GRAF FAKTORISASI PRIMA SUATU BILANGAN

SKRIPSI

Oleh:

AGUS SYAIFUROKHIM
NIM. 04510025

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2010

GRAF FAKTORISASI PRIMA SUATU BILANGAN

SKRIPSI

Oleh:

AGUS SYAIFUROKHIM
NIM. 04510025

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2010

GRAF FAKTORISASI PRIMA SUATU BILANGAN

SKRIPSI

Diajukan Kepada:

Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri (UIN)
Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:

AGUS SYAIFUROKHIM
NIM. 04510025

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2010

GRAF FAKTORISASI PRIMA SUATU BILANGAN

SKRIPSI

Oleh:

AGUS SYAIFUROKHIM
NIM 04510025

Telah disetujui oleh:

Dosen Pembimbing I	**Dosen Pembimbing II**
Evawati Alisah, M.Pd	**Abdul Azis, M.Si**
NIP. 197206041999032001	**NIP. 197603182006041002**

Malang, 17 September 2010

Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 197510062003121001

GRAF FAKTORISASI PRIMA SUATU BILANGAN

SKRIPSI

Oleh:

AGUS SYAIFUROKHIM
NIM 04510025

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal, 30 September 2010

Susunan Dewan Penguji:		**Tanda Tangan**
1. Penguji Utama	**: Wahyu H. Irawan, M.Pd** **NIP. 197104202000031003**	( )
2. Ketua	**: Abdussakir, M.Pd** **NIP. 197510062003121001**	( )
3. Sekretaris	**: Evawati Alisah, M.Pd** **NIP. 197206041999032001**	( )
4. Anggota	**: Abdul Aziz, M.Si** **NIP. 197603182006041002**	( )

Mengetahui dan Mengesahkan
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 197510062003121001

MOTTO

" Kebahagian didapat bila manusia bisa saling berbagi dengan manusia lain dan merasa tenang dan khusuk saat menghadap Tuhan"

PERSEMBAHAN

Penulis Persembahkan Karya Tulis ini untuk:

Keluarga tercinta (khususnya Ibu dan Almarhum Bapak)yang selalu memberikan segalanya

SURAT PERNYATAAN

ORISINALITAS PENELITIAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	: AGUS SYAIFUROKHIM
NIM	: 04510025
Fakultas / Jurusan	: Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi	: Graf Faktorisasi Prima Suatu Bilangan

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa penelitian saya ini tidak terdapat unsur-unsur penjiplakan karya penelitian atau karya ilmiah yang pernah dilakukan atau dibuat oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka.

Apabila ternyata hasil penelitian ini terbukti terdapat unsur-unsur jiplakan, maka saya bersedia untuk mempertanggung jawabkan, serta diproses sesuai peraturan yang berlaku.

Malang, 17 September 2010

Yang Membuat Pernyataan,

Agus Syaifurokhim

NIM. 04510025

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Alhamdulillahirrobbil 'alamin, puji syukur kehadirat Allah SWT, atas ridho, rahmat, taufik dan hidayah-Nya penulisan skripsi yang berjudul " *Graf Faktorisasi Prima Suatu Bilangan*" dapat diselesaikan. Sholawat serta salam tetap tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, yang telah mengantarkan umat manusia dari zaman kebodohan menuju zaman yang terang benderang, yaitu agama Islam.

Dalam penyusunan skripsi ini, penulis tidak dapat menyelesaikan sendiri tanpa bantuan dari berbagai pihak, untuk itu penulis mengucapkan rasa hormat dan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Dr. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Evawati Alisah, M.Pd, selaku dosen pembimbing yang senantiasa sabar memberi arahan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini.

5. Abdul Aziz, M.Si, selaku dosen pembimbing agama yang telah membimbing dan memberikan penjelasan dalam penyusunan skripsi ini.
6. Wahyu H. Irawan, M.Pd, sebagai dosen yang selalu memberikan motivasi dan inspirasi kepada penulis selama menjadi mahasiswa.
7. Seluruh dosen dan staf Fakultas Sains dan Teknologi yang telah menyalurkan ilmunya, membimbing dan memberi motivasi agar penulis dapat menyelesaikan studi dengan baik.
8. Ibu, Almarhum Bapak tercinta dan seluruh keluarga, yang selalu sabar dan memberikan bantuan dalam situasi dan kondisi apapun, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
9. Sahabat-sahabat Rayon Galileo yang selalu memberikan motivasi, do'a dan keceriaan dalam menyelesaikan skripsi ini, seperti: Okta T. F, Arif W, Wildan H, M. I. Nasrullah, Arif N. H, A. Hadir, Zainal Abidin.
10. Adik Noor Isroqiyah dan keluarga Bapak Suhariyanto yang selalu memberikan semangat dan motivasi.
11. Semua pihak yang telah membantu penulis, yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Penulis berdo'a semoga bantuan yang telah diberikan dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapatkan balasan yang setimpal. Penulis berharap, semoga skripsi ini bermanfaat. Amin.

Malang, 16 September 2010

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Syaifurokhim, Agus. 2010**. Graf Faktorisasi Prima Suatu Bilangan.** Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Evawati Alisah, M.Pd
(II) Abdul Aziz, M.Si

Kata Kunci: Faktorisasi Prima, Graf Faktorisasi Prima, dan bilangan

Teori graf adalah salah satu cabang matematika yang membahas masalah yang memuat susunan objek tertentu dan keterhubungan antara objek-objek tersebut. Menurut definisinya graf adalah himpunan yang tidak kosong yang memuat elemen-elemen yang disebut titik, dan suatu daftar pasangan tidak terurut elemen itu yang disebut sisi. Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan E(G). Banyaknya unsur di V disebut *order* dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di E disebut *size* dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Sebuah jalan pada graf G dinotasikan W adalah barisan hingga yang diawali dan diakhiri dengan titik dimana unsur-unsurnya saling bergantian $W : u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3,..., e_n, v_n = v$, antara titik dan sisi, dengan $e_1 = v_{i-1}v_i$ adalah sisi di G untuk $i = 1, 2, ..., n$. v_0 disebut titik awal dan v_n disebut titik akhir dan $v_1, v_2, v_3,..., v_{n-1}$ disebut *titik internal*. Jalan yang tidak mempunyai sisi disebut *jalan trivial*. Adapun n menyatakan panjang dari W. Jalan *terbuka* yang semua sisi dan titiknya berbeda disebut *lintasan*. Graf berbentuk lintasan dengan titik sebanyak n dinamakan *graf lintasan order n* dan di tulis P_n.

Bilangan prima adalah bilangan bulat lebih dari 1 yang mempunyai faktor bilangan bulat positif 1 dan bilangan itu sendiri. Faktorisasi prima adalah suatu proses pemfaktoran suatu bilangan bulat lebih dari 1 yang dinyatakan secara tunggal sebagai hasil kali faktor-faktor prima. Salah satu cara untuk mencari faktor-faktor prima dari suatu bilangan bulat lebih dari 1 adalah dengan diagram pohon faktor prima.

Jika setiap faktor-faktor dalam pohon faktor tersebut dijadikan simpul dan setiap garis penghubung faktor-faktor tersebut di jadikan sebuah sisi, maka akan terbentuk suatu graf faktorisasi prima.

Pembahasan mengenai graf faktorisasi prima ini masih terbuka bagi peneliti lain untuk melanjutkan pada jenis-jenis pohon faktor dan graf yang lain atau pada aplikasinya.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

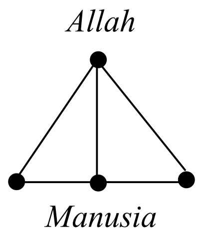
Aljabar adalah paling tua dari semua cabang matematika. Sejarahnya adalah sepanjang sejarah dari peradaban, barangkali lebih panjang. Sejarawan matematika yang terkenal B. L. van der Waerden percaya bahwa ada suatu peradaban yang mendahului peradaban dari Mesopotamia, Mesir, Negeri China, dan India dan bahwa peradaban itu adalah sumber akar dari konsep matematika yang paling awal. (Tabak, 2004: xi). Teori bilangan dan aljabar memainkan peran yang penting dalam komputasi dan komunikasi, sebagaimana dibuktikan oleh aplikasinya untuk beberapa bidang seperti teori kriptografi dan coding (Victor, 2003).

Dalam pengertian yang ketat, kajian tentang sifat-sifat bilangan asli disebut dengan teori bilangan. Dalam pengertian yang lebih luas, teori bilangan mempelajari bilangan dan sifat-sifatnya. Teori bilangan telah menarik perhatian ilmuwan selama ribuan tahun, paling sedikit sejak 2500 tahun yang lalu. Sebagai cabang matematika, teori bilangan dapat disebut sebagai “aritmetika lanjut” karena terutama berkaitan dengan bilangan asli. Perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi mempunyai kaitan yang erat dengan perkembangan sistem numerasi, yaitu dalam hal menyatakan, menghubungkan dan mengoprasikan bilangan. Bilangan itu sendiri mewakili kuantitas yang merupakan hasil pengukuran, jumlah benda atau barang, nilai imbal atau tukar dalam suatu transaksi, dan bentuk-bentuk kegiatan lain yang membutuhkan bilangan sebagai alat komunikasi (Muhsetyo, 1997: 1).

Kajian lain yang popular sampai sekarang adalah perbedaan bilangan prima dan bilangan komposit. Bilangan prima adalah bilangan bulat positif lebih dari 1 yang tidak mempunyai faktor positif kecuali 1 dan bilangan itu sendiri. Bilangan bulat positif selain satu dan bilangan prima disebut bilangan komposit (Muhsetyo, 1997: 2). Pembahasan tentang bilangan prima tidak dapat terlepas dari teori tentang bilangan itu sendiri. Pencarian bilangan prima dengan formula seperti yang dilakukan oleh matematikawan Erastosthenes dianggap sebagai cikal bakal dari teori bilangan (Khoe Yao Tung, 2008:23).

Dengan ditemukannya bilangan prima, teori bilangan berkembang semakin jauh dan mendalam. Banyak dalil dan sifat dikembangkan berdasarkan sifat-sifat bilangan prima. Dalil-dalil tentang keterbagian, kongruensi, dan persamaan Diophantine mempunyai kaitan dengan bilangan prima. Faktorisasi prima dan Triple Pythagoras banyak hubungannya dengan hasil pengembangan sifat-sifat bilangan prima (Muhsetyo, 1997: 92). Dalam teorema dasar aritmetika disebutkan bahwa, jika n adalah bilangan bulat positif lebih dari 1, maka dapat dinyatakan secara tunggal sebagai hasil kali faktor-faktor prima (Muhsetyo, 1997: 101).

Teori Graf adalah salah satu cabang matematika yang membahas masalah yang memuat susunan objek tertentu dan keterhubungan antara objek-objek tersebut (Hararay, 1969:1). Menurut definisi, graf adalah himpunan yang tidak kosong yang memuat elemen-elemen yang disebut titik, dan suatu daftar pasangan tidak terurut elemen itu yang disebut sisi. Dalam Al-Qur’an elemen-elemen pada graf yaitu titik dan sisi meliputi Pencipta (Allah) dan hamba-hamba-Nya, sedangkan sisi atau garis yang menghubungkan elemen-elemen tersebut adalah bagaimana hubungan antara Allah dengan hamba-Nya dan juga hubungan sesama hamba yang terjalin, *Hablun min Allah wa Hablun min An-Nas* (Jamilia, 2008: 8). Dapat digambarkan seperti di bawah ini.



Gambar 1.1 Hubungan antara Allah dengan Hamba-Nya serta Sesama Hamba

Hal ini dikuatkan oleh firman Allah SWT dalam Al-Qur'an surat Ali-'Imran ayat 10 yaitu:

ضُرِبَتۡ عَلَيۡهِمُ ٱلذِّلَّةُ أَيۡنَ مَا ثُقِفُوٓاْ إِلَّا بِحَبۡلٖ مِّنَ ٱللَّهِ وَحَبۡلٖ مِّنَ ٱلنَّاسِ وَبَآءُو بِغَضَبٖ مِّنَ ٱللَّهِ
وَضُرِبَتۡ عَلَيۡهِمُ ٱلۡمَسۡكَنَةُۚ ذَٰلِكَ بِأَنَّهُمۡ كَانُواْ يَكۡفُرُونَ بِـَٔايَٰتِ ٱللَّهِ وَيَقۡتُلُونَ ٱلۡأَنۢبِيَآءَ بِغَيۡرِ حَقّٖۚ
ذَٰلِكَ بِمَا عَصَواْ وَّكَانُواْ يَعۡتَدُونَ ١١٢

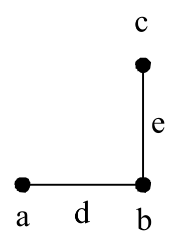
Artinya: *Mereka diliputi kehinaan di mana saja mereka berada, kecuali jika mereka berpegang kepada tali (agama) Allah dan tali (perjanjian) dengan manusia[218], dan mereka kembali mendapat kemurkaan dari Allah dan mereka diliputi kerendahan. yang demikian itu[219] Karena mereka kafir kepada ayat-ayat Allah dan membunuh para nabi tanpa alasan yang benar. yang demikian itu[220] disebabkan mereka durhaka dan melampaui batas.*

Kejadian dalam Al-Qur'an yang juga dapat dijadikan sebagai kajian graf adalah peristiwa Isra' dan Mi'raj. Kejadian ini dijelaskan oleh Allah SWT dalam surat Al-Isra ayat 1, yang berbunyi:

سُبْحَٰنَ ٱلَّذِىٓ أَسْرَىٰ بِعَبْدِهِۦ لَيْلًا مِّنَ ٱلْمَسْجِدِ ٱلْحَرَامِ إِلَى ٱلْمَسْجِدِ ٱلْأَقْصَا ٱلَّذِى بَٰرَكْنَا
حَوْلَهُۥ لِنُرِيَهُۥ مِنْ ءَايَٰتِنَآ ۚ إِنَّهُۥ هُوَ ٱلسَّمِيعُ ٱلْبَصِيرُ ﴿١﴾

Artinya: ”*Maha Suci Allah, yang Telah memperjalankan hamba-Nya pada suatu malam dari Al Masjidil Haram ke Al Masjidil Aqsha yang Telah kami berkahi sekelilingnya agar kami perlihatkan kepadanya sebagian dari tanda-tanda (kebesaran) kami. Sesungguhnya dia adalah Maha mendengar lagi Maha Mengetahui*.”

Isra’ adalah perjalanan Nabi Muhammad dari Masjidil Haram di Mekah ke Masjidil Aqsha di Palestina. Sementara itu, Mi’raj adalah perjalanan Nabi Muhammad dari Masjidil Aqsha di Planet Bumi ke Sidratulmuntaha. Terkait dengan dua peristiwa diatas, maka dua kejadian ini dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.2 Representasi Isra’ dan Mi’raj

Keterangan:

a. Masjidil Haram di Mekah
b. Masjidil Aqsha di Palestina
c. Sidratulmuntaha
d. Isra’
e. Mi’raj

Terlihat bahwa ada tiga titik yang dihubungkan oleh dua sisi, artinya tiap titik sebagai tempat kejadian ketika Isra’ dan Mi’raj berlangsung yaitu Masjidil Haram, Masjidil Aqsha, dan Sidatulmuntaha. Dua sisi diartikan sebagai proses perjalanan Nabi Muhammad yaitu Isra’ (dari Masjidil Haram ke Masjidil Aqsha) dan Mi’raj (dari Masjidil Aqsha ke Sidatulmuntaha) (Muiz, 2008: 30).

Misalkan himpunan $P_i^n = \left\{ p_i^n \mid i = 1, 2, 3, \cdots \right\}$ adalah himpunan bilangan prima berpangkat yang merupakan bilangan bulat positif lebih dari 1, maka menurut teorema dasar aritmatika bilangan-bilangan tersebut memiliki faktor-

faktor bilangan prima. Jika faktorisasi prima dari himpunan tersebut ditunjukan dengan diagram pohon faktor, maka setiap faktor-faktornya dihubungkan dengan sebuah garis. Jika setiap faktor-faktor dalam pohon faktor tersebut dijadikan simpul dan setiap garis penghubung faktor-faktor tersebut di jadikan sebuah sisi, maka akan terbentuk suatu graf.

Berdasarkan uraian di atas dalam penelitian ini penulis mengkaji tentang graf yang diberikan oleh faktorisasi prima suatu bidang, dengan mengambil judul skripsi "***Graf Faktorisasi Prima Suatu Bilangan***".

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dibuat rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana hubungan suatu bilangan dengan banyaknya titik dan sisi pada graf faktorisasi prima?
2. Bagaimana hubungan suatu bilangan dengan lintasan terpanjang pada graf faktorisasi prima?
3. Bagaimana hubungan banyak faktor prima yang muncul dengan banyak titik, sisi, dan lintasan terpanjang pada graf faktorisasi prima?

1.3. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penulisan skripsi ini adalah

1. Mendeskripsikan dan menganalisis hubungan suatu bilangan dengan banyaknya titik dan sisi pada graf faktorisasi prima.

2. Mendeskripsikan dan menganalisis hubungan suatu bilangan dengan lintasan terpanjang pada graf faktorisasi prima.
3. Mendeskripsikan dan menganalisis hubungan banyak faktor prima yang muncul dengan banyak titik, sisi, dan lintasan terpanjang pada graf faktorisasi prima.

1.4. Manfaat Penelitian

Dari penulisan skripsi ini diharapkan dapat bermanfaat bagi:

1. Penulis

   Untuk menambah pemahaman tentang konsepsi yang ada dalam matematika, khususnya teori bilangan, struktur aljabar, dan teori graf.
2. Pembaca
   a. Dapat menambah wawasan pengetahuan tentang teori bilangan, struktur aljabar, dan teori graf.
   b. Sebagai tambahan literatur bagi mahasiswa khususnya yang sedang menempuh mata kuliah teori bilangan, struktur aljabar, dan teori graf.
3. Bagi Lembaga

   Untuk bahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di jurusan matematika untuk mata kuliah teori graf.

1.5. Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah *library research* atau kajian literatur, yakni melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi-informasi serta objek-objek yang digunakan dalam permasalahan tersebut. Studi kepustakaan merupakan penampilan argumentasi penalaran keilmuan untuk memaparkan hasil olah fikir mengenai suatu permasalahan atau topik kajian kepustakaan yang dibahas dalam penelitian.

Adapun langkah-langkah yang akan diterapkan oleh penulis dalam membahas penelitian ini adalah menerapkan konsep teori faktorisasi prima pada bilangan bulat lebih dari 1, selanjutnya menghubungkannya dengan teori graf dengan tahapan-tahapan sebagai berikut:

1. menentukan himpunan bilangan yang akan diteliti
2. mencari faktor pembagi dari setiap unsur dalam himpunan tersebut dengan pohon faktor prima
3. memeriksa apakah faktor-faktor yang ditemukan memenuhi teorema dasar aritmatika (faktorisasi prima)
4. membuat graf faktorisasi prima dari masing-masing bilangan anggota pohon faktor prima
5. mendeskripsikan ciri-ciri yang dimiliki oleh graf faktorisasi prima
6. mencari karakteristik umum graf faktorisasi prima yang terbentuk dengan menganalisis ciri-ciri yang dimilikinya
7. merumuskan hubungan suatu bilangan dan banyaknya faktor prima dengan banyaknya titik, sisi dan panjang lintasan dari ciri-ciri yang diperoleh.

1.6. Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi ini lebih terarah, mudah ditelaah dan dipahami, maka digunakan sistematika penulisan yeng terdiri dari empat bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab dengan rumusan sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Pendahuluan meliputi: latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN PUSTAKA

Bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas teori bilangan dan teori graf.

BAB III PEMBAHASAN

Merupakan pembahasan tentang perolehan graf faktorisasi prima suatu bilangan, untuk memperoleh hubungan antara faktorisasi prima suatu bilangan dengan banyaknya titik, sisi dan lintasan terpanjang pada graf faktorisasi prima.

BAB IV PENUTUP

Pada bab ini disajikan kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1. Bilangan

2.1.1. Keterbagian

Definisi 2.1 (Gatot, 1997: 43)

Suatu bilangan bulat n adalah habis dibagi oleh suatu bilangan bulat $m \neq 0$ jika ada suatu bilangan bulat x sehingga $n = mx$.

Notasi: $m|\, n$ dibaca m membagi n, n habis dibagi m, m faktor n, atau n kelipatan dari m.

$m \nmid n$ dibaca m tidak membagi n, n tidak habis dibagi m, m bukan faktor n, atau n bukan kelipatan dari m.

Contoh:

a. 5| 10 sebab ada bilangan bulat 2 sehingga 10 = 5 x 2.

b. 3| 18 sebab ada bilangan bulat 6 sehingga 18 = 3 x 6.

2.1.2. Bilangan Prima

Definisi 2.2 (Gatot, 1997: 92)

Jika p adalah suatu bilangan bulat positif lebih dari 1 ($p > 1$) yang hanya mempunyai pembagi positif 1 dan p, maka p disebut bilangan prima.

Jika suatu bilangan q > 1 bukan suatu bilangan prima, maka q disebut bilangan komposit.

Contoh:

Bilangan-bilangan 2, 3, dan 5 adalah bilangan-bilangan prima sebab;

a. 2 adalah bilangan bulat positif yang hanya mempunyai pembagi positif 1 dan 2.
b. 3 adalah bilangan bulat positif yang hanya mempunyai pembagi positif 1 dan 3.
c. 5 adalah bilangan bulat positif yang hanya mempunyai pembagi positif 1 dan 5.

Definisi 2.3 (Abidin, 2008, 11)

Jika p_i adalah bilangan prima, maka himpunan P yang beranggotakan $p_1, p_2, p_3, \cdots$ dengan $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots$ disebut sebagai himpunan bilangan prima, dinotasikan $P = \{p_1, p_2, p_3, \cdots\}$.

Contoh:

Himpunan $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ adalah himpunan bilangan prima sebab anggota atau unsur dalam himpunan tersebut merupakan bilangan prima.

Definisi 2.4 (Abidin, 2008, 11)

Jika p adalah bilangan prima, maka himpunan P^n adalah himpunan bilangan prima berpangkat n, $n \in N$, dinotasikan $P^n = \{p_1^n, p_2^n, p_3^n, \cdots\}$ dengan $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots$.

Contoh:

a. Himpunan $P^1 = \{2^1, 3^1, 5^1, 7^1, 11^1, \cdots\}$ adalah himpunan bilangan prima berpangkat 1.

b. Himpunan $P^2 = \{2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, \cdots\}$ adalah himpunan bilangan prima berpangkat 2.

Teorema 2.1 (Muhsetyo, 1997: 100)

Jika p adalah suatu bilangan prima dan $p|\ ab$, maka $p|\ a$ atau $p|\ b$, $\forall\ a, b \in \mathbb{Z}$.

Bukti:

Anggaplah $p \nmid a$.

Karena p adalah suatu bilangan prima dan $p \nmid a$, maka $(a,p) = 1$. Menurut dalil, jika $p|\ ab$ dan $(a,p) = 1$, maka $p|\ b$.

Teorema 2.2 (Teorema Dasar Aritmetika) (Muhsetyo, 1997: 101)

Jika n adalah sebarang bilangan bulat positif lebih dari 1, maka n dapat dinyatakan secara tunggal sebagai hasil kali faktor-faktor prima.

Bukti:

Ambil $n \in Z$ dan $n > 1$, maka n adalah suatu bilangan prima atau n adalah suatu bilangan komposit.

Jika n adalah suatu bilangan prima, maka sudah terbukti bahwa n mempunyai faktor prima. Jika n adalah suatu bilangan komposit, maka tentu ada bilangan-bilangan bulat n_1, n_2, dengan ($1 < n_1$, $n_2 < n$), sehingga $n = n_1 \times n_2$. Jika jika n_1 dan n_2 keduanya adalah bilangan prima, maka sudah terbukti n mempunyai faktor prima.

Dalam hal yang lain, ada bilangan-bilangan bulat n_1, n_2, n_3 dengan ($1 < n_1$, n_2, $n_3 < n$), sehingga $n = n_1 \times n_2\ n_3$. Demikian seterusnya sehingga

$1 < n_1, n_2, n_3, ..., n_k < n,\ n = n_1 \times n_2 \times n_3 \times ... \times n_k$

Dengan $n_1, n_2, n_3, ..., n_k$ adalah bilangan-bilangan prima.

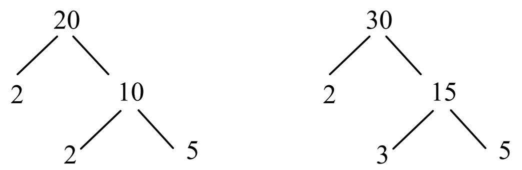
Contoh:

a. $20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^1$.

b. $30 = 2 \times 3 \times 5 = 2^1 \times 3^1 \times 5^1$.

Berdasarkan teorema dasar aritmetika, setiap bilangan asli lebih dari 1 dapat dicari faktor-faktor primanya dengan jalan secara berturut-turut mencoba membagi bilangan tersebut dengan: 2, 3, 5, 7, ...,p_i (Muhsetyo, 1997: 103).

Secara diagram pemfaktoran prima (faktorisasi prima) dapat ditunjukkan dengan pohon faktor, dalam contoh a dan b diatas pohon faktornya adalah sebagai berikut:



Gambar 2.1 Pohon Faktor Prima Bilangan 20 dan 30

Langkah-langkah membuat pohon faktor adalah sebagai berikut:

1. tentukan bilangan bulat sebarang $n > 1$
2. bagi bilangan tersebut dengan bilangan prima, mulai dari bilangan prima terkecil yang dapat membagi bilangan bulat tersebut
3. analisa hasil bagi dari langkah *b*, misal hasil baginya adalah *x*. Jika *x* bilangan komposit, maka ulangi langkah b pada bilangan *x*. Jika *x* bilangan prima, maka hentikan pembagian
4. tulis semua faktor prima dari faktorisasi prima ini (http://www.tutorvista.com/math/factor-tree-online, 29-08-2010: 06.00)

2.1.3. Fungsi Multiplikatif

Definisi 2.5 (Muhsetyo, 1997: 271)

a. Suatu fungsi yang didefinisikan pada himpunan bulat positif disebut dengan fungsi aritmetika.

b. Jika m dan n adalah bilangan-bilangan bulat positif dan $(m,n) = 1$, maka suatu fungsi f yang memenuhi hubungan $f(mn) = f(m)f(n)$ disebut fungsi multiplikatif.

Contoh:

Diketahui fungsi f yang didefinisikan sebagai:

f(n) = 1 untuk semua bilangan bulat positif n.

Karena f hanya didefinisikan pada bilangan bulat positif, maka $f(n)$ adalah fungsi aritmetika.

$$\text{Karena: } \left.\begin{aligned} f(m) &= 1 \\ f(n) &= 1 \\ f(mn) &= 1 \end{aligned}\right\} f(mn) = 1 = 1 \text{ x} 1 = f(m)\text{f}(n)$$

maka f merupakan fungsi multiplikatif.

Definisi 2.6 (Muhsetyo, 1997: 273)

Cacah (banyak) semua pembagi yang positif dari n disebut dengan fungsi cacah pembagi dan ditulis dengan $\tau(n) = \sum_{d|n} d$.

Contoh:

a. Pembagi-pembagi yang positif dari 4 adalah 1, 2, dan 4 sehingga cacah pembagi dari 4 adalah 3. Jadi $\tau(4) = 3$.

b. Pembagi-pembagi yang positif dari 36 adalah 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, dan 36 sehingga jumlah cacah pembagi dari 36 adalah 9. jadi $\tau(36) = 9$.

Teorema 2.3 (Muhsetyo, 1997: 276)

Jika p adalah suatu bilangan prima dan $a \in Z^{+}$, maka: $\tau(p^{a}) = a+1$

Bukti:

Faktor-faktor dari p^{a} adalah 1, p^{1}, p^{2}, ..., p^{a-1}, p^{a}, berarti banyaknya faktor atau pembagi dari p^{a} adalah tepat sama dengan (a + 1), sehingga $\tau(p^{a}) = a+1$.

Contoh:

Diketahui n = 125, carilah nilai $\tau(n)$. Jawab: $n = 25 = 5^{3}$, berarti p = 5 dan a = 3, sehingga $\tau(n) \quad = \tau(5^{3}) = \tau(p^{a}) = a+1 = 3+1 \ = 4$

Teorema 2.4 (Muhsetyo, 1997: 276)

Jika n adalah suatu bilangan asli dengan pemfaktoran prima:

$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \ldots p_k^{a_k}$

Maka $\tau(n) = (a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_k+1)$.

Contoh:

Diketahui n = 200. Carilah $\tau(n)$. Jawab: $n = 200 = 2^{3} \text{ x } 5^{2}$, berarti $p_1 = 2$, $a_1 = 3$, $p_2 = 5$ dan $a_2 = 2$, sehingga:

$$\begin{aligned}\tau(n) \quad &= \tau(2^{3}5^{2}) = \tau(p_1^{a_1} p_2^{a_2}) = \tau(p_1^{a_1})\tau(p_2^{a_2}) \\ &= (a_1+1)(a_2+1) = 12\end{aligned}$$

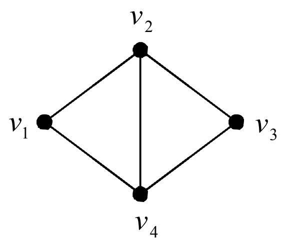
2.2. Graf

2.2.1. Definisi Graf

Definisi 2.7 (Chartrand dan Lesniak, 1986: 4)

Graf *G* adalah pasangan himpunan (*V*, *E*) dengan *V* adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut sebagai titik dan *E* adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di *V* yang disebut sebagai sisi. Himpunan titik di *G* dinotasikan dengan *V(G)* dan himpunan sisi dinotasikan dengan *E*(G). Sedangkan banyaknya unsur di *V* disebut *order* dari *G* dan dilambangkan dengan *p(G)* dan banyaknya unsur di *E* disebut *size* dari *G* dan dilambangkan dengan *q(G)*. Jika graf yang dibicarakan hanya graf *G*, maka *order* dan *size* dari *G* tersebut cukup ditulis dengan *p* dan *q*.

Contoh:



Gambar 2.2 Graf G_1

Graf G memuat himpunan titik *V* dan sisi *E* yaitu :

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4), (v_4, v_1)\}$

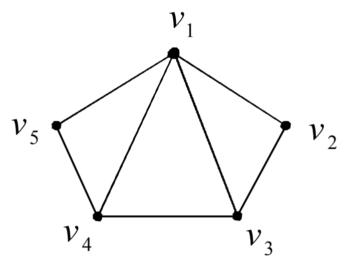
Graf G mempunyai *order* 4 atau $p = 4$ dan *size* 5 atau $q = 5$.

2.2.2. *Adjacent dan Incident*

Definisi 2.8 (Chartrand dan Lesniak, 1986:4)

Sisi $e = (u,v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u,v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), u dan e serta v dan e disebut terkait langsung (*incident*). Untuk selanjutnya, sisi $e = (u,v)$ akan ditulis $e = uv$.

Contoh:



Gambar 2.3 Graf *H*

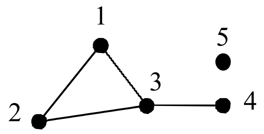
Dari Gambar 2.2 pada graf H, titik v_2 dan v_3 adalah *adjacent* atau terhubung langsung tetapi v_2 dan v_5 tidak. Titik v_1 dan sisi (v_1v_2) dan (v_1v_5) adalah terkait langsung (*incident*) dengan titik v_1.

2.2.3. Simpul Terpencil

Definisi 2.9 (Munir, 2005: 365)

Simpul terpencil adalah simpul yang tidak mempunyai sisi yang terkait langsung dengannya. Atau dapat juga dinyatakan bahwa simpul terpencil adalah simpul yang tidak satupun terhubung langsung dengan simpul-simpul lainnya.

Contoh:



Gambar 2.4 Graf *G* dengan Simpul Terpencil

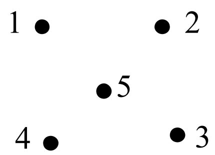
Pada Gambar 2.3 simpul 5 adalah simpul terpencil.

2.2.4. Graf Kosong

Definisi 2.10 (Munir, 2005: 366)

Graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong disebut sebagai graf kosong dan ditulis sebagai N_n, yang dalam hal ini n adalah banyak simpulnya.

Contoh:



Gambar 2.5 Graf Kosong N_5

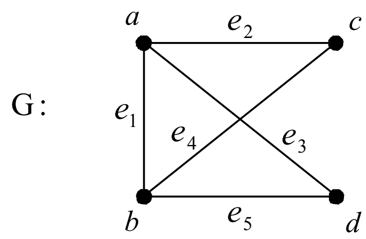
2.2.5. Derajat Suatu Titik

Definisi 2.11 (Chartrand dan Lesniak 1986: 7)

Derajat titik *v* pada graf *G*, ditulis dengan *deg(v),* adalah banyaknya sisi yang terkait langsung pada *v*. Dengan kata lain, banyaknya sisi yang memuat *v* sebagai titik ujung. Titik *v* dikatakan genap atau ganjil tergantung dari *deg(v)* genap atau ganjil.

Contoh:

Perhatikan graf G berikut yang mempunyai himpunan titik $V = \{a, b, c, d\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$.



Gambar 2.6 Graf G_2

Berdasarkan gambar 2.8, diperolah bahwa

deg(a) = 3, deg(b) = 3, deg(c) = 2, deg(d) = 2

Titik a dan b adalah titik ganjil, titik c dan d adalah titik genap. Karena tidak ada yang berderajat 1, maka graf G tidak mempunyai titik ujung. Hubungan antara jumlah derajat semua titik dalam suatu graf G dengan banyak sisi, yaitu q, adalah $\sum_{v \in G} \deg(v) = 2q$. Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 2.5 (Chartrand dan Lesniak, 1986: 7)

Jika graf G dengan $V(G) = \{ v_1, v_2, ..., v_n\}$

maka $\sum_{i=1}^{n} \deg_G(v_i) = 2q$.

Bukti:

Setiap sisi terkait langsung dengan 2 titik. Bila derajat tiap titik tersebut dijumlahkan maka sisi tersebut dihitung 2 kali.

Akibat Teorema 2.5 (Chartrand dan Lesniak, 1986: 7)

Pada sebarang graf, banyaknya titik yang berderajat ganjil adalah genap.

Bukti:

Misalkan graf G dengan titik sebanyak q, maka ambil W yang memuat himpunan titik ganjil di G serta U yang memuat himpunan titik genap di G. Dari teorema 2.5 maka diperoleh:

$$\sum_{v \in V(\mathrm{G})} \deg_{\mathrm{G}} v = \sum_{v \in \mathrm{W}} \deg_{\mathrm{G}} v + \sum_{v \in \mathrm{U}} \deg_{\mathrm{G}} v = 2q$$

dengan demikian karena $\sum_{v \in U} \deg_{\mathrm{G}} v$ genap, maka $\sum_{v \in \mathrm{W}} \deg_{\mathrm{G}} v$ juga genap. Sehingga $|W|$ adalah genap.

2.2.6. Jalan (*Walk*)

Definisi 2.12 (Chatrand and Lesniak, 1986: 26)

Sebuah jalan pada graf G dinotasikan W adalah barisan hingga yang diawali dan diakhiri dengan titik dimana unsur-unsurnya saling bergantian

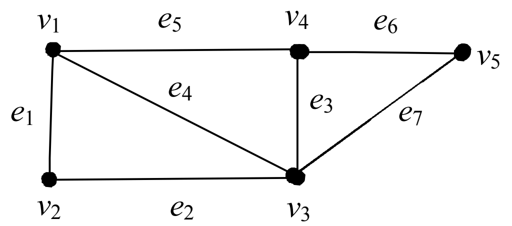
$W: u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \ldots, e_n, v_n = v$

antara titik dan sisi, dengan $e_1 = v_{i-1}v_i$ adalah sisi di G untuk $i = 1, 2, \ldots, n$. v_0 disebut titik awal dan v_n disebut titik akhir dan $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}$ disebut *titik internal*. Jalan yang tidak mempunyai sisi disebut *jalan trivial*. Adapun n menyatakan panjang dari W.

Perhatikan graf G berikut,

Contoh:

G:



Gambar 2.7 Graf *G* untuk Mengilustrasikan Jalan (walk)

Maka

$W_1 = v_1, v_2, v_3, v_1, v_4, v_3, v_5, v_4, v_1$

adalah jalan di G. W_1 mempunyai panjang 8

$W_2 = v_1, v_4, v_2, v_3, v_4$

bukan jalan di G karena sisi v_4v_2 tidak ada di G.

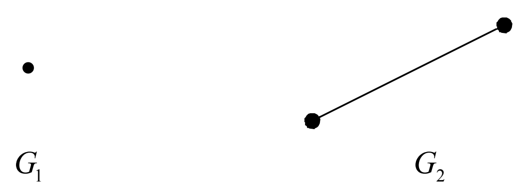
Jika $v_0 = v_n$, maka W disebut *jalan tertutup*. Sedangkan jika $v_0 \neq v_n$ maka W disebut *jalan terbuka*.

2.2.7. Graf Trivial dan non Trivial

Definisi 2.13 (Bondy and Murthy, 1976:3)

Graf G disebut *finite* atau berhingga jika himpunan titik adalah berhingga, atau graf yang banyak titiknya adalah n berhingga. Graf *infinite* atau tak berhingga adalah graf yang banyak titiknya tidak berhingga. *Graf trivial* adalah graf berorder satu dengan himpunan sisinya merupakan himpunan kosong. Graf *non trivial* adalah graf yang berorder lebih dari satu.

Contoh:



Gambar 2.8 Graf Trivial dan non Trivial

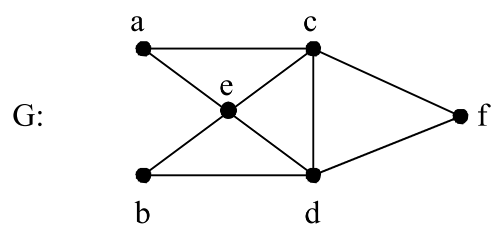
Pada Gambar 2.8 G_1 merupakan graf trivial karena G_1 hanya memuat satu titik atau berorder satu dan himpunan sisinya merupakan himpunan kosong. Sedangkan G_2 merupakan graf non trivial karena berorder lebih dari satu.

2.2.8. Trail

Definisi 2.14

Jalan W yang semua sisinya berbeda disebut *trail* (Abdussakir, Nilna & Fifi, 2009: 51).

Contoh:



Gambar 2.9 Graf G untuk Mengilustrasikan Trail

Maka

$W_1 = f, c, a, e, b, d, e, c, d, f$

adalah jalan tertutup dan merupakan trail, karena semua sisinya berbeda dan tidak ada sisi yang dilalui lebih dari satu kali.

$W_2 = a, c, e, b, d, a, c, d, f$

Adalah jalan terbuka dan bukan trail karena sisi ac dilalui lebih dari satu kali, atau dengan kata lain ada sisi yang sama pada jalan W_2.

2.2.9. Lintasan

Definisi 2.15 (Wilson and Watkins, 1989: 35)

Jalan *terbuka* yang semua sisi dan titiknya berbeda disebut *lintasan*. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa setiap lintasan pasti trail, tetapi tidak semua trail merupakan lintasan.

Contoh:

Contoh *lintasan* pada graf G dalam gambar 2.9 adalah:

$W_1 = a, c, e, b, d, f$

$W_2 = a, e$

dan

$W_3 = a, e, b, c$

adalah adalah lintasan di G karena semua titik dan sisinya berbeda.

Sedangkan

$W_4 = a, c, e, b, d, f, d, e, a$

$W_5 = a, e, b, e, c$

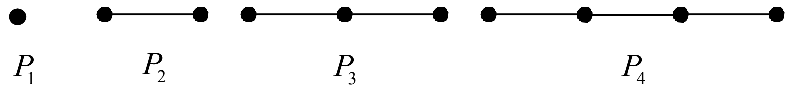
bukan lintasan karena ada titik yang sama.

2.2.10. Graf Lintasan

Definisi 2.16 (Abdussakir, Nilna, Fifi, 2009: 53)

Graf berbentuk lintasan dengan titik sebanyak n dinamakan *graf lintasan order n* dan ditulis P_n.

Contoh:



Gambar 2.10 Graf Lintasan

Pada gambar 2.9 adalah graf lintasan dengan order

$P_1 = 1$, $P_2 = 2$, $P_3 = 3$, dan $P_4 = 4$

2.3. Kajian Bilangan dan Graf dalam Al-Qur'an

Dalam Al-Qur'an disebutkan sebanyak 38 bilangan berbeda. Dari 38 bilangan tersebut, 30 adalah bilangan asli dan 8 adalah bilangan pecahan. Penyebutan bilangan dan nomor surat tempat bilangan tersebut ternyata mempunyai pola tertentu. Jumlah penyebutan bilangan juga diatur dengan pola tertentu. 30 bilangan asli berbeda yang disebutkan jika dijumlah akan mempunyai pola tertentu. Jumlah penyebutan bilangan pecahan dan macam-macam bilangan penyebutnya juga mempunyai pola tertentu (Abdusysyakir, 2006: 25).

Diantara bilangan-bilangan yang disebutkan dalam Al-Qur'an, bilangan 19 menempati posisi yang istimewa. Keistimewaan bilangan 19 ditegaskan oleh Allah SWT dalam surat Al-Muddatstsir ayat 30 dan 31, sebagai berikut:

عَلَيْهَا تِسْعَةَ عَشَرَ ﴿٣٠﴾ وَمَا جَعَلْنَآ أَصْحَٰبَ ٱلنَّارِ إِلَّا مَلَٰٓئِكَةً ۙ وَمَا جَعَلْنَا عِدَّتَهُمْ إِلَّا فِتْنَةً لِّلَّذِينَ
كَفَرُوا۟ لِيَسْتَيْقِنَ ٱلَّذِينَ أُوتُوا۟ ٱلْكِتَٰبَ وَيَزْدَادَ ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓا۟ إِيمَٰنًا ۙ وَلَا يَرْتَابَ ٱلَّذِينَ أُوتُوا۟ ٱلْكِتَٰبَ
وَٱلْمُؤْمِنُونَ ۙ وَلِيَقُولَ ٱلَّذِينَ فِى قُلُوبِهِم مَّرَضٌ وَٱلْكَٰفِرُونَ مَاذَآ أَرَادَ ٱللَّهُ بِهَٰذَا مَثَلًا ۚ كَذَٰلِكَ يُضِلُّ
ٱللَّهُ مَن يَشَآءُ وَيَهْدِى مَن يَشَآءُ ۚ وَمَا يَعْلَمُ جُنُودَ رَبِّكَ إِلَّا هُوَ ۚ وَمَا هِىَ إِلَّا ذِكْرَىٰ لِلْبَشَرِ ﴿٣١﴾

Artinya: *Dan di atasnya ada sembilan belas (Malaikat penjaga).*
Dan tiada Kami jadikan penjaga neraka itu melainkan dari Malaikat: dan tidaklah Kami menjadikan bilangan mereka itu melainkan untuk Jadi cobaan bagi orang-orang kafir, supaya orang-orang yang diberi Al-Kitab menjadi yakin dan supaya orang yang beriman bertambah imannya dan supaya orang-orang yang diberi Al kitab dan orng-orang mukmin itu tidak ragu-ragu dan supaya orang-orang yang di dalam hatinya ada penyakit dan orang-orang kafir (mengatakan): "Apakah yang dikehendaki Allah dengan bilangan ini (bilangan 19) sebagai suatu perumpamaan?" Demikianlah Allah membiarkan sesat orang-orang yang dikehendaki-Nya dan memberi petunjuk kepada siapa yang dikehendaki-Nya. dan tidak ada yang mengetahui tentara Tuhanmu melainkan Dia sendiri. dan Saqar itu tiada lain hanyalah peringatan bagi manusia.

Berdasarkan ayat tersebut, terungkap bahwa bilangan 19 mempunyai tiga fungsi utama, yaitu (1) menjadi cobaan (*fitnah*) bagi orang kafir dan orang yang mempunyai penyakit di hatinya, (2) menetapkan keyakinan orang-orang yang diberi Al-Kitab (sebelum turunnya Al-Qur'an), dan (3) menambahkan keimanan orang-orang mukmin (Abdusysyakir, 2006: 36).

Selain berbicara bilangan, ternyata Al-Qur'an juga berbicara tentang operasi hitung dasar pada bilangan. Perhatikan firman Allah SWT dalam surat Al-Kahfi ayat 25, sebagai berikut:

وَلَبِثُواْ فِي كَهۡفِهِمۡ ثَلَٰثَ مِاْئَةٖ سِنِينَ وَٱزۡدَادُواْ تِسۡعٗا ﴿٢٥﴾

Artinya : *Dan mereka tinggal dalam gua mereka tiga ratus tahun dan ditambah sembilan tahun (lagi).*

Dan dalam surat Al-Ankabuut ayat 14, sebagai berikut:

وَلَقَدۡ أَرۡسَلۡنَا نُوحًا إِلَىٰ قَوۡمِهِۦ فَلَبِثَ فِيهِمۡ أَلۡفَ سَنَةٍ إِلَّا خَمۡسِينَ عَامٗا فَأَخَذَهُمُ ٱلطُّوفَانُ وَهُمۡ ظَٰلِمُونَ ﴿١٤﴾

Artinya: *Dan Sesungguhnya Kami telah mengutus Nuh kepada kaumnya, Maka ia tinggal di antara mereka seribu tahun kurang lima puluh tahun. Maka mereka ditimpa banjir besar, dan mereka adalah orang-orang yang zalim.*

Dalam QS 18: 25 dan QS 29: 14, Al-Qur'an telah berbicara tentang matematika. Konsep matematika yang disebutkan dalam dua ayat tersebut adalah:

1. Konsep bilangan, yaitu bilangan 300, 9, 1000, dan 90.
2. Operasi penjumlahan, yaitu 300 + 9.
3. Operasi pengurangan, yaitu 1000 – 50.

Makna yang tersirat dibalik dua ayat tersebut adalah bahwa setiap muslim perlu memahami tentang bilangan dan operasi blangan (Abdusysyakir, 2006: 60-61).

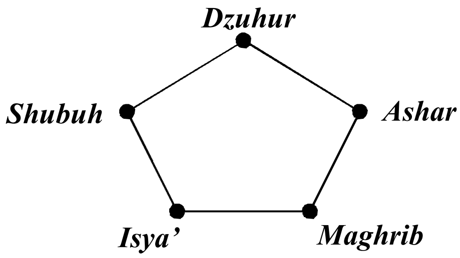
Representasi dari suatu graf adalah shalat. Shalat mempunyai kedudukan yang amat penting dalam Islam dan merupakan pondasi yang kokoh bagi tegaknya agama Islam. Ibadah shalat dalam Islam sangat penting, sehingga shalat harus dilakukan pada waktunya, dimanapun, dan bagaimanapun keadaan seorang muslim yang mukalaf (Jamilia, 2008: 30).

Dalam kaitannya dengan peribadatan sholat, Allah SWT berfirman dalam surat An-Nisaa' ayat 103, sebagai berikut:

فَإِذَا قَضَيْتُمُ ٱلصَّلَوٰةَ فَٱذْكُرُوا۟ ٱللَّهَ قِيَـٰمًا وَقُعُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِكُمْ ۚ فَإِذَا ٱطْمَأْنَنتُمْ فَأَقِيمُوا۟
ٱلصَّلَوٰةَ ۚ إِنَّ ٱلصَّلَوٰةَ كَانَتْ عَلَى ٱلْمُؤْمِنِينَ كِتَـٰبًا مَّوْقُوتًا ﴿١٠٣﴾

Artinya: *Maka apabila kamu Telah menyelesaikan shalat(mu), ingatlah Allah di waktu berdiri, di waktu duduk dan di waktu berbaring. Kemudian apabila kamu Telah merasa aman, Maka Dirikanlah shalat itu (sebagaimana biasa). Sesungguhnya shalat itu adalah fardhu yang ditentukan waktunya atas orang-orang yang beriman.*

Dalam ayat tersebut dijelaskan bahwa waktu-waktu sholat telah ditentukan waktunya dan telah menjadi suatu ketetapan, baik itu sholat fardhu maupun sholat sunnah. Sholat lima waktu diwajibkan dalam sehari (dhuhur, ‘ashar, maghrib, ‘isya’, dan subuh) merupakan sholat yang wajib ditunaikan dan tidak boleh ditinggalkan. Waktu pelaksanaan antara satu waktu sholat fardhu berbeda dengan empat waktu sholat yang lain dan telah ditetapkan oleh Allah SWT. Akan tetapi kelima waktu sholat tersebut saling mengikat dan tidak diperbolehkan hanya melaksanakan satu sholat saja (Jamilia, 2008: 31).



Gambar 2.11 Representasi Graf Terhadap Waktu-Waktu Shalat

Adapun hubungan waktu sholat tersebut dengan teori graf adalah bahwa waktu-waktu sholat tersebut merupakan suatu himpunan yang terdiri dari waktu sholat fardhu (dhuhur, ‘ashar, maghrib, ‘isya’ dan subuh) dan waktu sholat sunnah sebagai ekspresi dari himpunan titik dalam graf. Sedangkan keterikatan antara kelima sholat fardhu tersebut yang tidak dapat ditinggalkan salah satunya dalam menunaikannya dan sholat sunnah sebagai pelengkap sholat fardhu merupakan ekspresi dari garis atau sisi yang menghubungkan titik-titik dalam graf. Selain itu, dalam teori graf juga terdat digraf yang menurut definisinya himpunan tak kosong dari elemen-elemen yang disebut *titik* (*vertex*) dan himpunan (mungkin kosong) pasangan terurut (uv), yang mempunyai arah dari u ke v, dari titik-titik u,v di V

yang disebut *busur*. Penjelasan mengenai digraf dalam al-Quran sama halnya seperti penjelasan pada graf (Jamilia, 2008: 32).

Perhatikan firman Allah SWT dalam surat Al-Baqarah ayat 158, sebagai berikut:

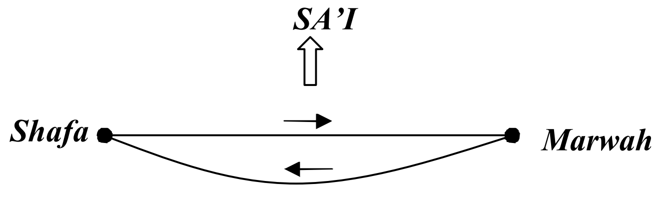
إِنَّ ٱلصَّفَا وَٱلْمَرْوَةَ مِن شَعَآئِرِ ٱللَّهِ ۖ فَمَنْ حَجَّ ٱلْبَيْتَ أَوِ ٱعْتَمَرَ فَلَا جُنَاحَ عَلَيْهِ أَن
يَطَّوَّفَ بِهِمَا ۚ وَمَن تَطَوَّعَ خَيْرًا فَإِنَّ ٱللَّهَ شَاكِرٌ عَلِيمٌ ﴿١٥٨﴾

Artinya: *Sesungguhnya Shafaa dan Marwa adalah sebahagian dari syi'ar Allah. Maka barangsiapa yang beribadah haji ke Baitullah atau ber-'umrah, maka tidak ada dosa baginya mengerjakan sa'i antara keduanya. dan barangsiapa yang mengerjakan suatu kebajikan dengan kerelaan hati, maka Sesungguhnya Allah Maha Mensyukuri kebaikan lagi Maha Mengetahui.*

Sa'i arti harfiahnya adalah usaha, sedangkan arti syari'ahnya pada ibadah haji dan umroh adalah berbolak balik sebanyak tujuh kali antara bukit shafa dan marwah demi melaksanakan perintah Allah (Shihab, 2000: 345). Sa'i merupakan salah satu rukun haji dan umroh, waktunya dilaksanakan setelah selesai melakukan thawaf. Dalam suatu hadis dijelaskan bahwa Rasulullah SAW pernah bersabda yang artinya:

> *"Diwajibkan atas kamu melakukan Sa'i maka hendaklah kamu lakukan." (Riwayat Ahmad).*

Kejadian di atas, dapat direpresentasikan pada graf dengan sisi ganda sebagai berikut:



Gambar 2.12 Graf Representasi Ibadah Sa'i

Dari uraian di atas tidak menutup kemungkinan banyak konsep matematika khususnya teori bilangan dan teori graf yang masih belum dikaji dan terungkap melalui pendekatan Al-Qur'an. Seperti yang telah diuraikan sebelumnya, bahwa suatu graf memiliki dua unsur pokok yang disebut titik dan sisi. Titik-titik dalam suatu graf akan saling terhubung dengan adanya suatu garis yang dinamakan sisi. Hal ini menunjukkan adanya suatu hubungan atau keterkaitan antara titik yang satu dengan titik yang lain.

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas graf faktorisasi prima suatu bilangan. Graf faktorisasi prima yang dimaksud dalam skripsi ini adalah jika setiap bilangan pada faktorisasi prima dengan pohon faktor prima dijadikan sebagai titik pada graf dan garis yang menghubungkan setiap bilangan pada faktorisasi prima dengan pohon faktor prima dijadikan sisi pada graf, maka akan terbentuk suatu graf faktorisasi prima.

Himpunan bilangan yang digunakan dalam skripsi ini adalah himpunan bilangan prima p_i^n , dengan $n \geq 1$ dan $i \geq 1$. Kemudian, pembahasan dilanjutkan dengan pembuatan dan penganalisaan serta merumuskan hubungan suatu bilangan dengan banyaknya titik, sisi dan lintasan terpanjang pada graf faktorisasi prima.

3.1. Faktorisasi Prima Suatu Bilangan

Bilangan prima tak berhingga banyaknya. Begitu pula bilangan prima berpangkat *n* juga tak berhingga banyaknya. Jika dibuat himpunan bilangan prima berpangkat, maka notasinya menurut definisi 2.4 pada bab 2 adalah $P^n = \left\{ p_1^n, p_2^n, p_3^n, \cdots \right\}$ dengan $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots$.

Pada subbab ini sebagai contoh hanya diambil sembilan himpunan. Adapun sembilan himpunan tersebut adalah himpunan p_i^n, dengan i = 1, 2, 3, 4, ..., 9 dan n = 1, 2, 3, ..., 9, yaitu:

$$P_i^1 = \left\{2^1,\, 3^1,\, 5^1,\, 7^1,\, 11^1,\, 13^1,\, 17^1,\, 19^1,\, 23^1,\, ...,\, p_{i-1}^1,\, p_i^1\right\}$$

$$P_i^2 = \left\{2^2,\, 3^2,\, 5^2,\, 7^2,\, 11^2,\, 13^2,\, 17^2,\, 19^2,\, 23^2,\, ...,\, p_{i-1}^2,\, p_i^2\right\}$$

•

•

•

$$P_i^9 = \left\{2^9,\, 3^9,\, 5^9,\, 7^9,\, 11^9,\, 13^9,\, 17^9,\, 19^9,\, 23^9,\, ...,\, p_{i-1}^9,\, p_i^9\right\}$$

3.1.1. Pembahasan Himpunan P_i^1

Dengan mengunakan pohon faktor dan memperhatikan teorema dasar aritmatika pada bab 2, akan ditunjukan faktor-faktor yang merupakan faktorisasi prima dari suatu bilangan. Di sini hanya dicontohkan dalam membuat pohon faktor dari bilangan $p_1^n = 2^n$, selanjutnya dapat dicari dengan cara serupa.

Faktorisasi prima dari bilangan P_i^1, adalah sebagai berikut:

1. Bilangan $p_1^1 = 2^1 = 2$

$$p_1^1:\quad \overset{2}{\bullet}$$

Gambar 3.1 Pohon Faktor Bilangan p_1^1

Untuk membuat pohon faktor dari bilangan $p_1^1 = 2^1 = 2$, maka harus dicari suatu bilangan prima terkecil (p = 2, 3,...), yang membagi 2 (p| 2). Ditemukan 2| 2, maka 2 adalah faktor dari 2. Karena hasil bagi 2 dibagi 2 adalah 1, maka 2 adalah bilangan prima dan pemfaktoran berhenti. Sehingga dari pohon faktor di atas didapatkan faktor dari 2^1 adalah 2.

2. Bilangan $p_2^1 = 3^1 = 3$

$$p_2^1:\quad \overset{3}{\bullet}$$

Gambar 3.2 Pohon Faktor Bilangan p_2^1

Sehingga dari pohon faktor di atas didapatkan faktor dari 3^1 adalah 3.

3. Bilangan $p_3^1 = 5^1 = 5$

$$p_3^1: \quad \overset{5}{\bullet}$$

Gambar 3.3 Pohon Faktor Bilangan p_3^1

Sehingga dari pohon faktor di atas didapatkan faktor dari 5^1 adalah 5.

4. Bilangan $p_4^1 = 7^1 = 7$

$$p_4^1: \quad \overset{7}{\bullet}$$

Gambar 3.4 Pohon Faktor Bilangan p_4^1

Sehingga dari pohon faktor di atas didapatkan faktor dari 7^1 adalah 7.

5. Bilangan $p_5^1 = 11^1 = 11$

$$p_5^1: \quad \overset{11}{\bullet}$$

Gambar 3.5 Pohon Faktor Bilangan p_5^1

Sehingga dari pohon faktor di atas didapatkan faktor dari $11^1 = 11$.

6. Bilangan $p_6^1 = 13^1 = 13$

$$p_6^1: \quad \overset{13}{\bullet}$$

Gambar 3.6 Pohon Faktor Bilangan p_6^1

Sehingga dari pohon faktor di atas didapatkan faktor dari 13^1 adalah 13.

7. Bilangan $p_7^1 = 17^1 = 17$

$$p_7^1: \quad \overset{17}{\bullet}$$

Gambar 3.7 Pohon Faktor Bilangan p_7^1

Sehingga dari pohon faktor di atas didapatkan faktor dari 17^1 adalah 17.

8. Bilangan $p_8^1 = 19^1 = 19$

$$p_8^1 : \quad \overset{19}{\bullet}$$

Gambar 3.8 Pohon Faktor Bilangan p_8^1

Sehingga dari pohon faktor di atas didapatkan faktor dari 19^1 adalah 19.

9. Bilangan $p_9^1 = 23^1 = 23$

$$p_9^1 : \quad \overset{23}{\bullet}$$

Gambar 3.9 Pohon Faktor Bilangan p_9^1

Sehingga dari pohon faktor di atas didapatkan faktor dari 23^1 adalah 23.

Perhatika pohon faktor bilangan $p_1^1, p_2^1, p_3^1, ..., p_9^1$ di atas. Untuk semua bilangan $p_1^1, p_2^1, p_3^1, ..., p_9^1$ hanya hanya memuat n = 1 yaitu p_i adalah bilangan itu sendiri. Karena bilangan $p_1^1, p_2^1, p_3^1, ..., p_9^1$ hanya memuat bilangan itu sendiri, maka $p_1^1, p_2^1, p_3^1, ..., p_9^1$ adalah faktor-faktor prima.

3.1.2. Pembahasan Himpunan P_i^2

Faktorisasi prima dari suatu bilangan P_i^2, sebagai berikut:

1. Bilangan $p_1^2 = 2^2 = 2 \times 2 = 4$

$$p_1^2 : \quad \begin{array}{ccc} & 4 & \\ \swarrow & & \searrow \\ 2 & & 2 \end{array}$$

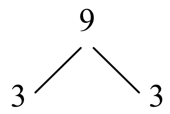
Gambar 3.10 Pohon Faktor Bilangan p_1^2

Untuk membuat pohon faktor dari bilangan $p_1^2 = 2^2 = 4$, maka harus dicari suatu bilangan prima terkecil (p = 2, 3, 5, ...), yang membagi 4 (p| 4).

Ditemukan 2| 4, maka 2 adalah faktor dari 2. Hasil bagi 4 dibagi 2 adalah 2, karena 2 adalah bilangan prima, maka pemfaktoran berhenti. Sehingga dari pohon faktor di atas didapatkan faktor dari 4 adalah 2 dan 2.

2. Bilangan $p_2^2 = 3^2 = 3 \times 3 = 9$

p_2^2:

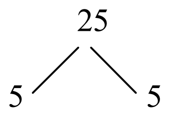


Gambar 3.11 Pohon Faktor Bilangan p_2^2

Sehingga dari pohon faktor di atas didapatkan faktor dari 9 adalah 3 dan 3.

3. Bilangan $p_3^2 = 5^2 = 5 \times 5 = 25$

p_3^2:

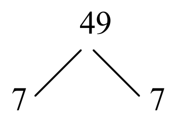


Gambar 3.12 Pohon Faktor Bilangan p_3^2

Sehingga dari pohon faktor di atas didapatkan faktor dari 25 adalah 5 dan 5.

4. Bilangan $p_4^2 = 7^2 = 7 \times 7 = 49$

p_4^2:

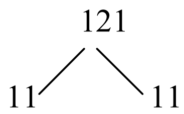


Gambar 3.13 Pohon Faktor Bilangan p_4^2

Sehingga dari pohon faktor di atas didapatkan faktor dari 49 adalah 7 dan 7.

5. Bilangan $p_5^2 = 11^2 = 11 \times 11 = 121$

p_5^2 :

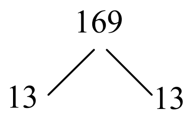


Gambar 3.14 Pohon Faktor Bilangan p_5^2

Sehingga dari pohon faktor di atas didapatkan faktor dari 121 adalah 11 dan 11.

6. Bilangan $p_6^2 = 13^2 = 13 \times 13 = 169$

p_6^2 :

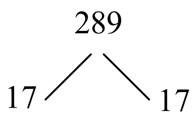


Gambar 3.15 Pohon Faktor Bilangan p_6^2

Sehingga dari pohon faktor di atas didapatkan faktor dari 169 adalah 13 dan 13.

7. Bilangan $p_7^2 = 17^2 = 17 \times 17 = 289$

p_7^2 :

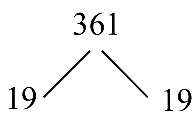


Gambar 3.16 Pohon Faktor Bilangan p_7^2

Sehingga dari pohon faktor di atas didapatkan faktor dari 289 adalah 17 dan 17.

8. Bilangan $p_8^2 = 19^2 = 19 \times 19 = 361$

p_8^2 :



Gambar 3.17 Pohon Faktor Bilangan p_8^2

Sehingga dari pohon faktor di atas didapatkan faktor dari 361 adalah 19 dan 19.

9. Bilangan $p_9^2 = 23^2 = 23 \times 23 = 529$

$$p_9^2 : \quad \begin{array}{ccc} & 529 & \\ / & & \backslash \\ 23 & & 23 \end{array}$$

Gambar 3.18 Pohon Faktor Bilangan p_9^2

Sehingga dari pohon faktor di atas didapatkan faktor dari 529 adalah 23 dan 23.

Perhatika pohon faktor bilangan $p_1^2,\ p_2^2,\ p_3^2,\ ...,\ p_9^2$ di atas.

Untuk bilangan p_1^2 memuat faktor prima sebanyak n = 2, yaitu p_{i} = {2, 2}. Karena himpunan bilangan p_1^2 = 4 bukan prima dan bilangan bulat positif lebih dari 1, maka menurut teorema dasar aritmatika dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari faktor-faktor prima dan didapatkan $4 = 2 \times 2 = 2^2$.

Karena p_1^2 dan faktor-faktornya dapat dinyatakan sebagai hasil kali faktor-faktor prima, maka p_1^2 adalah faktorisasi prima.

Untuk bilangan p_2^2 memuat faktor prima sebanyak n = 2, yaitu p_{i} = {3, 3}. Karena himpunan bilangan p_2^2 = 9 bukan prima dan bilangan bulat positif lebih dari 1, maka menurut teorema dasar aritmatika dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari faktor-faktor prima dan didapatkan $9 = 3 \times 3 = 3^2$.

Untuk bilangan p_3^2 memuat faktor prima sebanyak n = 2, yaitu p_{i} = {5, 5}. Karena himpunan bilangan p_3^2 = 25 bukan prima dan bilangan bulat positif lebih dari 1, maka menurut teorema dasar aritmatika dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari faktor-faktor prima dan didapatkan $25 = 5 \times 5 = 5^2$.

Untuk bilangan p_4^2 memuat faktor prima sebanyak n = 2, yaitu p_i = {7, 7}. Karena himpunan bilangan p_4^2 = 49 bukan prima dan bilangan bulat positif lebih dari 1, maka menurut teorema dasar aritmatika dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari faktor-faktor prima dan didapatkan $49 = 7 \times 7 = 7^2$.

Untuk bilangan p_5^2 memuat faktor prima sebanyak n = 2, yaitu p_i = {11, 11}. Karena himpunan bilangan p_5^2 = 121 bukan prima dan bilangan bulat positif lebih dari 1, maka menurut teorema dasar aritmatika dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari faktor-faktor prima dan didapatkan $121 = 11 \times 11 = 11^2$.

Untuk bilangan p_6^2 memuat faktor prima sebanyak n = 2, yaitu p_i = {13, 13}. Karena himpunan bilangan p_6^2 = 169 bukan prima dan bilangan bulat positif lebih dari 1, maka menurut teorema dasar aritmatika dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari faktor-faktor prima dan didapatkan $169 = 13 \times 13 = 13^2$.

Untuk bilangan p_7^2 memuat faktor prima sebanyak n = 2, yaitu p_i = {17, 17}. Karena himpunan bilangan p_7^2 = 289 bukan prima dan bilangan bulat positif lebih dari 1, maka menurut teorema dasar aritmatika dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari faktor-faktor prima dan didapatkan $289 = 17 \times 17 = 17^2$.

Untuk bilangan p_8^2 memuat faktor prima sebanyak n = 2, yaitu p_i = {19, 19}. Karena himpunan bilangan p_8^2 = 361 bukan prima dan bilangan bulat positif lebih dari 1, maka menurut teorema dasar aritmatika dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari faktor-faktor prima dan didapatkan $361 = 19 \times 19 = 19^2$.

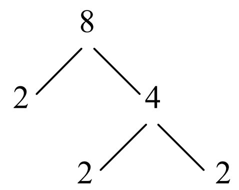
Untuk bilangan p_9^2 memuat faktor prima sebanyak n = 2, yaitu p_{i} = {23, 23}. Karena himpunan bilangan p_9^2 = 529 bukan prima dan bilangan bulat positif lebih dari 1, maka menurut teorema dasar aritmatika dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari faktor-faktor prima dan didapatkan $529 = 23 \times 23 = 23^2$.

3.1.3. Pembahasan Himpunan P_i^3

Faktorisasi prima dari suatu bilangan P_i^3, sebagai berikut:

1. Bilangan $p_1^3 = 2^3 = 2 \times 4 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

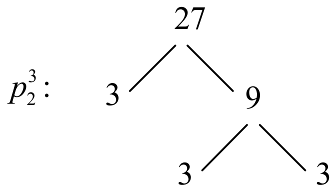
p_1^3 :



Gambar 3.19 Pohon Faktor Bilangan p_1^3

Untuk membuat pohon faktor dari bilangan $p_1^3 = 2^3 = 8$, maka harus dicari suatu bilangan prima terkecil (p = 2, 3, 5, ...), yang membagi 8 (p| 8). Ditemukan 2| 8, maka 2 adalah faktor dari 8, hasil bagi 8 dibagi 2 adalah 4, ditemukan 2| 4, maka 2 adalah faktor dari 4. hasil bagi 4 dibagi 2 adalah 2, karena 2 adalah bilangan prima, maka pemfaktoran berhenti. Sehingga dari pohon faktor di atas didapatkan faktor dari 8 adalah 2, 2, 2, dan 4.

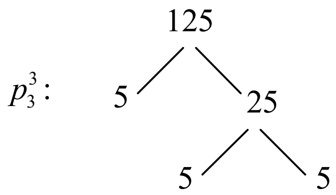
2. Bilangan $p_2^3 = 3^3 = 3 \times 9 = 3 \times 3 \times 3 = 27$



Gambar 3.20 Pohon Faktor Bilangan p_2^3

Sehingga dari pohon faktor di atas didapatkan faktor dari 27 adalah 3, 3, 3, dan 9.

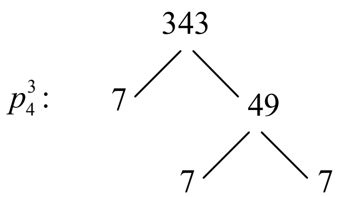
3. Bilangan $p_3^3 = 5^3 = 5 \times 25 = 5 \times 5 \times 5 = 125$



Gambar 3.21 Pohon Faktor Bilangan p_3^3

Sehingga dari pohon faktor di atas didapatkan faktor dari 125 adalah 5, 5, 5, dan 25.

4. Bilangan $p_4^3 = 7^3 = 7 \times 49 = 7 \times 7 \times 7 = 343$

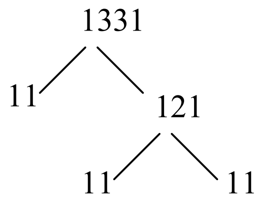


Gambar 3.22 Pohon Faktor Bilangan p_4^3

Sehingga dari pohon faktor di atas didapatkan faktor dari 343 adalah 7, 7, 7, dan 49.

5. Bilangan $p_5^3 = 11^3 = 11 \times 121 = 11 \times 11 \times 11 = 1331$

p_5^3:

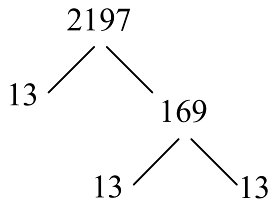


Gambar 3.23 Pohon Faktor Bilangan p_5^3

Sehingga dari pohon faktor di atas didapatkan faktor dari 1331 adalah 11, 11, 11, dan 121.

6. Bilangan $p_6^3 = 13^3 = 13 \times 169 = 13 \times 13 \times 13 = 2197$

p_6^3:

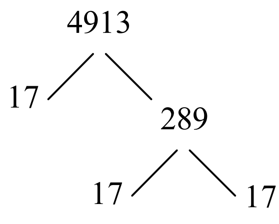


Gambar 3.24 Pohon Faktor Bilangan p_6^3

Sehingga dari pohon faktor di atas didapatkan faktor dari 2197 adalah 13, 13, 13, dan 169.

7. Bilangan $p_7^3 = 17^3 = 17 \times 289 = 17 \times 17 \times 17 = 4913$

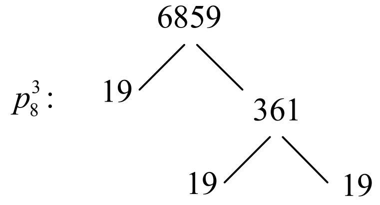
p_7^3:



Gambar 3.25 Pohon Faktor Bilangan p_7^3

Sehingga dari pohon faktor di atas didapatkan faktor dari 4913 adalah 17, 17, 17, dan 289.

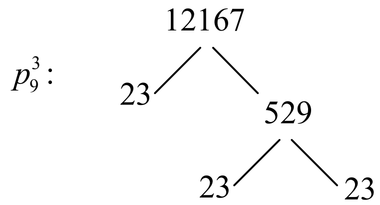
8. Bilangan $p_8^3 = 19^3 = 19 \times 361 = 19 \times 19 \times 19 = 6859$



Gambar 3.26 Pohon Faktor Bilangan p_8^3

Sehingga dari pohon faktor di atas didapatkan faktor dari 6859 adalah 19, 19, 19, dan 361.

9. Bilangan $p_9^3 = 23^3 = 23 \times 529 = 23 \times 23 \times 23 = 12167$



Gambar 3.27 Pohon Faktor Bilangan p_9^3

Sehingga dari pohon faktor di atas didapatkan faktor dari 12167 adalah 23, 23, 23, dan 529.

Perhatika pohon faktor bilangan p_1^3, p_2^3, p_3^3, ..., p_9^3 di atas.

Untuk bilangan p_1^3 memuat faktor prima sebanyak n = 3, yaitu p_{i} = {2, 2, 2}. Karena himpunan bilangan $p_1^2 = 4$ dan $p_1^3 = 8$ bukan prima dan bilangan bulat positif lebih dari 1, maka menurut teorema dasar aritmatika dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari faktor-faktor prima dan didapatkan $4 = 2 \times 2 = 2^2$ dan $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$.

Untuk bilangan p_2^3 memuat faktor prima sebanyak n = 3, yaitu p_{i} = {3, 3, 3}. Karena himupnan bilangan $p_2^2 = 9$ dan $p_2^3 = 27$ bukan prima dan bilangan bulat positif lebih dari 1, maka menurut teorema dasar aritmatika dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari faktor-faktor prima dan didapatkan $9 = 3 \times 3 = 3^2$ dan $27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$.

Untuk bilangan p_3^3 memuat faktor prima sebanyak n = 3, yaitu p_i = {5, 5, 5}. Karena himupnan bilangan $p_3^2 = 25$ dan $p_3^3 = 125$ bukan prima dan bilangan bulat positif lebih dari 1, maka menurut teorema dasar aritmatika dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari faktor-faktor prima dan didapatkan $25 = 5 \times 5 = 5^2$ dan $125 = 5 \times 5 \times 5 = 5^3$.

Untuk bilangan p_4^3 memuat faktor prima sebanyak n = 3, yaitu p_i = {7, 7, 7}. Karena himupnan bilangan $p_4^2 = 49$ dan $p_4^3 = 343$ bukan prima dan bilangan bulat positif lebih dari 1, maka menurut teorema dasar aritmatika dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari faktor-faktor prima dan didapatkan $49 = 7 \times 7 = 7^2$ dan $343 = 7 \times 7 \times 7 = 7^3$.

Untuk bilangan p_5^3 memuat faktor prima sebanyak n = 3, yaitu p_i = {11, 11, 11}. Karena himupnan bilangan $p_5^2 = 121$ dan $p_5^3 = 1331$ bukan prima dan bilangan bulat positif lebih dari 1, maka menurut teorema dasar aritmatika dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari faktor-faktor prima dan didapatkan $121 = 11 \times 11 = 11^2$ dan $1331 = 11 \times 11 \times 11 = 11^3$.

Untuk bilangan p_6^3 memuat faktor prima sebanyak n = 3, yaitu p_i = {13, 13, 13}. Karena himupnan bilangan $p_6^2 = 169$ dan $p_6^3 = 1297$ bukan prima dan bilangan bulat positif lebih dari 1, maka menurut teorema dasar aritmatika dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari faktor-faktor prima dan didapatkan $169 = 13 \times 13 = 13^2$ dan $2197 = 13 \times 13 \times 13 = 13^3$.

Untuk bilangan p_7^3 memuat faktor prima sebanyak n = 3, yaitu p_{i} = {17, 17, 17}. Karena himupnan bilangan $p_7^2 = 289$ dan $p_7^3 = 4913$ bukan prima dan bilangan bulat positif lebih dari 1, maka menurut teorema dasar aritmatika dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari faktor-faktor prima dan didapatkan $289 = 17 \times 17 = 17^2$ dan $4913 = 17 \times 17 \times 17 = 17^3$.

Untuk bilangan p_8^3 memuat faktor prima sebanyak n = 3, yaitu p_{i} = {19, 19, 19}. Karena himupnan bilangan $p_8^2 = 361$ dan $p_8^3 = 6859$ bukan prima dan bilangan bulat positif lebih dari 1, maka menurut teorema dasar aritmatika dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari faktor-faktor prima dan didapatkan $361 = 19 \times 19 = 19^2$ dan $6859 = 19 \times 19 \times 19 = 19^3$.

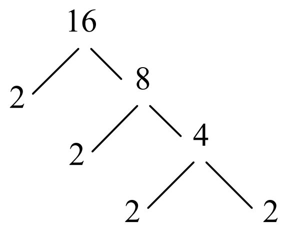
Untuk bilangan p_9^3 memuat faktor prima sebanyak n = 3, yaitu p_{i} = {23, 23, 23}. Karena himupnan bilangan $p_9^2 = 529$ dan $p_9^3 = 12167$ bukan prima dan bilangan bulat positif lebih dari 1, maka menurut teorema dasar aritmatika dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari faktor-faktor prima dan didapatkan $529 = 23 \times 23 = 23^2$ dan $12167 = 23 \times 23 \times 23 = 23^3$.

3.1.4. Pembahasan Himpunan P_i^4

Faktorisasi prima dari suatu bilangan P_i^4, sebagai berikut:

1. Bilangan $p_1^4 = 2^4 = 2 \times 8 = 2 \times 2 \times 4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

p_1^4:



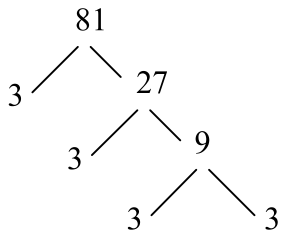
Gambar 3.28 Pohon Faktor Bilangan p_1^4

Untuk membuat pohon faktor dari bilangan $p_1^4 = 2^4 = 16$, maka harus dicari suatu bilangan prima terkecil (p = 2, 3, 5, ...), yang membagi 16 (p| 16). Ditemukan 2| 16, maka 2 adalah faktor dari 16, hasil bagi 16 dibagi 2 adalah 8, ditemukan 2| 8, maka 2 adalah faktor dari 8. hasil bagi 8 dibagi 2 adalah 4, ditemukan 2| 4, maka 2 adalah faktor dari 4. hasil bagi 2 dibagi 2 adalah 2, karena 2 adalah bilangan prima, maka pemfaktoran berhenti.

Sehingga dari pohon faktor di atas didapatkan faktor dari 16 adalah 2, 2, 2, 2, 4, dan 8.

2. Bilangan $p_2^4 = 3^4 = 3 \times 27 = 3 \times 3 \times 9 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

p_2^4:

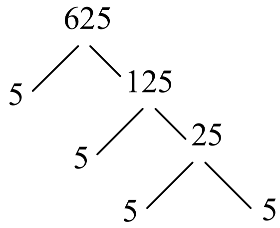


Gambar 3.29 Pohon Faktor Bilangan p_2^4

Sehingga dari pohon faktor di atas didapatkan faktor dari 81 adalah 3, 3, 3, 3, 9, dan 27.

3. Bilangan $p_3^4 = 5^4 = 5 \times 125 = 5 \times 5 \times 25 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$

p_3^4 :

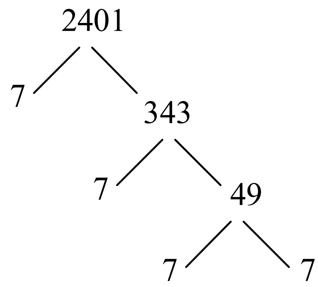


Gambar 3.30 Pohon Faktor Bilangan p_3^4

Sehingga dari pohon faktor di atas didapatkan faktor dari 625 adalah 5, 5, 5, 5, 25, dan 125.

4. Bilangan $p_4^4 = 7^4 = 7 \times 343 = 7 \times 7 \times 49 = 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 2401$

p_4^4:

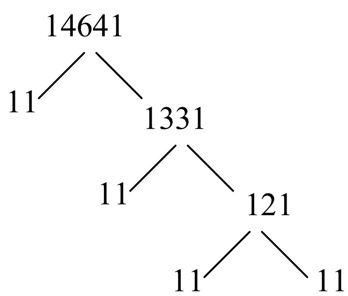


Gambar 3.31 Pohon Faktor Bilangan p_4^4

Sehingga dari pohon faktor di atas didapatkan faktor dari 2401 adalah 7, 7, 7, 7, 49, dan 343.

5. Bilangan $p_5^4 = 11^4 = 11 \times 1331 = 11 \times 11 \times 121 = 11 \times 11 \times 11 \times 11 = 14641$

p_5^4:

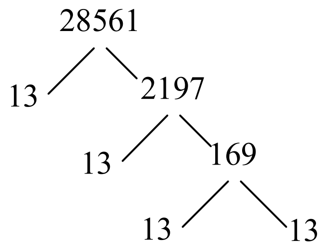


Gambar 3.32 Pohon Faktor Bilangan p_5^4

Sehingga dari pohon faktor di atas didapatkan faktor dari 14641 adalah 11, 11, 11, 11, 121, dan 1331.

6. Bilangan $p_6^4 = 13^4 = 13 \times 2197 = 13 \times 13 \times 169 = 13 \times 13 \times 13 \times 13 = 28561$

$p_6^3:$



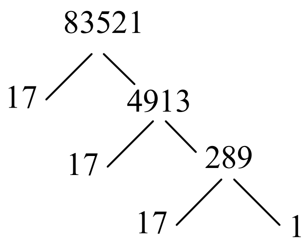
Gambar 3.33 Pohon Faktor Bilangan p_6^4

Sehingga dari pohon faktor di atas didapatkan faktor dari 28561 adalah 13, 13, 13, 13, 169, dan 2197.

7. Bilangan

$p_7^4 = 17^4 = 17 \times 4913 = 17 \times 17 \times 289 = 17 \times 17 \times 17 \times 17 = 83521$

$p_7^4:$



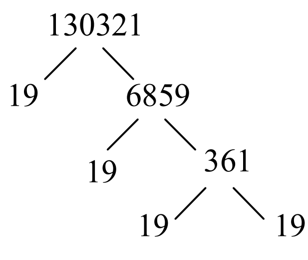
Gambar 3.34 Pohon Faktor Bilangan p_7^4

Sehingga dari pohon faktor di atas didapatkan faktor dari 4913 adalah 17, 17, 17, 17, 289, dan 4913.

8. Bilangan

$p_8^4 = 19^4 = 19 \times 6859 = 19 \times 19 \times 361 = 19 \times 19 \times 19 \times 19 = 130321$

$p_8^4:$

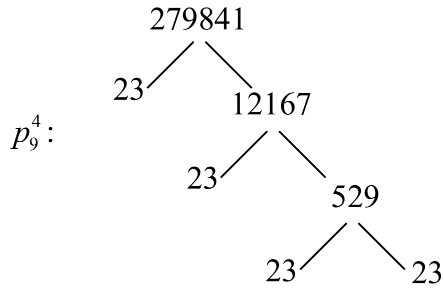


Gambar 3.35 Pohon Faktor Bilangan p_8^4

Sehingga dari pohon faktor di atas didapatkan faktor dari 130321 adalah 19, 19, 19, 19, 361, dan 6859.

9. Bilangan

$p_9^4 = 23^4 = 23 \times 12167 = 23 \times 23 \times 529 = 23 \times 23 \times 23 \times 23 = 279841$



Gambar 3.36 Pohon Faktor Bilangan p_9^4

Sehingga dari pohon faktor di atas didapatkan faktor dari 279841 adalah 23, 23, 23, 23, 529, dan 12167.

Perhatika pohon faktor bilangan $p_1^4, p_2^4, p_3^4, ..., p_9^4$ di atas.

Untuk bilangan p_1^4 memuat faktor prima sebanyak n = 4, yaitu p_{i} = {2, 2, 2, 2}. Karena himupnan bilangan $p_1^2 = 4$, $p_1^3 = 8$ dan $p_1^4 = 16$ bukan prima dan bilangan bulat positif lebih dari 1, maka menurut teorema dasar aritmatika dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari faktor-faktor prima dan didapatkan, sebagai berikut: $4 = 2 \times 2 = 2^2$, $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$, dan $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$.

Untuk bilangan p_2^4 memuat faktor prima sebanyak n = 4, yaitu p_{i} = {3, 3, 3, 3}. Karena himupnan bilangan $p_2^2 = 9$, $p_2^3 = 27$ dan $p_2^4 = 81$ bukan prima dan bilangan bulat positif lebih dari 1, maka menurut teorema dasar aritmatika dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari faktor-faktor prima dan didapatkan, sebagai berikut: $9 = 3 \times 3 = 3^2$, $27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$, dan $81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$.

Untuk bilangan p_3^4 memuat faktor prima sebanyak n = 4, yaitu p_{i} = {5, 5, 5, 5}. Karena himupnan bilangan $p_3^2 = 25,\ p_3^3 = 125$ dan $p_3^4 = 625$ bukan prima dan bilangan bulat positif lebih dari 1, maka menurut teorema dasar aritmatika dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari faktor-faktor prima dan didapatkan, sebagai berikut: $25 = 5 \times 5 = 5^2$, $125 = 5 \times 5 \times 5 = 5^3$, dan $625 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$.

Untuk bilangan p_4^4 memuat faktor prima sebanyak n = 4, yaitu p_{i} = {7, 7, 7, 7}. Karena himupnan bilangan $p_4^2 = 49,\ p_4^3 = 343$ dan $p_4^4 = 2401$ bukan prima dan bilangan bulat positif lebih dari 1, maka menurut teorema dasar aritmatika dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari faktor-faktor prima dan didapatkan, sebagai berikut:

$$49 = 7 \times 7 = 7^2,\ 343 = 7 \times 7 \times 7 = 7^3, \text{ dan } 2401 = 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^4.$$

Untuk bilangan p_5^4 memuat faktor prima sebanyak n = 4, yaitu p_{i} = {11, 11, 11, 11}. Karena himupnan bilangan $p_5^2 = 121,\ p_5^3 = 1331$ dan $p_5^4 = 14641$ bukan prima dan bilangan bulat positif lebih dari 1, maka menurut teorema dasar aritmatika dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari faktor-faktor prima dan didapatkan, sebagai berikut: $121 = 11 \times 11 = 11^2$, $1331 = 11 \times 11 \times 11 = 11^3$, dan

$$14641 = 11 \times 11 \times 11 \times 11 = 11^4$$

Untuk bilangan p_6^4 memuat faktor prima sebanyak n = 4, yaitu p_{i} = {13, 13, 13, 14}. Karena himupnan bilangan $p_6^2 = 169,\ p_6^3 = 2197$ dan $p_6^4 = 28561$ bukan prima dan bilangan bulat positif lebih dari 1, maka menurut teorema dasar aritmatika dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari faktor-faktor prima dan didapatkan, sebagai berikut: $169 = 13 \times 13 = 13^2$, $2197 = 13 \times 13 \times 13 = 13^3$, dan

$$28561 = 13 \times 13 \times 13 \times 13 = 13^4$$

Untuk bilangan p_7^4 memuat faktor prima sebanyak n = 4, yaitu p_i = {17, 17, 17, 17}. Karena himupnan bilangan $p_7^2 = 289$, $p_7^3 = 4913$ dan $p_7^4 = 83521$ bukan prima dan bilangan bulat positif lebih dari 1, maka menurut teorema dasar aritmatika dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari faktor-faktor prima dan didapatkan, sebagai berikut: $289 = 17 \times 17 = 17^2$, $4913 = 17 \times 17 \times 17 = 17^3$, dan

$$83521 = 17 \times 17 \times 17 \times 17 = 17^4$$

Untuk bilangan p_8^3 memuat faktor prima sebanyak n = 4, yaitu p_i = {19, 19, 19, 19}. Karena himupnan bilangan $p_8^2 = 361$, $p_8^3 = 6859$ dan $p_8^4 = 130321$ bukan prima dan bilangan bulat positif lebih dari 1, maka menurut teorema dasar aritmatika dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari faktor-faktor prima dan didapatkan, sebagai berikut: $361 = 19 \times 19 = 19^2$, $6859 = 19 \times 19 \times 19 = 19^3$, dan

$$130321 = 19 \times 19 \times 19 \times 19 = 19^4$$

Untuk bilangan p_9^4 memuat faktor prima sebanyak n = 4, yaitu p_i = {23, 23, 23, 23}. Karena himupnan bilangan $p_9^2 = 529$, $p_9^3 = 12167$ dan $p_9^4 = 279841$ bukan prima dan bilangan bulat positif lebih dari 1, maka menurut teorema dasar aritmatika dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari faktor-faktor prima dan didapatkan, sebagai berikut: $529 = 23 \times 23 = 23^2$, $12167 = 23 \times 23 \times 23 = 23^3$, dan

$$279841 = 23 \times 23 \times 23 \times 23 = 23^4$$

Dengan beberapa himpunan bilangan prima $p_i^1,\ p_i^2,\ p_i^3,\ p_i^4$ di atas, dapat dicari untuk himpunan bilangan prima:

$$
\begin{aligned}
P_i^5 &= \left\{2^5,\ 3^5,\ 5^5,\ 7^5,\ 11^5,\ 13^5,\ 17^5,\ 19^5,\ 23^5,\ ...,\ p_{i-1}^5,\ p_i^5\right\}\\
P_i^6 &= \left\{2^6,\ 3^6,\ 5^6,\ 7^6,\ 11^6,\ 13^6,\ 17^6,\ 19^6,\ 23^6,\ ...,\ p_{i-1}^6,\ p_i^6\right\}\\
P_i^7 &= \left\{2^7,\ 3^7,\ 5^7,\ 7^7,\ 11^7,\ 13^7,\ 17^7,\ 19^7,\ 23^7,\ ...,\ p_{i-1}^7,\ p_i^7\right\}\ ,\\
P_i^8 &= \left\{2^8,\ 3^8,\ 5^8,\ 7^8,\ 11^8,\ 13^8,\ 17^8,\ 19^8,\ 23^8,\ ...,\ p_{i-1}^8,\ p_i^8\right\}\\
P_i^9 &= \left\{2^9,\ 3^9,\ 5^9,\ 7^9,\ 11^9,\ 13^9,\ 17^9,\ 19^9,\ 23^9,\ ...,\ p_{i-1}^9,\ p_i^9\right\}
\end{aligned}
$$

Dari himpunan bilangan prima $p_i^1,\ p_i^2,\ p_i^3,\ p_i^4,\ p_i^5,\ p_i^6,\ p_i^7,\ p_i^8,\ p_i^9$ didapatkan hubungan antara himpunan suatu bilangan prima (p_i^n), pangkat atau banyaknya faktor prima (selanjutnya disebut cabang prima), dinotasikan dengan *n*, dan banyaknya faktor bukan prima (selanjutnya disebut cabang komposit) yang dapat difaktorisasi prima, dinotasikan dengan *m*, pada faktorisasi prima dengan pohon faktor. Data yang diperoleh adalah sebagai berikut:

Tabel 3.1 Hubungan antara Bilangan Prima (p_i^n) dengan Pengkat *n* dan *m* Banyak Cabang Komposit

p_i	p^n	n	m
$p_1 = 2$	$2^1 = 2$	1	0
	$2^2 = 2 \text{ x } 2$	2	1
	$2^3 = 2 \text{ x } 2^2 = 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2$	3	2
	$2^4 = 2 \text{ x } 2^3 = 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2^2 = 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2$	4	3
	$2^5 = 2 \text{ x } 2^4 = 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2^3 = 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2^2$ $= 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2$	5	4
	$2^6 = 2 \text{ x } 2^5 = 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2^4 = 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2^3$ $= 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2^2 = 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2$	6	5
	$2^7 = 2 \text{ x } 2^6 = 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2^5 = 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2^4$ $= 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2^3 = 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2^2$ $= 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2$	7	6
	$2^8 = 2 \text{ x } 2^7 = 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2^6 = 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2^5$ $= 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2^4 = 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2^3$ $= 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2^2$ $= 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2$	8	7
	$2^9 = 2 \text{ x } 2^8 = 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2^7 = 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2^6$	9	8

	$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2^4$ $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2^3$ $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2^2$ $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$		
$p_2 = 3$	$3^1 = 3$	1	0
	$3^2 = 3 \times 3$	2	1
	$3^3 = 3 \times 3^2 = 3 \times 3 \times 3$	3	2
	$3^4 = 3 \times 3^3 = 3 \times 3 \times 3^2 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$	4	3
	$3^5 = 3 \times 3^4 = 3 \times 3 \times 3^3 = 3 \times 3 \times 3 \times 3^2$ $= 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$	5	4
	$3^6 = 3 \times 3^5 = 3 \times 3 \times 3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3^3$ $= 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3^2 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$	6	5
	$3^7 = 3 \times 3^6 = 3 \times 3 \times 3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3^4$ $= 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3^3 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3^2$ $= 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$	7	6
	$3^8 = 3 \times 3^7 = 3 \times 3 \times 3^6 = 3 \times 3 \times 3 \times 3^5$ $= 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3^3$ $= 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3^2$ $= 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$	8	7
	$3^9 = 3 \times 3^8 = 3 \times 3 \times 3^7 = 3 \times 3 \times 3 \times 3^6$ $= 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3^4$ $= 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3^3$ $= 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3^2$ $= 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 2$	9	8
$p_3 = 5$	$5^1 = 5$	1	0
	$5^2 = 5 \times 5$	2	1
	$5^3 = 5 \times 5^2 = 5 \times 5 \times 5$	3	2
	$5^4 = 5 \times 5^3 = 5 \times 5 \times 5^2 = 5 \times 5 \times 5 \times 5$	4	3
	$5^5 = 5 \times 5^4 = 5 \times 5 \times 5^3 = 5 \times 5 \times 5 \times 5^2$ $= 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$	5	4
	$5^6 = 5 \times 5^5 = 5 \times 5 \times 5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5^3$ $= 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5^2 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$	6	5
	$5^7 = 5 \times 5^6 = 5 \times 5 \times 5^5 = 5 \times 5 \times 5 \times 5^4$ $= 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5^3 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5^2$ $= 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$	7	6
	$5^8 = 5 \times 5^7 = 5 \times 5 \times 5^6 = 5 \times 5 \times 5 \times 5^5$ $= 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5^3$ $= 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5^2$ $= 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$	8	7
	$5^9 = 5 \times 5^8 = 5 \times 5 \times 5^7 = 5 \times 5 \times 5 \times 5^6$ $= 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5^5 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5^4$ $= 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5^3$ $= 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5^2$ $= 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$	9	8
$p_4 = 7$	$7^1 = 7$	1	0

	$7^2 = 7 \times 7$	2	1
	$7^3 = 7 \times 7^2 = 7 \times 7 \times 7$	3	2
	$7^4 = 7 \times 7^3 = 7 \times 7 \times 7^2 = 7 \times 7 \times 7 \times 7$	4	3
	$7^5 = 7 \times 7^4 = 7 \times 7 \times 7^3 = 7 \times 7 \times 7 \times 7^2$ $= 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$	5	4
	$7^6 = 7 \times 7^5 = 7 \times 7 \times 7^4 = 7 \times 7 \times 7 \times 7^3$ $= 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7^2 = 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$	6	5
	$7^7 = 7 \times 7^6 = 7 \times 7 \times 7^5 = 7 \times 7 \times 7 \times 7^4$ $= 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7^3 = 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7^2$ $= 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$	7	6
	$7^8 = 7 \times 7^7 = 7 \times 7 \times 7^6 = 7 \times 7 \times 7 \times 7^5$ $= 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7^4 = 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7^3$ $= 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7^2$ $= 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$	8	7
	$7^9 = 7 \times 7^8 = 7 \times 7 \times 7^7 = 7 \times 7 \times 7 \times 7^6$ $= 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7^5 = 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7^4$ $= 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7^3$ $= 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7^2$ $= 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$	9	8
$p_5 = 11$	$11^1 = 11$	1	0
	$11^2 = 11 \times 11$	2	1
	$11^3 = 11 \times 11^2 = 11 \times 11 \times 11$	3	2
	$11^4 = 11 \times 11^3 = 11 \times 11 \times 11^2$ $= 11 \times 11 \times 11 \times 11$	4	3
	$11^5 = 11 \times 11^4 = 11 \times 11 \times 11^3$ $= 11 \times 11 \times 11 \times 11^2$ $= 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11$	5	4
	$11^6 = 11 \times 11^5 = 11 \times 11 \times 11^4 = 11 \times 11 \times 11 \times 11^3$ $= 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11^2 = 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11$	6	5
	$11^7 = 11 \times 11^6 = 11 \times 11 \times 11^5 = 11 \times 11 \times 11 \times 11^4$ $= 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11^3 = 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11^2$ $= 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11$	7	6
	$11^8 = 11 \times 11^7 = 11 \times 11 \times 11^6 = 11 \times 11 \times 11 \times 11^5$ $= 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11^4 = 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11^3$ $= 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11^2$ $= 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11$	8	7
	$11^9 = 11 \times 11^8 = 11 \times 11 \times 11^7 = 11 \times 11 \times 11 \times 11^6$ $= 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11^5 = 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11^4$ $= 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11^3$ $= 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11^2$ $= 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11$	9	8
$p_6 = 13$	$13^1 = 13$	1	0
	$13^2 = 13 \times 13$	2	1
	$13^3 = 13 \times 13^2 = 13 \times 13 \times 13$	3	2
	$13^4 = 13 \times 13^3 = 13 \times 13 \times 13^2$	4	3

	$= 13 \times 13 \times 13 \times 13$		
	$13^5 = 13 \times 13^4 = 13 \times 13 \times 13^3$ $= 13 \times 13 \times 13 \times 13^2$ $= 13 \times 13 \times 13 \times 13 \times 13$	5	4
	$13^6 = 13 \times 13^5 = 13 \times 13 \times 13^4 = 13 \times 13 \times 13 \times 13^3$ $= 13 \times 13 \times 13 \times 13 \times 13^2 = 13 \times 13 \times 13 \times 13 \times 13 \times 13$	6	5
	$13^7 = 13 \times 13^6 = 13 \times 13 \times 13^5 = 13 \times 13 \times 13 \times 13^4$ $= 13 \times 13 \times 13 \times 13 \times 13^3 = 13 \times 13 \times 13 \times 13 \times 13 \times 13^2$ $= 13 \times 13 \times 13 \times 13 \times 13 \times 13 \times 13$	7	6
	$13^8 = 13 \times 13^7 = 13 \times 13 \times 13^6 = 13 \times 13 \times 13 \times 13^5$ $= 13 \times 13 \times 13 \times 13 \times 13^4 = 13 \times 13 \times 13 \times 13 \times 13 \times 13^3$ $= 13 \times 13 \times 13 \times 13 \times 13 \times 13 \times 13^2$ $= 13 \times 13 \times 13 \times 13 \times 13 \times 13 \times 13 \times 13$	8	7
	$13^9 = 13 \times 13^8 = 13 \times 13 \times 13^7 = 13 \times 13 \times 13 \times 13^6$ $= 13 \times 13 \times 13 \times 13 \times 13^5 = 13 \times 13 \times 13 \times 13 \times 13 \times 13^4$ $= 13 \times 13 \times 13 \times 13 \times 13 \times 13 \times 13^3$ $= 13 \times 13 \times 13 \times 13 \times 13 \times 13 \times 13 \times 13^2$ $= 13 \times 13 \times 13 \times 13 \times 13 \times 13 \times 13 \times 13 \times 13$	9	8
$p_7 = 17$	$17^1 = 17$	1	0
	$17^2 = 17 \times 17$	2	1
	$17^3 = 17 \times 17^2 = 17 \times 17 \times 17$	3	2
	$17^4 = 17 \times 17^3 = 17 \times 17 \times 17^2$ $= 17 \times 17 \times 17 \times 17$	4	3
	$17^5 = 17 \times 17^4 = 17 \times 17 \times 17^3$ $= 17 \times 17 \times 17 \times 17^2$ $= 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17$	5	4
	$17^6 = 17 \times 17^5 = 17 \times 17 \times 17^4 = 17 \times 17 \times 17 \times 17^3$ $= 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17^2 = 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17$	6	5
	$17^7 = 17 \times 17^6 = 17 \times 17 \times 17^5 = 17 \times 17 \times 17 \times 17^4$ $= 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17^3 = 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17^2$ $= 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17$	7	6
	$17^8 = 17 \times 17^7 = 17 \times 17 \times 17^6 = 17 \times 17 \times 17 \times 17^5$ $= 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17^4 = 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17^3$ $= 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17^2$ $= 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17$	8	7
	$17^9 = 17 \times 17^8 = 17 \times 17 \times 17^7 = 17 \times 17 \times 17 \times 17^6$ $= 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17^5 = 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17^4$ $= 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17^3$ $= 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17^2$ $= 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17$	9	8
$p_8 = 19$	$19^1 = 19$	1	0
	$19^2 = 19 \times 19$	2	1
	$19^3 = 19 \times 19^2 = 19 \times 19 \times 19$	3	2
	$19^4 = 19 \times 19^3 = 19 \times 19 \times 19^2$ $= 19 \times 19 \times 19 \times 19$	4	3

	$19^5 = 19 \times 19^4 = 19 \times 19 \times 19^3$ $= 19 \times 19 \times 19 \times 19^2$ $= 19 \times 19 \times 19 \times 19 \times 19$	5	4
	$19^6 = 19 \times 19^5 = 19 \times 19 \times 19^4 = 19 \times 19 \times 19 \times 19^3$ $= 19 \times 19 \times 19 \times 19 \times 19^2 = 19 \times 19 \times 19 \times 19 \times 19 \times 19$	6	5
	$19^7 = 19 \times 19^6 = 19 \times 19 \times 19^5 = 19 \times 19 \times 19 \times 19^4$ $= 19 \times 19 \times 19 \times 19 \times 19^3 = 19 \times 19 \times 19 \times 19 \times 19 \times 19^2$ $= 19 \times 19 \times 19 \times 19 \times 19 \times 19 \times 19$	7	6
	$19^8 = 19 \times 19^7 = 19 \times 19 \times 19^6 = 19 \times 19 \times 19 \times 19^5$ $= 19 \times 19 \times 19 \times 19 \times 19^4 = 19 \times 19 \times 19 \times 19 \times 19 \times 19^3$ $= 19 \times 19 \times 19 \times 19 \times 19 \times 19 \times 19^2$ $= 19 \times 19 \times 19 \times 19 \times 19 \times 19 \times 19 \times 19$	8	7
	$19^9 = 19 \times 19^8 = 19 \times 19 \times 19^7 = 19 \times 19 \times 19 \times 19^6$ $= 19 \times 19 \times 19 \times 19 \times 19^5 = 19 \times 19 \times 19 \times 19 \times 19 \times 19^4$ $= 19 \times 19 \times 19 \times 19 \times 19 \times 19 \times 19^3$ $= 19 \times 19 \times 19 \times 19 \times 19 \times 19 \times 19 \times 19^2$ $= 19 \times 19 \times 19 \times 19 \times 19 \times 19 \times 19 \times 19 \times 19$	9	8
$p_9 = 23$	$23^1 = 23$	1	0
	$23^2 = 23 \times 23$	2	1
	$23^3 = 23 \times 23^2 = 23 \times 23 \times 23$	3	2
	$23^4 = 23 \times 23^3 = 23 \times 23 \times 23^2$ $= 23 \times 23 \times 23 \times 23$	4	3
	$23^5 = 23 \times 23^4 = 23 \times 23 \times 23^3$ $= 23 \times 23 \times 23 \times 23^2$ $= 23 \times 23 \times 23 \times 23 \times 23$	5	4
	$23^6 = 23 \times 23^5 = 23 \times 23 \times 23^4 = 23 \times 23 \times 23 \times 23^3$ $= 23 \times 23 \times 23 \times 23 \times 23^2 = 23 \times 23 \times 23 \times 23 \times 23 \times 23$	6	5
	$23^7 = 23 \times 23^6 = 23 \times 23 \times 23^5 = 23 \times 23 \times 23 \times 23^4$ $= 23 \times 23 \times 23 \times 23 \times 23^3 = 23 \times 23 \times 23 \times 23 \times 23 \times 23^2$ $= 23 \times 23 \times 23 \times 23 \times 23 \times 23 \times 23$	7	6
	$23^8 = 23 \times 23^7 = 23 \times 23 \times 23^6 = 23 \times 23 \times 23 \times 23^5$ $= 23 \times 23 \times 23 \times 23 \times 23^4 = 23 \times 23 \times 23 \times 23 \times 23 \times 23^3$ $= 23 \times 23 \times 23 \times 23 \times 23 \times 23 \times 23^2$ $= 23 \times 23 \times 23 \times 23 \times 23 \times 23 \times 23 \times 23$	8	7
	$23^9 = 23 \times 23^8 = 23 \times 23 \times 23^7 = 23 \times 23 \times 23 \times 23^6$ $= 23 \times 23 \times 23 \times 23 \times 23^5 = 23 \times 23 \times 23 \times 23 \times 23 \times 23^4$ $= 23 \times 23 \times 23 \times 23 \times 23 \times 23 \times 23^3$ $= 23 \times 23 \times 23 \times 23 \times 23 \times 23 \times 23 \times 23^2$ $= 23 \times 23 \times 23 \times 23 \times 23 \times 23 \times 23 \times 23 \times 23$	9	8

Sumber: analisis penulis 2010.

Dengan pohon faktor dan teorema dasar aritmatika, dari tabel 3.1 di atas didapat kenyataan bahwa suatu bilangan bulat positif lebih dari 1 dapat nyatakan sebagai hasil kali faktor-faktor prima dan faktor-faktor dari bilangan tersebut juga dapat dinyatakan sebagai suatu hasil kali faktor-faktor prima. Dari suatu himpunan bilangan prima (p_i^n), diperoleh banyaknya cabang prima (p_1, p_2, p_3,...) sebanyak n dan cabang komposit (k_1, k_2, k_3,...) sebanyak $m = n$-1.

3.2. Graf Faktorisasi Prima suatu Bilangan

Pada subbab ini akan dibahas graf faktorisasi prima, dinotasikan dengan G_i^n. Kemudian dilanjutkan dengan graf lintasan dari graf faktorisasi prima, dinotasikan dengan $p_{G_i^n}$.

3.2.1. Membentuk Graf Faktorisasi Prima G_i^n

Untuk menyusun atau menggambar graf faktorisasi prima G_i^n dari:

p_i^1, p_i^2, p_i^3, p_i^4, ..., p_i^n

Jadikan setiap anggota bilangan pada pohon faktor sebagai titik pada graf dan setiap garis yang menghubungkan setiap anggota bilangan pada pohon faktor sebagai sisi pada graf. Dengan memperhatikan langkah-langkah membuat graf faktorisasi prima adalah sebagai berikut:

1. jadikan faktor bilangan prima terkecil $p_1| a$ sebagai v_1 dan a sebagai v_2 dan jadikan garis penghubung antara p_1 dan a sebababagi e_1
2. misal hasil dari $p_1| a$ adalah b, maka jadikan b sebagai v_3 dan jadikan garis penghubung antara a dan b sebababagi e_2
3. jika b adalah bilangan komposit, maka ulangi langkah 1 dan jadikan faktor prima $p_2| b$ sebagai v_4, jadikan garis penghubung antara p_2 dan b sebagai e_3

4. misal hasil dari $p_2|\ b$ adalah c, maka jadikan c sebagai v_5 dan jadikan garis penghubung antara b dan c sebabagi e_4 . Begitu seterusnya sampai pemfaktoran di akhiri dengan faktor prima.

3.2.1.1. Graf Faktorisasi Prima Bilangan p_i^1

1. Graf Faktorisasi Prima untuk $p_1^1 = 2^1 = 2$

   $p_1^1 = 2$ adalah suatu bilangan bulat positif yang dengan pohon faktor prima ditunjukan memuat n = 1 dan m = 0 faktorisasi prima. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik V_i dan garis pada pohon faktor prima diwakili oleh sisi E_j. Dengan mengikuti prosedur yang telah ditentukan akan terbentuk graf G_1^1 sebagai berikut:

   $$G_1^1 : \quad \bullet\ v_1$$

   Gambar 3.37 Graf Faktorisasi Prima G_1^1

   Graf ini mempunyai ciri diantaranya:

   a. Memiliki 1 titik , $V\left(G_1^1\right) = \{v_1\}$ maka *order* dari G_1^1 adalah 1 atau $p(G_1^1) = 1$.

   b. Memiliki 0 sisi, $E\left(G_1^1\right) = \{\ \}$, dengan demikian graf ini mempunyai *size* 0 atau $q(G_1^1) = 0$.

   c. Derajat setiap titik pada graf ini adalah $\deg_{G_1^1}(v_1) = 0$. Maka derajat maksimum dari titik-titik pada graf ini adalah 0.

2. Graf Faktorisasi Prima untuk $p_2^1 = 3^1 = 3$

$p_2^1 = 3$ adalah suatu bilangan bulat positif yang dengan pohon faktor prima ditunjukan memuat n = 1 dan m = 0 faktorisasi prima. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik V_i dan garis pada pohon faktor prima diwakili oleh sisi E_j. Dengan mengikuti prosedur yang telah ditentukan akan terbentuk graf G_2^1 sebagai berikut:

G_2^1 : ● v_1

Gambar 3.38 Graf Faktorisasi Prima G_2^1

Graf ini mempunyai ciri diantaranya:

a. Memiliki 1 titik , $V\left(G_2^1\right) = \{v_1\}$ maka *order* dari G_2^1 adalah 1 atau $p(G_2^1) = 1$.

b. Memiliki 0 sisi, $E\left(G_2^1\right) = \{\ \}$, dengan demikian graf ini mempunyai *size* 0 atau $q(G_2^1) = 0$.

c. Derajat setiap titik pada graf ini adalah $\deg_{G_2^1}(v_1) = 0$. Maka derajat maksimum dari titik-titik pada graf ini adalah 0.

3. Graf Faktorisasi Prima untuk $p_3^1 = 5^1 = 5$

$p_3^1 = 5$ adalah suatu bilangan bulat positif yang dengan pohon faktor prima ditunjukan memuat n = 1 dan m = 0 faktorisasi prima. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik V_i dan garis pada pohon faktor prima diwakili

oleh sisi E_j. Dengan mengikuti prosedur yang telah ditentukan akan terbentuk graf G_3^1 sebagai berikut:

G_3^1 : ● v_1

Gambar 3.39 Graf Faktorisasi Prima G_3^1

Graf ini mempunyai ciri diantaranya:

a. Memiliki 1 titik , $V\left(G_3^1\right) = \{v_1\}$ maka *order* dari G_3^1 adalah 1 atau $p(G_3^1) = 1$.

b. Memiliki 0 sisi, $E\left(G_3^1\right) = \{\ \}$, dengan demikian graf ini mempunyai *size* 0 atau $q(G_3^1) = 0$.

c. Derajat setiap titik pada graf ini adalah $\deg_{G_3^1}(v_1) = 0$. Maka derajat maksimum dari titik-titik pada graf ini adalah 0.

4. Graf Faktorisasi Prima untuk $p_4^1 = 7^1 = 7$

$p_4^1 = 7$ adalah suatu bilangan bulat positif yang dengan pohon faktor prima ditunjukan memuat n = 1 dan m = 0 faktorisasi prima. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik V_i dan garis pada pohon faktor prima diwakili oleh sisi E_j. Dengan mengikuti prosedur yang telah ditentukan akan terbentuk graf G_4^1 sebagai berikut:

G_4^1 : ● v_1

Gambar 3.40 Graf Faktorisasi Prima G_4^1

Graf ini mempunyai ciri diantaranya:

a. Memiliki 1 titik , $V\left(G_4^1\right)=\{v_1\}$ maka *order* dari G_4^1 adalah 1 atau $p(G_4^1)=1$.

b. Memiliki 0 sisi, $E\left(G_4^1\right)=\{\ \}$, dengan demikian graf ini mempunyai *size* 0 atau $q(G_4^1)=0$.

c. Derajat setiap titik pada graf ini adalah $\deg_{G_4^1}(v_1)=0$. Maka derajat maksimum dari titik-titik pada graf ini adalah 0.

5. Graf Faktorisasi Prima untuk $p_5^1=11^1=11$

$p_1^1=11$ adalah suatu bilangan bulat positif yang dengan pohon faktor prima ditunjukan memuat n = 1 dan m = 0 faktorisasi prima. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik V_i dan garis pada pohon faktor prima diwakili oleh sisi E_j. Dengan mengikuti prosedur yang telah ditentukan akan terbentuk graf G_5^1 sebagai berikut:

G_5^1 : ● v_1

Gambar 3.41 Graf Faktorisasi Prima G_5^1

Graf ini mempunyai ciri diantaranya:

a. Memiliki 1 titik , $V\left(G_5^1\right)=\{v_1\}$ maka *order* dari G_5^1 adalah 1 atau $p(G_5^1)=1$.

b. Memiliki 0 sisi, $E\left(G_5^1\right)=\{\ \}$, dengan demikian graf ini mempunyai *size* 0 atau $q(G_5^1)=0$.

c. Derajat setiap titik pada graf ini adalah $\deg_{G_5^1}(v_1) = 0$. Maka derajat maksimum dari titik-titik pada graf ini adalah 0.

6. Graf Faktorisasi Prima untuk $p_6^1 = 13^1 = 13$

$p_6^1 = 13$ adalah suatu bilangan bulat positif yang dengan pohon faktor prima ditunjukan memuat n = 1 dan m = 0 faktorisasi prima. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik V_i dan garis pada pohon faktor prima diwakili oleh sisi E_j. Dengan mengikuti prosedur yang telah ditentukan akan terbentuk graf G_6^1 sebagai berikut:

G_6^1 : ● v_1

Gambar 3.42 Graf Faktorisasi Prima G_6^1

Graf ini mempunyai ciri diantaranya:

a. Memiliki 1 titik , $V\left(G_6^1\right) = \{v_1\}$ maka *order* dari G_6^1 adalah 1 atau $p(G_6^1) = 1$.

b. Memiliki 0 sisi, $E\left(G_6^1\right) = \{ \ \}$, dengan demikian graf ini mempunyai *size* 0 atau $q(G_6^1) = 0$.

c. Derajat setiap titik pada graf ini adalah $\deg_{G_6^1}(v_1) = 0$. Maka derajat maksimum dari titik-titik pada graf ini adalah 0.

7. Graf Faktorisasi Prima untuk $p_7^1 = 17^1 = 17$

$p_7^1 = 17$ adalah suatu bilangan bulat positif yang dengan pohon faktor prima ditunjukan memuat n = 1 dan m = 0 faktorisasi prima. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik V_i dan garis pada pohon faktor prima diwakili oleh sisi E_j. Dengan mengikuti prosedur yang telah ditentukan akan terbentuk graf G_7^1 sebagai berikut:

$$G_7^1 : \quad \bullet\ v_1$$

Gambar 3.43 Graf Faktorisasi Prima G_7^1

Graf ini mempunyai ciri diantaranya:

a. Memiliki 1 titik , $V\left(G_7^1\right) = \{v_1\}$ maka *order* dari G_7^1 adalah 1 atau $p(G_7^1) = 1$.

b. Memiliki 0 sisi, $E\left(G_7^1\right) = \{\ \}$, dengan demikian graf ini mempunyai *size* 0 atau $q(G_7^1) = 0$.

c. Derajat setiap titik pada graf ini adalah $\deg_{G_7^1}(v_1) = 0$. Maka derajat maksimum dari titik-titik pada graf ini adalah 0.

8. Graf Faktorisasi Prima untuk $p_8^1 = 19^1 = 19$

$p_8^1 = 19$ adalah suatu bilangan bulat positif yang dengan pohon faktor prima ditunjukan memuat *n* = 1 dan *m* = 0 faktorisasi prima. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik V_i dan garis pada pohon faktor prima diwakili oleh sisi E_j. Dengan mengikuti prosedur yang telah ditentukan akan terbentuk graf G_8^1 sebagai berikut:

$$G_8^1 : \quad \bullet\ v_1$$

Gambar 3.44 Graf Faktorisasi Prima G_8^1

Graf ini mempunyai ciri diantaranya:

a. Memiliki 1 titik , $V\left(G_8^1\right)=\{v_1\}$ maka *order* dari G_8^1 adalah 1 atau $p(G_8^1)=1$.

b. Memiliki 0 sisi, $E\left(G_8^1\right)=\{\ \}$, dengan demikian graf ini mempunyai *size* 0 atau $q(G_8^1)=0$.

c. Derajat setiap titik pada graf ini adalah $\deg_{G_8^1}(v_1)=0$. Maka derajat maksimum dari titik-titik pada graf ini adalah 0.

9. Graf Faktorisasi Prima untuk $p_9^1=23^1=23$

$p_9^1=23$ adalah suatu bilangan bulat positif yang dengan pohon faktor prima ditunjukan memuat *n* = 1 dan *m* = 0 faktorisasi prima. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik V_i dan garis pada pohon faktor prima diwakili oleh sisi E_j. Dengan mengikuti prosedur yang telah ditentukan akan terbentuk graf G_9^1 sebagai berikut:

$$G_9^1: \quad \bullet\ v_1$$

Gambar 3.45 Graf Faktorisasi Prima G_9^1

Graf ini mempunyai ciri diantaranya:

a. Memiliki 1 titik , $V\left(G_9^1\right)=\{v_1\}$ maka *order* dari G_9^1 adalah 1 atau $p(G_9^1)=1$.

b. Memiliki 0 sisi, $E\left(G_9^1\right)=\{\ \}$, dengan demikian graf ini mempunyai *size* 0 atau $q(G_9^1)=0$.

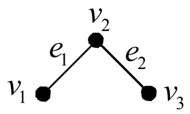
c. Derajat setiap titik pada graf ini adalah $\deg_{G_9^1}(v_1) = 0$. Maka derajat maksimum dari titik-titik pada graf ini adalah 0.

3.2.1.2. Graf Faktorisasi Prima Bilangan p_i^2

1. Graf Faktorisasi Prima untuk $p_1^2 = 2^2 = 2 \times 2 = 4$

$p_1^2 = 4$ adalah suatu bilangan bulat positif yang dengan pohon faktor prima ditunjukan memuat n = 2 dan m = 1 faktorisasi prima. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik V_i dan garis pada pohon faktor prima diwakili oleh sisi E_j. Dengan mengikuti prosedur yang telah ditentukan akan terbentuk graf G_1^2 sebagai berikut:

G_1^2 :



Gambar 3.46 Graf Faktorisasi Prima G_1^2

Graf ini mempunyai ciri diantaranya:

a. Memiliki 3 titik , $V\left(G_1^2\right) = \{v_1, v_2, v_3\}$ maka *order* dari G_1^2 adalah 3 atau $p(G_1^2) = 3$.

b. Memiliki 2 sisi, $E\left(G_1^2\right) = \{e_1, e_2\}$, dengan demikian graf ini mempunyai *size* 2 atau $q(G_1^2) = 2$.

c. Derajat setiap titik pada graf ini adalah:

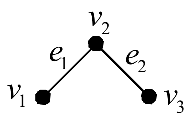
$$\deg_{G_1^2}(v_1) = 1,\ \deg_{G_1^2}(v_2) = 2,\ dan\ \deg_{G_1^2}(v_3) = 1$$

Maka derajat maksimum dari titik-titik pada graf ini adalah 2.

2. Graf Faktorisasi Prima untuk $p_2^2 = 3^2 = 3 \times 3 = 9$

$p_2^2 = 9$ adalah suatu bilangan bulat positif yang dengan pohon faktor prima ditunjukan memuat n = 2 dan m = 1 faktorisasi prima. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik V_i dan garis pada pohon faktor prima diwakili oleh sisi E_j. Dengan mengikuti prosedur yang telah ditentukan akan terbentuk graf G_2^2 sebagai berikut:

G_2^2 :



Gambar 3.47 Graf Faktorisasi Prima G_2^2

Graf ini mempunyai ciri diantaranya:

a. Memiliki 3 titik , $V\left(G_2^2\right) = \{v_1, v_2, v_3\}$ maka *order* dari G_2^2 adalah 3 atau $p(G_2^2) = 3$.

b. Memiliki 2 sisi, $E\left(G_2^2\right) = \{e_1, e_2\}$, dengan demikian graf ini mempunyai *size* 2 atau $q(G_2^2) = 2$.

c. Derajat setiap titik pada graf ini adalah:

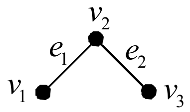
   $\deg_{G_2^2}(v_1) = 1,\ \deg_{G_2^2}(v_2) = 2,\ dan\ \deg_{G_2^2}(v_3) = 1$

   Maka derajat maksimum dari titik-titik pada graf ini adalah 2.

3. Graf Faktorisasi Prima untuk $p_3^2 = 5^2 = 5 \times 5 = 25$

$p_3^2 = 25$ adalah suatu bilangan bulat positif yang dengan pohon faktor prima ditunjukan memuat n = 2 dan m = 1 faktorisasi prima. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik V_i dan garis pada pohon faktor prima diwakili

oleh sisi E_j. Dengan mengikuti prosedur yang telah ditentukan akan terbentuk graf G_3^2 sebagai berikut:

G_3^2 :


Gambar 3.48 Graf Faktorisasi Prima G_3^2

Graf ini mempunyai ciri diantaranya:

a. Memiliki 3 titik , $V\left(G_3^2\right) = \{v_1, v_2, v_3\}$ maka *order* dari G_3^2 adalah 3 atau $p(G_3^2) = 3$.

b. Memiliki 2 sisi, $E\left(G_3^2\right) = \{e_1, e_2\}$, dengan demikian graf ini mempunyai *size* 2 atau $q(G_3^2) = 2$.

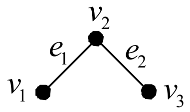
c. Derajat setiap titik pada graf ini adalah:

$$\deg_{G_3^2}(v_1) = 1,\ \deg_{G_3^2}(v_2) = 2,\ dan\ \deg_{G_3^2}(v_3) = 1$$

Maka derajat maksimum dari titik-titik pada graf ini adalah 2.

4. Graf Faktorisasi Prima untuk $p_4^2 = 7^2 = 7 \times 7 = 49$

$p_3^2 = 49$ adalah suatu bilangan bulat positif yang dengan pohon faktor prima ditunjukan memuat n = 2 dan m = 1 faktorisasi prima. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik V_i dan garis pada pohon faktor prima diwakili oleh sisi E_j. Dengan mengikuti prosedur yang telah ditentukan akan terbentuk graf G_4^2 sebagai berikut:

G_4^2 :


Gambar 3.49 Graf Faktorisasi Prima G_4^2

Graf ini mempunyai ciri diantaranya:

a. Memiliki 3 titik , $V\left(G_4^2\right)=\{v_1,v_2,v_3\}$ maka *order* dari G_4^2 adalah 3 atau $p(G_4^2)=3$.

b. Memiliki 2 sisi, $E\left(G_4^2\right)=\{e_1,e_2\}$, dengan demikian graf ini mempunyai *size* 2 atau $q(G_4^2)=2$.

c. Derajat setiap titik pada graf ini adalah:

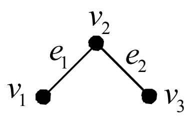
$\deg_{G_4^2}(v_1)=1,\ \deg_{G_4^2}(v_2)=2,\ dan\ \deg_{G_4^2}(v_3)=1$

Maka derajat maksimum dari titik-titik pada graf ini adalah 2.

5. Graf Faktorisasi Prima untuk $p_4^2=11^2=11\times 11=121$

$p_5^2=121$ adalah suatu bilangan bulat positif yang dengan pohon faktor prima ditunjukan memuat n = 2 dan m = 1 faktorisasi prima. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik V_i dan garis pada pohon faktor prima diwakili oleh sisi E_j. Dengan mengikuti prosedur yang telah ditentukan akan terbentuk graf G_5^2 sebagai berikut:

G_5^2 :



Gambar 3.50 Graf Faktorisasi Prima G_5^2

Graf ini mempunyai ciri diantaranya:

a. Memiliki 3 titik , $V\left(G_5^2\right)=\{v_1,v_2,v_3\}$ maka *order* dari G_5^2 adalah 3 atau $p(G_5^2)=3$.

b. Memiliki 2 sisi, $E\left(G_5^2\right) = \{e_1, e_2\}$, dengan demikian graf ini mempunyai *size* 2 atau $q(G_5^2) = 2$.

c. Derajat setiap titik pada graf ini adalah:

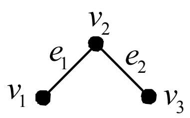
$\deg_{G_5^2}(v_1) = 1,\ \deg_{G_5^2}(v_2) = 2,\ dan\ \deg_{G_5^2}(v_3) = 1$

Maka derajat maksimum dari titik-titik pada graf ini adalah 2.

6. Graf Faktorisasi Prima untuk $p_6^2 = 13^2 = 13 \times 13 = 169$

$p_6^2 = 169$ adalah suatu bilangan bulat positif yang dengan pohon faktor prima ditunjukan memuat n = 2 dan m = 1 faktorisasi prima. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik V_i dan garis pada pohon faktor prima diwakili oleh sisi E_j. Dengan mengikuti prosedur yang telah ditentukan akan terbentuk graf G_6^2 sebagai berikut:

G_6^2 :



Gambar 3.51 Graf Faktorisasi Prima G_6^2

Graf ini mempunyai ciri diantaranya:

a. Memiliki 3 titik , $V\left(G_6^2\right) = \{v_1, v_2, v_3\}$ maka *order* dari G_6^2 adalah 3 atau $p(G_6^2) = 3$.

b. Memiliki 2 sisi, $E\left(G_6^2\right) = \{e_1, e_2\}$, dengan demikian graf ini mempunyai *size* 2 atau $q(G_6^2) = 2$.

c. Derajat setiap titik pada graf ini adalah:

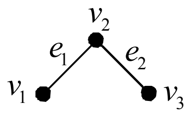
$\deg_{G_6^2}(v_1) = 1,\ \deg_{G_6^2}(v_2) = 2,\ dan\ \deg_{G_6^2}(v_3) = 1$

Maka derajat maksimum dari titik-titik pada graf ini adalah 2.

7. Graf Faktorisasi Prima untuk $p_7^2 = 17^2 = 17 \times 17 = 289$

$p_7^2 = 289$ adalah suatu bilangan bulat positif yang dengan pohon faktor prima ditunjukan memuat n = 2 dan m = 1 faktorisasi prima. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik V_i dan garis pada pohon faktor prima diwakili oleh sisi E_j. Dengan mengikuti prosedur yang telah ditentukan akan terbentuk graf G_7^2 sebagai berikut:

G_7^2 :



Gambar 3.52 Graf Faktorisasi Prima G_7^2

Graf ini mempunyai ciri diantaranya:

a. Memiliki 3 titik , $V\left(G_7^2\right) = \{v_1, v_2, v_3\}$ maka *order* dari G_7^2 adalah 3 atau $p(G_7^2) = 3$.

b. Memiliki 2 sisi, $E\left(G_7^2\right) = \{e_1, e_2\}$, dengan demikian graf ini mempunyai *size* 2 atau $q(G_7^2) = 2$.

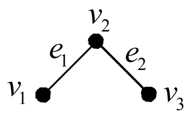
c. Derajat setiap titik pada graf ini adalah:

$\deg_{G_7^2}(v_1) = 1,\ \deg_{G_7^2}(v_2) = 2,\ dan\ \deg_{G_7^2}(v_3) = 1$

Maka derajat maksimum dari titik-titik pada graf ini adalah 2.

8. Graf Faktorisasi Prima untuk $p_8^2 = 19^2 = 19 \times 19 = 361$

$p_8^2 = 361$ adalah suatu bilangan bulat positif yang dengan pohon faktor prima ditunjukan memuat n = 2 dan m = 1 faktorisasi prima. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik V_i dan garis pada pohon faktor prima diwakili oleh sisi E_j. Dengan mengikuti prosedur yang telah ditentukan akan terbentuk graf G_8^2 sebagai berikut:



Gambar 3.53 Graf Faktorisasi Prima G_8^2

Graf ini mempunyai ciri diantaranya:

a. Memiliki 3 titik , $V\left(G_8^2\right) = \{v_1, v_2, v_3\}$ maka *order* dari G_8^2 adalah 3 atau $p(G_8^2) = 3$.

b. Memiliki 2 sisi, $E\left(G_8^2\right) = \{e_1, e_2\}$, dengan demikian graf ini mempunyai *size* 2 atau $q(G_8^2) = 2$.

c. Derajat setiap titik pada graf ini adalah:

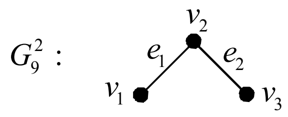
   $\deg_{G_8^2}(v_1) = 1,\ \deg_{G_8^2}(v_2) = 2,\ dan\ \deg_{G_8^2}(v_3) = 1$

   Maka derajat maksimum dari titik-titik pada graf ini adalah 2.

9. Graf Faktorisasi Prima untuk $p_9^2 = 23^2 = 23 \times 23 = 529$

$p_9^2 = 529$ adalah suatu bilangan bulat positif yang dengan pohon faktor prima ditunjukan memuat n = 2 dan m = 1 faktorisasi prima. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik V_i dan garis pada pohon faktor prima diwakili

oleh sisi E_j. Dengan mengikuti prosedur yang telah ditentukan akan terbentuk graf G_9^2 sebagai berikut:



Gambar 3.54 Graf Faktorisasi Prima G_9^2

Graf ini mempunyai ciri diantaranya:

a. Memiliki 3 titik , $V\left(G_9^2\right)= \{v_1, v_2, v_3\}$ maka *order* dari G_9^2 adalah 3 atau $p(G_9^2)=3$.

b. Memiliki 2 sisi, $E\left(G_9^2\right)= \{e_1, e_2\}$, dengan demikian graf ini mempunyai *size* 2 atau $q(G_9^2)=2$.

c. Derajat setiap titik pada graf ini adalah:

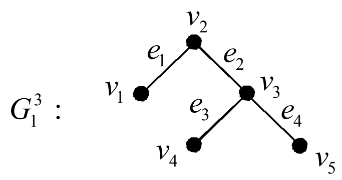
$\deg_{G_9^2}(v_1)=1,\ \deg_{G_9^2}(v_2)=2,\ dan\ \deg_{G_9^2}(v_3)=1$

Maka derajat maksimum dari titik-titik pada graf ini adalah 2.

3.2.1.3. Graf Faktorisasi Prima Bilangan p_i^3

1. Graf Faktorisasi Prima untuk $p_1^3 = 2^3 = 2\times 4 = 2\times 2\times 2 = 8$

   $p_1^3 = 8$ adalah suatu bilangan bulat positif yang dengan pohon faktor prima ditunjukan memuat n = 3 dan m = 2 faktorisasi prima. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik V_i dan garis pada pohon faktor prima diwakili oleh sisi E_j. Dengan mengikuti prosedur yang telah ditentukan akan terbentuk graf G_1^3 sebagai berikut:



Gambar 3.55 Graf Faktorisasi Prima G_1^3

Graf ini mempunyai ciri diantaranya:

a. Memiliki 5 titik , $V\left(G_1^3\right) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ maka *order* dari G_1^3 adalah 5 atau $p(G_1^3) = 5$.

b. Memiliki 4 sisi, $E\left(G_1^3\right) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, dengan demikian graf ini mempunyai *size* 4 atau $q(G_1^3) = 4$.

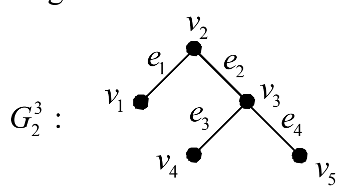
c. Derajat setiap titik pada graf ini adalah:

$\deg_{G_1^3}(v_1) = 1$, $\deg_{G_1^3}(v_2) = 2$, $\deg_{G_1^3}(v_3) = 3$, $\deg_{G_1^3}(v_4) = 1$, *dan* $\deg_{G_1^3}(v_5) = 1$

Maka derajat maksimum dari titik-titik pada graf ini adalah 3.

2. Graf Faktorisasi Prima untuk $p_2^3 = 3^3 = 3 \times 9 = 3 \times 3 \times 3 = 27$

$p_2^3 = 27$ adalah suatu bilangan bulat positif yang dengan pohon faktor prima ditunjukan memuat n = 3 dan m = 2 faktorisasi prima. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik V_i dan garis pada pohon faktor prima diwakili oleh sisi E_j. Dengan mengikuti prosedur yang telah ditentukan akan terbentuk graf G_2^3 sebagai berikut:



Gambar 3.56 Graf Faktorisasi Prima G_2^3

Graf ini mempunyai ciri diantaranya:

a. Memiliki 5 titik , $V\left(G_2^3\right)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ maka *order* dari G_2^3 adalah 5 atau $p(G_2^3)=5$.

b. Memiliki 4 sisi, $E\left(G_2^3\right)=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$, dengan demikian graf ini mempunyai *size* 4 atau $q(G_2^3)=4$.

c. Derajat setiap titik pada graf ini adalah:

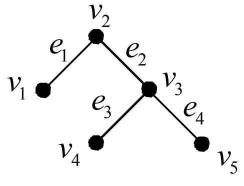
$$\deg_{G_2^3}(v_1)=1,\ \deg_{G_2^3}(v_2)=2,\ \deg_{G_2^3}(v_3)=3,$$
$$\deg_{G_2^3}(v_4)=1,\ dan\ \deg_{G_2^3}(v_5)=1$$

Maka derajat maksimum dari titik-titik pada graf ini adalah 3.

3. Graf Faktorisasi Prima untuk $p_3^3=5^3=5\times25=5\times5\times5=125$

$p_3^3=125$ adalah suatu bilangan bulat positif yang dengan pohon faktor prima ditunjukan memuat n = 3 dan m = 2 faktorisasi prima. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik V_i dan garis pada pohon faktor prima diwakili oleh sisi E_j. Dengan mengikuti prosedur yang telah ditentukan akan terbentuk graf G_3^3 sebagai berikut:

G_3^3 :



Gambar 3.57 Graf Faktorisasi Prima G_3^3

Graf ini mempunyai ciri diantaranya:

a. Memiliki 5 titik , $V\left(G_3^3\right)= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ maka *order* dari G_3^3 adalah 5 atau $p(G_3^3) = 5$.

b. Memiliki 4 sisi, $E\left(G_3^3\right)= \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, dengan demikian graf ini mempunyai *size* 4 atau $q(G_3^3) = 4$.

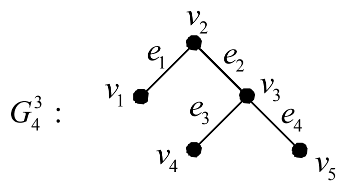
c. Derajat setiap titik pada graf ini adalah:

$$\deg_{G_3^3}(v_1) = 1,\ \deg_{G_3^3}(v_2) = 2,\ \deg_{G_3^3}(v_3) = 3,$$
$$\deg_{G_3^3}(v_4) = 1,\ dan\ \deg_{G_3^3}(v_5) = 1$$

Maka derajat maksimum dari titik-titik pada graf ini adalah 3.

4. Graf Faktorisasi Prima untuk $p_4^3 = 7^3 = 7 \times 49 = 7 \times 7 \times 7 = 343$

$p_4^3 = 343$ adalah suatu bilangan bulat positif yang dengan pohon faktor prima ditunjukan memuat n = 3 dan m = 2 faktorisasi prima. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik V_i dan garis pada pohon faktor prima diwakili oleh sisi E_j. Dengan mengikuti prosedur yang telah ditentukan akan terbentuk graf G_4^3 sebagai berikut:



Gambar 3.58 Graf Faktorisasi Prima G_4^3

Graf ini mempunyai ciri diantaranya:

a. Memiliki 5 titik , $V\left(G_4^3\right)= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ maka *order* dari G_4^3 adalah 5 atau $p(G_4^3) = 5$.

b. Memiliki 4 sisi, $E\left(G_4^3\right)=\ \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, dengan demikian graf ini mempunyai *size* 4 atau $q(G_4^3)=4$.

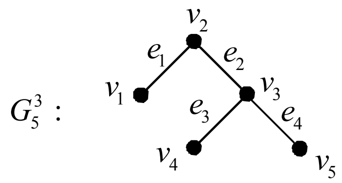
c. Derajat setiap titik pada graf ini adalah:

$$\deg_{G_4^3}(v_1)=1,\ \deg_{G_4^3}(v_2)=2,\ \deg_{G_4^3}(v_3)=3,$$
$$\deg_{G_4^3}(v_4)=1,\ dan\ \deg_{G_4^3}(v_5)=1$$

Maka derajat maksimum dari titik-titik pada graf ini adalah 3.

5. Graf Faktorisasi Prima untuk $p_5^3=11^3=11\times121=11\times11\times11=1331$

$p_5^3=1331$ adalah suatu bilangan bulat positif yang dengan pohon faktor prima ditunjukan memuat n = 3 dan m = 2 faktorisasi prima. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik V_i dan garis pada pohon faktor prima diwakili oleh sisi E_j. Dengan mengikuti prosedur yang telah ditentukan akan terbentuk graf G_5^3 sebagai berikut:



Gambar 3.59 Graf Faktorisasi Prima G_5^3

Graf ini mempunyai ciri diantaranya:

a. Memiliki 5 titik , $V\left(G_5^3\right)=\ \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ maka *order* dari G_5^3 adalah 5 atau $p(G_5^3)=5$.

b. Memiliki 4 sisi, $E\left(G_5^3\right)=\ \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, dengan demikian graf ini mempunyai *size* 4 atau $q(G_5^3)=4$.

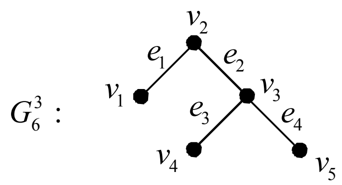
c. Derajat setiap titik pada graf ini adalah:

$\deg_{G_5^3}(v_1) = 1,\ \deg_{G_5^3}(v_2) = 2,\ \deg_{G_5^3}(v_3) = 3,$
$\deg_{G_5^3}(v_4) = 1,\ dan\ \deg_{G_5^3}(v_5) = 1$

Maka derajat maksimum dari titik-titik pada graf ini adalah 3.

6. Graf Faktorisasi Prima untuk $p_6^3 = 13^3 = 13 \times 169 = 13 \times 13 \times 13 = 2197$

$p_6^3 = 2197$ adalah suatu bilangan bulat positif yang dengan pohon faktor prima ditunjukan memuat n = 3 dan m = 2 faktorisasi prima. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik V_i dan garis pada pohon faktor prima diwakili oleh sisi E_j. Dengan mengikuti prosedur yang telah ditentukan akan terbentuk graf G_6^3 sebagai berikut:



Gambar 3.60 Graf Faktorisasi Prima G_6^3

Graf ini mempunyai ciri diantaranya:

a. Memiliki 5 titik , $V\left(G_6^3\right) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ maka *order* dari G_6^3 adalah 5 atau $p(G_6^3) = 5$.

b. Memiliki 4 sisi, $E\left(G_6^3\right) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, dengan demikian graf ini mempunyai *size* 4 atau $q(G_6^3) = 4$.

c. Derajat setiap titik pada graf ini adalah:

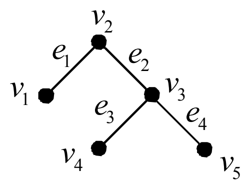
$\deg_{G_6^3}(v_1) = 1,\ \deg_{G_6^3}(v_2) = 2,\ \deg_{G_6^3}(v_3) = 3,$
$\deg_{G_6^3}(v_4) = 1,\ dan\ \deg_{G_6^3}(v_5) = 1$

Maka derajat maksimum dari titik-titik pada graf ini adalah 3.

7. Graf Faktorisasi Prima untuk $p_7^3 = 17^3 = 17 \times 289 = 17 \times 17 \times 17 = 4913$

$p_7^3 = 4913$ adalah suatu bilangan bulat positif yang dengan pohon faktor prima ditunjukan memuat n = 3 dan m = 2 faktorisasi prima. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik V_i dan garis pada pohon faktor prima diwakili oleh sisi E_j. Dengan mengikuti prosedur yang telah ditentukan akan terbentuk graf G_7^3 sebagai berikut:

G_7^3 :



Gambar 3.61 Graf Faktorisasi Prima G_7^3

Graf ini mempunyai ciri diantaranya:

a. Memiliki 5 titik , $V\left(G_7^3\right) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ maka *order* dari G_7^3 adalah 5 atau $p(G_7^3) = 5$.

b. Memiliki 4 sisi, $E\left(G_7^3\right) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, dengan demikian graf ini mempunyai *size* 4 atau $q(G_7^3) = 4$.

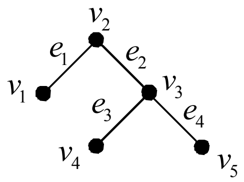
c. Derajat setiap titik pada graf ini adalah:

$$\deg_{G_7^3}(v_1) = 1,\ \deg_{G_7^3}(v_2) = 2,\ \deg_{G_7^3}(v_3) = 3,$$
$$\deg_{G_7^3}(v_4) = 1,\ dan\ \deg_{G_7^3}(v_5) = 1$$

Maka derajat maksimum dari titik-titik pada graf ini adalah 3.

8. Graf Faktorisasi Prima untuk $p_8^3 = 19^3 = 19 \times 361 = 19 \times 19 \times 19 = 6859$

$p_8^3 = 6859$ adalah suatu bilangan bulat positif yang dengan pohon faktor prima ditunjukan memuat n = 3 dan m = 2 faktorisasi prima. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik V_i dan garis pada pohon faktor prima diwakili oleh sisi E_j. Dengan mengikuti prosedur yang telah ditentukan akan terbentuk graf G_8^3 sebagai berikut:



Gambar 3.62 Graf Faktorisasi Prima G_8^3

Graf ini mempunyai ciri diantaranya:

a. Memiliki 5 titik , $V\left(G_8^3\right)= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ maka *order* dari G_8^3 adalah 5 atau $p(G_8^3) = 5$.

b. Memiliki 4 sisi, $E\left(G_8^3\right)= \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, dengan demikian graf ini mempunyai *size* 4 atau $q(G_8^3) = 4$.

c. Derajat setiap titik pada graf ini adalah:

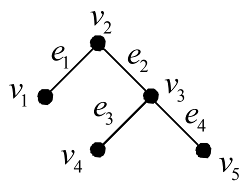
$$\deg_{G_8^3}(v_1) = 1,\ \deg_{G_8^3}(v_2) = 2,\ \deg_{G_8^3}(v_3) = 3,$$
$$\deg_{G_8^3}(v_4) = 1,\ dan\ \deg_{G_8^3}(v_5) = 1$$

Maka derajat maksimum dari titik-titik pada graf ini adalah 3.

9. Graf Faktorisasi Prima untuk $p_9^3 = 23^3 = 23 \times 529 = 23 \times 23 \times 23 = 12167$

$p_9^3 = 12167$ adalah suatu bilangan bulat positif yang dengan pohon faktor prima ditunjukan memuat *n* = 3 dan *m* = 2 faktorisasi prima. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik V_i dan garis pada pohon faktor prima diwakili oleh sisi E_j. Dengan mengikuti prosedur yang telah ditentukan akan terbentuk graf G_9^3 sebagai berikut:

G_9^3 :



Gambar 3.63 Graf Faktorisasi Prima G_9^3

Graf ini mempunyai ciri diantaranya:

a. Memiliki 5 titik , $V\left(G_9^3\right) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ maka *order* dari G_9^3 adalah 5 atau $p(G_9^3) = 5$.

b. Memiliki 4 sisi, $E\left(G_9^3\right) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, dengan demikian graf ini mempunyai *size* 4 atau $q(G_9^3) = 4$.

c. Derajat setiap titik pada graf ini adalah:

$$\deg_{G_9^3}(v_1) = 1,\ \deg_{G_9^3}(v_2) = 2,\ \deg_{G_9^3}(v_3) = 3,$$
$$\deg_{G_9^3}(v_4) = 1,\ dan\ \deg_{G_9^3}(v_5) = 1$$

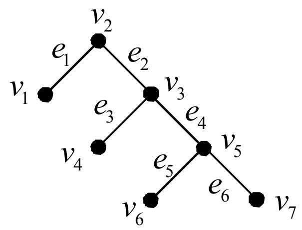
Maka derajat maksimum dari titik-titik pada graf ini adalah 3.

3.2.1.4. Graf Faktorisasi Prima Bilangan p_i^4

1. Graf Faktorisasi Prima untuk $p_1^4 = 2^4 = 2\times 8 = 2\times 2\times 4 = 2\times 2\times 2\times 2 = 16$

   $p_1^4 = 16$ adalah suatu bilangan bulat positif yang dengan pohon faktor prima ditunjukan memuat *n* = 4 dan *m* = 3 faktorisasi prima. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik V_i dan garis pada pohon faktor prima diwakili oleh sisi E_j. Dengan mengikuti prosedur yang telah ditentukan akan terbentuk graf G_1^4 sebagai berikut:

G_1^4 :



Gambar 3.64 Graf Faktorisasi Prima G_1^4

Graf ini mempunyai ciri diantaranya:

a. Memiliki 7 titik , $V\left(G_1^4\right)= \{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7\}$ maka *order* dari G_1^4 adalah 7 atau $p(G_1^4)=7$.

b. Memiliki 6 sisi, $E\left(G_1^4\right)= \{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$, dengan demikian graf ini mempunyai *size* 6 atau $q(G_1^4)=6$.

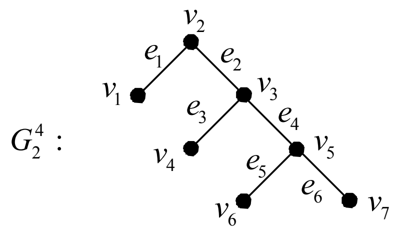
c. Derajat setiap titik pada graf ini adalah:

$\deg_{G_1^4}(v_1)=1$, $\deg_{G_1^4}(v_2)=2$, $\deg_{G_1^4}(v_3)=3$, $\deg_{G_1^4}(v_4)=1$, $\deg_{G_1^4}(v_5)=3$, $\deg_{G_1^4}(v_6)=1$, *dan* $\deg_{G_1^4}(v_7)=1$

Maka derajat maksimum dari titik-titik pada graf ini adalah 3.

2. Graf Faktorisasi Prima untuk $p_2^4=3^4=3\times 27=3\times 3\times 9=3\times 3\times 3\times 3=81$

$p_2^4=81$ adalah suatu bilangan bulat positif yang dengan pohon faktor prima ditunjukan memuat n = 4 dan m = 3 faktorisasi prima. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik V_i dan garis pada pohon faktor prima diwakili oleh sisi E_j. Dengan mengikuti prosedur yang telah ditentukan akan terbentuk graf G_2^4 sebagai berikut:



Gambar 3.65 Graf Faktorisasi Prima G_2^4

Graf ini mempunyai ciri diantaranya:

a. Memiliki 7 titik , $V\left(G_2^4\right)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7\}$ maka *order* dari G_2^4 adalah 7 atau $p(G_2^4)=7$.

b. Memiliki 6 sisi, $E\left(G_2^4\right)=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$, dengan demikian graf ini mempunyai *size* 6 atau $q(G_2^4)=6$.

c. Derajat setiap titik pada graf ini adalah:

$$\deg_{G_2^4}(v_1)=1,\ \deg_{G_2^4}(v_2)=2,\ \deg_{G_2^4}(v_3)=3,\ \deg_{G_2^4}(v_4)=1,$$
$$\deg_{G_2^4}(v_5)=3,\ \deg_{G_2^4}(v_6)=1,\ dan\ \deg_{G_2^4}(v_7)=1$$

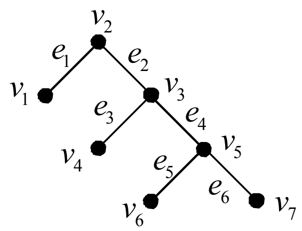
Maka derajat maksimum dari titik-titik pada graf ini adalah 3.

3. Graf Faktorisasi Prima untuk

$$p_3^4=5^4=5\times125=5\times5\times25=5\times5\times5\times5=625$$

$p_3^4=625$ adalah suatu bilangan bulat positif yang dengan pohon faktor prima ditunjukan memuat n = 4 dan m = 3 faktorisasi prima. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik V_i dan garis pada pohon faktor prima diwakili oleh sisi E_j. Dengan mengikuti prosedur yang telah ditentukan akan terbentuk graf G_3^4 sebagai berikut:

G_3^4 :



Gambar 3.66 Graf Faktorisasi Prima G_3^4

Graf ini mempunyai ciri diantaranya:

a. Memiliki 7 titik , $V\left(G_3^4\right) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ maka *order* dari G_3^4 adalah 7 atau $p(G_3^4) = 7$.

b. Memiliki 6 sisi, $E\left(G_3^4\right) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, dengan demikian graf ini mempunyai *size* 6 atau $q(G_3^4) = 6$.

c. Derajat setiap titik pada graf ini adalah:

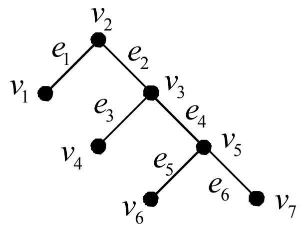
$$\deg_{G_3^4}(v_1) = 1,\ \deg_{G_3^4}(v_2) = 2,\ \deg_{G_3^4}(v_3) = 3,\ \deg_{G_3^4}(v_4) = 1,$$
$$\deg_{G_3^4}(v_5) = 3,\ \deg_{G_3^4}(v_6) = 1,\ \textit{dan}\ \deg_{G_3^4}(v_7) = 1$$

Maka derajat maksimum dari titik-titik pada graf ini adalah 3.

4. Graf Faktorisasi Prima untuk

$$p_4^4 = 7^4 = 7 \times 343 = 7 \times 7 \times 49 = 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 2401$$

$p_2^4 = 81$ adalah suatu bilangan bulat positif yang dengan pohon faktor prima ditunjukan memuat n = 4 dan m = 3 faktorisasi prima. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik V_i dan garis pada pohon faktor prima diwakili oleh sisi E_j. Dengan mengikuti prosedur yang telah ditentukan akan terbentuk graf G_2^4 sebagai berikut:



Gambar 3.67 Graf Faktorisasi Prima G_4^4

Graf ini mempunyai ciri diantaranya:

a. Memiliki 7 titik , $V\left(G_4^4\right) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ maka *order* dari G_4^4 adalah 7 atau $p(G_4^4) = 7$.

b. Memiliki 6 sisi, $E\left(G_4^4\right) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, dengan demikian graf ini mempunyai *size* 6 atau $q(G_4^4) = 6$.

c. Derajat setiap titik pada graf ini adalah:

$$\deg_{G_4^4}(v_1) = 1,\ \deg_{G_4^4}(v_2) = 2,\ \deg_{G_4^4}(v_3) = 3,\ \deg_{G_4^4}(v_4) = 1,$$
$$\deg_{G_4^4}(v_5) = 3,\ \deg_{G_4^4}(v_6) = 1,\ dan\ \deg_{G_4^4}(v_7) = 1$$

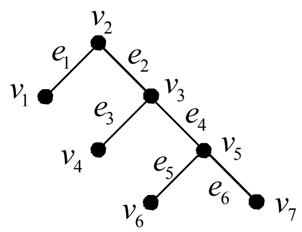
Maka derajat maksimum dari titik-titik pada graf ini adalah 3.

5. Graf Faktorisasi Prima untuk

$$p_5^4 = 11^4 = 11 \times 1331 = 11 \times 11 \times 121 = 11 \times 11 \times 11 \times 11 = 14641$$

$p_5^4 = 14641$ adalah suatu bilangan bulat positif yang dengan pohon faktor prima ditunjukan memuat n = 4 dan m = 3 faktorisasi prima. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik V_i dan garis pada pohon faktor prima diwakili oleh sisi E_j. Dengan mengikuti prosedur yang telah ditentukan akan terbentuk graf G_5^4 sebagai berikut:

G_5^4 :



Gambar 3.68 Graf Faktorisasi Prima G_5^4

Graf ini mempunyai ciri diantaranya:

a. Memiliki 7 titik , $V\left(G_5^4\right) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ maka *order* dari G_5^4 adalah 7 atau $p(G_5^4) = 7$.

b. Memiliki 6 sisi, $E\left(G_5^4\right) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, dengan demikian graf ini mempunyai *size* 6 atau $q(G_5^4) = 6$.

c. Derajat setiap titik pada graf ini adalah:

$$\deg_{G_5^4}(v_1) = 1,\ \deg_{G_5^4}(v_2) = 2,\ \deg_{G_5^4}(v_3) = 3,\ \deg_{G_5^4}(v_4) = 1,$$
$$\deg_{G_5^4}(v_5) = 3,\ \deg_{G_5^4}(v_6) = 1,\ \textit{dan}\ \deg_{G_5^4}(v_7) = 1$$

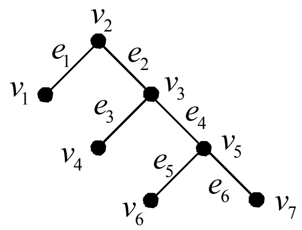
Maka derajat maksimum dari titik-titik pada graf ini adalah 3.

6. Graf Faktorisasi Prima untuk

$$p_6^4 = 13^4 = 13 \times 2197 = 13 \times 13 \times 169 = 13 \times 13 \times 13 \times 13 = 28561$$

$p_6^4 = 28561$ adalah suatu bilangan bulat positif yang dengan pohon faktor prima ditunjukan memuat n = 4 dan m = 3 faktorisasi prima. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik V_i dan garis pada pohon faktor prima diwakili oleh sisi E_j. Dengan mengikuti prosedur yang telah ditentukan akan terbentuk graf G_6^4 sebagai berikut:

G_6^4 :



Gambar 3.69 Graf Faktorisasi Prima G_6^4

Graf ini mempunyai ciri diantaranya:

a. Memiliki 7 titik , $V\left(G_6^4\right) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ maka *order* dari G_6^4 adalah 7 atau $p(G_6^4) = 7$.

b. Memiliki 6 sisi, $E\left(G_6^4\right) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, dengan demikian graf ini mempunyai *size* 6 atau $q(G_6^4) = 6$.

c. Derajat setiap titik pada graf ini adalah:

$$\deg_{G_6^4}(v_1) = 1,\ \deg_{G_6^4}(v_2) = 2,\ \deg_{G_6^4}(v_3) = 3,\ \deg_{G_6^4}(v_4) = 1,$$
$$\deg_{G_6^4}(v_5) = 3,\ \deg_{G_6^4}(v_6) = 1,\ dan\ \deg_{G_6^4}(v_7) = 1$$

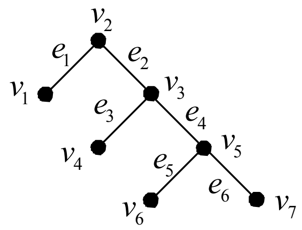
Maka derajat maksimum dari titik-titik pada graf ini adalah 3.

7. Graf Faktorisasi Prima untuk

$$p_7^4 = 17^4 = 17 \times 4913 = 17 \times 17 \times 289 = 17 \times 17 \times 17 \times 17 = 83521$$

$p_7^4 = 83521$ adalah suatu bilangan bulat positif yang dengan pohon faktor prima ditunjukan memuat n = 4 dan m = 3 faktorisasi prima. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik V_i dan garis pada pohon faktor prima diwakili oleh sisi E_j. Dengan mengikuti prosedur yang telah ditentukan akan terbentuk graf G_7^4 sebagai berikut:

G_7^4 :



Gambar 3.70 Graf Faktorisasi Prima G_7^4

Graf ini mempunyai ciri diantaranya:

a. Memiliki 7 titik , $V\left(G_7^4\right)= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ maka *order* dari G_7^4 adalah 7 atau $p(G_7^4) = 7$.

b. Memiliki 6 sisi, $E\left(G_7^4\right)= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, dengan demikian graf ini mempunyai *size* 6 atau $q(G_7^4) = 6$.

c. Derajat setiap titik pada graf ini adalah:

$$\deg_{G_7^4}(v_1) = 1,\ \deg_{G_7^4}(v_2) = 2,\ \deg_{G_7^4}(v_3) = 3,\ \deg_{G_7^4}(v_4) = 1,$$
$$\deg_{G_7^4}(v_5) = 3,\ \deg_{G_7^4}(v_6) = 1,\ dan\ \deg_{G_7^4}(v_7) = 1$$

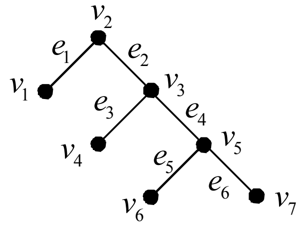
Maka derajat maksimum dari titik-titik pada graf ini adalah 3.

8. Graf Faktorisasi Prima untuk

$$p_8^4 = 19^4 = 19 \times 6859 = 19 \times 19 \times 361 = 19 \times 19 \times 19 \times 19 = 130321$$

$p_8^4 = 130321$ adalah suatu bilangan bulat positif yang dengan pohon faktor prima ditunjukan memuat n = 4 dan m = 3 faktorisasi prima. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik V_i dan garis pada pohon faktor prima diwakili oleh sisi E_j. Dengan mengikuti prosedur yang telah ditentukan akan terbentuk graf G_8^4 sebagai berikut:

G_8^4 :



Gambar 3.71 Graf Faktorisasi Prima G_8^4

Graf ini mempunyai ciri diantaranya:

a. Memiliki 7 titik , $V\left(G_8^4\right)= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ maka *order* dari G_8^4 adalah 7 atau $p(G_8^4) = 7$.

b. Memiliki 6 sisi, $E\left(G_8^4\right)= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, dengan demikian graf ini mempunyai *size* 6 atau $q(G_8^4) = 6$.

c. Derajat setiap titik pada graf ini adalah:

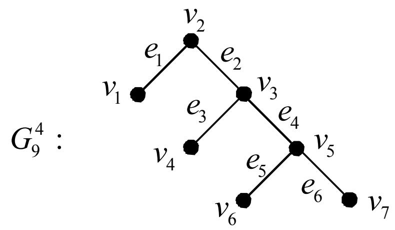
$$\deg_{G_8^4}(v_1) = 1,\ \deg_{G_8^4}(v_2) = 2,\ \deg_{G_8^4}(v_3) = 3,\ \deg_{G_8^4}(v_4) = 1,$$
$$\deg_{G_8^4}(v_5) = 3,\ \deg_{G_8^4}(v_6) = 1,\ dan\ \deg_{G_8^4}(v_7) = 1$$

Maka derajat maksimum dari titik-titik pada graf ini adalah 3.

9. Graf Faktorisasi Prima untuk

$$p_9^4 = 23^4 = 23 \times 12167 = 23 \times 23 \times 529 = 23 \times 23 \times 23 \times 23 = 279841$$

$p_9^4 = 279841$ adalah suatu bilangan bulat positif yang dengan pohon faktor prima ditunjukan memuat n = 4 dan m = 3 faktorisasi prima. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik V_i dan garis pada pohon faktor prima diwakili oleh sisi E_j. Dengan mengikuti prosedur yang telah ditentukan akan terbentuk graf G_9^4 sebagai berikut:



Gambar 3.72 Graf Faktorisasi Prima G_9^4

Graf ini mempunyai ciri diantaranya:

a. Memiliki 7 titik , $V\left(G_9^4\right)= \{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7\}$ maka *order* dari G_9^4 adalah 7 atau $p(G_9^4)=7$.

b. Memiliki 6 sisi, $E\left(G_9^4\right)= \{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$, dengan demikian graf ini mempunyai *size* 6 atau $q(G_9^4)=6$.

c. Derajat setiap titik pada graf ini adalah:

$$\deg_{G_9^4}(v_1)=1,\ \deg_{G_9^4}(v_2)=2,\ \deg_{G_9^4}(v_3)=3,\ \deg_{G_9^4}(v_4)=1,$$
$$\deg_{G_9^4}(v_5)=3,\ \deg_{G_9^4}(v_6)=1,\ \textit{dan}\ \deg_{G_9^4}(v_7)=1$$

Maka derajat maksimum dari titik-titik pada graf ini adalah 3.

3.2.2. Graf Lintasan dari Graf Faktorisasi Prima

Agar menjadi suatu graf lintasan, maka di bentuk suatu graf jalan dinotasikan dengan W_i^n dari graf faktorisasi prima G_i^n dengan memperhatikan langkah-langkah berikut:

1. buat graf terhubung, yaitu graf jalan (*walk*) di notasikan dengan $W_i^n = u - v$ dari graf faktorisasi prima G_i^n

2. anggap titik v_1 pada graf faktorisasi prima G_i^n sebagai v_0 pada graf jalan W_i^n

3. anggap titik ujung selain v_1 pada graf faktorisasi prima G_i^n sebagai v_n pada graf jalan W_i^n

3.2.2.1. Graf Lintasan dari Graf Faktorisasi Prima G_i^1

Graf jalan W_i^1 faktorisasi Prima dari graf G_i^1, yaitu:

$$W_i^1 : \bullet\, v_1$$

Gambar 3.73 Graf Jalan Faktorisasi Prima w_i^1

Graf ini mempunyai ciri-ciri sebagai berikut:

a. Graf di atas adalah jalan trivial, karena hanya memiliki 1 simpul , yaitu $V(W_i^1) = \{v_1\}$ dan tidak memiliki sisi, yaitu $E(W_i^1) = \{\}$.

b. Graf lintasan pada graf di atas adalah graf lintasan dengan order 1 dapat di gambarkan sebagai berikut.

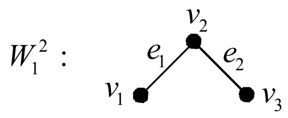
$$P_{G_i^1} : \bullet\, v_1$$

Gambar 3.74 Graf Lintasan $P_{G_i^1}$

Maka diperoleh $V(P_{G_i^1}) = \{v_1\}$, $E(P_{G_i^1}) = \{\ \}$. Karena graf P_1 tidak mempunyai sisi, maka lintasan terpanjang dari graf tersebut adalah 0.

3.2.2.2. Graf Lintasan dari Graf Faktorisasi Prima G_i^2

Graf jalan W_i^2 faktorisasi Prima dari graf G_i^2, yaitu:



Gambar 3.75 Graf Jalan Faktorisasi Prima W_i^2

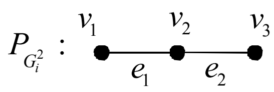
Graf ini mempunyai ciri-ciri sebagai berikut:

a. Graf di atas adalah jalan terbuka dengan $W_i^2 = v_1, v_2, v_3$. Panjang W_i^2 adalah 2.

b. W_i^2 semua sisinya berbeda, maka graf di atas adalah trail.

c. W_i^2 semua titiknya berbeda, maka graf di atas adalah lintasan.

d. Graf lintasan pada graf di atas adalah graf lintasan dengan order 3 dapat di gambarkan sebagai berikut.



Gambar 3.76 Graf Lintasan $P_{G_i^2}$

Maka di peroleh $V(P_3) = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E(P_3) = \{e_1, e_2\}$. Lintasan terpanjang dari graf di atas adalah 2.

3.2.2.3. Graf Lintasan dari Graf Faktorisasi Prima G_i^3

Graf jalan W_i^3 faktorisasi Prima dari graf G_i^3, yaitu:

Gambar 3.77 Graf Jalan Faktorisasi Prima W_i^3

Graf ini mempunyai ciri-ciri sebagai berikut:

a. Graf di atas adalah jalan terbuka dengan $W_1^3 = v_1, v_2, v_3, v_4$ dan $W_2^3 = v_1, v_2, v_3, v_5$. Panjang W_1^3 adalah 3 dan W_2^3 adalah 3.

b. W_1^3 dan W_2^3 semua sisinya berbeda, maka graf di atas adalah trail.

c. W_1^3 dan W_2^3 semua titiknya berbeda, maka graf di atas adalah lintasan.

d. Graf lintasan pada graf di atas adalah graf lintasan dengan order 4 dapat di gambarkan sebagai berikut.

Gambar 3.78 Graf Lintasan $P_{G_i^3}$

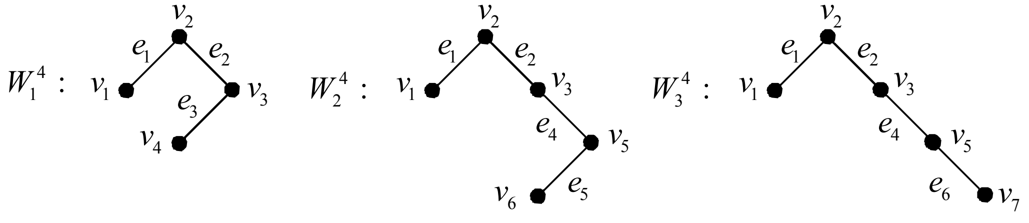
Maka di peroleh

$$V(P_{G_i^3 a}) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$
$$E(P_{G_i^3 a}) = \{e_1, e_2, e_3\}$$
$$V(P_{G_i^3 b}) = \{v_1, v_2, v_3, v_5\}$$
$$E(P_{G_i^3 b}) = \{e_1, e_2, e_4\}$$

Lintasan terpanjang dari graf di atas adalah 3.

3.2.2.4. Graf Lintasan dari Graf Faktorisasi Prima G_i^4

Graf jalan W_i^4 faktorisasi Prima dari graf G_i^4, yaitu:



Gambar 3.79 Graf Jalan Faktorisasi Prima W_i^4

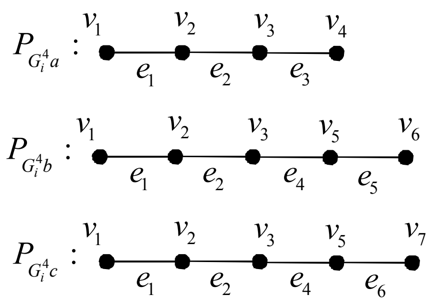
Graf ini mempunyai ciri-ciri sebagai berikut:

a. Graf di atas adalah jalan terbuka dengan $W_1^4 = v_1, v_2, v_3, v_4$, $W_2^4 = v_1, v_2, v_3, v_5, v_6$, dan $W_3^4 = v_1, v_2, v_3, v_5, v_7$. Panjang W_1^2 adalah 3, sedangkan W_2^4 dan W_3^4 panjangnya dalah 4.

b. W_1^4, W_2^4 dan W_3^4 semua sisinya berbeda, maka graf di atas adalah trail.

c. W_1^4, W_2^4 dan W_3^4 semua titiknya berbeda, maka graf di atas adalah lintasan.

d. Graf lintasan pada graf di atas adalah graf lintasan dengan order 4 dan 5 dapat di gambarkan sebagai berikut.



Gambar 3.80 Graf Lintasan $P_{G_i^4}$

Maka di peroleh

$$V(P_{G_i^4 a}) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$
$$E(P_{G_i^4 a}) = \{e_1, e_2, e_3\}$$
$$V(P_{G_i^4 b}) = \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_6\}$$
$$E(P_{G_i^4 b}) = \{e_1, e_2, e_4, e_5\}$$
$$V(P_{G_i^4 c}) = \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_7\}$$
$$E(P_{G_i^4 c}) = \{e_1, e_2, e_4, e_6\}$$

Lintasan terpanjang dari graf di atas adalah 4.

3.2.3. Mencari Ciri Umum Graf Faktorisasi Prima

Dari proses pembuatan graf faktorisasi prima G_i^n dan lintasan terpanjang $\max\left(P_{G_i^1}\right)$ dari graf faktorisasi prima, diperoleh graf yang memiliki pola sebagai berikut:

Tabel 3.2 Pola Graf Faktorisasi Prima Bilangan p_i^1

G_i^1	***Order***	***Size***	***Lintasan terpanjang***
G_1^1 untuk 2^1	1	0	0
G_2^1 untuk 3^1	1	0	0
G_3^1 untuk 5^1	1	0	0
G_4^1 untuk 7^1	1	0	0
G_5^1 untuk 11^1	1	0	0
G_6^1 untuk 13^1	1	0	0
G_7^1 untuk 17^1	1	0	0
G_8^1 untuk 19^1	1	0	0
G_9^1 untuk 23^1	1	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
G_i^1 untuk p_i^1	1	0	0

Sumber: analisis penulis 2010

Dari tabel 3.2 diperoleh kenyataan bahwa graf dari himpunan bilangan $p_1^1, p_2^1, p_3^1, ..., p_i^1$ dengan graf faktorisasi prima $G_1^1, G_2^1, G_3^1, ..., G_i^1$. Untuk semua graf faktorisasi prima $G_1^1, G_2^1, G_3^1, ..., G_i^1$, banyaknya sisi atau ordernya adalah $p\left(G_i^1\right)=1$, banyaknya titik atau sizenya adalah $q\left(G_i^1\right)=0$, dan lintasan terpanjangnya adalah $\max\left(P_{G_i^1}\right)=0$.

Tabel 3.3 Pola Graf Faktorisasi Prima Bilangan p_i^2

G_i^2	***Order***	***Size***	***Lintasan terpanjang***
G_1^2 untuk 2^2	3	2	2
G_2^2 untuk 3^2	3	2	2
G_3^2 untuk 5^2	3	2	2
G_4^2 untuk 7^2	3	2	2
G_5^2 untuk 11^2	3	2	2
G_6^2 untuk 13^2	3	2	2
G_7^2 untuk 17^2	3	2	2
G_8^2 untuk 19^2	3	2	2
G_9^2 untuk 23^2	3	2	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
G_i^2 untuk p_i^2	3	2	2

Sumber: analisis penulis 2010

Dari tabel 3.3 diperoleh kenyataan bahwa graf dari himpunan bilangan $p_1^2, p_2^2, p_3^2, ..., p_i^2$ dengan graf faktorisasi prima $G_1^2, G_2^2, G_3^2, ..., G_i^2$. Untuk semua graf faktorisasi prima $G_1^2, G_2^2, G_3^2, ..., G_i^2$, banyaknya sisi atau ordernya adalah $p\left(G_i^2\right)=3$, banyaknya titik atau sizenya adalah $q\left(G_i^2\right)=2$, dan lintasan terpanjangnya adalah $\max\left(P_{G_i^2}\right)=2$.

Tabel 3.4 Pola Graf Faktorisasi Prima Bilangan p_i^3

G_i^3	***Order***	***Size***	***Lintasan terpanjang***
G_1^3 untuk 2^3	5	4	3
G_2^3 untuk 3^3	5	4	3
G_3^3 untuk 5^3	5	4	3
G_4^3 untuk 7^3	5	4	3
G_5^3 untuk 11^3	5	4	3

G_6^3 untuk 13^3	5	4	3
G_7^3 untuk 17^3	5	4	3
G_8^3 untuk 19^3	5	4	3
G_9^3 untuk 23^3	5	4	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
G_i^3 untuk p_i^3	5	4	3

Sumber: analisis penulis 2010

Dari tabel 3.4 diperoleh kenyataan bahwa graf dari himpunan bilangan $p_1^3, p_2^3, p_3^3, ..., p_i^3$ dengan graf faktorisasi prima $G_1^3, G_2^3, G_3^3, ..., G_i^3$. Untuk semua graf faktorisasi prima $G_1^3, G_2^3, G_3^3, ..., G_i^3$, banyaknya sisi atau ordernya adalah $p\left(G_i^3\right)=5$, banyaknya titik atau sizenya adalah $q\left(G_i^3\right)=4$, dan lintasan terpanjangnya adalah $\max\left(P_{G_i^3}\right)=3$.

Tabel 3.5 Pola Graf Faktorisasi Prima Bilangan p_i^4

G_i^4	***Order***	***Size***	***Lintasan terpanjang***
G_1^4 untuk 2^4	7	6	4
G_2^4 untuk 3^4	7	6	4
G_3^4 untuk 5^4	7	6	4
G_4^4 untuk 7^4	7	6	4
G_5^4 untuk 11^4	7	6	4
G_6^4 untuk 13^4	7	6	4
G_7^4 untuk 17^4	7	6	4
G_8^4 untuk 19^4	7	6	4
G_9^4 untuk 23^4	7	6	4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
G_i^4 untuk p_i^4	7	6	4

Sumber: analisis penulis 2010

Dari tabel 3.5 diperoleh kenyataan bahwa graf dari himpunan bilangan $p_1^4, p_2^4, p_3^4, ..., p_i^4$ dengan graf faktorisasi prima $G_1^4, G_2^4, G_3^4, ..., G_i^4$. Untuk semua graf faktorisasi prima $G_1^4, G_2^4, G_3^4, ..., G_i^4$, banyaknya sisi atau ordernya adalah $p\left(G_i^4\right) = 7$, banyaknya titi atau sizenya adalah $q\left(G_i^4\right) = 6$, dan lintasan terpanjangnya adalah $\max\left(P_{G_i^4}\right) = 4$.

Dari tabel 3.2, 3.3, 3.4 dan 3.5 di atas diperoleh pola graf faktorisasi prima G_i^n sebagai berikut:

Tabel 3.6 Pola Graf Faktorisasi Prima Bilangan p_i^n

G_i^n	***Order***	***Size***	***Lintasan terpanjang***
G_i^1 untuk p_i^1	1	0	0
G_i^2 untuk p_i^2	3	2	2
G_i^3 untuk p_i^3	5	4	3
G_i^4 untuk p_i^4	7	6	4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
G_i^n untuk p_i^n	$2n-1$	$2n-2$	Untuk n >1, maka $\max\left(P_{G_i^n}\right) = n$

Sumber: analisis penulis 2010

3.3. Hubungan suatu Bilangan dan Banyaknya Faktor Prima dengan Graf Faktorisasi Prima

Pada subbab ini akan dirumuskan hubungan suatu bilangan dengan banyaknya titik, sisi, dan lintasan terpanjang pada graf faktorisasi prima dan hubungan banyak faktor prima yang muncul dengan banyak titik, sisi, dan lintasan terpanjang pada graf faktorisasi prima.

Dengan faktorisasi prima yang diperoleh dari suatu bilangan bulat lebih dari 1 dengan menggunakan pohon faktor prima, didapatkan faktor-faktor prima (p_1, p_2, p_3, …, p_i) sebanyak n dan faktor-faktor komposit (k_1, k_2, k_3, …, k_j) yang dapat difaktorisasi prima sebanyak $m = n - 1$, faktor-faktor tersebut dihubungkan dengan suatu garis. Jika faktorisasi prima tersebut dijadikan suatu graf, maka diperoleh pola dari titik, sisi dan lintasan terpanjang pada graf faktorisasi prima, sebagai berikut:

Tabel 3.7 Pola suatu Bilangan Bulat Lebih Dari 1 dan Graf Faktorisasi Prima Bilangan p_i^n

p_i^n	n	m	G_i^n	***Titik*** $\left\|V\left(G_i^n\right)\right\|$	***Sisi*** $\left\|E\left(G_i^n\right)\right\|$	***Lintasan terpanjang*** $\left(\max\left(P_{G_i^n}\right)\right)$
p_i^1	1	0	G_i^1	1	0	0
p_i^2	2	1	G_i^2	3	2	2
p_i^3	3	2	G_i^3	5	4	3
p_i^4	4	3	G_i^4	7	6	4
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
p_i^n	n	$n-1$	G_i^n	$2n-1$	$2n-2$	Untuk n >1, maka $\max\left(P_{G_i^n}\right) = n$

Sumber: analisis penulis 2010

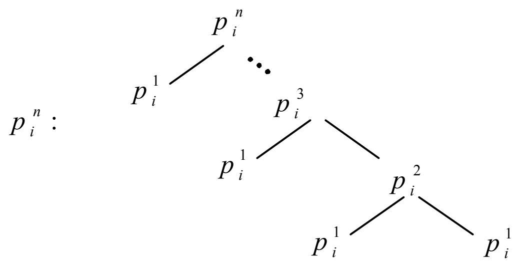
3.3.1. Hubungan suatu Bilangan dengan Banyaknya Titik dan Sisi pada Graf Faktorisasi Prima

Teorema 3.1

Jika p_i^n adalah faktorisasi prima dari suatu bilangan bulat lebih dari 1, maka G_i^n adalah graf faktorisasi prima dengan $\left|V(G_i^n)\right| = 2n-1$ dan $\left|E(G_i^n)\right| = 2n-2$.

Bukti:

Diagram pohon faktor prima dari p_i^n adalah seperti di bawah ini:



Gambar 3.81 Pohon Faktor Bilangan p_i^n

Pohon faktor prima di atas memuat faktor-faktor prima sebanyak n dan memuat faktor-faktor bukan prima yang dapat difaktorisasi prima sebanyak m = n - 1. Jika pohon faktor prima p_i^n dibuat graf G_i^n, maka setiap faktor pada pohon faktor diwakili oleh titik pada graf G_i^n (misal $v_1, v_2, v_3, \cdots, v_{2n-1}$). Jadi banyaknya faktor pada p_i^n sama dengan banyaknya titik pada G_i^n yaitu $n + m = n + (n-1) = (n+n) - 1 = 2n - 1$.

Untuk membuktikan sisi, perhatikan graf faktorisasi prima G_i^n yang mempunyai titik $v_1, v_2, v_3, \cdots, v_{2n-2}$. Karena G_i^n merupakan graf terhubung yang setiap pasang simpulnya hanya dihubungkan dengan 1 sisi, maka ada $2n-2$ sisi pada G_i^n yaitu $e_1 = (v_1, v_2)$, $e_2 = (v_2, v_3)$, $e_3 = (v_3, v_4)$, $\cdots$, $e_{2n-2} = (v_{2n-3}, v_{2n-1})$.

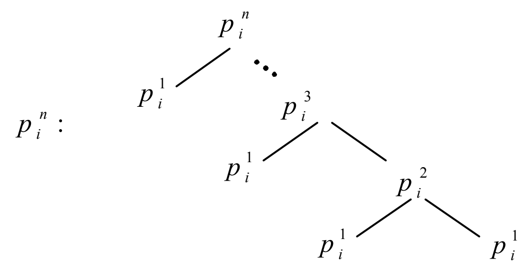
3.3.2. Hubungan suatu Bilangan dengan Lintasan Terpanjang pada Graf Faktorisasi Prima

Teorema 3.2

Jika p_i^n adalah faktorisasi prima dari suatu bilangan bulat lebih dari 1, maka $P_{G_i^n}$ adalah graf lintasan faktorisasi prima dengan lintasan terpanjang adalah $\max\left(P_{G_i^n}\right) = n$, untuk n > 1.

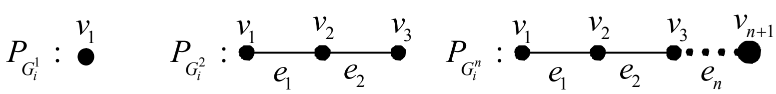
Bukti:

Untuk membuktikan lintasan terpanjang pada graf faktorisasi prima, perhatikan faktorisasi prima p_i^n, sebagai berikut:



Gambar 3.82 Lintasan Pohon Faktor Bilangan p_i^n

Setiap faktor prima tidak memuat suatu faktor selain dirinya sendiri dan setiap faktor prima dengan pangkat n > 1 selalu memuat dua cabang bilangan bulat yang merupakan faktor-faktornya. Jika faktorisasi prima tersebut diubah menjadi graf faktorisasi prima, maka akan diperoleh suatu graf dengan lintasan terpanjang sebagai berikut:



Gambar 3.83 Lintasan $p_{G_i^n}$

Graf lintasan di atas adalah graf lintasan terpanjang dari graf faktorisasi prima $G_i^1, G_i^2, G_i^3, ..., G_i^n$, untuk n > 1, maka graf lintasan terpanjangnya adalah $\max\left(P_{G_i^n}\right) = n$, yaitu:

$P_{G_i^2} = (v_1, e_1, v_2) = 2$,

$P_{G_i^3} = (v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4) = 3$,

•

•

•

$P_{G_i^n} = (v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, ..., e_{n-1}, v_n, e_n, v_{n+1}) = n$.

3.3.3. Hubungan Banyak Faktor prima yang Muncul pada suatu Bilangan dengan Banyaknya Titik, Sisi dan Lintasan Terpanjang pada Graf Faktorisasi Prima

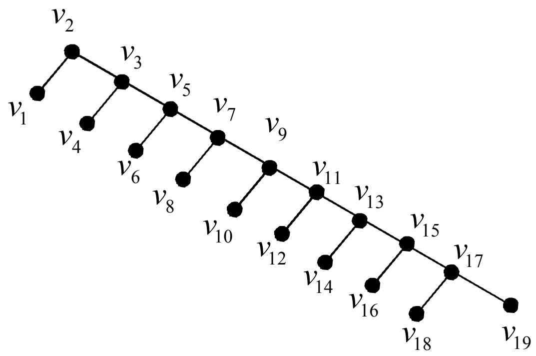
Teorema 3.3

Jika p_i^n adalah faktorisasi prima dari suatu bilangan bulat lebih dari 1, maka *n* adalah banyak faktor prima yang muncul.

Jika *n* adalah banyak faktor prima yang muncul, maka pada graf faktorisasi prima G_i^n, banyaknya titik adalah $\left|V(G_i^n)\right| = 2n-1$, banyaknya sisi adalah $\left|E(G_i^n)\right| = 2n-2$, dan untuk n > 1 lintasan terpanjangnya adalah $\max\left(P_{G_i^n}\right) = n$.

Bukti:

Misal n = 10, maka graf faktorisasi prima yang terbentuk adalah sebagai berikut:



Gambar 3.84 Graf G_i^{10}

Dari graf di atas diperoleh titik, sisi dan lintasan terpanjang pada graf adalah:

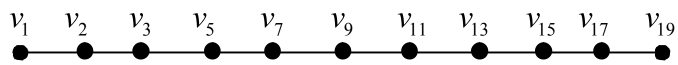
$V(G_i^{10}) = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_{18}, v_{19}\}$

$E(G_i^{10}) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), ..., (v_{17}, v_{19})\}$

Banyaknya titik $\left|V(G_i^{10})\right|$ atau order pada graf faktorisasi prima dengan banyak faktor prima n = 10 adalah $\left|V(G_i^{10})\right| = 19 = (2 \times 10) - 1 = 2n - 1$.

Banyaknya sisi $\left|E(G_i^{10})\right|$ atau Size pada graf faktorisasi prima dengan banyak faktor prima n = 18 adalah $\left|E(G_i^{10})\right| = 18 = (2 \times 10) - 2 = 2n - 2$.

Lintasan terpanjang dari G_i^{10}, sebagai berikut:



Gambar 3.85 Graf Lintasan dari Graf G_i^{10}

Graf di atas adalah graf lintasan dengan panjang maksimum $\max\left(P_{G_i^{10}}\right) = 10 = n$.

Perhatikan firman Allah SWT dalam Al-Qur'an surat An-Nisaa' ayat 1 dan 36 berikut:

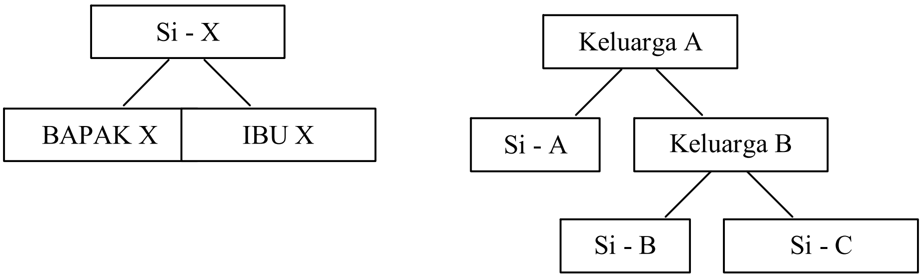
يَٰٓأَيُّهَا ٱلنَّاسُ ٱتَّقُواْ رَبَّكُمُ ٱلَّذِى خَلَقَكُم مِّن نَّفۡسٍ وَٰحِدَةٍ وَخَلَقَ مِنۡهَا زَوۡجَهَا وَبَثَّ مِنۡهُمَا رِجَالاً
كَثِيرًا وَنِسَآءً ۚ وَٱتَّقُواْ ٱللَّهَ ٱلَّذِى تَسَآءَلُونَ بِهِۦ وَٱلۡأَرۡحَامَ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ كَانَ عَلَيۡكُمۡ رَقِيبًا ﴿١﴾

Artinya: *Hai sekalian manusia, bertakwalah kepada Tuhan-mu yang telah menciptakan kamu dari seorang diri, dan dari padanya Allah menciptakan isterinya; dan dari pada keduanya Allah memperkembang biakkan laki-laki dan perempuan yang banyak. dan bertakwalah kepada Allah yang dengan (mempergunakan) nama-Nya kamu saling meminta satu sama lain, dan (peliharalah) hubungan silaturrahim. Sesungguhnya Allah selalu menjaga dan mengawasi kamu.*

۞ وَٱعۡبُدُواْ ٱللَّهَ وَلَا تُشۡرِكُواْ بِهِۦ شَيۡـًٔا ۖ وَبِٱلۡوَٰلِدَيۡنِ إِحۡسَٰنًا وَبِذِى ٱلۡقُرۡبَىٰ وَٱلۡيَتَٰمَىٰ وَٱلۡمَسَٰكِينِ
وَٱلۡجَارِ ذِى ٱلۡقُرۡبَىٰ وَٱلۡجَارِ ٱلۡجُنُبِ وَٱلصَّاحِبِ بِٱلۡجَنۢبِ وَٱبۡنِ ٱلسَّبِيلِ وَمَا مَلَكَتۡ أَيۡمَٰنُكُمۡ ۗ إِنَّ
ٱللَّهَ لَا يُحِبُّ مَن كَانَ مُخۡتَالاً فَخُورًا ﴿٣٦﴾

Artinya: *Sembahlah Allah dan janganlah kamu mempersekutukan-Nya dengan sesuatupun. dan berbuat baiklah kepada dua orang ibu-bapa, karib-kerabat, anak-anak yatim, orang-orang miskin, tetangga yang dekat dan tetangga yang jauh, dan teman sejawat, Ibnu sabil dan hamba sahayamu. Sesungguhnya Allah tidak menyukai orang-orang yang sombong dan membangga-banggakan diri.*

Dari dua ayat di atas dijelaskan bahwa manusia harus selalu menjaga hubungan baik dengan manusia lain, baik pada ibu, bapak, kerabat, anak-anak yatim, orang-orang miskin, tetangga jauh, tetangga dekat, teman sejawat, ibnu sabil, dan hamba sahaya. Jika kejadian di atas di gambarkan dalam graf faktorisasi prima, maka akan terbentuk sebagai berikut:



Gambar 3.86 Graf Hubungan Dengan Sesama Manusia

Dari gambar 3.84 di atas dapat di jelaskan bahwa:

Pertama, misalkan X adalah suatu keluarga, maka Si –X adalah hasil persilangan antara Bapak X dan Ibu X, atau dalam faktorisasi prima adalah bapak x dan ibu x adalah faktor-faktor prima p_1, p_2 dan si – x adalah p_1 x p_2.

Kedua, misalkan ada keluarga A dengan anak si-A dan Keluarga B dengan anak si-B dan si-C, maka keluarga A dan B adalah bertetangga dekat atau kerabat, sedangkan keluarga si-A dan Si-C adalah keluarga jauh.

Perhatikan firman Allah SWT dalam Al-Qur'an surat Al-Baqarah ayat 43 berikut:

وَأَقِيمُوا۟ ٱلصَّلَوٰةَ وَءَاتُوا۟ ٱلزَّكَوٰةَ وَٱرْكَعُوا۟ مَعَ ٱلرَّٰكِعِينَ ﴿٤٣﴾

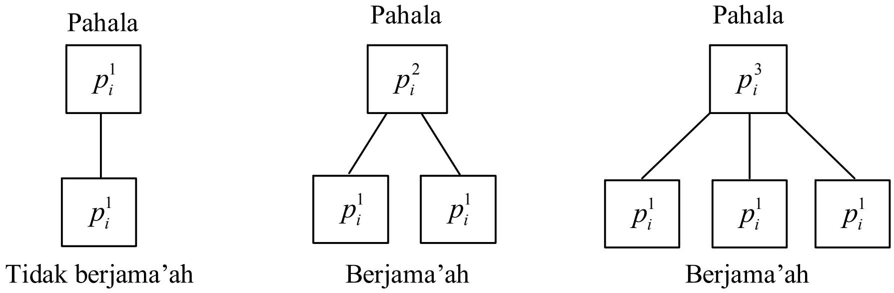
Artinya: *Dan dirikanlah shalat, tunaikanlah zakat dan ruku'lah beserta orang-orang yang ruku'.*

dan firman Allah SWT dalam Al-Qur'an surat Ali-'Imran ayat 43 berikut:

يَٰمَرْيَمُ ٱقْنُتِى لِرَبِّكِ وَٱسْجُدِى وَٱرْكَعِى مَعَ ٱلرَّٰكِعِينَ ﴿٤٣﴾

Artinya: *Hai Maryam, taatlah kepada Tuhanmu, sujud dan ruku'lah bersama orang-orang yang ruku'.*

Maksud shalat pada dua ayat di atas adalah shalat berjama'ah. Dalam Islam, sholat adalah salah satu ritual keagamaan dengan tujuan mendekatkan diri pada Allah SWT dan sholat berjama’ah sangat dianjurkan oleh agama. Dalam graf faktorisasi prima, shalat dengan tidak berjama’ah dan berjama’ah dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.87 Graf Hubungan Manusia dengan Allah

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada Bab III, maka dapat diambil kesimpulan bahwa untuk faktorisasi prima himpunan bilangan prima P_i^n dengan graf faktorisasi prima G_i^n, dimana *i* dan *n* bilangan bulat positif $i, n \neq 0$ dan *i* menunjukkan urutan faktor-faktor prima dan *n* menunjukkan jumlah dari semua pangkat faktor-faktor prima, antara lain:

1. Hubungan suatu bilangan dengan banyaknya titik dan sisi pada graf faktorisasi prima adalah:
   a) Banyaknya titik $\left|V\left(G_i^n\right)\right|$ pada suatu graf faktorisasi prima G_i^n adalah 2*n* - 1.
   b) Banyaknya sisi $\left|E\left(G_i^n\right)\right|$ pada suatu graf faktorisasi prima G_i^n adalah 2*n* - 2.
2. Hubungan suatu bilangan dengan lintasan terpanjang pada graf faktorisasi prima adalah:

   Lintasan $\left(\max\left(P_{G_i^n}\right)\right)$ terpanajang pada suatu graf faktorisasi prima G_i^n adalah untuk n > 1, maka $\max\left(P_{G_i^n}\right) = n$.
3. Hubungan banyak faktor prima yang muncul dengan banyak titik, sisi, dan lintasan terpanjang pada graf faktorisasi prima adalah:

a) Jika p^n adalah suatu bilangan bulat lebih dari 1 dengan faktorisasi prima p_i^n diperoleh faktor-faktor prima sebanyak n, maka banyaknya titik pada graf faktorisasi prima adalah $2n$ -1.

b) Jika p^n adalah suatu bilangan bulat lebih dari 1 dengan faktorisasi prima p_i^n diperoleh faktor-faktor prima sebanyak n, maka banyaknya sisi pada graf faktorisasi prima adalah $2n$ -2.

c) Jika p^n adalah suatu bilangan bulat lebih dari 1 dengan faktorisasi prima p_i^n diperoleh faktor-faktor prima sebanyak n, maka banyaknya lintasan terpanjang pada graf faktorisasi prima adalah untuk n > 1, maka $\max\left(P_{G_i^n}\right) = n$.

4.2 Saran

Pada skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pokok bahasan masalah *Graf Faktorisasi Prima suatu Bilangan* pada pohon faktor kanan. Maka dari itu, untuk penulisan skripsi selanjutnya, penulis menyarankan untuk mengkaji masalah *Graf Faktorisasi Prima suatu Bilangan* dari berbagai macam bentuk pohon faktor dan graf yang dikaji bukan hanya graf umum, tetapi dikaji pada graf-graf khusus seperti graf berbobot, graf beraraH, graf pohon, graf algoritma prime. Tentunya dengan kajian yang lebih dalam tentang teori bilangan dan teori graf.

DAFTAR PUSTAKA

Abdusysyakir. 2006. *Ada Matematika dalam Al-Qur'an*. Malang: UIN Malang Press.

Abdusysyakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Abdussakir. 2009. *Matematika 1 Kajian Integratif Matematika & Al-Qur'an*. Malang: UIN Malang Press.

Abdussakir, Nilna, dan Fifi. 2009. *Teori Graf*. Malang: UIN-Malang Press.

Abidin, Zainal. 2009. *Kajian Graf Latis Faktor Bilangan Prima Berpangkat n dan Bilangan bilangan* $2^n \times 10$. Malang: Skripsi.

Bondy, J. A dan Murty, U. S. R. 1976. *Theory Graph With Applications*. Canada: University of Waterloo.

Burton, David M. 2007. *Elementary Number Theory*. New York: University of New Hampshire

Chartrand, G. dan Lesniak, L. 1986. *Graph and Digraph 2nd Edition. California: Wadsworth. Inc.*

Grosswald, Emil. 1984. *Topics From The Theory Of Numbers*. Philadelphia: Temple University

Harary, Frank. 1969. *Graph Theory*. London: Addison-Wesley Publishing Company.

Jamilia, Yuli Hikma. 2008. *Cayley Color Graph dari Grup Simetri dan Grup Dihedral.* Malang: Skripsi.

Munir, Rinaldi. 2007. *Matematika Diskrit*. Bandung: INFORMATIKA.

Muhsetyo, Gatot. 1997. *Dasar-Dasar Teori Bilangan.* Malang: IKIP Malang.

Schroeder, M. R. 2006. *Number Theory in Science and Communication*. New York: Springer.

Shoup, Victor. 2003. *A Computational Introduction to Number Theory and Algebra*. New York: www.shoup.net/ntb.

Siang, Jong Jek. 2002. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya Pada Ilmu Komputer.* Yogyakarta: Andi.

Tabak, John. 2004. *The History Of Mathematics*. USA: Fact On File, Inc.

Tung, Khoe Yao. 2008. *Memahami Teori Bilangan dengan Mudah dan Menarik*. Jakarta: Grasindo.

Wilson. Robin J dan Walkins, John J. 1990. *Graphs An Introductory Approach*: *A first Course in Discrete Mathematic.* New York: John Wiley & Sons, Inc.