

**PEWARNAAN TITIK  
PADA GRAF YANG BERKAITAN DENGAN SIKEL**

**SKRIPSI**

Oleh:  
**ABDUL GHOFUR**  
**NIM. 03210049**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG  
MALANG  
2008**

**PEWARNAAN TITIK  
PADA GRAF YANG BERKAITAN DENGAN SIKEL**

**SKRIPSI**

Diajukan Kepada :  
Universitas Islam Negeri Malang  
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh :  
**ABDUL GHOFUR**  
NIM. 03210049



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG  
MALANG  
2008**

**PEWARNAAN TITIK  
PADA GRAF YANG BERKAITAN DENGAN SIKEL**

**SKRIPSI**

Oleh:  
**ABDUL GHOFUR**  
**NIM. 03210049**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji  
Tanggal: 24 Maret 2008

Pembimbing I

Pembimbing II

Abdussakir, M.Pd  
NIP. 150 327 247

Munirul Abidin, M.Ag  
NIP. 150 321 634

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M. Si  
NIP. 150 318 321

**PEWARNAAN TITIK  
PADA GRAF YANG BERKAITAN DENGAN SIKEL**

**SKRIPSI**

Oleh:  
**ABDUL GHOFUR**  
**NIM. 03210049**

Telah Dipertahankan di depan Dewan Penguji Skripsi dan  
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan  
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal 12 April 2008

**Susunan Dewan Penguji**

**Tanda Tangan**

- |                         |  |   |   |
|-------------------------|--|---|---|
| <b>1. Penguji Utama</b> | <b>: Dr. Yus M. Cholily, M.Si</b>                                | ( | ) |
| <b>2. Ketua</b>         | <b>: <u>Wahyu H. Irawan, M.Pd</u></b><br><b>NIP. 150 300 415</b> | ( | ) |
| <b>3. Sekretaris</b>    | <b>: <u>Abdussakir, M.Pd</u></b><br><b>NIP. 150 327 247</b>      | ( | ) |
| <b>4. Anggota</b>       | <b>: <u>Munirul Abidin, M.Ag</u></b><br><b>NIP. 150 321 634</b>  | ( | ) |

**Mengetahui dan Mengesahkan  
Ketua Jurusan Matematika**

**Sri Harini, M.Si**  
**NIP. 150 318 321**

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : ABDUL GHOFUR

NIM : 03210049

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 12 April 2008

Abdul Ghofur

NIM. 03210049

## Motto

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾ إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾

**Karena Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan,  
Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan.  
(QS: Al-Insyiroh 94:5-6)**



## HALAMAN PERSEMBAHAN



Untuk  
Bapak H. Zuhri, (Almh) Ibu Hj. Hannah  
Adikku Nur Laily Rohmah, Nikmatul Fauziah  
dan  
Hendun Mariana, sumber semangat dan kebahagiaanku

## KATA PENGANTAR



*Alhamdulillahirrobbil 'alamin*, segala puji syukur ke hadirat Allah SWT atas limpahan rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, hingga penulis mampu menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul “PEWARNAAN TITIK PADA GRAF YANG BERKAITAN DENGAN SIKEL” ini dengan baik. Sholawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada junjungan Nabi besar Muhammad SAW sebagai *uswatun hasanah* dalam meraih kesuksesan di dunia dan akhirat.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, iringan doa dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, terutama kepada:

1. Bapak Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
2. Bapak Prof. Dr. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
3. Ibu Sri Harini, M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
4. Bapak Abdussakir, M.Pd. selaku dosen pembimbing, yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan pengarahan selama penulisan skripsi ini.
5. Bapak Munirul Abidin, M.Ag selaku dosen pembimbing keagamaan, yang telah memberikan saran dan bantuan selama penulisan skripsi ini.

6. Seluruh Dosen Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang yang telah memberikan ilmu pengetahuan kepada penulis selama di bangku kuliah, serta seluruh karyawan dan staf UIN Malang.
7. Bapak dan (Alm) Ibu tercinta, yang telah memberikan bantuan dan dukungan baik moril maupun spirituil serta ketulusan do'anya kepada penulis sampai dapat menyelesaikan skripsi ini.
8. Adik-adik tersayang, Nur Laily Rohmah dan Nikmatul Fauziah, yang selalu memberikan bantuan, semangat, dan do'a selama kuliah.
9. Hendun Mariana, terima kasih atas semua saran dan bantuannya.
10. Teman-teman matematika angkatan 2003, beserta semua pihak yang telah banyak membantu dalam penyelesaian skripsi ini.

Akhirnya, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Amien.

Malang, 24 Maret 2008

Penulis

## DAFTAR ISI

<b>KATA PENGANTAR</b> .....	i
<b>DAFTAR ISI</b> .....	iii
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	v
<b>ABSTRAK</b> .....	vii
<b>BAB I : PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	6
1.3 Tujuan Penelitian .....	7
1.4 Batasan Masalah .....	7
1.5 Manfaat Penelitian .....	7
1.6 Sistematika Penulisan .....	8
<b>BAB II : KAJIAN PUSTAKA</b>	
2.1 Graf .....	9
2.1.1 Definisi Graf .....	9
2.1.2 Derajat Suatu Titik .....	11
2.1.3 Graf Terhubung .....	13
2.1.4 Graf Dengan Nama Tertentu .....	15
1. Graf Komplit ( <i>Complete Graph</i> ).....	15
2. Graf Bipartisi ( <i>Bipartite Graph</i> ) .....	15
3. Graf Bipartisi Komplit ( <i>Complete Bipartite Graph</i> ).....	16
4. Graf Sikel .....	17
5. Graf Lintasan .....	17
6. Graf Kubus .....	18
7. Hutan ( <i>forest</i> ) .....	19
2.1.5 Graf yang berhubungan dengan Sikel .....	20
1. Graf Roda ( <i>Wheel Graph</i> ).....	20
2. Graf Gear .....	21

3. Graf Helm .....	22
4. Graf Helm Tertutup .....	24
5. Graf Bunga .....	26
2.1.6 Pewarnaan Pada Graf .....	27
1. Pewarnaan Titik ( <i>vertex coloring</i> ) .....	27
2. Pewarnaan Sisi ( <i>edge coloring</i> ) .....	29
3. Pewarnaan Peta ( <i>map coloring</i> ) .....	30
2.2 Konsep Graf dalam Al-Qur'an .....	30

### **BAB III: PEMBAHASAN**

3.1 Pewarnaan Titik pada Graf Sikel .....	35
3.2 Pewarnaan Titik pada Graf Roda .....	38
3.3 Pewarnaan Titik pada Graf Gear .....	38
3.4 Pewarnaan Titik pada Graf Helm .....	44
3.5 Pewarnaan Titik pada Graf Helm Tertutup .....	49
3.6 Pewarnaan Titik pada Graf Bunga .....	53
3.7 Tinjauan Agama Berdasarkan Hasil Pembahasan .....	58

### **BAB V: PENUTUP**

4.1 Kesimpulan .....	65
4.2 Saran .....	66

### **DAFTAR PUSTAKA**

## DAFTAR GAMBAR

No.	Gambar	Halaman
2.1	Graf dan Multigraf .....	10
2.2	Graf .....	11
2.3	Subgraf .....	11
2.4	Graf dengan derajat titik .....	12
2.5	Jalan pada Graf .....	14
2.6	Graf Terhubung ( <i>connected</i> ) .....	15
2.7	Graf Komplit .....	15
2.8	Graf Bipartisi.....	16
2.9	Graf Bipartisi Komplit .....	17
2.10	Graf Sikel.....	17
2.11	Graf Lintasan .....	18
2.12	Graf Kubus.....	19
2.13	Hutan ( <i>forest</i> ) .....	19
2.14	Graf Roda.....	20
2.15	Graf Gear.....	22
2.16	Graf Helm .....	23
2.17	Graf Helm Tertutup.....	25
2.18	Graf Bunga .....	27
2.19	Pewarnaan Titik .....	29
2.20	Pewarnaan Sisi .....	29
2.21	Pewarnaan Peta .....	30
2.22	Representasi graf terhadap waktu-waktu sholat .....	28
2.23	Graf sarang laba-laba .....	28

3.1	Pewarnaan Titik pada Graf Sikel .....	37
3.2	Pewarnaan Titik pada Graf Roda .....	40
3.3	Pewarnaan Titik pada Graf Gear .....	43
3.4	Pewarnaan Titik pada Graf Helm .....	47
3.5	Pewarnaan Titik pada Graf Helm Tertutup .....	41
3.6	Pewarnaan Titik pada Graf Bunga .....	56



## ABSTRAK

Ghofur, Abdul. 2008. **Pewarnaan Titik pada Graf yang Berkaitan dengan Sikel**. Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Malang. Pembimbing: (I) Abdussakir, M.Pd (II) Munirul Abidin, M.Ag.

**Kata Kunci:** Pewarnaan titik, Graf Sikel, Bilangan Kromatik

Matematika merupakan salah satu disiplin ilmu yang sangat berpengaruh pada disiplin ilmu lainnya. Salah satu cabang dari disiplin ilmu matematika adalah teori graf yang di dalamnya terdapat satu pokok bahasan yang menarik, yaitu masalah pewarnaan titik.

Pewarnaan titik pada graf  $G = (V(G), E(G))$  adalah pemberian warna untuk setiap titik pada graf sehingga tidak ada dua titik yang terhubung langsung berwarna sama. Penelitian ini dilakukan dengan tujuan untuk (1) Menentukan bilangan kromatik pewarnaan titik pada graf yang berkaitan dengan Sikel. (2) membuktikan rumus menentukan bilangan kromatik pewarnaan titik pada graf yang berkaitan dengan Sikel.

Dalam kajian ini, penulis menggunakan graf sikel sebagai acuan untuk pewarnaan titik pada graf yang lainnya, yakni graf roda, graf gear, graf helm, graf helm tertutup dan graf bunga. Selanjutnya, pada pokok bahasan nanti penulis akan menjelaskan tentang bagaimana menentukan rumus dari bilangan kromatik pada pewarnaan titik secara mudah pada graf-graf tersebut sekaligus pembuktian dari rumus-rumus tersebut.

Berdasarkan hasil pembahasan dapat diperoleh bahwa rumus umum untuk pewarnaan titik pada graf Sikel adalah  $\chi(C_n) = 2$  untuk  $n$  genap dan  $\chi(C_n) = 3$  untuk  $n$  ganjil, sedangkan pada graf Roda adalah  $\chi(W_n) = 3$  untuk  $n$  genap dan  $\chi(W_n) = 4$  untuk  $n$  ganjil. Rumus umum pewarnaan titik pada graf Gear adalah  $\chi(G_n) = 2$  untuk  $n$  bilangan asli, sedangkan pada graf Helm adalah  $\chi(H_n) = 3$  untuk  $n$  genap dan  $\chi(H_n) = 4$  untuk  $n$  ganjil. rumus umum pewarnaan titik pada graf Helm Tertutup adalah  $\chi(\hat{H}_n) = 3$  untuk  $n$  genap dan  $\chi(\hat{H}_n) = 4$  untuk  $n$  ganjil, sedangkan pada graf Bunga adalah  $\chi(F_n) = 3$  untuk  $n$  genap dan  $\chi(F_n) = 4$  untuk  $n$  ganjil.

## BAB I

### PENDAHULUAN

#### 1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu yang mendasari berbagai macam ilmu yang lain dan selalu menghadapi berbagai macam fenomena yang semakin kompleks. Hal ini disebabkan oleh kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi, serta matematika merupakan bahasa proses, teori dan aplikasi ilmu yang memberikan suatu bentuk dan kemanfaatan. Perhitungan matematika menjadi dasar bagi desain ilmu teknik, fisika, kimia maupun disiplin ilmu yang lainnya. Para ahli dari berbagai disiplin ilmu, menggunakan matematika untuk berbagai keperluan yang berkaitan dengan keilmuan mereka. Misalnya para ahli fisika menggunakan matematika untuk mengukur kuat arus listrik, merancang pesawat ruang angkasa, menganalisis gerak, mengukur kecepatan, dan lain-lain (Nurhayati, 2007:4).

Mempelajari matematika yang sesuai dengan paradigma *ulul albab*, tidak cukup hanya berbekal kemampuan intelektual semata, tetapi perlu didukung secara bersamaan dengan kemampuan emosional dan spiritual. Pola pikir deduktif dan logis dalam matematika juga bergantung pada kemampuan intuitif dan imajinatif serta mengembangkan pendekatan rasionalis, empiris, dan logis (Abdusysyahir, 2007:24). Sebagaimana dalam firman Allah SWT dalam surat Shaad ayat 29:

كَتَبْنَا أَنْزَلْنَاهُ إِلَيْكَ مُبَارَكٌ لِيَدَّبَّرُوا آيَاتِهِ ۖ وَلِيَتَذَكَّرَ أُولُو الْأَلْبَابِ ﴿٢٩﴾

*Artinya: "Ini adalah sebuah Kitab yang kami turunkan kepadamu penuh dengan berkah supaya mereka memperhatikan ayat-ayatnya dan supaya mendapat pelajaran orang-orang yang mempunyai fikiran (Q. S. Shaad: 29).*

Sumber studi matematika, sebagaimana sumber ilmu pengetahuan dalam Islam, adalah konsep tauhid, yaitu ke-Esaan Allah (Rahman, 1992:92). Namun, Al-Qur'an tidak mengangkat metode baru atau teknik baru dalam masalah ini, melainkan telah menunjukkan tentang adanya eksistensi dari sesuatu yang ada di balik alam semesta dengan cara yang sama seperti yang ia tunjukkan mengenai eksistensi dari alam semesta itu sendiri (Rahman, 1992:15).

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdusysyahir, 2007:79).

Dalam Al Qur'an surat Al Qamar ayat 49 disebutkan:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

*Artinya: "Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran" (Q.S. Al-Qamar: 49).*

Shihab (2003:482) menafsirkan bahwa kata *qadar* pada ayat di atas diperselisihkan oleh para ulama. Dari segi bahasa kata tersebut dapat berarti *kadar tertentu* yang tidak bertambah atau berkurang, atau berarti *kuasa*. Tetapi karena ayat tersebut berbicara tentang segala sesuatu yang berada dalam kuasa Allah, maka adalah lebih tepat memahaminya dalam arti *ketentuan* dan *sistem yang telah ditetapkan terhadap segala sesuatu*. Tidak hanya terbatas pada salah satu

aspeknya saja. Manusia misalnya, telah ada *kadar yang ditetapkan* Allah baginya. Selaku jenis makhluk hidup ia dapat makan, minum dan berkembang biak melalui *sistem yang ditetapkan-Nya*. Manusia memiliki potensi baik dan buruk. Ia dituntut untuk mempertanggungjawabkan pilihannya. Manusia dianugerahi Allah petunjuk dengan kedatangan sekian rasul untuk membimbing mereka. Akalpun dianugerahkan-Nya kepada mereka, demikian seterusnya yang kesemuanya dan yang selainnya termasuk dalam *sistem* yang sangat tepat, teliti dan akurat yang telah ditetapkan Allah SWT. Demikian juga Allah telah menetapkan *sistem* dan *kadar* bagi ganjaran atau balasan-Nya yang akan diberikan kepada setiap orang.

Dalam ayat lain juga disebutkan:

الَّذِي لَهُ مُلْكُ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُن لَّهُ شَرِيكٌ فِي الْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَرَهُ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

Artinya: "Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan dia Telah menciptakan segala sesuatu, dan dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya" (Q.S. Al-Furqaan: 2).

Ayat di atas menjelaskan bahwa segala sesuatu yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitungan-hitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya. Ahli matematika atau fisika tidak membuat suatu rumus sedikitpun. Mereka hanya menemukan rumus atau persamaan, sehingga rumus-rumus yang ada sekarang bukan diciptakan manusia sendiri, tetapi sudah disediakan. Manusia hanya menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika (Abdusysyagir, 1997:80).

Dewasa ini semakin banyak muncul penggunaan model matematika maupun penalaran matematika sebagai alat bantu dalam menyelesaikan permasalahan yang dihadapi dalam berbagai disiplin ilmu. Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang penting dan banyak manfaatnya karena teori-teorinya dapat diterapkan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Dengan mengkaji dan menganalisa model atau rumusan teori graf dapat diperlihatkan peranan dan kegunaannya dalam memecahkan permasalahan. Permasalahan yang dirumuskan dengan teori graf dibuat sederhana, yaitu diambil aspek-aspek yang diperlukan dan dibuang aspek-aspek lainnya (Purwanto, 1998:1).

Terkait dengan pernyataan di atas, pewarnaan titik pada graf merupakan salah satu dari materi pada teori graf yang berkembang dan mendapat perhatian saat ini. Dengan mengkaji dan menganalisis suatu pewarnaan titik pada graf tertentu, akan didapat suatu perumusan yang akan lebih memudahkan proses pengaplikasiannya ke dunia nyata.

Pewarnaan titik dari graf  $G$  adalah sebuah pemetaan warna-warna ke titik-titik dari  $G$  sedemikian hingga titik yang terhubung langsung mempunyai warna-warna yang berbeda. Graf  $G$  berwarna  $n$  jika terdapat sebuah pewarnaan dari  $G$  yang menggunakan  $n$  warna (Hasanah, 2007:20). Dalam pewarnaan titik erat kaitannya dengan penentuan bilangan kromatik, yaitu masalah menentukan banyak warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai titik-titik pada graf sehingga dua titik yang terhubung langsung mempunyai warna yang berbeda.

Pewarnaan titik pada graf, yang akan dibahas pada skripsi ini mempunyai beberapa nilai penting dalam memahami tafsiran Al-Qur'an, yakni masalah *kadar* dan *sistem* yang telah dijelaskan pada ayat di atas. Artinya, dalam masalah pewarnaan titik pada graf yang ternyata juga terdapat rumusan atau aturan-aturannya. Rumusan atau aturan-aturan yang dimaksud adalah bagaimana menentukan bilangan kromatik pewarnaan titik pada graf yang berkaitan dengan siklus. Begitulah Al-Qur'an menjelaskan dan menjadi sumber dari ilmu pengetahuan yang telah banyak dikembangkan di muka bumi ini, khususnya perkembangan ilmu matematika.

Allah SWT yang telah menciptakan alam semesta ini dengan aturan dan ukuran yang serapi-rapinya, ternyata tidak hanya ada pada firman-Nya saja, tetapi itu semua sudah terbukti, kita sudah dapat melihat dan merasakannya secara langsung segala apa yang ada di muka bumi ini yang kesemuanya tertata dengan sempurna. Demikian pula pada pembahasan yang ada di BAB III nantinya, akan dibuktikan bilangan kromatik pada pewarnaan titik suatu graf yang berkaitan dengan siklus tersebut memang benar adanya.

Allah SWT. berfirman dalam Al-Qur'an surat Al-Baqarah ayat 111:

.... قُلْ هَاتُوا بُرْهَانَكُمْ إِن كُنْتُمْ صَادِقِينَ ﴿١١١﴾

Artinya: .....Katakanlah: "Tunjukkanlah bukti kebenaranmu jika kamu adalah orang yang benar" (Q.S. Al-Baqarah: 111).

Juga dalam surat Al-An'am ayat 143:

.... نَبِّئُونِي بِعِلْمٍ إِن كُنْتُمْ صَادِقِينَ ﴿١٤٣﴾

*Artinya: ".....Terangkanlah kepadaku dengan berdasar pengetahuan jika kamu memang orang-orang yang benar" (Q.S. Al-An'am: 143).*

Bahasan mengenai pewarnaan titik pada graf tidak hanya difokuskan pada beberapa jenis graf itu sendiri, akan tetapi juga dapat diaplikasikan pada kehidupan sehari-hari, misalnya pada masalah penjadwalan. Untuk pewarnaan titik pada beberapa jenis graf, contohnya adalah pewarnaan titik pada graf Gear, graf Helm, graf Bunga serta masih banyak lagi jenis graf yang dapat diulas sebagai bahasan tentang pewarnaan titiknya.

Beberapa kajian terdahulu tentang pewarnaan titik pada graf tertentu telah dibahas pada skripsi yang lain seperti pewarnaan titik dan aplikasinya pada penjadwalan mata kuliah jurusan matematika. Untuk selanjutnya penulis tertarik untuk melanjutkan meneliti tentang pewarnaan titik, namun bukan pada aplikasi sehari-hari. Akan tetapi akan difokuskan pada pembahasan masalah pewarnaan titik pada beberapa jenis graf. Oleh karena itu penulis merumuskan judul untuk skripsi ini, yakni *Pewarnaan Titik pada Graf yang Berkaitan dengan Sikel*.

## **1.2 Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah dalam penulisan skripsi ini antara lain:

1. Bagaimana menentukan bilangan kromatik pewarnaan titik pada graf yang berkaitan dengan sikel.
2. Bagaimana membuktikan rumus bilangan kromatik pewarnaan titik pada graf yang berkaitan dengan sikel.

### **1.3 Tujuan Penelitian**

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penulisan skripsi ini antara lain:

1. Menjelaskan cara menentukan bilangan kromatik pewarnaan titik pada graf yang berkaitan dengan siklus.
2. Menjelaskan pembuktian rumus bilangan kromatik pewarnaan titik pada graf yang berkaitan dengan siklus.

### **1.4 Batasan Masalah**

Agar pembahasan dalam skripsi ini tidak meluas, maka yang dimaksud graf yang berkaitan dengan siklus pada skripsi ini adalah Graf Roda, Graf Gear, Graf Helm, Graf Helm Tertutup dan Graf Bunga.

### **1.5 Manfaat Penelitian**

Adapun manfaat dari penulisan skripsi ini adalah:

1. Bagi peneliti, sebagai tambahan informasi dan wawasan pengetahuan mengenai cara menentukan bilangan kromatik pewarnaan titik pada graf yang berkaitan dengan siklus
2. Bagi pemerhati matematika, sebagai tambahan pengetahuan bidang matematika, khususnya Teori Graf mengenai cara menentukan bilangan kromatik pewarnaan titik pada graf yang berkaitan dengan siklus

3. Bagi lembaga UIN Malang, untuk bahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di jurusan matematika untuk mata kuliah Teori Graf.

### **1.6 Sistematika Penulisan**

Agar penulisan skripsi ini lebih terarah, mudah ditelaah dan dipahami, maka digunakan sistematika pembahasan yang terdiri dari empat bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab dengan rumusan sebagai berikut:

#### **BAB I PENDAHULUAN**

Pendahuluan meliputi: latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

#### **BAB II TINJAUAN PUSTAKA**

Bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang pengertian graf, derajat suatu titik, graf terhubung, graf dengan nama tertentu dan pewarnaan graf.

#### **BAB III PEMBAHASAN**

Pembahasan berisi tentang bagaimana menentukan bilangan khromatik pewarnaan titik pada Graf Sikel, Graf Roda, Graf Gear, Graf Helm, Graf Helm Tertutup, Graf Bunga dan membuktikannya, serta Kajian Agama Islam tentang pewarnaan titik pada Graf.

#### **BAB IV PENUTUP**

Pada bab ini akan dibahas tentang kesimpulan dan saran.

## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA

#### 2.1 Graf

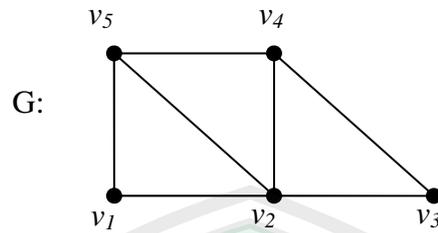
##### 2.1.1 Definisi Graf

###### Definisi 1

Graf  $G$  adalah pasangan himpunan  $(V, E)$  dengan  $V$  adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan  $E$  adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di  $V$  yang disebut sebagai sisi. Himpunan titik di  $G$  dinotasikan dengan  $V(G)$  dan himpunan sisi dinotasikan dengan  $E(G)$ . Sedangkan banyaknya unsur di  $V$  disebut order dari  $G$  dan dilambangkan dengan  $p(G)$  dan banyaknya unsur di  $E$  disebut ukuran dari  $G$  dan dilambangkan dengan  $q(G)$ . Jika graf yang dibicarakan hanya graf  $G$ , maka order dan ukuran dari  $G$  tersebut cukup ditulis dengan  $p$  dan  $q$  (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Dari uraian di atas, maka suatu graf tidak boleh mempunyai sisi rangkap dan loop. Sisi rangkap dari suatu graf adalah jika dua titik yang dihubungkan oleh lebih dari satu sisi. Sedangkan yang disebut dengan *loop* adalah suatu sisi yang menghubungkan suatu titik dengan dirinya sendiri (Suryanto dalam Fitria, 2007:6). Graf yang mempunyai sisi rangkap dan loop disebut *multigraf*.

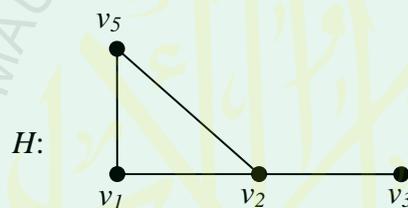


**Contoh 2.2**

Gambar 2.2 Graf

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \text{ dan}$$

$$E(G) = \{v_1 v_2, v_1 v_5, v_2 v_3, v_2 v_4, v_2 v_5, v_3 v_4, v_4 v_5\}$$

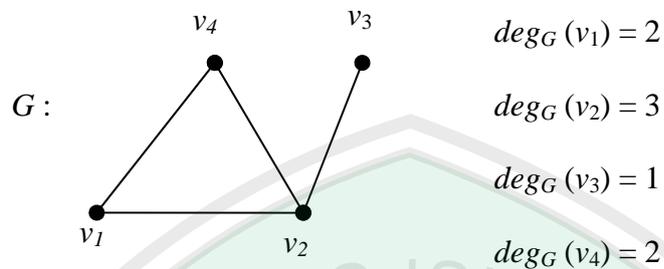


Gambar 2.3 Subgraf

Gambar 2.2 dan 2.3 menunjukkan dua graf  $G$  dan  $H$  dan menunjukkan bahwa  $H$  subgraf  $G$ .

**2.1.2 Derajat Suatu Titik****Definisi 4**

Derajat suatu titik  $v$  pada sebuah graf  $G$ , ditulis dengan  $deg(v)$ , adalah jumlah sisi yang *incident* pada  $v$ . Dengan kata lain, jumlah sisi yang memuat  $v$  sebagai titik ujung. Titik  $v$  dikatakan genap atau ganjil tergantung dari jumlah  $deg(v)$  genap atau ganjil (Chartrand dan Lesniak, 1986:8).

**Contoh 2.3**

Gambar 2.4. Graf dengan derajat titik

**Teorema 1**

Jika  $G$  graf  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

maka  $\sum_{i=1}^p deg_G(v_i) = 2q$  (Chartrand dan Lesniak, 1986:7)

**Bukti:**

Setiap sisi adalah terkait langsung dengan 2 titik, jika setiap derajat titik dijumlahkan, maka setiap sisi dihitung dua kali.

**Akibat 1.**

Pada sebarang graf, jumlah derajat titik ganjil adalah genap.

**Bukti:**

Misalkan graf  $G$  dengan ukuran  $q$ . Maka ambil  $W$  yang memuat himpunan titik ganjil pada  $G$  serta  $U$  yang memuat himpunan titik genap di  $G$ .

Dari Teorema 1.1 maka diperoleh:

$$\sum_{v \in V(G)} deg_G v = \sum_{v \in W} deg_G v + \sum_{v \in U} deg_G v = 2q$$

dengan demikian karena  $\sum_{v \in U} \deg_G v$  genap, maka  $\sum_{v \in W} \deg_G v$  juga -- genap. Sehingga  $|W|$  adalah genap.

### 2.1.3 Graf Terhubung

#### Definisi 5

Sebuah jalan (*walk*)  $u - v$  di graf  $G$  adalah barisan berhingga (tak kosong).

$W : u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n - v_n = v$  yang berselang seling antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik dan diakhiri dengan titik sedemikian hingga untuk  $0 \leq i \leq n$ . Dengan  $e_i = v_{i-1}v_i$  adalah sisi di  $G$ .

$v_0$  disebut titik awal,  $v_n$  disebut titik akhir,  $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$  disebut titik interval, dan  $n$  menyatakan panjang dari  $W$  (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

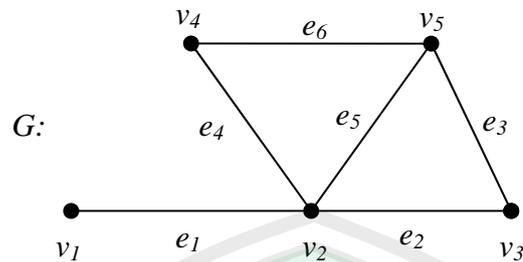
#### Definisi 6

Jalan  $u - v$  yang semua sisinya berbeda disebut *trail*  $u - v$  (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

#### Definisi 7

Jalan  $u - v$  yang semua titiknya berbeda disebut lintasan (*path*)  $u - v$ .

Dengan demikian, semua lintasan adalah *trail* (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

**Contoh 2.4**

Gambar 2.5 Jalan pada Graf

Dari graf di atas  $v_1, e_1, v_2, e_5, v_5, e_6, v_4, e_4, v_2, e_2, v_3$  disebut sebagai *trail*, sedangkan  $v_1, e_1, v_2, e_5, v_5, e_6, v_4$  disebut sebagai lintasan.

**Definisi 8**

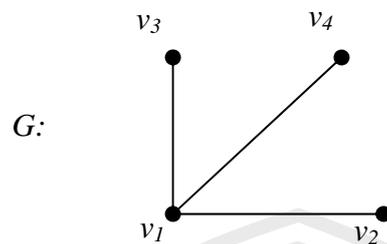
Sebuah jalan tertutup (*closed trail*) yang tak-trivial pada Graf  $G$  disebut Sirkuit  $G$  (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

**Definisi 9**

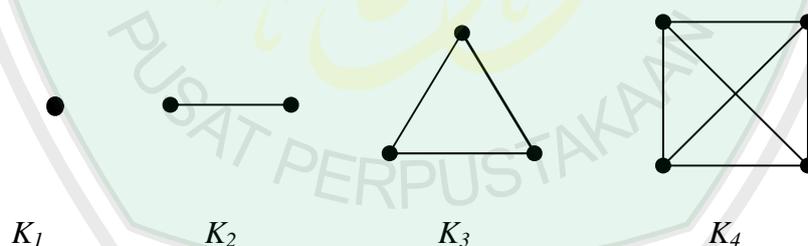
Sirkuit  $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$  ( $n \geq 3$ ) dengan  $v_i$  adalah titik-titik berbeda  $1 \leq i \leq n$  disebut Sikel (*cycle*) (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

**Definisi 10**

Misalkan  $u$  dan  $v$  titik berbeda pada graf  $G$ . Maka titik  $u$  dan  $v$  dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika terdapat lintasan  $u-v$  di  $G$ . Sedangkan suatu graf  $G$  dapat dikatakan terhubung, jika untuk setiap titik  $u$  dan  $v$  di  $G$  terhubung (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

**Contoh 2.5**Gambar 2.6 Graf Terhubung (*connected*)**2.1.4 Graf dengan Nama Tertentu****1. Graf Komplit****Definisi 11**

Graf komplit (*Complete Graph*) adalah graf dengan setiap pasang titik yang berbeda dihubungkan oleh satu sisi. Graf komplit dengan  $n$  titik dinyatakan dengan  $K_n$  (Purwanto, 1998:21).



Gambar 2.7 Graf Komplit

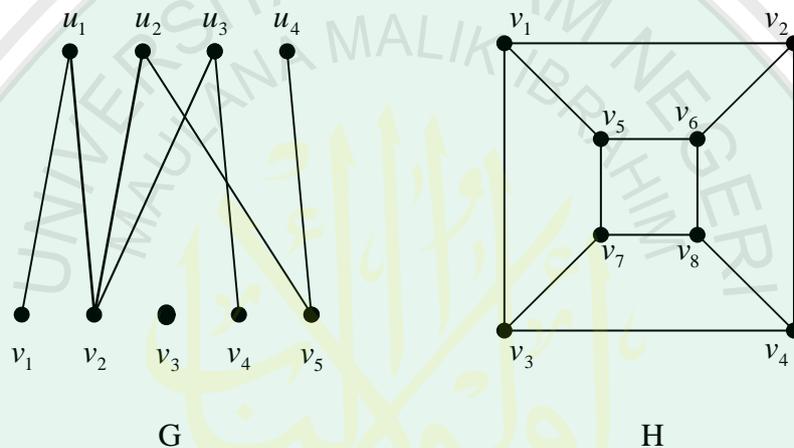
**2. Graf Bipartisi****Definisi 12**

Graf bipartisi (*bipartite graph*) adalah graf yang himpunan titiknya dapat dipisahkan menjadi dua himpunan tak kosong  $X$  dan  $Y$  sehingga masing-

masing sisi di graf tersebut menghubungkan satu titik di  $X$  dan satu titik di  $Y$ ;  $X$  dan  $Y$  disebut himpunan partisi (Purwanto, 1998:21).

### Contoh 2.6

$G$  adalah graf bipartisi dengan himpunan partisi  $X = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$  dan  $Y = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  demikian juga  $H$  adalah graf bipartisi dengan himpunan partisi  $X = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  dan  $Y = \{v_5, v_6, v_7, v_8\}$ .



Gambar 2.8 Graf Bipartisi

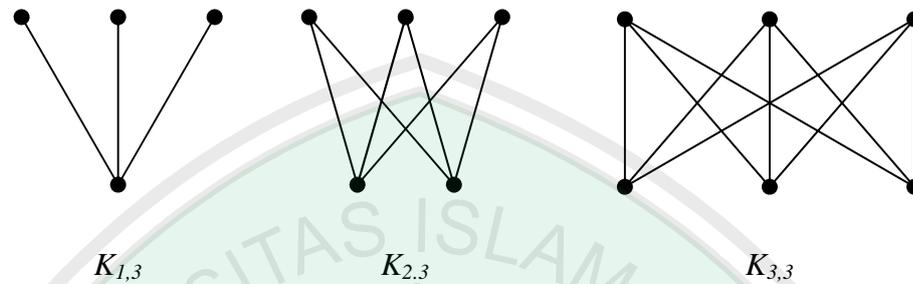
### 3. Graf Bipartisi Komplit

#### Definisi 13

Graf bipartisi komplit (*complete bipartite graph*) adalah graf bipartisi dengan himpunan partisi  $X$  dan  $Y$  sehingga masing-masing titik di  $X$  dihubungkan dengan masing-masing titik di  $Y$  oleh tepat satu sisi. Jika  $|X| = m$  dan  $|Y| = n$ , maka graf bipartisi tersebut dinyatakan dengan  $K_{m,n}$  (Purwanto, 1998:22).

**Contoh 2.7**

Graf  $K_{1,3}$ ,  $K_{2,3}$ , dan  $K_{3,3}$ .

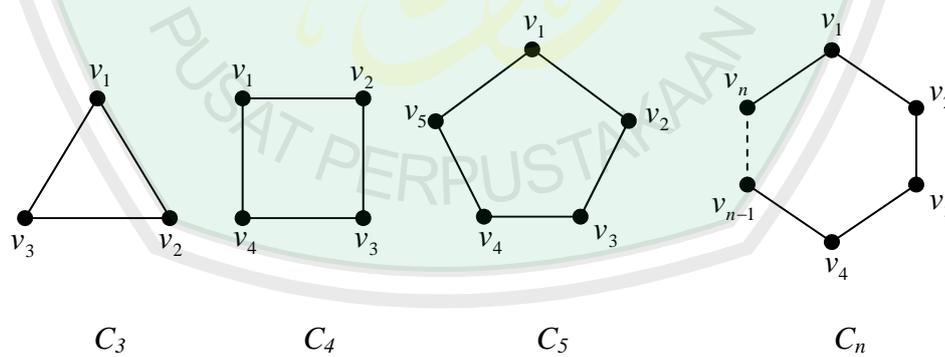


Gambar 2.9 Graf Bipartisi Komplit

**4. Graf Sikel****Definisi 14**

Graf sikel adalah graf yang terdiri dari satu sikel (Purwanto, 1998:22).

Graf sikel dinotasikan  $C_n$ .

**Contoh 2.8**

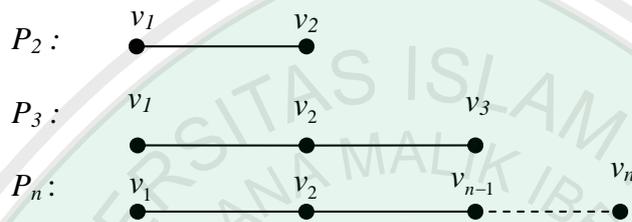
Gambar 2.10 Graf Sikel

## 5. Graf Lintasan

Graf yang terdiri dari satu lintasan disebut graf lintasan (Purwanto, 1998:22).

Graf lintasan dengan  $n$  titik dinotasikan dengan  $P_n$ , dengan  $n$  bilangan asli.

### Contoh 2.10



Gambar 2.11 Graf Lintasan

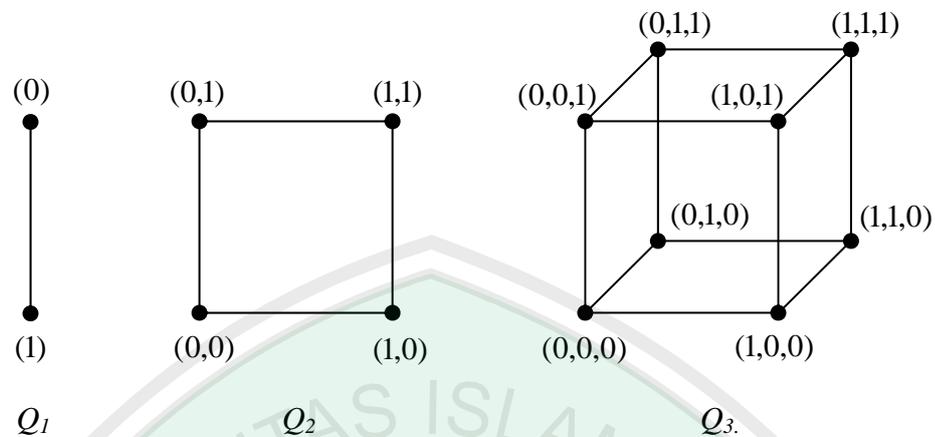
## 6. Graf Kubus

### Defnisi 15

Graf kubus (*cube graph*) adalah graf sederhana yang himpunan titiknya berupa himpunan tupel- $n$  binar (*binary  $n$ -tuple*)  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , yaitu  $a_i$  adalah 0 atau 1,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , dan dua titik terhubung langsung jika dan hanya jika dua tupel yang bersesuaian berbeda di tepat satu tempat. Graf kubus yang diperoleh dinyatakan dengan  $Q_n$  (Purwanto, 1998:23).

### Contoh 2.9

Berikut ini adalah contoh Graf  $Q_1$ ,  $Q_2$  dan  $Q_3$ .



Gambar 2.12 Graf Kubus

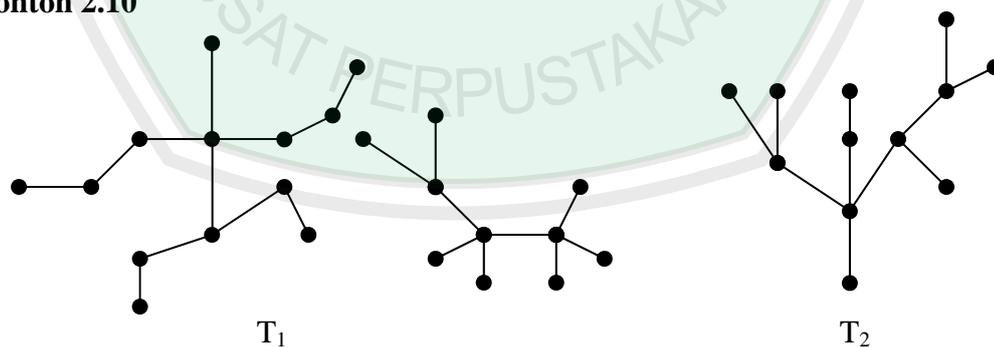
## 7. Hutan (*forest*)

### Definisi 15

Hutan (*forest*) adalah graf yang tidak memuat siklus. Hutan yang terhubung disebut pohon (*tree*). (Purwanto, 1998:23).

Pada Gambar 2.13, graf  $T_2$  adalah pohon, yang tentu saja juga hutan (*forest*).

### Contoh 2.10

Gambar 2.13 Hutan (*forest*)

## 2.1.5 Graf yang berhubungan dengan Sikel

### 1. Graf Roda (*Wheel Graph*)

#### Definisi 16

Graf Roda  $W_n$  adalah graf yang memuat sikel yang setiap titik pada sikel terhubung langsung dengan titik pusat.

#### Teorema 2

Graf roda  $W_n$  memiliki  $n + 1$  titik dan  $2n$  sisi.

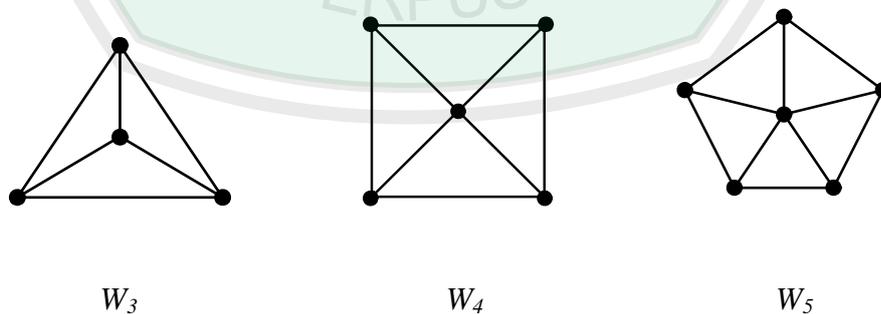
#### Bukti:

Karena graf roda  $W_n$  memiliki  $n$  buah titik pada sikel luar dan 1 buah titik pada titik pusat maka  $|V| = n + 1$ .

Karena graf roda  $W_n$  memiliki  $n$  buah titik pada sikel luar, maka banyaknya sisi pada sikel luar adalah  $n$  dan karena semua titik pada sikel luar terhubung langsung dengan titik pusat maka ada  $n$  buah sisi lagi, jadi

$$|E| = n + n = 2n.$$

#### Contoh 2.11



Gambar 2.14 Graf Roda

$W_3$ : Adalah graf roda yang memuat siklus  $C_3$  dan setiap titik pada siklus luar terhubung langsung dengan titik pusat.

$W_4$ : Adalah graf roda yang memuat siklus  $C_4$  dan setiap titik pada siklus luar terhubung langsung dengan titik pusat.

$W_5$ : Adalah graf roda yang memuat siklus  $C_5$  dan setiap titik pada siklus luar terhubung langsung dengan titik pusat.

## 2. Graf Gear

### Definisi 17

*Graph gear* adalah graf roda dengan tambahan sebuah titik diantara tiap-tiap pasangan dari titik-titik graf yang terhubung langsung pada siklus luar (Gallian, 2007:7).

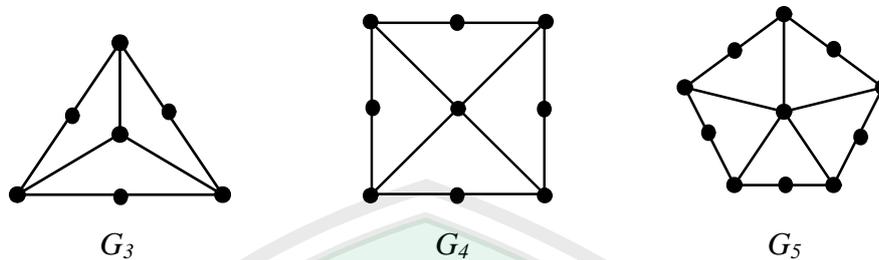
### Teorema 3

Graf gear  $G_n$  memiliki  $2n + 1$  titik dan  $3n$  sisi.

### Bukti:

Karena graf gear  $G_n$  memiliki  $2n$  buah titik pada siklus luar dan 1 buah titik pada titik pusat maka  $|V| = 2n + 1$ .

Karena graf gear  $G_n$  memuat graf roda  $W_n$  yang mempunyai  $2n$  sisi dan ada tambahan sebuah titik diantara tiap-tiap pasangan dari titik-titik graf yang terhubung langsung pada siklus luar maka akan ada  $n$  sisi lagi, jadi  $|E| = 2n + n = 3n$ .

**Contoh 2.11**

Gambar 2.15 Graf Gear

$G_3$ : Adalah graf gear yang memuat graf roda  $W_3$  dengan tambahan sebuah titik diantara tiap-tiap pasangan dari titik-titik graf yang terhubung langsung pada siklus luar.

$G_4$ : Adalah graf gear yang memuat graf roda  $W_4$  dengan tambahan sebuah titik diantara tiap-tiap pasangan dari titik-titik graf yang terhubung langsung pada siklus luar.

$G_5$ : Adalah graf gear yang memuat graf roda  $W_5$  dengan tambahan sebuah titik diantara tiap-tiap pasangan dari titik-titik graf yang terhubung langsung pada siklus luar.

**3. Graf Helm****Definisi 18**

Graf Helm  $H_n$  adalah graf yang didapatkan dari sebuah graf roda dengan menambahkan sisi anting-anting pada setiap titik di siklus luar (Gallian, 2007:7).

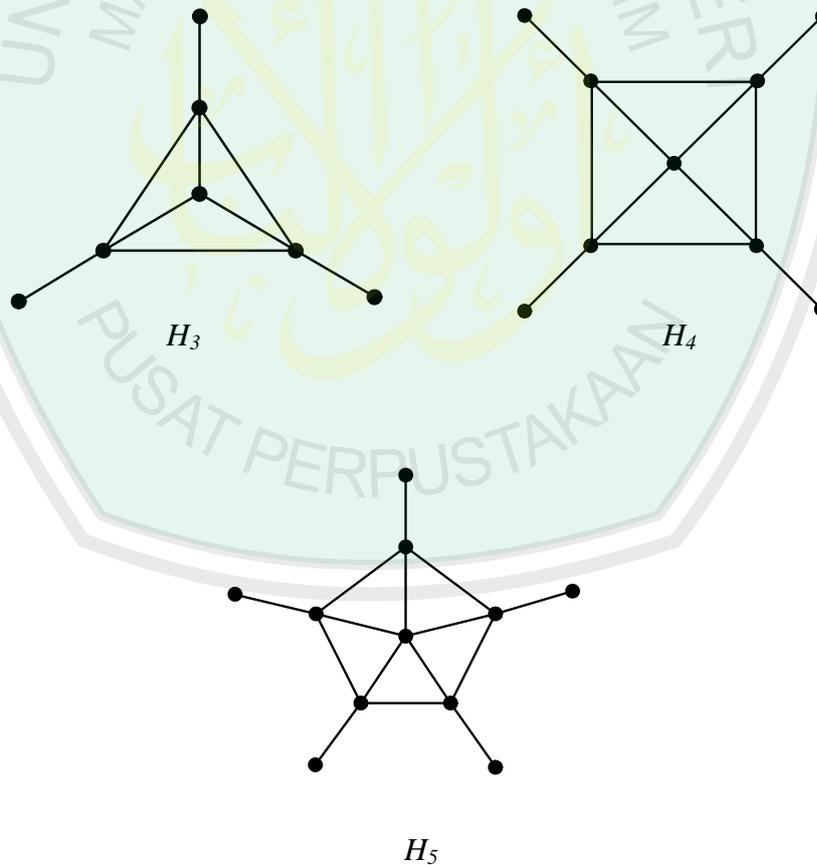
**Teorema 4**

Graf Helm  $H_n$  memiliki  $2n + 1$  titik dan  $3n$  sisi.

**Bukti:**

Karena graf helm  $H_n$  memiliki  $n$  buah titik pada siklus luar dan  $n$  buah titik anting-anting serta 1 buah titik pada titik pusat maka  $|V| = 2n + 1$ .

Karena graf helm  $H_n$  memuat graf roda  $W_n$  yang mempunyai  $2n$  sisi dan ada tambahan titik anting-anting yang terhubung langsung pada setiap titik di siklus luar maka akan ada  $n$  sisi lagi, jadi  $|E| = 2n + n = 3n$ .

**Contoh 2.11**

Gambar 2.16 Graf Helm

$H_3$ : Adalah graf helm yang memuat graf roda  $W_3$  dengan tambahan sisi anting-anting pada setiap titik di sikel luar.

$H_4$ : Adalah graf helm yang memuat graf roda  $W_4$  dengan tambahan sisi anting-anting pada setiap titik di sikel luar.

$H_5$ : Adalah graf helm yang memuat graf roda  $W_5$  dengan tambahan sisi anting-anting pada setiap titik di sikel luar.

#### 4. Graf Helm Tertutup

##### Definisi 19

Graf Helm Tertutup adalah graf yang diperoleh dari sebuah graf Helm dengan menghubungkan tiap-tiap titik anting-anting untuk membentuk sikel. (Gallian, 2007:7)

##### Teorema 5

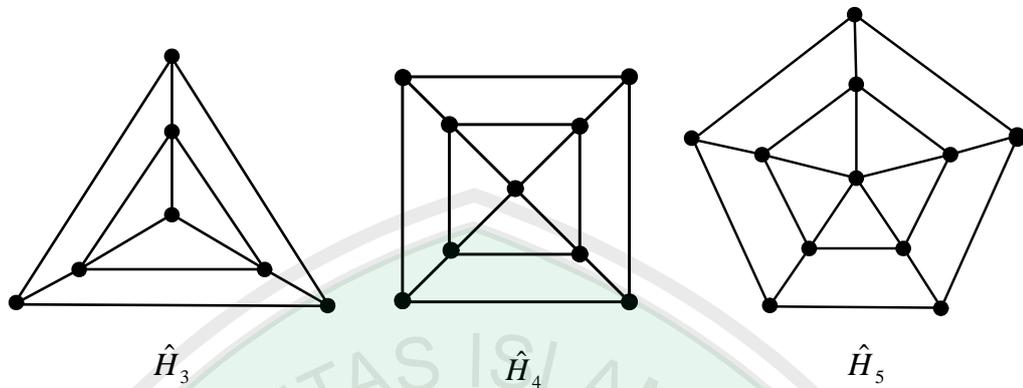
Graf Helm  $\hat{H}_n$  memiliki  $2n + 1$  titik dan  $4n$  sisi.

##### Bukti:

Karena graf helm tertutup  $\hat{H}_n$  memiliki  $n$  buah titik pada sikel dalam dan  $n$  buah titik pada sikel luar serta 1 buah titik pada titik pusat maka  $|V| = 2n + 1$ .

Karena graf helm tertutup  $\hat{H}_n$  memuat graf helm  $H_n$  yang mempunyai  $3n$  sisi dan setiap titik anting-anting terhubung langsung sehingga membentuk sebuah sikel luar maka akan ada  $n$  sisi lagi, jadi  $|E| = 3n + n = 4n$ .

**Contoh 2.11**



Gambar 2.17 Graf Helm Tertutup

$\hat{H}_3$  : Adalah graf helm tertutup yang memuat graf helm  $H_3$  dengan menghubungkan setiap titik anting-anting sehingga membentuk sebuah siklus luar.

$\hat{H}_4$  : Adalah graf helm tertutup yang memuat graf helm  $H_4$  dengan menghubungkan setiap titik anting-anting sehingga membentuk sebuah siklus luar.

$\hat{H}_5$  : Adalah graf helm tertutup yang memuat graf helm  $H_5$  dengan menghubungkan setiap titik anting-anting sehingga membentuk sebuah siklus luar.

## 5. Graf Bunga (*Flower Graph*)

### Definisi 20

Graf Bunga adalah graf yang diperoleh dari graf helm dengan menghubungkan tiap-tiap titik anting-anting ke titik pusat dari graf Helm (Gallian, 2007:7).

### Teorema 6

Graf Bunga  $F_n$  memiliki  $2n + 1$  titik dan  $4n$  sisi.

### Bukti:

Karena graf bunga  $F_n$  memiliki  $n$  buah titik pada siklus dalam dan  $n$  buah titik anting-anting serta 1 buah titik pada titik pusat maka  $|V| = 2n + 1$ .

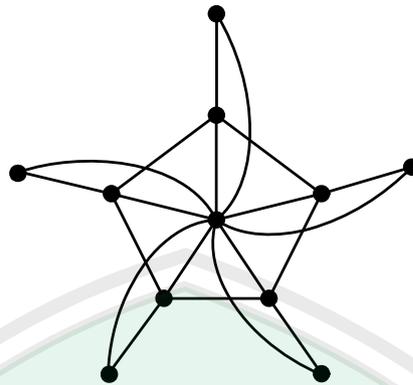
Karena graf bunga  $F_n$  memuat graf helm  $H_n$  yang mempunyai  $3n$  sisi dan setiap titik anting-anting terhubung langsung pada titik pusat maka akan ada  $n$  sisi lagi, jadi  $|E| = 3n + n = 4n$ .

### Contoh 2.11



$F_3$

$F_4$

 $F_5$ 

Gambar 2.18 Graf Bunga

- $F_3$ : Adalah graf bunga yang memuat graf helm  $H_3$  dengan menghubungkan langsung setiap titik anting-anting pada titik pusat.
- $F_4$ : Adalah graf bunga yang memuat graf helm  $H_4$  dengan menghubungkan langsung setiap titik anting-anting pada titik pusat.
- $F_5$ : Adalah graf bunga yang memuat graf helm  $H_5$  dengan menghubungkan langsung setiap titik anting-anting pada titik pusat.

### 2.1.6 Pewarnaan Pada Graf

Ada tiga macam pewarnaan graf, yaitu pewarnaan titik, pewarnaan sisi, dan pewarnaan peta. Tetapi dalam hal ini penulis hanya memfokuskan kajian tentang pewarnaan titik.

#### 1. Pewarnaan Titik (*Vertex Coloring*)

##### Definisi 21

Pewarnaan titik dari graf  $G$  adalah sebuah pemetaan warna-warna ke titik-titik dari  $G$  sedemikian hingga titik yang terhubung langsung mempunyai

warna-warna yang berbeda. Graf  $G$  berwarna  $n$  jika terdapat sebuah pewarnaan dari  $G$  yang menggunakan  $n$  warna (Hasanah, 2007:20)

Dalam pewarnaan titik erat kaitannya dengan penentuan bilangan kromatik, yaitu masalah menentukan banyak warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai titik-titik pada graf sehingga dua titik yang terhubung langsung mempunyai warna yang berbeda.

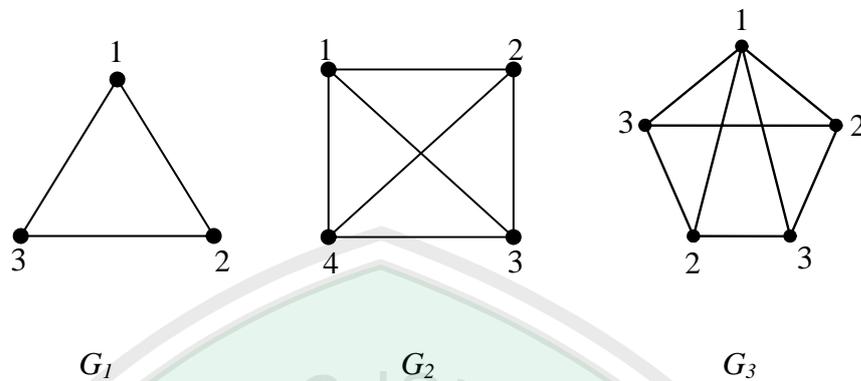
Bilangan kromatik (*chromatic number*) dari graf  $G$ , dinyatakan dengan  $\chi(G)$ , adalah bilangan  $k$  terkecil sehingga  $G$  dapat diwarnai dengan  $k$  warna. Biasanya warna-warna yang digunakan untuk mewarnai suatu graf dinyatakan dengan  $1, 2, 3, \dots, k$ . Jelas bahwa  $\chi(G) \leq |V(G)|$  (Purwanto, 1998:7)

Beberapa graf tertentu dapat langsung ditentukan bilangan kromatiknya. Graf kosong  $N_n$  memiliki  $\chi(G) = 1$ . Karena semua titik tidak terhubung, jadi untuk mewarnai semua titik cukup dibutuhkan satu warna saja. Graf lengkap  $K_n$  memiliki  $\chi(G) = n$  sebab semua titik saling terhubung sehingga diperlukan  $n$  warna (Khasanah, 2007: 20).

### Contoh 2.12

Perhatikan gambar 2.18, untuk graf  $G_1$ , karena  $|V(G_1)| = 3$ , maka  $\chi(G_1) \leq$

3. Untuk  $G_2$ , karena  $|V(G_2)| = 4$ , maka  $\chi(G_2) \leq 4$ . Karena semua titik pada  $G_1$  dan  $G_2$  saling terhubung langsung, akibatnya  $\chi(G_1) \geq 3$  dan  $\chi(G_2) \geq 4$ . Jadi,  $\chi(G_1) = 3$  dan  $\chi(G_2) = 4$ . Untuk graf  $G_3$ ,  $\chi(G_3) \leq 3$ , karena 3 warna untuk mewarnainya seperti pada gambar. Karena graf  $G_3$  memuat graf Komplit  $K_3$ , maka  $\chi(G_3) \geq 3$ , akibatnya  $\chi(G_3) = 3$ .



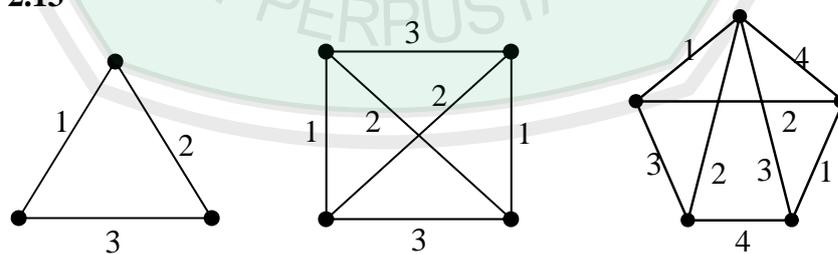
Gambar 2.19 Pewarnaan Titik

## 2. Pewarnaan Sisi (*Edge Coloring*)

### Definisi 22

Suatu pewarnaan sisi- $k$  untuk graf  $G$  adalah suatu penggunaan sebagian atau semua  $k$  warna untuk mewarnai semua sisi di  $G$  sehingga setiap pasang sisi yang mempunyai titik persekutuan diberi warna yang berbeda. Jika  $G$  mempunyai pewarnaan sisi- $k$ , maka dikatakan sisi-sisi di  $G$  diwarnai dengan  $k$  warna (Purwanto, 1998:80).

### Contoh 2.13



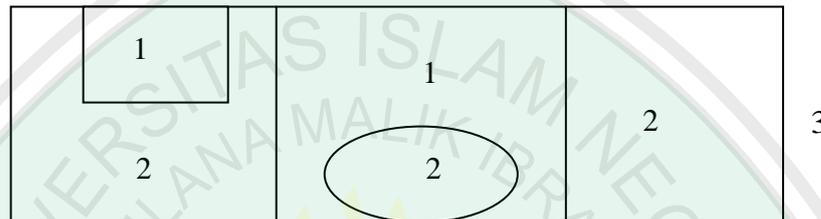
Gambar 2.20 Pewarnaan Sisi

### 3. Pewarnaan Peta (*Map Coloring*)

#### Definisi 23

Pewarnaan peta adalah pemberian warna yang berbeda untuk dua daerah yang bertetangga dengan warna yang berbeda (Purwanto, 1998:82).

#### Contoh 2.14



Gambar 2.21 Pewarnaan Peta

### 2.2 Konsep Graf dalam Al-Qur'an

Mempelajari matematika yang sesuai dengan paradigma *ulul albab*, tidak cukup hanya berbekal kemampuan intelektual semata, tetapi perlu didukung secara bersamaan dengan kemampuan emosional dan spiritual. Pola pikir deduktif dan logis dalam matematika juga bergantung pada kemampuan intuitif dan imajinatif serta mengembangkan pendekatan rasionalis, empiris, dan logis (Abdusysyakhir, 2007:24). Sebagaimana dalam firman Allah SWT dalam surat Shaad ayat 29:

كِتَابٌ أَنْزَلْنَاهُ إِلَيْكَ مُبَارَكٌ لِيَدَّبَّرُوا آيَاتِهِ وَلِيَتَذَكَّرَ أُولُو الْأَلْبَابِ ﴿٢٩﴾

Artinya: "Ini adalah sebuah Kitab yang kami turunkan kepadamu penuh dengan berkah supaya mereka memperhatikan ayat-ayatnya dan supaya mendapat pelajaran orang-orang yang mempunyai fikiran (Q. S. Shaad: 29).

Sumber studi matematika, sebagaimana sumber ilmu pengetahuan dalam Islam, adalah konsep tauhid, yaitu ke-Esaan Allah (Rahman, 1992:92). Namun, Al-Qur'an tidak mengangkat metode baru atau teknik baru dalam masalah ini, melainkan telah menunjukkan tentang adanya eksistensi dari sesuatu yang ada di balik alam semesta dengan cara yang sama seperti yang ia tunjukkan mengenai eksistensi dari alam semesta itu sendiri (Rahman, 1992:15).

Secara umum beberapa konsep dari disiplin ilmu telah dijelaskan dalam Al-Qur'an. salah satunya adalah matematika. Konsep dari disiplin ilmu matematika serta berbagai cabangnya yang ada dalam Al-Qur'an di antaranya adalah masalah logika, pemodelan, statistik, teori graf, dan lain-lain. Teori graf yang merupakan salah satu cabang dari matematika tersebut menurut definisinya adalah himpunan yang tidak kosong yang memuat elemen-elemen yang disebut titik, dan suatu daftar pasangan tidak terurut elemen itu yang disebut sisi. Dalam teori Islam elemen-elemen yang dimaksud meliputi Pencipta (Allah) dan hamba-hambanya, sedangkan sisi atau garis yang menghubungkan elemen-elemen tersebut adalah bagaimana hubungan antara Allah dengan hambanya dan juga hubungan sesama hamba yang terjalin, *Hablun min Allah wa Hablun min An-Nas*. Sehingga dengan demikian, hal ini menunjukkan adanya suatu hubungan atau keterkaitan antara titik yang satu dengan titik yang lain.

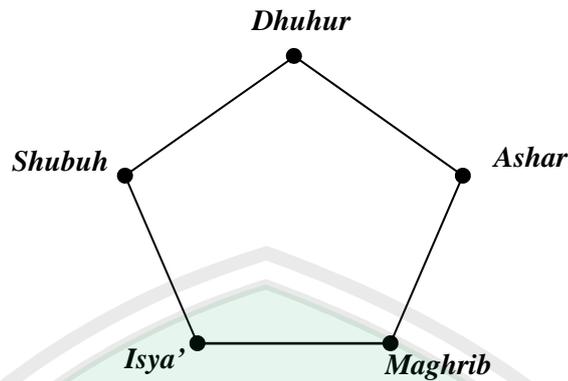
Jika dikaitkan dengan kehidupan nyata, maka banyaknya titik yang terhubung dalam suatu graf dapat diasumsikan sebagai banyaknya kejadian tertentu, yang selanjutnya kejadian-kejadian tersebut memiliki keterkaitan dengan titik lainnya yang merupakan kejadian sesudahnya.

Contoh representasi suatu graf adalah shalat. Shalat mempunyai kedudukan yang amat penting dalam Islam dan merupakan pondasi yang kokoh bagi tegaknya agama Islam. Ibadah shalat dalam Islam sangat penting, sehingga shalat harus dilakukan pada waktunya, dimanapun, dan bagaimanapun keadaan seorang muslim yang mukalaf. Dalam kaitannya dengan peribadatan sholat, Allah swt berfirman:

فَإِذَا قَضَيْتُمُ الصَّلَاةَ فَادْكُرُوا اللَّهَ قِيَمًا وَقُعُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِكُمْ ۚ فَإِذَا  
 أَطْمَأْنَنْتُمْ فَأَقِيمُوا الصَّلَاةَ ۚ إِنَّ الصَّلَاةَ كَانَتْ عَلَىٰ الْمُؤْمِنِينَ كِتَابًا مَّوْقُوتًا ﴿١٠٣﴾

*Artinya: “Maka apabila kamu Telah menyelesaikan shalat(mu), ingatlah Allah di waktu berdiri, di waktu duduk dan di waktu berbaring. Kemudian apabila kamu Telah merasa aman, Maka Dirikanlah shalat itu (sebagaimana biasa). Sesungguhnya shalat itu adalah fardhu yang ditentukan waktunya atas orang-orang yang beriman” (Q.S. An-Nisaa’:103).*

Dalam ayat tersebut dijelaskan bahwa waktu-waktu sholat telah ditentukan waktunya dan telah menjadi suatu ketetapan, baik itu sholat fardhu maupun sholat sunnah. Sholat lima waktu diwajibkan dalam sehari (dhuhur, ‘ashar, maghrib, ‘isya’, dan subuh) merupakan sholat yang wajib ditunaikan dan tidak boleh ditinggalkan. Waktu pelaksanaan antara satu waktu sholat fardhu berbeda dengan empat waktu sholat yang lain dan telah ditetapkan oleh Allah SWT. Akan tetapi kelima waktu sholat tersebut saling mengikat dan tidak diperbolehkan hanya melaksanakan satu sholat saja.

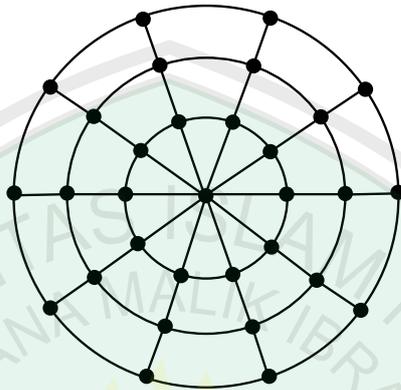


Gambar 2.22 Representasi Graf Terhadap Waktu-waktu Shalat

Contoh lain representasi graf adalah sarang laba-laba. Dimana Allah mengumpamakan penyembah-penyembah berhala-berhala itu, dengan laba-laba yang percaya kepada kekuatan rumahnya sebagai tempat ia berlindung dan tempat ia menjerat mangsanya, padahal kalau dihembus angin atau ditimpa oleh suatu barang yang kecil saja, rumah itu akan hancur. Begitu pula halnya dengan kaum musyrikin yang percaya kepada kekuatan sembahhan-sembahan mereka sebagai tempat berlindung dan tempat meminta sesuatu yang mereka ingini, padahal sembahhan-sembahan mereka itu tidak mampu sedikit juga menolong mereka dari azab Allah waktu di dunia, seperti yang terjadi pada kaum Nuh, kaum Ibrahim, kaum Luth, kaum Syu'aib, kaum Saleh, dan lain-lain. Apalagi menghadapi azab Allah di akhirat nanti, sembahhan-sembahan mereka itu lebih tidak mampu menghindarkan dan melindungi mereka. Allah berfirman:

مَثَلُ الَّذِينَ اتَّخَذُوا مِنْ دُونِ اللَّهِ أَوْلِيَاءَ كَمَثَلِ الْعَنْكَبُوتِ اتَّخَذَتْ بَيْتًا وَإِنَّ أَوْهَنَ الْبُيُوتِ لَبَيْتُ الْعَنْكَبُوتِ لَوْ كَانُوا يَعْلَمُونَ ﴿٤١﴾

*Artinya: "Perumpamaan orang-orang yang mengambil pelindung-pelindung selain Allah adalah seperti laba-laba yang membuat rumah. dan Sesungguhnya rumah yang paling lemah adalah rumah laba-laba kalau mereka Mengetahui". (Q.S. Al-Ankabuut:41)*



Gambar 2.23 Graf Sarang Laba-laba

Pada graf sarang laba-laba banyaknya titik dan sisi tergantung pada besar kecilnya sarang tersebut. Secara umum bila sarangnya semakin besar, maka banyaknya sisi dan titik juga semakin banyak.

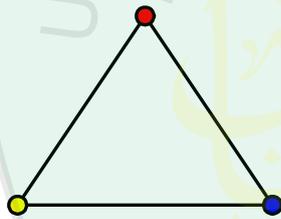
### BAB III

### PEMBAHASAN

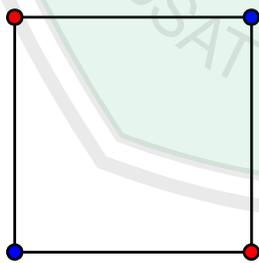
Pada Bab III ini, akan dibahas mengenai masalah pewarnaan titik pada graf yang berkaitan dengan graf sikel. Di mana graf sikel nantinya akan digunakan sebagai acuan dalam pewarnaan titik untuk masing-masing graf yakni graf roda, graf gear, graf helm, graf helm tertutup, dan graf flower.

#### 3.1 Pewarnaan Titik pada Graf Sikel

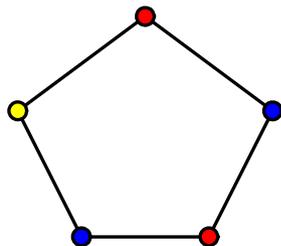
Berikut ini adalah contoh pewarnaan titik untuk graf Sikel.



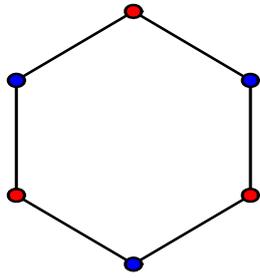
$$\chi(C_3) = 3$$



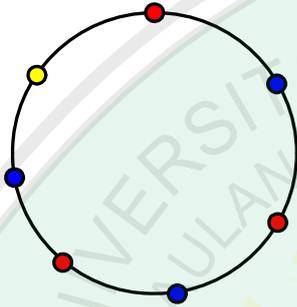
$$\chi(C_4) = 2$$



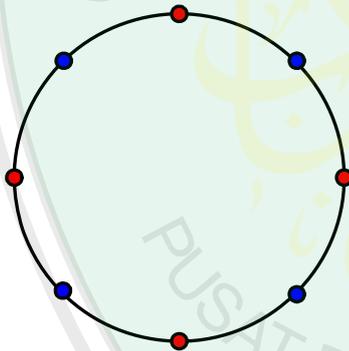
$$\chi(C_5) = 3$$



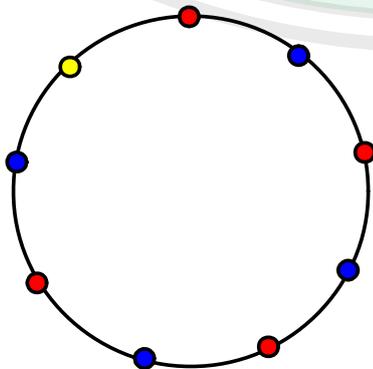
$$\chi(C_6) = 2$$



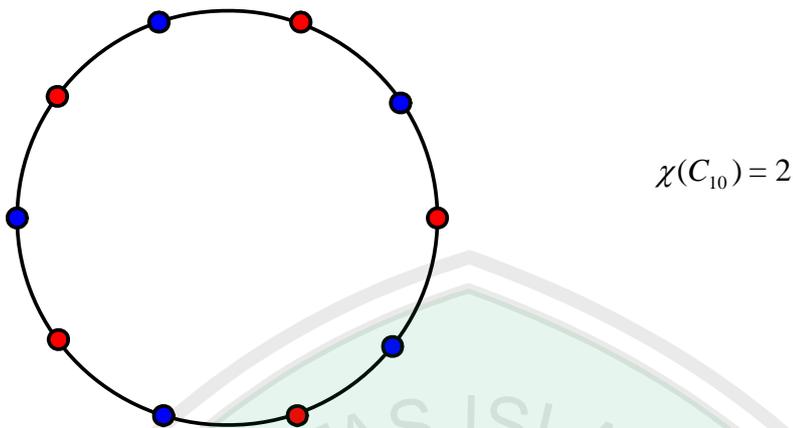
$$\chi(C_7) = 3$$



$$\chi(C_8) = 2$$



$$\chi(C_9) = 3$$



Gambar 3.1 Pewarnaan Titik pada Graf Sikel

Dari Gambar 3.1 maka dapat diperoleh rumus umum  $\chi(C_n) = 2$  untuk  $n$  genap dan  $\chi(C_n) = 3$  untuk  $n$  ganjil.

**Teorema 3.1**

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 3 & \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ 2 & \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

**Bukti:**

a. Kasus I, untuk  $n$  ganjil

Pilih warna  $w_1$  untuk  $v_1$ .

Karena  $v_2$  terhubung langsung dengan  $v_1$  maka pilih  $w_2$  untuk  $v_2$ .

Karena  $v_3$  tak terhubung langsung dengan  $v_1$  maka pilih  $w_1$  untuk  $v_3$ .

Karena  $v_4$  tak terhubung langsung dengan  $v_1$  maka pilih  $w_2$  untuk  $v_4$ .

Berselang-seling untuk  $v_i$ ,  $i$  ganjil dipilih warna  $w_1$  dan untuk  $v_i$ ,  $i$  genap dipilih warna  $w_2$ .

Karena  $n$  ganjil maka titik  $v_n$  yang terhubung langsung dengan titik  $v_1$  dan terhubung langsung dengan  $v_{n-1}$ . Maka pilih warna  $w_3$  untuk  $v_n$ .

Jadi  $\chi(C_n) = 3$  untuk  $n$  ganjil.

b. Kasus II, untuk  $n$  genap

Pilih warna  $w_1$  untuk  $v_1$ .

Karena  $v_2$  terhubung langsung dengan  $v_1$  maka pilih  $w_2$  untuk  $v_2$ .

Karena  $v_3$  tak terhubung langsung dengan  $v_1$  maka pilih  $w_1$  untuk  $v_3$ .

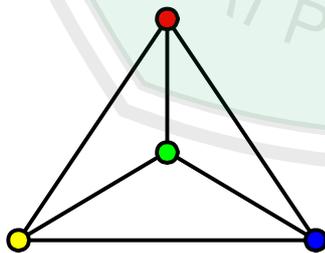
Karena  $v_4$  tak terhubung langsung dengan  $v_1$  maka pilih  $w_2$  untuk  $v_4$ .

Berselang-seling untuk  $v_i$ ,  $i$  ganjil dipilih warna  $w_1$  dan untuk  $v_i$ ,  $i$  genap dipilih warna  $w_2$ .

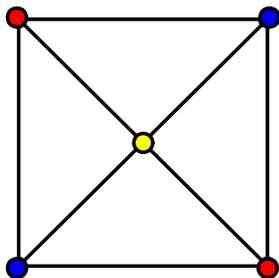
Jadi  $\chi(C_n) = 2$  untuk  $n$  genap.

### 3.2 Pewarnaan Titik pada Graf Roda

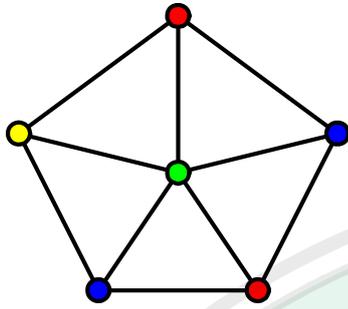
Berikut ini adalah contoh pewarnaan titik pada graf Roda



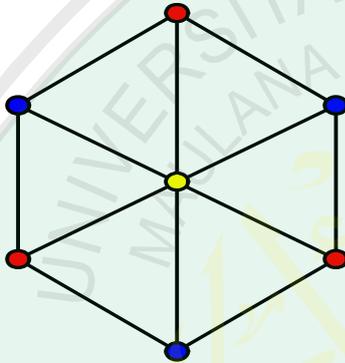
$$\chi(W_3) = 4$$



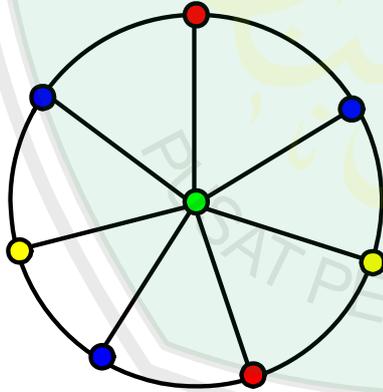
$$\chi(W_4) = 3$$



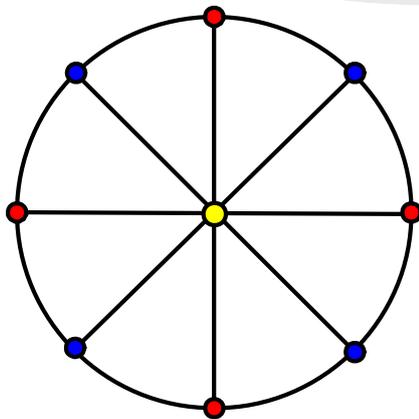
$$\chi(W_5) = 4$$



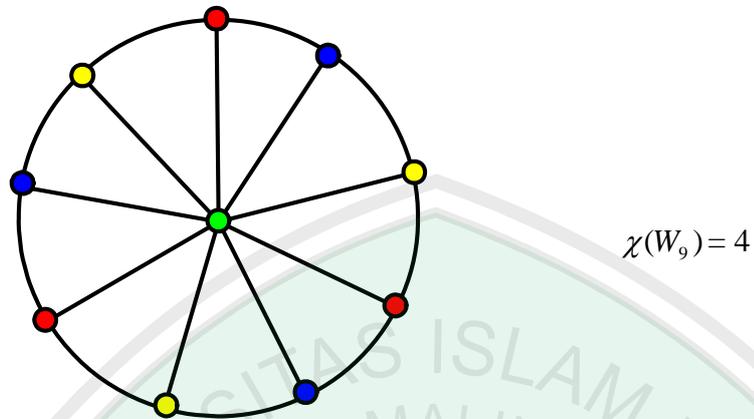
$$\chi(W_6) = 3$$



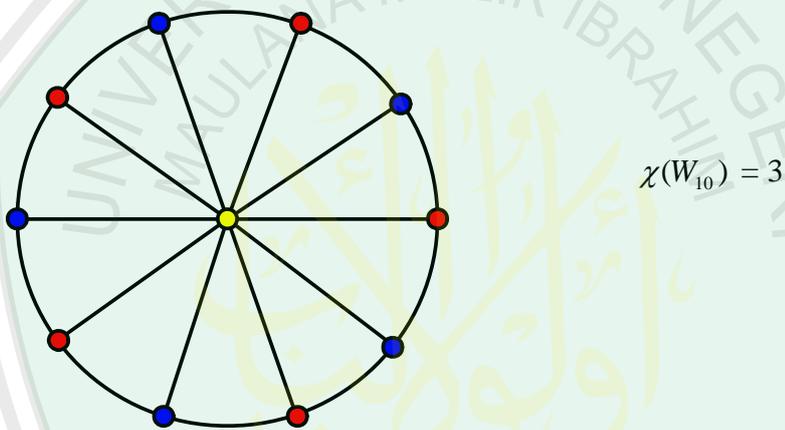
$$\chi(W_7) = 4$$



$$\chi(W_8) = 3$$



$$\chi(W_9) = 4$$



$$\chi(W_{10}) = 3$$

Gambar 3.2 Gambar Pewarnaan Titik pada Graf Roda

Dari Gambar 3.2 maka dapat diperoleh rumus umum  $\chi(W_n) = 4$  untuk  $n$  ganjil dan  $\chi(W_n) = 3$  untuk  $n$  genap.

### Teorema 3.2

$$\chi(W_n) = \begin{cases} 4 & \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ 3 & \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

**Bukti:***a. Kasus I, untuk  $n$  ganjil*

Graf roda ganjil memuat siklus terluar ganjil yang mempunyai 3 warna yang berbeda.

Karena titik-titik pada siklus terluar terhubung langsung dengan  $v_0$  (titik pusat) maka titik pusat tersebut harus diberi warna lain.

Pilih  $w_4$  untuk titik  $v_0$ .

Jadi,  $\chi(W_n) = 4$  untuk  $n$  ganjil.

*b. Kasus II, untuk  $n$  genap*

Graf roda genap memuat siklus terluar genap yang mempunyai 2 warna yang berbeda.

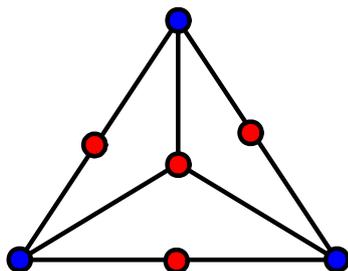
Karena titik-titik pada siklus terluar terhubung langsung dengan  $v_0$  (titik pusat) maka titik pusat tersebut harus diberi warna lain.

Pilih  $w_3$  untuk titik  $v_0$ .

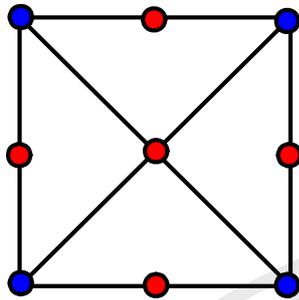
Jadi,  $\chi(W_n) = 3$  untuk  $n$  genap.

**3.3 Pewarnaan Titik pada Graf Gear**

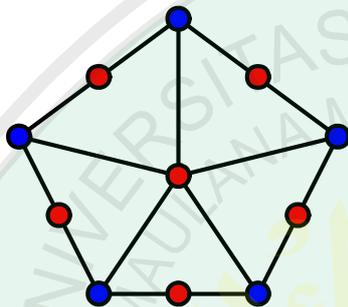
Berikut ini adalah beberapa contoh pewarnaan titik pada graf Gear



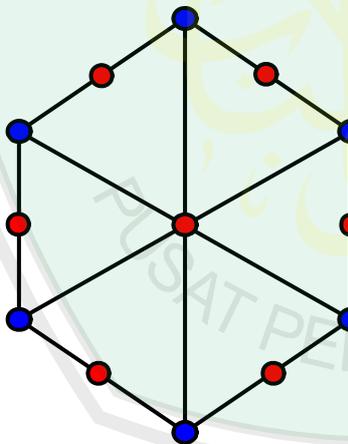
$$\chi(G_3) = 2$$



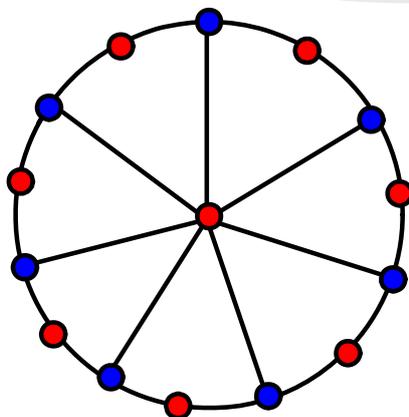
$$\chi(G_4) = 2$$



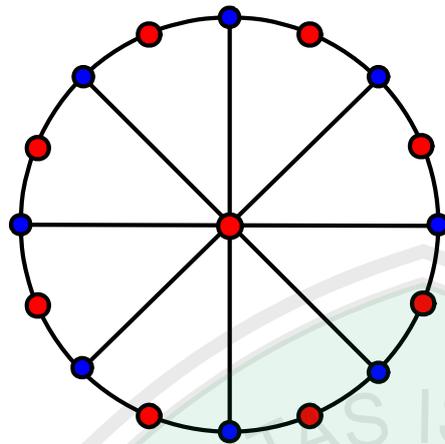
$$\chi(G_5) = 2$$



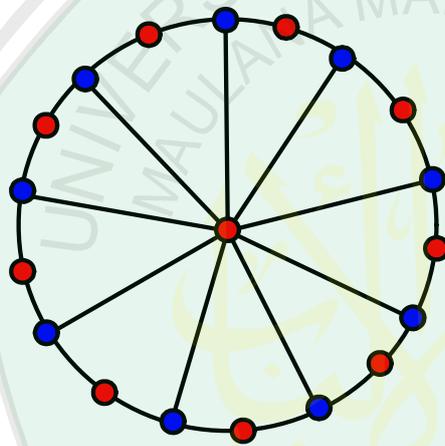
$$\chi(G_6) = 2$$



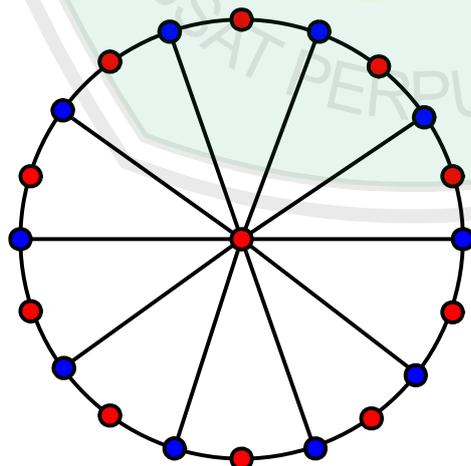
$$\chi(G_7) = 2$$



$$\chi(G_8) = 2$$



$$\chi(G_9) = 2$$



$$\chi(G_{10}) = 2$$

Gambar 3.3 Gambar Pewarnaan Titik pada Graf Gear

Dari Gambar 3.3 maka dapat diperoleh rumus umum  $\chi(G_n) = 2$

### Teorema 3.3

$$\chi(G_n) = 2 \quad \text{untuk } n \text{ bilangan asli}$$

#### Bukti:

Pilih warna  $w_1$  untuk  $v_0$  (titik pusat).

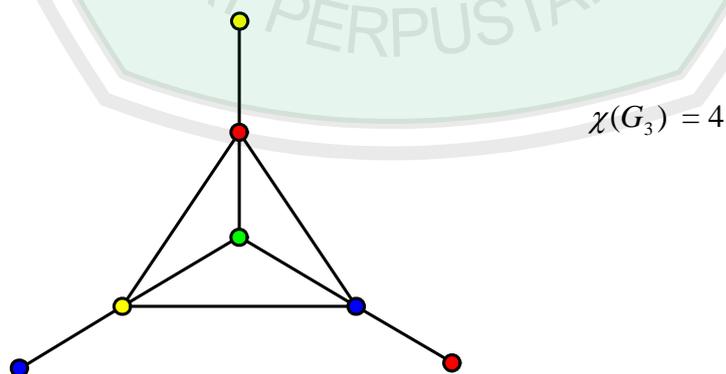
Karena titik  $v_0$  terhubung langsung dengan titik pada siklus luar maka pilih  $w_2$  untuk titik-titik siklus luar yang terhubung langsung dengan  $v_0$ .

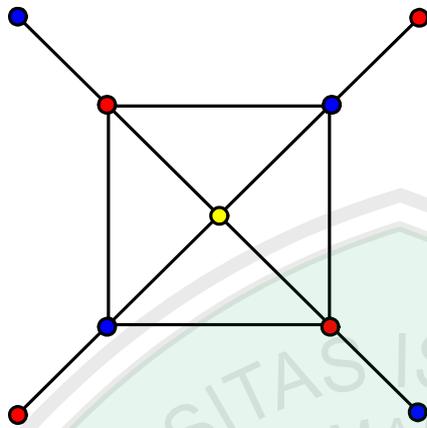
Karena titik-titik diantara tiap-tiap pasangan dari titik-titik graf yang terhubung langsung pada siklus luar tidak terhubung langsung dengan  $v_0$  maka pilih  $w_1$  untuk titik-titik tersebut.

Jadi  $\chi(G_n) = 2$ , untuk  $n$  bilangan asli.

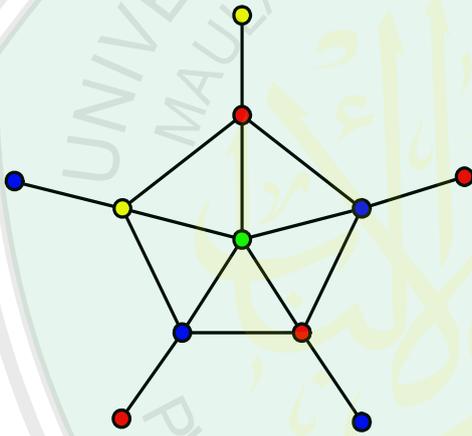
### 3.4 Pewarnaan Titik pada Graf Helm

Berikut ini adalah beberapa contoh pewarnaan titik pada graf Helm

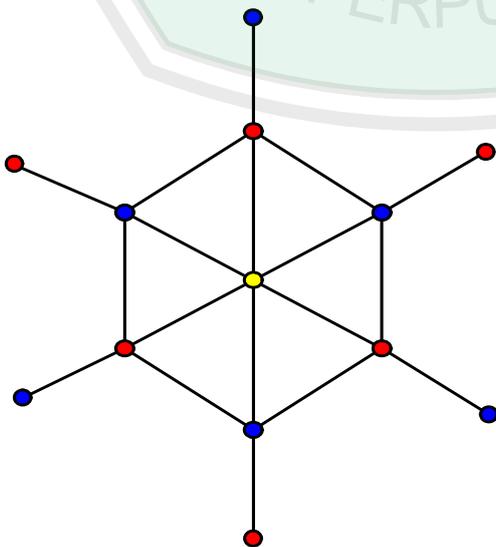




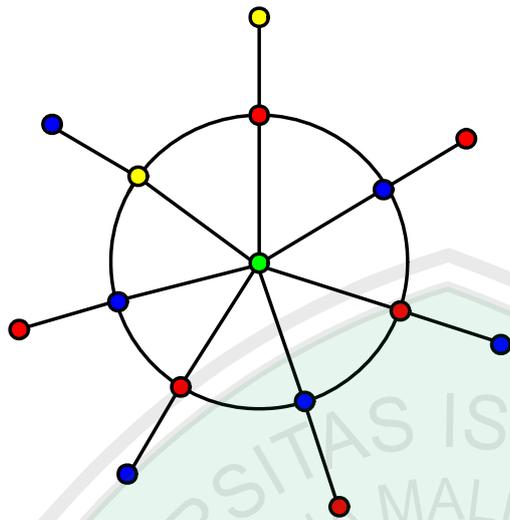
$$\chi(G_4) = 3$$



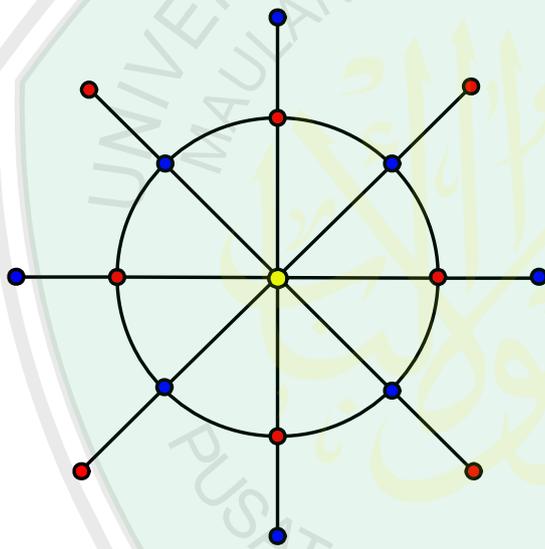
$$\chi(G_5) = 4$$



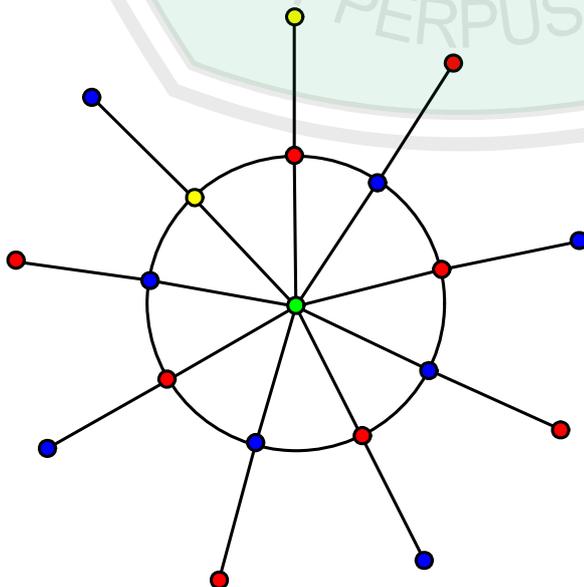
$$\chi(G_6) = 3$$



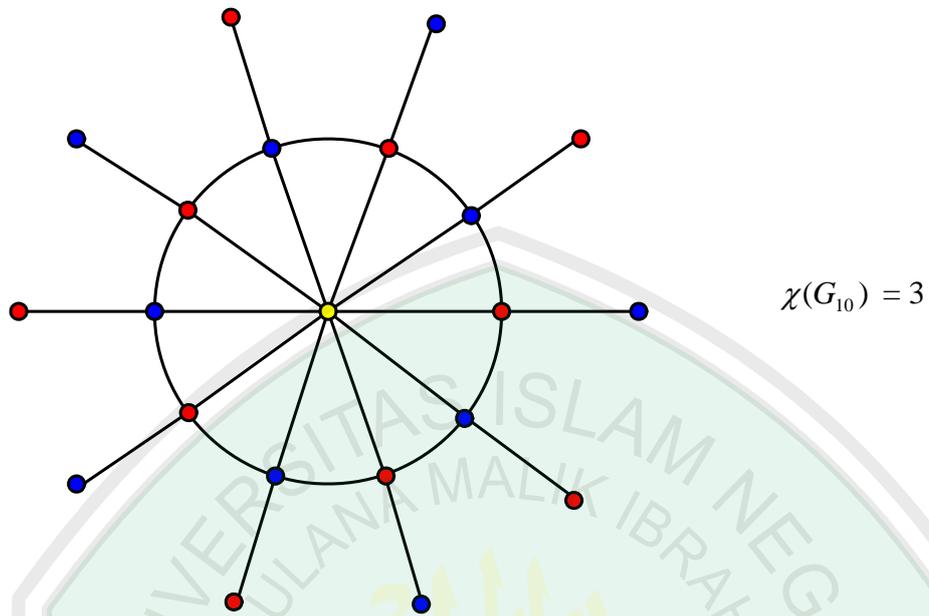
$$\chi(G_7) = 4$$



$$\chi(G_8) = 3$$



$$\chi(G_9) = 4$$



Gambar 3.4 Gambar Pewarnaan Titik pada Graf Helm

Dari Gambar 3.4 maka dapat diperoleh rumus umum  $\chi(H_n) = 4$  untuk  $n$  ganjil  $\chi(H_n) = 3$  untuk  $n$  genap.

**Teorema 3.4**

$$\chi(H_n) = \begin{cases} 4 & \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ 3 & \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

**Bukti:**

*a. Kasus I, untuk  $n$  ganjil*

Graf Helm ganjil memuat siklus terluar ganjil yang mempunyai 3 warna yang berbeda.

Karena titik-titik pada sikel terluar terhubung langsung dengan  $v_0$  (titik pusat) maka titik pusat tersebut harus diberi warna lain.

Pilih  $w_4$  untuk titik  $v_0$ .

Karena titik anting-anting terhubung langsung dengan titik pada sikel luar maka pilih warna yang berselingan dengan warna pada titik pada sikel luar tersebut.

Jadi  $\chi(H_n) = 4$ , untuk  $n$  ganjil.

*b. Kasus II, untuk  $n$  genap*

Graf Helm genap memuat sikel terluar genap yang mempunyai 2 warna yang berbeda.

Karena titik-titik pada sikel terluar terhubung langsung dengan  $v_0$  (titik pusat) maka titik pusat tersebut harus diberi warna lain.

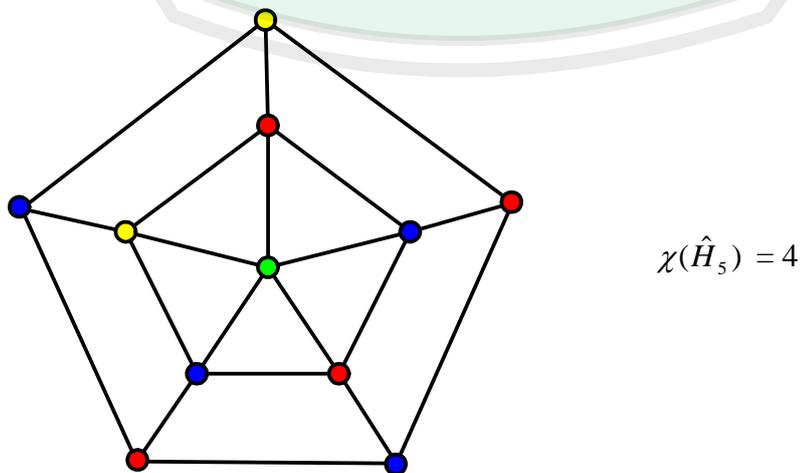
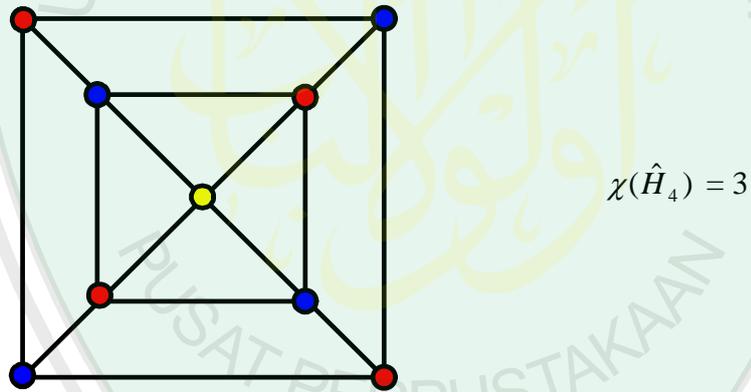
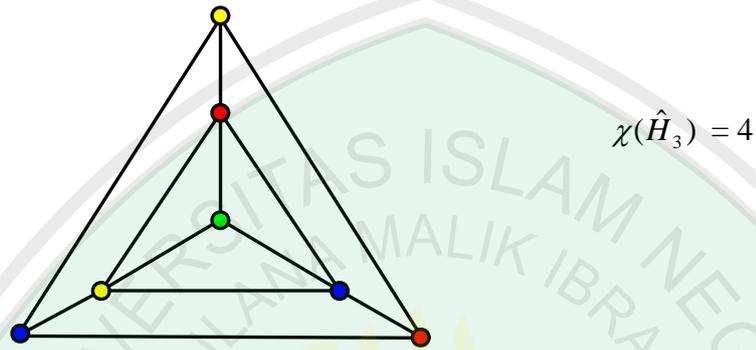
Pilih  $w_3$  untuk titik  $v_0$ .

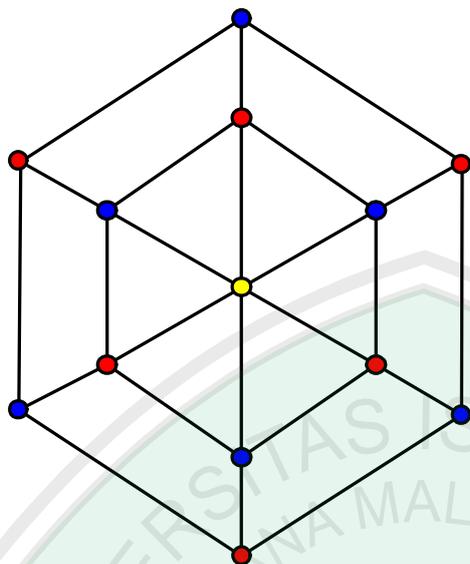
Karena titik anting-anting terhubung langsung dengan titik pada sikel luar maka pilih warna yang berselingan dengan warna pada titik pada sikel luar tersebut.

Jadi,  $\chi(H_n) = 3$  untuk  $n$  genap.

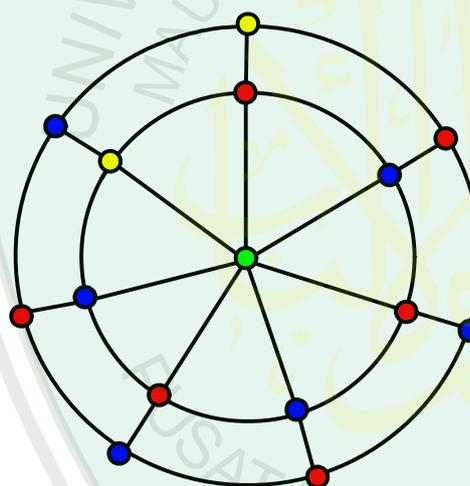
### 3.5 Pewarnaan titik pada graf Helm Tertutup

Berikut ini adalah beberapa contoh pewarnaan titik pada graf Helm Tertutup.

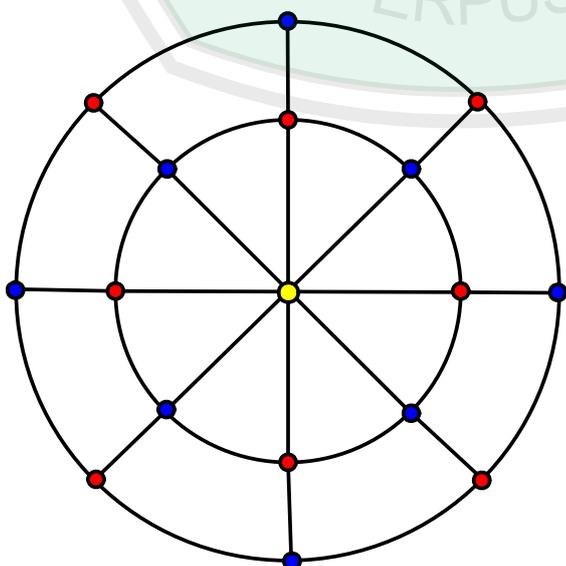




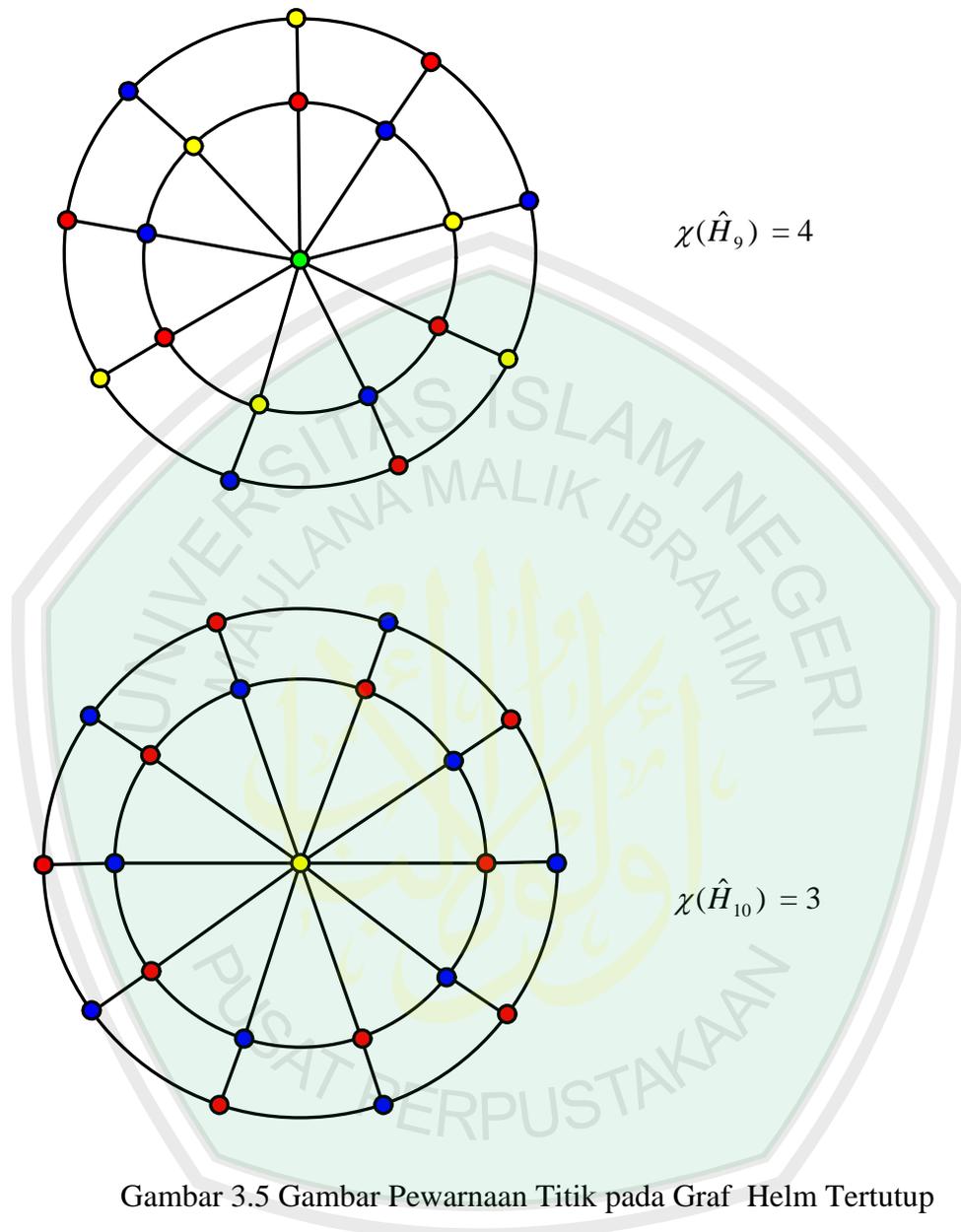
$$\chi(\hat{H}_6) = 3$$



$$\chi(\hat{H}_7) = 4$$



$$\chi(\hat{H}_8) = 3$$



Gambar 3.5 Gambar Pewarnaan Titik pada Graf Helm Tertutup

Dari beberapa gambar di atas maka dapat diperoleh rumus umum

$\chi(\hat{H}_n) = 4$  untuk  $n$  ganjil dan  $\chi(\hat{H}_n) = 3$  untuk  $n$  genap.

**Teorema 3.5**

$$\chi(\hat{H}_n) = \begin{cases} 4 & \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ 3 & \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

**Bukti:***a. Kasus I, untuk  $n$  ganjil*

Graf Helm Tertutup ganjil memuat siklus dalam ganjil yang mempunyai 3 warna yang berbeda.

Karena titik-titik pada siklus dalam terhubung langsung dengan  $v_0$  (titik pusat) maka titik pusat tersebut harus diberi warna lain.

Pilih  $w_4$  untuk titik  $v_0$ .

Karena titik anting-anting yang terhubung langsung dengan siklus dalam dan membentuk siklus terluar maka pilih warna yang berselingan dengan warna pada titik pada siklus dalam.

Jadi  $\chi(\hat{H}_n) = 4$ , untuk  $n$  ganjil.

*b. Kasus II, untuk  $n$  genap*

Graf Helm Tertutup genap memuat siklus dalam ganjil yang mempunyai 2 warna yang berbeda.

Karena titik-titik pada siklus dalam terhubung langsung dengan  $v_0$  (titik pusat) maka titik pusat tersebut harus diberi warna lain.

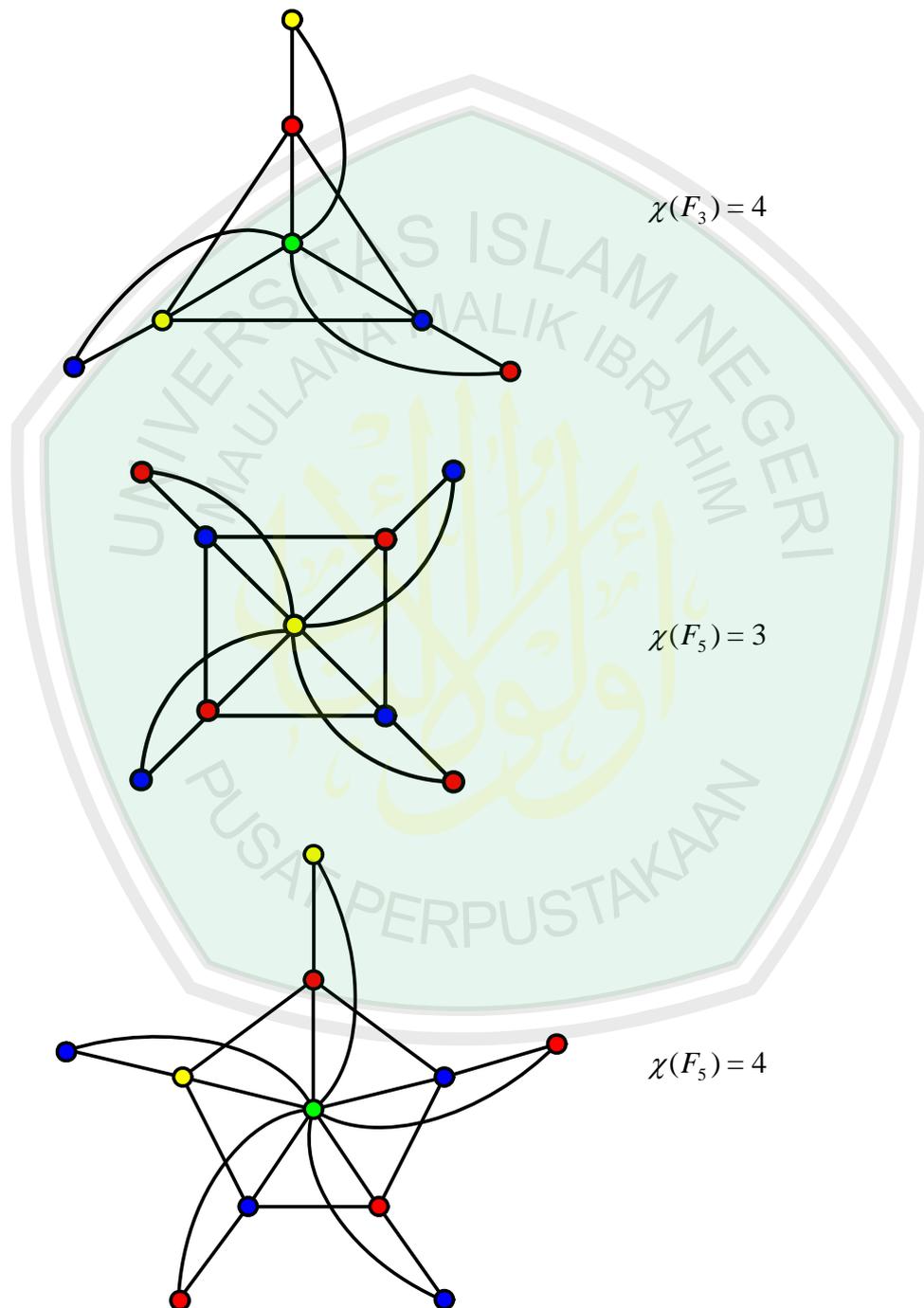
Pilih  $w_3$  untuk titik  $v_0$ .

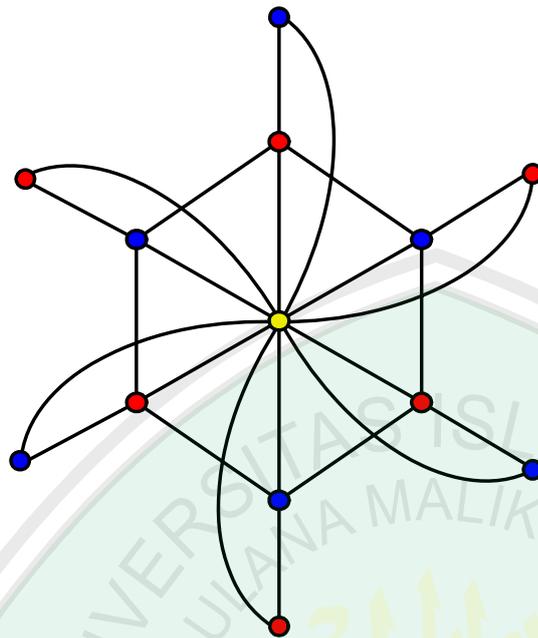
Karena titik anting-anting yang terhubung langsung dengan siklus dalam dan membentuk siklus terluar maka pilih warna yang berselingan dengan warna pada titik pada siklus dalam.

Jadi,  $\chi(\hat{H}_n) = 3$  untuk  $n$  genap.

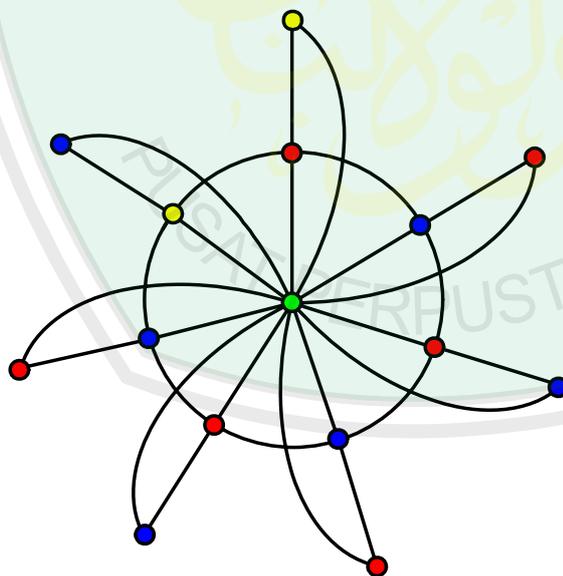
### 3.6 Pewarnaan Titik pada Graf Bunga

Berikut ini adalah beberapa contoh pewarnaan titik pada graf Bunga.

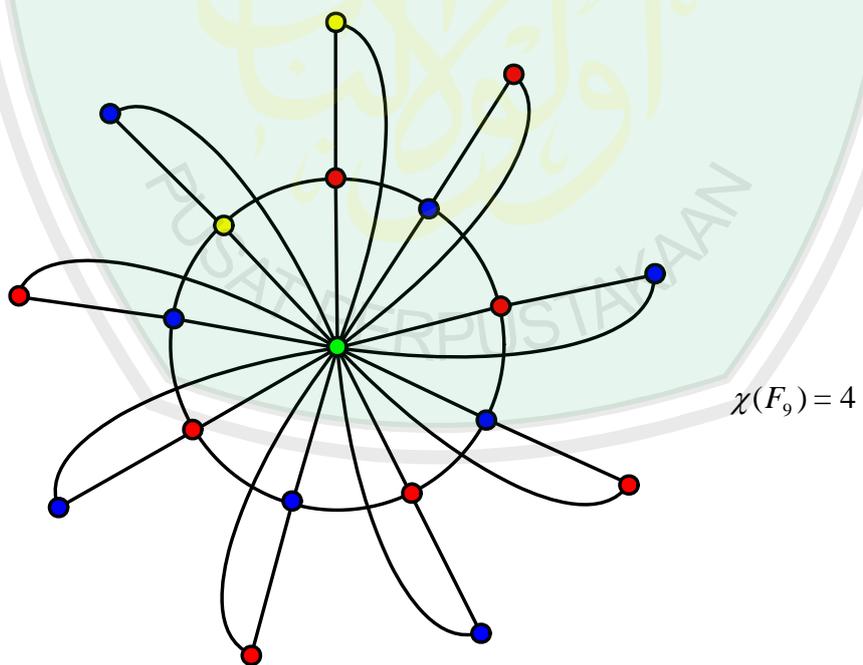
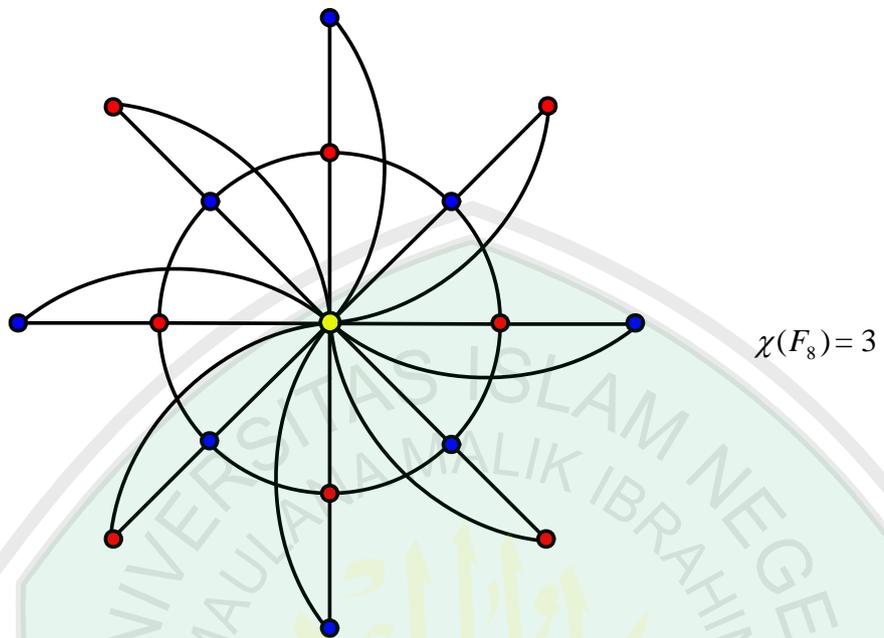


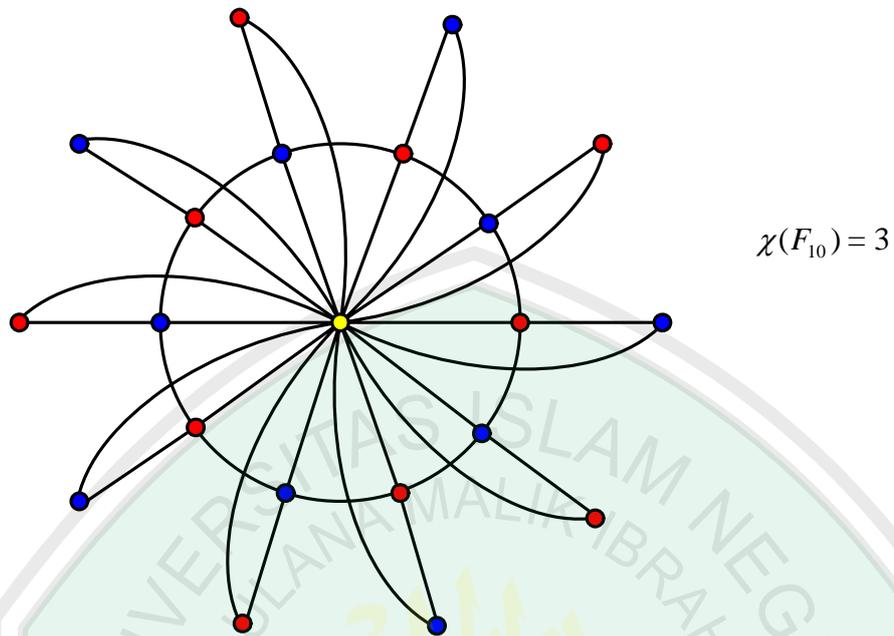


$$\chi(F_6) = 3$$



$$\chi(F_7) = 4$$





Gambar 3.6 Gambar Pewarnaan Titik pada Graf Bunga

Dari Gambar 3.6 maka dapat diperoleh rumus umum  $\chi(F_n) = 4$  untuk  $n$  ganjil dan  $\chi(F_n) = 3$  untuk  $n$  genap.

**Teorema 3.6**

$$\chi(F_n) = \begin{cases} 4 & \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ 3 & \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

**Bukti:**

a. Kasus I, untuk  $n$  ganjil

Graf Bunga ganjil memuat siklus terluar ganjil yang mempunyai 3 warna yang berbeda.

Karena titik-titik pada sikel terluar terhubung langsung dengan  $v_0$  (titik pusat) maka titik pusat tersebut harus diberi warna lain.

Pilih  $w_4$  untuk titik  $v_0$ .

Karena titik anting-anting terhubung langsung dengan titik pada sikel luar dan terhubung langsung dengan titik pusat maka pilih warna yang berselingan dengan warna pada titik pada sikel luar tersebut.

Jadi  $\chi(F_n) = 4$ , untuk  $n$  ganjil.

*b. Kasus II, untuk  $n$  genap*

Graf Helm genap memuat sikel terluar genap yang mempunyai 2 warna yang berbeda.

Karena titik-titik pada sikel terluar terhubung langsung dengan  $v_0$  (titik pusat) maka titik pusat tersebut harus diberi warna lain.

Pilih  $w_3$  untuk titik  $v_0$ .

Karena titik anting-anting terhubung langsung dengan titik pada sikel luar dan terhubung langsung dengan titik pusat maka pilih warna yang berselingan dengan warna pada titik pada sikel luar tersebut.

Jadi,  $\chi(F_n) = 3$  untuk  $n$  genap.

### 3.7 Tinjauan Agama Berdasarkan Hasil Pembahasan

Berdasarkan hasil pembahasan, maka dapat diketahui bahwa:

1. Rumus umum untuk pewarnaan titik pada Graf Sikel, adalah

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 3 & \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ 2 & \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

2. Rumus umum untuk pewarnaan titik pada Graf Roda, adalah

$$\chi(W_n) = \begin{cases} 4 & \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ 3 & \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

3. Rumus umum untuk pewarnaan titik pada Graf Gear, adalah

$$\chi(G_n) = 2 \quad \text{untuk } n \text{ bilangan asli}$$

4. Rumus umum untuk pewarnaan titik pada Graf Helm, adalah

$$\chi(H_n) = \begin{cases} 4 & \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ 3 & \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

5. Rumus umum untuk pewarnaan titik pada Graf Helm Tertutup, adalah

$$\chi(\hat{H}_n) = \begin{cases} 4 & \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ 3 & \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

6. Rumus umum untuk pewarnaan titik pada Graf Bunga, adalah

$$\chi(F_n) = \begin{cases} 4 & \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ 3 & \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Dari beberapa rumus-rumus diatas, jika direlevansikan dengan kajian agama adalah sejajar dengan ayat yang menyebutkan bahwa segala sesuatu yang ada di dunia ini diciptakan oleh Allah SWT. sesuai dengan kadar dan ukurannya dan ditata-Nya dengan sedemikian rapi. Demikianlah sebagaimana yang tertera pada surat Al-Qamar ayat 49:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: “*Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran*” (Q.S. Al-Qamar: 49).

Juga dalam surat Al-Furqaan ayat 2:

الَّذِي لَهُ مُلْكُ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُن لَّهُ شَرِيكٌ فِي الْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَرَهُ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

Artinya: “*Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan dia Telah menciptakan segala sesuatu, dan dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya*” (Q.S. Al-Furqaan:2).

Maksud dari kata dapat direlevansikannya antara konsep awal dari masalah pewarnaan titik pada graf dengan kajian agama Islam adalah bahwa berdasarkan ayat di atas yang menyebutkan masalah kadar dan ukuran dari segala yang ada di muka bumi yang menurut penafsiran Shihab (2002:482) yakni *ketentuan dan sistem yang telah ditetapkan terhadap segala sesuatu yang ada di muka bumi ini*, sehingga dengan kekuasaan-Nya maka semua akan terlihat rapi dan sempurna. Sama halnya dengan masalah pewarnaan titik pada graf khususnya adalah graf roda, graf gear, graf helm, graf helm tertutup, dan graf flower yang

mana banyak membutuhkan kadar dan ukuran yang berarti aturan-aturan dan rumus-rumus yang digunakan untuk mempermudah dalam menemukan bilangan kromatik pada pewarnaan titik dari graf yang berkaitan dengan sikel.

Penemuan sekaligus pembuktian rumus-rumus yang digunakan dalam pewarnaan titik pada graf yang berkaitan sikel ini selain bertujuan untuk mempermudah dalam menemukan bilangan kromatiknya. Setelah mengetahui dengan jelas hasil dari pembahasan di atas yang intinya adalah menemukan rumus untuk bilangan kromatik, pembuktian sekaligus penggambaran dari grafnya, ternyata semuanya telah benar terbukti.

Jika dikaitkan dengan kajian agama Islam, hal ini dapat direlevansikan dengan Al-Qur'an yang menyebutkan bahwa kebenaran sesuatu tidak cukup hanya dengan bentuk ucapan, dan tulisan saja, tetapi perlu dan harus dibuktikan. Hal ini sesuai pada surat Al-Baqarah ayat 111:

وَقَالُوا لَنْ يَدْخُلَ الْجَنَّةَ إِلَّا مَنْ كَانَ هُودًا أَوْ نَصْرِيًّا تِلْكَ أَمَانِيُّهُمْ قُلْ هَاتُوا بُرْهَانَكُمْ إِنْ كُنْتُمْ صَادِقِينَ ﴿١١١﴾

*Artinya: Dan mereka (Yahudi dan Nasrani) berkata: "Sekali-kali tidak akan masuk surga kecuali orang-orang (yang beragama) Yahudi atau Nasrani". demikian itu (hanya) angan-angan mereka yang kosong belaka. Katakanlah: "Tunjukkanlah bukti kebenaranmu jika kamu adalah orang yang benar"(Q.S. Al-Baqarah:111).*

Ayat di atas, menceritakan bahwa pada zaman dahulu para ahli kitab (Yahudi dan Nasrani), yang berangan-angan bahwa tidak akan ada yang masuk surga kecuali siapa yang memeluk agama mereka. Selain itu mereka juga menyatakan bahwa mereka tidak akan disentuh api neraka kecuali beberapa hari

saja dan kemudian akan segera berpindah ke surga. Demikianlah angan-angan dari para Ahli Kitab tersebut yang tiada sama sekali kebenarannya. Sehingga Allah SWT. langsung memberikan teguran bahwa hendaknya mereka menunjukkan bukti pengakuan (hujjah) akan kebenaran dari yang mereka katakan jika memang itu benar (Al-Mubarakfuri, 2007:385-386).

Allah SWT. penguasa yang memiliki wewenang tunggal dalam hal surga dan negara, secara langsung membantah para Ahli Kitab. Allah tidak menggunakan perantara dan tidak memerintahkan siapapun termasuk Nabi Muhammad SAW. Untuk menjawab kebohongan itu. Allah yang menyatakan: Yang *demikian itu*, yakni ucapan tersebut, dan ucapan-ucapan mereka yang lain, yang sangat jauh dari kebenaran hanya (*Amaani*) *angan-angan belaka* yang lahir dari kebohongan yang disampaikan oleh pendeta-pendeta Yahudi tanpa ada dasarnya *dan mereka hanya menduga-duga*.

Selanjutnya, Allah SWT. tidak memerlukan bukti dari mereka menyangkut kebohongan mereka, karena Allah Maha Mengetahui segala sesuatu. Tetapi manusia perlu. Karena itu, di sini Allah memerintahkan Nabi Muhammad SAW.: *katakanlah* wahai Muhammad kepada mereka, *”Tunjukkanlah kepada kami bukti kebenaran kamu jika kamu adalah orang yang benar”*. Bukti yang dimaksud di sini adalah berupa wahyu Illahi, karena surga dan neraka adalah wewenang Allah. Hanya Dia yang mengetahui siapa yang berhak memasukinya. Nabi Muhammad SAW. pun tidak tahu. Itu sebabnya, maka bukti kebenaran yang dituntut adalah informasi-Nya, yakni wahyu-wahyu yang disampaikan kepada utusan-utusan-Nya (Shihab, 2002: 296-297).

Dalam surat Al-an'am ayat 143 juga disebutkan:

ثَمَنِيَّةَ أَزْوَاجٍ مِّنَ الضَّأْنِ اثْنَيْنِ وَمِنَ الْمَعْزِ اثْنَيْنِ قُلْ ءَالذَّكَرَيْنِ حَرَّمَ أَمِ  
الْأُنثَيَيْنِ أَمَا اشْتَمَلَتْ عَلَيْهِ أَرْحَامٌ الْأُنثَيَيْنِ نَبِّئُونِي بِعِلْمٍ إِن كُنْتُمْ صَادِقِينَ ﴿١٤٣﴾

Artinya: "(yaitu) delapan binatang yang berpasangan, sepasang domba, sepasang dari kambing. Katakanlah: "Apakah dua yang jantan yang diharamkan Allah ataukah dua yang betina, ataukah yang ada dalam kandungan dua betinanya?" Terangkanlah kepadaku dengan berdasar pengetahuan jika kamu memang orang-orang yang benar" (Q.S. Al-An'am: 143).

Berdasarkan dari kedua ayat itulah hendaknya segala sesuatu baik perkataan maupun perbuatan baik yang tertulis maupun yang tidak, jika memang benar adanya, maka sudah sepatutnyalah untuk diberikan pembuktiannya.

Sebagai akhir dari analisis tentang relevansi antara konsep salah satu cabang matematika yaitu teori graf khususnya masalah pewarnaan titik pada graf helm tertutup, graf flower, dan graf gear dengan kajian agama Islam, yang sekaligus merupakan hal yang utama yang dapat dijadikan sebagi refleksi dari semuanya yakni ternyata setelah banyak mempelajari matematika yang merupakan ilmu hitung-menghitung serta banyak mengetahui mengenai masalah yang terdapat dalam matematika yang dapat direlevansikan dalam agama Islam sesuai dengan konsep-konsep yang ada dalam Al-Qur'an, maka akan dapat menambah keyakinan diri akan kebesaran Allah SWT selaku sang pencipta yang serba Maha, salah satunya adalah Maha Matematisi. Karena Dialah sang raja yang sangat cepat dan teliti dalam semua masalah perhitungan (Abdusysyakhir, 2007: 83). Hal ini sesuai dalam Al-Qur'an surat Al-Baqarah ayat 202:

أُولَٰئِكَ لَهُمْ نَصِيبٌ مِّمَّا كَسَبُوا ۗ وَاللَّهُ سَرِيعُ الْحِسَابِ ﴿٢٠٢﴾

*Artinya: "Mereka itulah orang-orang yang mendapat bahagian daripada yang mereka usahakan; dan Allah sangat cepat perhitungannya" (Q.S. Al-Baqarah: 202).*

Juga dalam surat Maryam ayat 94:

لَقَدْ أَحْصَيْنَاهُمْ وَعَدَّهُمْ عَدًّا ﴿٩٤﴾

*Artinya: "Sesungguhnya Allah telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti" (Q.S. Maryam: 94).*

Dari ayat di atas, dapat diketahui bahwa Allah yang dilukiskan sebagai *Ahshaahum* atau dalam istilah hadits *Asma' al-Husna* adalah *al-Muhshi*, dipahami oleh banyak ulama sebagai "Dia yang mengetahui kadar setiap peristiwa dan rinciannya, baik yang dapat dijangkau oleh manusia maupun yang tidak. Seperti hembusan nafas, rincian perolehan rezeki dan kadarnya untuk masa kini dan mendatang". Alhasil, Allah adalah Dia yang mengetahui dengan amat teliti rincian segala sesuatu dari segi jumlah dan kadarnya, panjang, dan lebarnya, jauh dan dekatnya, tempat dan waktunya, kadar cahaya dan gelapnya, sedang/ ketika dan saat wujudnya dan lain sebagainya.

Dari sini terlihat, bahwa betapa kuasanya Allah dalam melakukan perhitungan meskipun pada dzat yang terkecil yang tak akan dapat/ mampu dihitung dengan kasat mata manusia. Sekalipun menggunakan alat yang canggihpun, tak kan ada yang dapat menyaingi Allah SWT. Sehingga hal ini dapat menambah ketaqwaan kita kepada Allah SWT sang *Kholiq* yang Maha cepat dalam penghitungannya. Selain itu, dengan mengetahui tentang kajian masalah berhitung yang ada dalam Al-Qur'an juga dapat menambah keyakinan bahwa

meskipun matematika dasarnya tergolong dalam ilmu umum, tetapi sebenarnya telah banyak dibahas dalam Al-Qur'an. Hal ini terbukti, bahwa di dalam Al-Qur'an disiplin ilmu matematika tak hanya membahas masalah perhitungan angka saja, tetapi juga membahas masalah himpunan, bilangan, pengukuran, statistika, estimasi, dan masih banyak lagi keajaiban-keajaiban matematika yang terdapat dalam Al-Qur'an.



## BAB IV

### PENUTUP

#### 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada Bab III, maka dapat diambil kesimpulan, antara lain:

1. Rumus umum untuk pewarnaan titik pada Graf Sikel, adalah

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 3 & \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ 2 & \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

2. Rumus umum untuk pewarnaan titik pada Graf Roda, adalah

$$\chi(W_n) = \begin{cases} 4 & \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ 3 & \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

3. Rumus umum untuk pewarnaan titik pada Graf Gear, adalah

$$\chi(G_n) = 2 \quad \text{untuk } n \text{ bilangan asli}$$

4. Rumus umum untuk pewarnaan titik pada graf Helm, adalah

$$\chi(H_n) = \begin{cases} 4 & \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ 3 & \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

5. Rumus umum untuk pewarnaan titik pada Graf Helm Tertutup, adalah

$$\chi(\hat{H}_n) = \begin{cases} 4 & \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ 3 & \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

6. Rumus umum untuk pewarnaan titik pada graf Bunga, adalah

$$\chi(F_n) = \begin{cases} 4 & \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ 3 & \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

#### 4.2 Saran

Pada skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pada pokok bahasan masalah pewarnaan titik pada graf yang berkaitan dengan sikel, antara lain Graf Sikel, Graf Roda, Graf Gear, Graf Helm, Graf Helm Tertutup, dan Graf Bunga. Maka dari itu, untuk penulisan skripsi selanjutnya, penulis menyarankan kepada pembaca untuk mengkaji masalah pewarnaan titik pada graf yang lain, misalnya graf Kubus dan lain-lain.

## DAFTAR PUSTAKA

- Abdusysyakhir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.
- Al-Murakfuri, Syaikh Shafiyyurrahman. 2006. *Shahih Tafsir Ibnu Katsir Jilid 1*. Bogor: Pustaka Ibnu Katsir.
- Chartrand, Gery and Lesniak, Linda. 1986. *Graphs and Digraphs Second Edition*. California: a Division of Wadsworth, Inc.
- Fitria, Lala. 2007. *Pelabelan Super Sisi Ajaib (Super Edge Magic Labeling) pada Graph star  $K_{1,n}$  ( $n$  bilangan asli)*. UIN Malang: Skripsi, tidak diterbitkan.
- Gallian, J. A.. 2007. "Dynamic Survey DS6: Graph Labeling." *Electronic J. Combinatorics*, DS6.  
<http://mathworld.wolfram.com/www.combinatorics.org/Surveys/ds6.pdf>.  
Diakses tanggal 8 Maret 2008 pukul 10.00 WIB
- Hasanah, Sofiatul. 2007. *Aplikasi Pewarnaan Graf Terhadap Penjadwalan Kuliah di Jurusan Matematika UIN Malang*. UIN Malang: Skripsi, tidak diterbitkan.
- Nurhayati, Dwi Mei. 2007. *Aplikasi Metode Takagi-Sugeno pada Cara Kerja Mesin Cuci*. UIN Malang: Skripsi, tidak diterbitkan.
- Purwanto, 1998. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP Malang.
- Rahman, Afzalur. 1992. *Al Qur'an Sumber Ilmu Pengetahuan*. Jakarta: Rineka Cipta.
- Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Misbah Volume 1 Pesan, Kesan & Keserasian Al Qur'an*. Ciputat: Lentera Hati.
- Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Misbah Volume 3 Pesan, Kesan & Keserasian Al Qur'an*. Ciputat: Lentera Hati.
- Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Misbah Volume 4 Pesan, Kesan & Keserasian Al Qur'an*. Ciputat: Lentera Hati.



DEPARTEMEN AGAMA RI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345  
Fax. (0341)572533

## BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Abdul Ghofur  
Nim : 03210049  
Fakultas/ jurusan : Sains Dan Teknologi/ Matematika  
Judul skripsi : Pewarnaan Titik pada Graf yang Berkaitan dengan Sikel  
Pembimbing I : Abdussakir, M.Pd  
Pembimbing II : Munirul Abidin, M.Ag

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan
1	26 April 2007	Konsultasi Masalah	1.
2	8 Mei 2007	Konsultasi BAB III	2.
3	24 Juli 2007	Revisi BAB III	3.
4	10 September 2007	Revisi BAB III	4.
5	19 November 2007	ACC BAB III	5.
6	14 Januari 2008	Konsultasi BAB I dan II	6.
7	18 Februari 2008	Konsultasi Keagamaan	7.
8	22 Februari 2008	Revisi BAB I dan II	8.
9	3 Maret 2008	Revisi Keagamaan	9.
10	10 Maret 2008	Revisi Keagamaan	10.
11	22 Maret 2008	Konsultasi Keseluruhan	11.
12	24 Maret 2008	ACC Keseluruhan	12.

Malang, 25 Maret 2008  
Mengetahui  
Ketua Jurusan Matematika

**Sri Harini, M.Si**  
NIP. 150 318 321