\mu_2+3\mu_1^3-\mu_1^3$$

$$= \mu_3-3\mu_1\mu_2+2\mu_1^3$$

$$= \alpha^{-\frac{3}{\beta}}\,\Gamma\left(\frac{3}{\beta}+1\right) - 3\left(\alpha^{-\frac{1}{\beta}}\,\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\alpha^{-\frac{2}{\beta}}\,\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right)\right) + 2\left[\alpha^{-\frac{1}{\beta}}\,\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right]^3$$

$$= \alpha^{-\frac{3}{\beta}}\,\Gamma\left(\frac{3}{\beta}+1\right) - 3\left(\alpha^{-\frac{3}{\beta}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right)\right]\right) + 2\left[\alpha^{-\frac{3}{\beta}}\,\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)^3\right]$$

$$= \alpha^{-\frac{3}{\beta}}\left[\Gamma\left(\frac{3}{\beta}+1\right) - 3\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right) + 2\Gamma^3\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right]$$

Jadi momen pusat ketiganya adalah

$$\mu_3' = E(X-\mu_1)^3 = \alpha^{-\frac{3}{\beta}}\left[\Gamma\left(\frac{3}{\beta}+1\right) - 3\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right) + 2\Gamma^3\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right]$$

Jika momen (tak terpusat) pertama (μ_1) menyatakan mean (μ), dan momen (pusat) kedua (μ_2') menyatakan varian (σ^2), maka momen (pusat) ketiga (μ_3') yang dibagi dengan pangkat tiga simpangan baku (σ) menyatakan koefisien Skewness (γ_1).

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3'}{\sigma^3} = \frac{\mu_3'}{\left(\sqrt{\sigma^2}\right)^3}$$

$$= \frac{\alpha^{-\frac{3}{\beta}}\left[\Gamma\left(\frac{3}{\beta}+1\right) - 3\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right) + 2\Gamma^3\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right]}{\left(\sqrt{\alpha^{-\frac{2}{\beta}}\left[\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right) - \Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)^2\right]}\right)^3}$$

$$= \frac{\alpha^{-\frac{3}{\beta}}\left[\Gamma\left(\frac{3}{\beta}+1\right) - 3\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right) + 2\Gamma^{3}\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right]}{\alpha^{\frac{-3}{\beta}}\left(\sqrt{\left[\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right)-\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)^{2}\right]}\right)^{3}}$$

$$= \frac{\left[\Gamma\left(\frac{3}{\beta}+1\right) - 3\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right) + 2\Gamma^{3}\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right]}{\left(\sqrt{\left[\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right)-\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)^{2}\right]}\right)^{3}}$$

4. Momen keempat

a. Momen tak terpusat keempat

$$\mu_4 = E\left(X^4\right) = \left.\frac{d^4 M_X(t)}{dt^4}\right|_{t=0}$$

$$= \left.\frac{d^4}{dt^4}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx\right)\right|_{t=0}$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\left(\frac{d^3}{dt^3}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx\right)\right)\right|_{t=0}$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{tx} f(x)dx\right)\right|_{t=0}$$

$$= \left.\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{tx} f(x)dx\right|_{t=0}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \, f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \; \alpha \; \beta \; x^{\beta-1} \; e^{-\alpha x^{\beta}} \; dx$$

$$= \alpha \, \beta \int_{-\infty}^{\infty} x^{\beta+4-1} \, e^{-\alpha x^{\beta}} \; dx$$

Misalkan: $y = \alpha \, x^{\beta}$, maka $x = \frac{y^{1/\beta}}{\alpha^{1/\beta}}$, dan $dx = \frac{1}{\beta} \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\beta}}} y^{\frac{1}{\beta}-1}$

sehingga:

$$\mu_4 = E\left(X^4\right) = \alpha \, \beta \int_{-\infty}^{\infty} x^{\beta+4-1} e^{-\alpha x^{\beta}}$$

$$= \alpha \, \beta \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{y^{\frac{1}{\beta}}}{\alpha^{\frac{1}{\beta}}} \right)^{\beta+3-1} e^{-\alpha \left(\frac{y^{\frac{1}{\beta}}}{\alpha^{\frac{1}{\beta}}} \right)^{\beta}} \frac{1}{\beta} \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\beta}}} \; y^{\frac{1}{\beta}-1} \, dy$$

$$= \alpha \, \beta \frac{1}{\beta} \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\beta}}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{y}{\alpha} \right)^{\frac{\beta+4-1}{\beta}} e^{-\alpha \left(\frac{y}{\alpha} \right)} y^{\frac{1}{\beta}-1} \; dy$$

$$= \alpha \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\beta}}} \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{\frac{\beta+4-1}{\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} y^{\frac{\beta+4-1}{\beta} + \frac{1}{\beta} - 1} e^{-y} dy$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha^{\frac{1}{\beta} + \frac{\beta+4-1}{\beta}}} \int_{-\infty}^{\infty} y^{\frac{4}{\beta}+1-1} \; e^{-y} dy$$

$$= \alpha \, \alpha^{-\left(\frac{4}{\beta}+1 \right)} \int_{-\infty}^{\infty} y^{\frac{4}{\beta}+1-1} \; e^{-y} dy$$

$$= \alpha^{-\frac{4}{\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} y^{\frac{4}{\beta}+1-1} e^{-y} dy$$

$$= \alpha^{-\frac{4}{\beta}} \; \Gamma\left(\frac{4}{\beta} + 1 \right)$$

Jadi momen tak terpusat keempatnya adalah

$$\mu_4 = E\left(X^4\right) = \alpha^{-\frac{4}{\beta}}\ \Gamma\left(\frac{4}{\beta}+1\right)$$

b. momen pusat keempat

$$
\begin{aligned}
\mu_4^{'} &= E(X-\mu)^4 \\
&= E\left[(X-\mu_1)^2(X-\mu_1)^2\right] \\
&= E\left[\left(X^2-2\mu_1 X+\mu_1^2\right)\left(X^2-2\mu_1 X+\mu_1^2\right)\right] \\
&= E\left(X^4-2\mu_1 X^3+\mu_1^2 X^2-2\mu_1 X^3+4\mu_1^2 X^2-2\mu_1^3 X+\mu_1^2 X^2-2\mu_1^3 X+\mu_1^4\right) \\
&= E\left(X^4-4\mu_1 X^3+6\mu_1^2 X^2-4\mu_1^3 X+\mu_1^4\right) \\
&= E\left(X^4\right)-4\mu_1 E\left(X^3\right)+6\mu_1^2 E\left(X^2\right)-4\mu_1^3 E(X)+\mu_1^4 \\
&= \mu_4-4\mu_1\mu_3+6\mu_1^2\mu_2-3\mu_1^4 \\
&= \alpha^{-\frac{4}{\beta}}\ \Gamma\left(\frac{4}{\beta}+1\right)-4\left[\alpha^{-\frac{1}{\beta}}\ \Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\alpha^{-\frac{3}{\beta}}\ \Gamma\left(\frac{3}{\beta}+1\right)\right]+ \\
&\quad 6\left[\left[\alpha^{-\frac{1}{\beta}}\ \Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right]^2\alpha^{-\frac{2}{\beta}}\ \Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right)\right]\ -\ 3\left[\alpha^{-\frac{1}{\beta}}\ \Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right]^4 \\
&= \alpha^{-\frac{4}{\beta}}\ \Gamma\left(\frac{4}{\beta}+1\right)-4\left[\alpha^{-\frac{1}{\beta}}\ \Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\alpha^{-\frac{3}{\beta}}\ \Gamma\left(\frac{3}{\beta}+1\right)\right]+ \\
&\quad 6\left[\left[\alpha^{-\frac{1}{\beta}}\ \Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right]^2\alpha^{-\frac{2}{\beta}}\ \Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right)\right]\ -\ 3\left[\alpha^{-\frac{1}{\beta}}\ \Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right]^4 \\
&= \alpha^{-\frac{4}{\beta}}\left[\Gamma\left(\frac{4}{\beta}+1\right)-4\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\Gamma\left(\frac{3}{\beta}+1\right)+6\,\Gamma^2\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right)-3\Gamma^4\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right]
\end{aligned}
$$

Jadi momen pusat keempatnya adalah

$$
\begin{aligned}
\mu_4 &= E(X-\mu_1)^4 \\
&= \alpha^{-\frac{4}{\beta}}\left[\Gamma\left(\frac{4}{\beta}+1\right)-4\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\Gamma\left(\frac{3}{\beta}+1\right)+6\,\Gamma^2\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right)-3\Gamma^4\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right]
\end{aligned}
$$

Sehingga pada momen pusat keempat $\left(\mu_4^{'}\right)$ yang dibagi dengan pangkat empat simpangan baku $\left(\sigma^4\right)$ menyatakan kurtosis $\left(\gamma_2\right)$.

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4^{'}}{\sigma^4} - 3 = \frac{\mu_4^{'}}{\left(\sigma^2\right)^2} - 3$$

$$= \frac{\alpha^{-\frac{4}{\beta}}\left[\Gamma\left(\frac{4}{\beta}+1\right) - 4\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\Gamma\left(\frac{3}{\beta}+1\right) + 6\,\Gamma^2\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right) - 3\Gamma^4\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right]}{\left[\alpha^{-\frac{2}{\beta}}\left[\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right)\Gamma^2\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right]\right]^2}$$

$$= \frac{\alpha^{-\frac{4}{\beta}}\left[\Gamma\left(\frac{4}{\beta}+1\right) - 4\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\Gamma\left(\frac{3}{\beta}+1\right) + 6\,\Gamma^2\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right) - 3\Gamma^4\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right]}{\alpha^{-\frac{4}{\beta}}\left[\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right)\Gamma^2\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right]^2}$$

$$= \frac{\alpha^{-\frac{4}{\beta}}\left[\Gamma\left(\frac{4}{\beta}+1\right) - 4\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\Gamma\left(\frac{3}{\beta}+1\right) + 6\,\Gamma^2\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right) - 3\Gamma^4\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right]}{\alpha^{-\frac{4}{\beta}}\left[\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right)\Gamma^2\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right]^2}$$

3.2 Tinjauan Agama terhadap Hasil Pembahasan

Al-Quran sangat menekankan dalam surat Al-Qamar ayat 49 bahwa Allah menciptakan segala sesuatu berdasarkan ukuran. Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi. Sungguh, tidak salah kiranya jika menyatakan bahwa Allah Maha Matematis.

Ayat 49 dari surat Al-Qamar di atas berarti, Allah SWT telah menciptakan segala sesuatu dengan memperhitungkan ukuran dan kesesuaian untuk manusia, serta telah mempersiapkan kondisi-kondisi yang cocok bagi manusia. Karenanya, penciptaan alam semesta sesungguhnya telah terlaksana dengan pertimbangan yang sangat bijaksana, bukan tanpa pertimbangan. Di samping itu dalam alam semesta terdapat sifat-sifat khas yang sudah disiapkan sedemikian rupa, sehingga dapat sesuai untuk segala benda dan makhluk yang ada di dalamnya. Semua ini menafikan kemungkinan bahwa alam semesta tercipta secara kebetulan, sebab suatu peristiwa kebetulan tidak akan mampu melahirkan peraturan yang teliti dan hukum yang rapi. Adanya peraturan dan hukum alam yang sangat akurat ini, tentu saja mengharuskan adanya Sang Pengatur dan Sang Pencipta yang Maha Berkuasa dan Maha Bijaksana (Fokus Edisi 4 Th 2005. http://Hbmulyana.Wordpress.Com/. Diakses tanggal 6 februari 2008).

Berdasarkan pembahasan yang telah dipaparkan di depan, didapatkan bahwa dalam penentuan momen ke-3 dan momen ke-4 harus menentukan momen pertama dan ke-2 terlebih dahulu. Hal ini sejalan dengan apa yang ada dalam surat Al-Qamar ayat 49 bahwa sesuatu yang dibentuk pasti mempunyai ukuran, tujuan serta maksud tertentu. Sebagaimna pada nilai momen pertama dibentuk untuk mencari nilai momen kedua, nilai momen ke-2 dibentuk untuk nilai mencari momen ke-3 dan seterusnya. Tidak ada sesuatu yang diciptakan Allah tanpa sengaja. Semua sudah direncanakan, diperhitungkan, dan diatur oleh-Nya, bukan merupakan sesuatu yang kebetulan.

Semua yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitungan-hitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya. Ahli matematika tidak membuat suatu rumus sedikitpun. Mereka hanya menemukan rumus atau persamaan. Rumus-rumus yang ada sekarang bukan diciptakan manusia, tetapi sudah disediakan. Manusia hanya menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika.

Berdasarkan surat Al-Furqan ayat 2, bahwasannya persamaan momen ke-3 dan momen ke-4 dalam bidang statistik matematika bukan buatan manusia, tetapi Allahlah yang telah menentukannya. Penulis hanya menemukan rumus atau persamaan tersebut. Jadi segala sesuatu yang ada di bumi manusia dapat menemukan dari hasil yang telah diteliti dan semua ini Allah yang telah menetapkan.

Manusia telah diberi akal oleh Allah, sehingga mereka harus menggunakan nikmat Allah tersebut untuk hal-hal yang yang bermanfaat. Dengan nikmat yang telah diberikan oleh Allah tersebut, harus berusaha dengan sungguh-sungguh dan harus yakin bahwa setiap permasalahan pasti ada selesaiannya. Allah telah berfirman dalam Al-Quran Surat Al-Baqarah ayat 185 yang berbunyi:

يُرِيدُ ٱللَّهُ بِكُمُ ٱلْيُسْرَ وَلَا يُرِيدُ بِكُمُ ٱلْعُسْرَ وَلِتُكْمِلُوا۟ ٱلْعِدَّةَ
وَلِتُكَبِّرُوا۟ ٱللَّهَ عَلَىٰ مَا هَدَىٰكُمْ وَلَعَلَّكُمْ تَشْكُرُونَ ﴿١٨٥﴾

Artinya: “*......Allah menghendaki kemudahan bagimu, dan tidak menghendaki kesukaran bagimu. dan hendaklah kamu mencukupkan bilangannya dan hendaklah kamu mengagungkan Allah atas petunjuk-Nya yang diberikan kepadamu, supaya kamu bersyukur.”*

Dari ayat tersebut, telah jelas bahwa Allah pasti memberi kemudahan setelah kesulitan, asalkan manusia tersebut tetap berusaha. Kaitannya dengan pembahasan ini yaitu bahwa dalam persoalan matematika, permasalahan yang ada harus dikerjakan dengan sungguh-sungguh dan memilih metode yang tepat untuk digunakan, sehingga akan didapatkan selesaian dengan mudah dan tepat sesuai dengan ukuran.

Dalam hal ini, kemudahan sangat dibutuhkan dalam mencari penentuan momen ke-3 dan ke-4 dalam bidang statistik matematika. Dalam menyelesaikan langkah-langkahnya harus teliti, untuk memperoleh hasil yang tepat dalam perhitungan secara matematis. Dalam statistik matematika, momen sering digunakan dalam mencari nilai tengah, varian, skewness (kemencengan) dan kurtosis (kelandaian kurva). Metode yang digunakannya adalah dengan menurunkan fungsi pembangkit momen secara berulang-ulang. Adapun dalam pengerjaan langkah demi langkah harus teliti dan cermat. Dalam islam sangat menekankan keharusan melakukan penyelidikan yang teliti dan pengamatan yang benar terhadap fakta-fakta konkret dalam alam semesta untuk kemudian merenungkan temuannya itu untuk mencapai kebenaran yang hakiki. Sebagai manusia yang tidak lepas dari kesalahan, maka dalam melakukan perhitungan harus teliti untuk mendapatkan kebenaran dalam hasil perhitungan. Seperti dalam Al-Quran surat Maryam ayat 94.

Dalam cahaya kekuasaan dan kehebatan Allah yang tiada batasnya, manusia hanyalah makhluk yang lemah. Tanpa kemurahan dan kasih Allah, ia tidak akan bisa bertahan. Melalui kemampuannya untuk memahami dan mempertimbangkan, manusia dapat memahami sesuatu hanya seluas apa yang diizinkan Penciptanya. Adalah sebuah keharusan bagi kita untuk menyerahkan diri sepenuhnya kepada Allah dan maksud-maksud Ilahiah yang telah ditetapkan-Nya. Apa pun yang kita alami dalam hidup ini, kita harus tetap ingat bahwa Allah adalah Tuhan yang menguasai seluruh alam semesta dan Dia mengetahui, melihat, dan mendengar apa yang tidak dapat kita ketahui, lihat, dan dengar; dan bahwa Allah mengetahui sesuatu yang akan terjadi dan tidak kita sadari. Demikianlah, kita menyadari bahwa Allahlah yang menyebabkan terjadinya setiap peristiwa sesuai dengan tujuan ilmiah, yaitu untuk kebaikan kita.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan, dapat disimpulkan bahwa:

1. Penentuan momen ke-3 dan ke-4 dari distribusi gamma, beta dan weibull adalah dengan mengetahui terlebih dahulu momen ke-1 dan momen ke-2, yaitu dengan cara menurunkan fungsi pembangkit momen dan memasukkan variabel *t* sama dengan nol.

$$E\left(X^n\right) = \frac{d^n}{dt^n} M_X(t)\bigg|_{t=0}$$

Momen pusat ketiga dari suatu peubah acak *X* yang dibagi dengan pangkat 3 simpangan baku menyatakan suatu kemencongan kurva yang sangat berarti. Yang mana pada distribusi gamma, beta dan weibul merupakan bentuk distribusi yang tidak normal. Sehingga diperoleh suatu koefisien skewness (kemencengan) dari distribusi gamma, beta dan weibull berturut-turut adalah:

$$\frac{2}{\sqrt{\alpha}}\,,\ \frac{2(-\alpha+\beta)\sqrt{\alpha+\beta+1}}{(\alpha+\beta+2)\sqrt{\alpha\beta}}\,,\ \frac{\left[\Gamma\left(\frac{3}{\beta}+1\right) - 3\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right) + 2\Gamma^3\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right]}{\left(\sqrt{\left[\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right) - \Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)^2\right]}\right)^3}$$

Sedangkan momen pusat keempat dari peubah acak x yang dibagi dengan pangkat empat simpanganb baku menyatakan tinggi rendahnya puncak kurva disebut kurtosis (pemuncakan kurva). Koefisien kurtosis dari diatribusi gamma, beta dan Weibull berturut-turut adalah:

$$\frac{6}{\alpha}+3,\ \frac{3\alpha\beta\left(2\alpha^2+\alpha^2\beta-2\alpha\beta+\alpha\beta^2+2\beta^2\right)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^4},$$

$$\text{dan } \frac{\left[\Gamma\left(\frac{4}{\beta}+1\right)-4\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\Gamma\left(\frac{3}{\beta}+1\right)+6\,\Gamma^2\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right)-3\Gamma^4\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right]}{\left[\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right)\Gamma^2\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right]^2}$$

4.2 Saran

Dalam statistika, suatu peubah acak diartikan seatu peubah yang nilainya bisa berapa saja sebagai hasil dari percobaan acak. Secara umum peubah acak dapat dibedakan menjadi dua, yaitu peubah acak diskrit dan peubah acak kontinu, oleh karena itu disarankan lebih lanjut tentang penentuan momen ke-3 dan ke-4 pada peubah acak diskrit dalam materi selanjutnya.

DAFTAR PUSTAKA

Abdusysyakir. 2006. *Ada Matematika dalam Al-Quran*. Malang: UIN Malang Press.

Abdusysyakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika.*. Malang: UIN Malang Press.

Dudewiez, Edward J. dan Mishra,Satya N. 1995. *Statistika Matematika Modern*. Bandung: ITB Bandung.

Freund, John E. dan Walpole, Ronald E. 1987. *Mathematical Statistics*. United States Of America: Prentice-Hall

Fokus Edisi 4/2005. Rahasia Dalam Angka. http://hbmulyana.wordpress.com/. Di akses tanggal 6 Februari 2008.

Harinaldi. 2005. *Prinsip-Prinsip Statistik untuk Teknik dan Sains*. Jakarta: Erlangga.

Jauhari, Syekh Tanthawi. 1984. *Quran dan Ilmu Pengetahuan Modern.* Surabaya: Al-Ikhlas.

Larsen, Richard J. dan Marx, Morris L. 1986. *An Introduction to Mathematical Statistics and Applications.* United States Of America: Prentice-Hall

Ngapuli, Petrus. 1992. *Statistika*. Malang : Luw – Universitas Brawijaya

Rosenkrantz, Walter A. 1997. *Introduction to Probability and Statistics for Scientists and Engineers*. Singapura: Mc Graw-Hill

Rahman, Afzalur. 2007. *Ensiklopediana Ilmu dalam Al-Quran*. Bandung : PT Mizan Pustaka.

Sembiring. R. K, 1995. *Analisis Regresi. Bandung* : ITB Bandung.

Speigel, Murray S. 1991. *Statistik Teori dan Soal-soal*. Jakarta : Erlangga

Supramono, Sugiarto. 1993. *Statistika*. Yogyakarta: Andi Offset.

Walpole, Ronald E. dan Myers, Raymond H. 1995. *Ilmu Peluang dan Statistika Untuk Insinyur dan Ilmuwan*. Bandung: ITB Bandung

Walpole, Ronald. Dkk. 2003. *Probabilitas dan Statistika untuk Teknik dan Sains. Jakarta : PT Prehallindo*

Wibisono, Yusuf. 2005. *Metode Statistika*. Yogyakarta : Gajah Mada University