

**PENYELESAIAN PERSAMAAN PELL
DENGAN MENGGUNAKAN ALGORITMA PQa
DAN METODE MATRIKS**

SKRIPSI

Oleh:
AHFALINISA'I
NIM: 04510026



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2008**

**PENYELESAIAN PERSAMAAN PELL
DENGAN MENGGUNAKAN ALGORITMA PQa
DAN METODE MATRIKS**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
Dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh :
AHFALINISA'I
NIM: 04510026**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2008**

**PENYELESAIAN PERSAMAAN PELL
DENGAN MENGGUNAKAN ALGORITMA PQa
DAN METODE MATRIKS**

SKRIPSI

Oleh :
AHFALINISA'I
NIM : 04510026

**Telah Disetujui untuk Diuji
Malang, 21 Oktober 2008**

Dosen Pembimbing I,

Dosen Pembimbing II,

Drs. H. Turmudi, M. Si
NIP. 150 209 630

Munirul Abidin, M.Ag
NIP. 150 321 634

**Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika**

Sri Harini, M. Si
NIP. 150 318 321

**PENYELESAIAN PERSAMAAN PELL
DENGAN MENGGUNAKAN ALGORITMA PQa
DAN METODE MATRIKS**

SKRIPSI

Oleh :
AHFALINISA'I
NIM : 04510026

**Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

Tanggal, 21 Oktober 2008

Susunan Dewan Penguji:	Tanda Tangan
1. Penguji Utama : Abdussakir, M.Pd NIP. 150 327 247	()
2. Ketua : Wahyu H. Irawan, M.Pd NIP. 150 300 415	()
3. Sekretaris : Drs. H. Turmudzi, M.Si NIP. 150 209 630	()
4. Anggota : Munirul Abidin, M.Ag NIP. 150 321 634	()

**Mengetahui dan Mengesahkan
Kajur Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi**

**Sri Harini, M.Si.
NIP. 150 318 321**

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : AHFALINISA'I

NIM : 04510026

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 21 Oktober 2008
Yang membuat pernyataan

AHFALINISA'I
NIM: 04510026

MOTTO

مَنْ جَدَّ وَجَدَ

" Sopo Temen Tinemu "

" Membuat mimpi menjadi kenyataan adalah hal yang mudah untuk dikerjakan dan mudah pula untuk tidak dikerjakan tinggal kita yang memilih "

PUSAT PERPUSTAKAAN

LEMBAR PERSEMBAHAN

Dengan Lantunan do'a dan untaian kata terimakasih yang tidak akan pernah putus hingga karya kecil ini ananda persembahkan kepada:

"Kedua orang tua Fathurrohman dan Ibunda Lilik Choiriyah. Dengan ihlas ananda dibesarkan dengan tanpa mengharap imbalan, ananda dididik hingga sampai saat ini ananda dapat mengerti arti hidup. Untuk Ayah Ibunda tercinta sungguh cinta, pengorbanan, kasih-sayang, perhatian dan jasa-jasamu tidak akan pernah ananda lupakan dan akan selalu terukir indah dalam kalbu".

KATA PENGANTAR



Puji syukur kehadiran Allah SWT yang telah memberi Rahmad serta Hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul "PENYELESAIAN PERSAMAAN PELL DENGAN MENGGUNAKAN ALGORITMA PQa DAN METODE MATRIKS" sebagai salah satu persyaratan dalam menyelesaikan pendidikan S1.

Sholawat serta salam senantiasa tercurah keharibaan Baginda Rasulullah Muhammad SAW, yang telah menuntun umatnya dari kegelapan menuju jalan yang terang yaitu Ad-dinul Islam.

Selama penulisan skripsi ini penulis telah banyak mendapat bimbingan, masukan, motivasi dan arahan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, M.Si. selaku Rektor Universitas Islam Negeri Malang.
2. Bapak Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc. selaku Dekan Fakultas Saintek Universitas Islam Negeri Malang.
3. Ibu Sri Harini, M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Malang.
4. Bapak Drs. H. Turmudi, M.Si selaku Dosen Pembimbing yang telah banyak memberi arahan dan bimbingan kepada penulis.
5. Bapak Munirul Abidin, M.Ag selaku Dosen Pembimbing Integrasi Sains dan Islam yang juga telah banyak memberi arahan kepada penulis.
6. Bapak Abdussakir, M.Pd yang banyak memberi masukan dan motivasi dalam penulisan skripsi ini dan segenap Bapak/Ibu Dosen Fakultas Sains dan

Teknologi, khususnya dosen jurusan Matematika yang pernah mendidik dan memberikan ilmunya yang tak ternilai harganya.

7. Kedua Orang Tua Fathurrohman dan Lilik Choiriyah yang senantiasa dengan limpahan do'a dan pengorbanan yang tiada tara, sungguh kasihmu telah memberikan dorongan dan semangat dalam menjalani kehidupan ini, terimakasih Ayah Ibu.
8. Teman-teman matematika angkatan 2004 dalam susah dan senang menemani penulis dalam menuntut ilmu terutama teman satu bimbingan skripsi yang selalu memberi semangat dan teman-teman kos, sungguh kenangan bersama kalian tidak akan terlupakan.
9. Semua pihak yang terlibat baik secara langsung maupun tidak langsung demi selesainya skripsi ini.

semoga Allah membalas semua amal baik dengan balasan yang berlipat ganda.

Dengan segala kerendahan hati, penulis juga menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, untuk itu kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan. Kepada semua pihak yang membaca skripsi ini, semoga dapat mengambil manfaatnya. Amin.

Malang, 21 Oktober 2008

Penulis,

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI	ii
DAFTAR TABEL	iii
ABSTRAK	v
BAB I : PENDAHULUAN	
1.1. Latar Belakang	1
1.2. Rumusan masalah	5
1.3. Tujuan Penelitian	5
1.4. Batasan Masalah	6
1.5. Manfaat Penelitian	6
1.6. Metode Penelitian	6
1.7. Sistematika Pembahasan	8
BAB II : KAJIAN PUSTAKA	
2.1. Himpunan Bilangan	10
2.2. Keterbagian	12
2.3. Pecahan Berulang	13
2.3.1 Pecahan Berulang Berhingga (<i>finite</i>)	13
2.3.2 Pecahan Berulang Tak Hingga (<i>infinite</i>)	14
2.4. Kekongruenan	16
2.5. Persamaan Diophantine	18

2.5.1	Sejarah Persamaan Diophantine	18
2.5.2	Macam-macam Persamaan Diophantine	19
2.6.	Algoritma PQa	21
2.6.1	Definisi Algoritma	21
2.6.2	Algoritma PQa	21
2.7.	Matriks	24
2.8.	Kajian Tentang Teori Bilangan dalam Al Qu'ran	27

BAB III : PEMBAHASAN

2.9.	Penyelesaian Persamaan Pell dengan Algoritma PQa	33
2.10.	Penyelesaian Persamaan Pell dengan Metode Matriks	64
2.11.	Implementasi Persamaan Pell dalam Agama Islam	81

BAB IV : PENUTUP

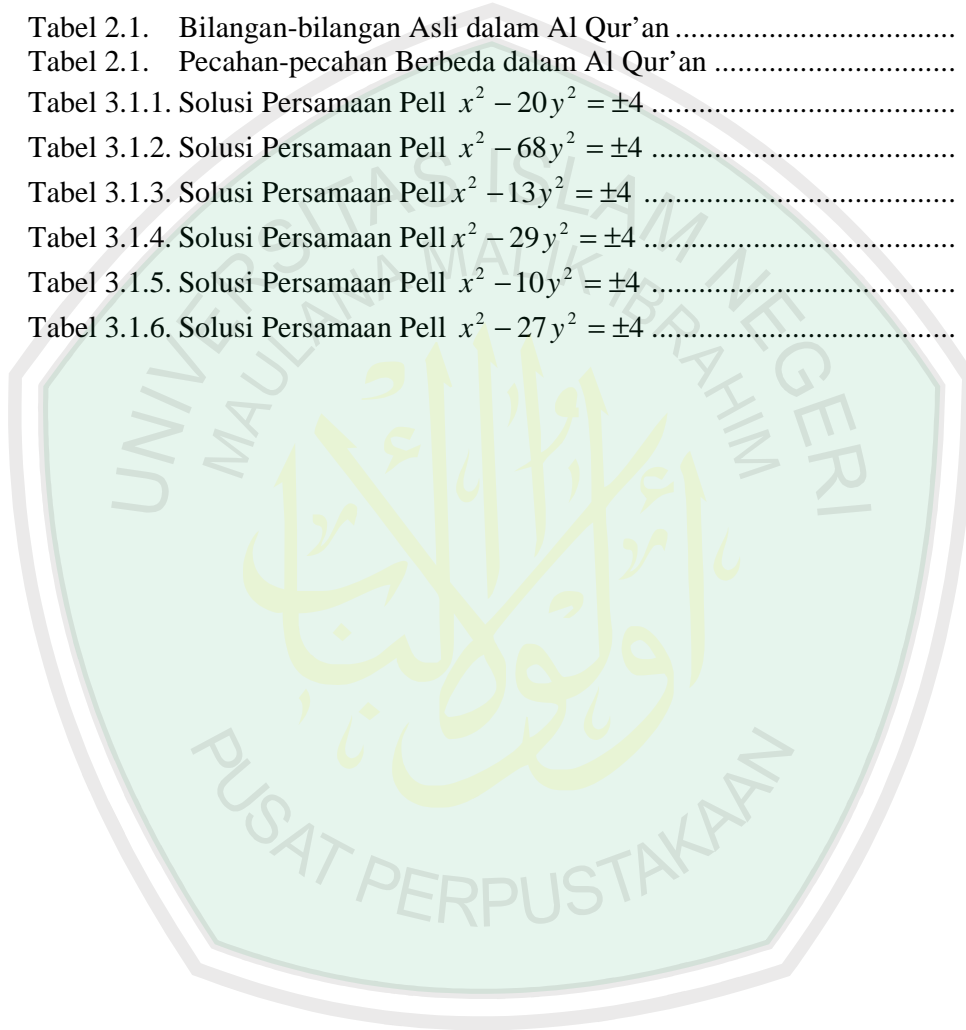
2.12.	Kesimpulan	87
2.13.	Saran	88

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN-LAMPIRAN

DAFTAR TABEL

Tabel	Halaman
Tabel 2.1. Bilangan-bilangan Asli dalam Al Qur'an	30
Tabel 2.1. Pecahan-pecahan Berbeda dalam Al Qur'an	30
Tabel 3.1.1. Solusi Persamaan Pell $x^2 - 20y^2 = \pm 4$	40
Tabel 3.1.2. Solusi Persamaan Pell $x^2 - 68y^2 = \pm 4$	44
Tabel 3.1.3. Solusi Persamaan Pell $x^2 - 13y^2 = \pm 4$	49
Tabel 3.1.4. Solusi Persamaan Pell $x^2 - 29y^2 = \pm 4$	54
Tabel 3.1.5. Solusi Persamaan Pell $x^2 - 10y^2 = \pm 4$	59
Tabel 3.1.6. Solusi Persamaan Pell $x^2 - 27y^2 = \pm 4$	63



ABSTRAK

Ahfalinisa'i. 2008. **Penyelesaian Persamaan Pell dengan Menggunakan Algoritma PQa dan Metode Matriks**. Skripsi Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang. Pembimbing: Drs. H. Turmudi, M.Si dan Munirul Abidin, M.Ag

Kata kunci : Persamaan Pell, Algoritma PQa dan Metode Matriks.

Persamaan Diophantine merupakan persamaan polynomial yang mensyaratkan selesainya berupa bilangan bulat. Persamaan Diophantine dibagi menjadi dua, yaitu persamaan Diophantine linier dan non linier. Persamaan yang berbentuk $x^2 - Dy^2 = N$ merupakan bagian dari persamaan Diophantine non linier dengan diberikan koefisien D bilangan bulat positif bukan kuadrat sempurna dan konstanta N berupa bilangan bulat. Variabel x dan y adalah selesaian dari persamaan tersebut. Persamaan ini disebut dengan persamaan Pell. Menyelesaikan persamaan Pell dapat dilakukan dengan berbagai metode. Metode Brahmagupta dan pecahan berulang telah digunakan untuk membahas persamaan Pell dengan konstanta $N = \pm 1$ pada skripsi sebelumnya. Kesempatan kali ini penulis memperkenalkan penyelesaian persamaan Pell yang berbentuk $x^2 - Dy^2 = \pm 4$ dengan menggunakan algoritma PQa dan metode matriks.

1. Menyelesaikan persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = \pm 4$ dengan algoritma PQa dapat dilakukan dengan beberapa langkah sebagai berikut:

a. Menentukan apakah: $D \equiv 0 \pmod{4}$, $D \equiv 1 \pmod{4}$, dan $D \equiv 2$ atau $3 \pmod{4}$

b. Menentukan nilai dari a_i , P_i dan Q_i dengan rumus:

$$a_i = \frac{(P_i + \sqrt{D})}{Q_i}, i \geq 0, P_i = a_{i-1}Q_{i-1} - P_{i-1}, i \geq 1 \text{ dan } Q_i = \frac{D - P_i^2}{Q_{i-1}}, i \geq 1$$

c. Menentukan nilai x_i dan y_i dengan $i \geq 0$ dengan rumus:

$$x_i = a_i x_{i-1} + x_{i-2} \text{ dan } y_i = a_i y_{i-1} + y_{i-2}$$

d. Mensubstitusi nilai x dan y ke dalam persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = \pm 4$ untuk mengetahui apakah x dan y merupakan solusi dari persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = 4$ atau $x^2 - Dy^2 = -4$.

2. Menyelesaikan persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = \pm 4$ dengan metode matriks dapat dilakukan dengan rumus-rumus sebagai berikut:

a. Untuk persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = 4$, maka $(x_n, y_n) = \left(\frac{u_n}{2^{n-1}}, \frac{v_n}{2^{n-1}} \right)$, $n \geq 1$

b. Untuk persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = -4$, maka $(x_{2n+1}, y_{2n+1}) = \left(\frac{u_{2n+1}}{2^n}, \frac{v_{2n+1}}{2^n} \right)$,

$n \geq 0$

BAB I PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu pengetahuan yang banyak sekali manfaatnya. Demikian juga perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi yang sangat pesat saat ini tidak lepas dari peran serta ilmu matematika. Telah diketahui bahwa banyak ahli matematika mencoba mendefinisikan matematika sebagai ilmu tentang bilangan dan ruang, ilmu tentang besaran, ilmu tentang bentuk dan lain sebagainya. Definisi yang ada semuanya benar, berdasar sudut pandang tertentu. Ciri khas dari ilmu matematika yang tidak dimiliki pengetahuan lain adalah (1) merupakan abstraksi dari dunia nyata, (2) menggunakan bahasa simbol, dan (3) menganut pola pikir deduktif.

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep tentang matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Allah menciptakan alam semesta serta segala isinya menurut ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan yang benar serta dengan rumus-rumus dan persamaan yang rapi. Hal ini menunjukkan bahwa Allah SWT Maha Matematis, Allah Maha Cepat dan Maha Teliti dalam masalah hitung-menghitung. Perhatikan firman Allah dalam surat Al-Furqan ayat dua:

وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَرَهُ تَقْدِيرًا

Artinya: ...dan Dia telah menciptakan segala sesuatu dan dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya.

Perhatikan juga firman Allah dalam surat Maryam ayat 84:

فَلَا تَعْجَلْ عَلَيْهِمْ إِنَّمَا نَعُدُّ لَهُمْ عَدًّا ﴿٨٤﴾

Artinya: Maka janganlah kamu tergesa-gesa memintakan siksa terhadap mereka, Karena Sesungguhnya Kami hanya menghitung datangnya (hari siksaan) untuk mereka dengan perhitungan yang teliti.

Dalam dunia Islam matematika banyak dijumpai dalam masalah *faraidh*, begitu juga dalam kitab suci Al Qur'an. Banyak ayat yang di dalamnya memuat tentang bilangan menyebutkan bahwa terdapat sebanyak 38 bilangan berbeda. Dari 38 bilangan tersebut, 30 bilangan merupakan bilangan asli dan 8 bilangan merupakan pecahan (rasional) (Abdusysyagir, 2007: 116).

Salah satu contoh ayat Al Qur'an yang secara tersirat menjelaskan tentang bilangan dapat dijumpai dalam surat Al-A'raf ayat 142:

وَوَاعَدْنَا مُوسَىٰ ثَلَاثِينَ لَيْلَةً وَأَتَمَمْنَا بِعَشْرِ فِئْتِمٍ مِّقَاتُ رَبِّهِ أَرْبَعِينَ لَيْلَةً
وَقَالَ مُوسَىٰ لِأَخِيهِ هَارُونَ أَخْلِفْنِي فِي قَوْمِي وَأَصْلِحْ وَلَا تَتَّبِعْ سَبِيلَ الْمُفْسِدِينَ

﴿١٤٢﴾

Artinya: Dan telah Kami janjikan kepada Musa (memberikan Taurat) sesudah berlalu waktu tiga puluh malam, dan Kami sempurnakan jumlah malam itu dengan sepuluh (malam lagi), Maka sempurnalah waktu yang Telah ditentukan Tuhannya empat puluh malam. dan Berkata Musa kepada saudaranya yaitu Harun: "Gantikanlah aku dalam (memimpin) kaumku, dan perbaikilah, dan janganlah kamu mengikuti jalan orang-orang yang membuat kerusakan".

Abdusysyagir (2006: 58) mengemukakan bahwa setelah mengetahui bahwa Al Qur'an berbicara mengenai bilangan, maka makna yang dapat

ditangkap adalah bahwa orang muslim harus mengenal bilangan, karena tanpa mengenal bilangan, seorang muslim tidak akan memahami Al Qur' an dengan baik ketika membaca ayat-ayat yang berkaitan tentang bilangan tersebut.

Dari segi wilayah kajian, Matematika berawal dari ruang lingkup yang sederhana, yang hanya menelaah tentang bilangan dan ruang, namun sekarang Matematika sudah berkembang dengan menelaah hal-hal yang membutuhkan daya pikir dan imajinasi tingkat tinggi (Abdusysyakir, 2007:6).

Ilmu Matematika sangatlah luas, salah satunya mempelajari tentang Teori Bilangan. Teori Bilangan merupakan dasar dari ilmu Matematika khusus yang mempelajari tentang bilangan bulat (Niven, dkk, 1991:1). Dalam teori bilangan juga dipelajari suatu persamaan Dhiophantine yang merupakan persamaan polinomial (dengan n peubah) yang mensyaratkan selesaiannya berupa bilangan bulat.

Persamaan Dhiophantine dibagi menjadi dua ada yang linear dan non linear tergantung pangkat variabelnya. Dilihat dari banyaknya variabel persamaan Diophantine ada yang dua, tiga, sampai n variabel. Diantara persamaan Diophantine tersebut ada persamaan Diophantine linear dengan dua peubah, persamaan Dhiophantine linier dengan tiga peubah dan persamaan Diophantine non linear termasuk di dalamnya terdapat persamaan Pell.

Persamaan Diophantine memiliki bentuk umum $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n = b$, berlaku untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, b \in \mathbb{Z}$. Dengan $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ merupakan koefisien bilangan bulat, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ menyatakan variabel dan b adalah konstanta, dengan

selesaiannya mensyaratkan bilangan bulat, jika variabelnya dua, maka disebut persamaan Diophantine linier dua peubah, jika variabelnya tiga disebut persamaan Diophantine linier tiga peubah dan lain sebagainya.

Persamaan Diophantine kuadrat dua dengan dua variabel memiliki bentuk umum $ax^2 + by^2 = c$ dengan $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Selain itu juga terdapat persamaan Diophantine dengan dua peubah yang mempunyai bentuk umum $x^2 - Dy^2 = N$, untuk D koefisien berupa bilangan bulat positif dan N konstanta berupa bilangan bulat.

Stark (1970: 149) memberikan contoh suatu persamaan Diophantine yang berbentuk $x^2 - dy^2 = 1$, $x^2 - dy^2 = -1$ dengan x dan y adalah variabel tidak diketahui menyebut persamaan tersebut dengan Persamaan Pell-Fermat atau hanya Persamaan Pell. Sehingga dapat didefinisikan bahwa persamaan $x^2 - Dy^2 = N$ dengan diberikan bilangan bulat D dan N serta x dan y adalah variabel tak diketahui, disebut sebagai persamaan Pell (Niven, dkk, 1991: 351).

Penyelesaian persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = N$ dapat dicari dengan berbagai metode. Pada pembahasan sebelumnya untuk persamaan Pell dengan nilai $N = \pm 1$ telah diteliti oleh Ainun Jariah dan Ismiatul Husniah. Persamaan tersebut diselesaikan dengan metode Brahmagupta dan metode Pecahan Berulang. Kesempatan kali ini penulis mencoba memperkenalkan penyelesaian persamaan Pell dengan menggunakan suatu algoritma yang disebut dengan algoritma PQa dan dengan menggunakan metode matriks.

Robertson (2004: 4) menyebut algoritma PQa sebagai jantung dari beberapa metode penyelesaian persamaan Pell. Algoritma ini menghitung

ekspansi dari pecahan berulang dari bentuk kuadrat irrasional $\frac{P_0 + \sqrt{D}}{Q_0}$, untuk P_0 ,

Q_0 , dan D berupa bilangan bulat tertentu.

Sesuai dengan uraian di atas, maka penulis tertarik untuk membahas dan mencoba mengembangkan lebih lanjut pembahasan tentang penyelesaian persamaan Pell khususnya persamaan Pell berbentuk $x^2 - Dy^2 = \pm 4$ dengan menggunakan algoritma PQa dan metode matriks agar lebih mudah untuk mencari selesaiannya. Sesuai dengan latar belakang di atas penulis memberi judul skripsi ini dengan “PENYELESAIAN PERSAMAAN PELL DENGAN MENGGUNAKAN ALGORITMA PQa DAN METODE MATRIKS”.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas dapat ditarik rumusan masalah yang akan dibahas dalam skripsi ini yaitu bagaimana cara menyelesaikan persamaan Pell dengan menggunakan algoritma PQa dan dengan metode matriks.

1.3. Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penulisan skripsi ini adalah untuk mengetahui bagaimana cara menyelesaikan persamaan Pell dengan menggunakan algoritma PQa dan dengan metode matriks.

1.4. Batasan Masalah

Agar penulisan skripsi ini tetap terfokus pada pembahasan, maka penulis membatasi masalah pada penyelesaian persamaan Pell berbentuk $x^2 - Dy^2 = \pm 4$ dengan konstanta $N = \pm 4$ dan koefisien D bukan kuadrat sempurna.

1.5. Manfaat Penelitian

1. Bagi penulis

Menambah wawasan dan ilmu pengetahuan tentang cara mengkaji dan membandingkan penyelesaian permasalahan yang ada dalam Matematika tentang konsep persamaan Diophantine, khususnya persamaan Pell.

2. Bagi Jurusan Matematika

- a. Memberikan sedikit sumbangsih yang berupa bahan kajian dan pengembangan matematika murni, sehingga selain dapat menggunakan teori Matematika dalam aplikasinya yang nyata juga dapat mengembangkan ilmu matematika itu sendiri.
- b. Sebagai bahan referensi bahwa penyelesaian persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = \pm 4$ dapat diselesaikan dengan mudah dengan menggunakan algoritma PQa dan dengan metode matriks.

1.6. Metode Penelitian

Metode merupakan cara utama yang akan ditempuh untuk menemukan jawaban dari suatu permasalahan. Metode penelitian yang digunakan dalam

penulisan skripsi ini adalah metode penelitian “Kajian Kepustakaan” atau “*Literature Study*”. Pembahasan pada skripsi ini dilakukan dengan:

1. Mengumpulkan dan mempelajari literatur yang berupa buku-buku makalah, dokumentasi, notulen, catatan harian, internet dan lain-lain yang berkaitan dengan masalah penelitian yang akan digunakan dalam menyelesaikan persamaan Pell. Adapun literatur utama yang penulis gunakan berupa jurnal yang berjudul "*Solving the generalized Pell equation $x^2 - Dy^2 = N$* " karya John P. Robertson dan "*The Pell Equation $x^2 - Dy^2 = \pm 4$* " karya Ahmet Tekcan.
2. Menentukan pokok permasalahan dari literatur utama berupa cara mencari selesaian dari persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = \pm 4$ dengan menggunakan algoritma PQa dan metode matriks.
3. Data pada pembahasan skripsi ini berupa contoh-contoh soal persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = \pm 4$.
4. Cara menyelesaikan persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = \pm 4$ dengan menggunakan algoritma PQa dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:
 - a. Menentukan apakah: $D \equiv 0 \pmod{4}$, $D \equiv 1 \pmod{4}$ dan $D \equiv 2$ atau $3 \pmod{4}$
 - b. Menentukan nilai dari a_i , P_i dan Q_i dengan rumus:

$$a_i = \frac{(P_i + \sqrt{D})}{Q_i}, i \geq 0, P_i = a_{i-1}Q_{i-1} - P_{i-1}, i \geq 1 \text{ dan } Q_i = \frac{D - P_i^2}{Q_{i-1}}, i \geq 1$$
 - c. Menentukan nilai x_i dan y_i dengan $i \geq 0$ dengan rumus:

$$x_i = a_i x_{i-1} + x_{i-2} \text{ dan } y_i = a_i y_{i-1} + y_{i-2}$$

- d. Mensubstitusi nilai x dan y ke dalam persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = \pm 4$ untuk mengetahui apakah x dan y merupakan solusi dari persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = 4$ atau $x^2 - Dy^2 = -4$.

5. Cara menyelesaikan persamaan Pell dengan metode matriks sebagai berikut:

- a. Untuk persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = 4$, maka $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dengan

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{u_n}{2^{n-1}}, \frac{v_n}{2^{n-1}} \right), \text{ untuk } n \geq 1.$$

- b. Untuk persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = -4$, maka $\begin{pmatrix} u_{2n+1} \\ v_{2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}^{2n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{dengan } (x_{2n+1}, y_{2n+1}) = \left(\frac{u_{2n+1}}{2^n}, \frac{v_{2n+1}}{2^n} \right), \text{ untuk } n \geq 0.$$

6. Analisis data berupa pembuktian apakah variabel x dan y dari selesaian persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = \pm 4$ akan bernilai sama jika diselesaikan dengan menggunakan algoritma PQa maupun dengan metode matriks yang diterapkan pada contoh-contoh soal pembahasan.

1.7. Sistematika Pembahasan

Agar dalam penulisan dan pembahasan skripsi ini sistematis dan mudah untuk dipahami, maka pembahasannya disusun menjadi empat bab sebagai berikut:

BAB I : Pendahuluan, yang berisi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika pembahasan.

BAB II : Kajian pustaka, yang berisi teori-teori yang mendukung terhadap rumusan masalah penelitian.

BAB III : Pembahasan, yang berisi ulasan tentang jawaban dari rumusan masalah.

BAB IV : Penutup, berisi kesimpulan dan saran-saran.



BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1. Himpunan Bilangan

Himpunan adalah kumpulan objek-objek yang terdefinisi dengan jelas. Objek-objek yang termasuk dalam suatu himpunan disebut unsur atau anggota himpunan. Beberapa himpunan yang sering ditemui adalah sebagai berikut:

1. Bilangan Asli, N

Himpunan bilangan asli atau bilangan bulat positif dinotasikan dengan N .

Berikut adalah himpunan bilangan asli:

$$\{1, 2, 3, \dots\}$$

(Abdussakir, 2006: 2)

2. Bilangan Bulat, Z

Bilangan bulat termasuk bilangan Real

$$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

Bilangan bulat dinotasikan dengan Z , dapat dituliskan sebagai berikut:

$$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

(Lipschutz, 1981: 30)

3. Bilangan Rasional, Q

Bilangan rasional termasuk bilangan real dapat dituliskan sebagai rasio dari dua bilangan bulat. Bilangan rasional dinotasikan dengan Q .

$$Q = \{x / x = \frac{p}{q}, \text{ dimana } p \in Z, q \in Z\}$$

masing-masing bilangan bulat termasuk bilangan rasional, sebagai contoh:

$$5 = \frac{5}{1}. \text{ Dengan demikian } Z \text{ subset dari } Q.$$

(Lipschutz, 1981: 30)

4. Bilangan Irrasional, Q'

Himpunan bilangan real yang tidak dapat dinyatakan sebagai $\frac{a}{b}$ dengan $a, b \in Z$ dan $b \neq 0$ disebut himpunan bilangan irrasional. Bilangan $\sqrt{2}, \sqrt{3}$, dan $\sqrt{8}$ adalah contoh bilangan irrasional.

(Abdussakir, 2006: 2)

Bilangan bulat memiliki sifat-sifat sebagai berikut:

1. Sifat tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian.

$\forall a, b \in Z$, maka:

Ada dengan tunggal $a + b \in Z$

Ada dengan tunggal $a \times b \in Z$

2. Sifat komutatif terhadap operasi penjumlahan dan perkalian

$\forall a, b \in Z$, maka:

$$a + b = b + a$$

$$a \times b = b \times a$$

3. Sifat asosiatif penjumlahan dan perkalian

$\forall a, b, c \in Z$, maka:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

4. Sifat distributif kiri dan kanan perkalian terhadap penjumlahan

$\forall a, b, c \in Z$, maka:

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c$$

5. Ketunggalan invers penjumlahan

$\forall a \in Z$, ada elemen $-a \in Z$ dinamakan invers penjumlahan dari a .

6. Ada elemen identitas penjumlahan

$\forall a \in Z$, ada elemen 0 dalam Z sehingga:

$$a + 0 = 0 + a = a,$$

0 dinamakan elemen identitas penjumlahan.

7. Ada elemen identitas perkalian

$\forall a \in Z$, ada dengan tunggal elemen 1 dalam Z sehingga:

$$a \times 1 = 1 \times a = a,$$

1 dinamakan elemen identitas perkalian.

8. Perkalian dengan nol, $\forall a \in Z$, maka:

$$0 \times a = a \times 0 = 0$$

2.2. Keterbagian

Algoritma pembagian atau sering disebut algoritma Euclid menyatakan bahwa jika suatu bilangan bulat dibagi oleh bilangan bulat lain, maka ada hasil dan sisanya.

Definisi: Jika m, n bilangan-bilangan bulat dan $m \neq 0$, maka m membagi (habis) n

(ditulis $m|n$) jika dan hanya jika $n = km$, untuk suatu bilangan bulat k

(Sukirman, 2005: 15)

Sebagai contoh: $2|8$, $(-6)|24$, $5|(-15)$ dan $(-4)|(-12)$.

Jika $m | n$, maka kita katakan bahwa m pembagi atau faktor dari n , atau n adalah kelipatan dari m . Untuk menyatakan bahwa m tidak membagi n ditulis $m \nmid n$.

Definisi: Misalkan a dan b adalah bilangan-bilangan bulat yang tidak nol, faktor persekutuan terbesar (FPB) dari a dan b adalah c ditulis $(a, b) = c$ jika dan hanya jika: (i) $c > 0$, (ii) $c|a$ dan $c|b$ dan (iii) jika $d|a$ dan $d|b$

Maka $d|c$.

(Sukirman, 2005: 16)

Sebagai contoh: $(24, 9) = 3$

2.3. Pecahan Berulang

2.3.1. Pecahan Berulang Berhingga (*finite*)

Ekspansi pecahan berulang dari ξ_0 atau $\frac{u_0}{u_1}$ dari bilangan rasional dan

bilangan bulat a_i sebagai hasil bagi dapat dituliskan dengan:

$$\xi_0 = \frac{u_0}{u_1} = a_0 + \frac{1}{\begin{matrix} \vdots \\ a_{j-1} + \frac{1}{a_j} \end{matrix}}$$

Contoh : Selesaikan pecahan berulang $\frac{51}{22}$!

Penyelesaian: $\frac{51}{22} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{7}}$ atau $\frac{51}{22} = \langle 2, 3, 7 \rangle$

2.3.2. Pecahan Berulang Tak Hingga (*infinite*)

Bentuk polynomial dari ekspansi pecahan berulang dapat dituliskan dengan jelas. Seperti biasa $[a_0; \overline{a_1, \dots, a_n, 2a_0}]$ menunjukkan periode infinit dari pecahan berulang

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots a_{n-1} + \frac{1}{a_n + \frac{1}{2a_0 + \frac{1}{a_1 + \dots}}}}}$$

(Laughlin, 1999: 3)

Jadi pada bilangan bulat, suatu ekspansi dari pecahan berulang diberikan dengan $\sqrt{D} = [a_0; \overline{a_1, a_2, \dots, a_2, a_1, 2a_0}]$ dan periode dari $a_1, a_2, \dots, a_2, a_1, 2a_0$ ditulis dengan m .

Contoh: Selesaikan pecahan berulang dari $\sqrt{41}$!

Penyelesaian: $\sqrt{41} = 6 + \sqrt{41} - 6 = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{41} - 6}}$

$$\frac{1}{\sqrt{41} - 6} = \frac{\sqrt{41} + 6}{5} = \frac{10 + \sqrt{41} - 4}{5} = 2 + \frac{\sqrt{41} - 4}{5}$$

$$= 2 + \frac{25}{5(\sqrt{41} + 4)} = 2 + \frac{1}{\frac{\sqrt{41} + 4}{5}}$$

$$\frac{\sqrt{41}+4}{5} = \frac{10+\sqrt{41}-6}{5} = 2 + \frac{\sqrt{41}-6}{5} = 2 + \frac{5}{5(\sqrt{41}+6)}$$

$$= 2 + \frac{1}{\sqrt{41}+6}$$

$$\sqrt{41}+6 = 12 + \sqrt{41}-6 = 12 + \frac{1}{2 + \frac{1}{12 + \frac{1}{\sqrt{41}+6}}}$$

Jadi nilai dari $\sqrt{41} = 6 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{12 + \frac{1}{\sqrt{41}+6}}}}$

atau $\sqrt{41} = [6; \overline{2,2,12}]$

Perhitungan secara numerik termasuk dalam menentukan pecahan berulang dapat menjadi cukup panjang. Jika ξ_0 adalah bentuk kuadrat irrasional,

maka dapat diselesaikan dengan $\xi_0 = \frac{(m_0 + \sqrt{d})}{q_0}$, $q_0 | (d - m_0^2)$ sehingga

didapatkan :

$$a_0 = \left[\frac{m_0 + \sqrt{d}}{q_0} \right], \quad m_1 = a_0 q_0 - m_0, \quad q_1 = \frac{d - m_1^2}{q_0}$$

$$a_1 = \left[\frac{m_1 + \sqrt{d}}{q_1} \right], \quad m_2 = a_1 q_1 - m_1, \quad q_2 = q_0 + a_1 (m_1 - m_2)$$

$$a_{i-1} = \left[\frac{m_{i-1} + \sqrt{d}}{q_{i-1}} \right], \quad m_i = a_{i-1} q_{i-1} - m_{i-1}, \quad q_i = q_{i-2} + a_{i-1} (m_{i-1} - m_i), i \geq 1$$

(Niven, dkk, 1991: 358)

Dalam hal ini diberikan a , m dan q bilangan bulat, d bilangan bulat bukan kuadrat sempurna.

Contoh: Selesaikan pecahan berulang dari $\frac{1+\sqrt{29}}{2}$!

$$\text{Penyelesaian: } \frac{1+\sqrt{29}}{2} = \frac{1+5+\sqrt{29}-5}{2} = \frac{6+\sqrt{29}-5}{2} = 3 + \frac{1}{\frac{\sqrt{29}+5}{2}}$$

Dari perhitungan diperoleh $a_0 = 3$, dengan demikian dapat dicari

$$m_1 = 3 \cdot 2 - 1 = 5 \text{ dan } q_1 = \frac{29-5^2}{2} = \frac{29-25}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Jadi $a_0 = 3$, $m_1 = 3$ dan $q_1 = 2$.

2.4. Kekongruenan

Definisi: Jika m suatu bilangan bulat positif, maka a kongruen dengan b modulo m (ditulis $a \equiv b \pmod{m}$) bila dan hanya bila m membagi $(a - b)$. Jika m tidak membagi $(a - b)$ maka dikatakan bahwa a tidak kongruen dengan b modulo m (ditulis $a \not\equiv b \pmod{m}$).

(Sukirman, 2005: 20)

Definisi tersebut dapat ditulis bahwa hanya jika $m > 0$ maka $m \mid (a - b)$ bila dan hanya bila $a \equiv b \pmod{m}$.

Teorema: $a \equiv b \pmod{m}$ bila dan hanya bila ada bilangan bulat k sehingga $a = mk + b$.

(Sukirman, 2005: 20)

Bukti: Jika a dan m bilangan-bilangan bulat positif dan $m > 0$, menurut algoritma pembagian, maka a dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$a = mq + r \text{ dengan } 0 \leq r < m.$$

Ini berarti bahwa $a - r = mq$, yaitu $a \equiv r \pmod{m}$. Karena $0 \leq r < m$, maka ada m buah pilihan untuk r , yaitu $0, 1, 2, 3, \dots, (m-1)$. Jadi setiap bilangan bulat akan kongruen modulo m dengan tepat satu di antara $0, 1, 2, 3, \dots, (m-1)$.

Contoh :

$$26 \equiv 4 \pmod{11} \text{ sama artinya dengan } 26 = 11 \cdot 2 + 4.$$

$$38 \equiv 3 \pmod{5} \text{ sama artinya dengan } 38 = 5 \cdot 7 + 3.$$

Kekongruenan modulo suatu bilangan bulat positif adalah suatu relasi antara bilangan-bilangan bulat. Dapat ditunjukkan bahwa relasi kekongruenan itu merupakan relasi ekuivalensi. Dapat diingat bahwa suatu relasi disebut relasi ekuivalensi jika relasi itu memiliki sifat refleksi, sifat simetris dan sifat transitif.

Sukirman (2005: 21) mengungkapkan bahwa jika m , a , b dan c adalah bilangan-bilangan bulat dengan m positif, maka:

- (i) $a \equiv a \pmod{m}$, sifat refleksi
- (ii) Jika $a \equiv b \pmod{m}$ maka $b \equiv a \pmod{m}$, sifat simetris
- (iii) Jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan $b \equiv c \pmod{m}$ maka $a \equiv c \pmod{m}$ sifat transitif

Kita buktikan tiap-tiap sifat itu!

- (i) Karena $a - a = 0 = 0m$, maka $a \equiv a \pmod{m}$
- (ii) Karena $a \equiv b \pmod{m}$ maka $b - a = km$ untuk suatu bilangan bulat k , sehingga $a - b = -km$ yang berarti bahwa $b \equiv a \pmod{m}$.
- (iii) $a \equiv b \pmod{m}$ berarti $a - b = km$ untuk suatu bilangan bulat k .

$b \equiv c \pmod{m}$ berarti $b - c = hm$ untuk suatu bilangan bulat h . Ruas-ruas pada kedua persamaan dijumlahkan, sehingga diperoleh $a - c = (k - h)m$ yang berarti bahwa $a \equiv c \pmod{m}$.

Karena relasi " \equiv " (kekongruenan) pada himpunan bilangan bulat memenuhi tiga sifat tersebut, maka relasi kekongruenan pada himpunan tersebut merupakan relasi ekuivalen.

2.5. Persamaan Diophantine

2.6.1. Sejarah Persamaan Diophantine

Diophantus adalah seorang ahli matematika yang produktif dan terakhir dari zaman Yunani. Dialah ahli matematika yang pertama kali melakukan operasi seperti $(x-1)(x-2)$ tanpa referensi secara geometri. Identitas seperti $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ juga dibuktikannya secara aljabar. Diophantus juga menyelesaikan persamaan-persamaan simultan dan beberapa karyanya dalam Teori Bilangan sangat dikagumi oleh para cendekiawan matematika sampai saat ini, oleh sebab itu Diophantus sering disebut sebagai *Bapak Aljabar*.

Selama abad 14-16 tidak ada kemajuan yang dicapai baik dari Diophantus maupun Fermat yang juga ahli matematika. Untuk selanjutnya Fermat tertarik dengan bahasan yang timbul setelah Diophantus membaca buku milik Bachet edisi 1621. Buku tersebut mengingatkannya kembali tentang pekerjaan Diophantus. Dengan topik modern dari Fermat ini maka analisis Diophantine telah dimulai (Harold, 1970: 145).

Dalam matematika, persamaan Diophantine adalah sebuah persamaan polynomial yang memberikan variabel-variabel tertentu dengan selesaian berupa bilangan bulat. Permasalahan dari persamaan Diophantine adalah persamaan yang memiliki sedikit variabel yang tidak diketahui dan meliputi cara menentukan bilangan bulat dengan benar dari seluruh persamaan. Misalkan a_1, a_2, \dots, a_n adalah bilangan bulat, dan semuanya bukan nol, x_1, x_2, \dots, x_n menyatakan variabel dan c adalah konstanta maka bentuk umum persamaan Diophantine dapat dituliskan dengan

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = c$$

(Niven, dkk, 1991: 219)

2.6.2. Macam-macam Persamaan Diophantine

Persamaan Diophantine dibagi menjadi dua, yaitu persamaan Diophantine Linier dan Non Linier.

1. Persamaan Diophantine Linier

Persamaan Diophantine Linier dengan dua variabel berbentuk $ax + by = c$ dimana a, b, c adalah bilangan bulat dan selesaian dari persamaan ini yaitu x dan y juga bilangan bulat. Jika $a = b = c = 0$ maka sepasang bilangan bulat (x, y) merupakan solusi dari $ax + by = c$. Jika $a = b = 0$ dan $c \neq 0$ maka $ax + by = c$ tidak ada selesaiannya (Niven, dkk, 1991: 212).

Persamaan Diophantine linier yang memiliki variabel dua disebut persamaan Diophantine linier dua peubah, jika variabelnya tiga disebut persamaan Diophantine tiga peubah dan seterusnya.

2. Persamaan Diophantine Non Linier (kuadratis)

Persamaan Diophantine non linier merupakan persamaan Diophantine yang variabelnya berpangkat lebih dari satu. Misal a_1, a_2, \dots, a_k, n bilangan bulat, kemudian ditentukan bentuk polynomial $f(x_1, \dots, x_k)$ dengan variabel x_1, \dots, x_k yang diberikan oleh $f(x_1, \dots, x_k) = a_1 x_1^2 + \dots + a_k x_k^2$, maka $f(x_1, \dots, x_k) = n$ disebut persamaan Diophantine kuadrat.

Beberapa dari persamaan Diophantine non linier dapat berupa persamaan Pythagoras $x^2 + y^2 = z^2$ dengan nilai x, y dan z bilangan bulat positif. Pythagoras menggambarkan solusi untuk sisi paling kecil dari persamaan Pythagoras diberikan $x = 2a + 1$, untuk sisi yang lebih besar diberikan $y = 2a^2 + 2a$, dan sisi miringnya diberikan $z = y + 1$ (Dickson, 1971: 165). Selain persamaan Pythagoras juga terdapat bentuk lain dari persamaan Diophantine non linier yaitu $x^2 - Dy^2 = N$.

Fermat adalah seorang pemula yang mengawali pembahasan persamaan Diophantine modern. Fermat menghabiskan waktu-waktunya untuk merealisasikan apa yang telah dilibatkannya dalam menyelesaikan suatu persamaan. Fermat pernah ditantang ahli matematika Inggris Wallis untuk menyelesaikan persamaan Fermat-Pell $x^2 - dy^2 = 1$ dan Wallis memberikan penyelesaian $x = 1$ dan $y = 0$. Selesaian trivial tersebut sekarang biasa disebut dengan persamaan Pell.

Zuckerman (1991: 351) menyatakan bahwa Persamaan Pell $x^2 - dy^2 = N$ dengan diberikan koefisien berupa bilangan bulat d dan konstanta N serta variabel

x dan y adalah variabel yang tidak diketahui menyebut persamaan ini sebagai persamaan Pell. Jika nilai d negatif, maka persamaan tersebut mempunyai solusi yang terbatas. Jika nilai d berupa kuadrat sempurna, katakan $d = a^2$, maka persamaan dapat dibentuk menjadi $(x - ay)(x + ay) = N$ dan persamaan tersebut juga mempunyai solusi yang terbatas. Pada pembahasan skripsi ini penulis akan memberikan contoh persamaan Pell yang berbentuk $x^2 - Dy^2 = \pm 4$.

2.6. Algoritma PQa

2.6.1. Definisi Algoritma

Kata algoritma mungkin bukan sesuatu yang asing ditelinga. Penemunya adalah seorang ahli matematika dari Uzbekistan yang bernama Abu Abdullah Muhammad Ibn Musa Al-Khawarizmi (770-840). Di dalam dunia literatur barat Al-Khawarizmi lebih terkenal dengan sebutan Algorizm. Panggilan inilah yang kemudian dipakai untuk menyebut konsep algorithm yang ditemukannya. Dalam bahasa Indonesia, kemudian disebut sebagai algoritma (Sukrisno, 2005: 19-20).

Wahyudi (2004: 9) mengatakan bahwa algoritma adalah sebuah strategi yang mengandalkan kemampuan berpikir secara logis untuk memecahkan suatu masalah. Dalam algoritma, dimulai dengan berpikir apa yang kita miliki (kekuatan dan kelemahan), selanjutnya diatur langkah (aksi) agar tujuan atau sasaran yang diharapkan dapat terwujud.

2.6.2. Algoritma PQa

Algoritma PQa adalah jantung dari beberapa metode penyelesaian persamaan Pell. Algoritma ini menghitung ekspansi pecahan berulang dari bentuk

kuadrat irrasional $\frac{P_0 + \sqrt{D}}{Q_0}$ dengan diberikan bilangan bulat P_0, Q_0, D tertentu .

(Roberson, 2004: 4)

Misalkan P_0, Q_0, D adalah bilangan bulat positif dengan $Q_0 \neq 0, D > 0$ berupa koefisien bukan berupa kuadrat sempurna, dan $P_0^2 \equiv D \pmod{Q_0}$, maka diberikan :

$$y_{-2} = 1 \text{ dan } y_{-1} = 0$$

$$x_{-2} = -P_0 \text{ dan } x_{-1} = Q_0$$

Adapun langkah penyelesaian selanjutnya dapat ditentukan dengan mencari nilai a_i, P_i, Q_i, x_i dan y_i sebagai berikut:

$$a_i = \left[\frac{P_i + \sqrt{D}}{Q_i} \right], \text{ untuk } i \geq 0$$

$$P_i = a_{i-1}Q_{i-1} - P_{i-1}, \text{ untuk } i \geq 1$$

$$Q_i = \frac{D - P_i^2}{Q_{i-1}}, \text{ untuk } i \geq 1$$

dan untuk $i \geq 1$ maka diperoleh :

$$x_i = a_i x_{i-1} + x_{i-2}$$

$$y_i = a_i y_{i-1} + y_{i-2}$$

Kunci utama dari algoritma ini adalah hasil bagi yang diperoleh dari ekspansi

pecahan berulang $\xi_0 = \frac{P_0 + \sqrt{D}}{Q_0}$ dapat ditulis dengan $\langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle$ yaitu:

$$\frac{P_0 + \sqrt{D}}{Q_0} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots}}}$$

a_i adalah hasil bagi parsial dari ξ_0 , demikian juga untuk $i \geq 0$, maka himpunan

$$\xi_i = \frac{P_i + \sqrt{D}}{Q_i} \text{ dengan } \xi_i \text{ adalah hasil bagi yang lengkap dari } \xi \text{ ke-}i.$$

Faktor-faktor yang perlu diperhatikan dalam menyelesaikan persamaan Pell dengan algoritma PQa adalah memahami hubungan antara $x_i^2 - Dy_i^2 = N$ dengan x_i dan y_i adalah solusi dari persamaan Pell yang dicari.

Penting sekali untuk menentukan cara mencapai penyelesaian akhir dari periode pertama. Setelah menentukan P_i dan Q_i , kemudian menentukan apakah

$$\frac{P_i + \sqrt{D}}{Q_i} \text{ tereduksi, misal } i_r \text{ periode paling kecil dari } i, \text{ kemudian menentukan}$$

periode paling kecil dari $j > i_r$ dengan $P_j = P_i$ dan $Q_j = Q_i$ dengan demikian j akan menandai awal dari periode ke-2 dan $j-1$ adalah akhir dari periode pertama.

Selanjutnya penyelesaian persamaan Pell dapat dicari dengan menggunakan hasil bagi dari P_i , Q_i dan a_i sebagai berikut:

$$P_i = P_{l+1-i}, \text{ untuk } i = 1, 2, 3, \dots, l \text{ dengan } l = 2i$$

$$Q_i = Q_{l-i}, \text{ untuk } i = 0, 1, 2, \dots, l \text{ dengan } l = 2i + 1$$

$$a_i = a_{l-i}, \text{ untuk } i = 1, 2, 3, \dots, l-1 \text{ dengan } l = 2i + 1$$

Kemudian,

$$a_l = 2a_0 \text{ jika } P_0 = 0 \text{ dan } Q_0 = 1$$

$$a_i = 2a_0 - 1 \text{ jika } P_0 = 1 \text{ dan } Q_0 = 2$$

ketentuan ini diberikan untuk P_i , Q_i dan a_i dengan $i = 1$ dan dari sini untuk penyelesaian selanjutnya dapat dicari.

2.7. Matriks

Definisi: Sebuah matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks.

Contoh 2.7.1 : Susunan berikut adalah matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \pi & e \\ 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} [4]$$

Seperti yang ditunjukkan oleh contoh-contoh ini, maka ukuran matriks-matriks bermacam-macam besarnya. Ukuran matriks dijelaskan dengan menyatakan banyaknya baris (garis horizontal) dan banyaknya kolom (dengan vertikal) yang terdapat dalam matriks tersebut. Matriks pertama dalam contoh di atas mempunyai 3 baris dan 2 kolom sehingga ukurannya adalah 3 kali 2 (yang dituliskan 3 x 2). Angka pertama selalu menunjukkan banyaknya baris dan angka kedua menunjukkan banyaknya kolom. Jadi, matriks selebihnya dalam contoh 1 berturut-turut mempunyai ukuran 1 x 4, 3 x 3, 2 x 1, dan 1 x 1.

Jika B digunakan untuk menyatakan sebuah matriks, maka akan digunakan b_{ij} untuk entrinya dalam baris i dan kolom j . Jadi matrik $m \times n$ yang umum dapat dituliskan sebagai:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} \text{ atau } [b_{ij}]_{m \times n}$$

(Anton, 1987: 23)

Definisi: Jika A dan B adalah sebarang dua matriks yang ukurannya sama, maka jumlah $A+B$ adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan bersama-sama entri yang bersesuaian dalam kedua matriks tersebut. Matriks-matriks yang ukurannya berbeda tidak dapat ditambahkan.

(Anton, 1987: 23)

Contoh 2.7.2 : Tinjaulah matriks-matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

$$A + B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Sedangkan $A + C$ dan $B + C$ tidak didefinisikan.

Definisi: Jika A adalah matriks $m \times r$ dan B adalah matriks $r \times n$, maka hasil kali AB adalah matriks $m \times n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari entri dalam baris i dan kolom j dari AB , pilihlah baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B . Kalikanlah entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut bersama-sama dan kemudian tambahkanlah hasil kali yang dihasilkan.

(Anton, 1987: 23)

Contoh 2.7.3: Tinjaulah matriks-matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian: Karena A adalah matriks 2×3 dan B adalah matriks 3×4 , maka hasil kali AB adalah matriks 2×4 . Untuk menentukan, misalnya, entri dalam baris 2 dan kolom 3 dari AB , dapat dikalikan dengan entri-entri yang bersesuaian bersama-sama dan menambah hasil kali.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{26} & \boxed{} \end{pmatrix}$$

$$(2 \cdot 4) + (6 \cdot 3) + (0 \cdot 5) = 26$$

Perhitungan-perhitungan untuk hasil kali selebihnya adalah:

$$(1 \cdot 4) + (2 \cdot 0) + (4 \cdot 2) = 12$$

$$(1 \cdot 1) - (2 \cdot 1) + (4 \cdot 7) = 27$$

$$(1 \cdot 4) + (2 \cdot 3) + (4 \cdot 5) = 30$$

$$(2 \cdot 4) + (6 \cdot 0) + (0 \cdot 2) = 8$$

$$(2 \cdot 1) - (6 \cdot 1) + (0 \cdot 7) = -4$$

$$(2 \cdot 3) + (6 \cdot 1) + (0 \cdot 2) = 12$$

$$\text{Jadi } AB = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

2.8. Kajian Tentang Teori Bilangan dalam Al Qur'an

Persamaan Diophantine yang dibagi menjadi dua yaitu persamaan diophantine linier dan non linier termasuk di dalamnya persamaan Pell merupakan bagian dari kajian ilmu matematika tentang teori bilangan. Dalam teori bilangan banyak ditemui konsep tentang himpunan, bilangan dan operasi bilangan, pecahan dan lain sebagainya.

Pada bagian ini, akan dibahas keterkaitan antara bilangan dalam matematika dengan Al Qur'an yang merupakan kitab suci umat Islam, diantaranya sebagai berikut:

1. Konsep Himpunan dalam Al Qur'an

Dalam Al Qur'an himpunan, relasi himpunan dan operasi himpunan, cukup banyak dibicarakan. Sebagai contoh, perhatikan firman Allah SWT dalam surat Al Faatir ayat 1:

الْحَمْدُ لِلَّهِ فَاطِرِ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ جَاعِلِ الْمَلَائِكَةِ رُسُلًا أُولَىٰ أَجْنِحَةٍ مَّثْنَىٰ
 وَثُلَاثَ وَرُبْعَ يَزِيدُ فِي الْخَلْقِ مَا يَشَاءُ ۗ إِنَّ اللَّهَ عَلَىٰ كُلِّ شَيْءٍ قَدِيرٌ ﴿١٠﴾

Artinya: Segala puji bagi Allah pencipta langit dan bumi, yang menjadikan malaikat sebagai utusan-utusan (untuk mengurus berbagai macam urusan) yang mempunyai sayap, masing-masing (ada yang) dua, tiga dan empat. Allah menambahkan pada ciptaan-Nya apa yang dikehendaki-Nya. Sesungguhnya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu.

Surat Al Faatir ayat 1 tersebut menjelaskan tentang sekelompok, segolongan atau sekumpulan makhluk yang disebut malaikat dan sekelompok malaikat tersebut terdapat kelompok malaikat yang mempunyai dua sayap, atau empat sayap jika Allah SWT menghendaki. Selain ayat di atas perhatikan juga firman Allah dalam surat An-Nuur ayat 45:

وَاللَّهُ خَلَقَ كُلَّ دَابَّةٍ مِّن مَّاءٍ ۖ فَمِنْهُمْ مَّن يَمْشِي عَلَىٰ بَطْنِهِ ۗ وَمِنْهُمْ مَّن يَمْشِي عَلَىٰ
 رِجْلَيْنِ وَمِنْهُمْ مَّن يَمْشِي عَلَىٰ أَرْبَعٍ ۗ يَخْلُقُ اللَّهُ مَا يَشَاءُ ۗ إِنَّ اللَّهَ عَلَىٰ كُلِّ شَيْءٍ قَدِيرٌ ﴿٤٥﴾

Artinya: Dan Allah telah menciptakan semua jenis hewan dari air, maka sebagian dari hewan itu ada yang berjalan di atas perutnya dan sebagian berjalan dengan dua kaki sedang sebagian (yang lain) berjalan dengan empat kaki. Allah menciptakan apa yang dikehendaki-Nya, sesungguhnya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu.

Surat An-Nuur ayat 45 ini membicarakan tentang sekumpulan makhluk yang disebut hewan. Diantara sekelompok hewan tersebut ada yang berjalan di atas perutnya (tanpa kaki), sebagian berjalan dengan dua kaki atau empat kaki sesuai dengan yang dikehendaki Allah SWT.

Berdasarkan kedua ayat di atas dapat diketahui bahwa di dalam Al Qur'an ternyata juga terdapat konsep matematika terutama yang membahas tentang himpunan, yaitu sekumpulan objek-objek yang terdefinisi dengan jelas. Ketika umat Islam membaca Al Qur'an maka pada surat Al Fatehah juga akan dijumpai bahwa manusia terbagi menjadi tiga kelompok, yaitu (1) kelompok yang diberi nikmat oleh Allah, (2) kelompok yang dimurkai dan (3) kelompok yang sesat.

Abdusysykir (2007: 110) mengemukakan bahwa jika pembicaraan dari makna surat Al Fatehah dikaitkan dengan konsep relasi dan operasi himpunan, maka kelompok yang diberi nikmat akan saling lepas (*disjoint*) dengan kelompok yang dimurkai dan sesat.

2. Konsep Bilangan Dalam Al Qur'an

Seperti yang telah dijelaskan pada bab pendahuluan bahwa dalam Al Qur'an disebutkan sebanyak 38 bilangan berbeda. Dari 38 bilangan tersebut, 30 adalah bilangan asli dan 8 adalah bilangan pecahan. Ketigapuluh bilangan asli berbeda dalam Al Qur'an dinyatakan sebagai berikut:

Tabel 2.1. Bilangan-bilangan Asli dalam Al Qur'an

No.	Bilangan	No.	Bilangan
1	1	16	40
2	2	17	50
3	3	18	60
4	4	19	70
5	5	20	80
6	6	21	99
7	7	22	100
8	8	23	200
9	9	24	300
10	10	25	1000
11	11	26	2000
12	12	27	3000
13	19	28	5000
14	20	29	50000
15	30	30	100000
Total	147	total	161999
147+161999			

(Sumber: Irawan, Abdussakir, dan Kusumastuti, 2005: 57)

Kedelapan bilangan pecahan berbeda dalam Al Qur'an sebagai berikut:

Tabel 2.2 Pecahan-pecahan Berbeda dalam Al Qur'an

No.	Bilangan	Banyak Penyebutan
1.	$\frac{2}{3}$	3
2.	$\frac{1}{2}$	5
3.	$\frac{1}{3}$	3
4.	$\frac{1}{4}$	2
5.	$\frac{1}{5}$	1
6.	$\frac{1}{6}$	3
7.	$\frac{1}{8}$	1
8.	$\frac{1}{10}$	1
Total Penyebutan		19

(Sumber: Irawan, Abdussakir, dan Kusumastuti, 2005: 58-59)

Berkaitan dengan relasi bilangan bahwa relasi atau membandingkan suatu bilangan biasanya dilakukan pada sepasang bilangan dengan aturan tertentu. Perhatikan firman Allah SWT dalam surat Ash Shaffat ayat 147.

وَأَرْسَلْنَاهُ إِلَىٰ مِائَةِ أَلْفٍ أَوْ يَزِيدُونَ ﴿١٤٧﴾

Artinya: Dan Kami utus dia kepada seratus ribu orang atau lebih.

Abdusysykir (2006: 59) menyatakan bahwa pada QS 37: 147 tersebut dijelaskan bahwa nabi Yunus diutus kepada umat yang jumlahnya 100000 orang atau lebih. Secara matematika, jika umat nabi Yunus sebanyak x orang, maka x sama dengan 100000 atau x lebih dari 100000. Ada dua relasi bilangan dalam QS 37: 137, yaitu relasi "sama dengan" dan relasi "lebih dari". Relasi "sama dengan" dan "lebih dari" masing-masing ditulis "=" dan ">". Dua relasi ini dikenal dengan relasi urutan (*order relations*). Dengan demikian, kalimat x sama dengan 100000 atau x lebih dari 100000 dapat ditulis dengan:

$$x = 100000 \text{ atau } x > 100000.$$

Adanya bilangan dan relasi bilangan belum lengkap, jika tidak dapat melakukan suatu aksi pada pasangan bilangan yang diberikan dan melakukan aksi pada pasangan bilangan biasanya disebut operasi. Operasi yang paling sederhana adalah operasi hitung dasar bilangan dan ternyata dalam Al Qur'an juga berbicara tentang operasi hitung dasar bilangan diantaranya:

- a. Operasi Penjumlahan
- b. Operasi Pengurangan
- c. Operasi Pembagian

Sebagai contoh perhatikan firman Allah dalam surat Al Kahfi: 25 yang berbunyi:

وَلَبِثُوا فِي كَهْفِهِمْ ثَلَاثَ مِائَةٍ سِنِينَ وَازْدَادُوا تِسْعًا ﴿٢٥﴾

Artinya: Dan mereka tinggal dalam gua mereka tiga ratus tahun dan ditambah sembilan tahun (lagi).

Konsep matematika yang disebutkan dalam ayat tersebut adalah operasi penjumlahan, yaitu $300 + 9$. Jadi makna yang tersirat di balik ayat tersebut adalah bahwa setiap muslim perlu memahami tentang bilangan dan operasi bilangan. Tanpa mengenal bilangan, seorang muslim tidak akan memahami Al Qur' an dengan baik ketika membaca ayat-ayat yang berkaitan tentang bilangan tersebut.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1. Penyelesaian Persamaan Pell dengan Algoritma PQa

Bentuk umum persamaan Pell yang dibahas dalam skripsi ini adalah:

$$x^2 - Dy^2 = \pm 4$$

dengan diberikan koefisien D berupa bilangan bulat positif bukan kuadrat sempurna. Variabel x dan y adalah penyelesaian dari persamaan Pell tersebut.

Untuk mencari nilai x dan y pada pembahasan skripsi ini akan diselesaikan dengan menggunakan algoritma PQa dan metode matriks.

Algoritma PQa adalah metode penyelesaian persamaan Pell yang bermula dari menghitung ekspansi pecahan berulang berbentuk kuadrat irrasional

$a_0 = \frac{P_0 + \sqrt{D}}{Q_0}$, dengan diberikan bilangan bulat P_0 , Q_0 dan D tertentu dengan

$Q_0 \neq 0, D > 0$ bukan kuadrat sempurna. Selanjutnya ditetapkan:

$$x_{-2} = -P_0 \text{ dan } x_{-1} = Q_0$$

$$y_{-2} = 1 \text{ dan } y_{-1} = 0$$

(Tekcan, 2007: 4)

Jika diketahui persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = \pm 4$ memiliki nilai $D \equiv 0 \pmod{4}$, maka

menurut algoritma PQa ditetapkan $P_0 = 0$ dan $Q_0 = 2$, jika $D \equiv 1 \pmod{4}$

ditetapkan $P_0 = 1$ dan $Q_0 = 2$ dan jika diketahui $D \equiv 2$ atau $3 \pmod{4}$ akan

ditetapkan $P_0 = 0$ dan $Q_0 = 1$.

(Tekcan, 2007: 10)

Menyelesaikan persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = \pm 4$ dengan menggunakan Algoritma PQa diperlukan langkah-langkah pengerjaan sebagai berikut :

1. Menentukan apakah:

a. $D \equiv 0 \pmod{4}$

Jika diketahui persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = \pm 4$ memiliki nilai D yang kongruen dengan 0 modulo 4, maka menurut ketentuan dari Algoritma PQa ditetapkan $P_0 = 0$ dan $Q_0 = 2$. Pertimbangan modulo 4 menunjukkan bahwa solusi persamaan Pell tersebut akan memiliki nilai x yang selalu genap.

b. $D \equiv 1 \pmod{4}$

Jika diketahui persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = \pm 4$ memiliki nilai D yang kongruen dengan 1 modulo 4, maka menurut ketentuan dari Algoritma PQa ditetapkan $P_0 = 1$ dan $Q_0 = 2$. Pertimbangan modulo 4 menunjukkan bahwa solusi persamaan Pell tersebut akan memiliki nilai, yaitu jika x genap maka y juga genap dan sebaliknya jika x ganjil maka y juga ganjil.

c. $D \equiv 2$ atau $3 \pmod{4}$

Jika diketahui persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = \pm 4$ memiliki nilai D yang kongruen dengan 2 atau 3 modulo 4, maka menurut ketentuan dari Algoritma PQa ditetapkan $P_0 = 0$ dan $Q_0 = 1$. Pertimbangan modulo 4 menunjukkan bahwa solusi persamaan Pell tersebut akan memiliki nilai x dan y sama-sama genap.

2. Menentukan nilai dari a_i , P_i dan Q_i dengan rumus:

a.
$$a_i = \frac{(P_i + \sqrt{D})}{Q_i}, \text{ untuk } i \geq 0$$

b. $P_i = a_{i-1}Q_{i-1} - P_{i-1}$, untuk $i \geq 1$

c. $Q_i = \frac{D - P_i^2}{Q_{i-1}}$, untuk $i \geq 1$

3. Menentukan nilai x_i dan y_i dengan $i \geq 0$ dengan rumus:

$$x_i = a_i x_{i-1} + x_{i-2} \text{ dan } y_i = a_i y_{i-1} + y_{i-2}.$$

4. Mensubstitusi nilai x dan y ke dalam persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = \pm 4$ untuk mengetahui apakah x dan y merupakan solusi dari persamaan Pell positif atau negatif.

Permasalahan yang sering muncul dari persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = \pm 4$, yaitu ketika diketahui :

1. Saat nilai D kongruen dengan 0 modulo 4 ($D \equiv 0 \pmod{4}$)

Apabila diketahui dari Persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = \pm 4$ memiliki koefisien D yang kongruen dengan 0 modulo 4, maka dengan menggunakan algoritma PQa akan diperoleh:

a. Nilai koefisien D dari soal akan bernilai tetap.

b. $P_0 = 0$

c. $Q_0 = 2$

d. $x_{-2} = 0$ dan $x_{-1} = 2$

e. $y_{-2} = 1$ dan $y_{-1} = 0$

Untuk $l \geq 0$, dimana l adalah panjang dari periode pecahan berulang $\frac{P_0 + \sqrt{D}}{Q_0}$,

maka $a_l = 2a_0$ (Robertson, 2004: 10).

Untuk lebih memahami uraian di atas, perhatikan contoh soal berikut:

Contoh 3.1.1: Selesaikan persamaan Pell $x^2 - 20y^2 = \pm 4$!

Penyelesaian: Menyelesaikan persamaan Pell $x^2 - 20y^2 = \pm 4$ dari contoh 3.1.1

dapat dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menentukan kekongruenan koefisien $D \pmod{4}$ dari persamaan

Pell $x^2 - 20y^2 = \pm 4$.

Dari contoh 3.1.1, diketahui bahwa persamaan Pell

$x^2 - 20y^2 = \pm 4$ memiliki nilai $D \equiv 0 \pmod{4}$, maka dengan

menggunakan Algoritma PQa diperoleh:

- a. $D = 20$
- b. $P_0 = 0$
- c. $Q_0 = 2$
- d. $x_{-2} = 0$ dan $x_{-1} = 2$
- e. $y_{-2} = 1$ dan $y_{-1} = 0$

2. Menentukan nilai dari a_i , P_i dan Q_i

Setelah diketahui nilai D , P_0 dan Q_0 , maka untuk $i = 0$ diperoleh a_i

sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{P_0 + \sqrt{D}}{Q_0} \\ &= \frac{0 + \sqrt{20}}{2} \\ &= \frac{4 + \sqrt{20} - 4}{2} \end{aligned}$$

$$= 2 + \frac{1}{\frac{\sqrt{20+4}}{2}}$$

Dari perhitungan diperoleh nilai $a_0 = 2$. Untuk $l \geq 0$, dimana l

adalah panjang dari periode pecahan berulang $\frac{0 + \sqrt{20}}{2}$, maka

diperoleh $a_l = 2a_0 = 2 \cdot 2 = 4$. Jadi 4 adalah akhir dari periode pecahan berulang di atas dan untuk selanjutnya nilai dari $a_1 \cdots a_n$ akan bernilai sama yaitu 4.

Berikutnya, untuk $i = 1$, maka diperoleh nilai dari P_i dan Q_i sebagai berikut:

$$\begin{aligned} P_1 &= a_0 Q_0 - P_0 \\ &= 2 \cdot 2 - 0 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{20 - P_1^2}{Q_0} \\ &= \frac{20 - 4^2}{2} \\ &= \frac{20 - 6}{2} \end{aligned}$$

$$= 2$$

Untuk $i = 1$ maka diperoleh a_i sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{P_1 + \sqrt{D}}{Q_1} \\ &= \frac{4 + \sqrt{20}}{2} \\ &= \frac{4 + 4 + \sqrt{20} - 4}{2} \end{aligned}$$

$$= 4 + \frac{1}{\frac{\sqrt{20+4}}{2}}$$

Jadi diperoleh nilai $a_1 = 4$.

3. Menentukan nilai dari x_i dan y_i

Berikutnya untuk mencari selesaian dari nilai x_i dan y_i dengan $i=0$ dan 1, maka diperoleh penyelesaian (x_0, y_0) dan (x_1, y_1) berturut-turut sebagai berikut:

$$x_0 = a_0 x_{-1} + x_{-2}$$

$$= 2 \cdot 2 + 0$$

$$= 4 + 0$$

$$= 4$$

$$x_1 = a_1 x_0 + x_{-1}$$

$$= 4 \cdot 4 + 2$$

$$= 16 + 2$$

$$= 18$$

$$y_0 = a_0 y_{-1} + y_{-2}$$

$$= 2 \cdot 0 + 1$$

$$= 1$$

$$y_1 = a_1 y_0 + y_{-1}$$

$$= 4 \cdot 1 + 0$$

$$= 4$$

Dari perhitungan di atas diperoleh selesaian awal yaitu $x_0 = 4$ dan

$$y_0 = 1.$$

4. Mensubstitusi nilai x dan y ke dalam persamaan Pell $x^2 - 20y^2 = \pm 4$ untuk mengetahui apakah x dan y merupakan solusi dari persamaan Pell positif atau negatif.

Setelah diperoleh $x_0 = 4$ dan $y_0 = 1$, selanjutnya nilai $(4,1)$ disubstitusikan ke persamaan Pell $x^2 - 20y^2 = \pm 4$ untuk membuktikan apakah $(4,1)$ merupakan penyelesaian persamaan Pell tersebut atau bukan, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}x_0^2 - 20y_0^2 &= 4^2 - 20 \cdot 1^2 \\&= 16 - 20 \cdot 1 \\&= 16 - 20 \\&= -4\end{aligned}$$

Dari hasil substitusi ternyata diketahui bahwa $(4,1)$ merupakan penyelesaian dari persamaan Pell $x^2 - 20y^2 = -4$. Selanjutnya nilai $x_1 = 18$ dan $y_1 = 4$ juga disubstitusikan ke persamaan Pell $x^2 - 20y^2 = \pm 4$ untuk membuktikan apakah $(18,4)$ merupakan penyelesaian atau bukan, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}x_1^2 - 20y_1^2 &= 18^2 - 20 \cdot 4^2 \\&= 324 - 20 \cdot 16 \\&= 324 - 320 \\&= 4\end{aligned}$$

Dari perhitungan di atas ternyata juga diperoleh bahwa $(18,4)$ merupakan penyelesaian dari persamaan Pell $x^2 - 20y^2 = 4$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa persamaan Pell

$x^2 - 20y^2 = \pm 4$ baik yang bernilai positif maupun negatif keduanya sama-sama memiliki selesaian dengan nilai x selalu genap. Jika perhitungan dilanjutkan dengan $i = 0 \dots 3$, maka akan diperoleh selesaian dari persamaan Pell $x^2 - 20y^2 = \pm 4$ dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.1.1. Solusi Persamaan Pell $x^2 - 20y^2 = \pm 4$

i	P_i	Q_i	a_i	x_i	y_i	$x_i^2 - 20y_i^2$
-2	-	-	-	0	1	0
-1	-	-	-	2	0	4
0	0	2	2	4	1	-4
1	4	2	4	18	4	4
2	4	2	4	76	17	-4
3	4	2	4	322	72	4

Contoh 3.1.2 : Selesaikan persamaan Pell $x^2 - 68y^2 = \pm 4$!

Penyelesaian : Menyelesaikan persamaan Pell $x^2 - 68y^2 = \pm 4$ dari contoh 3.1.2

dapat dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menentukan kekongruenan koefisien D dengan $(\text{mod } 4)$ dari persamaan Pell $x^2 - 68y^2 = \pm 4$.

Dari contoh 3.1.2 diketahui bahwa persamaan Pell $x^2 - 68y^2 = \pm 4$ memiliki nilai $D \equiv 0(\text{mod } 4)$, maka dengan menggunakan algoritma PQa diperoleh:

- a. $D = 68$
- b. $P_0 = 0$
- c. $Q_0 = 2$

d. $x_{-2} = 0$ dan $x_{-1} = 2$

e. $y_{-2} = 1$ dan $y_{-1} = 0$

2. Menentukan nilai dari a_i, P_i dan Q_i

Setelah diketahui nilai D, P_0 dan Q_0 , maka untuk $i = 0$ diperoleh

a_i sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{P_0 + \sqrt{D}}{Q_0} \\ &= \frac{0 + \sqrt{68}}{2} \\ &= \frac{8 + \sqrt{20} - 8}{2} \\ &= 4 + \frac{1}{\frac{\sqrt{68} + 8}{2}} \end{aligned}$$

Dari perhitungan diperoleh nilai dari $a_0 = 4$. Untuk $l \geq 0$,

dimana l adalah panjang dari periode pecahan berulang $\frac{0 + \sqrt{68}}{2}$,

maka diperoleh $a_l = 2a_0 = 2 \cdot 4 = 8$. Jadi 8 adalah akhir dari periode pecahan berulang tersebut dan untuk selanjutnya nilai dari $a_1 \cdots a_n$ akan bernilai sama yaitu 8.

Selanjutnya untuk $i = 1$, maka diperoleh nilai dari P_i dan Q_i

sebagai berikut:

$$\begin{aligned} P_1 &= a_0 Q_0 - P_0 \\ &= 4 \cdot 2 - 0 \\ &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \frac{68 - P_1^2}{Q_0} \\
 &= \frac{68 - 8^2}{2} \\
 &= \frac{68 - 64}{2} \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

Untuk $i = 1$ maka diperoleh a_i sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{P_1 + \sqrt{D}}{Q_1} \\
 &= \frac{8 + \sqrt{68}}{2} \\
 &= \frac{8 + 8 + \sqrt{68} - 8}{2} \\
 &= 8 + \frac{1}{\frac{68 + 4}{2}}
 \end{aligned}$$

Jadi diperoleh nilai $a_1 = 8$.

3. Menentukan nilai dari x_i dan y_i

Berikutnya untuk mencari selesaian dari x_i dan y_i dengan $i = 0$ dan 1 , maka diperoleh penyelesaian (x_0, y_0) dan (x_1, y_1) berturut-turut sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 x_0 &= a_0 x_{-1} + x_{-2} \\
 &= 4 \cdot 2 + 0 \\
 &= 8 \\
 x_1 &= a_1 x_0 + x_{-1} \\
 &= 8 \cdot 8 + 2 \\
 &= 64 + 2 \\
 &= 66
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_0 &= a_0 y_{-1} + y_{-2} \\
&= 4 \cdot 0 + 1 \\
&= 1 \\
y_1 &= a_1 y_0 + y_{-1} \\
&= 8 \cdot 1 + 0 \\
&= 8
\end{aligned}$$

Dari perhitungan diperoleh selesaian awal yaitu $x_0 = 8$ dan $y_0 = 1$.

4. Mensubstitusi nilai x dan y ke dalam persamaan Pell $x^2 - 68y^2 = \pm 4$ untuk mengetahui apakah x dan y merupakan solusi dari persamaan Pell positif atau negatif.

Setelah diperoleh $x_0 = 8$ dan $y_0 = 1$, selanjutnya nilai $(8,1)$ disubstitusikan ke dalam persamaan $x^2 - 68y^2 = \pm 4$ untuk membuktikan apakah $(8,1)$ merupakan selesaian persamaan tersebut atau bukan sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
x_0^2 - 68y_0^2 &= 8^2 - 68 \cdot 1^2 \\
&= 64 - 68 \cdot 1 \\
&= 64 - 68 \\
&= -4
\end{aligned}$$

Dari hasil substitusi ternyata diketahui bahwa $(8,1)$ merupakan selesaian dari persamaan Pell $x^2 - 68y^2 = -4$. Selanjutnya $x_1 = 66$ dan $y_1 = 8$ juga disubstitusikan ke persamaan Pell $x^2 - 68y^2 = \pm 4$ sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
 x_1^2 - 68y_1^2 &= 66^2 - 68(8)^2 \\
 &= 4356 - 68 \cdot 64 \\
 &= 4356 - 4352 \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

Dari hasil perhitungan di atas ternyata juga diperoleh bahwa (66,8) merupakan selesaian dari persamaan Pell $x^2 - 68y^2 = 4$.

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa persamaan Pell $x^2 - 68y^2 = \pm 4$ baik yang bernilai positif maupun negatif keduanya sama-sama memiliki selesaian dengan nilai x yang selalu genap. Jika perhitungan dilanjutkan dengan $i = 0 \dots 3$, maka akan diperoleh penyelesaian dari persamaan Pell $x^2 - 68y^2 = \pm 4$ dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.1.2. Solusi Persamaan Pell $x^2 - 68y^2 = \pm 4$

i	P_i	Q_i	a_i	x_i	y_i	$x_i^2 - 68y_i^2$
-2	-	-	-	0	1	0
-1	-	-	-	2	0	4
0	0	2	4	4	1	-4
1	8	2	8	18	8	4
2	8	2	8	76	65	-4
3	8	2	8	322	528	4

2. Saat nilai D kongruen dengan 1 modulo 4 ($D \equiv 1 \pmod{4}$)

Apabila diketahui dari persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = \pm 4$ memiliki koefisien D yang kongruen dengan 0 modulo 4, maka dengan menggunakan algoritma PQa diperoleh:

- a. Nilai koefisien D dari persamaan akan bernilai tetap.
- b. $P_0 = 1$
- c. $Q_0 = 2$
- d. $x_{-2} = -1$ dan $x_{-1} = 2$
- e. $y_{-2} = 1$ dan $y_{-1} = 0$

Untuk $l > 0$ dimana l adalah panjang periode dari pecahan berulang $\frac{P_0 + \sqrt{D}}{Q_0}$

maka $a_l = 2a_0 - 1$ (Robertson, 2004: 10).

Untuk lebih memahami uraian di atas, perhatikan contoh soal berikut:

Contoh 3.1.3 : Selesaikan persamaan Pell $x^2 - 13y^2 = \pm 4$!

Penyelesaian : Menyelesaikan persamaan Pell $x^2 - 13y^2 = \pm 4$ dari contoh 3.1.3 dapat dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menentukan kekongruenan koefisien D dengan $(\text{mod } 4)$ dari persamaan Pell $x^2 - 13y^2 = \pm 4$.

Dari contoh 3.1.3 diketahui bahwa persamaan Pell $x^2 - 13y^2 = \pm 4$ memiliki nilai $D \equiv 1(\text{mod } 4)$, maka dengan

menggunakan algoritma PQa diperoleh:

- a. $D = 13$
- b. $P_0 = 1$
- c. $Q_0 = 2$
- d. $x_{-2} = -1$ dan $x_{-1} = 2$
- e. $y_{-2} = 1$ dan $y_{-1} = 0$

2. Menentukan nilai dari a_i, P_i dan Q_i

Setelah diketahui nilai D, P_0 dan Q_0 , maka untuk $i = 0$ diperoleh a_i sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{P_0 + \sqrt{D}}{Q_0} \\ &= \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \\ &= \frac{1 + 3 + \sqrt{13} - 3}{2} \\ &= 2 + \frac{1}{\frac{\sqrt{13} + 3}{2}} \end{aligned}$$

Dari perhitungan diperoleh nilai dari $a_0 = 2$. Untuk $l \geq 0$, dimana l adalah panjang dari periode pecahan berulang $\frac{1 + \sqrt{13}}{2}$, maka diperoleh $a_l = 2a_0 - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$. Jadi 3 adalah akhir dari periode pecahan berulang dan untuk selanjutnya nilai dari $a_1 \cdots a_n$ akan bernilai sama yaitu 3.

Selanjutnya untuk $i = 1$, maka diperoleh nilai dari P_i dan Q_i sebagai berikut:

$$\begin{aligned} P_1 &= a_0 Q_0 - P_0 \\ &= 2 \cdot 2 - 1 \\ &= 4 - 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \frac{13 - P_1^2}{Q_0} \\
 &= \frac{13 - 3^2}{2} \\
 &= \frac{13 - 9}{2} \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

Untuk $i = 1$, maka diperoleh a_i sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{P_1 + \sqrt{D}}{Q_1} \\
 &= \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \\
 &= \frac{3 + 3 + \sqrt{13} - 3}{2} \\
 &= 3 + \frac{1}{\frac{\sqrt{13} + 3}{2}}
 \end{aligned}$$

Jadi diperoleh nilai $a_1 = 3$.

3. Menentukan nilai dari x_i dan y_i

Berikutnya untuk mencari selesaian dari x_i dan y_i dengan $i = 0$ dan 1 , maka diperoleh penyelesaian (x_0, y_0) dan (x_1, y_1) berturut-turut sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 x_0 &= a_0 x_{-1} + x_{-2} \\
 &= 2 \cdot 2 + (-1) \\
 &= 4 - 1 \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_1 &= a_1 x_0 + x_{-1} \\
 &= 3 \cdot 3 + 2
 \end{aligned}$$

$$= 9 + 2$$

$$= 11$$

$$y_0 = a_0 y_{-1} + y_{-2}$$

$$= 2 \cdot 0 + 1$$

$$= 21$$

$$y_1 = a_1 y_0 + y_{-1}$$

$$= 3 \cdot 3 + 1$$

$$= 10$$

Dari hasil perhitungan di atas diperoleh selesaian awal yaitu $x_0 = 3$ dan $y_0 = 1$.

4. Mensubstitusi nilai x dan y ke dalam persamaan Pell

$x^2 - 13y^2 = \pm 4$ untuk mengetahui apakah x dan y merupakan solusi dari persamaan Pell positif atau negatif.

Setelah diperoleh $x_0 = 3$ dan $y_0 = 1$, selanjutnya nilai (3,1) disubstitusikan ke dalam persamaan $x^2 - 13y^2 = \pm 4$ untuk membuktikan apakah (3,1) merupakan selesaian dari persamaan Pell tersebut atau bukan, sehingga diperoleh:

$$x_0^2 - 13y_0^2 = 3^2 - 13 \cdot 1^2$$

$$= 9 - 13 \cdot 1$$

$$= 9 - 13$$

$$= -4$$

Dari hasil substitusi ternyata diketahui bahwa (3,1) merupakan selesaian dari persamaan Pell $x^2 - 13y^2 = -4$. Selanjutnya $x_1 = 11$

dan $y_1 = 3$ juga disubstitusikan ke persamaan Pell $x^2 - 13y^2 = \pm 4$

sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} x_1^2 - 13y_1^2 &= 11^2 - 13 \cdot 3^2 \\ &= 121 - 13 \cdot 9 \\ &= 121 - 117 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Dari hasil perhitungan di atas ternyata juga diperoleh bahwa (11,3)

merupakan penyelesaian dari persamaan Pell $x^2 - 13y^2 = 4$.

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa persamaan Pell

$x^2 - 13y^2 = \pm 4$ baik yang bernilai positif maupun negatif

keduanya sama-sama memiliki penyelesaian jika x genap maka y

juga genap dan sebaliknya jika x ganjil maka y juga ganjil. Jika

perhitungan dilanjutkan untuk $i = 0 \dots 3$ maka akan diperoleh

penyelesaian dari persamaan Pell $x^2 - 13y^2 = \pm 4$ dalam bentuk

tabel sebagai berikut:

Tabel 3.1.3. Solusi Persamaan Pell $x^2 - 13y^2 = \pm 4$

i	P_i	Q_i	a_i	x_i	y_i	$x_i^2 - 13y_i^2$
-2	-	-	-	-1	1	0
-1	-	-	-	2	0	4
0	1	2	2	3	1	-4
1	3	2	3	11	3	4
2	3	2	3	36	10	-4
3	3	2	3	119	33	4

Contoh 3.1.4 : Selesaikan persamaan Pell $x^2 - 29y^2 = \pm 4$!

Penyelesaian : Menyelesaikan persamaan Pell $x^2 - 29y^2 = \pm 4$ dari contoh 3.1.4 dapat dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menentukan kekongruenan koefisien D dengan $(\text{mod } 4)$ dari persamaan Pell $x^2 - 29y^2 = \pm 4$.

Dari contoh 3.1.4 diketahui bahwa persamaan Pell $x^2 - 29y^2 = \pm 4$ memiliki nilai $D \equiv 1(\text{mod } 4)$, maka dengan menggunakan algoritma PQa diperoleh:

- a. $D = 29$
 - b. $P_0 = 1$
 - c. $Q_0 = 2$
 - d. $x_{-2} = -1$ dan $x_{-1} = 2$
 - e. $y_{-2} = 1$ dan $y_{-1} = 0$
2. Menentukan nilai dari a_i , P_i dan Q_i

Setelah diketahui nilai D , P_0 dan Q_0 , maka untuk $i = 0$ diperoleh a_i sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{P_0 + \sqrt{D}}{Q_0} \\ &= \frac{1 + \sqrt{29}}{2} \\ &= \frac{1 + 5 + \sqrt{13} - 5}{2} \\ &= 3 + \frac{1}{\frac{\sqrt{29} + 5}{2}} \end{aligned}$$

Dari perhitungan diperoleh nilai dari $a_0 = 3$. Untuk $l \geq 0$, dimana

l adalah panjang dari periode pecahan berulang $\frac{1+\sqrt{29}}{2}$, maka

diperoleh $a_l = 2a_0 - 1 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$. Jadi 5 adalah akhir dari

pecahan berulang dan untuk selanjutnya nilai dari $a_1 \cdots a_n$ akan

bernilai sama yaitu 5.

Selanjutnya untuk $i = 1$, maka diperoleh nilai dari P_i dan Q_i

sebagai berikut:

$$\begin{aligned} P_1 &= a_0 Q_0 - P_0 \\ &= 3 \cdot 2 - 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{29 - P_1^2}{2} \\ &= \frac{29 - 5^2}{2} \\ &= \frac{29 - 25}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Untuk $i = 1$, maka diperoleh a_i sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{P_1 + \sqrt{D}}{Q_1} \\ &= \frac{5 + \sqrt{29}}{2} \\ &= \frac{5 + 5 + \sqrt{13} - 5}{2} \\ &= 5 + \frac{1}{\sqrt{29} + 5} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Jadi diperoleh nilai $a_1 = 5$.

3. Menentukan nilai dari x_i dan y_i

Berikutnya untuk mencari selesaian dari x_i dan y_i dengan $i = 0$, maka diperoleh penyelesaian (x_0, y_0) dan (x_1, y_1) berturut-turut sebagai berikut:

$$\begin{aligned}x_0 &= a_0 x_{-1} + x_{-2} \\ &= 3 \cdot 2 + (-1) \\ &= 6 - 1 \\ &= 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1 &= a_1 x_0 + x_{-1} \\ &= 5 \cdot 5 + 2 \\ &= 25 + 2 \\ &= 27\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_0 &= a_0 y_{-1} + y_{-2}, \\ &= 3 \cdot 0 + 1 \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_1 &= a_1 y_0 + y_{-1} \\ &= 5 \cdot 1 + 0 \\ &= 5\end{aligned}$$

Dari perhitungan di atas diperoleh selesaian awal yaitu $x_0 = 5$ dan $y_0 = 1$.

4. Mensubstitusi nilai x dan y ke dalam persamaan Pell $x^2 - 29y^2 = \pm 4$ untuk mengetahui apakah x dan y merupakan solusi dari persamaan Pell positif atau negatif.

Setelah diperoleh $x_0 = 5$ dan $y_0 = 1$, selanjutnya nilai $(5,1)$ disubstitusikan ke persamaan $x^2 - 29y^2 = \pm 4$ untuk membuktikan apakah $(5,1)$ merupakan penyelesaian persamaan tersebut atau bukan, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} x_0^2 - 29y_0^2 &= 5^2 - 29 \cdot 1^2 \\ &= 25 - 29 \cdot 1 \\ &= 25 - 29 \\ &= -4 \end{aligned}$$

Dari hasil substitusi ternyata diketahui bahwa $(5,1)$ merupakan penyelesaian dari persamaan Pell $x^2 - 29y^2 = -4$. Selanjutnya $x_1 = 27$ dan $y_1 = 5$ juga disubstitusikan ke persamaan Pell $x^2 - 29y^2 = \pm 4$ sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} x_1^2 - 29y_1^2 &= 27^2 - 29(5)^2 \\ &= 729 - 725 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Dari hasil perhitungan di atas ternyata juga diperoleh bahwa $(27,5)$ merupakan penyelesaian dari persamaan Pell $x^2 - 29y^2 = 4$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa persamaan Pell $x^2 - 29y^2 = \pm 4$ baik yang bernilai positif maupun negatif keduanya sama-sama memiliki penyelesaian jika x genap maka y juga genap dan sebaliknya jika x ganjil maka y juga ganjil. Jika perhitungan dilanjutkan dengan $i = 0 \dots 3$ maka akan diperoleh

solusi dari persamaan Pell $x^2 - 29y^2 = \pm 4$ dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.1.4. Solusi Persamaan Pell $x^2 - 29y^2 = \pm 4$

i	P_i	Q_i	a_i	x_i	y_i	$x_i^2 - 29y_i^2$
-2	-	-	-	-1	1	0
-1	-	-	-	2	0	4
0	1	2	3	5	1	-4
1	5	2	5	27	5	4
2	5	2	5	140	26	-4
3	5	2	5	727	135	4

3. Saat nilai D kongruen dengan 2 atau 3 modulo 4 ($D \equiv 2$ atau $3 \pmod{4}$)

Apabila diketahui dari persamaan Persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = \pm 4$ memiliki koefisien D yang kongruen dengan 2 atau 3 modulo 4, maka dengan menggunakan algoritma PQa diperoleh:

- Nilai koefisien D dari persamaan akan bernilai tetap.
- $P_0 = 0$
- $Q_0 = 1$
- $x_{-2} = 0$ dan $x_{-1} = 2$
- $y_{-2} = 2$ dan $y_{-1} = 0$

Untuk $l \geq 0$, dimana l adalah panjang dari periode pecahan berulang

$$\frac{P_0 + \sqrt{D}}{Q_0}, \text{ maka } a_l = 2a_0 \text{ (Robertson, 2004: 10).}$$

Untuk lebih memahami uraian di atas, perhatikan contoh soal berikut:

Contoh 3.1.5 : Selesaikan persamaan Pell $x^2 - 10y^2 = \pm 4$!

Penyelesaian : Menyelesaikan persamaan Pell $x^2 - 10y^2 = \pm 4$ dari 3.1.5 dapat

dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menentukan kekongruenan koefisien D dengan $(\text{mod}4)$ dari persamaan Pell $x^2 - 10y^2 = \pm 4$.

Dari contoh 3.1.5 diketahui bahwa persamaan Pell $x^2 - 10y^2 = \pm 4$ memiliki nilai $D \equiv 2 \pmod{4}$, maka dengan menggunakan algoritma PQA diperoleh:

- a. $D = 10$
 - b. $P_0 = 0$
 - c. $Q_0 = 1$
 - d. $x_{-2} = 0$ dan $x_{-1} = 2$
 - e. $y_{-2} = 2$ dan $y_{-1} = 0$
2. Menentukan nilai dari a_i, P_i dan Q_i

Setelah diketahui nilai D, P_0 dan Q_0 , maka untuk $i = 0$ diperoleh a_i sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{P_0 + \sqrt{D}}{Q_0} \\ &= \frac{0 + \sqrt{10}}{1} \\ &= \sqrt{10} \\ &= 3 + \sqrt{10} - 3 \\ &= 3 + \frac{1}{\sqrt{10} + 3} \end{aligned}$$

Dari perhitungan diperoleh nilai dari $a_0 = 3$. Untuk $l \geq 0$, dimana

l adalah panjang dari periode pecahan berulang $\frac{0+\sqrt{10}}{1}$, maka

diperoleh $a_l = 2 \cdot a_0 = 2 \cdot 3 = 6$. Jadi 6 adalah akhir dari pecahan

berulang tersebut dan untuk selanjutnya nilai dari $a_1 \cdots a_n$ akan

bernilai sama yaitu 6.

Selanjutnya untuk $i = 1$ maka diperoleh nilai dari P_i dan Q_i

sebagai berikut:

$$\begin{aligned} P_1 &= a_0 Q_0 - P_0 \\ &= 3 \cdot 1 - 0 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{10 - P_1^2}{Q_0} \\ &= \frac{10 - 3^2}{1} \\ &= 10 - 9 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Untuk $i = 1$, maka diperoleh a_i sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{P_1 + \sqrt{D}}{Q_1} \\ &= \frac{3 + \sqrt{10}}{1} \\ &= 3 + 3 + \sqrt{10} - 3 \\ &= 6 + \frac{1}{\sqrt{10} + 3} \end{aligned}$$

Jadi diperoleh nilai $a_1 = 6$

3. Menentukan nilai dari x_i dan y_i

Berikutnya untuk mencari selesaian dari x_i dan y_i dengan $i = 0$ dan 1, maka diperoleh penyelesaian (x_0, y_0) dan (x_1, y_1) berturut-turut sebagai berikut:

$$\begin{aligned}x_0 &= a_0 x_{-1} + x_{-2} \\ &= 3 \cdot 2 + 0 \\ &= 6 + 0 \\ &= 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1 &= a_1 x_0 + x_{-1} \\ &= 6 \cdot 6 + 2 \\ &= 36 + 2 \\ &= 38\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_0 &= a_0 y_{-1} + y_{-2} \\ &= 3 \cdot 0 + 2 \\ &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_1 &= a_1 y_0 + y_{-1} \\ &= 6 \cdot 2 + 0 \\ &= 12\end{aligned}$$

Dari perhitungan di atas diperoleh selesaian awal yaitu $x_0 = 6$ dan $y_0 = 2$.

4. Mensubstitusi nilai x dan y ke dalam persamaan Pell $x^2 - 68y^2 = \pm 4$ untuk mengetahui apakah x dan y merupakan solusi dari persamaan Pell positif atau negatif.

Setelah diperoleh $x_0 = 6$ dan $y_0 = 2$, selanjutnya nilai (6,2) disubstitusikan ke persamaan $x^2 - 10y^2 = \pm 4$ untuk membuktikan apakah (6,2) merupakan penyelesaian persamaan tersebut atau bukan, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} x_0^2 - 10y_0^2 &= 6^2 - 10 \cdot 2^2 \\ &= 36 - 10 \cdot 4 \\ &= 36 - 40 \\ &= -4 \end{aligned}$$

Dari hasil substitusi ternyata diketahui bahwa (6,2) merupakan penyelesaian dari persamaan Pell $x^2 - 10y^2 = -4$. Selanjutnya $x_1 = 38$ dan $y_1 = 12$ juga disubstitusikan ke persamaan Pell $x^2 - 10y^2 = \pm 4$ sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} x_1^2 - 10y_1^2 &= 38^2 - 10 \cdot 12^2 \\ &= 1444 - 10 \cdot 144 \\ &= 1444 - 1440 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Dari hasil perhitungan di atas ternyata juga diperoleh bahwa (38,12) merupakan penyelesaian dari persamaan Pell $x^2 - 10y^2 = 4$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa persamaan Pell $x^2 - 10y^2 = \pm 4$ baik yang bernilai positif maupun negatif keduanya sama-sama memiliki penyelesaian dengan nilai x dan y keduanya sama-sama genap. Jika perhitungan dilanjutkan dengan $i = 1 \dots 3$, maka dapat dibuat tabel solusi sebagai berikut:

Tabel 3.1.5 Solusi Persamaan Pell $x^2 - 10y^2 = \pm 4$

i	P_i	Q_i	a_i	x_i	y_i	$x_i^2 - 10y_i^2$
-2	-	-	-	0	2	0
-1	-	-	-	2	0	4
0	0	1	3	6	2	-4
1	3	1	6	38	12	4
2	3	1	6	234	74	-4
3	3	1	6	1442	456	4

Contoh 3.1.6 :Selesaikan persamaan Pell $x^2 - 27y^2 = \pm 4$!

Penyelesaian :Menyelesaikan persamaan Pell $x^2 - 27y^2 = \pm 4$ dari contoh 3.1.6

dapat dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menentukan kekongruenan koefisien D dari persamaan Pell

$$x^2 - 27y^2 = \pm 4$$

Dari contoh 3.1.6 diketahui bahwa persamaan Pell $x^2 - 27y^2 = \pm 4$

memiliki nilai $D \equiv 3 \pmod{4}$, maka dengan menggunakan

algoritma PQa diperoleh:

- a. $D = 27$
- b. $P_0 = 0$
- c. $Q_0 = 1$
- d. $x_{-2} = 0$ dan $x_{-1} = 2$
- e. $y_{-2} = 2$ dan $y_{-1} = 0$

2. Menentukan nilai dari a_i, P_i dan Q_i

Setelah diketahui nilai D, P_0 dan Q_0 , maka untuk $i = 0$ diperoleh a_i

sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{P_0 + \sqrt{D}}{Q_0} \\
 &= \frac{0 + \sqrt{27}}{1} \\
 &= \sqrt{27} \\
 &= 5 + \sqrt{27} - 5 \\
 &= 5 + \frac{1}{\frac{\sqrt{27} + 5}{2}}
 \end{aligned}$$

Dari perhitungan diperoleh nilai dari $a_0 = 5$. Untuk $l \geq 0$, dimana l adalah panjang dari periode pecahan berulang $\frac{0 + \sqrt{27}}{1}$, maka diperoleh $a_l = 2 \cdot a_0 = 2 \cdot 5 = 10$.

Selanjutnya untuk $i = 1$ maka diperoleh nilai a_i sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{5 + \sqrt{27}}{2} \\
 &= \frac{5 + 5 + \sqrt{27} - 5}{2} \\
 &= 5 + \frac{\sqrt{27} - 5}{2} \\
 &= 5 + \frac{1}{\sqrt{27} + 5}
 \end{aligned}$$

Jadi diperoleh nilai $a_1 = 5$.

Untuk $i = 2$ diperoleh P_i dan Q_i sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= a_0 Q_0 - P_0 \\
 &= 5 \cdot 1 - 0 \\
 &= 5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \frac{27 - P_1^2}{Q_0} \\
 &= \frac{27 - 5^2}{1} \\
 &= 27 - 25 \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

Untuk $i = 2$ maka diperoleh nilai a_i sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 a_2 &= \frac{5 + \sqrt{27}}{1} \\
 &= 5 + 5 + \sqrt{27} - 5 \\
 &= 10 + \sqrt{27} - 5 \\
 &= 10 + \frac{1}{\frac{\sqrt{27} + 5}{2}}
 \end{aligned}$$

Dari perhitungan diperoleh $a_2 = 10$. Jadi $a_2 = 10$ adalah panjang periode pecahan berulang tersebut.

3. Menentukan nilai dari x_i dan y_i

Berikutnya untuk mencari selesaian dari x_i dan y_i dengan $i = 0$ dan

1, maka diperoleh penyelesaian (x_0, y_0) dan (x_1, y_1) berturut-turut

sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 x_0 &= a_0 x_{-1} + x_{-2} \\
 &= 5 \cdot 2 + 0 \\
 &= 10 \\
 x_1 &= a_1 x_0 + x_{-1} \\
 &= 5 \cdot 10 + 2 \\
 &= 52
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_0 &= a_0 y_{-1} + y_{-2} \\
&= 5 \cdot 0 + 2 \\
&= 2 \\
y_1 &= a_1 y_0 + y_{-1} \\
&= 5 \cdot 2 + 0 \\
&= 10
\end{aligned}$$

Dari hasil perhitungan di atas diperoleh selesaian awal yaitu

$$x_0 = 10 \text{ dan } y_0 = 2.$$

4. Mensubstitusi nilai x dan y ke dalam persamaan Pell

$x^2 - 68y^2 = \pm 4$ untuk mengetahui apakah x dan y merupakan solusi dari persamaan Pell positif atau negatif.

Setelah diperoleh $x_0 = 10$ dan $y_0 = 2$, selanjutnya nilai $(10,2)$

disubstitusikan ke dalam persamaan $x^2 - 27y^2 = \pm 4$ untuk

membuktikan apakah $(10,2)$ merupakan selesaian persamaan Pell tersebut atau bukan, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
x_0^2 - 27y_0^2 &= 10^2 - 27(2)^2 \\
&= 100 - 27 \cdot 4 \\
&= 100 - 108
\end{aligned}$$

$$= -8$$

Dari perhitungan di atas diketahui bahwa $(10,2)$ tidak memenuhi persamaan. Jadi $(10,2)$ bukan selesaian dari persamaan Pell

$x^2 - 27y^2 = -4$. Selanjutnya untuk $x_1 = 52$ dan $y_1 = 10$ juga

disubstitusikan ke persamaan Pell $x^2 - 27y^2 = \pm 4$ sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} x_1^2 - 27y_1^2 &= 52^2 - 27(10)^2 \\ &= 2704 - 27 \cdot 100 \\ &= 2704 - 2700 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Dari hasil perhitungan ternyata diperoleh bahwa (52,10) merupakan selesaian dari persamaan Pell $x^2 - 27y^2 = 4$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa persamaan Pell $x^2 - 27y^2 = \pm 4$ hanya memiliki selesaian untuk yang bernilai positif saja dengan nilai x dan y sama-sama genap, sedangkan persamaan Pell negatif tidak memiliki penyelesaian. Jika perhitungan dilanjutkan dengan $i = 1 \dots 3$, maka dapat dibuat tabel solusi sebagai berikut:

Tabel 3.1.6 Solusi Persamaan Pell $x^2 - 27y^2 = \pm 4$

i	P_i	Q_i	a_i	x_i	y_i	$x_i^2 - 27y_i^2$
-2	-	-	-	0	2	0
-1	-	-	-	2	0	4
0	0	1	5	10	2	-8
1	5	2	5	52	10	4
2	5	1	10	530	102	-8
3	5	2	5	2702	520	4

3.2. Penyelesaian Persamaan Pell dengan Metode Matriks

Menyelesaikan persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = \pm 4$, selain menggunakan Algoritma PQa ternyata juga dapat diselesaikan dengan menggunakan metode matriks. Caranya, jika solusi awalnya (solusi positif terkecilnya) telah diketahui, maka untuk solusi ke- n berikutnya dapat dicari dengan rumus-rumus yang ada pada metode tersebut. Jadi menyelesaikan persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = \pm 4$ dengan metode matriks bertujuan untuk mencari selesaian ke- n dari x_n dan y_n setelah selesaian awalnya diketahui.

Untuk menentukan selesaian dari persamaan Pell dengan metode matriks, harus diketahui persamaannya terlebih dahulu. Pada pembahasan ini telah diketahui bahwa bentuk umum persamaan Pell positif yang digunakan adalah $x^2 - Dy^2 = 4$. Untuk mencari selesaian ke- n dari persamaan tersebut, misalkan diketahui selesaian awalnya (x_1, y_1) , maka jika (x_1, y_1) dibentuk ke dalam matriks akan menghasilkan matriks berordo 2×1 yaitu $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $n = 1$. Jadi matriks solusi untuk mencari selesaian ke- n dari x_n dan y_n yaitu $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. Susunan matriks solusi

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ dibentuk dari matriks: $\begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ dengan catatan bahwa matriks

$\begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}$ *invertible* (dapat diinverskan). Dari uraian di atas dapat dikonstruksi

selesaian persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = 4$ sebagai berikut:

Untuk selesaian awalnya diketahui:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \quad (3.2.1)$$

Untuk $n = 2$ akan diperoleh u_2 dan v_2 sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + Dy_1^2 \\ 2x_1y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (3.2.2)$$

Selanjutnya, u_2 dan v_2 disubstitusikan ke dalam persamaan Pell

$x_2^2 - Dy_2^2 = 4$ menjadi:

$$\begin{aligned} u_2^2 - Dv_2^2 &= (x_1^2 + Dy_1^2)^2 - D(2x_1y_1)^2 & (3.2.3) \\ &= (x_1^2)^2 + 2Dx_1^2y_1^2 + (Dy_1^2)^2 - 4D(x_1y_1)^2 \\ &= (x_1^2)^2 - 2Dx_1^2y_1^2 + (Dy_1^2)^2 \\ &= (x_1^2 - Dy_1^2)^2 \\ &= 4^2 \end{aligned}$$

Pada perhitungan persamaan (3.2.3) tidak diperoleh selesaian $u_2^2 - Dv_2^2 = 4$, maka untuk mendapatkan selesaian, persamaan (3.2.3) harus dibagi dengan 4 sehingga diperoleh:

$$\frac{u_2^2 - Dv_2^2}{4} = \frac{(x_1^2 - Dy_1^2)^2}{4} = \frac{4^2}{4} = 4.$$

Dari perhitungan tersebut, selanjutnya dapat diperoleh nilai:

$$x_2 = \frac{u_2}{2} \text{ dan } y_2 = \frac{v_2}{2}, n = 2.$$

$$\text{dengan demikian: } x_2^2 - Dy_2^2 = \left(\frac{u_2}{2}\right)^2 - D\left(\frac{v_2}{2}\right)^2 = 4$$

Jadi diketahui bahwa nilai x_2 dan y_2 adalah selesaian.

Berikutnya untuk $n = 3$ penyelesaian dapat ditentukan dengan perhitungan:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 + Dy_1y_2 \\ y_1x_2 + x_2y_2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} x_1 \frac{u_2}{2} + Dy_1 \frac{v_2}{2} \\ y_1 \frac{u_2}{2} + x_1 \frac{v_2}{2} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{x_1(x_1^2 + Dy_1^2)}{2} + \frac{Dy_1(2x_1y_1)}{2} \\ \frac{y_1(x_1^2 + Dy_1^2)}{2} + \frac{x_1(2x_1y_1)}{2} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Selanjutnya, u_3 dan v_3 disubstitusikan ke persamaan Pell $x_3^2 - Dy_3^2 = 4$, diperoleh:

$$\begin{aligned}
 u_3^2 - Dv_3^2 &= (x_1^2 + Dy_1^2)^2 - D(2x_1y_1)^2 \\
 &= \left(\frac{x_1(x_1^2 + Dy_1^2) + Dy_1(2x_1y_1)}{2} \right)^2 - D \left(\frac{y_1(x_1^2 + Dy_1^2) + x_1(2x_1y_1)}{2} \right)^2 \\
 &= \frac{(x_1(x_1^2 + Dy_1^2))^2 + 2(x_1(x_1^2 + Dy_1^2))(Dy_1(2x_1y_1)) + (Dy_1(2x_1y_1))^2}{4} \\
 &\quad - D \left(\frac{(y_1(x_1^2 + Dy_1^2))^2 + 2(y_1(x_1^2 + Dy_1^2))(x_1(2x_1y_1)) + (x_1(2x_1y_1))^2}{4} \right) \\
 &= \frac{x_1^2(x_1^2)^2 + 2Dx_1^2y_1^2 + (Dy_1^2)^2 + 4Dx_1^2y_1^2(x_1^2 + Dy_1^2) + 4D^2x_1^2y_1^4}{4} \\
 &\quad - D \left(\frac{y_1^2(x_1^2)^2 + 2Dx_1^2y_1^2 + (Dy_1^2)^2 + 4x_1^2y_1^2(x_1^2 + Dy_1^2) + 4x_1^4y_1^2}{4} \right) \\
 &= \frac{x_1^6 + 2x_1^4y_1^2 + D^2x_1^2y_1^4 + 4Dx_1^4y_1^2 + 4D^2x_1^2y_1^4 + 4D^2x_1^2y_1^4}{4} \\
 &\quad - D \left(\frac{x_1^4y_1^2 + 4D^2x_1^2y_1^4 + D^2y_1^6 + 4x_1^4y_1^2 + Dx_1^2y_1^4 + 4x_1^4y_1^2}{4} \right)
 \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x_1^6 + 9D^2x_1^2y_1^4 + 6Dx_1^4y_1^2 - 4x_1^4y_1^2 - 2D^2x_1^2y_1^4 - D^3y_1^6 - 4Dx_1^4y_1^2}{4} \\
&\quad - \frac{4D^2x_1^2y_1^4 - 4Dx_1^4y_1^2}{4} \\
&= \frac{x_1^6 - 3Dx_1^4y_1^2 + 3D^2x_1^2y_1^4 - D^3y_1^6}{4} \\
&= \frac{(x_1^2 - Dy_1^2)^3}{4} \\
&= \frac{4^3}{4}
\end{aligned}$$

Dari perhitungan di atas supaya diperoleh nilai $u_3^2 - Dv_3^2 = 4$ maka persamaan tersebut harus dibagi dengan 16, menjadi:

$$\frac{u_3^2 - Dv_3^2}{4^2} = \frac{(x_1^2 + Dy_1^2)^3}{4^2} = \frac{4^3}{4^2} = 4.$$

Dari perhitungan tersebut, selanjutnya dapat diperoleh nilai:

$$x_3 = \frac{u_3}{2^2} \text{ dan } y_3 = \frac{v_3}{2^2}, n = 3.$$

$$\text{Dengan demikian: } x_3^2 - Dy_3^2 = \left(\frac{u_3}{2^2}\right)^2 - D\left(\frac{v_3}{2^2}\right)^2 = 4$$

Jadi diketahui bahwa x_3 dan y_3 merupakan solusi dari persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = \pm 4$ dan seterusnya perhitungan dapat dilanjutkan sampai n tak hingga.

Dari ke-3 pola selesaian persamaan di atas dapat disimpulkan bahwa:

Untuk selesaian awal saat $n = 1$ diperoleh:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \quad (3.2.6)$$

Untuk $n = 2$ diperoleh:

$$\begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad (3.2.7)$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Untuk $n = 3$ diperoleh:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Maka selanjutnya untuk $n = 4$ diperkirakan akan diperoleh:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}^4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Demikian juga untuk $n = 5$ diperoleh:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}^4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}^5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_5 \\ y_5 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

Dan seterusnya sampai n tak hingga banyaknya. Dari pola persamaan (3.2.6-3.2.10) dapat disimpulkan sebagai berikut:

$$\begin{array}{ll}
 x_1 = u_1 & y_1 = v_1 \\
 x_2 = \frac{u_2}{2} & y_2 = \frac{v_2}{2} \\
 x_3 = \frac{u_3}{4} & \text{dan} \quad y_3 = \frac{v_3}{4} \\
 x_4 = \frac{u_4}{8} & y_4 = \frac{v_4}{8} \\
 x_5 = \frac{u_5}{16} & y_5 = \frac{v_5}{16} \\
 \vdots & \vdots \\
 x_n = \frac{u_n}{2^{n-1}} & y_n = \frac{v_n}{2^{n-1}}.
 \end{array}$$

Dengan demikian, dari uraian di atas diketahui bahwa untuk mencari solusi ke- n dari x_n dan y_n pada persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = 4$ dapat diperoleh rumus:

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dengan nilai}$$

$$x_n = \frac{u_n}{2^{n-1}} \text{ dan } y_n = \frac{v_n}{2^{n-1}}.$$

Dalam hal ini u_n adalah selesaian ke- n dari variabel x dan v_n adalah suku ke- n dari variabel y .

Adapun cara menyelesaikan persamaan Pell dengan matriks dibagi menjadi dua yaitu:

1. Penyelesaian Persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = 4$

Teorema 3.2.1 : Misal (x_1, y_1) adalah solusi dari persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = 4$.

Misalkan:

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ untuk } n \geq 1 \tag{3.2.11}$$

maka solusi ke- n dari persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = 4$ adalah

(x_n, y_n) dengan:

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{u_n}{2^{n-1}}, \frac{v_n}{2^{n-1}} \right) \quad (3.2.12)$$

(Tekcan, 2006: 364)

Bukti Teorema 3.2.1 :

Teorema 3.2.1 dibuktikan dengan induksi pada n . Untuk $n = 1$, maka dari persamaan (3.2.11) diperoleh:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Jadi diperoleh $(u_1, v_1) = (x_1, y_1)$. Karena (x_1, y_1) solusi dari $x_1^2 - Dy_1^2 = 4$

maka (x_1, y_1) merupakan solusi dari persamaan (3.2.11). Selanjutnya

dengan asumsi bahwa persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = 4$ dipenuhi untuk

(x_{n-1}, y_{n-1}) yaitu:

$$x_{n-1}^2 - Dy_{n-1}^2 = \frac{u_{n-1}^2 - Dv_{n-1}^2}{2^{2n-4}} = 4 \quad (3.2.13)$$

Sekarang akan ditunjukkan bahwa persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = 4$ juga

dipenuhi untuk (x_n, y_n) . Dari persamaan (3.2.11) perhitungan dapat

ditunjukkan dengan:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 u_{n-1} + Dy_1 v_{n-1} \\ y_1 u_{n-1} + x_1 v_{n-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

oleh karena itu:

$$\begin{aligned}
x_n^2 - Dy_n^2 &= \frac{u_n^2 - Dv_n^2}{2^{2n-2}} \\
&= \frac{(x_1 u_{n-1} + Dy_1 v_{n-1})^2 - D(y_1 u_{n-1} + x_1 v_{n-1})^2}{2^{2n-2}} \\
&= \frac{x_1^2 u_{n-1}^2 + 2x_1 u_{n-1} Dy_1 v_{n-1} + D^2 y_1^2 v_{n-1}^2}{2^{2n-2}} \\
&\quad - \frac{D(y_1^2 u_{n-1}^2 + 2y_1 u_{n-1} x_1 v_{n-1} + D^2 x_1^2 v_{n-1}^2)}{2^{2n-2}} \\
&= \frac{x_1^2 (u_{n-1}^2 - Dv_{n-1}^2) - Dy_1^2 (u_{n-1}^2 - Dv_{n-1}^2)}{2^{2n-2}} \\
&= \frac{(x_1^2 - Dy_1^2) (u_{n-1}^2 - Dv_{n-1}^2)}{2^{2n-2}} \\
&= \frac{(u_{n-1}^2 - Dv_{n-1}^2)}{2^{2n-2}} \\
&= 2^2 \cdot \frac{(u_{n-1}^2 - Dv_{n-1}^2)}{2^{2n-2}} \\
&= \frac{(u_{n-1}^2 - Dv_{n-1}^2)}{2^{2n-4}}
\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

Dengan menggunakan persamaan (3.2.13) dapat diketahui bahwa

$$u_{n-1}^2 - Dv_{n-1}^2 = 4 \cdot 2^{2n-4} = 2^{2n-2}.$$

bahwa:

$$\begin{aligned}
x_n^2 - Dy_n^2 &= \frac{u_n^2 - Dv_n^2}{2^{2n-2}} \\
&= \frac{(x_1 u_{n-1} + Dy_1 v_{n-1})^2 - D(y_1 u_{n-1} + x_1 v_{n-1})^2}{2^{2n-2}} \\
&= \frac{x_1^2 u_{n-1}^2 + 2x_1 u_{n-1} Dy_1 v_{n-1} + D^2 y_1^2 v_{n-1}^2}{2^{2n-2}}
\end{aligned} \tag{3.2.16}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{D(y_1^2 u_{n-1}^2 + 2y_1 u_{n-1} x_1 v_{n-1} + D^2 x_1^2 v_{n-1}^2)}{2^{2n-2}} \\
&= \frac{x_1^2(u_{n-1}^2 - Dv_{n-1}^2) - Dy_1^2(u_{n-1}^2 - Dv_{n-1}^2)}{2^{2n-2}} \\
&= \frac{(x_1^2 - Dy_1^2)(u_{n-1}^2 - Dv_{n-1}^2)}{2^{2n-2}} \\
&= 4 \cdot \frac{(u_{n-1}^2 - Dv_{n-1}^2)}{2^{2n-2}} \\
&= 4 \cdot \frac{2^{2n-2}}{2^{2n-2}} \\
&= 4
\end{aligned}$$

Dari perhitungan diperoleh bahwa ternyata terbukti bahwa (x_n, y_n) juga merupakan penyelesaian dari persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = 4$ hingga n berubah-ubah, akan diperoleh penyelesaian berupa bilangan bulat dari persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = 4$.

Untuk mengaplikasikan rumus di atas, perhatikan contoh soal berikut:

Contoh 3.2.1: Cari penyelesaian (x_n, y_n) dari persamaan Pell $x^2 - 13y^2 = 4$ dengan menggunakan metode matriks untuk $n = 1 \dots 3$!

Penyelesaian: Dari Tabel 3.1.3 diketahui bahwa persamaan Pell $x^2 - 13y^2 = 4$ memiliki solusi awal $x_1 = 11$ dan $y_1 = 3$. Untuk mencari penyelesaian ke- n yaitu x_n dan y_n selanjutnya dapat digunakan metode matriks.

Dari Teorema 3.2.1 diperoleh rumus sebagai berikut:

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{u_n}{2^{n-1}}, \frac{v_n}{2^{n-1}} \right) \text{ dengan } \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

maka untuk $n = 2$ akan diperoleh:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 11 & 13 \cdot 3 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \left[\begin{pmatrix} 11 & 39 \\ 3 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 39 \\ 3 & 11 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 121+117 & 429+429 \\ 33+33 & 117+121 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 238 & 858 \\ 66 & 238 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 238 \\ 66 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Dari perhitungan di atas diperoleh $u_2 = 238$ dan $v_2 = 66$ sehingga dapat dicari x_2 dan y_2 berturut-turut sebagai berikut:

$$x_2 = \frac{u_2}{2^{2-1}} = \frac{238}{2} = 119$$

$$y_2 = \frac{v_2}{2^{2-1}} = \frac{66}{2} = 33$$

Jadi untuk $n = 2$ diperoleh selesaian $x_2 = 119$ dan $y_2 = 33$.

Selanjutnya untuk $n = 3$ diperoleh:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \left[\begin{pmatrix} 11 & 39 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 11 & 39 \\ 3 & 11 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \left[\begin{pmatrix} 238 & 858 \\ 66 & 238 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 39 \\ 3 & 11 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2618+2574 & 928+9438 \\ 726+714 & 2574+2618 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5192 & 18720 \\ 1440 & 5192 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 5192 \\ 1440 \end{pmatrix}$$

Dari perhitungan diperoleh $u_3 = 5192$ dan $v_3 = 1440$ sehingga dapat dicari x_3 dan y_3 berturut-turut sebagai berikut:

$$x_3 = \frac{u_3}{2^{3-1}} = \frac{5192}{2^2} = \frac{5192}{4} = 1298$$

$$y_3 = \frac{v_3}{2^{3-1}} = \frac{1440}{2^2} = \frac{1440}{4} = 360$$

Jadi untuk $n = 3$ diperoleh solusi $x_3 = 1298$ dan $y_3 = 360$.

Dari semua hasil perhitungan dengan menggunakan metode matriks ternyata diperoleh penyelesaian dari persamaan Pell $x^2 - 13y^2 = 4$ untuk $n = 1 \dots 3$ hasilnya sama dengan penyelesaian dengan menggunakan algoritma PQa yaitu:

$$(11, 3)$$

$$(119, 33)$$

$$(1298, 360)$$

2. Penyelesaian Persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = -4$

Pada uraian sebelumnya persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = 4$ memiliki selesaian

$x_n = \frac{u_n}{2^{n-1}}$ dan $y_n = \frac{v_n}{2^{n-1}}$, selanjutnya untuk memperoleh selesaian dari persamaan

Pell $x^2 - Dy^2 = -4$ dapat dicari dengan perhitungan sebagai berikut:

Misalkan x_1 dan y_1 adalah selesaian awal, maka benar bahwa $x_1^2 - Dy_1^2 = -4$.

Selanjutnya dari persamaan (3.2.3) di atas, jika persamaan $x_1^2 - Dy_1^2 = 4$ diganti

dengan $x_1^2 - Dy_1^2 = -4$, maka untuk $n = 2$ diperoleh:

$$x_2^2 - Dy_2^2 = \frac{(x_1^2 - Dy_1^2)^2}{4} = \frac{(-4)^2}{4} = 4.$$

Karena $x_2^2 - Dy_2^2 \neq -4$, maka x_2 dan y_2 bukan penyelesaian persamaan Pell

$x^2 - Dy^2 = -4$. Selanjutnya $x_1^2 - Dy_1^2 = -4$ digunakan pada persamaan (3.2.3),

maka untuk $n = 3$ diperoleh:

$$x_3^2 - Dy_3^2 = \frac{(x_1^2 - Dy_1^2)^3}{4^2} = \frac{(-4)^3}{4^2} = -4$$

Dari perhitungan diperoleh nilai x_3 dan y_3 adalah penyelesaian dari persamaan Pell

$$x^2 - Dy^2 = -4.$$

Untuk $n = 4$ diperoleh:

$$x_4^2 - Dy_4^2 = \frac{(x_1^2 - Dy_1^2)^4}{4^3} = \frac{(-4)^4}{4^3} = 4$$

Karena $x_4^2 - Dy_4^2 \neq -4$, maka x_4 dan y_4 bukan penyelesaian persamaan Pell

$x^2 - Dy^2 = -4$. Selanjutnya untuk $n = 5$ akan diperoleh:

$$x_5^2 - Dy_5^2 = \frac{(x_1^2 - Dy_1^2)^5}{4^4} = \frac{(-4)^5}{4^4} = -4$$

Dari beberapa uraian di atas dapat disimpulkan bahwa solusi untuk

persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = -4$ diperoleh pada saat n -nya ganjil sehingga dapat

dirumuskan dengan:

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1 & y_1 &= v_1 \\ x_3 &= \frac{u_3}{4} & \text{dan} & & y_3 &= \frac{v_3}{4} \\ x_5 &= \frac{u_5}{16} & & & y_5 &= \frac{v_5}{16} \\ & \vdots & & & & \vdots \\ x_{2n+1} &= \frac{u_{2n+1}}{2^{2n}} & \text{dan} & & y_{2n+1} &= \frac{v_{2n+1}}{2^{2n}} \end{aligned}$$

Jadi untuk persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = -4$ diperoleh selesaian:

$$\begin{pmatrix} u_{2n+1} \\ v_{2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}^{2n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dengan:}$$

$$x_{2n+1} = \frac{u_{2n+1}}{2^{2n}} \text{ dan } y_{2n+1} = \frac{v_{2n+1}}{2^{2n}}.$$

Teorema 3.2.2: Misal (x_1, y_1) adalah solusi persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = -4$ dan

$$\begin{pmatrix} u_{2n+1} \\ v_{2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}^{2n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ untuk } n \geq 0 \quad (3.2.17)$$

maka solusi lain dari persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = -4$ adalah

(x_{2n+1}, y_{2n+1}) dengan:

$$(x_{2n+1}, y_{2n+1}) = \left(\frac{u_{2n+1}}{2^{2n}}, \frac{v_{2n+1}}{2^{2n}} \right), \text{ untuk } n \geq 0 \quad (3.2.18)$$

(Tekcan, 2006: 367)

Bukti: Teorema 3.2.2. dapat ditunjukkan dengan cara yang sama seperti teorema 3.2.1. dengan induksi pada n . Untuk $n = 1$ dari persamaan (3.2.1) diperoleh:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Jadi diperoleh $(u_1, v_1) = (x_1, y_1)$. Karena (x_1, y_1) selesaian dari

$x^2 - Dy^2 = -4$, maka (x_1, y_1) merupakan solusi. Selanjutnya diasumsikan

bahwa persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = -4$ juga dipenuhi untuk (x_{2n-1}, y_{2n-1})

sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
x_{2n-1}^2 - Dy_{2n-1}^2 &= \frac{u_{2n-1}^2 - Dv_{2n-1}^2}{2^{4n-4}} & (3.2.19) \\
&= \left(\frac{u_{2n+1}}{2^{2n}} \right)^2 - D \left(\frac{v_{2n+1}}{2^{2n}} \right)^2 \\
&= \frac{u_{2n+1}^2 - Dv_{2n+1}^2}{2^{4n}} \\
&= -4
\end{aligned}$$

Akan dibuktikan juga berlaku untuk (x_{2n-1}, y_{2n-1}) dari persamaan (3.2.17)

sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u_{2n+1} \\ v_{2n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}^{2n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & (3.2.20) \\
&= \begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}^{2n} \begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}^{2n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \left[\begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x^{2n-1} \\ y^{2n-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1^2 + Dy_1^2 & 2Dx_1y_1 \\ 2x_1y_1 & x_1^2 + Dy_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{2n-1} \\ v_{2n-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (x_1^2 + Dy_1^2)u_{2n-1} + 2Dx_1y_1v_{2n-1} \\ 2x_1y_1u_{2n-1} + (x_1^2 + Dy_1^2)v_{2n-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan nilai:

$$\begin{pmatrix} u_{2n+1} \\ v_{2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1^2 + Dy_1^2)u_{2n-1} + 2Dx_1y_1v_{2n-1} \\ 2x_1y_1u_{2n-1} + (x_1^2 + Dy_1^2)v_{2n-1} \end{pmatrix} \text{ ke persamaan (3.2.19) diperoleh:}$$

$$\begin{aligned}
(x_{2n+1}^2 - Dy_{2n+1}^2) &= \frac{u_{2n+1}^2 - Dv_{2n+1}^2}{2^{4n}} & (3.2.21) \\
&= \frac{\left((x_1^2 + Dy_1^2)u_{2n-1} + 2Dx_1y_1v_{2n-1} \right)^2 - D \left(2x_1y_1u_{2n-1} + (x_1^2 + Dy_1^2)v_{2n-1} \right)^2}{2^{4n}} \\
&= \frac{\left((x_1^2 + Dy_1^2)^2 u_{2n-1}^2 + 2(x_1^2 + Dy_1^2)u_{2n-1} \cdot 2Dx_1y_1v_{2n-1} + 2^2 D^2 x_1^2 y_1^2 v_{2n-1}^2 \right)}{2^{4n}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -D\left(\frac{2^2 x_1^2 y_1^2 u_{2n-1}^2 + 2(2x_1 y_1 u_{2n-1})(x_1^2 + Dy_1^2)v_{2n-1} + (x_1^2 + Dy_1^2)v_{2n-1}^2}{2^{4n}}\right) \\
& = \frac{(x_1^2 + Dy_1^2)^2 v_{2n-1}^2 + 4(x_1^2 + Dy_1^2)u_{2n-1}Dx_1 y_1 v_{2n-1} + 4D^2 x_1^2 y_1^2 v_{2n-1}^2}{2^{4n}} \\
& \quad - \frac{4Dx_1^2 y_1^2 u_{2n-1}^2 - 4D(x_1 y_1 u_{2n-1})(x_1^2 + Dy_1^2)v_{2n-1} - D(x_1^2 + Dy_1^2)v_{2n-1}^2}{2^{4n}} \\
& = \frac{((x_1^2 + Dy_1^2)^2 u_{2n-1}^2 - D(x_1^2 + Dy_1^2)v_{2n-1}^2) + (4D^2 x_1^2 y_1^2 v_{2n-1}^2 - 4Dx_1^2 y_1^2 u_{2n-1}^2)}{2^{4n}} \\
& \quad + \frac{(x_1^2 + Dy_1^2)^2 (u_{2n-1}^2 + Dv_{2n-1}^2) - (4Dx_1^2 y_1^2)(u_{2n-1}^2 - Dv_{2n-1}^2)}{2^{4n}} \\
& = \frac{(x_1^4 + 2Dx_1^2 y_1^2 + Dy_1^4 - 4Dx_1^2 y_1^2)(u_{2n-1}^2 - Dv_{2n-1}^2)}{2^{4n}} \\
& = \frac{(x_1^4 - 2Dx_1^2 y_1^2 - Dy_1^4)(u_{2n-1}^2 - Dv_{2n-1}^2)}{2^{4n}} \\
& = \frac{(x_1^2 + Dy_1^2)^2 (u_{2n-1}^2 - Dv_{2n-1}^2)}{2^{4n}} \\
& = -\frac{4^2 (u_{2n-1}^2 - Dv_{2n-1}^2)}{2^{4n}} \\
& = -\frac{(u_{2n-1}^2 - Dv_{2n-1}^2)}{2^{4n-4}} \\
& \text{Karena } -\frac{(u_{2n-1}^2 - Dv_{2n-1}^2)}{2^{4n-4}} = -4 \text{ maka:}
\end{aligned}$$

$u_{2n-1}^2 - Dv_{2n-1}^2 = 2^2 \cdot 2^{4n-4} = 2^{4n-2}$. Selanjutnya diperoleh:

$$\begin{aligned}
(x_{2n+1}^2 - Dy_{2n+1}^2) & = \frac{u_{2n+1}^2 - Dv_{2n+1}^2}{2^{4n}} \\
& = \frac{((x_1^2 + Dy_1^2)u_{2n-1} + 2Dx_1 y_1 v_{2n-1})^2 - D(2x_1 y_1 u_{2n-1} + (x_1^2 + Dy_1^2)v_{2n-1})^2}{2^{4n}} \\
& = \frac{((x_1^2 + Dy_1^2)^2 u_{2n-1}^2 + 2(x_1^2 + Dy_1^2)u_{2n-1} \cdot 2Dx_1 y_1 v_{2n-1} + 2^2 D^2 x_1^2 y_1^2 v_{2n-1}^2)}{2^{4n}} \\
& \quad - D\left(\frac{2^2 x_1^2 y_1^2 u_{2n-1}^2 + 2(2x_1 y_1 u_{2n-1})(x_1^2 + Dy_1^2)v_{2n-1} + (x_1^2 + Dy_1^2)v_{2n-1}^2}{2^{4n}}\right) \\
& = \frac{(x_1^2 + Dy_1^2)^2 u_{2n-1}^2 + 4(x_1^2 + Dy_1^2)u_{2n-1}Dx_1 y_1 v_{2n-1} + 4D^2 x_1^2 y_1^2 v_{2n-1}^2}{2^{4n}} \\
& \quad - \frac{4Dx_1^2 y_1^2 u_{2n-1}^2 - 4D(x_1 y_1 u_{2n-1})(x_1^2 + Dy_1^2)v_{2n-1} - D(x_1^2 + Dy_1^2)v_{2n-1}^2}{2^{4n}} \\
& = \frac{((x_1^2 + Dy_1^2)^2 u_{2n-1}^2 - D(x_1^2 + Dy_1^2)v_{2n-1}^2) + (4D^2 x_1^2 y_1^2 v_{2n-1}^2 - 4Dx_1^2 y_1^2 u_{2n-1}^2)}{2^{4n}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(x_1^2 + Dy_1^2)^2 (u_{2n-1}^2 + Dv_{2n-1}^2) - (4Dx_1^2 y_1^2) (u_{2n-1}^2 - Dv_{2n-1}^2)}{2^{4n}} \\
& = \frac{(x_1^4 + 2Dx_1^2 y_1^2 + Dy_1^4 - 4Dx_1^2 y_1^2) (u_{2n-1}^2 - Dv_{2n-1}^2)}{2^{4n}} \\
& = \frac{(x_1^4 - 2Dx_1^2 y_1^2 - Dy_1^4) (u_{2n-1}^2 - Dv_{2n-1}^2)}{2^{4n}} \\
& = \frac{(x_1^2 + Dy_1^2)^2 (u_{2n-1}^2 - Dv_{2n-1}^2)}{2^{4n}} \\
& = -\frac{(2^4)2^{4n-2}}{2^{4n}} \\
& = -\frac{(2^2)(2^{4n})}{2^{4n}} \\
& = -4
\end{aligned}$$

Dari hasil perhitungan di atas terbukti bahwa (x_{2n-1}, y_{2n-1}) merupakan selesaian dari persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = -4$ hingga n berubah-ubah, akan diperoleh solusi yang berupa bilangan bulat dari persamaan Pell tersebut.

Untuk lebih memahami uraian di atas, perhatikan contoh soal sebagai berikut:

Contoh soal 3.2.2 : Cari selesaian persamaan Pell $x^2 - 13y^2 = -4$ dengan menggunakan metode matriks untuk $n = 1 \cdots 2!$

Penyelesaian :

Dari Tabel 3.1.3 diketahui bahwa persamaan Pell $x^2 - 13y^2 = -4$ memiliki solusi

awal yaitu $x_1 = 3$ dan $y_1 = 1$. Untuk mencari selesaian ke- n dengan $n = 1 \cdots 2$, maka dapat digunakan metode matriks dari Teorema 3.2.2 sebagai berikut:

$$(x_{2n+1}, y_{2n+1}) = \left(\frac{u_{2n+1}}{2^{2n}}, \frac{v_{2n+1}}{2^{2n}} \right) \text{ dengan } \begin{pmatrix} u_{2n+1} \\ v_{2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}^{2n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Karena (3,1) adalah selesaian awal, maka untuk $n = 1$ diperoleh:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_{2^{1+1}} \\ v_{2^{1+1}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}^{2^{1+1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 13 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \left[\begin{pmatrix} 3 & 13 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 13 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 3 & 13 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 22 & 78 \\ 6 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 13 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 144 & 520 \\ 40 & 144 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 144 \\ 40 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dari perhitungan diperoleh $u_3 = 144$ dan $v_3 = 40$ sehingga dapat dicari x_3 dan y_3 berturut-turut sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_{2^{1+1}} &= \frac{u_3}{2^{2^1}} = \frac{144}{4} = 36 \\ y_{2^{1+1}} &= \frac{v_3}{2^{2^1}} = \frac{40}{4} = 10 \end{aligned}$$

Jadi untuk $n = 1$ diperoleh selesaian $x_3 = 36$ dan $y_3 = 10$.

Selanjutnya untuk $n = 2$ diperoleh:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_5 \\ v_5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 13 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 13 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 3 & 13 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 144 & 520 \\ 40 & 144 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 22 & 78 \\ 6 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6288 & 22672 \\ 1744 & 6288 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6288 \\ 1744 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dari perhitungan untuk $n = 2$ diperoleh $u_5 = 6288$ dan $v_5 = 1744$ selanjutnya dapat dicari x_5 dan y_5 berturut-turut sebagai berikut:

$$x_5 = \frac{6288}{2^4} = \frac{6288}{16} = 393$$

$$y_5 = \frac{1744}{2^4} = \frac{1744}{16} = 109$$

Dari hasil perhitungan untuk $n = 2$ akan diperoleh $x_5 = 393$ dan $y_5 = 109$.

Dapat disimpulkan bahwa dari hasil perhitungan menurut Teorema 3.2.2 dengan menggunakan metode matriks ternyata juga diperoleh solusi dari persamaan Pell $x^2 - 13y^2 = -4$ untuk $n = 1 \dots 2$ hasilnya sama dengan penyelesaian dengan menggunakan algoritma PQa yaitu:

$$(36, 10) \text{ dan } (393, 109)$$

Mencari selesaian persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = \pm 4$ baik dengan menggunakan Algoritma PQa maupun metode matriks akan diperoleh selesaian yang sama, hanya saja untuk mencari selesaian ke- n dari persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = \pm 4$ akan lebih mudah jika menggunakan metode matriks yaitu dengan mencari selesaian awalnya lebih dahulu dengan menggunakan algoritma PQa.

3.3. Implementasi Persamaan Pell dalam Agama Islam

Telah diuraikan pada bab terdahulu bahwa persamaan Pell dengan bentuk umum $x^2 - Dy^2 = N$, diberikan koefisien D berupa bilangan bulat positif bukan kuadrat sempurna dan konstanta N berupa bilangan bulat. Variabel x dan y adalah

penyelesaian dari persamaan Pell tersebut. Adapun persamaan Pell yang dibahas dalam skripsi ini berbentuk $x^2 - Dy^2 = \pm 4$.

Banyak metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan Pell, tetapi pada skripsi ini penulis mencoba menyelesaikan persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = \pm 4$ dengan menggunakan algoritma PQa dan metode matriks. Baik menggunakan algoritma PQa maupun dengan metode matriks dalam mencari solusi persamaan Pell tersebut ternyata diperlukan rumus-rumus dan langkah-langkah penyelesaian.

Pada zaman Rasulullah SAW sebenarnya ilmu matematika terutama yang berhubungan dengan persamaan telah berkembang meskipun tidak serumit atau sekomplek persamaan sekarang (contohnya persamaan Pell). Meski demikian, jika dianalogikan dengan Al Qur'an, maka dapat ditemui bahwa seolah-olah ada beberapa kandungan ayat Al Qur'an yang berisi tentang rumus-rumus persamaan dalam matematika. Hal inilah yang menunjukkan bahwa Allah SWT Maha Matematis. Perhatikan QS Al-An'am ayat 160:

مَنْ جَاءَ بِالْحَسَنَةِ فَلَهُ عَشْرُ مِثَالِهَا وَمَنْ جَاءَ بِالسَّيِّئَةِ فَلَا يُجْزَىٰ إِلَّا مِثْلَهَا وَهُمْ لَا يُظْلَمُونَ

Artinya: Barangsiapa membawa amal yang baik, maka baginya (pahala) sepuluh kali lipat amalnya, dan barangsiapa yang membawa perbuatan jahat, maka dia tidak diberi pembalasan melainkan seimbang dengan kejahatannya, sedang mereka sedikitpun tidak dianiaya (dirugikan).

Al Qur'an surat Al-An'am ayat 160 di atas mengkiaskan bahwa Allah SWT menggunakan rumus persamaan dalam matematika untuk menentukan balasan

perbuatan kebaikan dan kejahatan. Amal kebaikan mendapat pahala 10 kali amal kebaikan tersebut, dan amal kejahatan mendapat balasan 1 kali amal kejahatan tersebut. Uraian tersebut secara matematis dapat dituliskan dengan:

$$y = 10x, \text{ untuk amal kebaikan dan}$$

$$y = x, \text{ untuk amal kejahatan}$$

Jadi variabel x menyatakan amal dan y menyatakan nilai balasan yang diperoleh. Selain dari Al Qur'an surat Al-An'am ayat 160 di atas perhatikan juga Al Qur'an surat Al Baqarah ayat 261 berikut:

مَثَلُ الَّذِينَ يُنْفِقُونَ أَمْوَالَهُمْ فِي سَبِيلِ اللَّهِ كَمَثَلِ حَبَّةٍ أَنْبَتَتْ سَبْعَ سَنَابِلٍ فِي كُلِّ
سُنْبُلَةٍ مِائَةٌ حَبَّةٌ وَاللَّهُ يُضْعِفُ لِمَنْ يَشَاءُ وَاللَّهُ وَاسِعٌ عَلِيمٌ ﴿٢٦١﴾

Artinya: Perumpamaan (nafkah yang dikeluarkan oleh) orang-orang yang menafkahkan hartanya di jalan Allah adalah serupa dengan sebutir benih yang menumbuhkan tujuh bulir, pada tiap-tiap bulir seratus biji. Allah melipat gandakan (ganjaran) bagi siapa yang Dia kehendaki dan Allah Maha luas (karunia-Nya) lagi Maha Mengetahui.

Pengertian menafkahkan harta di jalan Allah meliputi belanja untuk kepentingan jihad, pembangunan perguruan, rumah sakit, usaha penyelidikan ilmiah dan lain-lain. Pada QS Al-Baqarah ayat 261 nampak bahwa Allah menggunakan rumus matematika untuk umat-Nya yang mau menafkahkan hartanya di jalan Allah. Pahala menafkahkan harta adalah tujuh ratus kali. Kalimat tersebut jika ditransfer ke dalam bahasa matematika akan diperoleh rumus sebagai berikut:

Untuk satu bulir benih menumbuhkan pahalanya sama dengan tujuh bulir, maka:

$$1 \text{ butir} = 7 \text{ bulir}$$

dan untuk tiap bulir benih menumbuhkan seratus biji, maka:

$$1 \text{ bulir} = 100 \text{ biji, jadi } 7 \text{ bulir} = 7 \cdot 100 = 700 \text{ biji}$$

Jadi dalam matematika pahala untuk orang yang menafkahkan hartanya di jalan Allah dapat dirumuskan dengan $y = 700x$.

Dengan x menyatakan nilai nafkah dan y menyatakan banyaknya pahala yang diperoleh.

Dalam hadis Nabi juga dibicarakan bahwa dalam menetapkan pahala sholat berjamaah Allah juga menggunakan rumus secara matematis yaitu:

$$y = 27x$$

Dengan x adalah pahala sholat sendiri dan y adalah pahala sholat berjamaah.

Dalam terjemahan kitab Bulughul Maram karangan Al Hafizh Ibnu Hajar Al-Aqsalani disebutkan bahwa Rosulullah bersabda:

عَنْ عَبْدِ اللَّهِ بْنِ عُمَرَ رَضِيَ اللَّهُ عَنْهُمَا، أَنَّ رَسُولَ اللَّهِ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ قَالَ: {صَلَاةُ الْجَمَاعَةِ أَفْضَلُ مِنْ صَلَاةِ الْفَدِّ بِسَبْعٍ وَعِشْرِينَ دَرَجَةً} متفق عليه.

Artinya : *Dari Abdullah bin Umar bahwasannya Rasulullah SAW bersabda: "Sholat berjamaah lebih utama daripada sholat secara sendirian dengan dua puluh tujuh tingkatan " (Muttafaq'alah).*

Pada masa Nabi, ilmu matematika tentang persamaan Pell memang belum dibahas secara terperinci seperti sekarang ini. Akan tetapi ilmu matematika telah banyak dikembangkan dan dikaji oleh beberapa cendekiawan muslim pada masa

sahabat, seperti: ahli matematika dari Uzbekistan yang bernama Abu Abdullah Muhammad Ibn Musa Al-Khwarizmi (770-840), Al Tusi dan sebagainya.

Sebagai mahasiswa Islam terutama dari jurusan matematika, sudah selayaknya kita berusaha untuk mengembangkan ilmu matematika dan mengkaji bagaimana memanfaatkan ilmu tersebut untuk kepentingan umat Islam, yaitu untuk membantu menangani masalah-masalah yang ada dalam Islam, terutama masalah yang berkaitan dengan hitung-menghitung seperti masalah faraidh, zakat dan lain sebagainya. Disamping itu, dari beberapa uraian pada bab pembahasan di atas, pelajaran yang dapat diambil dari filosofi tentang penyelesaian persamaan Pell yaitu hendaknya dalam melakukan suatu perbuatan baik tidak dilakukan dengan tergesa-gesa. Sebaliknya perbuatan tersebut akan lebih baik jika dilakukan dengan langkah-langkah dan perencanaan yang matang, tepat dan terstruktur supaya apa yang diharapkan dan dicita-citakan dapat tercapai secara maksimal. Adapun sikap tergesa-gesa dan perencanaan yang kurang matang dapat menimbulkan penyesalan dikemudian hari. Seperti ketika menyelesaikan persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = \pm 4$ diperlukan langkah-langkah penyelesaian yang terstruktur sehingga akan diperoleh selesaian x dan y yang benar.

Hal ini sesuai dengan firman Allah dalam surat Maryam ayat 84 berbunyi:

فَلَا تَعْجَلْ عَلَيْهِمْ إِنَّمَا نَعُدُّ لَهُمْ عَدًّا

Artinya: Maka janganlah kamu tergesa-gesa memintakan siksa terhadap mereka, karena Sesungguhnya Kami hanya menghitung datangnya (hari siksaan) untuk mereka dengan perhitungan yang teliti.

Ayat tersebut menunjukkan bahwa dalam menetapkan sesuatu, Allah Maha teliti. Allah memperhitungkan suatu amal perbuatan dengan perhitungan yang teliti dan benar. Hal ini menunjukkan bahwa Allah juga mempergunakan matematika. Dengan demikian, jika di bumi ini ada ilmu matematika, maka Allah adalah Ahlinya, Yang Maha mengetahui, Dialah ahli matematika yang serba bisa. . Jika Allah Tuhan sekalian makhluk saja menyukai matematika lalu mengapa kita tidak berusaha untuk menyukai matematika dan mempelajarinya, sebab pada hakikatnya sumber dari segala ilmu itu adalah satu yakni berasal dari Allah SWT.



BAB IV

PENUTUP

4.1. Kesimpulan

1. Menyelesaikan persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = \pm 4$ dengan algoritma PQa dapat dilakukan dengan beberapa langkah sebagai berikut:

a. Menentukan apakah:

- 1) $D \equiv 0 \pmod{4}$
- 2) $D \equiv 1 \pmod{4}$
- 3) $D \equiv 2$ atau $3 \pmod{4}$

b. Menentukan nilai dari a_i , P_i dan Q_i dengan rumus:

- 1) $a_i = \frac{(P_i + \sqrt{D})}{Q_i}$, untuk $i \geq 0$
- 2) $P_i = a_{i-1}Q_{i-1} - P_{i-1}$, untuk $i \geq 1$
- 3) $Q_i = \frac{D - P_i^2}{Q_{i-1}}$, untuk $i \geq 1$

c. Menentukan nilai x_i dan y_i dengan $i \geq 0$ dengan rumus:

$$x_i = a_i x_{i-1} + x_{i-2} \quad \text{dan} \quad y_i = a_i y_{i-1} + y_{i-2}$$

d. Mensubstitusi nilai x dan y ke dalam persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = \pm 4$ untuk mengetahui apakah x dan y merupakan solusi dari persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = 4$ atau $x^2 - Dy^2 = -4$.

2. Menyelesaikan persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = \pm 4$ dengan metode matriks dapat dilakukan dengan rumus-rumus sebagai berikut:

a. Untuk persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = 4$ dapat dicari dengan rumus:

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sehingga } (x_n, y_n) = \left(\frac{u_n}{2^{n-1}}, \frac{v_n}{2^{n-1}} \right), \text{ untuk } n \geq 1.$$

b. Untuk persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = -4$ dapat dicari dengan rumus:

$$\begin{pmatrix} u_{2n+1} \\ v_{2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}^{2n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sehingga } (x_{2n+1}, y_{2n+1}) = \left(\frac{u_{2n+1}}{2^n}, \frac{v_{2n+1}}{2^n} \right), \text{ untuk}$$

$n \geq 0$.

4.2. Saran

Banyak metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan Pell. Bila metode Brahmagupta, pecahan berulang, algoritma PQa dan metode matriks telah digunakan pada peneliti sebelumnya, maka untuk penelitian selanjutnya penulis sarankan untuk mengkaji penyelesaian persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = N$ dengan metode lain.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdusysyagir. 2006. *Ada Matematika Dalam Al Qur'an*. Malang: Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
- Abdussakir. 2006. *Analisis Real 1*. Malang: Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
- Abdusysyagir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
- Anton, Howard. 1987. *Aljabar Linier Elementer Edisi Kelima*. Jakarta: Erlangga.
- Burton, David M. 2007. *Elementary Number Theory sixth Edition*. New York: Mc Graw-Hill Companies, Inc.
- Dickson, Leonard Eugene. 1971. *History of The Theory of Numbers Volume II Diophantine Analysis*. New York: Chelsea Publishing Company.
- Laughlin. 1999. *Polynomial Solution to Pell's Equation and Fundamental Units in Real Quadratic Fields*. Urbana: University of Illinois Champaign Urbana
- Lipschutz, Seymour. Ph. D. 1981. *Theory and Problems of Set Theory and Related Topics*. Singapura: Kin Keong Printing Co. PTE. LTD.
- Robertson, John P. 2004. *Solving The Generalized Pell Equation $x^2 - Dy^2 = N$* . (Online:<http://www.numbertheory.org/php/php.html> diakses 25 Februari 2008.
- Stark, Harold M. 1970. *An Introduction to Number Theory*. USA: Markham Publishing Company.
- Sukirman, 2005. *Pengantar Aljabar Abstrak*. Malang: IKIP Malang.
- Sukrisno dan Ema Utami. 2005. *10 Langkah Belajar Logika dan Algoritma*. Yogyakarta: ANDI.
- Tekcan, Ahmet. 2007. *The Pell Equation $x^2 - Dy^2 = \pm 4$* . Turkey: Uludag
- Wahyudi, Bambang. 2004. *Pengantar Struktur Data dan Algoritma*. Yogyakarta: ANDI.
- Niven, Ivan, dkk. 1991. *Introduction to The Theory Number Fifth Edition*. New York: John Wiley Addison.