

**MENENTUKAN PELABELAN TOTAL SISI AJAIB
DAN KONSTANTA AJAIB TERKECIL
PADA GRAF SIKEL, LINTASAN DAN STAR**

SKRIPSI

Oleh:
BAHRIN NADA
NIM. 04510028



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2008**

HALAMAN PENGAJUAN

MENENTUKAN PELABELAN TOTAL SISI AJAIB DAN KONSTANTA AJAIB TERKECIL PADA GRAF SIKEL, LINTASAN DAN STAR

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam Memperoleh
Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
BAHRIN NADA
NIM. 04510028



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2008**

HALAMAN PERSETUJUAN

**MENENTUKAN PELABELAN TOTAL SISI AJAIB
DAN KONSTANTA AJAIB TERKECIL
PADA GRAF SIKEL, LINTASAN DAN STAR**

SKRIPSI

Oleh:

**BAHRIN NADA
NIM. 04510028**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji

Tanggal: 17 Oktober 2008

Pembimbing I

Pembimbing II

Drs. H. Turmudi, M.Si
NIP. 150 209 630

Munirul Abidin, M.Ag
NIP. 150 321 634

**Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika**

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321

**MENENTUKAN PELABELAN TOTAL SISI AJAIB
DAN KONSTANTA AJAIB TERKECIL
PADA GRAF SIKEL, LINTASAN DAN STAR**

SKRIPSI

Oleh:
BAHRIN NADA
NIM. 04510028

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal: 21 Oktober 2008

Susunan Dewan Penguji

Tanda Tangan

- | | | | |
|------------------|--|---|---|
| 1. Penguji Utama | : <u>Abdussakir, M.Pd</u> NIP. 150 327 247 | (|) |
| 2. Ketua | : <u>Wahyu H. Irawan, M.Pd</u> NIP. 150 300 415 | (|) |
| 3. Sekretaris | : <u>Drs. H. Turmudi, M.Si</u> NIP. 150 209 630 | (|) |
| 4. Anggota | : <u>Munirul Abidin, M.Ag</u> NIP. 150 321 634 | (|) |

**Mengetahui dan Mengesahkan
Ketua Jurusan Matematika**

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : BAHRIN NADA

NIM : 04510028

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 17 Oktober 2008

Yang membuat pernyataan

Bahrin Nada
NIM. 04510028

MOTTO

Ketahuiilah, apapun yang menjadikanmu tergetar,
itulah Yang Terbaik untukmu! Dan karena itulah,
Qalbu seorang pecinta-Nya lebih besar daripada
Singgasana-Nya.

(Jalaludin Rumi)

Kepuasan terletak pada usaha, bukan pada hasil.
Dan berusaha dengan keras adalah kemenangan yang hakiki.

(Mahatma Gandhi)

PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

*Alhamdulillah Robbil 'A lam in Segala Puja dan puji Syukur
di Panjatkan Bagi Allah SWT Seru Sekalian Alam
Ucapan Terima Kasih yang Sebesar-besarnya
Atas Rahmat, Taufik dan Hidayah-Nya yang Telah Diberikan*

*Penulis Persembahkan Karya ini Kepada Kedua Orang Terbaik & Terhebat
Ayah ICHWAN dan Ibu MUSLIMAH Sebagai Cinta Kasih dan Bakti Penulis
Untuk Kakak BAHRUL ULUM & Istrinya,
Adik NURIS SA'DIYAH,
dan Keponakan-keponakan yang tersayang
M. ABI CHADAVI & M. FATKHUR RASYA
Terima Kasih atas Support, Do'a dan Usahanya Selama ini
Semuanya Merupakan Orang-orang yang Penulis Cintai dan Sayangi Selamanya*

KATA PENGANTAR



Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Teriring ucapan puja dan puji syukur ke hadirat Allah SWT. yang telah melimpahkan rahmat, taufik dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan Skripsi yang berjudul “**Menentukan Pelabelan Total Sisi Ajaib dan Konstanta Ajaib Terkecil pada Graf Sikel, Lintasan dan Star**”.

Sholawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada junjungan kita Nabi Muhammad SAW. yang telah mengantarkan umat manusia dari zaman kegelapan menuju zaman yang terang benderang, yakni Addinul Islam.

Penulisan skripsi ini dapat di selesaikan berkat bimbingan dan motivasi dari dosen pembimbing, bapak dan ibu dosen serta bantuan dari semua pihak. Menyadari dengan sepenuhnya, bahwa penulisan skripsi ini tidak lepas dari banyak pihak. Oleh karena itu, tidak lupa penulis ucapkan banyak-banyak terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
2. Bapak Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
3. Ibu Sri Harini, M.Si, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.

4. Bapak Drs. H. Turmudi, M.Si, selaku dosen pembimbing yang senantiasa memberikan bimbingan, arahan dan koreksi dalam penyusunan skripsi ini sampai selesai.
5. Bapak Munirul Abidin, M.Ag, selaku dosen pembimbing agama yang senantiasa memberikan bimbingan, arahan dan koreksi dalam penyusunan skripsi ini sampai selesai.
6. Seluruh dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmunya selama ini di bangku kuliah dan yang selalu membimbing serta memberi motivasi agar penulis dapat menyelesaikan studi dengan baik.
7. Seluruh dosen Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang yang telah memberikan ilmu pengetahuan kepada penulis selama di bangku kuliah, serta seluruh karyawan dan staf UIN Malang.
8. Kedua orang tua tersayang dan saudara-saudara tercinta yang memberikan dorongan serta motivasi do'a yang tiada henti kepada penulis sampai terselesaikannya skripsi ini.
9. Teman-teman seperjuangan yang selalu saling memberi semangat dan motivasi dalam penyelesaian skripsi ini (Zumrotus Sa'adah, Nur Laili Ningsih dan Ahfalin Nisa'i)
10. Terima kasih juga penulis sampaikan kepada teman-teman jurusan matematika angkatan 2004 atas support dan semangat serta do'a yang diberikan.

11. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, atas keikhlasan bantuan moril dan sprituil, penulis ucapkan terima kasih sehingga dapat menyelesaikan skripsi.

Dengan teriring segala do'a, semoga Allah SWT. melimpahkan rahmat, taufik dan hidayah-Nya kepada semua pihak yang telah membimbing dan membantu dalam penyelesaian penulisan skripsi ini.

Semoga ikhtiar ini senantiasa mendapat ridho dan berkah dari Allah SWT. sekaligus sebagai ibadah sosial yang bermanfaat. Akhir kata, semoga skripsi ini dapat bermanfaat khususnya bagi penulis dan pembaca pada umumnya. Amiiiiin.....

Wassalamu'alaikum Wr.Wb

Malang, 17 Oktober 2008

Penulis

DAFTAR ISI

| | |
|--|----|
| HALAMAN JUDUL | |
| HALAMAN PENGAJUAN | |
| HALAMAN PERSETUJUAN | |
| HALAMAN PENGESAHAN | |
| HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN | |
| HALAMAN MOTTO | |
| HALAMAN PERSEMBAHAN | |
| KATA PENGANTAR | i |
| DAFTAR ISI | iv |
| DAFTAR GAMBAR | vi |
| DAFTAR TABEL | ix |
| ABSTRAK | x |
| | |
| BAB I PENDAHULUAN | |
| 1.1 Latar Belakang..... | 1 |
| 1.2 Rumusan Masalah..... | 7 |
| 1.3 Tujuan Masalah..... | 7 |
| 1.4 Manfaat Penelitian..... | 7 |
| 1.5 Metode Penelitian..... | 8 |
| 1.6 Sistematika Penulisan..... | 9 |
| | |
| BAB II KAJIAN PUSTAKA | |
| 2.1 Graf..... | 11 |
| 2.1.1 Definisi Graf..... | 11 |
| 2.1.2 Adjacent dan Incident..... | 13 |
| 2.1.3 Derajat Titik..... | 15 |
| 2.1.4 Graf Terhubung..... | 16 |
| 2.1.5 Graf Komplit, Bipartisi dan Bipartisi Komplit..... | 18 |
| 2.2 Graf Sikel..... | 20 |

| | |
|--|----|
| 2.3 Graf Lintasan | 21 |
| 2.4 Graf Star..... | 21 |
| 2.5 Pelabelan..... | 22 |
| 2.6 Pelabelan Total Sisi Ajaib (<i>Edge Magic Total (EMT) Labeling</i>)..... | 25 |
| 2.7 Konstanta Ajaib Terkecil..... | 26 |
| 2.8 Teori Graf dan Pelabelan dalam Al Qur'an..... | 27 |

BAB III PEMBAHASAN

| | |
|---|----|
| 3.1 Pelabelan Total Sisi Ajaib (<i>Edge Magic Total (EMT) Labeling</i>) dan Konstanta Ajaib Terkecil pada Graf Sikel | 35 |
| 3.2 Pelabelan Total Sisi Ajaib (<i>Edge Magic Total (EMT) Labeling</i>) dan Konstanta Ajaib Terkecil pada Graf Lintasan dengan Banyak Titik Genap | 48 |
| 3.3 Pelabelan Total Sisi Ajaib (<i>Edge Magic Total (EMT) Labeling</i>) dan Konstanta Ajaib Terkecil pada Graf Lintasan dengan Banyak Titik Ganjil..... | 58 |
| 3.4 Pelabelan Total Sisi Ajaib (<i>Edge Magic Total (EMT) Labeling</i>) dan Konstanta Ajaib Terkecil pada Graf Star..... | 70 |

BAB IV KESIMPULAN

| | |
|----------------------|----|
| 4.1. Kesimpulan..... | 81 |
| 4.2. Saran..... | 83 |

DAFTAR PUSTAKA

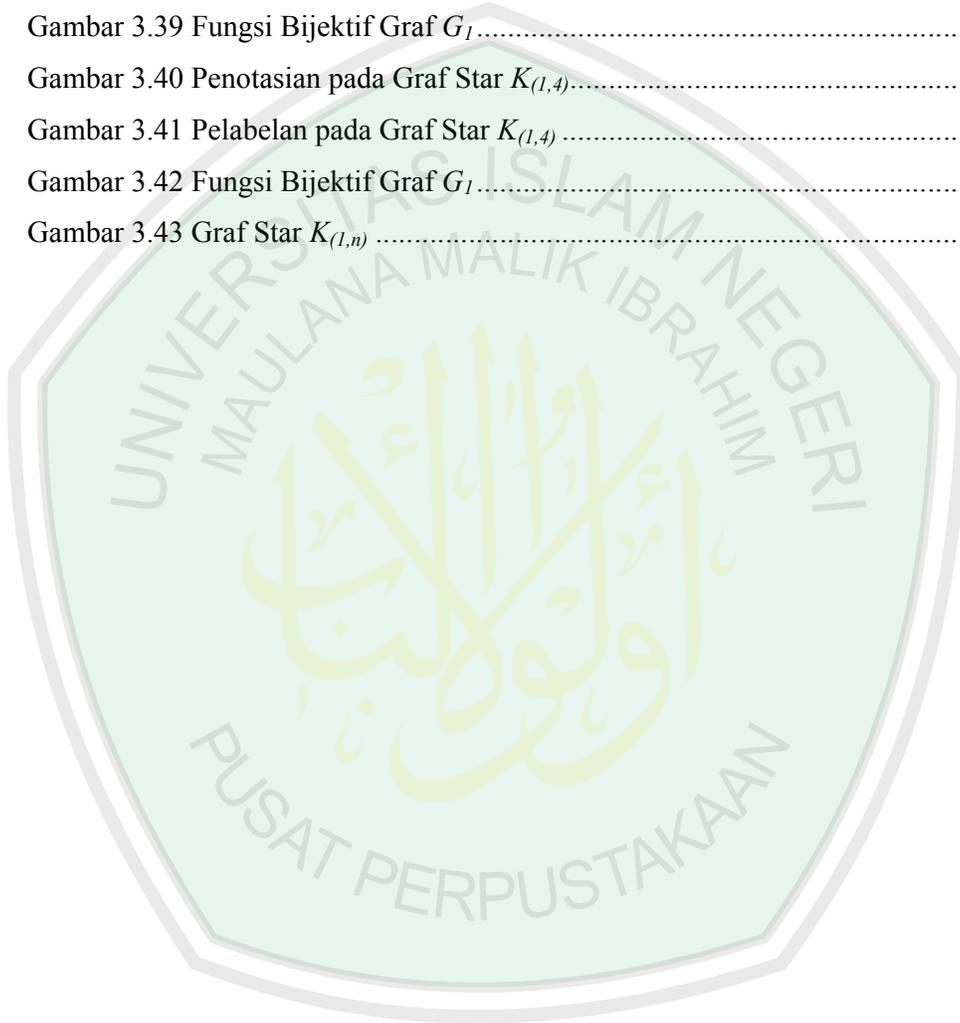
LAMPIRAN

DAFTAR GAMBAR

| | |
|---|----|
| Gambar 1.1 Hubungan antara Allah dengan Hamba-Nya serta Sesama Hamba | 3 |
| Gambar 2.1 Contoh Graf G | 12 |
| Gambar 2.2 Contoh Graf Trivial dan Null | 13 |
| Gambar 2.3 Graf Adjacent dan Incident | 14 |
| Gambar 2.4 Contoh Graf dengan Sisi Rangkap dan Loop | 14 |
| Gambar 2.5 Contoh Graf Sederhana | 14 |
| Gambar 2.6 Graf Derajat Titik | 15 |
| Gambar 2.7 Graf Derajat- r | 16 |
| Gambar 2.8 Jalan, Lintasan, Trail dan Sikel | 17 |
| Gambar 2.9 Graf Terhubung (<i>connected</i>) | 18 |
| Gambar 2.10 Graf Komplit | 18 |
| Gambar 2.11 Graf Bipartisi | 19 |
| Gambar 2.12 Graf Bipartisi Komplit | 20 |
| Gambar 2.13 Graf Sikel | 21 |
| Gambar 2.14 Graf Lintasan | 21 |
| Gambar 2.15 Graf Star | 22 |
| Gambar 2.16 Contoh Penotasian Titik | 23 |
| Gambar 2.17 Pelabelan Titik | 23 |
| Gambar 2.18 Contoh Penotasian Sisi | 23 |
| Gambar 2.19 Pelabelan Sisi | 24 |
| Gambar 2.20 Contoh Ponotasian Total | 24 |
| Gambar 2.21 Pelabelan Total | 25 |
| Gambar 2.22 Hubungan antara Mukmin yang Bersaudara | 28 |
| Gambar 2.23 Hubungan antara Allah dengan MakhluK Hidup Ciptaan-Nya | 29 |
| Gambar 2.24 Representasi Graf terhadap Waktu-waktu Shalat | 31 |
| Gambar 2.25 Representasi Graf terhadap Ibadah Sa'i | 32 |
| Gambar 3.1 Penotasian pada Graf Sikel C_3 | 35 |
| Gambar 3.2 Pelabelan pada Graf Sikel C_3 | 35 |
| Gambar 3.3 Fungsi Bijektif Graf G_7 | 36 |

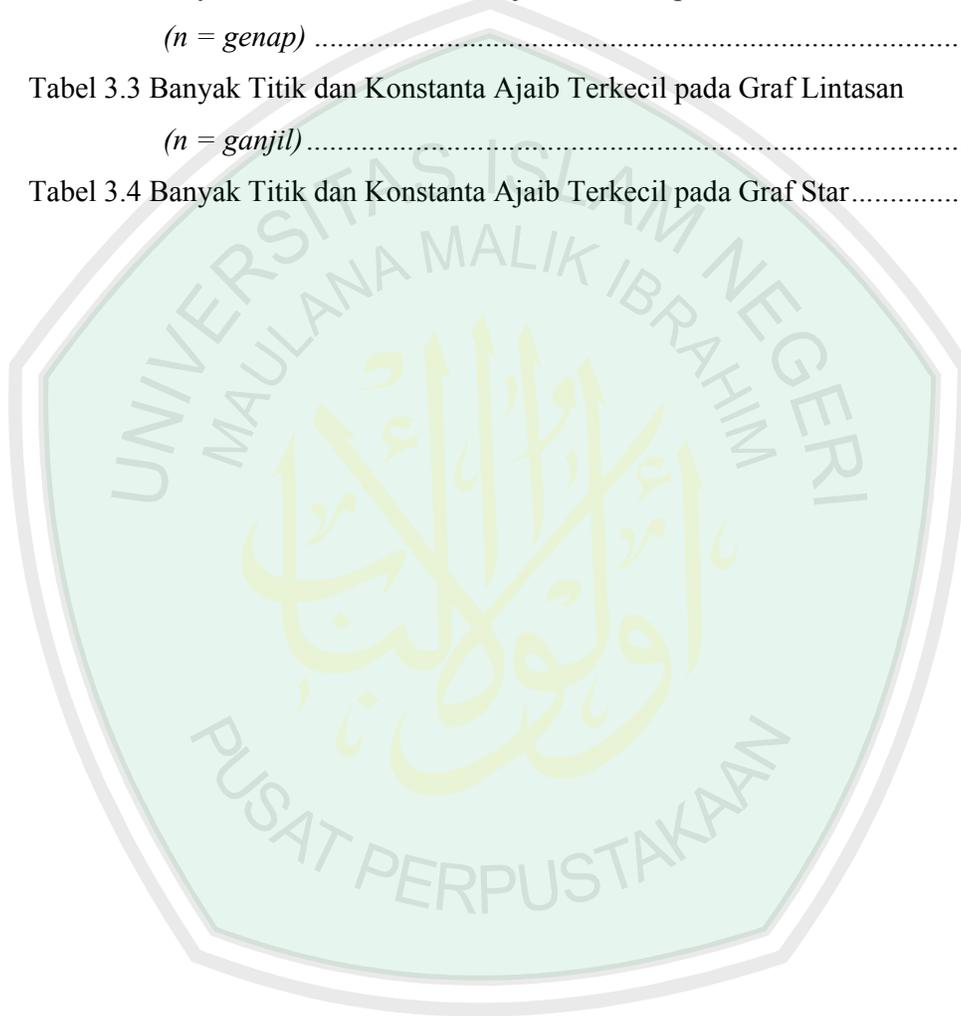
| | |
|---|----|
| Gambar 3.4 Penotasian pada Graf Sikel C_5 | 37 |
| Gambar 3.5 Pelabelan pada Graf Sikel C_5 | 38 |
| Gambar 3.6 Fungsi Bijektif Graf G_1 | 38 |
| Gambar 3.7 Penotasian pada Graf Sikel C_7 | 40 |
| Gambar 3.8 Pelabelan pada Graf Sikel C_7 | 41 |
| Gambar 3.9 Fungsi Bijektif Graf G_1 | 42 |
| Gambar 3.10 Graf Sikel C_n | 45 |
| Gambar 3.11 Penotasian pada Graf Lintasan P_2 | 48 |
| Gambar 3.12 Pelabelan pada Graf Lintasan P_2 | 48 |
| Gambar 3.13 Fungsi Bijektif Graf G_1 | 49 |
| Gambar 3.14 Penotasian pada Graf Lintasan P_4 | 49 |
| Gambar 3.15 Pelabelan pada Graf Lintasan P_4 | 49 |
| Gambar 3.16 Fungsi Bijektif Graf G_1 | 50 |
| Gambar 3.17 Penotasian pada Graf Lintasan P_6 | 51 |
| Gambar 3.18 Pelabelan pada Graf Lintasan P_6 | 52 |
| Gambar 3.19 Fungsi Bijektif Graf G_1 | 52 |
| Gambar 3.20 Graf Lintasan P_n | 55 |
| Gambar 3.21 Penotasian pada Graf Lintasan P_3 | 58 |
| Gambar 3.22 Pelabelan pada Graf Lintasan P_3 | 58 |
| Gambar 3.23 Fungsi Bijektif Graf G_1 | 59 |
| Gambar 3.24 Penotasian pada Graf Lintasan P_5 | 60 |
| Gambar 3.25 Pelabelan pada Graf Lintasan P_5 | 60 |
| Gambar 3.26 Fungsi Bijektif Graf G_1 | 61 |
| Gambar 3.27 Penotasian pada Graf Lintasan P_7 | 62 |
| Gambar 3.28 Pelabelan pada Graf Lintasan P_7 | 63 |
| Gambar 3.29 Fungsi Bijektif Graf G_1 | 64 |
| Gambar 3.30 Graf Lintasan P_n | 67 |
| Gambar 3.31 Penotasian pada Graf Star $K_{(1,1)}$ | 70 |
| Gambar 3.32 Pelabelan pada Graf Star $K_{(1,1)}$ | 70 |
| Gambar 3.33 Fungsi Bijektif Graf G_1 | 71 |
| Gambar 3.34 Penotasian pada Graf Star $K_{(1,2)}$ | 71 |

| | |
|---|----|
| Gambar 3.35 Pelabelan pada Graf Star $K_{(1,2)}$ | 71 |
| Gambar 3.36 Fungsi Bijektif Graf G_1 | 72 |
| Gambar 3.37 Penotasian pada Graf Star $K_{(1,3)}$ | 73 |
| Gambar 3.38 Pelabelan pada Graf Star $K_{(1,3)}$ | 73 |
| Gambar 3.39 Fungsi Bijektif Graf G_1 | 74 |
| Gambar 3.40 Penotasian pada Graf Star $K_{(1,4)}$ | 75 |
| Gambar 3.41 Pelabelan pada Graf Star $K_{(1,4)}$ | 75 |
| Gambar 3.42 Fungsi Bijektif Graf G_1 | 76 |
| Gambar 3.43 Graf Star $K_{(1,n)}$ | 78 |



DAFTAR TABEL

| | |
|---|----|
| Tabel 3.1 Banyak Titik dan Konstanta Ajaib Terkecil pada Graf Sikel | 47 |
| Tabel 3.2 Banyak Titik dan Konstanta Ajaib Terkecil pada Graf Lintasan ($n = \text{genap}$) | 56 |
| Tabel 3.3 Banyak Titik dan Konstanta Ajaib Terkecil pada Graf Lintasan ($n = \text{ganjil}$) | 68 |
| Tabel 3.4 Banyak Titik dan Konstanta Ajaib Terkecil pada Graf Star | 79 |



ABSTRAK

Nada, Bahrin. 2008. *Menentukan Pelabelan Total Sisi Ajaib dan Konstanta Ajaib Terkecil pada Graf Sikel, Lintasan dan Star*. Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
Pembimbing: Drs. H. Turmudi, M.Si
Munirul Abidin, M.Ag

Kata Kunci: Pelabelan Total Sisi Ajaib (EMT), Konstanta Ajaib Terkecil, Graf Sikel (C_n), Graf Lintasan (P_n) dan Graf Star ($K_{(1,n)}$).

Pelabelan total sisi ajaib pada graf $G(p,q)$ adalah fungsi f yang bersifat satu-satu dan pada dari $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, \dots, p+q\}$ dengan sifat setiap sisi xy pada graf G yang diberikan berlaku $f(x) + f(xy) + f(y) = k$, untuk suatu konstanta k dan konstanta k disebut konstanta ajaib dari G . Konstanta ajaib terkecil adalah nilai minimum dari semua k dimana k merupakan konstanta ajaib dari graf super ajaib. Lebih lanjut f adalah pelabelan super ajaib dari graf G jika $f(V(G)) = \{1, 2, \dots, p\}$. Dan suatu graf dikatakan ajaib jika terdapat pelabelan ajaib pada graf tersebut.

Pada skripsi dibahas pelabelan total sisi ajaib dan konstanta ajaib terkecil pada graf sikel (C_n), graf lintasan (P_n) dan graf star ($K_{(1,n)}$). Berdasarkan pembahasan skripsi ini bahwa setiap graf sikel C_n dengan n bilangan asli ganjil dan $n \geq 3$ adalah total sisi ajaib dengan konstanta ajaib terkecil $k = \frac{5n+3}{2}$, setiap graf lintasan P_n dengan n bilangan asli genap adalah total sisi ajaib dengan konstanta ajaib terkecil $k = \frac{5n+2}{2}$ dan setiap graf lintasan P_n dengan n bilangan asli ganjil adalah total sisi ajaib dengan konstanta ajaib terkecil $k = \frac{5n+3}{2}$ dan setiap graf star $K_{(1,n)}$ dengan n bilangan asli adalah total sisi ajaib, dengan konstanta ajaib terkecil $k = 2n + 4$

Pembahasan mengenai pelabelan total sisi ajaib dan konstanta ajaib terkecil ini masih terbuka bagi peneliti lain untuk melanjutkan pada jenis-jenis graf yang lain seperti graf tangga, graf pohon, graf buku dan lain sebagainya dan juga dapat melanjutkan untuk mencari nilai konstanta ajaib terbesar (maksimum) pada graf-graf tersebut.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pendidikan merupakan suatu upaya transformasi nilai dan pengembangan potensi manusia yang berlangsung secara formal maupun yang informal karena pendidikan juga berfungsi untuk mengembangkan potensi manusia untuk dirinya sendiri. Dari berbagai teori pendidikan yang dihasilkan oleh pakar ilmu pendidikan, telah disepakati bahwa pendidikan harus disampaikan. Dengan demikian, pendidikan adalah suatu peristiwa penyampaian atau proses transformasi. Al Qur'an menegaskan hal yang serupa ketika menyampaikan materinya kepada penerimanya, yaitu Nabi Muhammad SAW sebagaimana yang terdapat dalam surat Al Maidah (5) ayat 67:

يَأْتِيهَا الرَّسُولُ بَلِّغْ مَا أُنزِلَ إِلَيْكَ مِنْ رَبِّكَ وَإِنْ لَمْ تَفْعَلْ فَمَا بَلَّغْتَ رِسَالَتَهُ
وَاللَّهُ يَعْصُمُكَ مِنَ النَّاسِ إِنَّ اللَّهَ لَا يَهْدِي الْقَوْمَ الْكَافِرِينَ ﴿٦٧﴾

Artinya: "Hai Rasul, sampaikanlah apa yang disampaikan kepadamu dari Tuhanmu. Dan jika tidak kamu kerjakan (apa yang diperintahkan itu, berarti) kamu tidak menyampaikan amanat-Nya. Allah memelihara kamu dari (gangguan) manusia. Sesungguhnya Allah tidak memberi petunjuk kepada orang yang kafir". (QS. Al Maidah: 67)

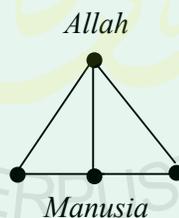
Pendidikan erat kaitannya dengan ilmu pengetahuan (*science*) karena mempunyai ciri khas yang nyata yang tidak dapat diingkari. Berbicara tentang ilmu pengetahuan, Al Qur'an telah memberikan kepada manusia kunci ilmu pengetahuan. Adapun hubungan antara Al Qur'an dan ilmu pengetahuan

hendaknya diletakkan pada proporsi yang lebih tepat, yaitu sesuai dengan kemurnian dan kesucian Al Qur'an dan sesuai pula dengan logika ilmu pengetahuan itu sendiri.

Salah satu ilmu pengetahuan tersebut adalah ilmu matematika karena matematika juga merupakan salah satu cabang ilmu yang mendasari berbagai macam ilmu yang lain, sehingga dalam menghadapi berbagai macam fenomena yang semakin kompleks maka matematika penting untuk dipelajari. Dalam kehidupan sehari-hari banyak permasalahan yang memerlukan pemecahan. Sering dengan bantuan matematika permasalahan tersebut menjadi lebih mudah dipahami, lebih mudah dipecahkan, atau bahkan dapat ditunjukkan bahwa suatu persoalan tidak mempunyai penyelesaian. Untuk keperluan tersebut perlu dicari pokok permasalahannya dan kemudian dibuat rumusan atau model matematikanya.

Diantara cabang matematika yang banyak manfaatnya untuk kehidupan sehari-hari adalah teori graf. Teori graf merupakan salah satu cabang dari ilmu matematika yang menurut definisinya adalah himpunan yang tidak kosong yang memuat elemen-elemen yang disebut titik, dan suatu daftar pasangan tidak terurut elemen itu yang disebut sisi. Banyak rumus dalam teori graf termotivasi oleh keadaan nyata. Dari permasalahan yang timbul pada masalah kehidupan sehari-hari timbul ide untuk menemukan rumus matematikanya, tentu saja dengan dibebaskan dari arti dan makna sehari-hari. Teori graf sudah dipelajari sejak lama, secara formal muncul pertama (yang banyak diketahui orang) pada tahun 1736, yakni pada tulisan Euler mengenai penyelesaian masalah Jembatan Konigsberg.

Oleh karena itu, teori graf merupakan salah satu pokok bahasan yang memiliki banyak terapan praktis hingga saat ini. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Dengan model teori graf yang tepat, suatu permasalahan menjadi lebih jelas, sehingga mudah untuk dianalisa. Permasalahan yang dirumuskan dengan teori graf dibuat sederhana, yaitu diambil aspek-aspek yang diperlukan dan dibuang aspek-aspek lainnya. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek sebagai titik, sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan garis. Dalam Al Qur'an elemen-elemen pada graf yaitu titik dan sisi meliputi Pencipta (Allah) dan hamba-hamba-Nya, sedangkan sisi atau garis yang menghubungkan elemen-elemen tersebut adalah bagaimana hubungan antara Allah dengan hambanya dan juga hubungan sesama hamba yang terjalin, *Hablun min Allah wa Hablun min An-Nas*.



Gambar 1.1 Hubungan antara Allah dengan Hamba-Nya serta Sesama Hamba

Hal ini dikuatkan oleh firman Allah dalam Al Qur'an surat Ali Imran ayat 112 yaitu:

ضُرِبَتْ عَلَيْهِمُ الدَّلِيلَةُ أَنَّهُمْ مَا تُقِفُوا إِلَّا بِحَبْلٍ مِّنَ اللَّهِ وَحَبْلٍ مِّنَ النَّاسِ وَبَاءُ وَبِعَصْبٍ
 مِّنَ اللَّهِ وَضُرِبَتْ عَلَيْهِمُ الْمَسْكَنَةُ ۚ ذَٰلِكَ بِأَنَّهُمْ كَانُوا يَكْفُرُونَ بِبَايَاتِ اللَّهِ وَيَقْتُلُونَ
 الْأَنْبِيَاءَ بِغَيْرِ حَقٍّ ذَٰلِكَ بِمَا عَصَوْا وَكَانُوا يَعْتَدُونَ ﴿١١٢﴾

Artinya: "Mereka diliputi kehinaan di mana saja mereka berada, kecuali jika mereka berpegang kepada tali (agama) Allah dan tali (perjanjian) dengan manusia, dan mereka kembali mendapat kemurkaan dari Allah dan mereka diliputi kerendahan. Yang demikian itu, karena mereka kafir kepada ayat-ayat Allah dan membunuh para nabi tanpa alasan yang benar. Yang demikian itu, disebabkan mereka durhaka dan melampaui batas". (QS. Ali Imran: 112)

Aplikasi dari teori graf ini sangat luas dan dipakai dalam berbagai disiplin ilmu maupun dalam kehidupan sehari-hari. Penggunaan graf di berbagai bidang tersebut digunakan untuk memodelkan persoalan. Teori ini juga sangat berguna untuk mengembangkan model-model yang terstruktur dalam berbagai situasi. Dalam implementasinya teori ini banyak digunakan antara lain di dalam bidang kelistrikan, kimia organik, ilmu komputer. Bahkan dewasa ini teori graf digunakan secara besar-besaran dalam bidang ekologi, geografi, antropologi, genetika, fisika, elektronika, pemrosesan informasi, arsitektur, dan desain. Selain itu juga, teori ini banyak dimanfaatkan secara praktis dalam bidang industri.

Dalam teori graf terdapat cabang ilmu yang dinamakan pewarnaan. Terdapat beberapa macam pewarnaan dalam graf, salah satunya adalah pewarnaan titik. Pewarnaan titik k untuk suatu graf G merupakan penunjukan k warna pada titik-titik di graf G sedemikian sehingga titik-titik yang berdekatan mendapat warna berbeda. Pewarnaan yang lain adalah pewarnaan sisi. Pewarnaan sisi k untuk graf G merupakan pemberian k warna pada sisi-sisi di graf G . Sedemikian

sehingga, setiap sisi yang bertemu pada suatu titik yang sama mendapatkan warna yang berbeda. Masalah pewarnaan ini erat kaitannya dengan masalah pewarnaan peta, yaitu masalah menentukan banyak warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai peta sehingga dua daerah yang bertetangga mempunyai warna berlainan.

Berawal dari pembahasan tentang pewarnaan, hal ini dilanjutkan dengan ditemukannya pelabelan. Pelabelan graf adalah suatu pemberian nilai pada titik atau sisi dari graf atau keduanya sehingga memenuhi kondisi tertentu. Berbagai macam pelabelan graf dikaji dan berkembang, baik konsep itu muncul untuk keperluan aplikasi maupun teoritis. Aplikasi pelabelan graf dapat dijumpai dalam berbagai bidang diantaranya dekomposisi graf, kriptografi, kristalografi x-ray, teori koding (*coding theory*), radar, disain sirkuit dan disain jaringan komunikasi.

Lebih jauh lagi, dalam pelabelan terdapat cabang ilmu yang bernama Pelabelan Ajaib. Pelabelan ini dikenalkan oleh Sedlacek dalam Joseph A. Gallian (2005:56) pada tahun 1963, teori tentang pelabelan ini termotivasi oleh teori tentang persegi ajaib (*magic squares*) dalam teori bilangan. Sedlacek mendefinisikan graf ajaib sebagai graf yang mempunyai pelabelan sisi dengan range adalah bilangan real, sehingga jumlah dari label sisi-sisinya yang terkait dengan satu titik adalah konstan, untuk sebarang titik. Kotzig dan Rosa dalam W. D. Wallis dkk (2000:3) telah mendefinisikan pelabelan ajaib pada tahun 1970. Istilah pelabelan ajaib mereka gunakan untuk menyatakan pelabelan Total Sisi Ajaib (*Edge Magic Total (EMT) Labeling*), dan ini akan digunakan pada pembahasan selanjutnya pada skripsi ini.

Salah satu manfaat pelabelan *EMT* adalah dalam mengatur penempatan pasukan militer. Suatu graf menggambarkan suatu wilayah yang harus dilindungi, dengan himpunan sisi menggambarkan jalan yang menghubungkan pos-pos penjagaan dan suatu kawasan atau wilayah digambarkan dengan himpunan titik. Dan untuk mengamankan suatu wilayah dibutuhkan pasukan penjaga yang ditempatkan di jalan-jalan dan di pos penjagaan. Dengan sejumlah pasukan tertentu dimaksudkan untuk mencapai kondisi keamanan yang maksimal. Dan menggunakan graf ajaib bisa diatur sedemikian rupa sehingga jumlah pasukan yang melindungi suatu kawasan dapat dimaksimalkan dengan total pasukan di seluruh wilayah diminimalkan.

Banyak sekali teori tentang pelabelan *EMT* pada berbagai bentuk graf yang telah dipelajari. Berdasarkan teori tentang pelabelan *EMT* maka penulis ingin mempelajari pelabelan *EMT* pada graf sikel dengan jumlah jeruji ganjil. Akan tetapi, untuk graf lintasan dan graf star penulis mencoba untuk mengkaji dengan jumlah jeruji kedua-duanya, yaitu ganjil dan genap. Disamping melakukan pelabelan *EMT*, pelabelan *EMT* juga berfungsi untuk mencari nilai konstanta ajaib terkecil dari graf-graf tersebut diatas. Adapun masalah yang mendasar dari pelabelan *EMT* ini adalah kita mencari nilai-nilai dari pelabelan pada setiap graf dan setelah nilai-nilai dari pelabelannya diketahui maka langkah selanjutnya yaitu mencari nilai konstanta ajaib dan konstanta ajaib terkecilnya pada graf tersebut.

Berdasarkan uraian tersebut dalam penelitian ini penulis akan mengkaji tentang graf yang diaplikasikan pada pelabelan, dengan mengambil judul skripsi **“Menentukan Pelabelan Total Sisi Ajaib dan Konstanta Ajaib Terkecil pada Graf Sikel, Lintasan dan Star“**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas, maka rumusan masalah dalam penelitian skripsi ini adalah:

1. Bagaimana pelabelan total sisi ajaib pada graf sikel, lintasan dan star?
2. Bagaimana konstanta ajaib terkecil dari pelabelan total sisi ajaib pada graf sikel, lintasan dan star?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah dikemukakan sebelumnya maka tujuan penelitian skripsi ini adalah:

1. Menjelaskan pelabelan total sisi ajaib pada sikel, lintasan dan star.
2. Mengetahui konstanta ajaib terkecil dari pelabelan total sisi ajaib pada sikel, lintasan dan star.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat, khususnya kepada penulis dan umumnya kepada semua pembaca baik secara teoritis maupun secara praktis.

1. Bagi penulis, hasil penelitian ini sebagai tambahan informasi dan wawasan pengetahuan mengenai cara menentukan pelabelan total sisi ajaib dan konstanta ajaib terkecil pada graf sikel, lintasan dan star yang juga merupakan sebuah bentuk partisipasi aktif untuk memberikan kontribusi pemikiran dalam mengembangkan keilmuan matematika.
2. Bagi pembaca, penelitian ini diharapkan mampu menjadi sebuah wahana untuk menambah wawasan dan khasanah keilmuannya maupun sebagai bahan rujukan untuk melakukan penelitian lebih lanjut.

1.5 Metode Penelitian

Jenis dari penelitian ini adalah deskriptif kualitatif dan penelitian ini merupakan sebuah penelitian kepustakaan (*library research*) dengan melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi dengan menggunakan teknik dokumenter, artinya data-data sumber penelitian dikumpulkan dari dokumen-dokumen, baik yang berupa buku, artikel, jurnal, majalah, maupun karya ilmiah lainnya yang berkaitan dengan topik atau permasalahan yang diteliti.

Adapun tahapan-tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mencari, mempelajari dan menelaah sumber-sumber informasi yang berhubungan dengan topik yang diteliti.
2. Memberikan deskripsi dan pembahasan lebih lanjut terhadap hasil penelitian untuk memberikan jawaban atas rumusan masalah yang telah dikemukakan.

3. Mencoba melakukan pelabelan pada beberapa contoh graf sikel, lintasan dan star.
4. Melalui beberapa contoh tersebut, akhirnya dicari pola tertentu.
5. Pola yang didapatkan masih dapat dianggap sebagai dugaan (konjektur).
6. Konjektur yang dihasilkan kemudian dibuktikan dengan terlebih dahulu merumuskan konjekturnya sebagai suatu teorema yang dilengkapi dengan bukti-bukti.
7. Setelah ditemukan pola pelabelannya dengan membuktikan teorema kemudian mencari nilai konstanta ajaib terkecil pada graf sikel, lintasan dan star.
8. Memberikan kesimpulan akhir dari hasil penelitian.

1.6 Sistematika Pembahasan

Agar pembahasan dalam penelitian ini dapat dilakukan secara sistematis, maka sistematika penulisannya disusun dengan kerangka sebagai berikut:

BAB I: PENDAHULUAN

Bab ini merupakan bab pengantar yang terdiri dari latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika pembahasan.

BAB II: KAJIAN PUSTAKA

Bab ini berisi tentang studi teoritis dari berbagai literatur dan sumber-sumber yang relevan dengan masalah yang diteliti. Bab ini membahas tentang graf, graf sikel, graf lintasan, graf star,

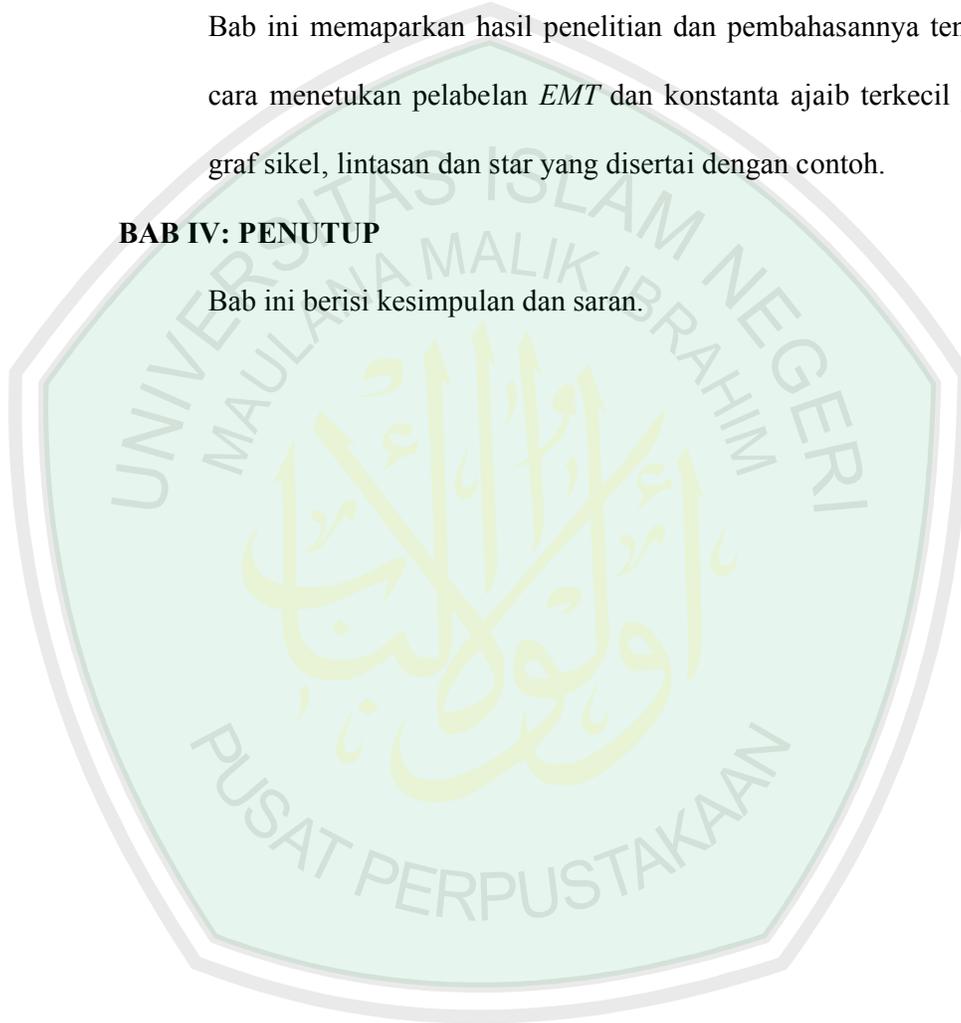
pelabelan, pelabelan total sisi ajaib (*EMT*) dan konstanta ajaib terkecil.

BAB III: HASIL DAN PEMBAHASAN

Bab ini memaparkan hasil penelitian dan pembahasannya tentang cara menentukan pelabelan *EMT* dan konstanta ajaib terkecil pada graf sikel, lintasan dan star yang disertai dengan contoh.

BAB IV: PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan dan saran.



BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Graf

2.1.1 Definisi Graf

Secara Matematis, graf didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 1

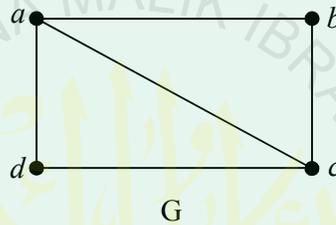
Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di V yang disebut sebagai sisi. Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$. Sedangkan banyaknya unsur di V disebut order dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di E disebut ukuran dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G , maka order dan ukuran dari G tersebut cukup ditulis dengan p dan q (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Definisi 2

Suatu graf terdiri dari suatu himpunan tak kosong yang masing-masing unturnya disebut titik (*vertex*) dan suatu himpunan pasangan tak berurutan dari titik-titik tersebut yang disebut sisi (*edge*) (Purwanto, 1997:5).

Misalkan G adalah suatu graf. Himpunan titik di graf G dinyatakan sebagai $V(G) = \{v_i : 1 \leq i \leq n\}$ dengan v_i disebut titik atau *vertex* dan himpunan sisi di graf G dinyatakan sebagai $E(G) = \{v_j v_k : v_j \in V(G), v_k \in V(G)\}$ dengan $v_j v_k$ disebut sisi atau *edge*, sisi juga dapat dinotasikan dengan e_i . Graf G dapat dinyatakan dengan $G = (V(G), E(G))$ (Baskoro, 2007:7).

Contoh :



Gambar 2.1 Contoh Graf G

Graf G pada Gambar 2.1 dapat dinyatakan sebagai $G = (V(G), E(G))$. Graf G mempunyai 4 titik sehingga order G adalah $p = 4$ dan mempunyai 5 sisi sehingga ukuran graf G adalah $q = 5$ dengan

$$V(G) = \{a, b, c, d\}$$

$$E(G) = \{ab, ad, ac, bc, cd\}.$$

Dapat juga ditulis dengan

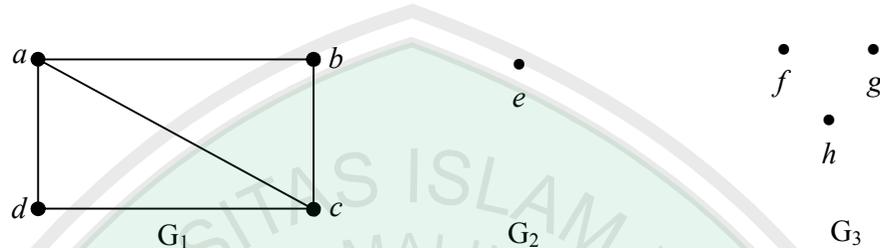
$$V(G) = \{a, b, c, d\}$$

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

Jika banyaknya titik dan banyaknya sisi di G terhingga maka G disebut graf terhingga. Jika graf G hanya terdiri dari satu titik maka graf G disebut graf

trivial. Jika graf G hanya terdiri dari himpunan titik tanpa himpunan sisi maka graf G disebut graf kosong (*graph Null*).

Contoh :



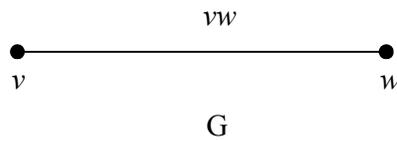
Gambar 2.2 Contoh Graf Trivial dan Null

Pada Gambar 2.2 graf G_1 dapat dinyatakan sebagai $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$, dengan $V(G_1) = \{a, b, c, d\}$, $E(G_1) = \{ab, ad, ac, bc, cd\}$. Karena G_2 hanya terdiri dari himpunan satu titik maka graf G_2 disebut graf trivial. Dan karena $G_3 = (V(G_3), E(G_3))$ dengan $V(G_3) = \{a, b, c, d\}$ dan $E(G_3) = \{ \}$ maka G_3 disebut graf kosong (*graph Null*).

2.1.2 Adjacent dan Incident

Definisi 3

Misalkan v dan w adalah titik-titik dari suatu graf. Jika v dan w dihubungkan oleh suatu sisi vw , maka v dan w disebut terhubung langsung (*adjacent*). Lebih lanjut, v dan w dikatakan terkait (*incident*) dengan vw , vw dikatakan terkait (*incident*) dengan v dan w , dan titik v dan w disebut titik ujung dari vw (Wilson dan Watkins, 1990:31).

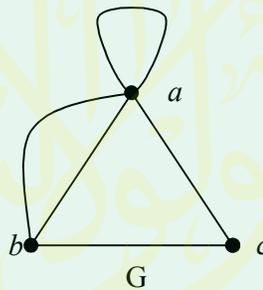


Gambar 2.3 Graf Adjacent dan Incident

Dari Gambar 2.3 titik v dan vw serta vw dan w adalah *incident* (terkait langsung) dan titik v dan w adalah *adjacent* (terhubung langsung).

Dua sisi atau lebih yang menghubungkan satu pasang titik disebut sisi rangkap (*multiple edges*). Suatu sisi yang titik ujungnya sama disebut *loop* (Purwanto, 1997:5).

Contoh :

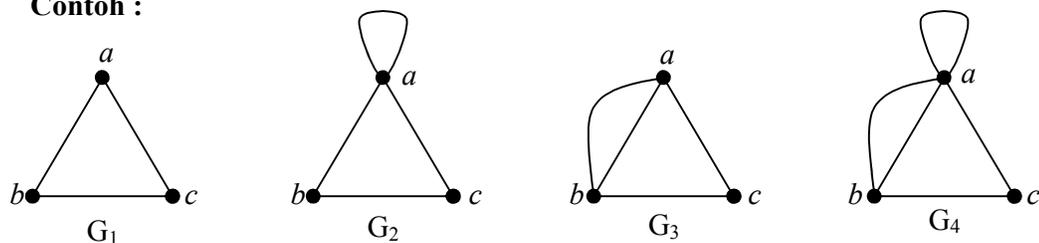


Gambar 2.4 Contoh Graf dengan Sisi rangkap dan Loop

Pada graf G pada Gambar 2.4 terdapat sisi rangkap ab , dan terdapat loop aa .

Graf tanpa sisi rangkap dan tanpa loop disebut graf sederhana (*simple graph*) (Purwanto, 1997:5).

Contoh :



Gambar 2.5 Contoh Graf Sederhana

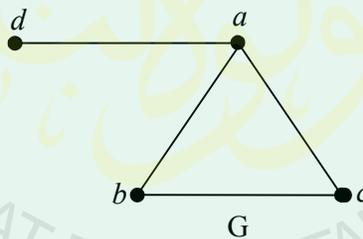
Pada Gambar 2.5 graf G_1 merupakan graf sederhana, G_2 bukan merupakan graf sederhana karena terdapat loop aa , G_3 bukan merupakan graf sederhana karena terdapat sisi rangkap ab , G_4 bukan merupakan graf sederhana karena terdapat loop aa dan sisi rangkap ab . Dan untuk selanjutnya pada skripsi ini hanya akan dibahas graf sederhana.

2.1.3 Derajat Titik

Definisi 4

Derajat suatu titik v di G , dinyatakan dengan $d(v)$, adalah banyak sisi di G yang terkait dengan v . Derajat minimum dan derajat maksimum titik-titik di G berturut-turut dinyatakan dengan $\delta(G)$ dan $\Delta(G)$ (Purwanto, 1997:7).

Contoh :

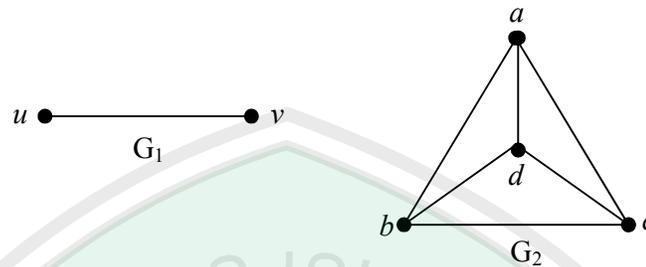


Gambar 2.6 Graf Derajat Titik

Untuk graf G pada Gambar 2.6 $d(a) = 3$, $d(b) = 2$, $d(c) = 2$, dan $d(d) = 1$ sedangkan $\delta(G) = 1$ dan $\Delta(G) = 3$.

Graf yang semua titiknya berderajat sama disebut graf beraturan (*regular graph*). Suatu graf dikatakan beraturan- r (*r-regular*) jika semua titiknya berderajat r (Purwanto, 1997:8).

Contoh :



Gambar 2.7 Graf Derajat- r .

Graf G_1 pada Gambar 2.7 merupakan graf beraturan-1, dan graf G_2 merupakan graf beraturan-3.

2.1.4 Graf Terhubung

Definisi 5

Sebuah jalan (*walk*) $u-v$ di graf G adalah barisan berhingga (tak kosong) $W : u = u_0, e_1, u_1, e_2, \dots, u_{n-1}, e_n, u_n = v$ yang berselang seling antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik u dan diakhiri dengan titik v , dengan $e_i = u_{i-1}u_i$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$ adalah sisi di G . u_0 disebut titik awal, u_n disebut titik akhir, u_1, u_2, \dots, u_{n-1} disebut titik internal, dan n menyatakan panjang dari W (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Definisi 6

Jalan $u-v$ disebut *terbuka* atau *tertutup* jika $u = v$ atau $u \neq v$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Definisi 7

Jalan $u-v$ yang semua sisinya berbeda disebut *trail* $u-v$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Definisi 8

Jalan $u-v$ yang semua sisi dan titiknya berbeda disebut *path* (lintasan) $u-v$.

Dengan demikian, semua lintasan adalah *trail* (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Definisi 9

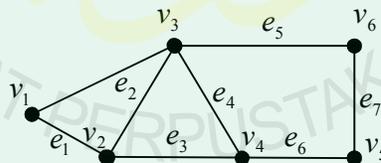
Suatu titik u yang membentuk lintasan (*path*) $u-u$ disebut jalan trivial (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Definisi 10

Suatu jalan tertutup (*closed trail*) yang tak-trivial pada Graf G disebut Sirkuit G . (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Definisi 11

Sirkuit $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, e_n, v_n, v_1$ dengan $n \geq 3$ dan v_i berbeda untuk setiap i disebut Sikel (*cycle*) (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Contoh:

Gambar 2.8. Jalan, Lintasan, Trail, dan Sikel

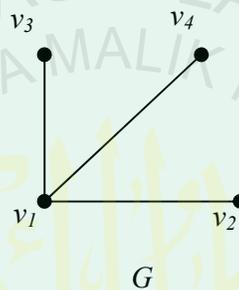
Dari Gambar 2.8. $v_1, v_3, v_6, v_5, v_4, v_2, v_1$ disebut jalan tertutup dengan panjang 6 dan $v_1, v_3, v_6, v_5, v_4, v_3, v_1, v_2$ disebut jalan terbuka dengan panjang 7.

$v_1, v_3, v_6, v_5, v_4, v_3, v_2$ adalah trail tetapi bukan lintasan, sedangkan

$v_1, v_3, v_6, v_5, v_4, v_2$ disebut sebagai *path* (lintasan) dan v_1, v_2, v_3, v_1 adalah sikel.

Definisi 12

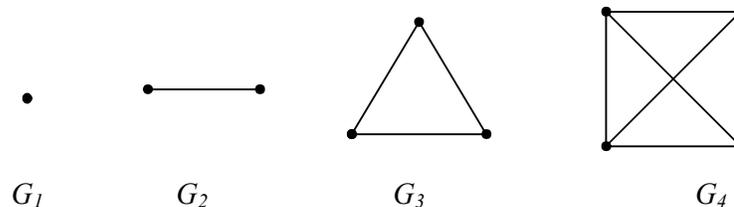
Misalkan u dan v titik berbeda pada graf G . Maka titik u dan v dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika terdapat lintasan $u - v$ di G . Sedangkan suatu graf G dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika untuk setiap titik u dan v di G terhubung (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Contoh:

Gambar 2.9 Graf Terhubung (*connected*)

2.1.5 Graf Komplit, Bipartisi dan Bipartisi Komplit**Definisi 13**

Graf komplit (*complete graph*) adalah graf sederhana dengan setiap pasang titik yang berbeda dihubungkan oleh satu sisi. Graf komplit dengan n titik dinyatakan dengan K_n (Chartrand dan Lesniak, 1986:9 dan Purwanto, 1997:21).

Contoh:

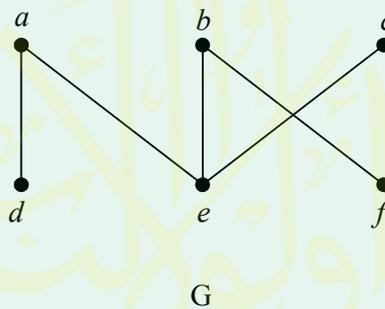
Gambar 2.10 Graf Komplit

Pada Gambar 2.10 graf G_1 merupakan graf komplit K_1 , graf G_2 merupakan graf komplit K_2 , graf G_3 merupakan graf komplit K_3 , dan graf G_4 merupakan graf komplit K_4 .

Definisi 14

Graf bipartisi (*bipartite graph*) adalah graf yang himpunan titiknya dapat dipisahkan menjadi dua himpunan tak kosong X dan Y , sehingga masing-masing sisi di graf tersebut menghubungkan satu titik di X dan satu titik di Y , X dan Y disebut himpunan partisi (Purwanto, 1997:21).

Contoh :



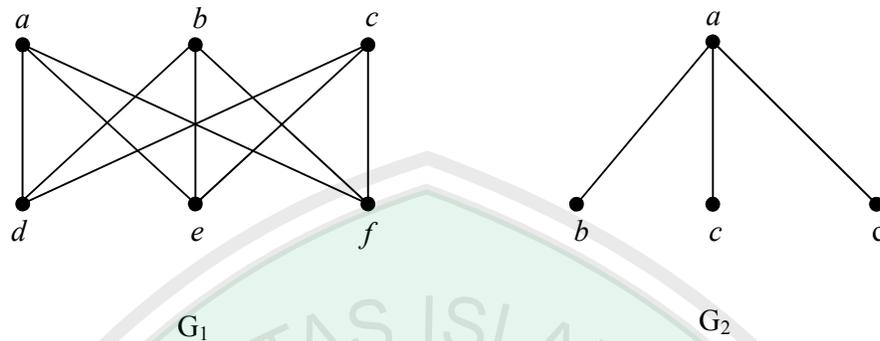
Gambar 2. 11 Graf Bipartisi.

Graf G pada Gambar 2.11 merupakan graf bipartisi dengan himpunan partisi $X = \{a, b, c\}$ dan $Y = \{d, e, f\}$.

Definisi 15

Graf bipartisi komplit (*complete bipartite graph*) adalah graf bipartisi dengan himpunan-himpunan partisi X dan Y sehingga masing-masing titik di X dihubungkan dengan masing-masing titik di Y oleh tepat satu sisi, jika $|X| = m$ dan $|Y| = n$ maka graf bipartisi tersebut dinyatakan dengan $K_{(m,n)}$. (Purwanto, 1997:22).

Contoh :



Gambar 2.12 Graf Bipartisi Komplit

Graf G_1 pada Gambar 2.12 merupakan graf bipartisi komplit $K_{(3,3)}$ dengan himpunan partisi $X = \{a, b, c\}$ dan $Y = \{d, e, f\}$. Dan graph G_2 merupakan graf bipartisi komplit $K_{(1,3)}$ atau graf star dengan titik pusatnya adalah a .

2.2 Graf Sikel

Sikel adalah jalan tertutup dengan barisan titik yang berbeda. Dengan kata lain, sikel adalah lintasan tertutup, sikel dengan panjang n dapat juga ditulis dengan n -sikel.

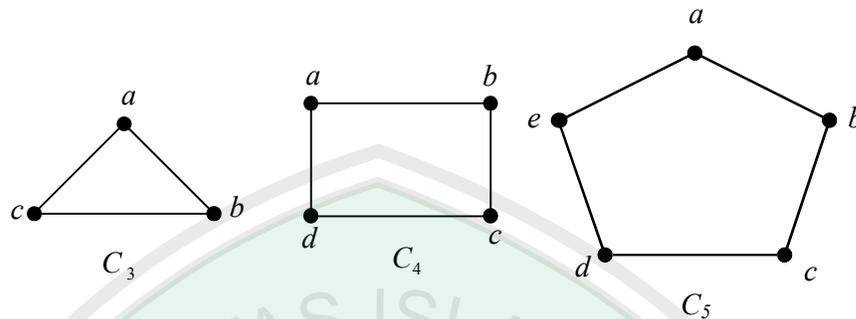
Definisi 16

Graf sikel adalah graf yang terdiri dari satu sikel (sikel tunggal). Graf sikel dengan n titik dinotasikan dengan C_n (Wilson dan Watkins, 1990:37).

Definisi 17

Graf Sikel (*Cycle Graf*) C_n ialah graf terhubung beraturan 2 yang mempunyai n titik ($n \geq 3$) dan n sisi (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Contoh graf sikel:



Gambar 2.13 Graf Sikel

2.3 Graf Lintasan

Lintasan adalah suatu jalan yang tidak mengulang titik.

Definisi 18

Graf path adalah graf yang terdiri dari satu lintasan (path tunggal). Graf path (lintasan) dengan n titik dinotasikan dengan P_n (Wilson dan Watkins, 1990:37).

Contoh graf lintasan:



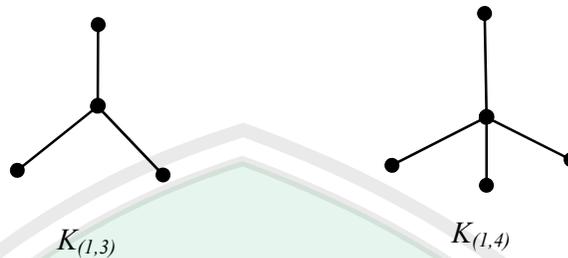
Gambar 2.14 Graf lintasan

2.4 Graf Star

Definisi 19

Graf star adalah graf bipartit komplit yang berbentuk $K_{(1,n)}$.

Contoh graf star:



Gambar 2.15 Contoh Graf Star

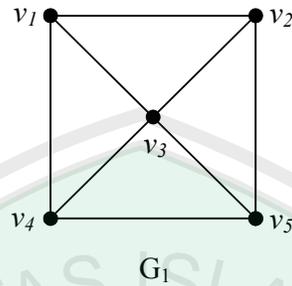
2.5 Pelabelan

Definisi 20

Pelabelan pada sebuah graf adalah pemetaan yang memetakan unsur-unsur pada suatu graf ke bilangan-bilangan (biasanya ke bilangan bulat positif atau bilangan bulat non-negatif) (W. D. Wallis dkk, 2000:2).

Ditinjau dari domainnya, terdapat bermacam-macam pelabelan pada graf, antara lain adalah pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total. Pelabelan titik adalah pemetaan yang memetakan titik-titik pada suatu graf ke bilangan-bilangan. Pelabelan sisi adalah pemetaan yang memetakan sisi-sisi pada suatu graf ke bilangan-bilangan. Sedangkan pelabelan total adalah pemetaan yang memetakan titik-titik dan sisi-sisi pada suatu graf ke bilangan-bilangan. Selain itu domain yang lain juga mungkin digunakan pada pelabelan pada graf.

Contoh 1:



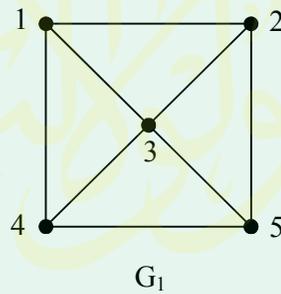
Gambar 2.16 Contoh Penotasian Titik

Jika G_1 pada Gambar 2.16 dilabeli dengan pelabelan sebagai berikut

$$f : V(G_1) \rightarrow \{1,2,3,4,5\}$$

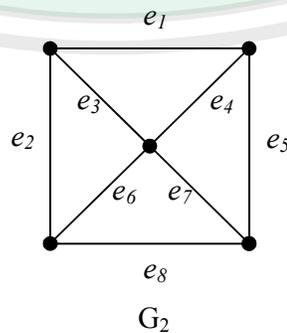
$$v_i \mapsto i \quad ; \text{ dengan } i = 1, 2, 3, 4, 5$$

Maka diperoleh graf dengan pelabelan titik pada Gambar 2.17 berikut



Gambar 2.17 Pelabelan Titik

Contoh 2:



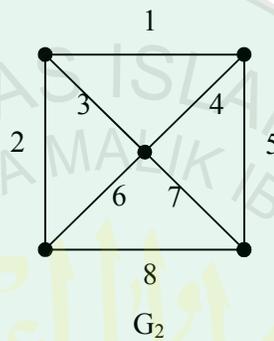
Gambar 2.18 Contoh Penotasian Sisi

Jika G_2 pada Gambar 2.18 dilabeli dengan pelabelan sebagai berikut

$$g : E(G_2) \rightarrow \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

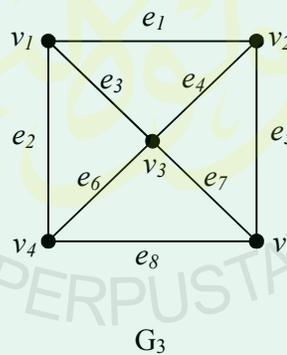
$$e_i \mapsto i \quad ; \text{ dengan } i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

Maka diperoleh graf dengan pelabelan sisi pada Gambar 2.19 berikut



Gambar 2.19 Pelabelan Sisi

Contoh 3:



Gambar 2.20 Contoh Ponotasian Total

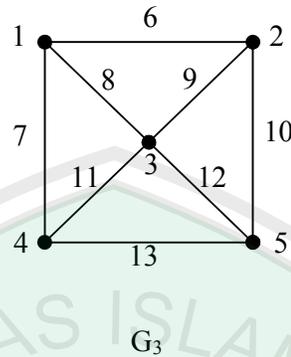
Jika G_3 pada Gambar 2.20 dilabeli dengan pelabelan sebagai berikut

$$g : V(G_3) \cup E(G_3) \rightarrow \{1,2,3,\dots,12,13\}$$

$$v_i \mapsto i \quad ; \text{ dengan } i = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$e_j \mapsto j+5 \quad ; \text{ dengan } j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

Maka diperoleh graf dengan pelabelan total pada Gambar 2. 21 berikut



Gambar 2.21 Pelabelan Total

2.6 Pelabelan Total Sisi Ajaib (*Edge Magic Total (EMT) Labeling*)

Pelabelan ajaib dikenalkan oleh Sedlacek dalam Joseph A. Gallian (2005:56) pada tahun 1963, teori tentang pelabelan ajaib ini termotivasi oleh teori tentang persegi ajaib (*magic squares*) dalam teori bilangan. Pengenalan tentang pelabelan ajaib oleh Sedlacek tersebut diteruskan dengan dipelajarinya pelabelan ajaib secara lebih luas. Diantaranya adalah pengenalan tentang pelabelan ajaib sisi dan pelabelan ajaib titik.

Lebih jauh lagi adalah dikenalkannya pelabelan total ajaib titik dan pelabelan total sisi ajaib (*EMT*). Pelabelan total ajaib titik, biasanya disebut hypermagic, merupakan pelabelan ajaib titik pada graf dengan pelabelan total. Pelabelan total ajaib sisi merupakan pelabelan ajaib sisi pada graf dengan pelabelan total (W. D. Wallis dkk, 2000:3).

Kotzig dan Rosa dalam W. D. Wallis (2000:3) telah mendefinisikan pelabelan ajaib yang menggunakan daerah asal berupa himpunan bilangan bulat berurutan $\{1, 2, \dots, p + q\}$ dan menggunakan pelabelan total pada tahun 1970.

Istilah pelabelan ajaib mereka gunakan untuk menyatakan pelabelan total sisi ajaib (*EMT*), dan ini akan digunakan pada pembahasan selanjutnya pada skripsi ini.

Definisi 21

Pelabelan ajaib pada graf $G(p, q)$ adalah fungsi f yang bersifat satu-satu dan pada dari $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, \dots, p + q\}$ dengan sifat setiap sisi xy pada graf G yang diberikan berlaku $f(x) + f(xy) + f(y) = k$, untuk suatu konstanta k , dengan $f(x) + f(xy) + f(y)$ disebut jumlah sisi dari xy dan konstanta k disebut konstanta ajaib dari G . Suatu graf dikatakan ajaib jika terdapat pelabelan ajaib pada graf tersebut (W. D. Wallis dkk, 2000:3).

2.7 Konstanta Ajaib Terkecil

Definisi 22

Konstanta ajaib adalah bilangan yang menunjukkan setiap dua titik yang berhubungan (*adjacent*) dan satu sisi yang terkait (*incident*) adalah harus sama.

Definisi 23

Konstanta ajaib terkecil adalah nilai minimum dari semua k dimana k merupakan konstanta ajaib dari graf super ajaib (V. Swaminathan, 2006:1625).

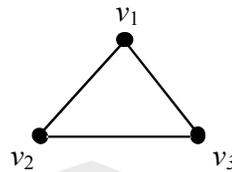
2.8 Kajian Graf dan Pelabelan dalam Al Qur'an

Secara umum beberapa konsep dari disiplin ilmu telah dijelaskan dalam Al Qur'an, salah satunya adalah matematika. Konsep dari disiplin ilmu matematika serta berbagai cabangnya yang ada dalam Al Qur'an di antaranya adalah masalah logika, pemodelan, statistik, teori graf, teori tentang grup dan lain-lain. Teori graf yang merupakan salah satu cabang dari matematika tersebut menurut definisinya adalah himpunan yang tidak kosong yang memuat elemen-elemen yang disebut titik, dan suatu daftar pasangan tidak terurut elemen itu yang disebut sisi. Hal ini dikuatkan oleh firman Allah dalam Al Qur'an surat Al Hujurat ayat 10 bahwa dalam ayat tersebut disebutkan bahwa umat manusia yang beriman itu bersaudara. Sehingga mereka harus menjalin hubungan yang baik, rukun antara sesama umat. Ayat tersebut yaitu:

إِنَّمَا الْمُؤْمِنُونَ إِخْوَةٌ فَأَصْلِحُوا بَيْنَ أَخَوَيْكُمْ وَاتَّقُوا اللَّهَ لَعَلَّكُمْ تُرْحَمُونَ

Artinya: "Orang-orang beriman itu sesungguhnya bersaudara. Sebab itu damaikanlah (perbaikilah hubungan) antara kedua saudaramu itu dan takutlah terhadap Allah, supaya kamu mendapat rahmat" (Q. S. Al-Hujurat: 10).

Sehingga dengan demikian, hal ini menunjukkan adanya suatu hubungan atau keterkaitan antara titik yang satu dengan titik yang lain. Jika dikaitkan dengan kehidupan nyata, maka banyaknya titik yang terhubung dalam suatu graf dapat diasumsikan sebagai banyaknya kejadian tertentu, yang selanjutnya kejadian-kejadian tersebut memiliki keterkaitan dengan titik lainnya yang merupakan kejadian sesudahnya. Apabila di aplikasikan pada bentuk graf, maka kita dapat menggambarannya seperti berikut ini:



Gambar 2.22 Hubungan antara Mukmin yang Bersaudara

Pada visualisasi gambar di atas merupakan bentuk dari graf siklus dengan jumlah titik adalah 3, di mana antara ketiganya saling berhubungan dan siklis dengan v_1 adalah orang beriman 1, v_2 adalah orang beriman 2 dan v_3 adalah orang beriman 3 yang jika salah satu dari mereka terputus maka kita harus mendamaikannya (memperbaiki hubungan diantara mereka).

Manusia merupakan salah satu makhluk atau ciptaan Allah yang sempurna karena mereka diberi nafsu, akal dan indera-indera yang dapat dimanfaatkan oleh manusia. Interaksi-interaksi yang terjadi pun sangat beragam walaupun pada akhirnya akan kembali pada yang mencipta mereka. Dalam kehidupan sehari-hari manusia sering lupa akan pencipta-Nya dan sering kali tidak melaksanakan perintah-Nya dan tidak meninggalkan larangan-Nya. Padahal Allah telah memperingatkan manusia dengan firman-Nya bahwa manusia harus berada pada jalan yang benar yakni menjalankan perintah-Nya dan menjauhi larangan-Nya. Dalam Al Qur'an surat al-An'am ayat 153 dijelaskan bahwa:

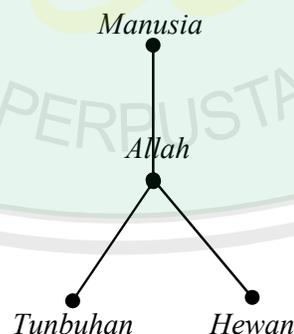
وَأَنَّ هَذَا صِرَاطِي مُسْتَقِيمًا فَاتَّبِعُوهُ ۖ وَلَا تَتَّبِعُوا السُّبُلَ فَتَفَرَّقَ بِكُمْ عَن سَبِيلِهِ ۚ ذَٰلِكُمْ وَصَّاكُم بِهِ لَعَلَّكُمْ تَتَّقُونَ ﴿١٥٣﴾

Artinya: "Dan bahwa (yang Kami perintahkan ini) adalah jalanKu yang lurus, maka ikutlah dia, dan janganlah kamu mengikuti jalan-jalan (yang lain)^[152], karena jalan-jalan itu mencerai beraikan kamu dari jalan-

*Nya. Yang demikian itu diperintahkan Allah agar kamu bertakwa”.
(QS. Al An'am: 153)*

Sehingga dengan demikian, hal ini menunjukkan adanya suatu hubungan atau keterkaitan antara titik yang satu dengan titik yang lain. Jika dikaitkan dengan kehidupan nyata, maka banyaknya titik yang terhubung dalam suatu graf dapat diasumsikan sebagai banyaknya kejadian tertentu, yang selanjutnya kejadian-kejadian tersebut memiliki keterkaitan dengan titik lainnya yang merupakan kejadian sesudahnya.

Dalam kehidupan nyata, misalnya hubungan Allah dan makhluk ciptaan-Nya dimana elemen-elemen yang dimaksud meliputi Pencipta (Allah) dan makhluk-makhluk ciptaan-Nya, sedangkan sisi atau garis yang menghubungkan elemen-elemen tersebut adalah bagaimana hubungan antara Allah dengan makhluk-makhluk ciptaan-Nya dan juga hubungan yang terjalin, yaitu *Hablun min Allah, Hablun min An-Nas wa Hablun min 'Alam.*



Gambar 2. 23 Hubungan antara Allah dengan Makhluk Hidup Ciptaan-Nya

Dari bentuk Gambar 2.23 di atas bisa dikatakan bahwa hubungan Allah dan makhluk ciptaan-Nya merupakan salah satu contoh dari bentuk graf star $K_{(1,3)}$ dengan nilai $n = 3$ dan titik v_1 adalah Allah yang merupakan titik pusat dan titik

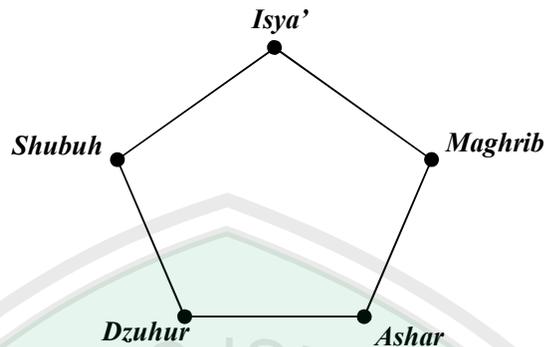
v_2, v_3, v_3 berturut-turut adalah manusia, tumbuhan dan hewan yang merupakan makhluk ciptaan Allah

Representasi yang lain dari suatu graf adalah shalat. Shalat mempunyai kedudukan yang amat penting dalam Islam dan merupakan pondasi yang kokoh bagi tegaknya agama Islam. Ibadah shalat dalam Islam sangat penting, sehingga shalat harus dilakukan pada waktunya, dimanapun, dan bagaimanapun keadaan seorang muslim yang mukalaf. Dalam kaitannya dengan peribadatan shalat, Allah SWT. berfirman:

فَإِذَا قَضَيْتُمُ الصَّلَاةَ فَادْكُرُوا اللَّهَ فِيمَا وُقُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِكُمْ ۚ فَإِذَا
 أَطْمَأْنَنْتُمْ فَأَقِيمُوا الصَّلَاةَ ۚ إِنَّ الصَّلَاةَ كَانَتْ عَلَى الْمُؤْمِنِينَ كِتَابًا مَّوْقُوتًا ﴿١٠٣﴾

Artinya: “Maka apabila kamu telah menyelesaikan shalat(mu), ingatlah Allah di waktu berdiri, di waktu duduk dan di waktu berbaring. Kemudian apabila kamu telah merasa aman. Maka dirikanlah shalat itu (sebagaimana biasa). Sesungguhnya shalat itu adalah fardhu yang ditentukan waktunya atas orang-orang yang beriman” (Q.S. An-Nisaa’: 103).

Dalam ayat tersebut dijelaskan bahwa waktu-waktu sholat telah ditentukan waktunya dan telah menjadi suatu ketetapan, baik itu sholat fardhu maupun sholat sunnah. Sholat lima waktu yang diwajibkan dalam sehari (isya’, subuh, dhuhur, ashar dan maghrib) merupakan sholat yang wajib ditunaikan dan tidak boleh ditinggalkan. Waktu pelaksanaan antara satu waktu sholat fardhu berbeda dengan empat waktu sholat yang lain dan telah ditetapkan oleh Allah SWT. Akan tetapi, kelima waktu sholat tersebut saling mengikat dan tidak diperbolehkan hanya melaksanakan satu sholat saja.



Gambar 2. 24 Representasi Graf terhadap Waktu-waktu Shalat

Dari bentuk Gambar 2.24 di atas bahwa hubungan sholat merupakan salah satu contoh dari bentuk graf sikel C_5 dengan nilai $n = 5$ dengan pelabelan berturut-turut adalah v_1, v_2, v_3, v_4 dan v_5 yaitu Sholat Isya', Subuh, Dhuhur, Ashar dan Maghrib.

Adapun hubungan waktu sholat tersebut dengan teori graf adalah bahwa waktu-waktu sholat tersebut merupakan suatu himpunan yang terdiri dari waktu sholat fardhu (isya', subuh, dhuhur, ashar dan maghrib) dan waktu sholat sunnah sebagai ekspresi dari himpunan titik dalam graf. Sedangkan keterikatan antara kelima sholat fardhu tersebut yang tidak dapat ditinggalkan salah satunya dalam menunaikannya dan sholat sunnah sebagai pelengkap sholat fardhu merupakan ekspresi dari garis atau sisi yang menghubungkan titik-titik dalam graf.

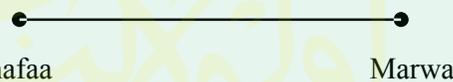
Suatu graf memiliki titik dan sisi artinya dalam graf tersebut terdapat dua titik yang memiliki satu sisi atau lebih dari satu sisi yang memiliki hubungan dan integritas yang cukup signifikan yang dijelaskan pada sebuah Al Qur'an surat Al Baqarah ayat 158:

﴿ إِنَّ الصَّفَا وَالْمَرْوَةَ مِن شَعَائِرِ اللَّهِ فَمَنْ حَجَّ الْبَيْتَ أَوْ اعْتَمَرَ فَلَا جُنَاحَ عَلَيْهِ أَنْ يَطَّوَّفَ بِهِمَا وَمَن تَطَوَّعَ خَيْرًا فَإِنَّ اللَّهَ شَاكِرٌ عَلِيمٌ ﴾

Artinya: "Sesungguhnya Shafaa dan Marwa adalah sebahagian dari syi'ar Allah. Maka barangsiapa yang beribadah haji ke Baitullah atau berumrah, Maka tidak ada dosa baginya mengerjakan sa'i antara keduanya. dan barangsiapa yang mengerjakan suatu kebajikan dengan kerelaan hati. Maka Sesungguhnya Allah Maha Mensyukuri kebaikan lagi Maha Mengetahui". (Qs. Al-Baqarah: 158)

Dalam sebuah hadist dijelaskan bahwa Rasulullah SAW. bersabda, yang artinya: "Diwajibkan atas kamu melakukan sa'i maka hendklah kamu lakukan (H. R. Ahmad)".

Terkait dengan kejadian diatas, maka kejadian tersebut dapat direpresentasikan pada graf dengan mempunyai jumlah 2 titik 2 dan 1 sisi.



Gambar 2. 25 Representasi Graf terhadap ibadah Sa'i

Dari bentuk Gambar 2.25 di atas merupakan salah satu contoh dari bentuk graf path P_2 dengan nilai $n = 2$ dimana pelabelannya berturut-turut adalah v_1 dan v_2 yaitu perjalanan Sa'i antara Shafaa dan Marwa sedangkan sisinya adalah menggambarkan Sa'i.

Dari uraian-uraian diatas tidak menutup kemungkinan banyak konsep matematika khususnya teori graf yang masih belum dikaji dan terungkap melalui pendekatan Al Qur'an. Seperti yang telah diuraikan sebelumnya, bahwa suatu graf memiliki dua unsur pokok, yaitu titik dan sisi. Titi-titik dalam suatu graf akan saling terhubung dengan adanya suatu garis yang dinamakan sisi. Dengan

demikian, hal ini menunjukkan adanya suatu hubungan keterkaitan antara titik yang satu dengan titik yang lain.

Berbicara tentang pemberian label sesuai dengan aturan yang ada, hal ini menunjukkan bahwa suatu pelabelan dalam graf telah memiliki ukuran label tertentu sehingga bisa dikatakan pelabelan tersebut mempunyai pelabelan total sisi ajaib (*EMT*). Jika direlevansikan dengan kajian Al Qur'an adalah sejajar dengan ayat yang menyebutkan bahwa segala sesuatu yang ada didunia ini diciptakan oleh Allah SWT. sesuai dengan kadar dan ukuran yang ditatnya dengan sedemikian rapi. Sebagaimana yang tertuang dalam surat Al-Qamar ayat 49:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: “*Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran*“. (Qs. Al-Qamar: 49)

Berkenaan dengan ayat diatas Abdusysykir (2007: 80) mengatakan bahwa semua yang ada di alam ini ada ukurannya, hitungannya, rumusnya dan ada persamaannya. Namun, rumus-rumus yang ada sekarang bukan diciptakan manusia sendiri, tetapi sudah disediakan. Manusia hanya menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika.

Begitu pula dalam hal ini, suatu graf bisa terlabeli dengan pelabelan total sisi ajaib (*EMT*) karena sudah memiliki ukuran yang sempurna dengan cara dan aturan yang dibuat oleh manusia secara sistematis. Dari sinilah Al Qur'an mengajak kepada setiap pembacanya untuk membahas dan mengkaji suatu ilmu untuk memperluas khasanah keilmuannya.

Penemuan sekaligus pembuktian rumus-rumus yang digunakan dalam pelabelan pada graf yang berkaitan dengan pemberian label pada titiknya, yaitu bertujuan untuk menemukan pola tertentu agar lebih mudah dipahami dan lebih mudah untuk mencarinya. Setelah mengetahui dengan jelas hasil dari pembahasan diatas yang intinya adalah menemukan rumus untuk pola pelabelan EMT pada graf sikel, lintasan dan star serta menentukan konstanta ajaibnya, dan konstanta ajaib terkecilnya.

Hal utama yang dapat dijadikan sebagai refleksi dari semuanya, yakni ternyata setelah banyak mempelajari matematika yang merupakan ilmu hitung-menghitung serta banyak mengetahui mengenai masalah yang terdapat dalam matematika yang dapat direlevansikan dalam agama islam sesuai dengan konsep-konsep yang ada dalam Al Qur'an, maka akan dapat menambah keyakinan diri akan kebesaran Allah SWT selaku Sang Pencipta yang serba Maha, yang salah satunya adalah Maha Matematisi (Abdusysykir, 2007:83).

Hal ini sesuai dalam Al Qur'an surat Al-Baqarah ayat 202:

أُولَئِكَ لَهُمْ نَصِيبٌ مِّمَّا كَسَبُوا ۗ وَاللَّهُ سَرِيعُ الْحِسَابِ ﴿٢٠٢﴾

Artinya: "Mereka Itulah orang-orang yang mendapat bahagian daripada yang mereka usahakan; dan Allah sangat cepat perhitungannya". (Qs. Al-Baqarah: 202).

BAB III

PEMBAHASAN

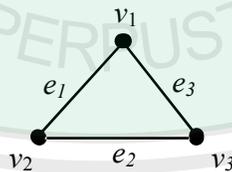
Pada bab ini akan dibahas bagaimana cara menentukan pelabelan total sisi ajaib (*Edge Magic Total (EMT) Labeling*) dan konstanta ajaib terkecil pada graf sikel, lintasan dan star. Pembahasan ini meliputi, yaitu:

1. Pada graf sikel C_n dengan banyak titik ganjil.
2. Pada graf lintasan P_n dengan banyak titik genap
3. Pada graf lintasan P_n dengan banyak titik ganjil
4. Pada graf star $K_{(1,n)}$, dengan banyak titik ganjil dan genap.

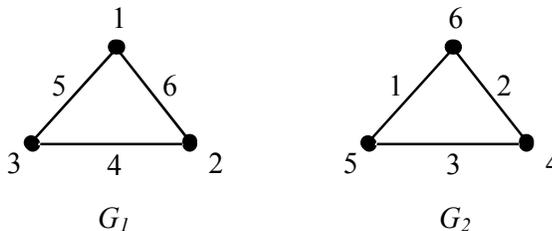
3.1 Menentukan Pelabelan Total Sisi Ajaib (*EMT*) dan Konstanta Ajaib Terkecil pada Graf Sikel

3.1.1 Pelabelan EMT pada Graf Sikel C_3

Untuk graf sikel C_3



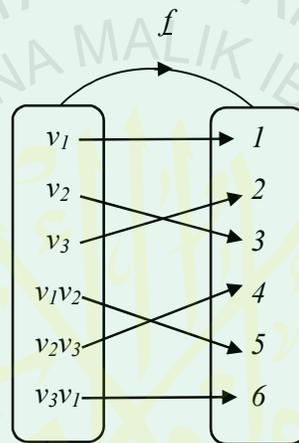
Gambar 3.1. Penotasian pada Graf Sikel C_3



Gambar 3.2. Pelabelan pada Graf Sikel C_3

Pada Gambar 3.2 di atas didapatkan nilai konstanta ajaibnya, yaitu untuk G_1 adalah 9 dan untuk G_2 adalah 12. Dari gambar di atas maka didapatkan nilai konstanta ajaib terkecilnya adalah pada G_1 yaitu 9.

Sehingga jika pelabelan dari graf G_1 adalah fungsi 1-1 dan onto dengan $f: V(C_3) \cup E(C_3)$ ke himpunan bilangan bulat $\{1,2,3,4,5,6\}$, maka dapat dirumuskan sebagai berikut:



Gambar 3.3. Fungsi Bijektif Graf G_1

Maka pada graf G_1 fungsi f dapat dinyatakan bahwa:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= 1 & f(e_1) &= f(v_1v_2) = 5 \\ f(v_2) &= 3 & f(e_2) &= f(v_2v_3) = 4 \\ f(v_3) &= 2 & f(e_3) &= f(v_3v_1) = 6 \end{aligned}$$

Untuk indeks ganjil pada titik dapat ditemukan pola sebagai berikut:

$$f(v_1) = 1 = \frac{1+1}{2}$$

$$f(v_3) = 2 = \frac{3+1}{2}$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa:

$$f(v_x) = \frac{x+1}{2}, x=1,3$$

Untuk indeks genap pada titik belum ditemukan pola karena datanya masih tunggal.

Untuk indeks pertama titik pada sisi dengan indeks tidak sama dengan $n=3$, didapatkan pola sebagai berikut:

$$f(v_1v_2) = 5 = (2 \times 3) - 1$$

$$f(v_2v_3) = 4 = (2 \times 3) - 2$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa:

$$f(v_xv_{x+1}) = (2 \times n) - x, x=1,2$$

Untuk indeks pertama titik pada sisi dengan indeks sama dengan $n=3$ dapat dilihat hubungan

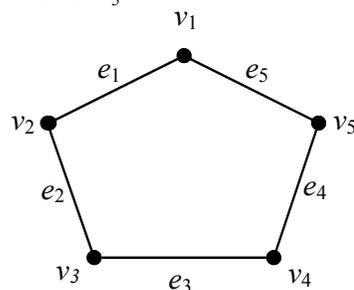
$$f(v_3v_1) = 6 = (2 \times 3)$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa:

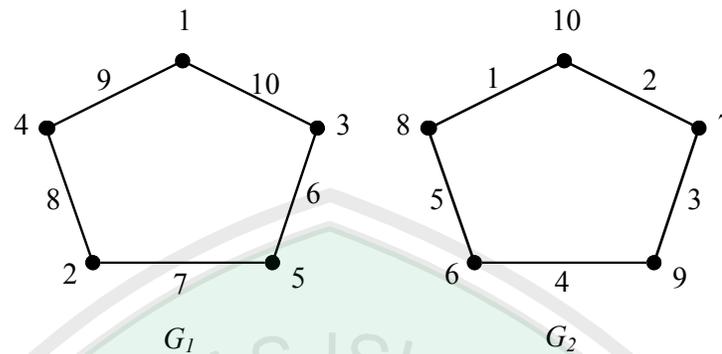
$$f(v_nv_1) = (2 \times n), n=3$$

3.1.2 Pelabelan EMT pada Graf Sikel C_5

Untuk gambar graf sikel C_5



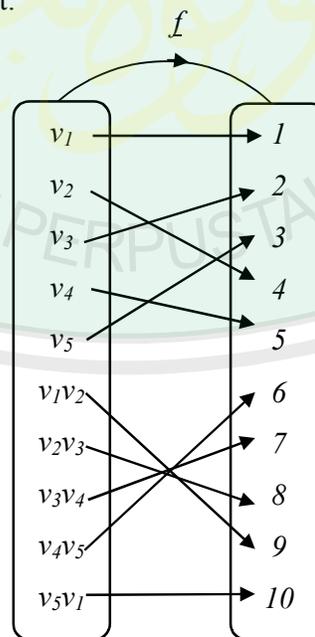
Gambar 3.4. Penotasian pada Graf Sikel C_5



Gambar 3.5. Pelabelan pada Graf Sikel C_5

Pada Gambar 3.5 di atas didapatkan nilai konstanta ajaibnya, yaitu untuk G_1 adalah 14 dan untuk G_2 adalah 19. Dari gambar di atas maka didapatkan nilai konstanta ajaib terkecilnya adalah pada G_1 yaitu 14.

Sehingga jika pelabelan dari graf G_1 adalah fungsi 1-1 dan onto dengan $f: V(C_5) \cup E(C_5)$ ke himpunan bilangan bulat $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, maka dapat dirumuskan sebagai berikut:



Gambar 3.6. Fungsi Bijektif Graf G_1

Maka pada graf G_1 fungsi f dapat dinyatakan bahwa:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= 1 & f(e_1) &= f(v_1v_2) = 9 \\ f(v_2) &= 4 & f(e_2) &= f(v_2v_3) = 8 \\ f(v_3) &= 2 & f(e_3) &= f(v_3v_4) = 7 \\ f(v_4) &= 5 & f(e_4) &= f(v_4v_5) = 6 \\ f(v_5) &= 3 & f(e_5) &= f(v_5v_1) = 10 \end{aligned}$$

Untuk indeks ganjil pada titik dapat ditemukan pola sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= 1 = \frac{1+1}{2} \\ f(v_3) &= 2 = \frac{3+1}{2} \\ f(v_5) &= 3 = \frac{5+1}{2} \end{aligned}$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa:

$$f(v_x) = \frac{x+1}{2}, \quad x = 1, 3, 5$$

Untuk indeks genap pada titik dapat ditemukan pola sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(v_2) &= 4 = 5 - \frac{5-3}{2} + \frac{2-2}{2} \\ f(v_4) &= 5 = 5 - \frac{5-3}{2} + \frac{4-2}{2} \end{aligned}$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa:

$$f(v_x) = n - \frac{n-3}{2} + \frac{x-2}{2}, \quad x = 2, 4 \text{ dan } n = 5$$

Untuk indeks pertama titik pada sisi dengan indeks tidak sama dengan $n = 5$, didapatkan pola sebagai berikut:

$$f(v_1v_2) = 9 = (2 \times 5) - 1$$

$$f(v_2v_3) = 8 = (2 \times 5) - 2$$

$$f(v_3v_4) = 7 = (2 \times 5) - 3$$

$$f(v_4v_5) = 6 = (2 \times 5) - 4$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa:

$$f(v_xv_{x+1}) = (2 \times n) - x, \quad x = 1, 2, 3, 4$$

Untuk indeks pertama titik pada sisi dengan indeks sama dengan $n = 5$ dapat dilihat hubungan

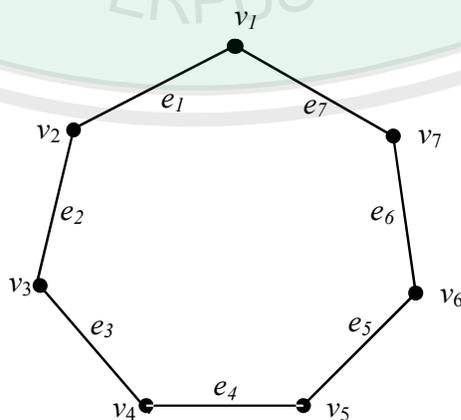
$$f(v_5v_1) = 10 = (2 \times 5)$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa:

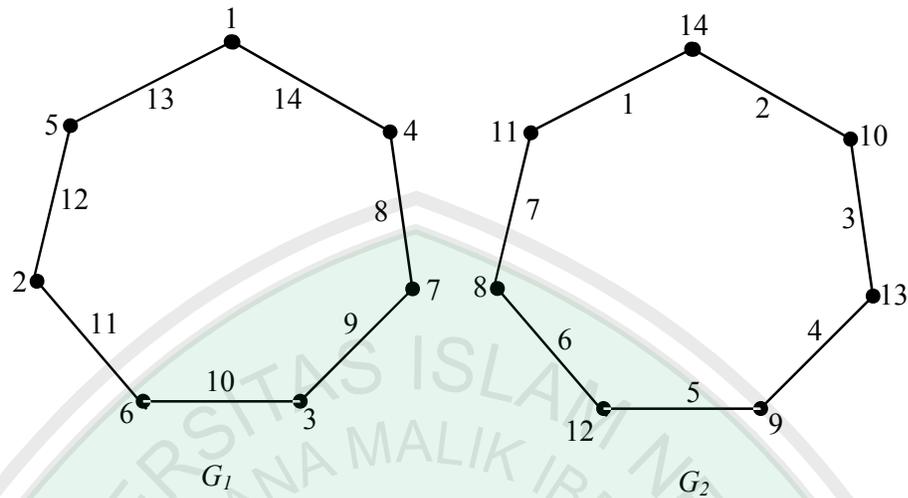
$$f(v_nv_1) = (2 \times n), \quad n = 5$$

3.1.3 Pelabelan EMT pada Graf Sikel C_7

Untuk gambar graf sikel C_7



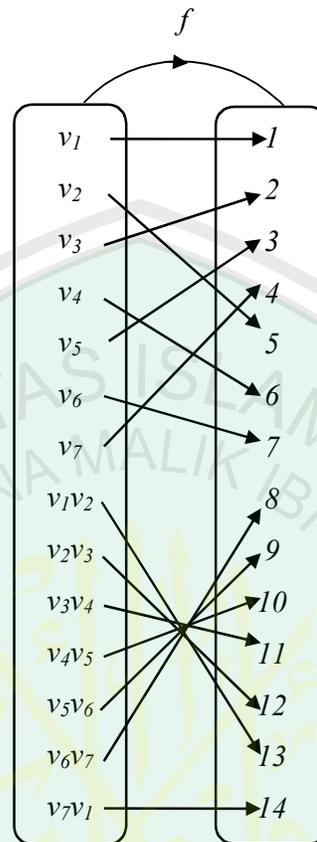
Gambar 3.7. Penotasian pada Graf Sikel C_7



Gambar 3.8. Pelabelan pada Graf Sikel C_7

Pada Gambar 3.8 di atas didapatkan nilai konstanta ajaibnya, yaitu untuk G_1 adalah 19 dan untuk G_2 adalah 26. Dari gambar di atas maka didapatkan nilai konstanta ajaib terkecilnya adalah pada G_1 yaitu 19.

Sehingga jika pelabelan dari graf G_1 adalah fungsi 1-1 dan onto dengan $f: V(C_7) \cup E(C_7)$ ke himpunan bilangan bulat $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14\}$, maka dapat dirumuskan sebagai berikut:



Gambar 3.9. Fungsi Bijektif Graf G_1

Maka pada graf G_1 fungsi f dapat dinyatakan bahwa:

$$f(v_1) = 1$$

$$f(e_1) = f(v_1v_2) = 13$$

$$f(v_2) = 5$$

$$f(e_2) = f(v_2v_3) = 12$$

$$f(v_3) = 2$$

$$f(e_3) = f(v_3v_4) = 11$$

$$f(v_4) = 6$$

$$f(e_4) = f(v_4v_5) = 10$$

$$f(v_5) = 3$$

$$f(e_5) = f(v_5v_6) = 9$$

$$f(v_6) = 7$$

$$f(e_6) = f(v_6v_7) = 8$$

$$f(v_7) = 4$$

$$f(e_7) = f(v_7v_1) = 14$$

Untuk indeks ganjil pada titik dapat ditemukan pola sebagai berikut:

$$f(v_1) = 1 = \frac{1+1}{2}$$

$$f(v_3) = 2 = \frac{3+1}{2}$$

$$f(v_5) = 3 = \frac{5+1}{2}$$

$$f(v_7) = 4 = \frac{7+1}{2}$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa:

$$f(v_x) = \frac{x+1}{2}, \quad x = 1, 3, 5, 7$$

Untuk indeks genap pada titik dapat ditemukan pola sebagai berikut:

$$f(v_2) = 5 = 7 - \frac{7-3}{2} + \frac{2-2}{2}$$

$$f(v_4) = 6 = 7 - \frac{7-3}{2} + \frac{4-2}{2}$$

$$f(v_6) = 7 = 7 - \frac{7-3}{2} + \frac{6-2}{2}$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa:

$$f(v_x) = n - \frac{n-3}{2} + \frac{x-2}{2}, \quad x = 2, 4, 6 \text{ dan } n = 7$$

Untuk indeks pertama titik pada sisi dengan indeks tidak sama dengan

$n = 7$, didapatkan pola sebagai berikut:

$$f(v_1 v_2) = 13 = (2 \times 7) - 1$$

$$f(v_2 v_3) = 12 = (2 \times 7) - 2$$

$$f(v_3v_4) = 11 = (2 \times 7) - 3$$

$$f(v_4v_5) = 10 = (2 \times 7) - 4$$

$$f(v_5v_6) = 9 = (2 \times 7) - 5$$

$$f(v_6v_7) = 8 = (2 \times 7) - 6$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa:

$$f(v_xv_{x+1}) = (2 \times n) - x, \quad x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Untuk indeks pertama titik pada sisi dengan indeks sama dengan $n = 7$ dapat dilihat hubungan

$$f(v_7v_1) = 14 = (2 \times 7)$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa:

$$f(v_nv_1) = (2 \times n), \quad n = 5$$

Dari uraian contoh di atas, maka diperoleh teorema sebagai berikut:

Teorema I:

Setiap graf siklus C_n dengan n bilangan asli ganjil dan $n \geq 3$ adalah total

sisi ajaib dengan konstanta ajaib terkecil $k = \frac{5n+3}{2}$.

Bukti:

1. Akan dibuktikan graf siklus C_n dengan n bilangan asli ganjil dan $n \geq 3$ adalah total sisi ajaib.

Misal:

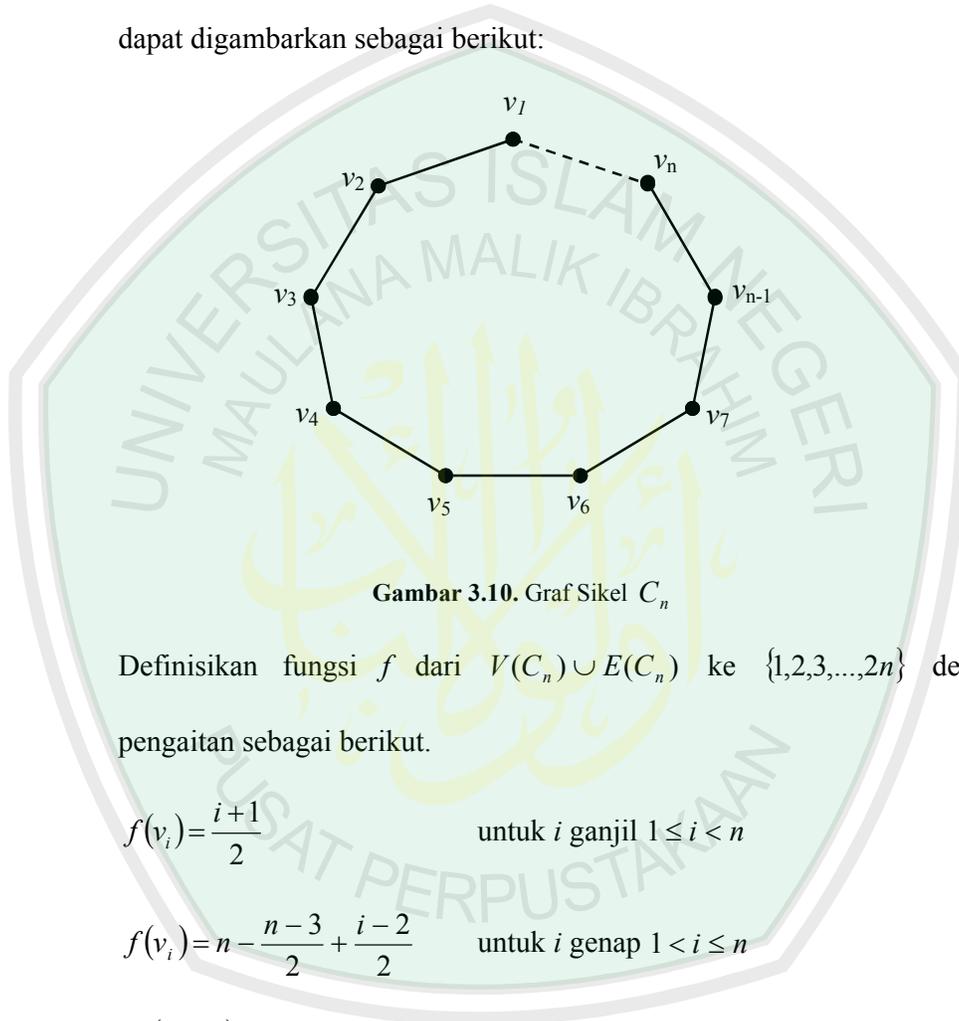
Graf C_n mempunyai order $p = n$, ukuran $q = n$

Karena $p = q$, maka $p + q = 2n$

dengan,

$$V(C_n) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\} \text{ dan } E(C_n) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\},$$

dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.10. Graf Sikel C_n

Definisikan fungsi f dari $V(C_n) \cup E(C_n)$ ke $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ dengan pengaitan sebagai berikut.

$$f(v_i) = \frac{i+1}{2} \quad \text{untuk } i \text{ ganjil } 1 \leq i < n$$

$$f(v_i) = n - \frac{n-3}{2} + \frac{i-2}{2} \quad \text{untuk } i \text{ genap } 1 < i \leq n$$

$$f(v_iv_{i+1}) = 2n - i \quad \text{untuk } i = 1, 2, 3, \dots, n-1$$

$$f(v_nv_1) = 2n$$

Maka akan dibuktikan:

a. Untuk sisi $(v_i v_{i+1})$ di C_n dengan $1 \leq i < n$ dan i ganjil diperoleh:

$$\begin{aligned} f(v_i) + f(v_i v_{i+1}) + f(v_{i+1}) &= \left(\frac{i+1}{2} \right) + (2n-i) + \left[n - \frac{n-3}{2} + \frac{(i+1)-2}{2} \right] \\ &= \frac{5n+3}{2} \end{aligned}$$

b. Untuk sisi $(v_i v_{i+1})$ di C_n dengan $1 < i \leq n-1$ dan i genap diperoleh:

$$\begin{aligned} f(v_i) + f(v_i v_{i+1}) + f(v_{i+1}) &= \left[n - \frac{n-3}{2} + \frac{i-2}{2} \right] + (2n-i) + \left(\frac{(i+1)+1}{2} \right) \\ &= \frac{5n+3}{2} \end{aligned}$$

c. Untuk sisi $(v_n v_1)$ di C_n diperoleh:

$$\begin{aligned} f(v_n) + f(v_n v_1) + f(v_1) &= \frac{n+1}{2} + (2n) + 1 \\ &= \frac{5n+3}{2} \end{aligned}$$

Jadi, terbukti Setiap graf siklus C_n dengan n bilangan asli ganjil dan $n \geq 3$ adalah total sisi ajaib

2. Akan dibuktikan bahwa $k = \frac{5n+3}{2}$ adalah konstanta ajaib terkecil.

untuk C_3 diketahui $k = 9$

untuk C_5 diketahui $k = 14$

untuk C_7 diketahui $k = 19$

dari hasil tersebut diperoleh tabel sebagai berikut:

| n | k |
|-----|-----|
| 3 | 9 |
| 5 | 14 |
| 7 | 19 |

Tabel 3.1. Banyak Titik dan Konstanta Ajaib Terkecil pada Graf Sikel

Sehingga dari tabel di atas dapat diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$\frac{x_0 - x}{x_1 - x} = \frac{y_0 - y}{y_1 - y}$$

dengan:

$$\begin{array}{ll} x_0 = n & y_0 = k \\ x = 3 & y = 9 \\ x_1 = 5 & y_1 = 14 \end{array}$$

Maka:

$$\frac{x_0 - x}{x_1 - x} = \frac{y_0 - y}{y_1 - y}$$

$$\frac{n-3}{5-3} = \frac{k-9}{14-9}$$

$$\frac{n-3}{2} = \frac{k-9}{5}$$

$$5n - 15 = 2k - 18$$

$$k = \frac{5n - 15 + 18}{2}$$

$$k = \frac{5n + 3}{2}$$

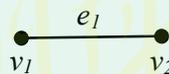
Jadi, terbukti $k = \frac{5n+3}{2}$ adalah konstanta ajaib terkecil.

Dengan demikian, Setiap graf sikel C_n dengan n bilangan asli ganjil dan $n \geq 3$ adalah **total sisi ajaib dengan konstanta ajaib terkecil** $k = \frac{5n+3}{2}$.

3.2 Menentukan Pelabelan Total Sisi Ajaib (EMT) dan Konstanta Ajaib Terkecil pada Graf Lintasan dengan Banyak Titik Genap

3.2.1 Pelabelan EMT pada Graf Lintasan P_2

Untuk gambar graf lintasan P_2



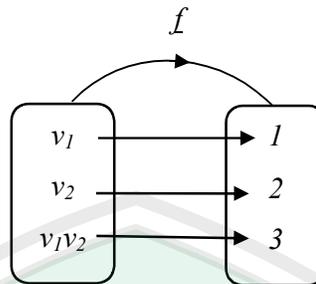
Gambar 3.11. Penotasian pada Graf Lintasan P_2



Gambar 3.12. Pelabelan pada Graf Lintasan P_2

Pada Gambar 3.12 di atas didapatkan nilai konstanta ajaibnya untuk G_1 dan G_2 adalah sama, yaitu 6. Dari gambar di atas maka didapatkan konstanta ajaib terkecilnya juga 6.

Sehingga jika pelabelan dari graf G_1 adalah fungsi 1-1 dan onto dengan $f : V(P_2) \cup E(P_2)$ ke himpunan bilangan bulat $\{1,2,3\}$, maka dapat dirumuskan sebagai berikut:



Gambar 3.13. Fungsi Bijektif Graf G_1

Maka pada graf G_1 fungsi f dapat dinyatakan bahwa:

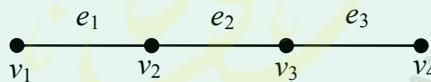
$$f(v_1) = 1 \qquad f(e_1) = f(v_1v_2) = 3$$

$$f(v_2) = 2$$

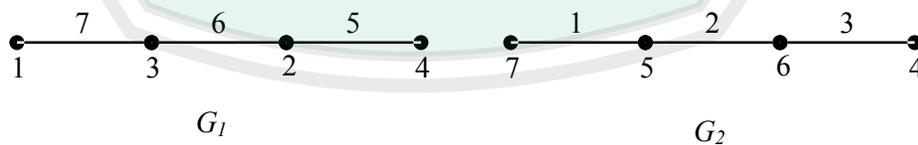
Berdasarkan hasil tersebut di atas, maka belum didapatkan pola karena masing-masing data hanya satu.

3.2.2 Pelabelan EMT pada Graf Lintasan P_4

Untuk gambar graf lintasan P_4



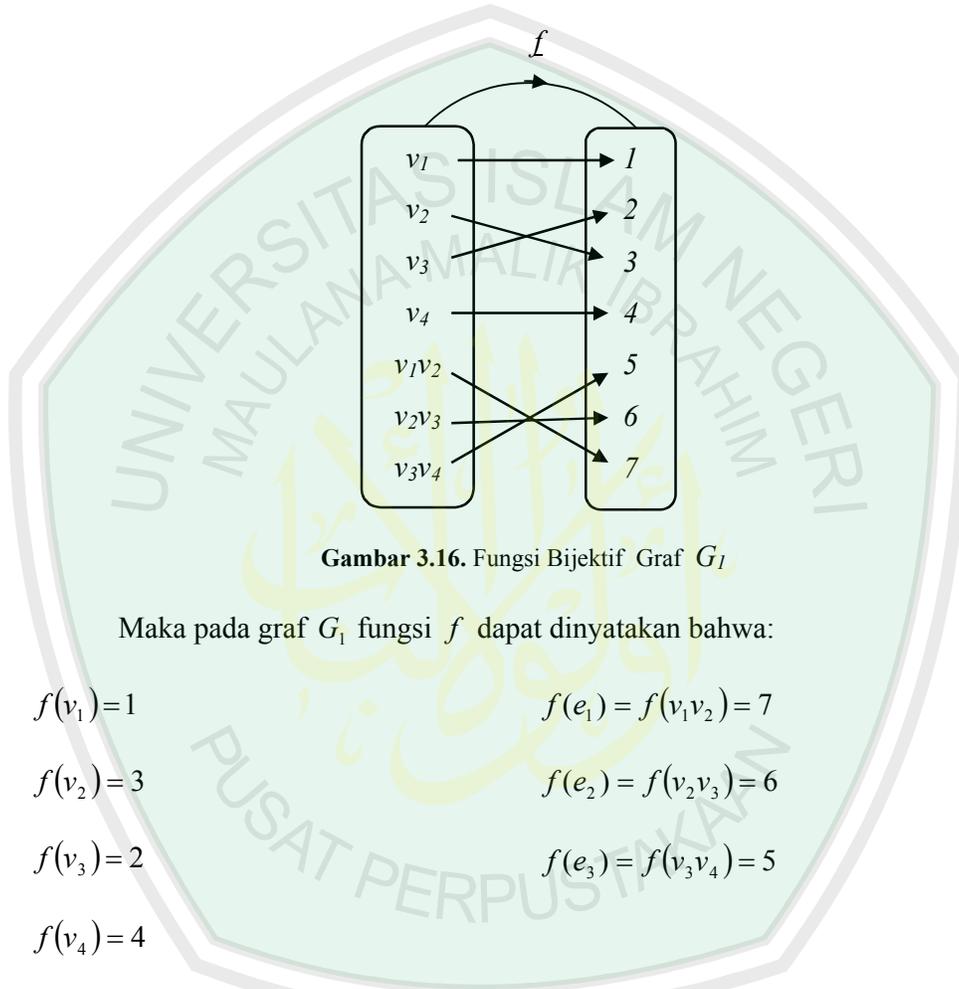
Gambar 3.14. Penotasian pada Graf Lintasan P_4



Gambar 3.15. Pelabelan pada Graf lintasan P_4

Pada Gambar 3.15 di atas didapatkan nilai konstanta ajaibnya, yaitu untuk G_1 adalah 11 dan untuk G_2 adalah 13. Dari gambar di atas maka didapatkan nilai konstanta ajaib terkecilnya adalah pada G_1 yaitu 11.

Sehingga jika pelabelan dari graf G_1 adalah fungsi 1-1 dan onto dengan $f: V(P_4) \cup E(P_4)$ ke himpunan bilangan bulat $\{1,2,3,4,5,6,7\}$, maka dapat dirumuskan sebagai berikut:



Gambar 3.16. Fungsi Bijektif Graf G_1

Maka pada graf G_1 fungsi f dapat dinyatakan bahwa:

$$f(v_1) = 1$$

$$f(e_1) = f(v_1v_2) = 7$$

$$f(v_2) = 3$$

$$f(e_2) = f(v_2v_3) = 6$$

$$f(v_3) = 2$$

$$f(e_3) = f(v_3v_4) = 5$$

$$f(v_4) = 4$$

Untuk indeks ganjil pada titik dapat ditemukan pola sebagai berikut:

$$f(v_1) = 1 = \frac{1+1}{2}$$

$$f(v_3) = 2 = \frac{3+1}{2}$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa:

$$f(v_x) = \frac{x+1}{2}, \quad x = 1,3$$

Untuk indeks genap pada titik dapat ditemukan pola sebagai berikut:

$$f(v_2) = 3 = \frac{4+2}{2}$$

$$f(v_4) = 4 = \frac{4+4}{2}$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa:

$$f(v_x) = \frac{n+x}{2}, \quad x = 2,4 \text{ dan } n = 4$$

Untuk indeks sisi didapatkan pola sebagai berikut:

$$f(v_1v_2) = 7 = (2 \times 4) - 1$$

$$f(v_2v_3) = 6 = (2 \times 4) - 2$$

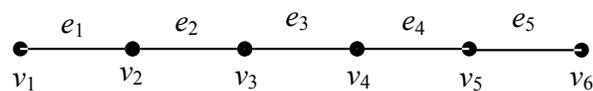
$$f(v_3v_4) = 5 = (2 \times 4) - 3$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa indeks sisi diperoleh pola sebagai berikut:

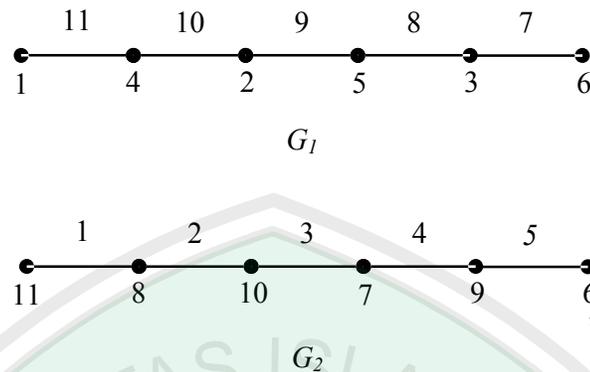
$$f(v_x v_{x+1}) = 2n - x, \quad x = 1,2,3 \text{ dan } n = 4$$

3.2.3 Pelabelan EMT pada Graf Lintasan P_6

Untuk gambar graf path P_6



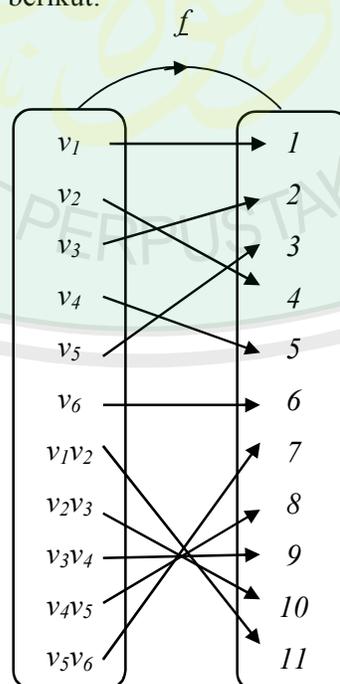
Gambar 3.17. Penotasian pada Graf Lintasan P_6



Gambar 3.18. Pelabelan pada Graf Lintasan P_6

Pada Gambar 3.18 di atas didapatkan nilai konstanta ajaibnya, yaitu untuk G_1 adalah 16 dan untuk G_2 adalah 20. Dari gambar di atas maka didapatkan nilai konstanta ajaib terkecilnya adalah pada G_1 yaitu 16.

Sehingga jika pelabelan dari graf G_1 adalah fungsi 1-1 dan onto dengan $f: V(P_6) \cup E(P_6)$ ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$, maka dapat dirumuskan sebagai berikut:



Gambar 3.19 Fungsi Bijektif Graf G_1

Maka pada graf G_1 fungsi f dapat dinyatakan bahwa:

$$f(v_1) = 1$$

$$f(e_1) = f(v_1v_2) = 11$$

$$f(v_2) = 4$$

$$f(e_2) = f(v_2v_3) = 10$$

$$f(v_3) = 2$$

$$f(e_3) = f(v_3v_4) = 9$$

$$f(v_4) = 5$$

$$f(e_4) = f(v_4v_5) = 8$$

$$f(v_5) = 3$$

$$f(e_5) = f(v_5v_6) = 7$$

$$f(v_6) = 6$$

Untuk indeks ganjil pada titik dapat ditemukan pola sebagai berikut:

$$f(v_1) = 1 = \frac{1+1}{2}$$

$$f(v_3) = 2 = \frac{3+1}{2}$$

$$f(v_5) = 3 = \frac{5+1}{2}$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa:

$$f(v_x) = \frac{x+1}{2}, \quad x = 1, 2, 3$$

Untuk indeks genap pada titik dapat ditemukan pola sebagai berikut:

$$f(v_2) = 4 = \frac{6+2}{2}$$

$$f(v_4) = 5 = \frac{6+4}{2}$$

$$f(v_6) = 6 = \frac{6+6}{2}$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa:

$$f(v_x) = \frac{n+x}{2}, \quad x = 2,4,6 \text{ dan } n = 6$$

Untuk indeks sisi didapatkan pola sebagai berikut:

$$f(v_1v_2) = 11 = (2 \times 6) - 1$$

$$f(v_2v_3) = 10 = (2 \times 6) - 2$$

$$f(v_3v_4) = 9 = (2 \times 6) - 3$$

$$f(v_4v_5) = 8 = (2 \times 6) - 4$$

$$f(v_5v_6) = 7 = (2 \times 6) - 5$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa indeks sisi diperoleh pola sebagai berikut:

$$f(v_x v_{x+1}) = 2n - x, \quad x = 1,2,3,4,5 \text{ dan } n = 6$$

Dari uraian contoh di atas, maka diperoleh teorema sebagai berikut:

Teorema II:

Setiap graf lintasan P_n dengan n bilangan asli genap adalah total sisi ajaib

dengan konstanta ajaib terkecil $k = \frac{5n+2}{2}$.

Bukti:

1. Akan dibuktikan graf lintasan P_n dengan n bilangan asli genap adalah total sisi ajaib.

Misal:

Graf P_n mempunyai order $p = n$, ukuran $q = n - 1$

Maka $p + q = n + (n - 1) = 2n - 1$

dengan,

$$V(P_n) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\} \text{ dan } E(P_n) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \dots, v_{n-1}v_n\}$$

Dapat di gambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.20 Graf Lintasan P_n

Definisikan fungsi f dari $V(P_n) \cup E(P_n)$ ke $\{1, 2, 3, \dots, 2n-1\}$ dengan pengaitan sebagai berikut.

$$f(v_i) = \frac{i+1}{2} \quad \text{untuk } i \text{ ganjil } 1 \leq i \leq n$$

$$f(v_i) = \frac{n+i}{2} \quad \text{untuk } i \text{ genap } 1 < i \leq n$$

$$f(v_i v_{i+1}) = 2n - i \quad \text{untuk } i = 1, 2, 3, \dots, n-1$$

Maka,

a. Untuk sisi $(v_i v_{i+1})$ di P_n dengan $1 \leq i < n$ dan i ganjil diperoleh:

$$\begin{aligned} f(v_i) + f(v_i v_{i+1}) + f(v_{i+1}) &= \left(\frac{i+1}{2}\right) + (2n-i) + \left(\frac{n+(i+1)}{2}\right) \\ &= 2n + \frac{n+3}{2} \\ &= \frac{5n+2}{2} \end{aligned}$$

b. Untuk sisi $(v_i v_{i+1})$ di P_n dengan $1 < i \leq n$ dan i genap diperoleh:

$$\begin{aligned} f(v_i) + f(v_i v_{i+1}) + f(v_{i+1}) &= \left(\frac{n+i}{2}\right) + (2n-i) + \left(\frac{(i+1)+1}{2}\right) \\ &= 2n + \frac{n+2}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{5n+2}{2}$$

Jadi terbukti setiap graf lintasan P_n dengan n bilangan asli genap adalah total sisi ajaib

2. Akan dibuktikan bahwa $k = \frac{5n+2}{2}$ adalah konstanta ajaib terkecil.

untuk P_2 diketahui $k = 6$

untuk P_4 diketahui $k = 11$

untuk P_6 diketahui $k = 16$

dari hasil tersebut diperoleh tabel berikut:

| n | k |
|-----|-----|
| 2 | 6 |
| 4 | 11 |
| 6 | 16 |

Tabel 3.2. Banyak Titik dan Konstanta Ajaib Terkecil pada Graf Lintasan

Sehingga dari tabel di atas dapat diperoleh hubungan sebagai

berikut:

$$\frac{x_0 - x}{x_1 - x} = \frac{y_0 - y}{y_1 - y}$$

dengan,

$$\begin{array}{ll} x_0 = n & y_0 = k \\ x = 2 & y = 6 \\ x_1 = 4 & y_1 = 11 \end{array}$$

Maka:

$$\frac{x_0 - x}{x_1 - x} = \frac{y_0 - y}{y_1 - y}$$

$$\frac{n-2}{4-2} = \frac{k-6}{11-6}$$

$$\frac{n-2}{2} = \frac{k-6}{5}$$

$$5n-10 = 2k-12$$

$$k = \frac{5n-10+12}{2}$$

$$k = \frac{5n+2}{2}$$

Jadi, terbukti $k = \frac{5n+2}{2}$ adalah konstanta ajaib terkecil.

Dengan demikian, graf P_n dengan n bilangan asli genap adalah **total sisi**

ajaib dengan konstanta ajaib terkecil $k = \frac{5n+2}{2}$.

3.3 Menentukan Pelabelan Total Sisi Ajaib (EMT) dan Konstanta Ajaib Terkecil pada Graf Lintasan dengan Banyak Titik Ganjil

3.3.1 Pelabelan EMT pada Graf Lintasan P_3

Untuk gambar graf lintasan P_3



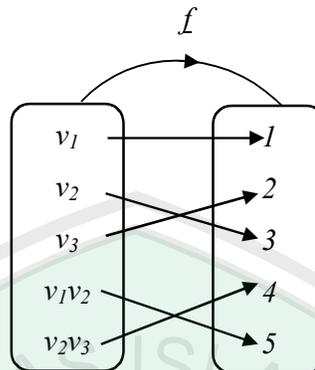
Gambar 3.21. Penotasian pada Graf lintasan P_3



Gambar 3.22. Pelabelan pada Graf Lintasan P_3

Pada Gambar 3.22 di atas didapatkan nilai konstanta ajaibnya, yaitu untuk G_1 adalah 9 dan untuk G_2 adalah 10. Dari gambar di atas maka didapatkan nilai konstanta ajaib terkecilnya adalah pada G_1 yaitu 9.

Sehingga jika pelabelan dari graf G_1 adalah fungsi 1-1 dan onto dengan $f: V(P_3) \cup E(P_3)$ ke himpunan bilangan bulat $\{1,2,3,4,5\}$, maka dapat dirumuskan sebagai berikut:



Gambar 3.23. Fungsi Bijektif Graf G_1

Maka pada graf G_1 fungsi f dapat dinyatakan bahwa:

$$f(v_1) = 1 \qquad f(e_1) = f(v_1v_2) = 5$$

$$f(v_2) = 3 \qquad f(e_2) = f(v_2v_3) = 4$$

$$f(v_3) = 2$$

Untuk indeks ganjil pada titik dapat ditemukan pola sebagai berikut:

$$f(v_1) = 1 = \frac{1+1}{2}$$

$$f(v_3) = 2 = \frac{3+1}{2}$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa:

$$f(v_x) = \frac{x+1}{2}, \quad x = 1, 3$$

Sedangkan untuk indeks genap belum dapat disimpulkan karena datanya hanya ada satu.

$$f(v_2) = 3$$

Untuk indeks sisi didapatkan pola sebagai berikut:

$$f(v_1v_2) = 5 = (2 \times 3) - 1$$

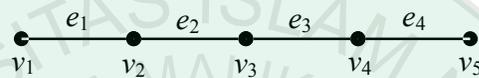
$$f(v_2v_3) = 4 = (2 \times 3) - 2$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa indeks sisi diperoleh pola sebagai berikut:

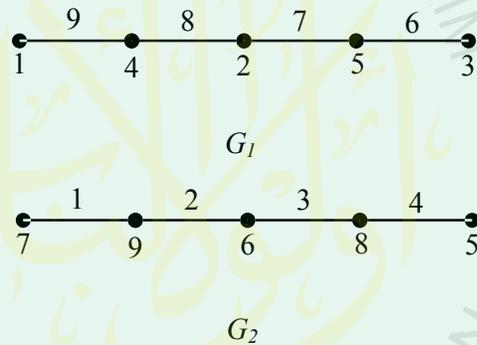
$$f(v_xv_{x+1}) = 2n - x, \quad x = 1, 2 \text{ dan } n = 3$$

3.3.2 Pelabelan EMT pada Graf Lintasan P_5

Untuk gambar graf Lintasan P_5



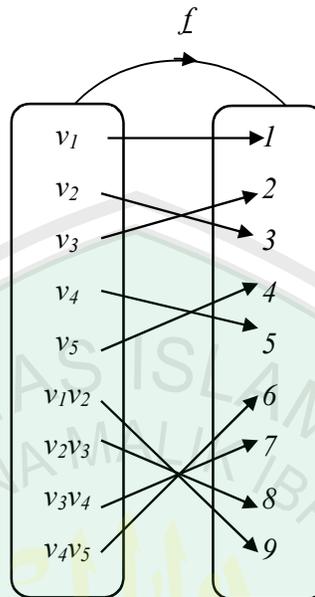
Gambar 3.24. Penotasian pada Graf Lintasan P_5



Gambar 3.25. Pelabelan pada Graf Lintasan P_5

Pada Gambar 3.25 di atas didapatkan nilai konstanta ajaibnya, yaitu untuk G_1 adalah 14 dan untuk G_2 adalah 17. Dari gambar di atas maka didapatkan nilai konstanta ajaib terkecilnya adalah pada G_1 yaitu 14.

Sehingga jika pelabelan dari graf G_1 adalah fungsi 1-1 dan onto dengan $f: V(P_5) \cup E(P_5)$ ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, maka dapat dirumuskan sebagai berikut:



Gambar 3.26. Fungsi Bijektif Graf G_1

Maka pada graf G_1 fungsi f dapat dinyatakan bahwa:

$$f(v_1) = 1$$

$$f(e_1) = f(v_1v_2) = 9$$

$$f(v_2) = 4$$

$$f(e_2) = f(v_2v_3) = 8$$

$$f(v_3) = 2$$

$$f(e_3) = f(v_3v_4) = 7$$

$$f(v_4) = 5$$

$$f(e_4) = f(v_4v_5) = 6$$

$$f(v_5) = 3$$

Untuk indeks ganjil pada titik dapat ditemukan pola sebagai berikut:

$$f(v_1) = 1 = \frac{1+1}{2}$$

$$f(v_3) = 2 = \frac{3+1}{2}$$

$$f(v_5) = 3 = \frac{5+1}{2}$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa:

$$f(v_x) = \frac{x+1}{2}, \quad x = 1,3,5$$

Untuk indeks genap pada titik dapat ditemukan pola sebagai berikut:

$$f(v_2) = 4 = 5 - \frac{5 - (2+1)}{2}$$

$$f(v_4) = 5 = 5 - \frac{5 - (4+1)}{2}$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa:

$$f(v_x) = n - \frac{n - (x+1)}{2}, \quad x = 2,4 \text{ dan } n = 5$$

Untuk indeks sisi didapatkan pola sebagai berikut:

$$f(v_1v_2) = 9 = (2 \times 5) - 1$$

$$f(v_2v_3) = 8 = (2 \times 5) - 2$$

$$f(v_3v_4) = 7 = (2 \times 5) - 3$$

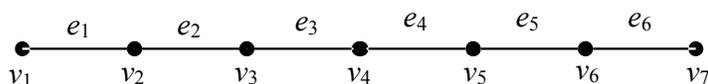
$$f(v_4v_5) = 6 = (2 \times 5) - 4$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa indeks sisi diperoleh pola sebagai berikut:

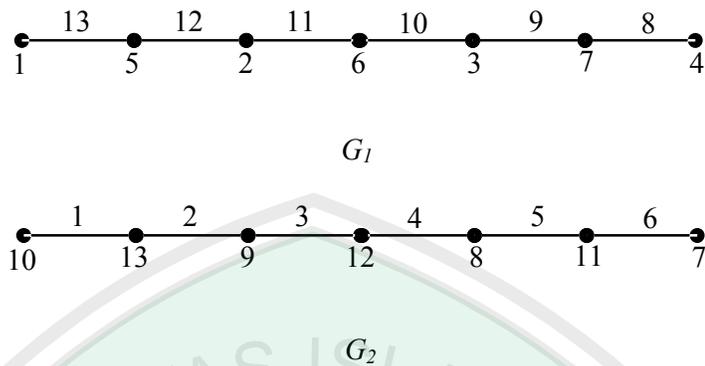
$$f(v_xv_{x+1}) = 2n - x, \quad x = 1,2,3,4 \text{ dan } n = 5$$

3.3.3 Pelabelan Total Sisi Ajaib pada Graf Lintasan P_7

Untuk gambar graf path P_7



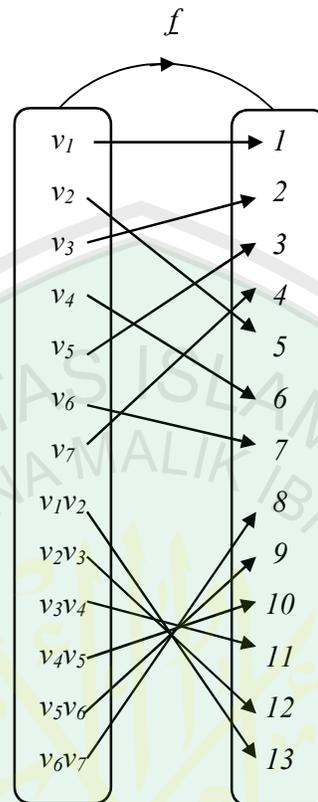
Gambar 3.27. Penotasian pada Graf Path P_7



Gambar 3.28. Pelabelan pada Graf Lintasan P_7

Pada Gambar 3.28 di atas didapatkan nilai konstanta ajaibnya, yaitu untuk G_1 adalah 19 dan untuk G_2 adalah 24. Dari gambar di atas maka didapatkan nilai konstanta ajaib terkecilnya adalah pada G_1 yaitu 19.

Sehingga jika pelabelan dari graf G_1 adalah fungsi 1-1 dan onto dengan $f: V(P_7) \cup E(P_7)$ ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$, maka dapat dirumuskan sebagai berikut:



Gambar 3.29. Fungsi Bijektif Graf G_1

Maka pada graf G_1 fungsi f dapat dinyatakan bahwa:

$$f(v_1) = 1$$

$$f(e_1) = f(v_1v_2) = 13$$

$$f(v_2) = 5$$

$$f(e_2) = f(v_2v_3) = 12$$

$$f(v_3) = 2$$

$$f(e_3) = f(v_3v_4) = 11$$

$$f(v_4) = 6$$

$$f(e_4) = f(v_4v_5) = 10$$

$$f(v_5) = 3$$

$$f(e_5) = f(v_5v_6) = 9$$

$$f(v_6) = 7$$

$$f(e_6) = f(v_6v_7) = 8$$

$$f(v_7) = 4$$

Untuk indeks ganjil pada titik dapat ditemukan pola sebagai berikut:

$$f(v_1) = 1 = \frac{1+1}{2}$$

$$f(v_3) = 2 = \frac{3+1}{2}$$

$$f(v_5) = 3 = \frac{5+1}{2}$$

$$f(v_7) = 4 = \frac{7+1}{2}$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa:

$$f(v_x) = \frac{x+1}{2}, \quad x = 1,3,5,7$$

Untuk indeks genap pada titik dapat ditemukan pola sebagai berikut:

$$f(v_2) = 5 = 7 - \frac{7 - (2+1)}{2}$$

$$f(v_4) = 6 = 7 - \frac{7 - (4+1)}{2}$$

$$f(v_6) = 7 = 7 - \frac{7 - (6+1)}{2}$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa:

$$f(v_x) = n - \frac{n - (x+1)}{2}, \quad x = 2,4,6 \text{ dan } n = 7$$

Untuk indeks sisi didapatkan pola sebagai berikut:

$$f(v_1v_2) = 13 = (2 \times 7) - 1$$

$$f(v_2v_3) = 12 = (2 \times 7) - 2$$

$$f(v_3v_4) = 11 = (2 \times 7) - 3$$

$$f(v_4v_5) = 10 = (2 \times 7) - 4$$

$$f(v_5v_6) = 9 = (2 \times 7) - 5$$

$$f(v_6v_7) = 8 = (2 \times 7) - 6$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa indeks sisi diperoleh pola sebagai berikut:

$$f(v_xv_{x+1}) = 2n - x, x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \text{ dan } n = 7$$

Dari uraian contoh di atas, maka diperoleh teorema sebagai berikut:

Teorema III:

Setiap graf path P_n dengan n bilangan asli ganjil adalah total sisi ajaib

dengan konstanta ajaib terkecil $k = \frac{5n+3}{2}$.

Bukti:

1. Akan dibuktikan graf lintasan P_n dengan n bilangan asli ganjil adalah total sisi ajaib.

Misal:

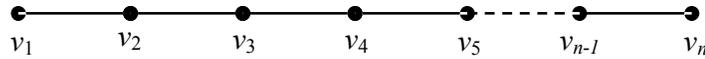
Graf P_n mempunyai order $p = n$, ukuran $q = n - 1$

Maka $p + q = n + (n - 1) = 2n - 1$

dengan,

$V(P_n) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ dan $E(P_n) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \dots, v_{n-1}v_n\}$

Dapat di gambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.30 Graf Lintasan P_n

Definisikan fungsi f dari $V(P_n) \cup E(P_n)$ ke $\{1, 2, 3, \dots, 2n-1\}$ dengan pengaitan sebagai berikut.

$$f(v_i) = \frac{i+1}{2} \quad \text{untuk } i \text{ ganjil } 1 \leq i \leq n$$

$$f(v_i) = n - \frac{n-(i+1)}{2} \quad \text{untuk } i \text{ genap } 1 < i \leq n$$

$$f(v_i v_{i+1}) = 2n - i \quad \text{untuk } i = 1, 2, 3, \dots, n-1$$

Maka,

a. Untuk sisi $(v_i v_{i+1})$ di P_n dengan $1 \leq i \leq n$ dan i ganjil diperoleh:

$$\begin{aligned} f(v_i) + f(v_i v_{i+1}) + f(v_{i+1}) &= \left(\frac{i+1}{2} \right) + (2n-i) + \left(n - \frac{n - [(i+1)+1]}{2} \right) \\ &= 3n - \frac{n-3}{2} \\ &= \frac{5n+3}{2} \end{aligned}$$

b. Untuk sisi $(v_i v_{i+1})$ di P_n dengan $1 < i \leq n-1$ dan i genap diperoleh:

$$\begin{aligned} f(v_i) + f(v_i v_{i+1}) + f(v_{i+1}) &= \left(n - \frac{n-(i+1)}{2} \right) + (2n-i) + \left(\frac{(i+1)+1}{2} \right) \\ &= 3n - \frac{n-3}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{5n+3}{2}$$

Jadi terbukti setiap graf lintasan P_n dengan n bilangan asli genap adalah total sisi ajaib

2. Akan dibuktikan bahwa: $k = \frac{5n+3}{2}$ adalah konstanta ajaib terkecil.

untuk P_3 diketahui $k = 9$

untuk P_5 diketahui $k = 14$

untuk P_7 diketahui $k = 19$

dari hasil tersebut diperoleh tabel berikut:

| n | k |
|-----|-----|
| 3 | 9 |
| 5 | 14 |
| 7 | 19 |

Tabel 3.3. Banyak Titik dan Konstanta Ajaib Terkecil pada Graf Lintasan

Sehingga dari pola di atas dapat diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$\frac{x_0 - x}{x_1 - x} = \frac{y_0 - y}{y_1 - y}$$

dengan,

$$\begin{array}{ll} x_0 = n & y_0 = k \\ x = 3 & y = 9 \\ x_1 = 5 & y_1 = 14 \end{array}$$

Maka,

$$\frac{x_0 - x}{x_1 - x} = \frac{y_0 - y}{y_1 - y}$$

$$\frac{n-3}{5-3} = \frac{k-9}{14-9}$$

$$\frac{n-3}{2} = \frac{k-9}{5}$$

$$5n-15 = 2k-18$$

$$k = \frac{5n-15+18}{2}$$

$$k = \frac{5n+3}{2}$$

Jadi, terbukti $k = \frac{5n+3}{2}$ adalah konstanta ajaib terkecil.

Dengan demikian, graf P_n dengan n bilangan asli ganjil adalah **total sisi**

ajaib dengan konstanta ajaib terkecil $k = \frac{5n+3}{2}$.

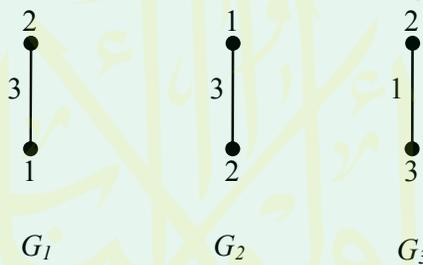
3.4 Menentukan Pelabelan Total Sisi Ajaib (EMT) dan Konstanta Ajaib Terkecil pada Graf Star

3.4.1 Pelabelan EMT pada Graf Star $K_{(1,1)}$

Untuk gambar graf star $K_{(1,1)}$



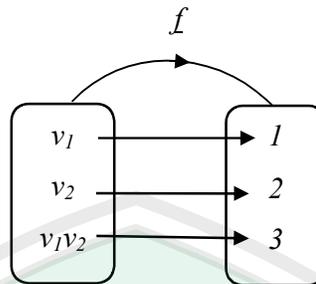
Gambar 3.31. Penotasian pada Graf Star $K_{(1,1)}$



Gambar 3.32. Pelabelan pada Graf Star $K_{(1,1)}$

Pada gambar 3.32 di atas didapatkan nilai konstanta ajaibnya, yaitu G_1 , G_2 dan G_3 adalah sama, yaitu 6. Dari gambar di atas maka didapatkan konstanta ajaib terkecilnya juga 6.

Sehingga jika pelabelan dari graf G_1 adalah fungsi 1-1 dan onto dengan $f: V(K_{(1,1)}) \cup E(K_{(1,1)})$ ke himpunan bilangan bulat $\{1,2,3\}$, maka dapat dirumuskan sebagai berikut:



Gambar 3.33. Fungsi Bijektif Graf G_1

Maka pada graf G_1 fungsi f dapat dinyatakan bahwa:

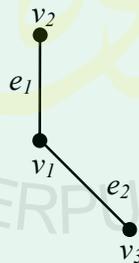
$$f(v_1) = 1 \qquad f(e_1) = f(v_1v_2) = 3$$

$$f(v_2) = 2$$

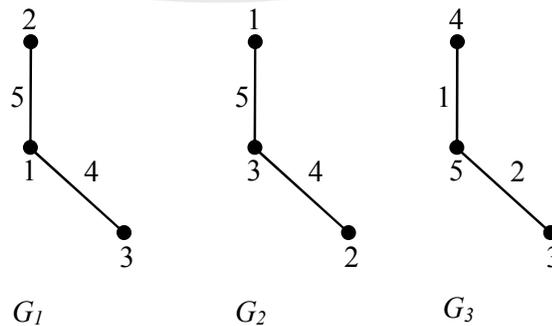
Berdasarkan hasil tersebut di atas, maka belum didapatkan pola karena masing-masing data hanya satu.

3.4.2 Pelabelan EMT pada Graf Star $K_{(1,2)}$

Untuk gambar graf star $K_{(1,2)}$



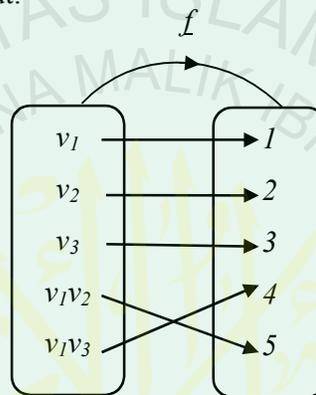
Gambar 3.34. Penotasian pada Graf Star $K_{(1,2)}$



Gambar 3.35. Pelabelan EMT pada Graf Star $K_{(1,2)}$

Pada gambar 3.35 di atas didapatkan nilai konstanta ajaibnya, yaitu untuk G_1 adalah 8, untuk G_2 adalah 9 dan untuk G_3 adalah 10. Dari gambar di atas maka didapatkan nilai konstanta ajaib terkecilnya adalah pada G_1 yaitu 8.

Sehingga jika pelabelan dari graf G_1 adalah fungsi 1-1 dan onto dengan $f: V(K_{(1,2)}) \cup E(K_{(1,2)})$ ke himpunan bilangan bulat $\{1,2,3,4,5\}$, maka dapat dirumuskan sebagai berikut:



Gambar 3.36. Fungsi Bijektif Graf G_1

Maka pada graf G_1 fungsi f dapat dinyatakan bahwa:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= 1 & f(e_1) &= f(v_1v_2) = 5 \\ f(v_2) &= 2 & f(e_2) &= f(v_1v_3) = 4 \\ f(v_3) &= 3 \end{aligned}$$

Berdasarkan hasil tersebut di atas, maka dapat ditemukan pola titik sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= 1 & f(v_1v_2) &= 5 = 2(2+1) - 1 \\ f(v_2) &= 2 & f(v_1v_3) &= 4 = 2(2+1) - 2 \\ f(v_3) &= 3 \end{aligned}$$

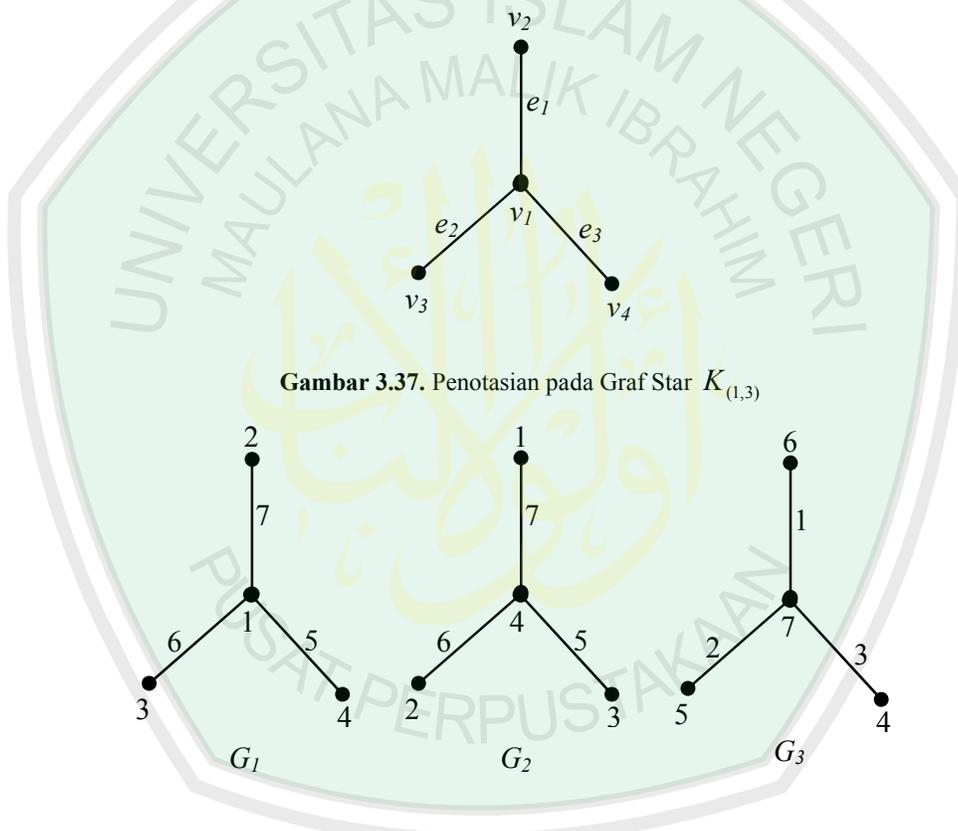
Sehingga, dapat disimpulkan bahwa:

$$f(v_x) = x, \quad x = 1, 2, 3$$

$$f(v_1 v_{x+1}) = 2(n+1) - x, \quad x = 1, 2 \text{ dan } n = 2$$

3.4.3 Pelabelan EMT pada Graf Star $K_{(1,3)}$

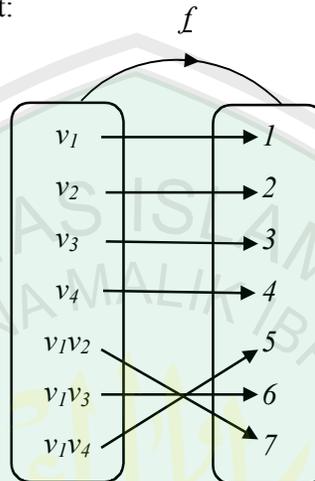
Untuk gambar graf star $K_{(1,3)}$



Gambar 3.38. Pelabelan pada Graf Star $K_{(1,3)}$

Pada gambar 3.38 di atas didapatkan nilai konstanta ajaibnya, yaitu untuk G_1 adalah 10, untuk G_2 adalah 12 dan untuk G_3 adalah 14. Dari gambar di atas maka didapatkan nilai konstanta ajaib terkecilnya adalah pada G_1 yaitu 10.

Sehingga jika pelabelan dari graf G_1 adalah fungsi 1-1 dan onto dengan $f : V(K_{(1,3)}) \cup E(K_{(1,3)})$ ke himpunan bilangan bulat $\{1,2,3,4,5,6,7\}$, maka dapat dirumuskan sebagai berikut:



Gambar 3.39. Fungsi Bijektif Graf G_1

Maka pada graf G_1 fungsi f dapat dinyatakan bahwa:

$$f(v_1) = 1$$

$$f(e_1) = f(v_1v_2) = 7$$

$$f(v_2) = 2$$

$$f(e_2) = f(v_1v_3) = 6$$

$$f(v_3) = 3$$

$$f(e_3) = f(v_1v_4) = 5$$

$$f(v_4) = 4$$

Berdasarkan hasil tersebut di atas, maka dapat ditemukan pola titik sebagai berikut:

$$f(v_1) = 1$$

$$f(v_1v_2) = 7 = 2(3+1) - 1$$

$$f(v_2) = 2$$

$$f(v_1v_3) = 6 = 2(3+1) - 2$$

$$f(v_3) = 3$$

$$f(v_1v_4) = 5 = 2(3+1) - 3$$

$$f(v_4) = 4$$

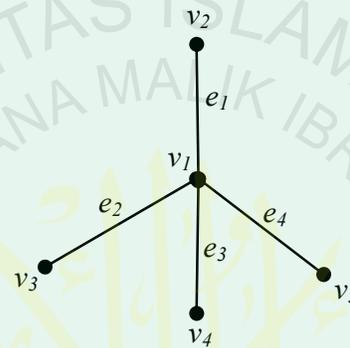
Sehingga, dapat disimpulkan bahwa:

$$f(v_x) = x, \quad x = 1, 2, 3, 4$$

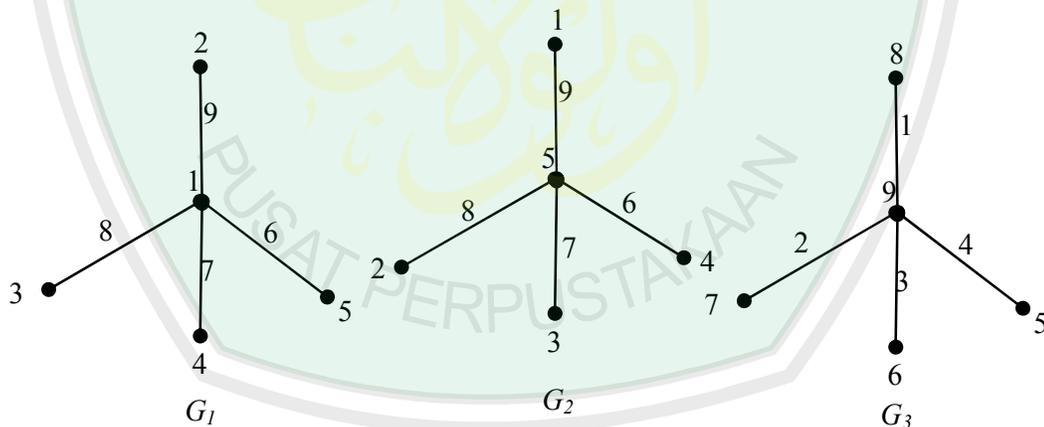
$$f(v_1 v_{x+1}) = 2(n+1) - x, \quad x = 1, 2, 3 \text{ dan } n = 3$$

3.4.4 Pelabelan EMT pada Graf Star $K_{(1,4)}$

Untuk gambar graf star $K_{(1,4)}$



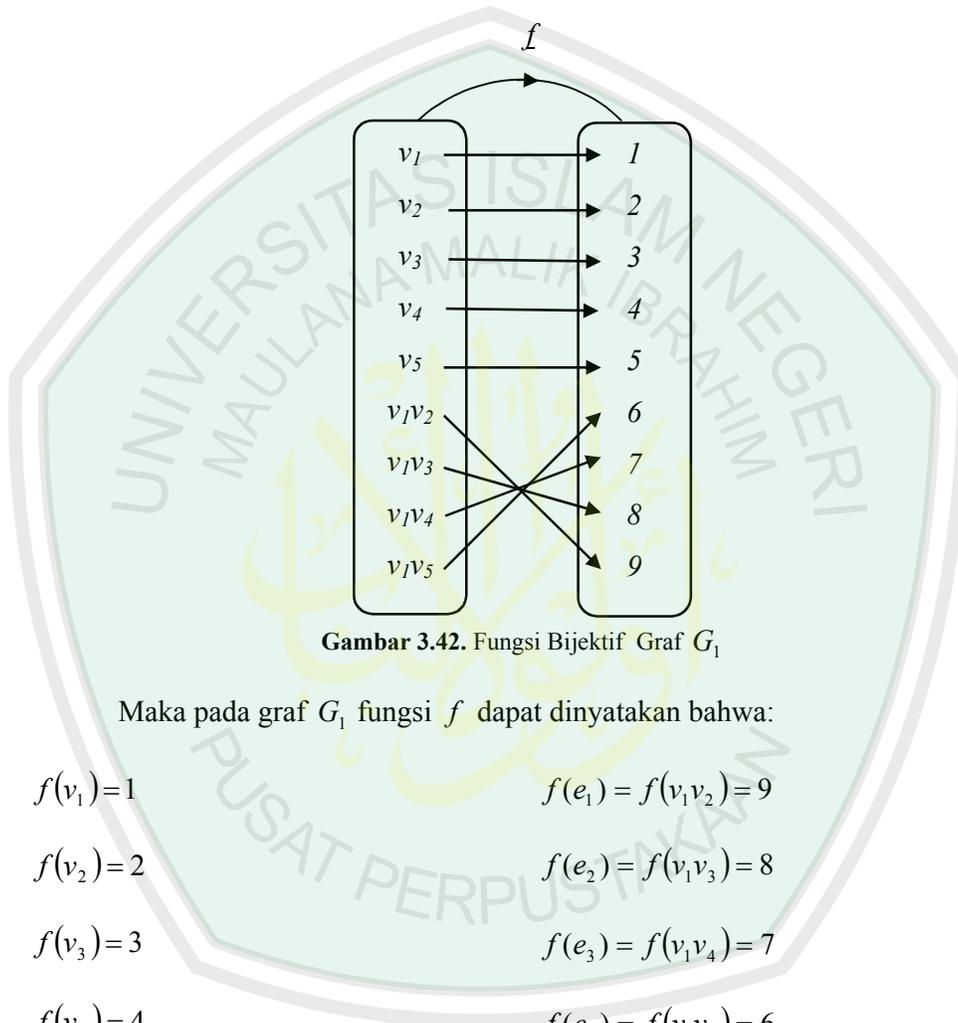
Gambar 3.40. Penotasian pada Graf Star $K_{(1,4)}$



Gambar 3.41. Pelabelan EMT pada Graf Star $K_{(1,4)}$

Pada Gambar 3.41 di atas didapatkan nilai konstanta ajaibnya, yaitu untuk G_1 adalah 12, untuk G_2 adalah 15 dan untuk G_3 adalah 18. Dari gambar di atas maka didapatkan nilai konstanta ajaib terkecilnya adalah pada G_1 yaitu 12.

Sehingga jika pelabelan dari graf G_1 adalah fungsi 1-1 dan onto dengan $f: V(K_{(1,4)}) \cup E(K_{(1,4)})$ ke himpunan bilangan bulat $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, maka dapat di rumuskan sebagai berikut:



Gambar 3.42. Fungsi Bijektif Graf G_1

Maka pada graf G_1 fungsi f dapat dinyatakan bahwa:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= 1 & f(e_1) &= f(v_1v_2) = 9 \\ f(v_2) &= 2 & f(e_2) &= f(v_1v_3) = 8 \\ f(v_3) &= 3 & f(e_3) &= f(v_1v_4) = 7 \\ f(v_4) &= 4 & f(e_4) &= f(v_1v_5) = 6 \\ f(v_5) &= 5 & & \end{aligned}$$

Berdasarkan hasil tersebut di atas, maka dapat ditemukan pola titik sebagai berikut:

$$f(v_1) = 1 \qquad f(v_1v_2) = 9 = 2(4 + 1) - 1$$

$$f(v_2) = 2$$

$$f(v_1v_3) = 8 = 2(4+1) - 2$$

$$f(v_3) = 3$$

$$f(v_1v_4) = 7 = 2(4+1) - 3$$

$$f(v_4) = 4$$

$$f(v_1v_5) = 6 = 2(4+1) - 4$$

$$f(v_5) = 5$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa:

$$f(v_x) = x, \quad x = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$f(v_1v_{x+1}) = 2(n+1) - x, \quad x = 1, 2, 3, 4 \text{ dan } n = 4$$

Dari uraian contoh di atas, maka diperoleh teorema sebagai berikut.

Teorema IV:

Setiap graf star $K_{(1,n)}$ dengan n bilangan asli adalah total sisi ajaib, dengan konstanta ajaib terkecil $k = 2n + 4$

Bukti:

1. Akan dibuktikan graf star $K_{(1,n)}$ dengan n bilangan asli adalah total sisi ajaib.

Misal:

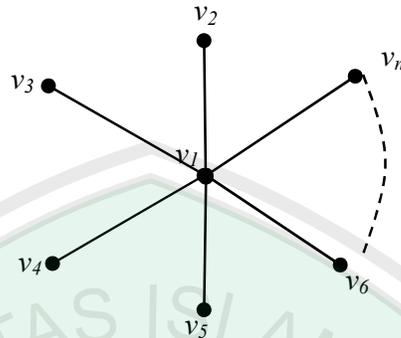
Graf $K_{(1,n)}$, mempunyai order $p = n + 1$, dengan ukuran $q = n$.

Maka $p + q = n + (n + 1) = 2n + 1$

dengan,

$$V(K_{(1,n)}) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\} \text{ dan } E(K_{(1,n)}) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, \dots, v_1v_n\}$$

Dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.43. Graf Star $K_{(1,n)}$

Definisikan fungsi f dari $V(K_{(1,n)}) \cup E(K_{(1,n)})$ ke $\{1, 2, 3, \dots, 2n+1\}$ dengan pengaitan sebagai berikut.

- $f(v_1) = 1$
- $f(v_{i+1}) = i + 1 \quad 1 \leq i \leq n$
- $f(v_1 v_i) = 2n + 2 - i \quad 1 \leq i \leq n$

Maka, untuk sisi $f(v_1 v_i)$ di G diperoleh:

$$\begin{aligned} f(v_1) + f(v_{i+1}) + f(v_1 v_i) &= 1 + (i + 1) + (2n + 2 - i) \\ &= 2n + 4 \end{aligned}$$

Jadi terbukti setiap graf star $K_{(1,n)}$ dengan n bilangan asli adalah total sisi ajaib.

- Akan dibuktikan bahwa: $k = 2n + 4$ adalah konstanta ajaib terkecil.

untuk $K_{(1,1)}$ diketahui $k = 6$

untuk $K_{(1,2)}$ diketahui $k = 8$

untuk $K_{(1,3)}$ diketahui $k = 10$

untuk $K_{(1,4)}$ diketahui $k = 12$

dari hasil tersebut diperoleh tabel berikut:

| n | k |
|-----|-----|
| 1 | 6 |
| 2 | 8 |
| 3 | 10 |
| 4 | 12 |

Tabel 3.4. Banyak Titik dan Konstanta Ajaib Terkecil pada Graf Star

Sehingga dari tabel di atas dapat diperoleh hubungan sebagai

berikut:

$$\frac{x_0 - x}{x_1 - x} = \frac{y_0 - y}{y_1 - y}$$

dengan,

$$\begin{aligned} x_0 &= n & y_0 &= k \\ x &= 1 & y &= 6 \\ x_1 &= 2 & y_1 &= 8 \end{aligned}$$

Maka,

$$\frac{x_0 - x}{x_1 - x} = \frac{y_0 - y}{y_1 - y}$$

$$\frac{n-1}{2-1} = \frac{k-6}{8-6}$$

$$\frac{n-1}{1} = \frac{k-6}{2}$$

$$2n-2 = k-6$$

$$k = 2n-2+6$$

$$k = 2n+4$$

Jadi, terbukti $k = 2n + 4$ adalah konstanta ajaib terkecil.

Dengan demikian, graf $K_{(1,n)}$ dengan n bilangan asli **adalah total sisi ajaib dengan konstanta ajaib terkecil $k = 2n + 4$.**



BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan, maka dapat disimpulkan bahwa:

1. Setiap graf sikel C_n dengan n bilangan asli ganjil dan $n \geq 3$ adalah total sisi ajaib dengan pelabelan sebagai berikut:

$$V(C_n) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\} \text{ dan } E(C_n) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\},$$

Definisikan fungsi f dari $V(C_n) \cup E(C_n)$ ke $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ dengan pengaitan sebagai berikut.

$$f(v_i) = \frac{i+1}{2} \quad \text{untuk } i \text{ ganjil } 1 \leq i < n$$

$$f(v_i) = n - \frac{n-3}{2} + \frac{i-2}{2} \quad \text{untuk } i \text{ genap } 1 < i \leq n$$

$$f(v_iv_{i+1}) = 2n - i \quad \text{untuk } i = 1, 2, 3, \dots, n-1$$

$$f(v_nv_1) = 2n$$

Dengan konstanta ajaib terkecil, yaitu: $k = \frac{5n+3}{2}$.

2. Setiap graf lintasan P_n dengan n bilangan asli genap adalah total sisi ajaib dengan pelabelan sebagai berikut:

$$V(P_n) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\} \text{ dan } E(P_n) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \dots, v_{n-1}v_n\}$$

Definisikan fungsi f dari $V(P_n) \cup E(P_n)$ ke $\{1, 2, 3, \dots, 2n-1\}$ dengan pengaitan sebagai berikut.

$$f(v_i) = \frac{i+1}{2} \quad \text{untuk } i \text{ ganjil } 1 \leq i \leq n$$

$$f(v_i) = \frac{n+i}{2} \quad \text{untuk } i \text{ genap } 1 \leq i \leq n$$

$$f(v_i v_{i+1}) = 2n - i \quad \text{untuk } i = 1, 2, 3, \dots, n-1$$

Dengan konstanta ajaib terkecil, yaitu: $k = \frac{5n+2}{2}$.

3. Setiap graf path P_n dengan n bilangan asli ganjil adalah total sisi ajaib dengan pelabelan sebagai berikut:

$$V(P_n) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\} \text{ dan } E(P_n) = \{v_1 v_2, v_2 v_3, v_3 v_4, \dots, v_{n-1} v_n\}$$

Definisikan fungsi f dari $V(P_n) \cup E(P_n)$ ke $\{1, 2, 3, \dots, 2n-1\}$ dengan pengaitan sebagai berikut.

$$f(v_i) = \frac{i+1}{2} \quad \text{untuk } i \text{ ganjil } 1 \leq i \leq n$$

$$f(v_i) = n - \frac{n-(i+1)}{2} \quad \text{untuk } i \text{ genap } 1 \leq i \leq n$$

$$f(v_i v_{i+1}) = 2n - i \quad \text{untuk } i = 1, 2, 3, \dots, n-1$$

Dengan konstanta ajaib terkecil, yaitu: $k = \frac{5n+3}{2}$.

4. Setiap graf star $K_{(1,n)}$ dengan n bilangan asli adalah total sisi ajaib dengan pelabelan sebagai berikut:

$$V(K_{(1,n)}) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\} \text{ dan } E(K_{(1,n)}) = \{v_1 v_2, v_1 v_3, v_1 v_4, \dots, v_1 v_n\}$$

Definisikan fungsi f dari $V(K_{(1,n)}) \cup E(K_{(1,n)})$ ke $\{1, 2, 3, \dots, 2n+1\}$

dengan pengaitan sebagai berikut.

$$f(v_1) = 1$$

$$f(v_{i+1}) = i + 1 \quad 1 \leq i \leq n$$

$$f(v_1 v_i) = 2n + 2 - i \quad 1 \leq i \leq n$$

Dengan konstanta ajaib terkecil, yaitu: $k = 2n + 4$

4. 2 Saran

Pembahasan mengenai pelabelan total sisi ajaib (*EMT*) dan konstanta ajaib terkecil ini masih terbuka bagi peneliti lain, yaitu:

- a. Bagi peneliti selanjutnya untuk dapat melanjutkan penelitian ini pada jenis-jenis graf yang lain seperti graf tangga, graf pohon, graf buku dan lain sebagainya.
- b. Bagi peneliti selanjutnya juga dapat menentukan untuk mencari nilai konstanta ajaib terbesar (maksimum) pada graf-graf tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdusysykir. 2006. *Ada Matematika dalam Al-Qur'an*. Malang: UIN Malang Press.
- _____. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.
- Baskoro, Edy Tri. 2007. Mengenalkan Indonesia Melalui Teori Graf. *Pidato Ilmiah Guru Besar Institut Teknologi Bandung* (Balai Pertemuan Ilmiah ITB, 13 Juli 2007).
- Chartrand, G. dan Lesniak, L. 1986. *Graph and Digraph 2nd Edition*. California: Wadsworth. Inc.
- Departemen Agama RI. 1995. *Al-Qur'an dan Terjemahnya*. Semarang: PT. Karya Toha Putra.
- Figueroa-Centeno, R. M., Ichishima, R. and Muntaner-Batle, F.A. 2001. The Place of Super Edge-Magic Labelings among Other Classes of Labelings. *Discrete Mathematics* 231 (2001) 153-168.
- Gallian, Joseph A. 2005. A Dynamic Survey of Graph Labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 5 (2005), #DS6.
- Purwanto. 1997. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP MALANG.
- Shihab Quraish. 1995. *Membumikan Al Quran*. Bandung: Mizan.
- Shihab Umar. 2004. *Kontekstualitas Al Quran*. Jakarta: Permadani.
- Swaminathan, V. and Jeyanthi, P. 2006. Super Edge-Magic Strength of Fire Crackers, Banana Trees and Unicyclic Graph. *Discrete Mathematics* 306 (2006) 1624-1936.
- Wallis, W. D., Baskoro, Edy T., Miller, and Slamin. Edge-Magic Total Labeling. *Australian Journal of Combinatorics Volume 22* (2000) 1-15.
- Wilson, R. J and Watkins, J. J. 1990. *Graphs: An Introductory Approach a First Course in Discrete Mathematics*. Canada: John Willy and Sons, Inc.



DEPARTEMEN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345
Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Bahrin Nada
Nim : 04510028
Fakultas/ jurusan : Sains Dan Teknologi/ Matematika
Judul skripsi : Menentukan Pelabelan Total Sisi Ajaib dan Konstanta
Ajaib Terkecil Pada Graf Sikel, Lintasan dan Star
Pembimbing I : Drs. H. Turmudi, M.Si
Pembimbing II : Munirul Abidin, M.Ag

| No | Tanggal | Keterangan | Tanda Tangan |
|----|------------------|---------------------------------|--------------|
| 1 | 23 Februari 2008 | Proposal | 1. |
| 2 | 28 Maret 2008 | Konsultasi Judul | 2. |
| 3 | 31 Maret 2008 | ACC judul + Konsultasi Bab I | 3. |
| 4 | 12 Juli 2008 | Revisi Bab I | 4. |
| 5 | 25 Juli 2008 | ACC Bab I + Konsultasi Bab II | 5. |
| 6 | 29 Juli 2008 | Revisi Bab II | 6. |
| 7 | 29 Agustus 2008 | Revisi Bab II | 7. |
| 8 | 3 September 2008 | ACC Bab II + Konsultasi Bab III | 8. |
| | | Konsultasi Kajian Keagamaan | 9. |
| 9 | 9 September 2008 | Revisi Bab III | 10. |
| | | Revisi Kajian Keagamaan | 11. |
| 10 | 15 Oktober 2008 | Revisi Bab III | 12. |
| 11 | 16 Oktober 2008 | ACC Bab III + Bab IV | 13. |
| | | ACC Kajian Keagamaan | 14. |
| 12 | 17 Oktober 2008 | Konsultasi Keseluruhan | 15. |
| | | ACC Keseluruhan | 16. |

Malang, 17 Oktober 2008
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321