PENYELESAIAN NUMERIK SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL LOTKA VOLTERRA DENGAN METODE RUNGE KUTTA FEHLBERG (RKF 45) DAN METODE HEUN

SKRIPSI

Oleh :
SITI NUR URIFAH
NIM : 03510057

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2008

PENYELESAIAN NUMERIK SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL LOTKA VOLTERRA DENGAN METODE RUNGE KUTTA FEHLBERG (RKF 45) DAN METODE HEUN

SKRIPSI

Diajukan Kepada :
Universitas Islam Negeri (UIN) Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S. Si)

Oleh :
SITI NUR URIFAH
NIM : 03510057

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2008

HALAMAN PERSETUJUAN

PENYELESAIAN NUMERIK SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL LOTKA VOLTERRA DENGAN METODE RUNGE KUTTA FEHLBERG (RKF 45) DAN METODE HEUN

SKRIPSI

Oleh :
SITI NUR URIFAH
NIM : 03510057

Telah diperiksa dan disetujui untuk diuji
Tanggal : 20 Februari 2008

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Usman Pagalay, M. Si	Ahmad Barizi, M. A
NIP. 150 327 240	NIP. 150 283 991

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M. Si
NIP. 150 318 321

HALAMAN PENGESAHAN

PENYELESAIAN NUMERIK SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL LOTKA VOLTERRA DENGAN METODE RUNGE KUTTA FEHLBERG (RKF 45) DAN METODE HEUN

SKRIPSI

Oleh :
SITI NUR URIFAH
NIM : 03510057

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S. Si)

Tanggal 10 April 2008

Susunan Dewan Penguji :				Tanda Tangan
1.	**Penguji Utama**	**:**	**Wahyu Henky Irawan, M. Pd** **NIP. 150 300 386**	( )
2.	**Ketua Penguji**	**:**	**Evawati Alisah, M. Pd** **NIP. 150 291 271**	( )
3.	**Sekretaris**	**:**	**Usman Pagalay, M. Si** **NIP. 150 327 240**	( )
4.	**Anggota**	**:**	**Ahmad Barizi, M. A** **NIP. 150 283 991**	( )

Mengetahui dan Mengesahkan
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M. Si
NIP. 150 318 321

MOTTO

فَإِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرًا ۝٥

Artinya: Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan (Qs. Al – Insyirah / 94 : 5)

Jika kita telah mencapai apa yang kita inginkan, jangan pernah berhenti mencari mimpi lain untuk ditaklukkan.

(Rosalynn Smith Carter, mantan Ibu Negara USA)

Kupersembahkan karya yang sederhana ini untuk….

Ayahanda Muqodam dan Ibunda Alfiyah, yang telah bersusah payah dalam membesarkan,mendidik, dan memberikan segenap cinta kasih kepadaku.Semoga Allah Swt memberikan kebahagiaan di dunia dan akhirat.

Kedua adikku,Zaenab n Sofyan semoga jadi anak yang pinter, sholih & sholihah

Seluruh Guru dan Dosenku yang dengan ikhlas telah memberikan ilmu kepadaku.
Terima kasih banyak atas ilmu yang telah Engkau berikan, semoga menjadi ilmu yang manfa'at dan barakah.

Abah Prof. Dr. KH. Ahmad Muhdor, S.H, dan Keluarga Ndalem yang selalu mencurahkan ilmunya, terutama ilmu-ilmu spiritualnya

Sahabat-sahabat terbaikku yang telah banyak memberikan masukan dan motivasi kepadaku(Muhdor, Abdur, Dani, Rila dan Anita). Temen-temen matematika angkatan 2003 Semoga Allah Swt selalu menjaga persahabatan kita

Seluruh santri LTPLM yang budiman yang selama ini telah mengisi hari-hariku, sehingga terjadi perubahan dalam kehidupanku (Mbak Lel, Dewi Roskh,).
N juga Reza, Chamim,mbk Tika, de' lia, Ida,
De' Umi, pu2t, Arek2 kmr E, wa jami'an deh
terima kasih banyak atas motivasi dan bantuannya

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Alhamdulillah, Segala puji syukur ke hadirat Allah Swt, karena hanya atas segala rahmat dan hidayah-Nya penelitian ini dapat diselesaikan, hingga tersusun sebuah skripsi "*Penyelesaian Numerik Sistem Persamaan Diferensial Lotka Volterra Dengan Metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45) Dan Metode Heun*". Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat dalam memperoleh gelar Sarjana Sains (S. Si) pada Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Untuk itu, iringan do'a dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, utamanya kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D. Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.
3. Sri Harini, M. Si, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.
4. Usman Pagalay, M. Si dan Ahmad Barizi, M. A selaku Dosen Pembimbing skripsi atas segala masukan dan kesabaran beliau berdua dalam membimbing sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
5. Ari Kusumastuti, S. Si yang selalu memberikan masukan dan motivasi kepada penulis.

6. Seluruh Dosen Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang yang telah memberikan ilmu pengetahuan kepada penulis.
7. Seluruh karyawan dan staf Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
8. Bapak dan Ibu tercinta Muqodam dan Alfiyah yang dengan sepenuh hati memberikan dukungan moril dan spirituil serta ketulusan do'anya sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan.
9. Adik tersayang Siti Zaenab dan Muhammad Sofyan yang selalu memberi motivasi
10. Prof. Dr. KH Ahmad Muhdor, S. H, yang selalu memberikan ilmunya
11. Seluruh teman-teman Matematika angkatan 2003
12. Seluruh santriwan santriwati Pesantren Luhur Malang terima kasih atas semua bantuan, motivasi dan do'anya
13. Dan semua pihak yang telah membantu namun tidak bisa disebutkan satu persatu.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa masih banyak terdapat kekurangan dalam penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, dengan kerendahan hati, penulis mengharapkan saran dan kritik dari semua pihak yang bermanfaat pada penulisan selanjutnya. Akhir kata, semoga skripsi ini bermanfaat bagi semua pihak pada umumnya dan bagi penulis sendiri pada khususnya.

Malang, 20 Februari 2008

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

No. Judul Halaman

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

ABSTRAK

Urifah, Siti Nur. 2008. **Penyelesaian Numerik Sistem Persamaan Diferensial Lotka Volterra Dengan Metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45) Dan Metode Heun.** Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains Dan Teknologi Universitas Islam Negeri Malang.
Pembimbing: (I) Usman Pagalay, M. Si., (II) Ahmad Barizi, M. A

Kata kunci: Sistem persamaan diferensial Lotka Volterra, Runge Kutta Fehlberg, Heun.

Sistem persamaan diferensial Lotka Volterra merupakan sistem persamaan diferensial tak linier, yang secara analitik tidak dapat diselesaikan. Metode numerik sebagai alternatif dari metode analitik menyelesaikan sistem persamaan tersebut. Konsep alternatif dalam hal ini dapat diartikan sebagai jalan keluar atau kemudahan, yang berarti setiap permasalahan matematika atau kesulitan pasti akan ada penyelesaiannya. Begitu juga Allah Swt. memberikan kemudahan dalam melaksanakan shalat bagi orang yang sakit, sebagaimana firman Allah Swt. dalam Qs. Al-Insyirah / 94: 5:

”Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan”

Bentuk umum sistem persamaan diferensial Lotka Volterra adalah:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha.x(t) - \beta.x(t).y(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\gamma.y(t) + \delta.x(t).y(t)$$

Dalam pembahasan skripsi ini, penulis akan menyelesaikan dan menganalisis secara numerik sistem persmaan diferensial Lotka Volterra dengan metode *Runge Kutta Fehlberg* (RKF 45) dan metode Heun dengan bantuan Matlab pada interaksi dua populasi (*predator-prey*). Dengan besarnya $\alpha = 0.2$ $\beta = 0.005$ $\gamma = 0.5$ $\delta = 0.01$ $x(0) = 60$ $y(0) = 30$ $t = 50$ hari dan $h = 0.5$. Selanjutnya, tujuan penulisan skripsi ini adalah didapatkannya penyelesaian dan analisis numerik metode RKF 45 dan metode Heun dalam menyelesaikan persamaan Lotka Volterra. Langkah-langkah yang dilakukan penulis dalam membahas permasalahan adalah : (1) Pemodelan (2) Penyederhanaan Model (3) Formulasi Numerik (4) Pemrograman (5) Operasional dan (6) Analisis.

Hasil dari pembahasan skripsi ini adalah untuk metode RKF 45 bentuk I orde 4 adalah $x(50) =$ 39.46862153379923 dan $y(50) =$ 47.87357967576552, sedangkan untuk orde 5 adalah $x(50)$ = 39.47371270514351 dan $y(50)$ = 47.88946193738940.Untuk metode RKF 45 bentuk II orde 4 adalah $x(50) = 39.46871658914546$ dan $y(50) = 47.87373531259235$, sedangkan untuk orde 5 adalah $x(50)$ = 39.46870115413599 dan $y(50)$ = 47.87370860131695. Selanjutnya untuk metode Heun adalah $x(50) = 39.09579689103305$ dan $y(50) = 46.90754000886709$. Sedangkan dari analisis numerik yang didapatkan

menunjukkan bahwa hasil akhir *x(mangsa)* dan *y(pemangsa)* yang didapatkan sudah sesuai dengan konsep ekologi, yang berarti metode RKF 45 dan metode Heun merupakan metode yang teliti. Selanjutnya, galat pemotongan yang didapatkan pada metode RKF 45 tidak mempengaruhi besarnya jumlah spesies mangsa dan pemangsa. Pada penulisan yang selanjutnya, disarankan menambahkan parameter yang lain, model interaksi *n* populasi maupun model matematika yang lain, dan juga menggunakan metode predictor corrector banyak langkah.

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Dalam pandangan formalis, ”matematika adalah penelaahan struktur abstrak yang didefinisikan secara aksioma dengan menggunakan logika simbolik dan notasi matematika” (*http:/id.wikipedia.org/wiki/Matematika*). Sedangkan secara umum, ”matematika ditegaskan sebagai penelitian pola dari suatu struktur, perubahan dan ruang” (*http:/id.wikipedia.org/wiki/Matematika*). Struktur spesifik yang diselidiki oleh matematika sering kali berasal dari ilmu pengetahuan alam termasuk di dalamnya biologi, akan tetapi yang paling umum berasal dari fisika.

Pada perkembangannya, matematika tingkat lanjut digunakan sebagai alat untuk mempelajari berbagai fenomena fisik yang kompleks khususnya berbagai fenomena alam yang teramati agar pola struktur, perubahan ruang dan sifat-sifat fenomena tersebut bisa didekati atau dinyatakan dalam sebuah bentuk perumusan yang sistematis dan penuh dengan berbagai konvensi, simbol dan notasi. Hasil perumusan yang menggambarkan prilaku dan proses fenomena fisik tersebut biasa disebut model matematika. Karena kebanyakan fenomena fisik secara alamiah berujung pada hubungan antara kuantitas dan laju perubahannya, maka dibangunlah kalkulus, yang secara khusus topik tersebut dibahas dalam persamaan diferensial (*http:/id.wikipedia.org/wiki/Matematika*).

Persamaan diferensial yang pada mulanya disebut sebagai “*persamaan turunan*” merupakan persamaan yang diperkenalkan oleh Leibniz pada tahun 1676

(Finizio dan Ladas, 1988: 1). Secara definisi, ”persamaan diferensial merupakan persamaan yang menyangkut turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas” (Ross, 1984: 3). Selanjutnya dikenal sistem persamaan diferensial yang merupakan gabungan dari *n* buah persamaan diferensial.

Di sisi lain, ekologi sebagai cabang biologi, merupakan ilmu yang membahas hubungan organisme terhadap lingkungannya. Dalam ekologi, tentunya tidak akan terlepas dari adanya fenomena-fenomena fisik. Secara matematik, fenomena fisik tersebut digambarkan dalam model matematika.

Pembahasan ilmu ekologi khususnya interaksi predasi dua populasi menjadi sangat penting karena kelangsungan hidup manusia tergantung pada keseimbangan lingkungan sekitarnya. Dan keseimbangan tersebut dapat tercapai jika jumlah rata-rata spesies dari dua populasi yaitu populasi mangsa dan pemangsa (*predator prey*) yang sedang berinteraksi sesuai dengan ukuran atau proporsinya. Allah Swt. telah menciptakan segala sesuatu di alam semesta ini sesuai dengan ukuran atau kadar tertentu, termasuk dalam menciptakan makhluk hidup. Hal ini sesuai dengan firman Allah Swt.:

إِنَّا كُلَّ شَيۡءٍ خَلَقۡنَٰهُ بِقَدَرٖ ﴿٤٩﴾

”Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran”
(Qs. Al-Qamar / 54: 49).

Pada akhirnya, jika keseimbangan tidak bisa tercapai, maka kerusakan baik di darat maupun laut akan mengancam kehidupan manusia. Kerusakan tersebut tidak lain sebagai akibat perbuatan manusia sendiri sebagai pemangsa terbesar di muka bumi ini. Sebagaimana firman Allah Swt.:

ظَهَرَ ٱلۡفَسَادُ فِي ٱلۡبَرِّ وَٱلۡبَحۡرِ بِمَا كَسَبَتۡ أَيۡدِى ٱلنَّاسِ لِيُذِيقَهُم بَعۡضَ ٱلَّذِى عَمِلُواْ لَعَلَّهُمۡ يَرۡجِعُونَ ﴿٤١﴾

"Telah nampak kerusakan di darat dan di laut disebabkan karena perbuatan tangan manusia, supaya Allah merasakan kepada mereka sebagian dari (akibat) perbuatan mereka, agar mereka kembali (ke jalan yang benar)"
(Qs. Al-Rûm / 30 : 41).

Kajian matematis mengenai interaksi dua populasi semacam ini diperkenalkan secara terpisah oleh Alferd J. Lotka dan Vito Volterra pada sekitar tahun 1920, yang memformulasikan model matematika tersebut dalam sistem persamaan diferensial.

Sistem persamaan diferensial yang merupakan gabungan dari beberapa persamaan diferensial terbagi atas sistem persamaan diferensial linier dan tak linier. Dalam hal ini, sistem persamaan diferensial Lotka Volterra termasuk tak linier, yang secara matematik dirumuskan:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha.x(t) - \beta.x(t).y(t)$$
$$\frac{dy(t)}{dt} = -\gamma.y(t) + \delta.x(t).y(t)$$

Secara lebih khusus, sistem persamaan diferensial Lotka Volterra tersebut dalam memodelkan model *predator prey* dua populasi, mendefinisikan koefisien α sebagai laju kelahiran mangsa, $-\gamma$ sebagai koefisien laju kematian pemangsa, sedangkan β dan δ sebagai koefisien interaksi antara mangsa dan pemangsa.

Sedangkan $x(t)$ dan *y(t)* secara berturut-turut adalah jumlah spesies mangsa dan pemangsa dalam saat *t*.

Dalam penyelesaiannya, sistem persamaan diferensial Lotka Volterra secara eksplisit atau analitik tidak bisa diselesaikan, artinya tidak mempunyai solusi eksak. Akan tetapi dengan metode numerik yang merupakan cabang atau bidang matematika khususnya matematika rekayasa, yang menggunakan bilangan untuk menirukan proses matematika (Djojodiharjo, 2000: 1), sistem persamaan diferensial tersebut dapat diselesaikan, yang tentunya menghasilkan solusi numerik (solusi aproksimasi atau hampiran). Sehingga dapat dikatakan bahwa metode numerik merupakan alternatif dari metode analitik.

Metode penyelesaian persamaan diferensial biasa secara numerik terbagi menjadi 2, yaitu metode satu langkah dan metode banyak langkah. Metode yang termasuk satu langkah adalah metode deret Taylor, metode Euler, metode Runge Kutta dan metode Heun. Sedangkan metode yang termasuk banyak langkah adalah metode Adam-Bashforth-Moulton, metode Milne-Simpson dan metode Hamming.

Dari beberapa metode yang ada, diharapkan menghasilkan solusi numerik yang lebih mendekati nilai kenyataannya atau dapat dikatakan memiliki ketelitian yang tinggi dan juga mudah dibuat programnya. Oleh karena itu, dalam penulisan skripsi ini, penulis menggunakan metode *Runge Kutta Fehlberg* (RKF 45) yang merupakan metode Runge Kutta orde tinggi dan metode *Heun* yang merupakan metode *predictor corrector* (peramal pembetul). Dengan orde yang lebih tinggi tentunya akan dihasilkan solusi yang lebih teliti. Begitu juga dengan metode peramal pembetul, akan dihasilkan solusi yang lebih teliti karena nilai peramal (*predictor*) masih dikoreksi dengan nilai pembetul (*corrector*).

Metode *Runge Kutta Fehlberg* (RKF 45) dirumuskan sebagai berikut:

Bentuk I : $$y_{i+1} = y_i + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5 \qquad \text{(orde 4)}$$

$$\hat{y}_{i+1} = y_i + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{26437}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6 \qquad \text{(orde 5)}$$

Bentuk II: $$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{37}{378}k_1 + \frac{250}{621}k_3 + \frac{125}{594}k_4 + \frac{512}{1771}k_6\right)h \qquad \text{(orde 4)}$$

$$\hat{y}_{i+1} = y_i + \left(\frac{2825}{27648}k_1 + \frac{18575}{48384}k_3 + \frac{13525}{55296}k_4 + \frac{277}{14336}k_5 + \frac{1}{4}k_6\right)h$$

(orde 5)

Sedangkan metode *Heun* dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} &predictor : y_{i+1}^{(0)} = y_i + h\, f(x_i, y_i) \\ &corrector : y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(0)})\right] \end{aligned}$$

Dalam penghitungan numerik, terdapat beberapa bentuk proses hitungan untuk menyelesaikan suatu tipe persamaan matematis. Operasi hitungan dilakukan dengan iterasi (pengulangan) yang banyak dan berulang-ulang. Oleh karena itu, diperlukan bantuan komputer untuk melaksanakan opersai hitungan tersebut. Tanpa bantuan komputer, penghitungan numerik tidak banyak memberikan manfaat. Dalam hal ini penulis menggunakan software MATLAB.

Dari pemaparan di atas, penulis tertarik untuk menulis skripsi dengan judul "***Penyelesaian Numerik Sistem Persamaan Diferensial Lotka Volterra Dengan Metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45) Dan Metode Heun*".**

B. Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam skripsi ini adalah :

1. Bagaimanakah penyelesaian numerik sistem persamaan diferensial Lotka Volterra dengan metode *Runge Kutta Fehlberg* (RKF 45)?
2. Bagaimanakah penyelesaian numerik sistem persamaan diferensial Lotka Volterra dengan metode Heun?
3. Bagaimanakah analisis numerik metode *Runge Kutta Fehlberg* (RKF 45) dan metode Heun pada penyelesaian sistem persamaan diferensial Lotka Volterra?

C. Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah :

1. Untuk mengetahui penyelesaian numerik sistem persamaan diferensial Lotka Volterra dengan metode *Runge Kutta Fehlberg* (RKF 45)
2. Untuk mengetahui penyelesaian numerik sistem persamaan diferensial Lotka Volterra dengan metode Heun
3. Untuk menganalisis secara numerik metode *Runge Kutta Fehlberg* (RKF 45) dan metode Heun pada penyelesaian sistem persamaan diferensial Lotka Volterra

D. Manfaat Penulisan

Penulisan skripsi ini bermanfaat bagi :

1. Penulis, yaitu sebagai ilmu tambahan terutama tentang metode numerik yang sangat mendukung akademisnya.
2. Mahasiswa Jurusan Matematika, yaitu sebagai titik awal pembahasan yang bisa dilanjutkan atau lebih dikembangkan.
3. Pemerhati Matematika, yaitu sebagai wahana dalam menambah khazanah keilmuan matematika, khususnya tentang aplikasi matematika dalam dunia nyata.

E. Batasan Masalah

Supaya pembahasan lebih terfokus, maka penulis membuat batasan masalah dalam pembahasan, yaitu:

1. Sistem persamaan diferensial Lotka Volterra yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah model interaksi dua populasi (model *predator prey*), yang secara matematis dirumuskan sebagai:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha.x(t) - \beta.x(t).y(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\gamma.y(t) + \delta.x(t).y(t)$$

Dengan α adalah koefisien laju kelahiran mangsa, $-\gamma$ adalah koefisien laju kematian pemangsa, sedangkan β dan δ menunjukkan koefisien interaksi antara mangsa dan pemangsa. Karena koefisien $\alpha, \beta, \gamma,$ dan δ kesemuanya merupakan laju, maka besarnya memenuhi konsep peluang, yaitu terletak dalam interval [0 1]. Sehingga nilai $0 \le \alpha \le 1$ $0 \le \beta \le 1$ $0 \le \gamma \le 1$ dan $0 \le \delta \le 1$. Sedangkan besarnya $x(0)$ harus lebih besar dari $y(0)$, karena dalam interaksi predasi pada waktu awal $(t = 0)$ jumlah mangsa lebih besar dari pada pemangsanya.

2. Besarnya ukuran langkah (h) terletak dalam $0 < h < 1$

F. Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah metode penelitian kepustakaan. Penelitian kepustakaan merupakan suatu penelitian yang dilakukan dengan mengumpulkan data dan informasi dengan bantuan bermacam-macam material yang terdapat di ruangan perpustakaan, seperti: buku-buku, majalah, dokumen, catatan, kisah-kisah sejarah, dan lainnya (Mardalis, 2003: 28).

Dalam penelitian ini, penulis mengumpulkan informasi dari literatur atau catatan yang berhubungan dengan persamaan diferensial, interaksi populasi, dan metode numerik dalam penyelesaian persamaan diferensial biasa. Literatur-literatur atau catatan tersebut merupakan literatur utama, sedangkan literatur pendukungnya adalah literatur tentang Matlab, metode penelitian dan tafsir Al-Qur'an. Selanjutnya, langkah-langkah umum yang dilakukan penulis adalah:

1. Pemodelan: menentukan koefisien-koefisien yang terdapat dalam sistem persamaan diferensial Lotka Volterra.
2. Formulasi Numerik: menentukan metode numerik yang dipakai dan menyusun algoritmanya.

3. Pemrograman: menerjemahkan algoritma ke dalam bahasa pemrograman komputer
4. Operasional: memasukkan sistem persamaan diferensial yang akan dibahas ke dalam bahasa pemrograman komputer (Matlab)
5. Analisis: menganalisis metode numerik dalam menyelesaikan sistem persamaan diferensial Lotka Volterra.

G. Sistematika Pembahasan

Sistematika pembahasan yang digunakan dalam pembahasan skripsi ini adalah:

BAB I : Pendahuluan, yang terdiri dari latar belakang, perumusan masalah, tujuan penulisan, manfaat penulisan, batasan masalah, metodologi penelitian, dan sitematika pembahasan

BAB II : Tinjauan Pustaka, yang terdiri dari diferensial, persamaan diferensial, persamaan diferensial linier dan tak linier, sistem persamaan diferensial linier dan tak linier, penyelesaian persamaan diferensial dengan metode numerik, metode RKF 45 untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial orde satu dengan dua variabel tak bebas, metode Heun untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial orde satu dengan dua variabel tak bebas, sistem persamaan diferensial Lotka Volterra, dan MATLAB .

BAB III : Pembahasan, yang terdiri dari penyelesaian numerik sistem persamaan diferensial Lotka Volterra dengan metode *Runge Kutta Fehlberg* (RKF 45), penyelesaian numeik sistem persamaan diferensial Lotka Volterra dengan metode Heun dan analisis numerik metode *Runge Kutta Fehlberg* (RKF 45) dan metode Heun pada penyelesaian sistem persamaan diferensial Lotka Volterra

BAB IV : Penutup, yang terdiri dari kesimpulan dan saran

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

A. Diferensial

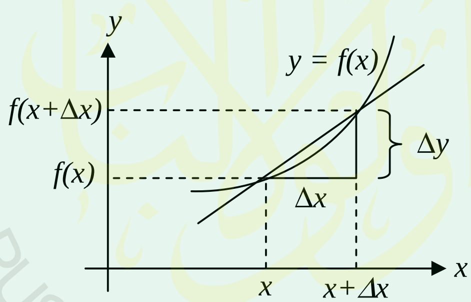
Misalkan fungsi *f* didefinisikan oleh persamaan:

$$y = f(x)$$

jika $f'(x)$ ada, maka

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

dengan $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$



Gambar 2.1 Grafik Fungsi y = f(x)

(Leithold, 1992: 262)

Definisi 1

Jika fungsi *f* didefinisikan oleh *y = f(x)*, maka diferensial dari *x*, yang dinyatakan oleh *dx*, diberikan oleh

$$dx = \Delta x$$

dengan Δx adalah pertambahan sebarang dari *x*, dan *x* merupakan bilangan sebarang di dalam daerah asal f' (Leithold, 1992: 263).

Definisi 2

Jika fungsi *f* didefinisikan oleh $y = f(x)$, maka diferensial dari *y*, dinyatakan oleh *dy*, diberikan oleh

$$dy = f'(x)\Delta x$$

dengan *x* dalam daerah asal f' dan Δx adalah pertambahan sebarang dari *x*.

Dari definisi 1 dan 2, diperoleh:

$$dy = f'(x)\,dx \tag{2.1}$$

dengan membagi kedua ruas pada persamaan (2.1) oleh *dx*, maka diperoleh:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \quad \text{jika } dx \neq 0 \tag{2.2}$$

persamaan (2.2) mengungkapkan bahwa turunan merupakan hasil bagi dua diferensial (Leithold, 1992: 262-263).

Dari definisi diferensial di atas, maka inti dari diferensial adalah pertambahan suatu nilai, misal *x*. Atau dapat dikatakan bahwa diferensial merupakan *perubahan suatu nilai yang tergantung pada nilai yang lain*. Secara lebih khusus, inti dari definisi tersebut dapat diilustrasikan dengan perubahan (pertambahan) jumlah sesuatu yang tergantung pada waktu, sebagai contoh dalam kajian agama Islam dikenal bahwa amal perbuatan manusia di dunia akan mengalami perubahan sejalan dengan perubahan waktu. Perubahan tersebut mungkin menuju ke arah positif (amalnya bertambah baik) atau menuju ke arah negatif (amalnya bertambah buruk). Idealnya amal perbuatan manusia harus bertambah baik, hal ini dapat difahami dari makna puasa Ramadhan yang berjumlah 30 hari.

Sudah seharusnya sebagai seorang muslim selalu memperbanyak amal baik pada bulan Ramadhan, karena bulan tersebut merupakan bulan umat Nabi Muhammad Saw. Dari 30 hari yang ada, dibagi menjadi 3 bagian, yang setiap bagian (10 hari) terdapat makna atau faidah yang berbeda. Sebagaimana hadits Nabi Muhammad Saw:

عَنْ أَبِيْ سَلْمَةَ عَنْ أَبِيْ هُرَيْرَةَ قَالَ قَالَ رَسُوْلُ اللهِ : إِنَّ أَوَّلَ شَهْرِ رَمَضَانَ
رَحْمَةٌ وَأَوْسَطَهُ مَغْفِرَةٌ وَآخِرَتَهُ عِتْقٌ مِنَ النَّارِ (رواه الديلمي والخطيب وابن عساكر)

"Dari Abi Salmah, dari Abi Hurairah berkata, Nabi Muhammad Saw bersabda: Sesungguhnya awal bulan Ramadhan adalah rahmat, tengah bulan Ramadhan adalah maghfirah dan akhir bulan Ramadhan adalah dibebaskan dari siksa api neraka (HR. Ad-Dailami, Al-Khathib dan Ibn Asaakir)"

(Masyikhah Ibnu Abi Shaqar: 82-83)

Dari hadits tersebut, dapat difahami bahwa selama bulan Ramadhan amal perbuatan manusia seharusnya berubah (bertambah) sesuai dengan bertambahnya waktu. Hal ini dapat digambarkan sebagai berikut:

10 hari pertama = waktu penuh rahmat

Ramadhan (30 hari) → 10 hari kedua = waktu penuh ampunan (maghfirah)

10 hari ketiga = waktu dibebaskan dari siksa neraka

Dari gambar di atas jelas terjadi perubahan setiap $\frac{1}{3}$ bagian dari 30 hari bulan Ramadhan, yaitu pada 10 hari pertama sebagai waktu yang penuh dengan rahmat menganjurkan manusia selalu memperbanyak amal baiknya, pada 10 hari kedua sebagai waktu yang penuh dengan ampunan menganjurkan manusia selalu meminta maaf kepada sesamanya terutama kepada Allah Swt. dan pada 10 hari ketiga sebagai waktu dibebaskannya siksa neraka menjelaskan bahwa setelah melewati 20 hari bulan Ramadhan dengan penuh keimanan dan kesungguhan, maka manusia akan diampuni dosa-dosanya (عتق من النار).

Secara lebih luas dapat difahami bahwa kehidupan manusia:

Kehidupan manusia $\rightarrow$

- $\frac{1}{3}$ hidup$\rightarrow$ mengandung rahmat, ssehinga manusia menjadi bagian yang lain
- $\frac{1}{3}$ hidup$\rightarrow$ saling memaafkan, manusia dituntut hidup lapang dengan yang lain, artinya bebas dari iri, dengki, hasut dan sebagainya
- $\frac{1}{3}$ hidup$\rightarrow$ manusia bebas dari neraka (secara lebih luas, bebas dari kesengsaraan, kebodohan dan kemiskinan), artinya manusia harus sejahtera dan bahagia

Dari contoh tersebut, dapat dipahami bahwa konsep diferensial sebagai perubahan terhadap waktu, yang secara lebih khusus, perubahan tersebut tidak hanya dalam hitungan 10 hari tetapi dalam hitungan hari atau setiap hari amal perbuatan manusia harus selalu mengalami perubahan (bertambah baik) dari hari sebelumnya (terutama selama bulan Ramadhan), sebagaimana Nabi Muhammad Saw bersabda:

مَنْ كَانَ يَوْمُهُ خَيْرًا مِنْ أَمْسِهِ فَهُوَ رَابِحٌ وَمَنْ كَانَ يَوْمُهُ مِثْلَ أَمْسِهِ فَهُوَ مَغْبُوْنٌ وَمَنْ كَانَ يَوْمُهُ شَرًّا مِنْ أَمْسِهِ فَهُوَ مَلْعُوْنٌ (رواه الحاكم)

" Barang siapa yang (keadaan) hari ini lebih baik dari hari kemarin, maka ia tergolong orang yang beruntung, barang siapa yang (keadaan) hari ini sama dengan hari kemarin, maka ia tergolong orang yang tertipu, dan barang siapa

yang (keadaan) hari ini lebih jelek dari hari kemarin, maka ia tergolong orang yang terlaknat (HR. Al-Hakim)"

(Dahlan, 1994: 220)

Pada intinya, dalam kehidupan ini manusia dituntut untuk melakukan perubahan dalam segala aspek kehidupan, baik kehidupan akhirat maupun kehidupan dunia, yang tentunya perubahan menuju ke arah yang lebih baik.

B. Persamaan Diferensial

Definisi 3

Persamaan diferensial adalah persamaan yang menyangkut turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas (Ross, 1984: 3).

Berdasarkan jumlah variabel bebasnya, persamaan diferensial dikelompokkan menjadi persamaan diferensial biasa (PDB) atau *Ordinary Differential Equation (ODE)* dan persamaan diferensial parsial (PDP) atau *Partial Differential Equation (PDE)*.

Definisi 4

Persamaan diferensial biasa (PDB) adalah persamaan diferensial yang menyangkut turunan biasa dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas (Ross, 1984: 4).

Contoh 1

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \qquad (2.3)$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 5\frac{d^2x}{dt^2} + 3x = \sin t \qquad (2.4)$$

Pada persamaan (2.3), variabel x adalah variabel bebas dan y adalah variabel tak bebas. Sedangkan pada persamaan (2.4), variabel bebasnya adalah t dan variabel tak bebasnya adalah x (Ross, 1984: 4)

Definisi 5

Persamaan diferensial parsial (PDP) adalah persamaan diferensial yang menyangkut turunan parsial dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap lebih dari satu variabel bebas (Ross, 1984: 4).

Contoh 2

$$\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{\partial v}{\partial t}=v \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \tag{2.6}$$

Variabel bebas pada persamaan (2.5) adalah s dan t sedangkan variabel tak bebasnya adalah v. Selanjutnya pada persamaan (2.6) variabel x, y dan z adalah variabel bebasnya, sedangkan variabel u adalah variabel tak bebasnya (Ross, 1984: 4)

Definisi 6

Orde suatu persamaan diferensial adalah orde (tingkat) tertinggi dari turunan yang terdapat pada persamaan tersebut, yang tingkatnya paling tinggi (Pamuntjak dan Santosa, 1990: 1_3)

Pada contoh 1 dan 2 di atas, persamaan (2.5) adalah persamaan diferensial yang berorde satu ,(2.3) dan (2.6) adalah persamaan diferensial yang berorde dua, sedangkan persamaan (2.4) adalah persamaan diferensial berorde empat.

Hubungan antara variabel bebas dan terikat pada suatu persamaan diferensial dapat dianalogikan dengan hubungan orang tua dengan anaknya. Dalam hal ini variabel bebas sebagai variabel yang mempengaruhi besarnya variabel terikat didefinisikan sebagai orang tua, yang mempunyai pengaruh sangat besar terhadap kehidupan anaknya (anak sebagai variabel terikat). Pengaruh tersebut, berlaku pada semua segi kehidupan anak, terutama dalam memilih suatu agama. Sebagaimana Nabi Muhammad Saw bersabda:

عَنْ أَبِي هُرَيْرَةَ رَضِيَ اللَّهُ عَنْهُ قَالَ قَالَ النَّبِيُّ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ مَا مِنْ مَوْلُودٍ إِلاَّ يُولَدُ عَلَى الْفِطْرَةِ فَأَبَوَاهُ يُهَوِّدَانِهِ أَوْ يُنَصِّرَانِهِ أَوْ يُمَجِّسَانِهِ كَمَا تُنْتَجُ الْبَهِيمَةُ بَهِيمَةً جَمْعَاءَ هَلْ تُحِسُّوْنَ فِيهَا مِنْ جَدْعَاءَ(رواه بخارى).

“ Dari Abi Hurairah RA, berkata, Nabi Muhammad Saw bersabda: Tidak ada seorang anakpun yang dilahirkan dalam keadaan suci bersih, maka kedua orang tuanya yang menjadikannya Yahudi, Nasrani atau Majusi, sama halnya sebagai seekor hewan ternak, maka ia akan melahirkan ternak pula dengan sempurna, tiada kamu dapati kekurangannya (HR. Bukhari)”

(Bukhari, 1992: 89)

Sesuai dengan konsep hubungan variabel bebas dan terikat pada persamaan diferensial, maka dari hadits tersebut dapat diilustrasikan sebagai berikut:

Islam → baik

$$\frac{\text{Kehidupan anak (}\textit{variabel terikat}\text{)}}{\text{Pengaruh orang tua (}\textit{variabel bebas}\text{)}}$$

Yahudi, Nasrani atau Majusi → jelek

Secara lebih luas, dari ilustrasi di atas dapat dijelaskan bahwa kehidupan anak akan baik (dalam segala aspek) jika pengaruh orang tua sebagai variabel yang mempengaruhi juga baik. Sebaliknya, kehidupan anak akan jelek (dalam segala aspek) jika pengaruh orang tua sebagai variabel yang mempengaruhi juga jelek.

Merujuk pada hadits riwayat Al-Hakim pada pembahasan tentang diferensial, maka dari hadits tersebut juga dapat digambarkan tentang tingkat (orde) manusia dalam hal amal perbuatan (ibadah)nya, yaitu:

Orde ketiga = golongan orang yang beruntung

$\downarrow$

Orde kedua = golongan orang yang tertipu

$\downarrow$

Orde pertama = golongan orang yang terlaknat

Dari gambaran tersebut, sudah seharusnya sebagai seorang muslim memikirkan di mana kedudukannya, meskipun pada awalnya menempati orde pertama, pada waktu selanjutnya harus berusaha supaya tergolong pada orde yang kedua atau bahkan ketiga, yaitu dari golongan yang tertipu kemudian menjadi golongan beruntung.

C. Persamaan Diferensial Linier dan Persamaan Diferensial Tak Linier

Definisi 7

Sebuah persamaan diferensial biasa linier orde *n*, dengan variabel terikat *y* dan variabel bebas *x*, adalah sebuah persamaan yang dapat dituliskan dalam bentuk:

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x) \qquad (2.7)$$

dengan $a_0 \neq 0$ (Ross, 1984: 5)

Contoh 3

$$\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+6y=0 \qquad (2.8)$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}+x^2\frac{d^3y}{dx^3}+x^3\frac{dy}{dx}=xe^x \qquad (2.9)$$

Secara lebih sederhana, persamaan diferensial biasa linier orde pertama dapat ditulis sebagai:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x) \qquad (2.10)$$

jika $Q(x)=0$, maka persamaan tersebut dikatakan persamaan diferensial linier homogen. Sebaliknya, jika $Q(x)\neq 0$ dikatakan persamaan diferensial linier tak homogen (Pamuntjak dan Santosa, 1990: 2_39).

Persamaan diferensial dikatakan linier jika mempunyai ciri-ciri sebagai berikut:

1. Variabel terikat dan derivatifnya hanya berderajat satu.
2. Tidak ada perkalian antara variabel terikat dengan derivatifnya serta antar derivatif.
3. Variabel terikat bukan fungsi transenden (Baiduri, 2002: 4)

Definisi 8

Persamaan diferensial biasa tak linier adalah sebuah persamaan diferensial yang tidak linier (Ross, 1984: 5).

Contoh 4

$$\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+6y^2=0 \qquad (2.11)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 6y = 0 \qquad (2.12)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5y\frac{dy}{dx} + 6y = 0 \qquad (2.13)$$

Persamaan (2.11) disebut tak linier, karena variabel terikat y berorde dua, yaitu $6y^2$. Persamaan (2.12) disebut tak linier, karena $5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$, turunan pertamanya dalam bentuk pangkat 3. Sedangkan persamaan (2.13) disebut tak linier, karena dalam $5y\frac{dy}{dx}$ terdapat perakalian antara variabel terikat y dengan turunan pertamanya (Ross, 1984: 6).

D. Sistem Persamaan Diferensial Linier dan Sistem Persamaan Diferensial Tak Linier

Sistem persamaan diferensial adalah gabungan dari *n* buah persamaan diferensial dengan *n* buah fungsi tak diketahui. Dalam hal ini, *n* merupakan bilangan bulat positif ≥ 2. Selanjutnya, sistem persamaan diferensial linier adalah sistem persamaan yang terdiri dari *n* buah persamaan diferensial linier dengan *n* buah fungsi tak diketahui. Sistem ini disebut juga *sistem linier*. Sistem persamaan diferensial linier dengan *n* fungsi-fungsi yang tak diketahui berbentuk:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\
\dot{x}_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dot{x}_n &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)
\end{aligned} \qquad (2.14)$$

Sistem dari dua persamaan diferensial linier dengan dua fungsi yang tak diketahui berbentuk:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + f_1(t) \\ \dot{x}_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + f_2(t) \end{aligned} \tag{2.15}$$

Dengan koefisien $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ dan fungsi f_1, f_2; semua merupakan fungsi *t* yang kontinu pada suatu selang *I* dan x_1, x_2 adalah fungsi *t* yang tidak diketahui. Sedangkan titik di atas x_1 dan x_2 menyatakan turunan menurut peubah bebas *t*.

Sedangkan sistem persamaan diferensial tak linier adalah sistem persamaan yang terdiri dari *n* buah persamaan diferensial tak linier dengan *n* buah fungsi tak diketahui. Sistem ini disebut juga *sistem tak linier*. Sistem dari dua persamaan diferensial tak linier dengan dua fungsi yang tak diketahui berbentuk:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by + F(x, y) \\ \dot{y} &= cx + dy + G(x, y) \end{aligned} \tag{2.16}$$

dengan $ad - bc \neq 0$, *F (x,y)* dan *G (x,y)* adalah fungsi terhadap *x* dan *y*, dengan *x* dan *y* bervariabel *t*.

Dari tipe-tipe persamaan diferensial tak linier, hanya beberapa tipe yang dapat diselesaikan secara eksplisit, seperti persamaan diferensial homogen dan persamaan diferensial eksak. Demikian juga untuk sistem persamaan diferensial tak linier. Di sisi lain, jika dibandingkan antara linier dan tak linier, maka model matematis yang digambarkan dengan sistem tak linierlah yang banyak menggambarkan keadaan yang lebih mendekati kenyataan (Finizio dan Ladas, 1988: 132-133, 302-304).

Konsep sistem persamaan diferensial, jika dikaji secara mendalam dapat ditemukan relevansinya dengan hubungan manusia dengan manusia lain (manusia sebagai makhluk sosial). Sebuah persamaan diferensial disebut sistem jika terdiri dari n buah persamaan diferensial $(n \geq 2)$. Begitu juga manusia, dalam kehidupan ini manusia akan disebut manusia jika berinteraksi dengan manusia lain, oleh karena itu manusia dituntut untuk membentuk suatu sistem yaitu sistem kemasyarakatan. Sebagaimana diketahui bahwa dalam kehidupan masyarakat yang harus dikedepankan adalah sikap saling tolong menolong (dalam kebaikan). Hal ini sesuai dengan firman Allah Swt..:

...وَتَعَاوَنُواْ عَلَى ٱلۡبِرِّ وَٱلتَّقۡوَىٰۖ وَلَا تَعَاوَنُواْ عَلَى ٱلۡإِثۡمِ وَٱلۡعُدۡوَٰنِۚ وَٱتَّقُواْ ٱللَّهَۖ إِنَّ ٱللَّهَ شَدِيدُ ٱلۡعِقَابِ ۝٢

" ... Dan tolong-menolonglah kamu dalam (mengerjakan) kebajikan dan taqwa dan jangan tolong-menolong dalam berbuat dosa dan pelanggara. dan bertaqwalah kamu kepada Allah. Sesungguhnya Allah amat berat siksa-Nya" (Qs. Al-Mâidah / 5: 2).

Sebagai ilustrasi dari pemaparan di atas: Dalam proses pembayaran zakat, ada 3 komponen yang membentuknya, yaitu:

$\dot{x}_1$ = Pemberi zakat (*muzakki*)
$\dot{x}_2$ = Amil zakat
$\dot{x}_3$ = Penerima zakat (*mustakhiq zakat*)

Dalam konsep matematika, variabel $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$ dan $\dot{x}_3$ akan membentuk suatu sistem persamaan diferensial. Sehingga analoginya, antara pemberi zakat (*muzakki*), amil zakat dan penerima zakat (*mustakhiq zakat*) akan membentuk suatu sistem, yaitu proses pembayaran zakat, yang antara ketiganya saling bekerja sama dan tolong menolong dalam kebaikan (البرّ dan التقوي).

E. Penyelesaian Persamaan Diferensial dengan Metode Numerik

1. Metode Numerik

Metode artinya cara, sedangkan numerik artinya angka, sehingga metode numerik secara harfiah berarti cara berhitung dengan menggunakan angka-angka. Sedangkan secara istilah, metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematik sehingga dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan atau aritmetika biasa (tambah, kurang, kali dan bagi) (Munir, 2006: 5). Secara lebih sederhana metode numerik merupakan cabang atau bidang matematika khususnya matematika rekayasa, yang menggunakan bilangan untuk menirukan proses matematika (Djojodiharjo, 2000: 1).

Metode numerik disebut juga sebagai alternatif dari metode analitik, yang merupakan metode penyelesaian persoalan matematika dengan rumus-rumus aljabar yang sudah baku atau lazim. Disebut demikian, karena adakalanya persoalan matematik sulit diselesaikan atau bahkan tidak dapat diselesaikan secara analitik sehingga dapat dikatakan bahwa persoalan matematik tersebut tidak mempunyai solusi analitik. Sehingga sebagai alternatifnya, persoalan matematik tersebut diselesaikan dengan metode numerik.

Perbedaan utama antara metode numerik dengan metode analitik terletak pada dua hal, yaitu:

a) Solusi dengan metode numerik selalu berbentuk angka, sedangkan dengan metode analitik biasanya menghasilkan solusi dalam bentuk fungsi matematik yang selanjutnya fungsi matematik tersebut dapat dievaluasi untuk menghasilkan nilai dalam bentuk angka.

b) Dengan metode numerik hanya diperoleh solusi yang menghampiri atau mendekati solusi sejati sehingga solusi numerik dinamakan juga solusi hampiran (*approximation*) atau solusi pendekatan. Akan tetapi, solusi hampiran tersebut dapat dibuat seteliti yang diinginkan. Solusi hampiran tentu tidak tepat sama dengan solusi sejati, sehingga ada selisih antara keduanya, dan selisih tersebut dinamakan sebagai galat (*error*). Sedangkan dengan solusi analitik sudah pasti dihasilkan solusi sejati yang sesuai dengan kenyataannya (Munir, 2006:5).

2. Penyelesaian PDB secara Numerik

Secara umum, problem persamaan diferensial selalu melibatkan harga awal (nilai awal/initial value), yang dapat ditulis sebagai berikut:

$$y' = f(x, y) \qquad y(x_0) = y_0 \tag{2.17}$$

$$x_0 \le x \le x_n$$

secara numerik, solusi problem tersebut adalah berada dalam interval $[x_0, x_n]$ yang dibagi secara tetap (*equidistance*) sebanyak *n* buah langkah, sehingga ukuran langkah (step) yang dilambangkan dengan *h*, dapat didefinisikan sebagai $h = \frac{x_n - x_0}{n}$, $n = \frac{x_n - x_0}{h}$ (*www.chemeng.ui.ac.id/~bismo/S1/mater/mod-04.pdf*)

Berarti, penyelesaian numerik PDB dengan nilai awal adalah menghitung nilai fungsi di $x_{i+1} = x_i + h$. Pada metode analitik, nilai awal berfungsi untuk memperoleh solusi yang unik, sedangkan pada metode numerik, nilai awal pada persamaan (2.17) berfungsi untuk memulai lelaran atau iterasi.

Terdapat beberapa metode numerik yang sering digunakan untuk menghitung solusi PDB, mulai dari metode yang paling dasar sampai dengan metode yang lebih teliti. Dari beberapa metode yang ada, metode yang paling dasar dan merupakan metode yang umum untuk menurunkan rumus-rumus solusi PDB adalah ***metode deret Taylor***. Dalam menyelesaikan PDB dengan nilai awal, metode tersebut dijabarkan sebagai:

Diberikan PDB:

$$y'(x) = f(x, y) \text{ dengan nilai awal } y(x_0) = y_0$$

Misalkan $y_{i+1} = y(x_{i+1})$, dengan $i = 0, 1, 2, \cdots, n$. y_{i+1} adalah hampiran nilai y di x_{i+1}. Maka hampiran ini dapat diperoleh dengan menguraikan y_{i+1} di sekitar x_i sebagai berikut:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)}{1!} y'(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} y''(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{3!} y'''(x_i) + \cdots + \frac{(x_{i+1} - x_i)^n}{n!} y^{(n)}(x_i)$$

atau

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h\, y'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) + \frac{h^3}{6} y'''(x_i) + \cdots + \frac{h^{(n)} y^{(n)}}{n!} x_i$$

Secara garis besar, terdapat 2 kelompok metode dalam menyelesaikan PDB secara numerik, yaitu:

a) Metode satu langkah (*one-step*)

Disebut metode satu langkah, karena untuk menaksir nilai $y(x_{i+1})$ dibutuhkan satu taksiran nilai sebelumnya yaitu $y(x_i)$. Metode yang termasuk metode satu langkah adalah metode deret Taylor, metode Euler, metode Heun dan metode Runge Kutta.

b) Metode banyak langkah (*multi-step*)

Pada metode ini, perkiraan nilai $y(x_{i+1})$ memerlukan beberapa taksiran nilai sebelumnya, yaitu $y(x_i), y(x_{i-1}), y(x_{i-2}), \cdots$. Salah satu metode banyak langkah adalah metode *predictor corrector*. Terdapat beberapa metode *predictor corrector*, diantaranya adalah metode Adam-Bashforth-Moulton, metode Milne-Simpson dan metode Hamming. Selain itu, dikenal juga metode Heun yang merupakan metode *predictor corrector*, akan tetapi bukan termasuk metode banyak langkah, karena taksiran nilai $y(x_{i+1})$ hanya didasarkan didasarkan pada taksiran $y(x_i)$. Tujuan utama metode banyak langkah adalah menggunakan informasi dari beberapa titik sebelumnya, yaitu titik $y_i, y_{i-1}, y_{i-2}, \cdots$ untuk menghitung taksiran nilai $y(x_{i+1})$ yang lebih baik (Munir, 2006: 379, 392).

Telah disebutkan bahwa perbedaan utama antara metode numerik dan metode analitik adalah bahwa hasil akhir atau penyelesaian metode numerik selalu berbentuk angka. Selanjutnya, kalau berbicara tentang konsep matematika, maka pembahasan tentang bilangan (angka), tidak akan begitu saja terabaikan. Karena bilangan (angka) merupakan bagian terpenting dan mendasar dalam matematika.

Secara lebih khusus, metode numerik yang merupakan bidang matematika rekayasa juga menggunakan bilangan untuk menirukan proses matematika.

Dalam kajian agama, banyak sekali fenomena yang jika dikaji secara mendalam akan ditemukan konsep numerik (bilangan atau angka) di dalamnya. Sebagai contoh, ibadah shalat dan proses penciptaan alam semesta. Sebagaimana firman Allah Swt.:

فَإِذَا قَضَيۡتُمُ ٱلصَّلَوٰةَ فَٱذۡكُرُواْ ٱللَّهَ قِيَٰمٗا وَقُعُودٗا وَعَلَىٰ جُنُوبِكُمۡۚ فَإِذَا
ٱطۡمَأۡنَنتُمۡ فَأَقِيمُواْ ٱلصَّلَوٰةَۚ إِنَّ ٱلصَّلَوٰةَ كَانَتۡ عَلَى ٱلۡمُؤۡمِنِينَ كِتَٰبٗا مَّوۡقُوتٗا ١٠٣

”Maka apabila kamu telah menyelesaikan shalat(mu), ingatlah Allah di waktu berdiri, di waktu duduk dan di waktu berbaring. Kemudian apabila kamu telah merasa aman, maka dirikanlah shalat itu (sebagaimana biasa). Sesungguhnya shalat itu adalah fardhu yang ditentukan waktunya atas orang-orang yang beriman”*(Qs. An-Nisa’/4: 103).*

Dari ayat tersebut, kalau dipandang secara matematik, ada satu rangkaian kata yang perlu diperhatikan, yaitu *kitaaban mauqutan* yang berarti ditentukan waktunya. Perhatian penting ini muncul karena shalat akan sah jika dikerjakan pada waktunya, dan dalam menentukan waktu shalat digunakan bilangan yaitu bilangan jam.

Di samping itu, shalat secara matematik juga dapat dikaji dari segi rakaatnya, dalam hal ini bilangan 19 menjadi kajiannya. Telah diketahui oleh semua orang muslim bahwa shalat wajib 5 waktu terdiri dari Shubuh 2 rakaat, Dhuhur 4 rakaat, Ashar 4 rakaat, Maghrib 3 rakaat dan Isya’ 4 rakaat. Jika jumlah rakaat ini dijejer mulai rakaat shalat Shubuh sampai Isya’ akan diperoleh bilangan

24434. Ketentuan rakaat dan waktu shalat tersebut secara jelas digambarkan dalam tabel 2.1 di bawah ini:

Tabel 2.1 Ketentuan Rakaat dan Waktu Shalat

	Shalat Wajib				
	Shubuh	**Dhuhur**	**Ashar**	**Maghrib**	**Isya'**
Rakaat	2	4	4	3	4
Waktu	03.47	11.27	14.52	17.44	18.59

Ternyata $24434 = 1286 \times 19$. Dari hasil tersebut dapat dikatakan bahwa kombinasi 24434 merupakan kelipatan 19 (Abdusysyakir, 2006: 29-30). Sebenarnya kalau dikaji secara lebih mendalam lagi, banyak sekali kajian matematik yang didapat dalam bilangan rakaat shalat wajib 5 waktu dan juga shalat-shalat yang lain.

Begitu juga fenomena tentang proses penciptaan alam semesta, yang dalam hal ini Allah Swt.. menciptakannya dalam waktu 6 hari (6 periode atau 6 masa), sebagaimana firman Allah Swt.:

ٱللَّهُ ٱلَّذِى خَلَقَ ٱلسَّمَـٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضَ وَمَا بَيْنَهُمَا فِى سِتَّةِ أَيَّامٍ ثُمَّ ٱسْتَوَىٰ عَلَى ٱلْعَرْشِ ۖ مَا لَكُم مِّن دُونِهِۦ مِن وَلِىٍّ وَلَا شَفِيعٍ ۚ أَفَلَا تَتَذَكَّرُونَ ﴿٤﴾

"Allah lah yang menciptakan langit dan bumi dan apa yang ada di antara keduanya dalam enam masa. Kemudian Dia bersemayam di atas 'Arsy. Tidak ada bagi kamu selain dari padaNya seorang penolongpun dan tidak (pula) seorang pemberi syafa'at. Maka apakah kamu tidak memperhatikan?"
(Qs. As-Sajadah / 32: 4).

Dari ayat tersebut, dapat dipahami bahwa dalam menciptakan alam semesta ini Allah Swt. menggunakan sistem angka, yaitu angka 6. Dari contoh dua fenomena tersebut di atas, tidak dipungkiri lagi bahwa angka memegang peranan yang sangat penting dalam kehidupan ini, termasuk kehidupan beragama.

Di sisi lain, metode numerik sebagai alternatif dari metode analitik dapat dikatakan sebagai suatu rekayasa dalam menyelesaikan masalah matematik yang sulit atau bahkan tidak dapat diselesaikan secara analitik. Hubungan dengan rekayasa maka dapat dikatakan, bahwa dalam arti luas ukuran atau *qadar* adalah kemampuan merekayasa sesuatu sesuai dengan proporsinya. Dalam hal ini, manusia sebagai makhluk Allah Swt. yang paling sempurna, dilengkapi akal pikiran, yang dengan akal pikiran tersebut manusia dituntut untuk menyelesaikan suatu masalah atau bahkan merekayasa penyelesaian masalah tersebut.

Dalam menyelesaikan suatu masalah, manusia tidak akan berhenti pada satu metode saja, akan tetapi tidak menutup kemungkinan metode lain yang lebih mudah juga dipergunakan. Sebagai contoh, Allah Swt. memberikan alternatif pada hamba-Nya yang sedang sakit dalam melaksanakan shalat, dengan beberapa alternatif, yaitu:

- ✓ Jika masih mampu berdiri, maka harus shalat dengan berdiri (قيام)
- ✓ Jika sudah tidak mampu berdiri, maka boleh shalat dengan duduk (قعود)
- ✓ Jika sudah tidak mampu duduk, maka boleh shalat dengan berbaring (مضطجع)
- ✓ Jika sudah tidak mampu berbaring, maka boleh shalat hanya dengan isyarat saja

Adanya kenyataan ini, manusia sebagai makhluk Allah Swt. sudah seharusnya menyakini bahwa setiap masalah pasti ada jalan keluar atau alternatifnya dan setelah mengalami kesulitan pasti akan memperoleh kemudahan. Sebagaimana firman Allah Swt.:

فَإِنَّ مَعَ ٱلْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾

" Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan"
(Qs. Al-Insyirah / 94 : 5).

Pada intinya, setiap permasalahan matematika, pasti ada penyelesaiannya meskipun penyelesaian tersebut bukan berupa penyelesaian analitik, yaitu berupa penyelesaian pendekatan (aproksimasi).

3. Metode Runge Kutta

Penyelesaian PDB dengan metode deret Taylor tidak praktis, karena metode tersebut membutuhkan perhitungan turunan $f(x, y)$. Di samping itu, tidak semua fungsi mudah dihitung turunannya, terutama bagi fungsi yang bentuknya rumit. Semakin tinggi orde metode deret Taylor, maka semakin tinggi turunan fungsi yang harus dihitung (Munir, 2006: 384). Selain itu, untuk mendapatkan hasil yang lebih teliti diperlukan Δx atau h yang kecil, padahal penggunaan Δx yang kecil menyebabkan waktu hitungan yang lebih panjang. Oleh karena itu, metode Runge Kutta merupakan alternatif dari metode deret Taylor yang memberikan ketelitian hasil yang lebih besar dan tidak memerlukan turunan fungsi (Triatmodjo, 2002: 182).

Bentuk umum metode Runge Kutta adalah:

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)\,h \qquad (2.18)$$

dengan $\phi(x_i, y_i, h)$ adalah fungsi pertambahan yang menggambarkan kemiringan pada interval. Fungsi pertambahan tersebut dapat ditulis dalam bentuk umum:

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n \tag{2.19}$$

dengan *a* adalah konstanta dan *k* adalah

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_i, y_i) \\
k_2 &= f(x_i + p_1 h,\ y_i + q_{11} k_1 h) \\
k_3 &= f(x_i + p_2 h,\ y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h) \\
&. \\
&. \\
&. \\
k_n &= f(x_i + p_{n-1} h,\ y_i + q_{n-1.1} k_1 h + q_{n-1.2} k_2 h + \cdots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h)
\end{aligned}$$

dengan p dan q adalah konstanta. Nilai k menunjukkan hubungan berurutan, karena k_1 muncul dalam persamaan untuk memghitung k_2, dan juga muncul dalam persamaan untuk menghitung k_3, dan seterusnya (Chapra dan Canale, 2002: 701-702).

Ada beberapa tipe metode Runge Kutta yang tergantung pada nilai n yang digunakan. Untuk $n = 1$, disebut metode Runge Kutta orde satu atau disebut juga metode Euler, yang diperoleh dari $k_1 = f(x_i, y_i)$ dan persamaan (2.19):

$$\phi = a_1 k_1 = a_1 f(x_i, y_i)$$

untuk $a_1 = 1$ maka persamaan (2.17) menjadi:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) h$$

Di dalam metode Rungge Kutta, setelah nilai n ditetapkan, kemudian nilai a, p, q dicari dengan menyamakan persamaan (2.18) dengan suku-suku dari deret Taylor

(Triatmodjo, 2002: 184). Untuk selanjutnya bisa ditentukan metode Runge Kutta pada orde selanjutnya.

Metode Runge Kutta orde dua adalah:

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h \tag{2.20}$$

dengan

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f(x_i + p_1 h\,,\; y_i + q_{11} k_1 h) \end{aligned} \tag{2.21}$$

Metode Runge Kutta orde tiga adalah:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)h \tag{2.22}$$

dengan

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f(x_i + \frac{1}{2}h\,,\; y_i + \frac{1}{2}k_1 h) \\ k_3 &= f(x_i + h\,,\; y_i - k_1 h + 2k_2 h) \end{aligned} \tag{2.23}$$

Metode Runge Kutta orde empat adalah:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h \tag{2.24}$$

dengan

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f(x_i + \frac{1}{2}h\,,\; y_i + \frac{1}{2}k_1 h) \\ k_3 &= f(x_i + \frac{1}{2}h\,,\; y_i + \frac{1}{2}k_2 h) \\ k_4 &= f(x_i + h\,,\; y_i + k_3 h) \end{aligned} \tag{2.25}$$

(Chapra dan Canale, 2002: 702-708)

4. Metode Runge Kutta Orde Tinggi

Terdapat beberapa metode yang termasuk dalam metode Runge Kutta orde tinggi, diantaranya adalah:

a. Metode Runge Kutta Gill (RKG)

Formulasi metode RKG adalah:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + k_4) + \frac{1}{3}\left(\tfrac{2-\sqrt{2}}{2} k_2 + (1 + \tfrac{\sqrt{2}}{2})k_3\right) \tag{2.26}$$

dengan

$$\begin{aligned} k_1 &= h\, f(x_i, u_i) \\ k_2 &= h\, f(x_i + \tfrac{1}{2}h, u_i + \tfrac{1}{2}k_1) \\ k_3 &= h\, f(x_i + \tfrac{1}{2}h, u_i + \tfrac{\sqrt{2}-1}{2}k_1 + \tfrac{2-\sqrt{2}}{2}k_2) \\ k_4 &= h\, f(x_i + h, u_i + (-\tfrac{\sqrt{2}}{2})k_2 + (1 + \tfrac{\sqrt{2}}{2})k_3) \end{aligned} \tag{2.27}$$

untuk $i = 0,1,2,...,n-1$ n = banyak langkah atau iterasi

b. Metode Runge Kutta Merson (RKM)

Formulasi metode RKM adalah:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{2}k_1 - \frac{3}{2}k_3 + 2k_4 \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_4 + \frac{1}{6}k_5 \end{aligned} \tag{2.28}$$

dengan

$$\begin{aligned} k_1 &= h\, f(x_i, y_i) \\ k_2 &= h\, f(x_i + \tfrac{1}{3}h,\ y_i + \tfrac{1}{3}k_1) \\ k_3 &= h\, f(x_i + \tfrac{1}{3}h,\ y_i + \tfrac{1}{6}k_1 + \tfrac{1}{6}k_2) \\ k_4 &= h\, f(x_i + \tfrac{1}{2}h,\ y_i + \tfrac{1}{8}k_1 + \tfrac{3}{8}k_3) \\ k_5 &= h\, f(x_i + h,\ y_i + \tfrac{1}{2}k_1 - \tfrac{3}{2}k_3 + 2k_4) \end{aligned} \tag{2.29}$$

untuk $i = 0,1,2,...,n-1$ n = banyak langkah atau iterasi

(*www.chemeng.ui.ac.id/~bismo/S1/mater/mod-04.pdf*)

c. Metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45)

Metode RKF 45 tergolong dalam keluarga metode Runge Kutta orde 4, akan tetapi memiliki ketelitian sampai orde 5. Ketelitian yang tinggi ini dimungkinkan karena metode RKF 45 memiliki 6 buah '*konstanta perhitungan antara*' yang berperan untuk meng-update solusi sampai orde 5.

Dengan kata lain, dapat dikatakan bahwa metode RKF 45 merupakan metode Runge Kutta yang saat ini paling popular. Pada metode ini galat pemotongannya dihitung dengan membandingkan hasil perhitungan y_{i+1} dengan hasil perhitungan y_{i+1} pada orde selanjutnya

(*www.chemeng.ui.ac.id/~bismo/S1/mater/mod-04.pdf*)

Terdapat 2 bentuk metode RKF 45, yang dari kedua bentuk tersebut dihasilkan solusi yang tidak terlalu berbeda, dikatakan demikian karena hanya berbeda pada beberapa angka di belakang koma. Bentuk I diformulasikan sebagai berikut:

Didefinisikan:

$$k_1 = h\, f\,(x_i\,, y_i\,)$$

$$k_n = h\, f\left(x_i + a_n h,\ y_i + \sum_{m=1}^{n-1} b_{nm} k_m \right) \qquad n = 2, \ldots, 6 \qquad (2.30)$$

Dengan koefisien-koefisien yang ditunjukkan dalam tabel 2.2 dan 2.3 di bawah ini:

Tabel 2.2 Koefisien a_n dan b_{nm} untuk Metode RKF 45

n	***a_n***	b_{nm} $m=1$	**2**	**3**	**4**	**5**
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$				
3	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{9}{32}$			
4	$\frac{12}{13}$	$\frac{1932}{2197}$	$-\frac{7200}{2197}$	$\frac{7296}{2197}$		
5	1	$\frac{439}{216}$	-8	$\frac{3680}{513}$	$-\frac{845}{4104}$	
6	$\frac{1}{2}$	$-\frac{8}{27}$	2	$-\frac{3544}{2565}$	$\frac{1859}{4104}$	$-\frac{11}{40}$

(Atkinson, 1989: 430)

Tabel 2.3 Koefisien p_n, $\hat{p}_n$ dan c_n untuk Metode RKF 45

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
p_n	$\frac{25}{216}$	0	$\frac{1408}{2565}$	$\frac{2197}{4104}$	$-\frac{1}{5}$	
$\hat{p}_n$	$\frac{16}{135}$	0	$\frac{6656}{12825}$	$\frac{28561}{56430}$	$-\frac{9}{50}$	$\frac{2}{55}$
c_n	$\frac{1}{360}$	0	$-\frac{128}{4275}$	$-\frac{2197}{75240}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{2}{55}$

(Atkinson, 1989: 430)

Formula ‘update’ orde-4:

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{n=1}^{5} p_n k_n$$

Formula 'update' orde-5:

$$\hat{y}_{i+1} = y_i + \sum_{n=1}^{6} \hat{p}_n \, k_n$$

Galat pemotongan orde-4:

$$\hat{y}_{i+1} - y_{i+1} = h \sum_{n=1}^{6} c_n k_n \qquad \text{(Atkinson, 1989: 429-430)}$$

Sehingga didapat formulasi di bawah ini:

$$\begin{aligned}
k_1 &= h\, f(x_i, y_i) \\
k_2 &= h\, f(x_i + \tfrac{1}{4}h,\ y_i + \tfrac{1}{4}k_1) \\
k_3 &= h\, f(x_i + \tfrac{3}{8}h,\ y_i + \tfrac{3}{32}k_1 + \tfrac{9}{32}k_2) \\
k_4 &= h\, f(x_i + \tfrac{12}{13}h,\ y_i + \tfrac{1932}{2197}k_1 - \tfrac{7200}{2197}k_2 + \tfrac{7296}{2197}k_3) \\
k_5 &= h\, f(x_i + h,\ y_i + \tfrac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \tfrac{3680}{513}k_3 - \tfrac{845}{4104}k_4) \\
k_6 &= h\, f(x_i + \tfrac{1}{2}h,\ y_i - \tfrac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \tfrac{3544}{2565}k_3 + \tfrac{1859}{4104}k_4 - \tfrac{11}{40}k_5)
\end{aligned} \qquad (2.31)$$

Formula 'update' orde-4:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5 \qquad (2.32)$$

Formula orde-5:

$$\hat{y}_{i+1} = y_i + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56437}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6 \qquad (2.33)$$

Galat pemotongan order-4:

$$\hat{y}_{i+1} - y_{i+1} = \frac{1}{360}k_1 - \frac{128}{4275}k_3 - \frac{2197}{75240}k_4 + \frac{1}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6 \qquad (2.34)$$

untuk: $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ n = banyak langkah atau iterasi

(*www.chemeng.ui.ac.id/~bismo/S1/mater/mod-04.pdf*)

Sedangkan bentuk yang kedua adalah:

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f\left(x_i + \tfrac{1}{5}h, y_i + \tfrac{1}{5}k_1 h\right)$$
$$k_3 = f\left(x_i + \tfrac{3}{10}h, y_i + \tfrac{3}{40}k_1 h + \tfrac{9}{40}k_2 h\right)$$
$$k_4 = f\left(x_i + \tfrac{3}{5}h, y_i + \tfrac{3}{10}k_1 h - \tfrac{9}{10}k_2 h + \tfrac{6}{5}k_3 h\right)$$
$$k_5 = f\left(x_i + h, y_i - \tfrac{11}{54}k_1 h + \tfrac{5}{2}k_2 h - \tfrac{70}{27}k_3 h + \tfrac{35}{27}k_4 h\right)$$
$$k_6 = f\left(x_i + \tfrac{7}{8}h, y_i + \tfrac{1631}{55296}k_1 h + \tfrac{175}{512}k_2 h + \tfrac{575}{13824}k_3 h + \tfrac{44275}{110592}k_4 h + \tfrac{253}{4096}k_5 h\right)$$

(2.35)

Formula ‘update’ orde-4:

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{37}{378}k_1 + \frac{250}{621}k_3 + \frac{125}{594}k_4 + \frac{512}{1771}k_6\right)h \tag{2.36}$$

Formula orde-5:

$$\hat{y}_{i+1} = y_i + \left(\frac{2825}{27648}k_1 + \frac{18575}{48384}k_3 + \frac{13525}{55296}k_4 + \frac{277}{14336}k_5 + \frac{1}{4}k_6\right)h$$

(2.37)

(Chapra dan Canale, 2002: 719)

Dari penghitungan variabel-variabel di atas, dapat dikatakan bahwa dalam menyelesaikan masalah matematika dengan metode numerik, dibutuhkan ketelitian. Karena penghitungan dalam metode numerik dilakukan secara berulang-ulang (menggunakan beberapa iterasi) dan dalam metode numerik juga digunakan atau diperhitungkan bilangan mulai yang sangat kecil sampai yang paling besar. Sebagai contoh, dalam memperhitungkan galat dibutuhkan ketelitian yang tinggi, ketelitian ini menjadi sangat penting karena galat merupakan besarnya kesalahan suatu metode numerik.

Ketelitian tersebut sangat tergantung orang yang akan mengerjakan penghitungan tersebut. Dengan ketelitian yang tinggi dalam penghitungan (penghitungan benar), maka akan dihasilkan hasil yang benar atau teliti juga. Sebaliknya, dengan ketelitian yang rendah (penghitungan salah), maka akan dihasilkan hasil yang salah juga.

Konsep ketelitian dengan hasilnya sama dengan konsep amalan atau perbuatan manusia di dunia dengan balasan yang akan diterimanya di akhirat kelak. Dalam hal membalas perbuatan manusia, Allah Swt.. memperhatikan atau memperhitungkan perbuatan baik buruk manusia dengan sangat teliti atau sampai yang sekecil-kecilnya dan membalasnya sesuai dengan penghitungan amalan manusia tersebut. Allah Swt. berfirman dalam surat Al-Zalzalah:

فَمَن يَعۡمَلۡ مِثۡقَالَ ذَرَّةٍ خَيۡرٗا يَرَهُۥ ٧ وَمَن يَعۡمَلۡ مِثۡقَالَ ذَرَّةٖ شَرّٗا يَرَهُۥ ٨

" Barangsiapa yang mengerjakan kebaikan seberat dzarrahpun, niscaya dia akan melihat (balasan)nya. Dan barangsiapa yang mengerjakan kejahatan sebesar dzarrahpun, niscaya dia akan melihat (balasan)nya pula"
(Qs. Al-Zalzalah / 99: 7-8).

Dari ayat tersebut, dapat diketahui bahwa Allah Swt. memperhitungkan amal manusia sampai sekecil *dzarrah* yang ditafsirkan sebagai biji sawi yang sangat kecil.

5. Metode Heun

Metode Euler mempunyai ketelitian yang rendah, karena galatnya besar. Oleh karena itu, metode Euler diperbaiki oleh metode Heun (*modified Euler's method).* Pada metode Heun, solusi dari metode Euler dijadikan sebagai solusi perkiraan awal (*predictor*). Selanjutnya, solusi perkiraaan awal ini diperbaiki dengan metode Heun (*corrector*).

Metode Heun diturunkan sebagai berikut:

Dari PDB orde satu berikut:

$$y'(x) = f(x, y(x)) \tag{2.38}$$

Jika kedua ruas persamaan (2.38) diintegrasikan dari x_i sampai x_{i+1} :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)dx$$

$$= y(x_{i+1}) - y(x_i)$$

$$= y_{i+1} - y_i$$

selanjutnya suku-suku y_{i+1} dapat dinyatakan sebagai :

$$y(x_{i+1}) = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))dx \tag{2.39}$$

Suku yang mengandung integral di ruas kanan $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))dx$, dapat diselesaikan dengan kaidah trapezium, sehingga menjadi

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right] \tag{2.40}$$

dengan mensubstitusikan persamaan (2.40) ke persamaan (2.39), maka diperoleh

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right] \tag{2.41}$$

Persamaan (2.41) merupakan persamaan metode Heun atau metode Euler-Cauchy yang diperbaiki. Dalam persamaan (2.41), suku ruas kanan mengandung y_{i+1}.

Nilai y_{i+1} ini adalah solusi perkiraan awal (*predictor*) yang dihitung dengan metode Euler. Oleh karena itu, persamaan (2.41) dapat ditulis sebagai:

$$\begin{aligned} &predictor : y_{i+1}^{(0)} = y_i + h\, f(x_i, y_i) \\ &corrector : y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(0)}) \right] \end{aligned} \tag{2.42}$$

atau dapat ditulis dalam kesatuan:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + h\, f(x_i, y_i)) \right] \tag{2.43}$$

(Munir, 2006: 372-373)

Merujuk pada metode Runge Kutta orde dua yaitu pada persamaan (2.20) dan (2.21) , maka metode Heun termasuk dalam metode tersebut. Hal ini dapat dilihat dari penjelasan di bawah ini:

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2) h \tag{2.44}$$

dengan

$$k_1 = f(x_i, y_i) \tag{2.45}$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h,\ y_i + q_{11} k_1 h) \tag{2.46}$$

Nilai a_1, a_2, p_1 dan q_{11} dievaluasi dengan menyamakan persamaan (2.44) dengan deret Taylor orde 2, yang mempunyai bentuk:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) h + f'(x_i, y_i) \frac{h^2}{2} \tag{2.47}$$

dengan $f'(x_i, y_i)$ dapat ditentukan dari hukum berantai (*chain rule*) berikut:

$$f'(x_i, y_i) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} \tag{2.48}$$

dengan mensubstitusikan persamaan (2.48) ke dalam persamaan (2.47), maka dihasilkan:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\,h + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)\frac{h^2}{2} \tag{2.49}$$

Dalam metode Runge Kutta orde dua ini, dicari nilai $a_1,\, a_2,\, p_1$ dan q_{11} sedemikian sehingga persamaan (2.44) ekivalen dengan persamaan (2.48). Oleh karena itu digunakan deret Taylor untuk mengembangkan persamaan (2.46). Deret taylor untuk fungsi dengan dua variabel mempunyai bentuk:

$$g(x+r, y+s) = g(x, y) + r\frac{\partial g}{\partial x} + s\frac{\partial g}{\partial y} + \cdots$$

dengan cara tersebut persamaan (2.46) dapat ditulis dalam bentuk:

$$f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11}k_1 h) = f(x_i, y_i) + p_1 h\frac{\partial f}{\partial x} + q_{11}k_1 h\frac{\partial f}{\partial y} + o\,(h^2)$$

bentuk di atas dan persamaan (2.45) disubstitusikan ke dalam persamaan (2.44) sehingga menjadi:

$$y_{i+1} = y_i + a_1 h\, f(x_i, y_i) + a_2 h\, f(x_i, y_i) + a_2 p_1 h^2\frac{\partial f}{\partial x} + a_2 q_{11} h^2\, f(x_i, y_i)\frac{\partial f}{\partial x} + o(h^3)$$

atau

$$y_{i+1} = y_i + \left[a_1 f(x_i, y_i) + a_2 f(x_i, y_i)\right]h + \left[a_2 p_1\frac{\partial f}{\partial x} + a_2 q_{11} f(x_i, y_i)\frac{\partial f}{\partial x}\right]h^2 + o(h^3) \tag{2.50}$$

Dengan membandingkan persamaan (2.49) dan (2.50), dapat disimpulkan bahwa persamaan akan ekivalen apabila:

$$a_1 + a_2 = 1 \tag{2.51}$$

$$a_2 p_1 = \tfrac{1}{2} \tag{2.52}$$

$$a_2 q_{11} = \tfrac{1}{2} \tag{2.53}$$

Sistem persamaan di atas terdiri dari tiga persamaan yang mengandung empat bilangan tak diketahui, sehingga tidak bisa diselesaikan. Oleh karena itu salah satu bilangan tak diketahui tersebut ditetapkan dan kemudian dicari ketiga bilangan yang lain. Dianggap bahwa a_2 ditetapkan, sehingga persamaan (2.51) sampai (2.53) dapat diselesaikan sehingga dihasilkan:

$$a_1 = 1 - a_2 \tag{2.54}$$

$$p_1 = q_{11} = \frac{1}{2a_2} \tag{2.55}$$

karena nilai a_2 dapat dipilih sembarang, maka akan terdapat banyak metode Runge Kutta orde dua, diantaranya metode Heun, metode Poligon dan metode Ralston. Untuk metode Heun, a_2 dianggap ½, maka persamaan (2.52) dan (2.53) dapat diselesaikan dan diperoleh:

$$a_1 = \tfrac{1}{2}$$
$$p_1 = q_{11} = 1$$

Parameter tersebut apabila disubstitusikan ke dalam persamaan (2.44) akan menghasilkan:

$$y_{i+1} = y_i + \left(\tfrac{1}{2}k_1 + \tfrac{1}{2}k_2\right)h$$

dengan:

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + h,\ y_i + k_1 h)$$ (Triatmodjo, 2002: 184-187)

6. Galat

Penyelesaian secara numerik suatu persamaan matematik hanya memberikan nilai perkiraan yang mendekati nilai eksak (yang benar) yang sesuai dengan kenyataan. Berarti dalam penyelesaian numerik terdapat beberapa kesalahan terhadap nilai eksak. Terdapat tiga macam galat, yaitu galat bawaan, galat pembulatan dan galat pemotongan.

Galat bawaan adalah galat dari nilai data. Galat tersebut bisa terjadi karena kekeliruan dalam menyalin data, salah membaca skala atau galat karena kurangnya pengertian mengenai hukum-hukum fisik dari data yang diukur.

Galat pembulatan terjadi karena tidak diperhitungkannya beberapa angka terakhir dari suatu bilangan. Galat ini terjadi apabila bilangan perkiraan digunakan untuk menggantikan bilangan eksak. Suatu bilangan dibulatkan pada posisi ke *n* dengan membuat semua angka di sebelah kanan dari posisi tersebut nol. Sedang angka pada posisi ke *n* tersebut tidak berubah atau dinaikkan satu digit yang tergantung apakah nilai tersebut lebih kecil atau lebih besar setengah dari angka posisi ke *n*. Sebagai contoh, nilai:

8632574 dapat dibulatkan menjadi 8633000

3,1415926 dapat dibulatkan menjadi 3,14

Sedangkan galat pemotongan terjadi karena tidak dilakukannya hitungan sesuai dengan prosedur matematik yang benar. Sebagai contoh, suatu proses tak terhingga diganti dengan proses berhingga. Di dalam matematika, suatu fungsi dapat dipresentasikan dalam bentuk deret tak terhingga, misalkan:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Nilai eksak dari e^x diperoleh apabila semua suku deret tersebut diperhitungkan. Dalam praktek, sulit memperhitungkan semua suku pertama sampai tak terhingga. Apabila hanya diperhitungkan beberpa suku pertama saja, maka hasilnya tidak sama dengan nilai eksak (Triatmodjo, 2002: 2-3).

F. Metode RKF 45 untuk Menyelesaikan Sistem Persamaan Diferensial Orde Satu dengan Dua Variabel Tak Bebas

Dalam bidang sains dan rekayasa, persamaan diferensial banyak muncul dalam bentuk simultan, yang dinamakan sistem persamaan diferensial, yang diuraikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad &, y_1(x_0) = y_{10} \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad &, y_2(x_0) = y_{20} \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad &, y_n(x_0) = y_{n0} \end{aligned} \tag{2.56}$$

Sistem persamaan diferensial tersebut dapat ditulis dalam notasi vektor sebagai berikut:

$$y' = f(x, y) \qquad , y(x_0) = y_0$$

yang dalam hal ini,

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix}, y' = \begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ . \\ . \\ . \\ y'_n \end{bmatrix}, f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ . \\ . \\ . \\ f_n \end{bmatrix}, y_0 = \begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ . \\ . \\ . \\ y_{n0} \end{bmatrix}$$

semua metode yang dipergunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial tunggal dapat diterapkan pada sistem persamaan diferensial (Munir, 2006: 403-404). Sehingga metode RKF 45 untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial orde satu dengan dua variabel tak bebas adalah:

Diberikan sistem persamaan diferensial orde satu dengan dua variabel tak bebas,

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= f(x,y,t) = f(t,x,y) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= g(x,y,t) = g(t,x,y) \end{aligned} \tag{2.57}$$

Formulasi rumus metode RKF 45 bentuk pertama yang sesuai dengan (2.32) dan (2.33) untuk persamaan (2.57) adalah:

Orde 4:
$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5 \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{25}{216}m_1 + \frac{1408}{2565}m_3 + \frac{2197}{4104}m_4 - \frac{1}{5}m_5 \end{aligned} \tag{2.58}$$

Orde 5:
$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1} &= x_i + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{26437}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6 \\ \hat{y}_{i+1} &= y_i + \frac{16}{135}m_1 + \frac{6656}{12825}m_3 + \frac{28561}{26437}m_4 - \frac{9}{50}m_5 + \frac{2}{55}m_6 \end{aligned} \tag{2.59}$$

dengan

$$\begin{aligned} k_1 &= h\, f(t_i, x_i, y_i) \\ m_1 &= h\, g(t_i, x_i, y_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= h\, f(t_i + \tfrac{1}{4}h,\ x_i + \tfrac{1}{4}k_1,\ y_i + \tfrac{1}{4}m_1) \\ m_2 &= h\, g(t_i + \tfrac{1}{4}h,\ x_i + \tfrac{1}{4}k_1,\ y_i + \tfrac{1}{4}m_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3 &= h\, f(t_i + \tfrac{3}{8}h,\ x_i + \tfrac{3}{32}k_1 + \tfrac{9}{32}k_2,\ y_i + \tfrac{3}{32}m_1 + \tfrac{9}{32}m_2) \\ m_3 &= h\, g(t_i + \tfrac{3}{8}h,\ x_i + \tfrac{3}{32}k_1 + \tfrac{9}{32}k_2,\ y_i + \tfrac{3}{32}m_1 + \tfrac{9}{32}m_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_4 &= h\, f(t_i + \tfrac{12}{13}h,\ x_i + \tfrac{1932}{2197}k_1 - \tfrac{7200}{2197}k_2 + \tfrac{7296}{2197}k_3,\ y_i + \tfrac{1932}{2197}m_1 - \tfrac{7200}{2197}m_2 + \tfrac{7296}{2197}m_3) \\ m_4 &= h\, g(t_i + \tfrac{12}{13}h,\ x_i + \tfrac{1932}{2197}k_1 - \tfrac{7200}{2197}k_2 + \tfrac{7296}{2197}k_3,\ y_i + \tfrac{1932}{2197}m_1 - \tfrac{7200}{2197}m_2 + \tfrac{7296}{2197}m_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_5 &= h\, f(t_i + h,\ x_i + \tfrac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \tfrac{3680}{513}k_3 - \tfrac{845}{4104}k_4,\ y_i + \tfrac{439}{216}m_1 - 8m_2 \\ &\qquad + \tfrac{3680}{513}m_3 - \tfrac{845}{4104}m_4) \\ m_5 &= h\, g(t_i + h,\ x_i + \tfrac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \tfrac{3680}{513}k_3 - \tfrac{845}{4104}k_4,\ y_i + \tfrac{439}{216}m_1 - 8m_2 \\ &\qquad + \tfrac{3680}{513}m_3 - \tfrac{845}{4104}m_4) \end{aligned}$$

$$k_6 = h\,f(t_i + \tfrac{1}{2}h,\ x_i - \tfrac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \tfrac{3544}{2565}k_3 + \tfrac{1859}{4104}k_4 - \tfrac{11}{40}k_5\ ,\ y_i - \tfrac{8}{27}m_1 + 2m_2 - \tfrac{3544}{2565}m_3 + \tfrac{1859}{4104}m_4 - \tfrac{11}{40}m_5)$$

$$m_6 = h\ g(t_i + \tfrac{1}{2}h,\ x_i - \tfrac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \tfrac{3544}{2565}k_3 + \tfrac{1859}{4104}k_4 - \tfrac{11}{40}k_5\ ,\ y_i - \tfrac{8}{27}m_1 + 2m_2 - \tfrac{3544}{2565}m_3 + \tfrac{1859}{4104}m_4 - \tfrac{11}{40}m_5)$$

(2.60)

Sedangkan untuk formulasi rumus metode RKF 45 bentuk kedua adalah:

Orde 4:

$$x_{i+1} = x_i + \left(\frac{37}{378}k_1 + \frac{250}{621}k_3 + \frac{125}{594}k_4 + \frac{512}{1771}k_6\right)h$$

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{37}{378}m_1 + \frac{250}{621}m_3 + \frac{125}{594}m_4 + \frac{512}{1771}m_6\right)h$$

(2.61)

Orde 5:

$$\hat{x}_{i+1} = x_i + \left(\frac{2825}{27648}k_1 + \frac{18575}{48384}k_3 + \frac{13525}{55296}k_4 + \frac{277}{14336}k_5 + \frac{1}{4}k_6\right)h$$

$$\hat{y}_{i+1} = y_i + \left(\frac{2825}{27648}m_1 + \frac{18575}{48384}m_3 + \frac{13525}{55296}m_4 + \frac{277}{14336}m_5 + \frac{1}{4}m_6\right)h$$

(2.62)

dengan

$$k_1 = f(t_i, x_i, y_i)$$
$$m_1 = g(t_i, x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(t_i + \tfrac{1}{5}h,\ x_i + \tfrac{1}{5}k_1h\ ,\ y_i + \tfrac{1}{5}m_1h)$$
$$m_2 = g(t_i + \tfrac{1}{5}h,\ x_i + \tfrac{1}{5}k_1h\ ,\ y_i + \tfrac{1}{5}m_1h)$$

$$k_3 = f(t_i + \tfrac{3}{10}h,\ x_i + \tfrac{3}{40}k_1h + \tfrac{9}{40}k_2h\ ,\ y_i + \tfrac{3}{40}m_1h + \tfrac{9}{40}m_2h)$$
$$m_3 = g(t_i + \tfrac{3}{10}h,\ x_i + \tfrac{3}{40}k_1h + \tfrac{9}{40}k_2h\ ,\ y_i + \tfrac{3}{40}m_1h + \tfrac{9}{40}m_2h)$$

$$k_4 = f(t_i + \tfrac{3}{5}h,\ x_i + \tfrac{3}{10}k_1h - \tfrac{9}{10}k_2h + \tfrac{6}{5}k_3h\ ,\ y_i + \tfrac{3}{10}m_1h - \tfrac{9}{10}m_2h + \tfrac{6}{5}m_3h)$$
$$m_4 = g(t_i + \tfrac{3}{5}h,\ x_i + \tfrac{3}{10}k_1h - \tfrac{9}{10}k_2h + \tfrac{6}{5}k_3h\ ,\ y_i + \tfrac{3}{10}m_1h - \tfrac{9}{10}m_2h + \tfrac{6}{5}m_3h)$$

$$k_5 = f(t_i + h,\ x_i - \tfrac{11}{54}k_1h + \tfrac{5}{2}k_2h - \tfrac{70}{27}k_3h + \tfrac{35}{27}k_4h,\ y_i - \tfrac{11}{54}m_1h + \tfrac{5}{2}m_2h - \tfrac{70}{27}m_3h + \tfrac{35}{27}m_4h)$$
$$m_5 = g(t_i + h,\ x_i - \tfrac{11}{54}k_1h + \tfrac{5}{2}k_2h - \tfrac{70}{27}k_3h + \tfrac{35}{27}k_4h,\ y_i - \tfrac{11}{54}m_1h + \tfrac{5}{2}m_2h - \tfrac{70}{27}m_3h + \tfrac{35}{27}m_4h)$$

$$k_6 = f\,(t_i + \tfrac{7}{8}h,\; x_i + \tfrac{1631}{55.296}k_1h + \tfrac{175}{512}k_2h + \tfrac{575}{13824}k_3h + \tfrac{44275}{110592}k_4h$$
$$+ \tfrac{253}{4096}k_5h\,,\; y_i + \tfrac{1631}{55.296}m_1h + \tfrac{175}{512}m_2h + \tfrac{575}{13824}m_3h + \tfrac{44275}{110592}m_4h + \tfrac{253}{4096}m_5h)$$
$$m_6 = g\,(t_i + \tfrac{7}{8}h,\; x_i + \tfrac{1631}{55.296}k_1h + \tfrac{175}{512}k_2h + \tfrac{575}{13824}k_3h + \tfrac{44275}{110592}k_4h$$
$$+ \tfrac{253}{4096}k_5h\,,\; y_i + \tfrac{1631}{55.296}m_1h + \tfrac{175}{512}m_2h + \tfrac{575}{13824}m_3h + \tfrac{44275}{110592}m_4h + \tfrac{253}{4096}m_5h) \tag{2.63}$$

G. Metode Heun untuk Menyelesaikan Sistem Persamaan Diferensial Orde Satu dengan Dua Variabel Tak Bebas

Diberikan sistem persamaan diferensial orde satu dengan dua variabel tak bebas:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= f(x,y,t) = f(t,x,y) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= g(x,y,t) = g(t,x,y) \end{aligned} \tag{2.64}$$

Algoritma metode Heun yang sesuai dengan (2.42) untuk persamaan (2.64) adalah:

$$\begin{aligned} predictor: x_{i+1}^{(0)} &= x_i + h\,f(t_i, x_i, y_i) \\ y_{i+1}^{(0)} &= y_i + h\,g(t_i, x_i, y_i) \\ corrector: x_{i+1} &= x_i + \frac{h}{2}\left[f(t_i, x_i, y_i) + f(t_{i+1}, x_{i+1}^{(0)}, y_{i+1}^{(0)})\right] \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2}\left[g(t_i, x_i, y_i) + g(t_{i+1}, x_{i+1}^{(0)}, y_{i+1}^{(0)})\right] \end{aligned} \tag{2.65}$$

H. Sistem Persamaan Diferensial Lotka Volterra

Sistem persamaan diferensial Lotka Volterra merupakan gabungan dari 2 persamaan diferensial tak linier. Dalam bidang biologi, khususnya ekologi, sistem persamaan diferensial ini dipergunakan untuk memodelkan interaksi dua populasi, dalam hal ini interaksinya adalah interaksi predasi yang merupakan interaksi yang terjadi antara mangsa (*prey*) yang mempunyai persediaan makanan berlebih dengan pemangsa (*predator*) yang diberi makan oleh mangsa.

Secara matematis, model interaksi dua populasi ini diperkenalkan oleh seorang ahli biofisika Amerika yaitu Alferd J. Lotka (1880-1949) dan ahli matematika terkemuka dari Italia yaitu Vito Volterra (1860-1940). Keduanya mengembangkan kajian matematis ini secara terpisah, Lotka mengembangkannya pada tahun 1925 sedangkan Volterra pada tahun 1926 (Boyce dan Prima, 2001: 504).

Misalkan *x(t)* dan *y(t)* masing-masing menyatakan banyaknya spesies mangsa dan pemangsa pada saat *t*. Jika kedua spesies terpisah satu sama lain, mereka akan berubah dengan laju berbanding lurus dengan jumlah yang ada, maka:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x \qquad \text{dan} \qquad \frac{dy}{dt} = -cy \tag{2.66}$$

Pada persamaan (2.66), $\alpha > 0$ karena populasi mangsa mempunyai persediaan makanan berlebihan dan karena itu bertambah banyak, sedangkan $-\gamma < 0$ karena populasi pemangsa tidak mempunyai makanan, jadi berkurang jumlahnya.

Telah dimisalkan bahwa kedua populasi berinteraksi sedemikian sehingga populasi pemangsa makan populasi mangsa. Dengan demikian beralasanlah untuk mengandaikan bahwa jumlah yang membunuh besarnya tiap satuan waktu berbanding lurus dengan *x* dan *y*, yaitu *xy*. Jadi populasi mangsa akan berkurang jumlahnya sedang pemangsa akan bertambah jumlahnya pada laju yang berbanding lurus dengan *xy*. Jadi, kedua populasi yang berinteraksi memenuhi sistem taklinier berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= \alpha.x(t) - \beta.x(t).y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -\gamma.y(t) + \delta.x(t).y(t)\end{aligned} \tag{2.67}$$

(Finizio dan Ladas, 1988: 304)

Sistem tak linier (2.67) dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= \alpha.x(t) - \beta.x(t).y(t) = x(t).(\alpha - \beta.x(t).y(t)) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -\gamma.y(t) + \delta.x(t).y(t) = y(t).(-\gamma + \delta.x(t).y(t))\end{aligned} \tag{2.68}$$

koefisien α, β, γ dan δ semuanya adalah positif. α menunjukkan laju kelahiran mangsa, $-\gamma$ adalah koefisien laju kematian pemangsa, sedangkan β dan δ menunjukkan koefisien interaksi antara mangsa dan pemangsa (Boyce dan Prima, 2001: 503-504).

Secara teori, populasi dari dua jenis dapat berinteraksi di dalam cara-cara dasar yang sesuai dengan kombinasi dari 0, + dan -, seperti berikut: 00, --, +0, -0 dan +-. Dengan (0) menunjukkan tidak ada interaksi yang nyata, (+) menunjukkan pertumbuhan , hidup dan ciri-ciri populasi lainnya yang menguntungkan, sedangkan (-) menunjukkan pertumbuhan populasi atau sifat-sifat lain yang dihambat. Dalam hal ini, kombinasi (+-) dapat berarti interaksi parasitisme maupun pemangsaan (*predator prey*). Keduanya merupakan interaksi dua poplasi, satu populasi merugikan populasi yang lain dengan cara menyerang secara lansung, tetapi meskipun begitu satu populasi tersebut tergantung pada yang lain. Secara lebih khusus, dalam pemangsaan, populasi 1 yaitu populasi pemangsa (predator), umumnya lebih besar daripada populasi 2 (mangsanya atau prey).

Terdapat 2 hal yang perlu diperhatikan menyangkut lamanya populasi pemangsa dan mangsa berasosiasi atau berinteraksi, yaitu:

1. Pemangsa yang telah bersasosiasi lama dengan mangsanya menghasilkan pengaruh yang sedang-sedang saja, netral atau bahkan menguntungkan karena dilihat dari jangka waktu yang panjang.
2. Sebaliknya, pemangsa yang baru saja berasosiasi, pengaruhnya sangat besar atau sangat merusak mangsanya (Odum, 1998: 268, 277)

Pengaruh yang sedang-sedang atau netral tersebut, terjadi karena dalam waktu yang lama, yaitu melalui pertemuan yang berulang-ulang antara mangsa dan pemangsa selama waktu evolusioner, mengakibatkan berbagai adaptasi pertahanan telah berkembang pada spesies mangsa. Pernyataan tersebut dapat diartikan bahwa pada awalnya memang populasi mangsa dirugikan dengan adanya proses pemangsaan, yaitu dimakan oleh pemangsa, akan tetapi sejalan dengan waktu interaksi yang lama, mangsa telah mengetahui prilaku atau karakter pemangsanya, sehingga mangsa mencoba melakukan pertahanan diri terhadap pemangsaan pemangsa. Pertahanan diri tersebut lebih dikenal sebagai adaptasi.

Secara garis besar, terdapat 2 bentuk pertahanan diri mangsa terhadap pemangsa, yaitu:

1. Pertahanan tumbuhan terhadap herbivora (hewan pemakan tumbuhan)

   Banyak di antara pertahanan ini yang bersifat mekanis. Sebagai contoh, duri mungkin bisa mengurungkan niat herbivora untuk memakan tumbuhan tersebut, sejumlah tumbuhan mempunyai kristal mikroskopis dalam jaringannya atau sulur yang membuat tumbuhan itu sulit dimakan. Di samping itu, banyak tumbuhan yang menghasilkan zat kimia yang berfungsi dalam pertahanan dengan cara membuat tumbuhan tersebut tidak enak rasanya atau membahayakan herbivora, seperti striknin yang dihasilkan oleh tumbuhan dari genus *Strycho*s, nikotin yang dihasilkan tembakau, dan sebagainya.

2. Pertahanan hewan melawan pemangsa

Hewan-hewan dapat menghindar agar tidak dimakan oleh pemangsanya dengan menggunakan pertahanan pasif, seperti bersembunyi atau pertahanan aktif, seperti melarikan diri atau membela dirinya dari serangan pemangsa. Prilaku pertahanan lainya adalah penyamaran (*kamulfase*), penandaan yang mengecoh (*deceptive marking*), meniru spesies lain yang berbahaya dimakan (*mimikri Batesian*) (Campbell, dkk, 2004: 365-367).

Dari adanya adaptasi tersebut, dapat disimpulkan bahwa, dalam mengingat makanan yang berperan utama dalam kehidupan hewan, maka adaptasi tersebut bertujuan untuk meningkatkan keefektifan pemangsa dan mengecilkan kemungkinan untuk dijadikan mangsa (Kimball, 1999: 1022).

Model *predator prey* merupakan interaksi dua populasi, yaitu populasi mangsa dan pemangsa. Dalam berinteraksi, tentunya diharapkan jumlah spesies mangsa dan pemangsa harus sesuai dengan proporsinya (ukuran), agar interaksi dapat seimbang. Seimbang dalam hal ini tidak harus sama. Kaitannya dengan ukuran, maka sebenarnya konsep matematika juga tidak akan terlepas dari konsep ukuran. Secara sederhana, dapat dikatakan bahwa secara matematik, ukuran menyangkut 2 pengertian, yaitu ukuran sebagai jumlah sesuatu dan ukuran sebagai besarnya sesuatu. Dalam hal ini, jumlah dan besarnya sesuatu itu tidak akan diperoleh tanpa dilakukan pengukuran dan penghitungan, yang kedua proses tersebut menggunakan angka atau bilangan.

Dalam Al-qur'an Allah Swt. menyebut kata ukuran (*qadar*) dalam beberapa surat, di antaranya:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَٰهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

"Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran"
(Qs. Al-Qamar / 54: 49).

Kata *qadar* dari segi bahasa bisa berarti kadar tertentu yang tidak bertambah atau berkurang atau juga berarti kuasa. Tetapi karena ayat tersebut berbicara tentang segala sesuatu yang berada dalam kuasa Allah Swt. maka lebih tepat memahaminya dalam arti ketentuan dan sistem yang ditetapkan terhadap segala sesuatu.

Selanjutnya kata *qadar* atau ukuran dapat diartikan sebagai proporsi. Dalam kehidupan ini Allah Swt. telah menetapkan sesuatu sesuai dengan proporsi atau bagiannya masing-masing. Salah satu contohnya Allah Swt. menciptakan lalat yang merupakan binatang penghasil jutaan telur, tetapi ia tidak dapat bertahan hidup lebih dari dua minggu. Seandainya ia dapat hidup beberapa tahun dengan kemampuan bertelurnya, maka pastilah bumi ini dipenuhi lalat dan kehidupan sekian banyak jenis makhluk, khususnya manusia akan menjadi mustahil. Tetapi semua itu berjalan berdasarkan sistem pengaturan dan kadar yang ditentukan Allah Swt. di alam raya ini.

Tidak satupun yang Allah Swt. ciptakan sia-sia tanpa tujuan yang benar dan kesemuanya diberi potensi yang sesuai dan dengan kadar yang cukup untuk melaksanakan fungsinya dan semuanya kait terkait, tunjang menunjang dalam keseimbangan. Allah Swt. berfirman:

وَمَا خَلَقۡنَا ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضَ وَمَا بَيۡنَهُمَآ إِلَّا بِٱلۡحَقِّۗ وَإِنَّ ٱلسَّاعَةَ لَأٓتِيَةٞۖ
فَٱصۡفَحِ ٱلصَّفۡحَ ٱلۡجَمِيلَ ٨٥

" Dan tidaklah Kami ciptakan langit dan bumi dan apa yang ada di antara keduanya, melainkan dengan benar dan sesungguhnya saat (kiamat) itu pasti akan datang, maka maafkanlah (mereka) dengan cara yang baik"
(Qs. Al-Hijr / 15: 85).

(Shihab, 2003: 482-484)

Sebenarnya, jika keseimbangan tidak tercapai termasuk keseimbangan alam, maka semua itu terjadi akibat ulah tangan manusia yang selalu mengeksploitasi alam ini secara besar-besaran. Di sisi lain, Islam sebagai agama *rahmatan lil'alamiin*, telah mengajarkan konsep keseimbangan. Secara lebih khusus, dalam hal ibadah, hendaknya manusia selalu memperhatikan keseimbangan, artinya ibadah untuk kepentingan dunia minimal harus seimbang atau sama dengan ibadah untuk kepentingan akhirat, meskipun sebenarnya akhirat harus lebih diprioritaskan. Sebagaimana hadits Nabi Muhammad Saw:

اِعْمَلْ لِدُنْيَاكَ كَأَنَّكَ تَعِيْشُ اَبَدًا وَاعْمَلْ لِآخِرَتِكَ كَأَنَّكَ تَمُوْتُ غَدًا (رواه ابن عساكر)

"Bekerjalah untuk duniamu seakan-akan engkau hidup selamanya dan bekerjalah untuk akhiratmu seakan-akan engkau mati besok (HR. Ibn Asaakir) "

(Al-Hasymiy, 1994: 172)

Pesan atau hikmah lain yang terkandung dalam hadits tersebut adalah menganjurkan manusia bersungguh-sungguh dalam segala amal perbuatannya, baik amalan yang berorientasi untuk kepentingan dunia maupun amalan yang berorientasi untuk kepentingan akhirat.

I. MATLAB

1. Simpan, Buka dan Manjalankan M-file

Lembar kerja Matlab bukanlah merupakan suatu file yang dapat disimpan apalagi dibuka untuk waktu yang lain. Perintah-perintah dan data-data yang diketikkan pada *prompt command line* tidak dapat diedit dan hanya disimpan sementara itu saja, yaitu selama memori penyimpanan tidak dihapus atau program dimatikan.

Untuk membuat suatu file yang dapat diedit dan disimpan untuk dibuka kembali, Matlab menyediakan tempat yang dinamakan dengan *M-file*. Caranya buka menu *File / New / M-file*. Pada lembar kerja ini dapat diketikkan perintah-perintah dan data-data yang dapat diedit, disimpan dan dibuka kembali. Untuk menyimpan *M-file* dapat dilakukan dengan membuka menu *File / Save* di folder default *work* yang disediakan Matlab, atau folder pribadi. Selanjutnya, dapat dijalankan dan diketahui hasilnya setelah dijalankan (*running*) file tersebut dengan membuka pada menu *Tools / Run*. Jika *M-file* tersimpan di folder pribadi (bukan folder *work*) maka sebelum *M-file* dijalankan, maka dibuka dahulu menu *File / Set Path* pada jendela kerja Matlab (*Command Window*) , kemudian diklik tombol *Browse* untuk mengarahkan directory ke folder pribadi tempat *M-fi*le disimpan.

2. Operasi Fungsi

Dalam Matlab, terdapat dua cara dalam mendefinisikan suatu fungsi. Pertama secara langsung, yaitu dengan memberikan sintak perintah *inline* dalam *M-file* program utama atau bisa juga pada jendela kerja secara langsung. Sintak perintah ini membutuhkan nama fungsi, definisi fungsi dan nama variabel bebas sebagai data masukan fungsi, dengan dua terakhir ditulis terpisah oleh tanda koma dan dalam tanda kurung:

f = inline('definisi fungsi','variabel 1','variabel 2',…)

perintah fungsi dapat dijalankan dengan mengetikkan nama fungsi diikuti nilai variabelnya dalam tanda kurung:

f(nilai1,nilai2,…)

atau dengan menggunakan sintak perintah *feval* yang diikuti dengan nama fungsi dan nilai variabel yang terpisah dengan tanda koma dalam tanda kurung:

feval(f,nilai1,nilai2,…)

Cara kedua adalah tidak langsung, yaitu dengan mendefinisikan fungsi pada *M-file* yang lain, terpisah dengan *M-file* program utama. *M-file* fungsi ini harus disimpan dengan nama yang sesuai dengan nama fungsinya dan pada direktori yang sama pula dengan program utamanya. *M-file* fungsi harus diawali dengan sintak perintah *function* dan diikuti dengan nama variabel output, nama fungsi dan nama variabel inputnya:

function varoutput = namafungsi (varinput1,varinput2,…)

Kemudian diikuti dengan definisi fungsinya. Cara kedua ini dikhususkan untuk definisi fungsi yang cukup panjang sehingga tidak cukup dalam satu baris sebagaimana cara pertama.

Untuk menjalankan *M-file* fungsi ini dilakukan sama dengan cara sebelumnya, yaitu dengan langsung mengetikkan nama fungsinya yang diikuti oleh nilai variabel inputnya ataupun dengan sintak *feval.*

BAB III

PEMBAHASAN

Dalam skripsi ini akan dibahas penyelesaian numerik sistem persamaan diferensial Lotka Volterra pada interaksi dua populasi (model *predator prey*). Model interaksi dua populasi tersebut dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \alpha.x(t) - \beta.x(t).y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -\gamma.y(t) + \delta.x(t).y(t) \end{aligned} \tag{3.1}$$

dengan *x(t)* dan *y(t)* secara berturut-turut menunjukkan jumlah spesies mangsa dan pemangsa dalam suatu populasi pada saat *t*. Sedangkan $x(0) = x_0, \quad dan \quad y(0) = y_0$ secara berturut-turut menunjukkan spesies mangsa dan pemangsa dalam suatu populasi pada saat $t = 0$. $x(0), y(0), \alpha, \beta, \gamma$ *dan* δ semuanya adalah konstanta positif, dengan α sebagai koefisien laju kelahiran mangsa, $-\gamma$ sebagai koefisien laju kematian pemangsa, sedangkan β dan δ menunjukkan koefisien interaksi antara mangsa dan pemangsa.

A. Penyelesaian Numerik Sistem Persamaan Diferensial Lotka Volterra dengan Metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45)

Secara umum, algoritma atau langkah-langkah dalam menyelesaikan sistem persamaan diferensial (3.1) secara numerik dengan metode RKF 45 adalah:

1) Menentukan besarnya koefisien-koefisien yang terdapat dalam sistem persamaan diferensial (3.1)

2) Menentukan besarnya dua variabel terikat pada saat *t(waktu) = 0*, yaitu variabel *x(0)* dan *y(0)*
3) Menentukan nilai *t* (waktu) yang akan ditentukan penyelesaiannya beserta besarnya *h* (ukuran langkah)
4) Menuliskan formulasi rumus metode RKF 45
5) Menghitung variabel-variabel yang terdapat dalam rumus dengan menggunakan formulasi rumus yang telah ditentukan, yaitu variabel k_1 sampai k_6 dan m_1 sampai m_6
6) Menghitung x_{i+1} dan y_{i+1} dengan mensubstitusikan variabel-variabel yang telah didapatkan pada langkah 5 ke dalam formulasi rumus metode RKF 45

Dari algoritma tersebut dapat dibuat flow chartnya sebagai berikut:

Gambar 3.1 Flow Chart Metode RKF 45

❖ Metode RKF 45 bentuk I orde 4

Langkah 1

Sebagaimana konsep peluang yang terdapat dalam batasan masalah, maka penulis menentukan besarnya koefisien-koefisien dalam sistem persamaan diferensial Lotka Volterra, yaitu $\alpha = 0.2 \quad \beta = 0.005 \quad \gamma = 0.5 \quad \delta = 0.01$.

Langkah 2

Karena dalam interaksi predasi, $x(0) > y(0)$, maka penulis menentukan besarnya $x(0) = 60$ dan $y(0) = 30$.

Langkah 3

Penulis menentukan *t* (waktu) yang akan diselesaikan adalah pada saat $t = 50$ hari dengan ukuran langkah $h = 0.5$. Berdasarkan langkah 1, maka sistem persamaan diferensial (3.1) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(t,x,y) &= \frac{dx(t)}{dt} = 0.2.x(t) - 0.005.x(t).y(t) \\ g(t,x,y) &= \frac{dy(t)}{dt} = -0.5.y(t) + 0.01.x(t).y(t) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Langkah 4

Sesuai dengan formulasi rumus (2.58) yang terdapat pada bab II, maka

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5 \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{25}{216}m_1 + \frac{1408}{2565}m_3 + \frac{2197}{4104}m_4 - \frac{1}{5}m_5 \end{aligned}$$

Langkah 5

Karena $h = 0.5$, maka

$$\begin{aligned} k_1 &= h\ f(t_i, x_i, y_i) = 0.5\ f(t_i, x_i, y_i) \\ m_1 &= h\ g(t_i, x_i, y_i) = 0.5\ g(t_i, x_i, y_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= h\ f(t_i + \tfrac{1}{4}h,\ x_i + \tfrac{1}{4}k_1\ ,\ y_i + \tfrac{1}{4}m_1\ ) \\ &= (0.5)\ f(t_i + \tfrac{1}{4}(0.5),\ x_i + \tfrac{1}{4}k_1\ ,\ y_i + \tfrac{1}{4}m_1 \\ m_2 &= h\,g(t_i + \tfrac{1}{4}h,\ x_i + \tfrac{1}{4}k_1\ ,\ y_i + \tfrac{1}{4}m_1) \\ &= (0.5)\,g(t_i + \tfrac{1}{4}(0.5),\ x_i + \tfrac{1}{4}k_1\ ,\ y_i + \tfrac{1}{4}m_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3 &= h\ f(t_i + \tfrac{3}{8}h,\ x_i + \tfrac{3}{32}k_1 + \tfrac{9}{32}k_2\ ,\ y_i + \tfrac{3}{32}m_1 + \tfrac{9}{32}m_2\ ) \\ &= (0.5)\ f(t_i + \tfrac{3}{8}(0.5),\ x_i + \tfrac{3}{32}k_1 + \tfrac{9}{32}k_2\ ,\ y_i + \tfrac{3}{32}m_1 + \tfrac{9}{32}m_2 \\ m_3 &= h\,g\ (t_i + \tfrac{3}{8}h,\ x_i + \tfrac{3}{32}k_1 + \tfrac{9}{32}k_2\ ,\ y_i + \tfrac{3}{32}m_1 + \tfrac{9}{32}m_2\ ) \\ &= (0.5)\ g\ (t_i + \tfrac{3}{8}(0.5),\ x_i + \tfrac{3}{32}k_1 + \tfrac{9}{32}k_2\ ,\ y_i + \tfrac{3}{32}m_1 + \tfrac{9}{32}m_2) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
k_4 &= h\, f(t_i + \tfrac{12}{13}h,\ x_i + \tfrac{1932}{2197}k_1 - \tfrac{7200}{2197}k_2 + \tfrac{7296}{2197}k_3\ ,\ y_i + \tfrac{1932}{2197}m_1 - \tfrac{7200}{2197}m_2 + \tfrac{7296}{2197}m_3) \\
&= (0.5)\, f(t_i + \tfrac{12}{13}(0.5),\ x_i + \tfrac{1932}{2197}k_1 - \tfrac{7200}{2197}k_2 + \tfrac{7296}{2197}k_3\ , \\
&\quad y_i + \tfrac{1932}{2197}m_1 - \tfrac{7200}{2197}m_2 + \tfrac{7296}{2197}m_3) \\
m_4 &= h\, g(t_i + \tfrac{12}{13}h,\ x_i + \tfrac{1932}{2197}k_1 - \tfrac{7200}{2197}k_2 + \tfrac{7296}{2197}k_3\ ,\ y_i + \tfrac{1932}{2197}m_1 - \tfrac{7200}{2197}m_2 + \tfrac{7296}{2197}m_3) \\
&= (0.5)\ g\ (t_i + \tfrac{12}{13}(0.5),\ x_i + \tfrac{1932}{2197}k_1 - \tfrac{7200}{2197}k_2 + \tfrac{7296}{2197}k_3\ , \\
&\quad y_i + \tfrac{1932}{2197}m_1 - \tfrac{7200}{2197}m_2 + \tfrac{7296}{2197}m_3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_5 &= h\, f(t_i + h,\ x_i + \tfrac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \tfrac{3680}{513}k_3 - \tfrac{845}{4104}k_4\ ,\ y_i + \tfrac{439}{216}m_1 - 8m_2 \\
&\quad + \tfrac{3680}{513}m_3 - \tfrac{845}{4104}m_4) \\
&= (0.5)\, f(t_i + (0.5)\ ,\ x_i + \tfrac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \tfrac{3680}{513}k_3 - \tfrac{845}{4104}k_4\ ,\ y_i + \tfrac{439}{216}m_1 - 8m_2 \\
&\quad + \tfrac{3680}{513}m_3 - \tfrac{845}{4104}m_4) \\
m_5 &= h\ g(t_i + h,\ x_i + \tfrac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \tfrac{3680}{513}k_3 - \tfrac{845}{4104}k_4\ ,\ y_i + \tfrac{439}{216}m_1 - 8m_2 \\
&\quad + \tfrac{3680}{513}m_3 - \tfrac{845}{4104}m_4) \\
&= (0.5)\, g(t_i + (0.5),\ x_i + \tfrac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \tfrac{3680}{513}k_3 - \tfrac{845}{4104}k_4\ ,\ y_i + \tfrac{439}{216}m_1 - 8m_2 \\
&\quad + \tfrac{3680}{513}m_3 - \tfrac{845}{4104}m_4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_6 &= h\, f(t_i + \tfrac{1}{2}h,\ x_i - \tfrac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \tfrac{3544}{2565}k_3 + \tfrac{1859}{4104}k_4 - \tfrac{11}{40}k_5\ ,\ y_i - \tfrac{8}{27}m_1 + 2m_2 \\
&\quad - \tfrac{3544}{2565}m_3 + \tfrac{1859}{4104}m_4 - \tfrac{11}{40}m_5) \\
&= (0.5)\ f(t_i + \tfrac{1}{2}(0.5),\ x_i - \tfrac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \tfrac{3544}{2565}k_3 + \tfrac{1859}{4104}k_4 - \tfrac{11}{40}k_5\ , \\
&\quad y_i - \tfrac{8}{27}m_1 + 2m_2 - \tfrac{3544}{2565}m_3 + \tfrac{1859}{4104}m_4 - \tfrac{11}{40}m_5) \\
m_6 &= h\ g(t_i + \tfrac{1}{2}h,\ x_i - \tfrac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \tfrac{3544}{2565}k_3 + \tfrac{1859}{4104}k_4 - \tfrac{11}{40}k_5\ ,\ y_i - \tfrac{8}{27}m_1 + 2m_2 \\
&\quad - \tfrac{3544}{2565}m_3 + \tfrac{1859}{4104}m_4 - \tfrac{11}{40}m_5) \\
&= (0.5)\ g(t_i + \tfrac{1}{2}(0.5),\ x_i - \tfrac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \tfrac{3544}{2565}k_3 + \tfrac{1859}{4104}k_4 - \tfrac{11}{40}k_5\ , \\
&\quad y_i - \tfrac{8}{27}m_1 + 2m_2 - \tfrac{3544}{2565}m_3 + \tfrac{1859}{4104}m_4 - \tfrac{11}{40}m_5)
\end{aligned}
$$

Untuk iterasi yang pertama ($t = 0.5$).

dengan $t_i = t_0 = 0$ $x_i = x_0 = 60$ $y_i = y_0 = 30$ maka didapat:

$$k_1 = 0.5\ f(t_0, x_0, y_0) = 0.5\ f(0, 60, 30) = 0.5(0.2\times 60 - 0.005\times 60\times 30) = 1.5$$

$$m_1 = 0.5\ g(t_0, x_0, y_0) = 0.5\ g(0, 60, 30) = 0.5(-0.5\times 30 + 0.01\times 60\times 30) = 1.5$$

$$k_2 = (0.5)\, f(t_0 + \tfrac{1}{4}(0.5),\ x_0 + \tfrac{1}{4}k_1\ ,\ y_0 + \tfrac{1}{4}m_1\ )$$
$$= (0.5)\, f(0 + \tfrac{1}{4}(0.5), 60 + \tfrac{1}{4}(1.5)\ , 30 + \tfrac{1}{4}(1.5)\ )$$
$$= (0.5)\, f(0.125, 60.375\ , 30.375)$$
$$= (0.5)(0.2 \times 60.375 - 0.005 \times 60.375 \times 30.375\ )$$
$$= (0.5)(\ 2.905546875)$$
$$= 1.4527734375$$

$$m_2 = (0.5)\, g(t_0 + \tfrac{1}{4}(0.5),\ x_0 + \tfrac{1}{4}k_1\ ,\ y_0 + \tfrac{1}{4}m_1\ )$$
$$= (0.5)\, g(0 + \tfrac{1}{4}(0.5), 60 + \tfrac{1}{4}(1.5)\ , 30 + \tfrac{1}{4}(1.5)\ )$$
$$= (0.5)\ g(0.125, 60.375\ , 30.375)$$
$$= (0.5)(-0.5 \times 30.375 + 0.01 \times 60.375 \times 30.375)$$
$$= (0.5)(3.15140625\,)$$
$$= 1.575703125$$

$$k_3 = (0.5)\ f(t_0 + \tfrac{3}{8}(0.5),\ x_0 + \tfrac{3}{32}k_1 + \tfrac{9}{32}k_2\ ,\ y_0 + \tfrac{3}{32}m_1 + \tfrac{9}{32}m_2\ )$$
$$= (0.5)\ f(0 + \tfrac{3}{8}(0.5),\ 60 + \tfrac{3}{32}(1.5) + \tfrac{9}{32}(1.4527734375)\ ,$$
$$30 + \tfrac{3}{32}(1.5) + \tfrac{9}{32}(1.575703125)\ )$$
$$= (0.5)\, f(0.1875\, , 60.54921752929688\ ,\ 30.58379150390625)$$
$$= (0.5)(0.2 \times 60.54921752929688$$
$$- 0.005 \times 60.54921752929688 \times 30.58379150390625)$$
$$= (0.5)\ (2.85072028265597)$$
$$= 1.42536014132798$$

$$m_3 = (0.5)\ g(t_0 + \tfrac{3}{8}(0.5),\ x_0 + \tfrac{3}{32}k_1 + \tfrac{9}{32}k_2\ ,\ y_0 + \tfrac{3}{32}m_1 + \tfrac{9}{32}m_2\ )$$
$$= (0.5)\, g\ (0 + \tfrac{3}{8}(0.5),\ 60 + \tfrac{3}{32}(1.5) + \tfrac{9}{32}(1.4527734375)\ ,$$
$$30 + \tfrac{3}{32}(1.5) + \tfrac{9}{32}(1.575703125)$$
$$= (0.5)\ g(0.1875\, , 60.54921752929688\ ,\ 30.58379150390625)$$
$$= (0.5)\ (-0.5 \times 30.58379150390625$$
$$+ 0.01 \times 60.54921752929688 \times 30.58379150390625)$$
$$= (0.5)\ (3.22635069445369)$$
$$= 1.61317534722684$$

$$k_4 = (0.5)\, f\,(t_0 + \tfrac{12}{13}(0.5),\ x_0 + \tfrac{1932}{2197}k_1 - \tfrac{7200}{2197}k_2 + \tfrac{7296}{2197}k_3\ ,$$
$$y_0 + \tfrac{1932}{2197}m_1 - \tfrac{7200}{2197}m_2 + \tfrac{7296}{2197}m_3)$$
$$= (0.5)\, f\,(0 + \tfrac{12}{13}(0.5),\ 60 + \tfrac{1932}{2197}(1.5) - \tfrac{7200}{2197}(1.4527734375)$$
$$+ \tfrac{7296}{2197}(1.42536014132798)\ ,\ 30 + \tfrac{1932}{2197}(1.5) - \tfrac{7200}{2197}(1.575703125)$$
$$+ \tfrac{7296}{2197}(1.61317534722684)$$
$$= (0.5)\ \ f(0.46153846153846\ ,\ 61.29151517575284\ ,\ 31.51236451222897)$$
$$= (0.5)(0.2 \times 61.29151517575284$$
$$- 0.005 \times 61.29151517575284 \times 31.51236451222897)$$
$$= (0.5)\ (2.60110019652488)$$
$$=1.30055009826244$$

$$m_4 = (0.5)\, g\,(t_0 + \tfrac{12}{13}(0.5),\ x_0 + \tfrac{1932}{2197}k_1 - \tfrac{7200}{2197}k_2 + \tfrac{7296}{2197}k_3\ ,$$
$$y_0 + \tfrac{1932}{2197}m_1 - \tfrac{7200}{2197}m_2 + \tfrac{7296}{2197}m_3)$$
$$= (0.5)\ \ g\ (0 + \tfrac{12}{13}(0.5),\ 60 + \tfrac{1932}{2197}(1.5) - \tfrac{7200}{2197}(1.4527734375)$$
$$+ \tfrac{7296}{2197}(1.42536014132798)\ ,\ 30 + \tfrac{1932}{2197}(1.5) - \tfrac{7200}{2197}(1.575703125)$$
$$+ \tfrac{7296}{2197}(1.61317534722684)$$
$$= (0.5)\ g(0.46153846153846\ ,\ 61.29151517575284\ ,\ 31.51236451222897)$$
$$= (0.5)\ (-0.5 \times 31.51236451222897$$
$$+ 0.01 \times 61.29151517575284 \times 31.51236451222897)$$
$$= (0.5)\ (3.55822342113689)$$
$$= 1.77911171056844$$

$$k_5 = (0.5)\, f\,(t_0 + (0.5),\ x_0 + \tfrac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \tfrac{3680}{513}k_3 - \tfrac{845}{4104}k_4\ ,\ y_0 + \tfrac{439}{216}m_1 - 8m_2$$
$$+ \tfrac{3680}{513}m_3 - \tfrac{845}{4104}m_4)$$
$$= (0.5)\ f\,(0 + (0.5),\ 60 + \tfrac{439}{216}(1.5) - 8(1.4527734375) + \tfrac{3680}{513}(1.42536014132798)$$
$$- \tfrac{845}{4104}(1.30055009826244)\ ,\ 30 + \tfrac{439}{216}(1.5) - 8(1.575703125)$$
$$+ \tfrac{3680}{513}(1.61317534722684) - \tfrac{845}{4104}(1.77911171056844))$$
$$= (0.5)\ f\,(\,0.5\ ,\ 61.38345034787137\ ,\ 31.64876896367640)$$
$$= (0.5)\ (0.2 \times 61.38345034787137$$
$$- 0.005 \times 61.38345034787137 \times 31.64876896367640)$$
$$= (0.5)\ (2.56313687830886)$$
$$= 1.28156843915443$$

$$m_5 = (0.5)\ g\,(t_0 + (0.5),\ x_0 + \tfrac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \tfrac{3680}{513}k_3 - \tfrac{845}{4104}k_4\ ,\ y_0 + \tfrac{439}{216}m_1 - 8m_2$$
$$+ \tfrac{3680}{513}m_3 - \tfrac{845}{4104}m_4)$$
$$= (0.5)\ g\,(0 + (0.5),\ 60 + \tfrac{439}{216}(1.5) - 8(1.4527734375) + \tfrac{3680}{513}(1.42536014132798)$$
$$- \tfrac{845}{4104}(1.30055009826244)\ ,\ 30 + \tfrac{439}{216}(1.5) - 8(1.575703125)$$
$$+ \tfrac{3680}{513}(1.61317534722684) - \tfrac{845}{4104}(1.77911171056844))$$
$$= (0.5)\ \ g\,(\ 0.5\ ,\ 61.38345034787137\ ,\ 31.64876896367640)$$
$$= (0.5)\ (-0.5 \times 31.64876896367640$$
$$+ 0.01 \times 61.38345034787137 \times 31.64876896367640)$$
$$= (0.5)\ (3.60272190069263)$$
$$= 1.80136095034631$$

$$k_6 = (0.5)\ f\,(t_0 + \tfrac{1}{2}(0.5),\ x_0 - \tfrac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \tfrac{3544}{2565}k_3 + \tfrac{1859}{4104}k_4 - \tfrac{11}{40}k_5\ ,\ \ y_0 - \tfrac{8}{27}m_1 + 2m_2$$
$$- \tfrac{3544}{2565}m_3 + \tfrac{1859}{4104}m_4 - \tfrac{11}{40}m_5)$$
$$= (0.5)\ f\,(0 + \tfrac{1}{2}(0.5),\ 60 - \tfrac{8}{27}(1.5) + 2(1.4527734375) - \tfrac{3544}{2565}(1.42536014132798)$$
$$+ \tfrac{1859}{4104}(1.30055009826244) - \tfrac{11}{40}(1.28156843915443)\ ,$$
$$30 - \tfrac{8}{27}(1.5) + 2(1.575703125) - \tfrac{3544}{2565}(1.61317534722684)$$
$$+ \tfrac{1859}{4104}(1.77911171056844) - \tfrac{11}{40}(1.80136095034631))$$
$$= (0.5)\ f\,(0.25\ ,\ 60.72839832403850\ ,\ 30.78859026863324)$$
$$= (0.5)\ (0.2 \times 60.72839832403850$$
$$- 0.005 \times 60.72839832403850\ \times 30.78859026863324)$$
$$= (0.5)\ (2.79697079646183)$$
$$= 1.39848539823091$$

$$m_6 = (0.5)\ g\,(t_0 + \tfrac{1}{2}(0.5),\ x_0 - \tfrac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \tfrac{3544}{2565}k_3 + \tfrac{1859}{4104}k_4 - \tfrac{11}{40}k_5\ ,\ y_0 - \tfrac{8}{27}m_1 + 2m_2$$
$$- \tfrac{3544}{2565}m_3 + \tfrac{1859}{4104}m_4 - \tfrac{11}{40}m_5)$$
$$= (0.5)\ g\,(0 + \tfrac{1}{2}(0.5),\ 60 - \tfrac{8}{27}(1.5) + 2(1.4527734375) - \tfrac{3544}{2565}(1.42536014132798)$$
$$+ \tfrac{1859}{4104}(1.30055009826244) - \tfrac{11}{40}(1.28156843915443)\ ,$$
$$30 - \tfrac{8}{27}(1.5) + 2(1.575703125) - \tfrac{3544}{2565}(1.61317534722684)$$
$$+ \tfrac{1859}{4104}(1.77911171056844) - \tfrac{11}{40}(1.80136095034631))$$
$$= (0.5)\ g\,(0.25\ ,\ 60.72839832403850\ ,\ 30.78859026863324)$$
$$= (0.5)\ (-0.5 \times 30.78859026863324$$
$$+ 0.01 \times 60.72839832403850 \times 30.78859026863324)$$
$$= (0.5)\ (3.30312260237513)$$
$$=1.65156130118756$$

Langkah 6

Berdasarkan variabel-variabel yang telah didapat pada langkah 5, maka besarnya x_{i+1} dan y_{i+1} adalah:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5$$
$$x_{0+1} = x_0 + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5$$
$$x_1 = 60 + \frac{25}{216}(1.5) + \frac{1408}{2565}(1.42536014132798) + \frac{2197}{4104}(1.30055009826244) - \frac{1}{5}(1.28156843915443)$$
$$= 61.39594262120085$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{25}{216}m_1 + \frac{1408}{2565}m_3 + \frac{2197}{4104}m_4 - \frac{1}{5}m_5$$
$$y_{0+1} = y_0 + \frac{25}{216}m_1 + \frac{1408}{2565}m_3 + \frac{2197}{4104}m_4 - \frac{1}{5}m_5$$
$$y_1 = 30 + \frac{25}{216}(1.5) + \frac{1408}{2565}(1.61317534722684) + \frac{2197}{4104}(1.77911171056844) - \frac{1}{5}(1.80136095034631)$$
$$= 31.65127017112750$$

Jadi pada saat $t = 0.5$, besarnya x adalah 61.39594262120085 dan y adalah 31.65127017112750

Iterasi terus berulang hingga mencapai $t = 50$ atau iterasi ke 101, sehingga pada akhirnya diperoleh penyelesaian $x(50) = 39.46862153379923$ dan $y(50) = 47.87357967576552$. Dengan kata lain, jumlah spesies mangsa dan pemangsa dalam suatu populasi setelah 50 hari secara berturut-turut adalah 39.46862153379923 dan 47.87357967576552 . Secara keseluruhan, penyelesaian numerik model *predator prey* dikerjakan dengan Matlab.

❖ Metode RKF 45 bentuk I orde 5

Penyelesaian numerik sistem persamaan diferensial (3.2) dengan metode RKF 45 bentuk I orde 5 dapat langsung diperoleh nilai x_{i+1} dan y_{i+1} dengan menggunakan formulasi rumus yang telah ada, karena variabel-variabelnya telah didapatkan pada metode RKF 45 bentuk I orde 4. Sehingga sesuai dengan formulasi rumus (2.59) maka penyelesaiannya adalah:

$$\hat{x}_{i+1} = x_i + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{26437}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6$$
$$\hat{x}_{0+1} = x_0 + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{26437}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6$$
$$\begin{aligned}\hat{x}_1 &= 60 + \frac{16}{135}(1.5) + \frac{6656}{12825}(1.42536014132798) + \frac{28561}{26437}(1.30055009826244) \\ &\quad - \frac{9}{50}(1.80136095034631) + \frac{2}{55}(1.39848539823091) \\ &= 61.39585965264498\end{aligned}$$

$$\hat{y}_{i+1} = y_i + \frac{16}{135}m_1 + \frac{6656}{12825}m_3 + \frac{28561}{26437}m_4 - \frac{9}{50}m_5 + \frac{2}{55}m_6$$
$$\hat{y}_{0+1} = y_0 + \frac{16}{135}m_1 + \frac{6656}{12825}m_3 + \frac{28561}{26437}m_4 - \frac{9}{50}m_5 + \frac{2}{55}m_6$$
$$\begin{aligned}\hat{y}_1 &= 30 + \frac{16}{135}(1.5) + \frac{6656}{12825}(1.61317534722684) + \frac{28561}{26437}(1.77911171056844) \\ &\quad - \frac{9}{50}(1.80136095034631) + \frac{2}{55}(1.65156130118756) \\ &= 31.65115834942643\end{aligned}$$

Jadi pada saat $t = 0.5$, besarnya x adalah 61.39585965264498 dan y adalah 31.65115834942643

Iterasi terus berulang hingga mencapai $t = 50$ atau iterasi ke 101, sehingga pada akhirnya diperoleh penyelesaian $x(50) = 39.47371270514351$ dan. $y(50) = 47.88946193738940$. Dengan kata lain, jumlah spesies mangsa dan pemangsa dalam suatu populasi setelah 50 hari secara berturut-turut adalah

39.47371270514351 dan 47.88946193738940. Secara keseluruhan, penyelesaian numerik model *predator prey* dikerjakan dengan Matlab.

❖ Metode RKF 45 bentuk II orde 4

Karena langkah 1, 2, dan 3 pada metode RKF 45 bentuk II sama dengan bentuk I, maka penyelesaian sistem persamaan diferensial (3.2) dengan metode RKF 45 bentuk II, baik yang orde 4 maupun orde5, keduanya dimulai dari langkah 4.

Langkah 4:

Sesuai dengan formulasi rumus (2.61) yang terdapat pada bab II, maka:

$$x_{i+1} = x_i + \left(\frac{37}{378}k_1 + \frac{250}{621}k_3 + \frac{125}{594}k_4 + \frac{512}{1771}k_6\right)h$$
$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{37}{378}m_1 + \frac{250}{621}m_3 + \frac{125}{594}m_4 + \frac{512}{1771}m_6\right)h$$

Langkah 5:

Karena $h = 0.5$ maka

$$k_1 = f(t_i, x_i, y_i)$$
$$m_1 = g(t_i, x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(t_i + \tfrac{1}{5}h,\ x_i + \tfrac{1}{5}k_1 h\ ,\ y_i + \tfrac{1}{5}m_1 h)$$
$$= f(t_i + \tfrac{1}{5}(0.5),\ x_i + \tfrac{1}{5}k_1(0.5), y_i + \tfrac{1}{5}m_1(0.5))$$
$$m_2 = g(t_i + \tfrac{1}{5}h,\ x_i + \tfrac{1}{5}k_1 h\ ,\ y_i + \tfrac{1}{5}m_1 h)$$
$$= g(t_i + \tfrac{1}{5}(0.5),\ x_i + \tfrac{1}{5}k_1(0.5), y_i + \tfrac{1}{5}m_1(0.5))$$

$$k_3 = f(t_i + \tfrac{3}{10}h,\ x_i + \tfrac{3}{40}k_1 h + \tfrac{9}{40}k_2 h\ ,\ y_i + \tfrac{3}{40}m_1 h + \tfrac{9}{40}m_2 h)$$
$$= f(t_i + \tfrac{3}{10}(0.5),\ x_i + \tfrac{3}{40}k_1(0.5) + \tfrac{9}{40}k_2(0.5)\ ,\ y_i + \tfrac{3}{40}m_1(0.5) + \tfrac{9}{40}m_2(0.5))$$
$$m_3 = g(t_i + \tfrac{3}{10}h,\ x_i + \tfrac{3}{40}k_1 h + \tfrac{9}{40}k_2 h\ ,\ y_i + \tfrac{3}{40}m_1 h + \tfrac{9}{40}m_2 h)$$
$$= g(t_i + \tfrac{3}{10}(0.5),\ x_i + \tfrac{3}{40}k_1(0.5) + \tfrac{9}{40}k_2(0.5)\ ,\ y_i + \tfrac{3}{40}m_1(0.5) + \tfrac{9}{40}m_2(0.5))$$

$$k_4 = f(t_i + \tfrac{3}{5}h,\ x_i + \tfrac{3}{10}k_1h - \tfrac{9}{10}k_2h + \tfrac{6}{5}k_3h\ ,\ y_i + \tfrac{3}{10}m_1h - \tfrac{9}{10}m_2h + \tfrac{6}{5}m_3h)$$
$$= f(t_i + \tfrac{3}{5}(0.5),\ x_i + \tfrac{3}{10}k_1(0.5) - \tfrac{9}{10}k_2(0.5) + \tfrac{6}{5}k_3(0.5)\ ,$$
$$y_i + \tfrac{3}{10}m_1(0.5) - \tfrac{9}{10}m_2(0.5) + \tfrac{6}{5}m_3(0.5))$$
$$m_4 = g(t_i + \tfrac{3}{5}h,\ x_i + \tfrac{3}{10}k_1h - \tfrac{9}{10}k_2h + \tfrac{6}{5}k_3h\ ,\ y_i + \tfrac{3}{10}m_1h - \tfrac{9}{10}m_2h + \tfrac{6}{5}m_3h)$$
$$= g(t_i + \tfrac{3}{5}(0.5),\ x_i + \tfrac{3}{10}k_1(0.5) - \tfrac{9}{10}k_2(0.5) + \tfrac{6}{5}k_3(0.5)\ ,$$
$$y_i + \tfrac{3}{10}m_1(0.5) - \tfrac{9}{10}m_2(0.5) + \tfrac{6}{5}m_3(0.5))$$

$$k_5 = f(t_i + h,\ x_i - \tfrac{11}{54}k_1h + \tfrac{5}{2}k_2h - \tfrac{70}{27}k_3h + \tfrac{35}{27}k_4h,$$
$$y_i - \tfrac{11}{54}m_1h + \tfrac{5}{2}m_2h - \tfrac{70}{27}m_3h + \tfrac{35}{27}m_4h)$$
$$= f(t_i + (0.5),\ x_i - \tfrac{11}{54}k_1(0.5) + \tfrac{5}{2}k_2(0.5) - \tfrac{70}{27}k_3(0.5) + \tfrac{35}{27}k_4(0.5),$$
$$y_i - \tfrac{11}{54}m_1(0.5) + \tfrac{5}{2}m_2(0.5) - \tfrac{70}{27}m_3(0.5) + \tfrac{35}{27}m_4(0.5))$$
$$m_5 = g(t_i + h,\ x_i - \tfrac{11}{54}k_1h + \tfrac{5}{2}k_2h - \tfrac{70}{27}k_3h + \tfrac{35}{27}k_4h,$$
$$y_i - \tfrac{11}{54}m_1h + \tfrac{5}{2}m_2h - \tfrac{70}{27}m_3h + \tfrac{35}{27}m_4h)$$
$$= g(t_i + (0.5),\ x_i - \tfrac{11}{54}k_1(0.5) + \tfrac{5}{2}k_2(0.5) - \tfrac{70}{27}k_3(0.5) + \tfrac{35}{27}k_4(0.5),$$
$$y_i - \tfrac{11}{54}m_1(0.5) + \tfrac{5}{2}m_2(0.5) - \tfrac{70}{27}m_3(0.5) + \tfrac{35}{27}m_4(0.5))$$

$$k_6 = f(t_i + \tfrac{7}{8}h,\ x_i + \tfrac{1631}{55.296}k_1h + \tfrac{175}{512}k_2h + \tfrac{575}{13824}k_3h + \tfrac{44275}{110592}k_4h$$
$$+ \tfrac{253}{4096}k_5h\ ,\ y_i + \tfrac{1631}{55.296}m_1h + \tfrac{175}{512}m_2h + \tfrac{575}{13824}m_3h + \tfrac{44275}{110592}m_4h + \tfrac{253}{4096}m_5h)$$
$$= f(t_i + \tfrac{7}{8}(0.5)\ ,\ x_i + \tfrac{1631}{55.296}k_1(0.5) + \tfrac{175}{512}k_2(0.5) + \tfrac{575}{13824}k_3(0.5)$$
$$+ \tfrac{44275}{110592}k_4(0.5) + \tfrac{253}{4096}k_5(0.5)\ ,\ y_i + \tfrac{1631}{55.296}m_1(0.5) + \tfrac{175}{512}m_2(0.5)$$
$$+ \tfrac{575}{13824}m_3(0.5) + \tfrac{44275}{110592}m_4(0.5) + \tfrac{253}{4096}m_5(0.5))$$
$$m_6 = g(t_i + \tfrac{7}{8}h,\ x_i + \tfrac{1631}{55.296}k_1h + \tfrac{175}{512}k_2h + \tfrac{575}{13824}k_3h + \tfrac{44275}{110592}k_4h$$
$$+ \tfrac{253}{4096}k_5h\ ,\ y_i + \tfrac{1631}{55.296}m_1h + \tfrac{175}{512}m_2h + \tfrac{575}{13824}m_3h + \tfrac{44275}{110592}m_4h + \tfrac{253}{4096}m_5h)$$
$$= g(t_i + \tfrac{7}{8}(0.5)\ ,\ x_i + \tfrac{1631}{55.296}k_1(0.5) + \tfrac{175}{512}k_2(0.5) + \tfrac{575}{13824}k_3(0.5)$$
$$+ \tfrac{44275}{110592}k_4(0.5) + \tfrac{253}{4096}k_5(0.5)\ ,\ y_i + \tfrac{1631}{55.296}m_1(0.5) + \tfrac{175}{512}m_2(0.5)$$
$$+ \tfrac{575}{13824}m_3(0.5) + \tfrac{44275}{110592}m_4(0.5) + \tfrac{253}{4096}m_5(0.5))$$

Untuk iterasi yang pertama (t = 0.5):

dengan $t_i = t_0 = 0\ \ x_i = x_0 = 60\ \ y_i = y_0 = 30$ maka didapat:

$$k_1 = f(t_0, x_0, y_0) = f(0,\ 60, 30) = (0.2 \times 60 - 0.005 \times 60 \times 30) = 3$$

$$m_1 = g(t_0, x_0, y_0) = g(0, 60, 30) = (-0.5 \times 30 + 0.01 \times 60 \times 30) = 3$$

$$
\begin{aligned}
k_2 &= f(t_0 + \tfrac{1}{5}h,\ x_0 + \tfrac{1}{5}k_1(0.5),\ y_0 + \tfrac{1}{5}m_1(0.5)) \\
&= f(0 + \tfrac{1}{5}(0.5),\ 60 + \tfrac{1}{5}(3)(0.5)\ ,\ 30 + \tfrac{1}{5}(3)(0.5)) \\
&= f(0.1\ ,\ 60.3\ ,\ 30.3) \\
&= (0.2 \times 60.3 - 0.005 \times 60.3 \times 30.3) \\
&= 2.92455
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m_2 &= g(t_0 + \tfrac{1}{5}(0.5),\ x_0 + \tfrac{1}{5}k_1(0.5),\ y_0 + \tfrac{1}{5}m_1(0.5)) \\
&= g(0 + \tfrac{1}{5}(0.5),\ 60 + \tfrac{1}{5}(3)(0.5)\ ,\ 30 + \tfrac{1}{5}(3)(0.5)) \\
&= g(0.1\ ,\ 60.3\ ,\ 30.3) \\
&= (-0.5 \times 30.3 + 0.01 \times 60.3 \times 30.3) \\
&= 3.1209
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_3 &= f(t_0 + \tfrac{3}{10}(0.5),\ x_0 + \tfrac{3}{40}k_1(0.5) + \tfrac{9}{40}k_2(0.5),\ y_0 + \tfrac{3}{40}m_1(0.5) + \tfrac{9}{40}m_2(0.5)) \\
&= f(0 + \tfrac{3}{10}(0.5),\ 60 + \tfrac{3}{40}(3)(0.5) + \tfrac{9}{40}(2.92455)(0.5), \\
&\quad y_i + \tfrac{3}{40}(3)(0.5) + \tfrac{9}{40}(3.12090(0.5)) \\
&= f(0.15,\ 60.441511875, 30.46360125) \\
&= (0.2 \times 60.441511875 - 0.005 \times 60.441511875 \times 30.46360125) \\
&= 2.88197179146430
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m_3 &= g(t_0 + \tfrac{3}{10}(0.5),\ x_0 + \tfrac{3}{40}k_1(0.5) + \tfrac{9}{40}k_2(0.5),\ y_0 + \tfrac{3}{40}m_1(0.5) + \tfrac{9}{40}m_2(0.5)) \\
&= g(0 + \tfrac{3}{10}(0.5),\ 60 + \tfrac{3}{40}(3)(0.5) + \tfrac{9}{40}(2.92455)(0.5), \\
&\quad y_i + \tfrac{3}{40}(3)(0.5) + \tfrac{9}{40}(3.1209)(0.5)) \\
&= g(0.15\ ,\ 60.441511875\ ,\ 30.46360125) \\
&= (-0.5 \times 30.46360125 + 0.01 \times 60.441511875 \times 30.46360125) \\
&= 3.18086054207140
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_4 &= f(t_0 + \tfrac{3}{5}(0.5),\ x_0 + \tfrac{3}{10}k_1(0.5) - \tfrac{9}{10}k_2(0.5) + \tfrac{6}{5}k_3(0.5)\ , \\
&\quad y_0 + \tfrac{3}{10}m_1(0.5) - \tfrac{9}{10}m_2(0.5) + \tfrac{6}{5}m_3(0.5)) \\
&= f(t_0 + \tfrac{3}{5}(0.5),\ 60 + \tfrac{3}{10}(3)(0.5) - \tfrac{9}{10}(2.92455)(0.5) + \tfrac{6}{5}(2.8819717914643)(0.5), \\
&\quad 30 + \tfrac{3}{10}(3)(0.5) - \tfrac{9}{10}(3.1209)(0.5) + \tfrac{6}{5}(3.1808605420714)(0.5)) \\
&= f(0.3\ ,\ 60.86313557487858\ ,\ 30.95411132524284) \\
&= (0.2 \times 60.86313557487858 - 0.005 \times 60.86313557487858 \times 30.95411132524284) \\
&= 2.75280574403502
\end{aligned}
$$

$$m_4 = g\,(t_0 + \tfrac{3}{5}(0.5)\,,\ x_0 + \tfrac{3}{10}k_1(0.5) - \tfrac{9}{10}k_2(0.5) + \tfrac{6}{5}k_3(0.5)\ ,$$
$$y_0 + \tfrac{3}{10}m_1(0.5) - \tfrac{9}{10}m_2(0.5) + \tfrac{6}{5}m_3(0.5))$$
$$= g\,(t_0 + \tfrac{3}{5}(0.5)\,,\ x_0 + \tfrac{3}{10}(3)(0.5) - \tfrac{9}{10}(2.92455)(0.5) + \tfrac{6}{5}(2.8819717914643)(0.5),$$
$$y_0 + \tfrac{3}{10}(3)(0.5) - \tfrac{9}{10}(3.1209)(0.5) + \tfrac{6}{5}(3.1808605420714)(0.5))$$
$$= g\,(0.3\ ,\ 60.86313557487858\ ,\ 30.95411132524284)$$
$$= (-0.5 \times 30.95411132524284 + 0.01 \times 60.86313557487858 \times 30.95411132524284)$$
$$= 3.36258707925997$$

$$k_5 = f\,(t_0 + (0.5)\ ,\ x_0 - \tfrac{11}{54}k_1(0.5) + \tfrac{5}{2}k_2(0.5) - \tfrac{70}{27}k_3(0.5) + \tfrac{35}{27}k_4(0.5),$$
$$y_0 - \tfrac{11}{54}m_1(0.5) + \tfrac{5}{2}m_2(0.5) - \tfrac{70}{27}m_3(0.5) + \tfrac{35}{27}m_4(0.5))$$
$$= f\,(0 + (0.5)\ ,\ 60 - \tfrac{11}{54}(3)(0.5) + \tfrac{5}{2}(2.92455)(0.5) - \tfrac{70}{27}(2.8819717914643)(0.5)$$
$$+ \tfrac{35}{27}(2.75280574403502)(0.5)\ ,\ 30 - \tfrac{11}{54}(3)(0.5) + \tfrac{5}{2}(3.1209)(0.5)$$
$$- \tfrac{70}{27}(3.1808605420714)(0.5) + \tfrac{35}{27}(3.36258707925997)(0.5))$$
$$= f\,(0.5\ ,\ 61.39846853034675\ ,\ 31.65168629313151)$$
$$= (0.2 \times 61.39846853034675 - 0.005 \times 61.39846853034675 \times 31.65168629313151)$$
$$= 2.56286838206314$$

$$m_5 = g\,(t_0 + (0.5)\ ,\ x_0 - \tfrac{11}{54}k_1(0.5) + \tfrac{5}{2}k_2(0.5) - \tfrac{70}{27}k_3(0.5) + \tfrac{35}{27}k_4(0.5),$$
$$y_0 - \tfrac{11}{54}m_1(0.5) + \tfrac{5}{2}m_2(0.5) - \tfrac{70}{27}m_3(0.5) + \tfrac{35}{27}m_4(0.5))$$
$$= g\,(0 + (0.5)\ ,\ 60 - \tfrac{11}{54}(3)(0.5) + \tfrac{5}{2}(2.92455)(0.5) - \tfrac{70}{27}(2.8819717914643)(0.5)$$
$$+ \tfrac{35}{27}(2.75280574403502)(0.5)\ ,\ 30 - \tfrac{11}{54}(3)(0.5) + \tfrac{5}{2}(3.1209)(0.5)$$
$$- \tfrac{70}{27}(3.1808605420714)(0.5) + \tfrac{35}{27}(3.36258707925997)(0.5))$$
$$= g\,(0.5,\ 61.39846853034675\ ,\ 31.65168629313151)$$
$$= (-0.5 \times 31.65168629313151 + 0.01 \times 61.39846853034675 \times 31.65168629313151)$$
$$= 3.60780750144667$$

$$k_6 = f\,(t_0 + \tfrac{7}{8}(0.5)\ ,\ x_0 + \tfrac{1631}{55.296}k_1(0.5) + \tfrac{175}{512}k_2(0.5) + \tfrac{575}{13824}k_3(0.5)$$
$$+ \tfrac{44275}{110592}k_4(0.5) + \tfrac{253}{4096}k_5(0.5)\ ,\ y_0 + \tfrac{1631}{55.296}m_1(0.5) + \tfrac{175}{512}m_2(0.5)$$
$$+ \tfrac{575}{13824}m_3(0.5) + \tfrac{44275}{110592}m_4(0.5) + \tfrac{253}{4096}m_5(0.5))$$
$$= f\,(0 + \tfrac{7}{8}(0.5)\ ,60 + \tfrac{1631}{55.296}(3)(0.5) + \tfrac{175}{512}(2.92455)(0.5) + \tfrac{575}{13824}(2.8819717914643)$$
$$(0.5) + \tfrac{44275}{110592}(2.75280574403502)(0.5) + \tfrac{253}{4096}(2.56286838206314)(0.5)\ ,$$
$$30 + \tfrac{1631}{55.296}(3)(0.5) + \tfrac{175}{512}(3.1209)(0.5) + \tfrac{575}{13824}(3.1808605420714)(0.5)$$
$$+ \tfrac{44275}{110592}(3.36258707925997)(0.5) + \tfrac{253}{4096}(3.60780750144667)(0.5))$$
$$= f\,(0.4375\ ,\ 61.23416923681533\ ,\ 31.42827444331482)$$
$$= (0.2 \times 61.23416923681533 - 0.005 \times 61.23416923681533 \times 31.42827444331482)$$
$$= 2.62441246694798$$

$$m_6 = g(t_0 + \tfrac{7}{8}(0.5)\ ,\ x_0 + \tfrac{1631}{55.296}k_1(0.5) + \tfrac{175}{512}k_2(0.5) + \tfrac{575}{13824}k_3(0.5)$$
$$+ \tfrac{44275}{110592}k_4(0.5) + \tfrac{253}{4096}k_5(0.5)\ ,\ y_0 + \tfrac{1631}{55.296}m_1(0.5) + \tfrac{175}{512}m_2(0.5)$$
$$+ \tfrac{575}{13824}m_3(0.5) + \tfrac{44275}{110592}m_4(0.5) + \tfrac{253}{4096}m_5(0.5))$$
$$= g(0 + \tfrac{7}{8}(0.5)\ ,60 + \tfrac{1631}{55.296}(3)(0.5) + \tfrac{175}{512}(2.92455)(0.5) + \tfrac{575}{13824}(2.8819717914643)$$
$$(0.5) + \tfrac{44275}{110592}(2.75280574403502)(0.5) + \tfrac{253}{4096}(2.56286838206314)(0.5)\ ,$$
$$30 + \tfrac{1631}{55.296}(3)(0.5) + \tfrac{175}{512}(3.1209)(0.5) + \tfrac{575}{13824}(3.1808605420714)(0.5)$$
$$+ \tfrac{44275}{110592}(3.36258707925997)(0.5) + \tfrac{253}{4096}(3.60780750144667)(0.5))$$
$$= g(0.4375\ ,\ 61.23416923681533\ ,\ 31.42827444331482)$$
$$= (-0.5 \times 31.42827444331482 + 0.01 \times 61.23416923681533 \times 31.42827444331482)$$
$$= 3.53070553917277$$

Langkah 6

Berdasarkan variabel-variabel yang telah didapat pada langkah 5, maka besarnya x_{i+1} dan y_{i+1} adalah:

$$x_{i+1} = x_i + \left(\frac{37}{378}k_1 + \frac{250}{621}k_3 + \frac{125}{594}k_4 + \frac{512}{1771}k_6\right)h$$
$$x_{0+1} = x_0 + \left(\frac{37}{378}k_1 + \frac{250}{621}k_3 + \frac{125}{594}k_4 + \frac{512}{1771}k_6\right)h$$
$$x_1 = 60 + (\frac{37}{378}(3) + \frac{250}{621}(2.88197179146430) + \frac{125}{594}(2.75280574403502)$$
$$\frac{512}{1771}(2.62441246694798))(0.5)$$
$$= 61.39594122098970$$

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{37}{378}m_1 + \frac{250}{621}m_3 + \frac{125}{594}m_4 + \frac{512}{1771}m_6\right)h$$
$$y_{0+1} = y_0 + \left(\frac{37}{378}m_1 + \frac{250}{621}m_3 + \frac{125}{594}m_4 + \frac{512}{1771}m_6\right)h$$
$$y_1 = 30 + (\frac{37}{378}(3) + \frac{250}{621}(3.18086054207140) + \frac{125}{594}(3.36258707925997)$$
$$\frac{512}{1771}(3.53070553917277))(0.5)$$
$$= 31.65127016849083$$

Jadi pada saat $t = 0.5$, besarnya x adalah 61.39594122098970 dan y adalah 31.65127016849083.

Iterasi terus berulang hingga mencapai $t = 50$ atau iterasi ke 101, sehingga pada akhirnya diperoleh penyelesaian $x(50) = 39.46871658914546$ dan $y(50) = 47.87373531259235$. Dengan kata lain, jumlah spesies mangsa dan pemangsa dalam suatu populasi setelah 50 hari secara berturut-turut adalah 39.46871658914546 dan 47.87373531259235. Secara keseluruhan, penyelesaian numerik model *predator prey* dikerjakan dengan Matlab.

❖ Metode RKF 45 bentuk II orde 5

Penyelesaian numerik sistem persamaan diferensial (3.2) dengan metode RKF 45 bentuk II orde 5 dapat langsung diperoleh nilai x_{i+1} dan y_{i+1}, dengan menggunakan formulasi rumus yang telah ada, karena variabel-variabelnya telah didapatkan pada metode RKF 45 bentuk II orde 4. Sehingga sesuai dengan formulasi rumus (2.62) maka penyelesaiannya adalah:

$$\hat{x}_{i+1} = x_i + \left(\frac{2825}{27648}k_1 + \frac{18575}{48384}k_3 + \frac{13525}{55296}k_4 + \frac{277}{14336}k_5 + \frac{1}{4}k_6\right)h$$

$$\hat{x}_{0+1} = x_0 + \left(\frac{2825}{27648}k_1 + \frac{18575}{48384}k_3 + \frac{13525}{55296}k_4 + \frac{277}{14336}k_5 + \frac{1}{4}k_6\right)h$$

$$\begin{aligned}\hat{x}_1 = 60 + (&\frac{2825}{27648}(3) + \frac{18575}{48384}(2.88197179146430) \\ &+ \frac{13525}{55296}(2.75280574403502) + \frac{277}{14336}(2.56286838206314) \\ &+ \frac{1}{4}(2.62441246694798))(0.5) \\ = {} & 61.39594149184025\end{aligned}$$

$$\hat{y}_{i+1} = y_i + \left(\frac{2825}{27648}m_1 + \frac{18575}{48384}m_3 + \frac{13525}{55296}m_4 + \frac{277}{14336}m_5 + \frac{1}{4}m_6\right)h$$

$$\hat{y}_{0+1} = y_0 + \left(\frac{2825}{27648}m_1 + \frac{18575}{48384}m_3 + \frac{13525}{55296}m_4 + \frac{277}{14336}m_5 + \frac{1}{4}m_6\right)h$$

$$
\begin{aligned}
\hat{y}_1 &= 30 + (\frac{2825}{27648}(3) + \frac{18575}{48384}(2.88197179146430) \\
&\quad + \frac{13525}{55296}(2.75280574403502) + \frac{277}{14336}(2.56286838206314) \\
&\quad + \frac{1}{4}(2.62441246694798))(0.5) \\
&= 31.65127019546588
\end{aligned}
$$

Jadi pada saat $t = 0.5$, besarnya x adalah 61.39594149184025 dan y adalah 31.65127019546588

Iterasi terus berulang hingga mencapai $t = 50$ atau iterasi ke 101, sehingga pada akhirnya diperoleh penyelesaian $x(50) = 39.46870115413599$ dan $y(50) = 47.87370860131695$. Dengan kata lain, jumlah spesies mangsa dan pemangsa dalam suatu populasi setelah 50 hari secara berturut-turut adalah 39.46870115413599 dan 47.87370860131695 . Secara keseluruhan, penyelesaian numerik model *predator prey* dikerjakan dengan Matlab.

B. Penyelesaian Numerik Sistem Persamaan Diferensial Lotka Volterra dengan Metode Heun

Secara umum, algoritma atau langkah-langkah dalam menyelesaikan sistem persamaan (3.1) secara numerik dengan metode Heun adalah:

1) Menentukan besarnya koefisien-koefisien yang terdapat dalam sistem persamaan diferensial (3.1)
2) Menentukan besarnya dua variabel bebas pada saat *t(waktu) = 0*, yaitu variabel *x(0)* dan *y(0)*

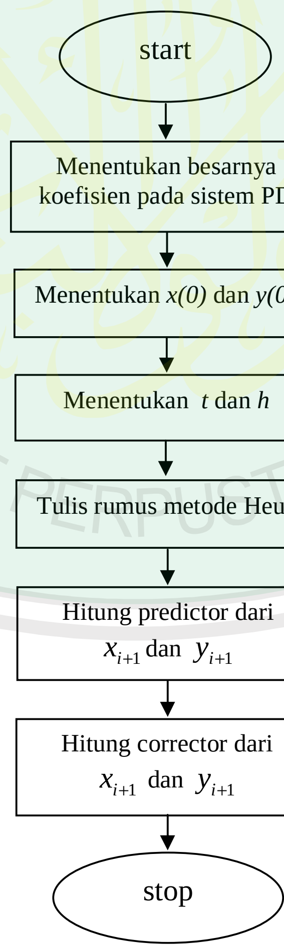
3) Menentukan nilai *t*(waktu) yang akan ditentukan penyelesaiannya beserta besarnya ukuran langkah (h)

4) Menuliskan formulasi rumus metode Heun

5) Menyelesaikan atau menghitung *predictor* dari dua variabel terikat, yaitu x_{i+1} dan y_{i+1}

6) Menghitung *corrector* dari dua variabel terikat, yaitu x_{i+1} dan y_{i+1} dengan menggunakan nilai *predictor*nya

Dari algoritma tersebut dapat dibuat flow chartnya sebagai berikut:



Gambar 3.1 Flow Chart Metode Heun

Karena langkah 1, 2 dan 3 dalam menyelesaikan sistem persamaan diferensial Lotka Volterra secara numerik dengan metode Heun sama dengan langkah-langkah pada metode RKF 45, maka dalam penyelesaian sistem persamaan diferensial (2.3) dimulai dari langkah 4.

Langkah 4

Sesuai dengan formulasi rumus (2.65) yang terdapat pada bab II, maka:

$$predictor: x_{i+1}^{(0)} = x_i + h\, f(t_i, x_i, y_i)$$

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + h\, g(t_i, x_i, y_i)$$

$$corrector: x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2}\left[f(t_i, x_i, y_i) + f(t_{i+1}, x_{i+1}^{(0)}, y_{i+1}^{(0)})\right]$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[g(t_i, x_i, y_i) + g(t_{i+1}, x_{i+1}^{(0)}, y_{i+1}^{(0)})\right]$$

Karena h = 0.5, maka

$$predictor: x_{i+1}^{(0)} = x_i + (0.5)\, f(t_i, x_i, y_i)$$

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + (0.5)\, g(t_i, x_i, y_i)$$

$$corrector: x_{i+1} = x_i + \frac{(0.5)}{2}\left[f(t_i, x_i, y_i) + f(t_{i+1}, x_{i+1}^{(0)}, y_{i+1}^{(0)})\right]$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{(0.5)}{2}\left[g(t_i, x_i, y_i) + g(t_{i+1}, x_{i+1}^{(0)}, y_{i+1}^{(0)})\right]$$

Langkah 5

Untuk iterasi yang pertama (t = 0.5):

dengan $t_i = t_0 = 0$ $x_i = x_0 = 60$ $y_i = y_0 = 30$ maka didapat:

$$\begin{aligned} predictor: x_{0+1}^{(0)} &= x_0 + (0.5)\, f(t_0, x_0, y_0) \\ &= 60 + (0.5)\, f(0, 60, 30) \\ &= 60 + (0.5)(0.2 \times 60 - 0.005 \times 60 \times 30) = 3 \\ &= 60 + (0.5)\,(3) \\ &= 60 + 1.5 \\ &= 61.5 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y_{0+1}^{(0)} &= y_0 + (0.5)\, g(t_0, x_0, y_0) \\
&= 30 + (0.5)\, g(0, 60, 30) \\
&= 30 + (0.5)\ (-0.5 \times 30 + 0.01 \times 60 \times 30) \\
&= 30 + (0.5)\ (3) \\
&= 30 + 1.5 \\
&= 31.5
\end{aligned}
$$

Langkah 6

Dari nilai *predictor* x_{i+1} dan y_{i+1} yang didapat pada langkah 5, maka besarnya nilai *corrector* x_{i+1} dan y_{i+1} adalah:

$$
\begin{aligned}
x_{i+1} &= x_0 + \frac{h}{2}\left[f(t_i, x_i, y_i) + f(t_{i+1}, x_{i+1}^{(0)}, y_{i+1}^{(0)}) \right] \\
x_{0+1} &= x_0 + \frac{h}{2}\left[f(t_0, x_0, y_0) + f(t_{0+1}, x_{0+1}^{(0)}, y_{0+1}^{(0)}) \right] \\
x_1 &= 60 + \frac{(0.5)}{2}\left[f(0\ , 60\ , 30) + f(0.5\ , 61.5\ , 31.5) \right] \\
&= 60 + 0.25(3 + 2.61375) \\
&= 61.4034375
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2}\left[g(t_i, x_i, y_i) + g(t_{i+1}, x_{i+1}^{(0)}, y_{i+1}^{(0)}) \right] \\
y_{0+1} &= y_0 + \frac{h}{2}\left[g(t_0, x_0, y_0) + g(t_{0+1}, x_{0+1}^{(0)}, y_{0+1}^{(0)}) \right] \\
y_1 &= 30 + \frac{(0.5)}{2}\left[g(0\ , 60\ , 30) + g(0.5\ , 61.5\ , 31.5) \right] \\
&= 30 + (0.25)\ (3 + 2.6225) \\
&= 31.655625
\end{aligned}
$$

Jadi pada saat $t = 0.5$, besarnya nilai x adalah 61.4034375 dan y adalah 31.655625

Iterasi terus berulang hingga mencapai $t = 50$ atau iterasi ke 101, sehingga pada akhirnya diperoleh penyelesaian $x(50) = 39.09579689103305$ dan $y(50) = 46.90754000886709$. Dengan kata lain, jumlah spesies mangsa dan pemangsa dalam suatu populasi setelah 50 hari secara berturut-turut adalah

39.09579689103305 dan 46.90754000886709 . Secara keseluruhan, penyelesaian numerik model *predator prey* dikerjakan dengan Matlab.

C. Analisis Numerik Metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45) dan Metode Heun pada Penyelesaian Sistem Persamaan Diferensial Lotka Volterra

Dari penyelesaian numerik sistem persamaan diferensial Lotka Volterra dengan metode RKF 45 dan metode Heun, diperoleh penyelesaian sebagai berikut:

a. Metode RKF 45 bentuk I

Setelah 50 hari	**Orde 4**	**Orde 5**
x = mangsa	39.46862153379923	39.47371270514351
y = pemangsa	47.87357967576552	47.88946193738940

b. Metode RKF 45 bentuk II

Setelah 50 hari	**Orde 4**	**Orde 5**
x = mangsa	39.46871658914546	39.46870115413599
y = pemangsa	47.87373531259235	47.87370860131695

c. Metode Heun

Setelah 50 hari	**Metode Heun**
x = mangsa	39.09579689103305
y = pemangsa	46.90754000886709

Secara teori, interaksi pemangsaan (model *predator prey*) pada umumnya dikatakan seimbang jika jumlah spesies dalam populasi pemangsa lebih besar daripada mangsanya. Di samping itu, interaksi antara mangsa dan pemangsa dalam kurun waktu yang tidak terlalu lama akan sangat berpengaruh kuat atau dapat dikatakan sangat merusak populasi mangsa (Odum, 1998: 277).

Berdasarkan konsep tersebut, dapat dikatakan bahwa solusi yang didapat dari penghitungan secara numerik sistem persamaan diferensial Lotka Volterra dengan metode RKF 45 dan metode Heun sudah sesuai. Artinya, dengan t (waktu) yang sangat singkat, yaitu 50 hari, interaksi pemangsa dan mangsa berpengaruh sangat kuat atau sangat merusak populasi mangsa. Hal ini dapat dilihat dari solusi x dan y setelah 50 hari, yang menunjukkan bahwa $x < y$ atau dapat diartikan bahwa jumlah spesies dalam populasi mangsa kurang dari jumlah spesies dalam populasi pemangsa. Di samping itu, dari nilai awal atau jumlah spesies dalam populasi mangsa dan pemangsa, yaitu $x(0) = 60$ dan $y(0) = 30$, dapat dikatakan terjadi perubahan yang sangat signifikan, baik populasi mangsa maupun pemangsa selama 50 hari.

Dalam hal ini, dapat disimpulkan bahwa metode RKF 45 dan metode Heun sebagai alternatif penyelesaian dari metode analitik, keduanya merupakan metode yang teliti. Dikatakan demikian karena dari penjelasan di atas menunjukkan bahwa solusi yang dihasilkan oleh kedua metode tersebut, sudah sesuai dengan konsep ekologi. Akan tetapi besarnya ketelitian tersebut tidak dapat diukur, hal ini disebabkan sistem persamaan diferensial Lotka Volterra merupakan persamaan diferensial tak linier yang tidak dapat diselesaikan secara analitik atau tidak mempunyai solusi eksak. Karena tidak mempunyai solusi eksak, maka tidak dapat dihasilkan galat sejati (kesalahan)nya.

Meskipun tidak didapatkan solusi sejatinya, dalam penyelesaian ini dapat dicari galat pemotongannya. Dalam hal ini, karena galat pemotongan merupakan selisih *x* dan *y* pada orde 5 dan orde 4, maka galat pemotongan hanya dapat dihasilkan pada metode RKF 45. Galat pemotongan tersebut adalah:

- Metode RKF 45 bentuk I

Pada orde 4:

$$x(50) = 39.46862153379923$$
$$y(50) = 47.87357967576552$$

Pada orde 5:

$$\hat{x}(50) = 39.47371270514351$$
$$\hat{y}(50) = 47.88946193738940$$

Sehingga galat pemotongan metode RKF 45 bentuk I adalah:

$$\left|\hat{x}(50) - x(50)\right| = \left|39.47371270514351 - 39.46862153379923\right|$$
$$= 0.00509117134428$$

$$\left|\hat{y}(50) - y(50)\right| = \left|47.88946193738940 - 47.87357967576552\right|$$
$$= 0.01588226162388$$

- Metode RKF 45 bentuk II

Pada orde 4:

$$x(50) = 39.46871658914546$$
$$y(50) = 47.87373531259235$$

Pada orde 5:

$$\hat{x}(50) = 39.46870115413599$$
$$\hat{y}(50) = 47.87370860131695$$

Sehingga galat pemotongan metode RKF 45 bentuk II adalah:

$$\left|\hat{x}(50) - x(50)\right| = \left|39.46870115413599 - 39.46871658914546\right|$$
$$= \left|-0.00001543500947\right|$$
$$= 0.00001543500947$$

$$\left|\hat{y}(50) - y(50)\right| = \left|47.87370860131695 - 47.8737353125923\right|$$
$$= \left|-0.0000267112754\right|$$
$$= 0.0000267112754$$

Penghitungan di atas menunjukkan bahwa galat pemotongan pada kedua bentuk metode RKF 45 adalah kurang dari 1, yang berarti sesuai dengan konsep interval galat yaitu antara 0 dan 1. Untuk metode RKF 45 bentuk I, galat pada nilai x adalah 0.00509117134428, dan galat pada nilai y adalah 0.01588226162388. Sedangkan untuk metode RKF 45 bentuk II, galat pada nilai x adalah 0.00001543500947 dan galat pada nilai y adalah 0.0000267112754.

Secara lebih khusus, galat pemotongan tersebut dalam model *predator prey* tidak berpengaruh terhadap besarnya nilai x dan y atau besarnya jumlah spesies dalam populasi mangsa dan pemangsa. Karena tidak mungkin suatu spesies jumlahnya kurang dari 1.

Selanjutnya, dari nilai x dan y yang dihasikan oleh kedua metode menunjukkan bahwa nilai x (jumlah mangsa setelah 50 hari) pada metode RKF 45 berbeda dengan nilai x pada metode Heun. Akan tetapi nilai y (jumlah pemangsa setelah 50 hari) pada kedua metode adalah sama.

BAB IV

PENUTUP

A. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan, dapat disimpulkan hal-hal sebagai berikut:

1. Penyelesaian Numerik Sistem Persamaan Diferensial Lotka Volterra dengan Metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45)

   - Langkah-langkah penyelesaian:

     a. Menentukan besarnya koefisien-koefisien yang terdapat dalam sistem persamaan diferensial ($\alpha = 0.2$, $\beta = 0.005$, $\gamma = 0.5$ dan $\delta = 0.01$)

     b. Menentukan besarnya dua variabel terikat pada saat *t(waktu) = 0*, yaitu variabel *x(0)* dan *y(0)*, (*x(0)* = 60 dan *y(0)* = 30)

     c. Menentukan nilai *t*(waktu) yang akan ditentukan solusinya beserta besarnya *h* (ukuran langkah), (*t* = 50 hari dan *h* = 0.5)

     d. Menuliskan formulasi rumus metode RKF 45

     e. Menghitung variabel-variabel yang terdapat dalam formulasi rumus dengan menggunakan suatu formulasi yang telah ditentukan, yaitu variabel k_1 sampai k_6 dan m_1 sampai m_6.

     f. Menghitung x_{i+1} dan y_{i+1} dengan mensubstitusikan variabel-variabel yang telah didapatkan pada langkah 5 ke dalam formulasi rumus metode RKF 45

- Hasil penghitungan dari persamaan (3.2):

d. Metode RKF 45 bentuk I

Setelah 50 hari	**Orde 4**	**Orde 5**
x = mangsa	39.46862153379923	39.47371270514351
y = pemangsa	47.87357967576552	47.88946193738940

e. Metode RKF 45 bentuk II

Setelah 50 hari	**Orde 4**	**Orde 5**
x = mangsa	39.46871658914546	39.46870115413599
y = pemangsa	47.87373531259235	47.87370860131695

2. Penyelesaian Numerik Sistem Persamaan Diferensial Lotka Volterra dengan Metode Heun

- Langkah-langkah penyelesaian:

a. Menentukan besarnya koefisien-koefisien yang terdapat dalam sistem persamaan diferensial ($\alpha = 0.2$, $\beta = 0.005$, $\gamma = 0.5$, dan $\delta = 0.01$).

b. Menentukan besarnya dua variabel bebas pada saat *t(waktu) = 0*, yaitu variabel *x(0)* dan *y(0)*, (*x(0)* = 60 dan *y(0)* = 30).

c. Menentukan nilai *t*(waktu) yang akan ditentukan solusinya beserta besarnya ukuran langkah h, (*t* = 50 hari dan *h* = 0.5).

d. Menuliskan formulasi rumus metode Heun.

e. Menyelesaikan atau menghitung *predictor* dari dua variabel terikat, yaitu x_{i+1} dan y_{i+1}.

f. Menghitung *corrector* dari nilai dua variabel terikat, yaitu x_{i+1} dan y_{i+1} dengan menggunakan nilai *predictor*nya.

- Hasil Penghitungan persamaan (3.2)

  Setelah 50 hari, jumlah spesies mangsa dalam suatu populasi adalah 39.09579689103305 sedangkan jumlah spesies pemangsa dalam suatu populasi adalah 46.90754000886709.

3. Dari hasil analisis numerik metode RKF 45 dan metode Heun dalam menyelesaikan sistem persamaan diferensial Lotka Volterra menyatakan bahwa kedua metode tersebut merupakan metode yang teliti, karena dari hasil penghitungan yang didapatkan nilainya sudah memenuhi konsep ekologi yang ada. Akan tetapi besarnya ketelitian tersebut tidak dapat diukur karena dalam penghitungan ini tidak didapatkan galat sejatinya, hanya galat pemotongan pada metode RKF 45 saja yang didapatkan. Selanjutnya galat pemotongan tersebut tidak berpengaruh pada besarnya jumlah spesies mangsa maupun pemangsa.

B. Saran

Saran yang penulis berikan untuk penulisan skripsi selanjutnya adalah:

1. Model matematika yang digunakan antara lain model interaksi dua populasi dengan menambahkan parameter yang lain, model interaksi *n* populasi maupun model matematika yang lain.
2. Dalam menyelesaikan sistem persamaan diferensial Lotka Volterra dapat digunakan metode predictor-corrector banyak langkah, seperti metode Adam Bashforth-Moulton dan metode Milne Simpson.

DAFTAR PUSTAKA

Abdusysyakir. M. Pd. 2006. *Ada Matematika Dalam Al-Qur'an*. Malang: UIN Press

Al Hasyimiy, As Sayyid Ahmad. 1994. *Tarjamah Mukhtarul Ahadits*. Terjemahan H. Hidayah Salim. Bandung: Al-Maarif

Arhami, Muhammad dan Desiani, Anita. 2005. *Pemrograman Matlab.* Yogyakarta: Andi

Atkinson, Kendall E. 1989. *An Introduction to Numerical Analysis*, Second Edition. New York: John Wiley&Sons. Inc

Baiduri. 2002. *Persamaan Diferensial dan Matematika Model*. Malang: UMM Press

Boyce, William C dan Di Prima, Richad C. 2001. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problem*. Sevent Edition. New York: John Wiley&Sons. Inc

Bukhari. 1992. *Shahih Bukhari*. Jilid I. Terjemahan H. Zainuddin Hamidy, dkk. Jakarta: Widjaya

Campbell, Neil A, dkk. 2004. *Biologi Jilid III*. Terjemahan Prof. Dr. Ir. Wasmen Manalu. Jakarta: Erlangga

Chapra, Steven C dan Canale, Raymond P. 2002. *Numerical Methods For Engineers with Software and Programming Applications.* Fourth Edition. New York: The Mc Graw-Hill Companies, Inc

Dahlan, H. M. D. 1994. *Khutbah Dari Kampus Seri 1*. Bandung: CV. Diponegoro

Djojodihardjo, Harijono. 2000. *Metode Numerik*. Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama

Finizio, N. dan Ladas, G. 1988. *Persamaan Diferential Dengan Penerapan Modern.* Terjemahan Widiarti Santosa. Jakarta: Erlangga

Haselman, Duance dan Littlefield, Bruce. 1997. *Matlab Bahasa Komputasi Teknik*. Yogyakarta: Andi Offest

Kimball, John W. 1999. *Biologi*. Jilid III. Terjemahan Prof. Dr. Ir. H. Siti Soetarmi Tjitrosomo dan Prof. Dr. Nawangsari Sugiri. Jakarta: Erlangga

Leithold, Louis. 1992. *Kalkulus Dan Ilmu Ukur Analitik* Jilid I. Terjemahan E. Hutahean. Jakarta: Erlangga

Mardalis. 2003. *Metode Penelitian Suatu Pendekatan Proposal*. 2003. Jakarta: PT Bumi Aksara

Masyikhah Ibnu Abi Shaqar._____. *Maktabah Samilah*

Munir, Rinaldi. 2006. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika

Odum, Eugene P. 1998. *Dasar-Dasar Ekologi*. Terjemahan Ir. Tjahjono Samingan, M.Sc. Yogyakarta: Gadjah Mada University Press

Pamuntjak R.J dan Santosa, Widiarti. 1990. *Persamaan Diferensial Biasa*. Bandung: ITB

Ross, Shepley L. 1984. *Differential Equations.* Third Edition. New York: John Wiley&Sons. Inc

Shihab, M. Quraish. 2003. *Tafsir Al-Qur'an* Volume 13. Jakarta: Lentera Hati

Triatmodjo, Bambang. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi Dengan Program Komputer*. Yogyakarta: Beta Offest

www.chemeng.ui.ac.id/~bismo/S1/mater/mod-04.pdf Diakses tanggal 5 Juli 2007

http:/id.wikipedia.org/wiki/Matematika Diakses tanggal 26 September 2007

Lampiran 1. Out Put Program Metode Runge Kutta Fehlberg Bentuk I (orde 4) dengan Matlab

```
=====================================================================
   Program Solusi Numerik Sistem Persamaan Diferensial Lotka Volterra
          Dengan Metode Runge Kutta Fehlberg Bentuk I(orde-4)
                          Siti Nur Urifah
                             03510057
=====================================================================
f(x,y,t) = p*x - q*x.*y
g(x,y,t) = -r*y + s*x.*y
masukkan laju kelahiran mangsa, p = 0.2
masukkan laju kematian pemangsa, q = 0.005
masukkan laju interaksi mangsa dan pemangsa, r = 0.5
masukkan laju interaksi mangsa dan pemangsa, s = 0.01
sistem persamaan diferensial Lotka Volterra yang Anda maksud adalah:
f(x,y,t) = 0.2*x - 0.005*x.*y
g(x,y,t) = -0.5*y + 0.01*x.*y

f =
   Inline function:
   f(t,x,y) = 0.2*x - 0.005*x.*y
g =
   Inline function:
   g(t,x,y) = -0.5*y + 0.01*x.*y

jumlah awal populasi mangsa, x(0) = 60
jumlah awal populasi pemangsa, y(0) =30
masukkan jarak interval, h = 0.5
masukkan batas bawah interval waktu = 0
masukkan batas atas interval waktu = 50
=====================================================================
hasil komputasi
```

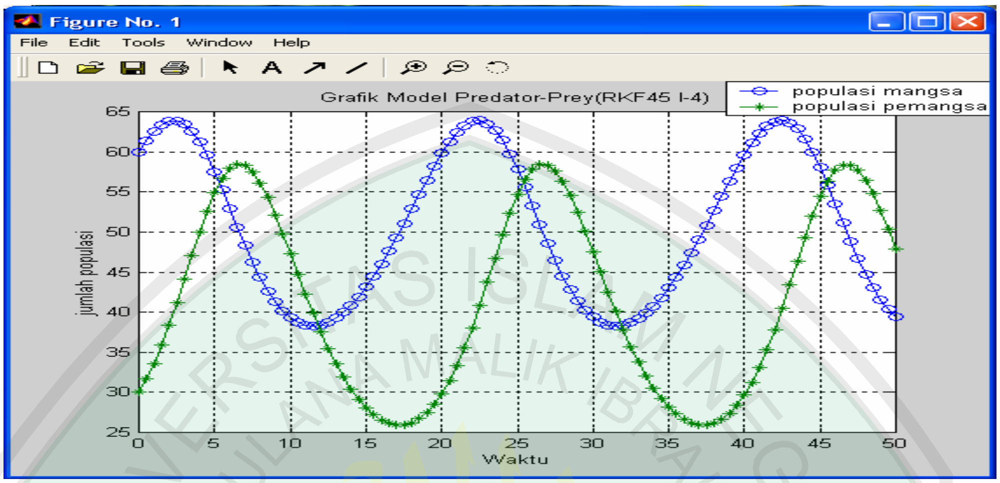
iterasi	t	x	y
1	0.0	60.00000000000000	30.00000000000000
2	0.5	61.39594262120085	31.65127017112750
3	1.0	62.54173459281828	33.60718698445535
4	1.5	63.37430423847975	35.86182620017939
5	2.0	63.83453729876030	38.39249134283914
6	2.5	63.87341031101722	41.15377271258035
7	3.0	63.45896321604774	44.07264169220247
8	3.5	62.58299040406746	47.04640803593656
9	4.0	61.26588613633037	49.94549610520078
10	4.5	59.55803187677112	52.62233993841000
11	5.0	57.53668498018109	54.92613045917214

12	5.5	55.29847808873158	56.72107154255474
13	6.0	52.94896075375891	57.90412798573442
14	6.5	50.59150748586946	58.41792972507567
15	7.0	48.31795295166824	58.25585399508621
16	7.5	46.20252956616627	57.45873473616709
17	8.0	44.29952263026478	56.10499948304196
18	8.5	42.64406017463127	54.29736361584280
19	9.0	41.25493373596478	52.14926273728020
20	9.5	40.13830994257988	49.77334479850988
21	10.0	39.29145754522235	47.27317454038315
22	10.5	38.70596993577978	44.73829666097755
23	11.0	38.37026954157555	42.24217051622037
24	11.5	38.27138428150703	39.84222282442962
25	12.0	38.39609185943481	37.58125709459411
26	12.5	38.73156321889582	35.48958699401582
27	13.0	39.26563182039172	33.58743330595508
28	13.5	39.98679279023123	31.88728679704897
29	14.0	40.88400891125053	30.39606899779277
30	14.5	41.94637564442947	29.11701503396725
31	15.0	43.16267751857066	28.05126168221777
32	15.5	44.52085384640360	27.19915710771734
33	16.0	46.00738259910338	26.56132332564232
34	16.5	47.60658717764594	26.13950373219789
35	17.0	49.29987195426488	25.93721954669771
36	17.5	51.06489964379119	25.96024237199967
37	18.0	52.87473832413855	26.21686559848787
38	18.5	54.69703036363559	26.71792456746316
39	19.0	56.49327186320038	27.47647409655388
40	19.5	58.21834074320217	28.50698412241894
41	20.0	59.82047243329118	29.82386697826745
42	20.5	61.24194571851746	31.43911984687290
43	21.0	62.42078769971042	33.35888408001318
44	21.5	63.29380046592370	35.57883620183949
45	22.0	63.80110262291674	38.07858816700267
46	22.5	63.89211476501698	40.81572128636176
47	23.0	63.53248027939142	43.72067012254183
48	23.5	62.71086555614256	46.69423374305017
49	24.0	61.44411336057070	49.60968980567786
50	24.5	59.77911287914117	52.32093856949642
51	25.0	57.79024345527675	54.67663642094391
52	25.5	55.57234479036795	56.53822209366719
53	26.0	53.23049879482375	57.79796174107499
54	26.5	50.86888135736835	58.39262495056029
55	27.0	48.58108881058848	58.30957658576608
56	27.5	46.44363835229731	57.58442589964649
57	28.0	44.51319624697816	56.29179427778776

58	28.5	42.82704774527033	54.53224237487508
59	29.0	41.40573918527025	52.41859008317940
60	29.5	40.25673630540642	50.06408084599997
61	30.0	39.37818353186864	47.57368017032196
62	30.5	38.76220274549649	45.03875651202371
63	31.0	38.39748651566531	42.53471190572429
64	31.5	38.27115733353206	40.12082440491473
65	32.0	38.36998036557411	37.84153263591896
66	32.5	38.68105946263503	35.72851067495449
67	33.0	39.19214492950272	33.80305219749627
68	33.5	39.89166021610853	32.07844837989178
69	34.0	40.76852768281106	30.56217813756964
70	34.5	41.81184834103399	29.25782575412890
71	35.0	43.01046997841620	28.16670355707233
72	35.5	44.35246305387814	27.28919324791373
73	36.0	45.82451401383790	26.62583597902912
74	36.5	47.41124098962418	26.17820393195195
75	37.0	49.09443732004799	25.94957869298566
76	37.5	50.85225474437764	25.94544601645006
77	38.0	52.65835186934111	26.17379303400077
78	38.5	54.48105668084237	26.64516217678143
79	39.0	56.28262670624758	27.37237573554521
80	39.5	58.01873839984626	28.36979767489029
81	40.0	59.63839708568374	29.65195136648966
82	40.5	61.08452283421049	31.23127857688879
83	41.0	62.29551763061123	33.11483531695369
84	41.5	63.20812150794964	35.29981913112493
85	42.0	63.76177101035233	37.76806478708843
86	42.5	63.90442972038318	40.48007029836027
87	43.0	63.59944227909598	43.36969590990390
88	43.5	62.83242179060847	46.34125809772827
89	44.0	61.61668730373678	49.27100279241399
90	44.5	59.99559968051879	52.01449852663408
91	45.0	58.04055940564334	54.42012636404389
92	45.5	55.84446618371754	56.34682001274894
93	46.0	53.51177394469980	57.68234393155024
94	46.5	51.14732134869514	58.35769428013401
95	47.0	48.84637403724653	58.35418829175004
96	47.5	46.68769553603520	57.70207636129497
97	48.0	44.73034106694457	56.47198519026742
98	48.5	43.01379182707907	54.76212463697613
99	49.0	41.56040170747442	52.68453030486224
100	49.5	40.37898929219131	50.35291806383150
101	50.0	39.46862153379923	47.87357967576552

Waktu Komputasi=24.496

Lampiran 2. Grafik Model Predator Prey (RKF 45 1-4) dengan Matlab



Lampiran 3. Out Put Program Metode Runge Kutta Fehlberg Bentuk I (orde 5) dengan Matlab

==

Program Solusi Numerik Sistem Persamaan Diferensial Lotka Volterra
Dengan Metode Runge Kutta Fehlberg Bentuk I(orde-5)
Siti Nur Urifah
03510057

==

```
f(x,y,t) = p*x - q*x.*y
g(x,y,t) = -r*y + s*x.*y
masukkan laju kelahiran mangsa, p = 0.2
masukkan laju kematian pemangsa, q = 0.005
masukkan laju interaksi mangsa dan pemangsa, r = 0.5
masukkan laju interaksi mangsa dan pemangsa, s = 0.01
sistem persamaan diferensial Lotka Volterra yang dimaksud adalah:
f(x,y,t)=0.2*x - 0.005*x.*y
g(x,y,t)=-0.5*y + 0.01*x.*y

f =
    Inline function:
    f(t,x,y) = 0.2*x - 0.005*x.*y
g =
    Inline function:
    g(t,x,y) = -0.5*y + 0.01*x.*y

jumlah awal populasi mangsa, x(0) = 60
jumlah awal populasi pemangsa, y(0) = 30
masukkan jarak interval, h = 0.5
masukkan batas bawah interval waktu = 0
masukkan batas atas interval waktu = 50
```

==

hasil komputasi

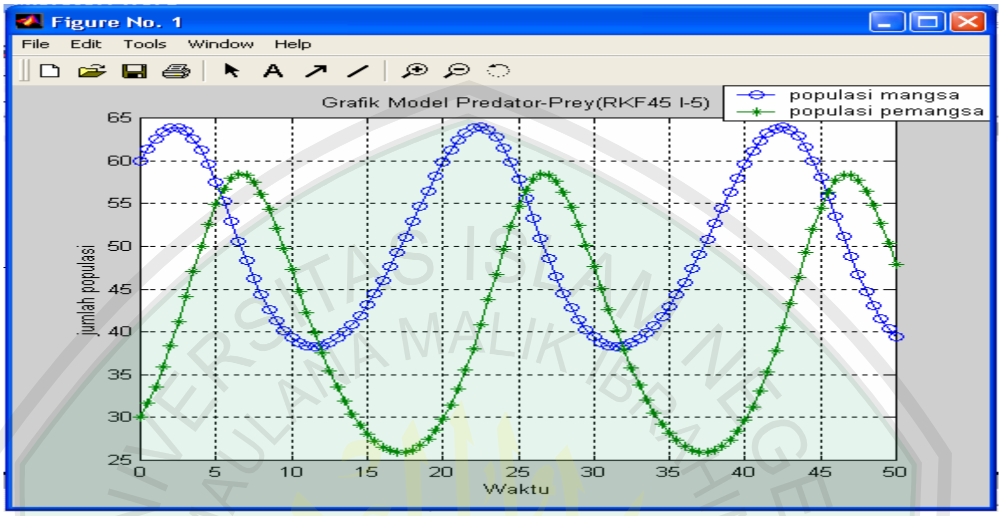
iterasi	t	x	y
1	0.0	60.00000000000000	30.00000000000000
2	0.5	61.39585965264498	31.65115834942643
3	1.0	62.54160314717490	33.60692447384130
4	1.5	63.37417061668150	35.86137620326483
5	2.0	63.83445809934288	38.39182401028515
6	2.5	63.87344886816323	41.15287188623552
7	3.0	63.45918379738734	44.07151287994910
8	3.5	62.58345054236090	47.04508610076824
9	4.0	61.26662820235352	49.94405032039968
10	4.5	59.55907563766716	52.62087379723120
11	5.0	57.53802306400532	54.92477443069385

12	5.5	55.30007573483574	56.71996890723958
13	6.0	52.95076005287455	57.90341631495625
14	6.5	50.59343497632058	58.41772232315110
15	7.0	48.31992855371335	58.25622574195396
16	7.5	46.20447476823247	57.45971519333225
17	8.0	44.30136648875231	56.10657372202279
18	8.5	42.64574262411377	54.29947914643401
19	9.0	41.25640649206433	52.15183986809799
20	9.5	40.13953569813369	49.77628779254309
21	10.0	39.29240822934378	47.27638162777723
22	10.5	38.70662466297509	44.74166785969420
23	11.0	38.37061266596686	42.24561296406473
24	11.5	38.27140377938574	39.84565381721549
25	12.0	38.39577812739720	37.58460526592317
26	12.5	38.73090829567721	35.49279213233126
27	13.0	39.26462900466006	33.59044526037685
28	13.5	39.98543661833859	31.89006383378402
29	14.0	40.88229546570005	30.39857587065059
30	14.5	41.94430317712764	29.11922094512786
31	15.0	43.16024738759369	28.05313824092556
32	15.5	44.51807177776347	27.20067634693514
33	16.0	46.00426029335340	26.56245580944893
34	16.5	47.60314428235162	26.14021677937212
35	17.0	49.29613841351146	25.93747560937663
36	17.5	51.06091840932169	25.95999764544079
37	18.0	52.87056836144316	26.21606900377099
38	18.5	54.69274980017692	26.71651734940106
39	19.0	56.48898099399431	27.47439041807592
40	19.5	58.21416442339420	28.50415320966182
41	20.0	59.81656115185629	29.82021755280618
42	20.5	61.23847439103162	31.43458771066661
43	21.0	62.41795101517785	33.35342367566655
44	21.5	63.29180360807796	35.57243657266965
45	22.0	63.80014655224608	38.07129277508373
46	22.5	63.89237618681978	40.80764948325044
47	23.0	63.53408799599431	43.71203587296782
48	23.5	62.71387684816762	46.68535517161948
49	24.0	61.44849565967071	49.60098252736623
50	24.5	59.78473628134796	52.31288793047816
51	25.0	57.79688781060184	54.66974916174130
52	25.5	55.57972134892874	56.53296511980076
53	26.0	53.23828205725673	57.79470146160023
54	26.5	50.87674383229269	58.39158179489812
55	27.0	48.58873117143142	58.31080483965958
56	27.5	46.45080987088810	57.58782102458306
57	28.0	44.51970394809295	56.29712219856563

58	28.5	42.83275581836535	54.53918086324554
59	29.0	41.41056184866859	52.42677209264836
60	29.5	40.26062751754788	50.07313225717951
61	30.0	39.38112622516445	47.58324800406415
62	30.5	38.76419924154433	45.04852680125998
63	31.0	38.39855088140297	42.54441844139823
64	31.5	38.27130982202765	40.13025048939861
65	32.0	38.36924374976605	37.85050810124338
66	32.5	38.67945694092483	35.73690611045015
67	33.0	39.18969927596040	33.81077185656199
68	33.5	39.88839390153633	32.08542276366983
69	34.0	40.76446376601605	30.56835686143609
70	34.5	41.80701200100015	29.26317101285266
71	35.0	43.00489061795020	28.17118430994831
72	35.5	44.34617694997169	27.29278012960840
73	36.0	45.81756751763621	26.62849688847513
74	36.5	47.40369428707204	26.17990024796074
75	37.0	49.08636874824530	25.95026210500060
76	37.5	50.84376561019816	25.94505604196639
77	38.0	52.64957162370461	26.17225542574562
78	38.5	54.47214814840386	26.64238861029868
79	39.0	56.27379083965333	27.36826541531893
80	39.5	58.01021771000772	28.36424179332681
81	40.0	59.63047650543536	29.64484164856684
82	40.5	61.07752635756285	31.22252133361673
83	41.0	62.28979876496335	33.10437230763875
84	41.5	63.20404561578941	35.28765578869383
85	42.0	63.75968832541705	37.75430464142443
86	42.5	63.90463951886544	40.46495154416261
87	43.0	63.60215145019118	43.35362232599096
88	43.5	62.83770440501162	46.32481315605130
89	44.0	61.62445448153014	49.25493496464364
90	44.5	60.00558936512655	51.99966980425968
91	45.0	58.05235224332332	54.40742554734478
92	45.5	55.85752692969182	56.33705481990075
93	46.0	53.52551014551953	57.67613583375790
94	46.5	51.16114599661800	58.35540158110396
95	47.0	48.85975880617379	58.35587471973052
96	47.5	46.70020573879392	57.70752818157956
97	48.0	44.74164999760703	56.48076634601648
98	48.5	43.02367767449260	54.77365199107750
99	49.0	41.56873307123290	52.69815092048123
100	49.5	40.38570552493547	50.36797537323285
101	50.0	39.47371270514351	47.88946193738940

Waktu Komputasi=47.989

Lampiran 4. Garfik Model Predator Prey (RKF 45 1-5) dengan Matlab



Lampiran 5. Out Put Program Metode Runge Kutta Fehlberg Bentuk II (orde 4) dengan Matlab

```
=================================================================
     Program Solusi Numerik Sistem Persamaan Diferensial Lotka Volterra
           Dengan Metode Runge Kutta Fehlberg Bentuk II(orde-4)
                              Siti Nur Urifah
                                 03510057
=================================================================
f(x,y,t) = p*x - q*x.*y
g(x,y,t) = -r*y + s*x.*y
masukkan laju kelahiran mangsa, p = 0.2
masukkan laju kematian pemangsa, q = 0.005
masukkan laju interaksi mangsa dan pemangsa, r = 0.5
masukkan laju interaksi mangsa dan pemangsa, s = 0.01
sistem persamaan diferensial Lotka Volterra yang dimaksud adalah:
f(x,y,t) = 0.2*x - 0.005*x.*y
g(x,y,t) = -0.5*y + 0.01*x.*y

f =
   Inline function:
   f(t,x,y) = 0.2*x - 0.005*x.*y
g =
   Inline function:
   g(t,x,y) = -0.5*y + 0.01*x.*y

jumlah awal populasi mangsa, x(0) = 60
jumlah awal populasi pemangsa, y(0) = 30
masukkan jarak interval waktu, h = 0.5
masukkan batas bawah interval waktu = 0
masukkan batas atas interval waktu = 50
=================================================================
hasil komputasi
```

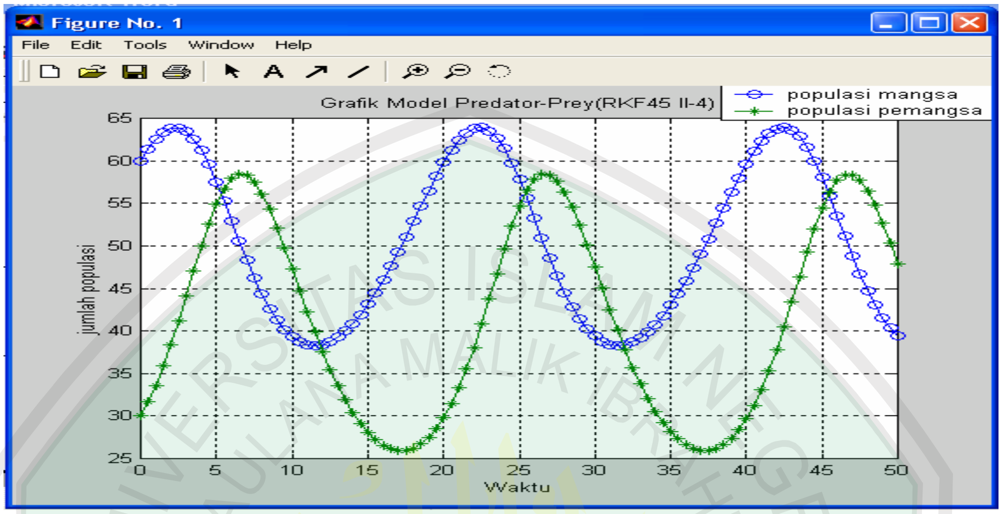
iterasi	t	x	y
1	0.0	60.00000000000000	30.00000000000000
2	0.5	61.39594122098970	31.65127016849083
3	1.0	62.54173138219745	33.60718646578879
4	1.5	63.37429888092446	35.86182441450109
5	2.0	63.83452966088468	38.39248726349699
6	2.5	63.87340063592631	41.15376505364009
7	3.0	63.45895230463187	44.07262903005849
8	3.5	62.58297972882060	47.04638908240052
9	4.0	61.26587778821851	49.94547013356994
10	4.5	59.55802827329082	52.62230727212254
11	5.0	57.53668835961873	54.92609283056196
12	5.5	55.29848994314367	56.72103210024279

13	6.0	52.94898142207526	57.90409084208895
14	6.5	50.59153607133052	58.41789915470376
15	7.0	48.31798757326629	58.25583357681524
16	7.5	46.20256780880757	57.45872674337795
17	8.0	44.29956201010334	56.10500467664843
18	8.5	42.64409848556539	54.29738140363360
19	9.0	41.25496923084938	52.14929154833359
20	9.5	40.13834137146725	49.77338251011623
21	10.0	39.29148410240034	47.27321884688632
22	10.5	38.70599116601457	44.73834533744475
23	11.0	38.37028524078207	42.24222157560550
24	11.5	38.27139441068415	39.84227458935798
25	12.0	38.39609647868090	37.58130821036696
26	12.5	38.73156244142619	35.48963640614214
27	13.0	39.26562578345287	33.58748021936622
28	13.5	39.98678163908495	31.88733062821398
29	14.0	40.88399279278887	30.39610932634627
30	14.5	41.94635470775473	29.11705155729713
31	15.0	43.16265192066525	28.05129417446354
32	15.5	44.52082376166783	27.19918538346168
33	16.0	46.00734823201105	26.56134720795684
34	16.5	47.60654877805541	26.13952302443607
35	17.0	49.29982983503496	25.93723400739669
36	17.5	51.06485420029244	25.96025169240603
37	18.0	52.87469005502475	26.21686938255552
38	18.5	54.69697989186875	26.71792231471542
39	19.0	56.49321995587285	27.47646518901825
40	19.5	58.21828832833364	28.50696781800713
41	20.0	59.82042061178122	29.82384241456490
42	20.5	61.24189577017138	31.43908606138936
43	21.0	62.42074108391485	33.35884005558258
44	21.5	63.29375881955092	35.57878094903143
45	22.0	63.80106775821866	38.07852085876682
46	22.5	63.89208866464092	40.81564146205503
47	23.0	63.53246507053615	43.72057797425754
48	23.5	62.71086342391610	46.69413047737967
49	24.0	61.44412634786949	49.60957802789874
50	24.5	59.77914254385286	52.32082256660679
51	25.0	57.79029043014623	54.67652216013750
52	25.5	55.57240838648843	56.53811677181192
53	26.0	53.23057683226109	57.79787286693627
54	26.5	50.86897033837546	58.39255916708225
55	27.0	48.58118440022446	58.30953859939025
56	27.5	46.44373599909223	57.58441785367257
57	28.0	44.51329174493972	56.29181570632732
58	28.5	42.82713760542077	54.53229064326560

59	29.0	41.40582078590833	52.41866108919129
60	29.5	40.25680786528177	50.06416975357251
61	30.0	39.37824397890859	47.57378202344403
62	30.5	38.76225154690902	45.03886666593528
63	31.0	38.39752351350002	42.53482627790935
64	31.5	38.27118260796256	40.12093958134538
65	32.0	38.36999413262544	37.84164587656460
66	32.5	38.68106200441668	35.72861985782466
67	33.0	39.19213655143114	33.80315573089689
68	33.5	39.89164122501921	32.07854510287081
69	34.0	40.76849838069024	30.56226722065866
70	34.5	41.81180903038990	29.25790660684015
71	35.0	43.01042097657599	28.16677574490263
72	35.5	44.35240471453728	27.28925641936605
73	36.0	45.82444675494400	26.62588980196128
74	36.5	47.41116532713598	26.17824803808112
75	37.0	49.09435390726670	25.94961262942291
76	37.5	50.85216441637367	25.94546920362384
77	38.0	52.65825569144205	26.17380473025363
78	38.5	54.48095599914598	26.64516145135712
79	39.0	56.28252319664159	27.37236145372162
80	39.5	58.01863411012256	28.36976850172044
81	40.0	59.63829446329589	29.65190579891156
82	40.5	61.08442473058847	31.23121501747828
83	41.0	62.29542727248852	33.11475220545996
84	41.5	63.20804242748508	35.29971515065817
85	42.0	63.76170692860461	37.76793915825775
86	42.5	63.90438438087829	40.47992316395555
87	43.0	63.59941922679929	43.36952879131124
88	43.5	62.83242408651775	46.34107436821955
89	44.0	61.61671716548171	49.27080806062134
90	44.5	59.99565806278908	52.01430076718184
91	45.0	58.04064559152049	54.41993560791853
92	45.5	55.84457752504001	56.34664747440584
93	46.0	53.51190590552565	57.68220063328971
94	46.5	51.14746792351924	58.35758947504854
95	47.0	48.84652846416705	58.35412813443507
96	47.5	46.68785110173537	57.70206320968043
97	48.0	44.73049178398963	56.47201767206065
98	48.5	43.01393284857245	54.76219833846297
99	49.0	41.56052946044589	52.68463878462272
100	49.5	40.37910139459379	50.35305389427681
101	50.0	39.46871658914546	47.87373531259235

Waktu Komputasi=19.068

Lampiran 6. Model Predator Prey (RKF 45 II-4) dengan Matlab



Lampiran 7. Out Put Program Metode Runge Kutta Fehlber Bentuk II (orde 5) dengan Matlab

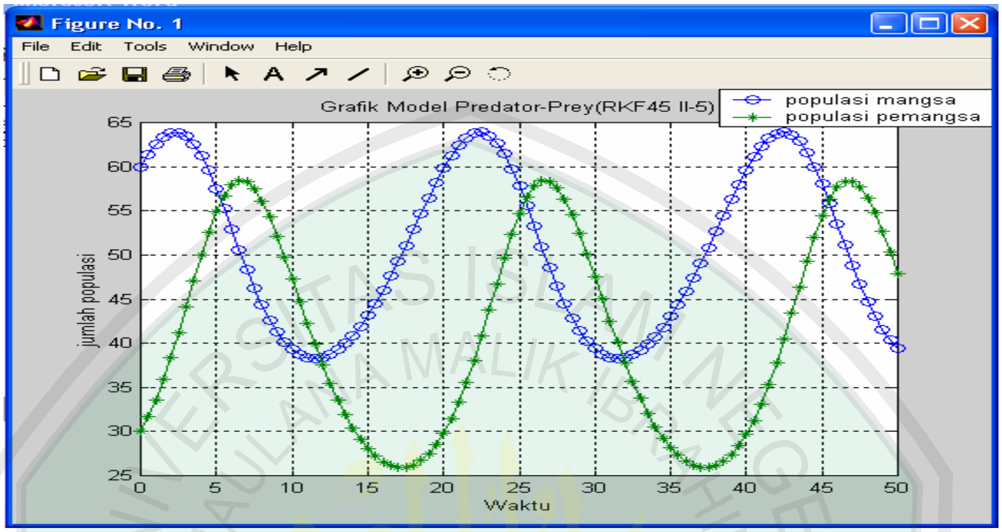
```
=====================================================================
   Program Solusi Numerik Sistem Persamaan Diferensial Lotka Volterra
        Dengan Metode Runge Kutta Fehlberg  Bentuk II(orde-5)
                          Siti Nur Urifah
                             03510057
=====================================================================
f(x,y,t) = p*x - q*x.*y
g(x,y,t) = -r*y + s*x.*y
masukkan laju kelahiran mangsa, p = 0.2
masukkan laju kematian pemangsa, q = 0.005
masukkan laju interaksi mangsa dan pemangsa, r = 0.5
masukkan laju interaksi mangsa dan pemangsa, s = 0.01
sistem persamaan diferensial Lotka Volterra yang dimaksud adalah:
f(x,y,t) = 0.2*x - 0.005*x.*y
g(x,y,t) = -0.5*y + 0.01*x.*y

f =
   Inline function:
   f(t,x,y) = 0.2*x - 0.005*x.*y
g =
   Inline function:
   g(t,x,y) = -0.5*y + 0.01*x.*y

jumlah awal populasi mangsa, x(0) = 60
jumlah awal populasi pemangsa, y(0) = 30
masukkan jarak interval, h = 0.5
masukkan batas bawah interval waktu = 0
masukkan batas atas interval waktu = 50
=====================================================================
hasil komputasi
 iterasi    t            x                    y
     1     0.0    60.00000000000000    30.00000000000000
     2     0.5    61.39594149184025    31.65127019546588
     3     1.0    62.54173190847032    33.60718659144569
     4     1.5    63.37429961433087    35.86182472963379
     5     2.0    63.83453051723088    38.39248787706483
     6     2.5    63.87340149788864    41.15376608663370
     7     3.0    63.45895303059570    44.07263060258897
     8     3.5    62.58298016552321    47.04639129332345
     9     4.0    61.26587778370968    49.94547303302104
    10     4.5    59.55802768848754    52.62231082921066
    11     5.0    57.53668708029797    54.92609690259267
```

12	5.5	55.29848789536616	56.72103641581343
13	6.0	52.94897859002347	57.90409501303227
14	6.5	50.59153251059806	58.41790272451458
15	7.0	48.31798341128592	58.25583609658795
16	7.5	46.20256322960489	57.45872785127615
17	8.0	44.29955722833221	56.10500415486579
18	8.5	42.64409371882226	54.29737919844097
19	9.0	41.25496467786762	52.14928775492186
20	9.5	40.13833719951172	49.77337733486868
21	10.0	39.29148044327034	47.27321256214471
22	10.5	38.70598811806448	44.73833824022801
23	11.0	38.37028287411236	42.24221395621909
24	11.5	38.27139277331059	39.84226671123078
25	12.0	38.39609560234473	37.58130029973506
26	12.5	38.73156234640279	35.48962864913512
27	13.0	39.26562648216146	33.58747276401982
28	13.5	39.98678313853463	31.88732358937566
29	14.0	40.88399509598786	30.39610279200177
30	14.5	41.94635781422115	29.11704559535246
31	15.0	43.16265582614963	28.05128883940732
32	15.5	44.52082845715309	27.19918072260538
33	16.0	46.00735370200676	26.56134326712385
34	16.5	47.60655499815590	26.13951985306692
35	17.0	49.29983676866888	25.93723166307521
36	17.5	51.06486179456076	25.96025024479978
37	18.0	52.87469823551781	26.21686891670505
38	18.5	54.69698855639492	26.71792293349396
39	19.0	56.49322896716510	27.47646701439858
40	19.5	58.21829750609120	28.50697099049276
41	20.0	59.82042972493063	29.82384708975137
42	20.5	61.24190453104701	31.43909240214561
43	21.0	62.42074914709780	33.35884821791562
44	21.5	63.29376578903363	35.57879105965012
45	22.0	63.80107320666026	38.07853298323242
46	22.5	63.89209216676720	40.81565556474583
47	23.0	63.53246624863416	43.72059387517788
48	23.5	62.71086199779400	46.69414781492132
49	24.0	61.44412217756215	49.60959623879067
50	24.5	59.77913565422852	52.32084089281976
51	25.0	57.79028101290234	54.67653968816705
52	25.5	55.57239678255929	56.53813250473841
53	26.0	53.23056350100097	57.79788582422358
54	26.5	50.86895581840544	58.39256849922928
55	27.0	48.58116926497953	58.30954369520960
56	27.5	46.44372081122922	57.58441841387734
57	28.0	44.51327701616077	56.29181176458022

58	28.5	42.82712376826299	54.53228253269158
59	29.0	41.40580818073110	52.41864936902515
60	29.5	40.25679674125868	50.06415511877026
61	30.0	39.37823450481842	47.57376521830620
62	30.5	38.76224382677927	45.03884841515564
63	31.0	38.39751760306096	42.53480724003410
64	31.5	38.27117852937343	40.12092032347292
65	32.0	38.36999188629550	37.84162686595548
66	32.5	38.68106157766943	35.72860146528100
67	33.0	39.19213792425561	33.80313824131060
68	33.5	39.89164437333919	32.07852872941290
69	34.0	40.76850327758875	30.56225212019700
70	34.5	41.81181564564668	29.25789289510413
71	35.0	43.01042927476665	28.16676351059906
72	35.5	44.35241465183396	27.28924573690893
73	36.0	45.82445827466317	26.62588074275151
74	36.5	47.41117835400574	26.17824068040428
75	37.0	49.09436834034094	25.94960706705501
76	37.5	50.85218012051458	25.94546555316255
77	38.0	52.65827248734763	26.17380313702704
78	38.5	54.48097365205189	26.64516209349020
79	39.0	56.28254140413400	27.37236454354069
80	39.5	58.01865249003669	28.36977428312770
81	40.0	59.63831254352124	29.65191453867756
82	40.5	61.08444194377984	31.23122698768003
83	41.0	62.29544296004743	33.11476765382164
84	41.5	63.20805585824484	35.29973425589748
85	42.0	63.76171733746578	37.76796196955599
86	42.5	63.90439102991929	40.47994952816488
87	43.0	63.59942148529645	43.36955827843867
88	43.5	62.83242151783327	46.34110621314330
89	44.0	61.61670960164460	49.27084114294436
90	44.5	59.99564564689904	52.01433364766764
91	45.0	58.04062877618066	54.41996662852275
92	45.5	55.84455702810980	56.34667491340709
93	46.0	53.51188263510659	57.68222289256080
94	46.5	51.14744288788463	58.35760526612233
95	47.0	48.84650268116357	58.35413662596994
96	47.5	46.68782551979532	57.70206410483782
97	48.0	44.73046722414193	56.47201120167107
98	48.5	43.01390997251392	54.76218517903705
99	49.0	41.56050876401957	52.68461992869552
100	49.5	40.37908322104069	50.35303050678679
101	50.0	39.46870115413599	47.87370860131695

Waktu Komputasi=20.079

Lampiran 8. Grafik Model Predator Prey (RKF 45 II-5) dengan Matlab



Lampiran 9. Out put Program Metode Heun dengan Matlab

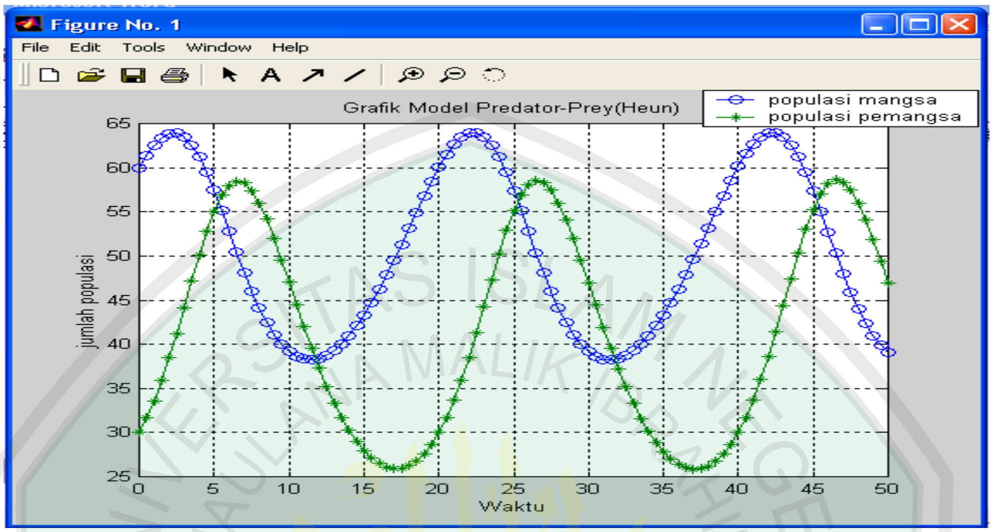
```
=================================================================
     Program Solusi Numerik Sistem Persamaan Diferensial Lotka Volterra
                          Dengan Metode Heun
                             Siti Nur Urifah
                               03510057
=================================================================
f(x,y,t) = p*x - q*x.*y
g(x,y,t) = -r*y + s*x.*y
masukkan laju kelahiran mangsa, p = 0.2
masukkan laju kematian pemangsa, q = 0.005
masukkan laju interaksi mangsa dan pemangsa, r = 0.5
masukkan laju interaksi mangsa dan pemangsa, s = 0.01
sistem persamaan diferensial Lotka Volterra yang dimaksud adalah:
f(x,y,t) = 0.2*x - 0.005*x.*y
g(x,y,t) = -0.5*y + 0.01*x.*y

f =
   Inline function:
   f(t,x,y) = 0.2*x - 0.005*x.*y
g =
   Inline function:
   g(t,x,y) = -0.5*y + 0.01*x.*y

jumlah awal populasi mangsa, x(0) = 60
jumlah awal populasi pemangsa, y(0) = 30
masukkan jarak interval, h = 0.5
masukkan batas bawah interval waktu = 0
masukkan batas atas interval waktu = 50
=================================================================
hasil komputasi
 iterasi   t           x                     y
    1     0.0   60.00000000000000   30.00000000000000
    2     0.5   61.40343750000000   31.65562500000000
    3     1.0   62.55630657812916   33.61914708268212
    4     1.5   63.39449562917936   35.88520147482759
    5     2.0   63.85758308040396   38.43142411484536
    6     2.5   63.89510160102814   41.21223486933643
    7     3.0   63.47376455339973   44.15360148073284
    8     3.5   62.58451614689891   47.15071763453702
    9     4.0   61.24775699699803   50.07072309963811
   10     4.5   59.51498764075836   52.76194055750440
   11     5.0   57.46568028359108   55.06941771928463
   12     5.5   55.19942588582149   56.85425789023197
```

13	6.0	52.82487631842585	58.01233545219044
14	6.5	50.44801764412109	58.48764580794837
15	7.0	48.16235852726416	58.27711266221678
16	7.5	46.04272724257182	57.42643433274200
17	8.0	44.14306709433119	56.01913389394210
18	8.5	42.49752759928726	54.16232209674891
19	9.0	41.12361466428818	51.97257662305401
20	9.5	40.02616958698547	49.56428703347980
21	10.0	39.20126740875352	47.04151422615935
22	10.5	38.63952108187684	44.49336569259778
23	11.0	38.32860255470053	41.99227637991634
24	11.5	38.25499762358340	39.59436520776468
25	12.0	38.40511111579927	37.34107328152290
26	12.5	38.76586695585036	35.26144809541535
27	13.0	39.32493671405348	33.37462583902026
28	13.5	40.07070338115348	31.69223164463297
29	14.0	40.99203758677645	30.22054650916177
30	14.5	42.07793750213028	28.96237846670110
31	15.0	43.31706337473148	27.91863080019967
32	15.5	44.69718323267091	27.08958994322627
33	16.0	46.20453734756888	26.47596757249396
34	16.5	47.82312525228103	26.07973059612429
35	17.0	49.53392066253228	25.90474256570995
36	17.5	51.31402743343745	25.95722189662829
37	18.0	53.13580532892890	26.24599617984282
38	18.5	54.96602016761602	26.78249708148659
39	19.0	56.76511126934704	27.58039651126863
40	19.5	58.48672151047665	28.65473391651926
41	20.0	60.07769987347109	30.02033440127616
42	20.5	61.47885420505233	31.68928600103498
43	21.0	62.62678168193255	33.66726574792926
44	21.5	63.45709772591924	35.94862999170691
45	22.0	63.90926556156961	38.51047577147875
46	22.5	63.93294072104317	41.30637545034116
47	23.0	63.49526518238290	44.26114115288431
48	23.5	62.58794541630623	47.26858546321451
49	24.0	61.23243912208012	50.19442532799491
50	24.5	59.48148083453985	52.88578737169468
51	25.0	57.41577254342889	55.18703961213886
52	25.5	55.13593256863570	56.95933618118865
53	26.0	52.75128244408448	58.09938462608432
54	26.5	50.36805370530975	58.55265611272727
55	27.0	48.07960860616004	58.31790865276757
56	27.5	45.96034177530074	57.44270315907636
57	28.0	44.06360807054639	56.01217553937301
58	28.5	42.42293387344957	54.13463199776615

59	29.0	41.05525252451357	51.92737888523455
60	29.5	39.96492943355447	49.50510876971981
61	30.0	39.14767466603924	46.97185128616100
62	30.5	38.59384072737365	44.41645446597703
63	31.0	38.29092689288850	41.91096290009558
64	31.5	38.22531414528540	39.51105149404661
65	32.0	38.38335141262459	37.25771835443129
66	32.5	38.75193947936426	35.17960354319439
67	33.0	39.31874656493454	33.29549025365940
68	33.5	40.07216197513780	31.61671289374211
69	34.0	41.00106441354721	30.14932480102161
70	34.5	42.09445551300310	28.89596622156358
71	35.0	43.34098891836439	27.85742748856312
72	35.5	44.72841094808207	27.03393143979465
73	36.0	46.24292003391800	26.42617036915621
74	36.5	47.86844847547551	26.03613155212540
75	37.0	49.58587175454708	25.86773482781403
76	37.5	51.37215864371779	25.92728721530964
77	38.0	53.19949128896624	26.22373303862164
78	38.5	55.03441066449375	26.76864275586775
79	39.0	56.83708176460298	27.57583927378405
80	39.5	58.56082606414108	28.66050905154404
81	40.0	60.15213423349404	30.03759463148993
82	40.5	61.55144063762408	31.71923394034110
83	41.0	62.69499095742723	33.71103443335516
84	41.5	63.51812599703527	36.00709979880823
85	42.0	63.96018212142938	38.58402536432566
86	42.5	63.97091367010170	41.39458383591484
87	43.0	63.51785367980440	44.36248729276946
88	43.5	62.59342095913664	47.38022418192808
89	44.0	61.22007206473189	50.31213730467153
90	44.5	59.45171593973716	53.00418606527544
91	45.0	57.37023207119186	55.30005736105834
92	45.5	55.07722939511410	57.06091891662277
93	46.0	52.68268329882815	58.18424061357391
94	46.5	50.29307683167576	58.61687522533904
95	47.0	48.00165014537019	58.35931314388606
96	47.5	45.88240023998585	57.46088431923259
97	48.0	43.98813395663475	56.00826461058096
98	48.5	42.35179326657089	54.11090957246461
99	49.0	40.98977201701154	51.88683488986734
100	49.5	39.90598542808115	49.45103921792457
101	50.0	39.09579689103305	46.90754000886709

Waktu Komputasi=22.172

Lampiran 10. Garfik Model Predator Prey (Heun) dengan Matlab



Lampiran 11. Program Matlab untuk Metode Runge Kutta Fehlberg Bentuk I(orde-4)

```
clc;clear;format long;
disp('===========================================================')
disp('Program Solusi Numerik Sistem Persamaan Diferensial Lotka
      Volterra')
disp('      Dengan Metode Runge Kutta Fehlberg Bentuk I(orde-4) ')
disp('                     Siti Nur Urifah                      ')
disp('                        03510057                          ')
disp('===========================================================')
tic;
disp('f(x,y,t)=p*x-q*x.*y')
disp('g(x,y,t)=-r*y+s*x.*y')
p=input('masukkan laju kelahiran mangsa, p =');
q=input('masukkan laju kematian pemangsa, q =');
r=input('masukkan laju interaksi mangsa dan pemangsa, r =');
s=input('masukkan laju interaksi mangsa dan pemangsa, s =');
disp ('sistem persamaan diferensial Lotka Volterra yang Anda
       maksud adalah:')
disp (['f(x,y,t)=',num2str(p),'*x',num2str(-q),'*x.*y'])
disp (['g(x,y,t)=',num2str(-r),'*y+',num2str(s),'*x.*y'])

f=inline ([num2str(p),'*x',num2str(-q),'*x.*y'],'t','x','y')
g=inline ([num2str(-r),'*y+',num2str(s),'*x.*y'],'t','x','y')
x0=input('jumlah awal populasi mangsa, x(0)=');
y0=input('jumlah awal populasi pemangsa, y(0)=');

h=input('masukkan jarak interval, h =');
a=input('masukkan batas bawah interval waktu =');
b=input('masukkan batas atas interval waktu =');
n=(b-a)/h;
x=zeros(n,1);x(1)=x0;
y=zeros(n,1);y(1)=y0;
t=[0:h:n*h];

for i = 1:n
   k1=h*f(t(i),x(i),y(i));
   m1=h*g(t(i),x(i),y(i));
   k2=h*f(t(i)+(h/4),x(i)+(k1/4),y(i)+(m1/4));
   m2=h*g(t(i)+(h/4),x(i)+(k1/4),y(i)+(m1/4));
   k3=h*f(t(i)+(3*h/8),x(i)+(3*k1/32)+(9*k2/32),y(i)+(3*m1/32)
      +(9*m2/32));
   m3=h*g(t(i)+(3*h/8),x(i)+(3*k1/32)+(9*k2/32),y(i)+(3*m1/32)
      +(9*m2/32));
   k4=h*f(t(i)+(12*h/13),x(i)+(1932*k1/2197)
      -(7200*k2/2197)+(7296*k3/2197),y(i)+(1932*m1/2197)
      -(7200*m2/2197)+(7296*m3/2197));
   m4=h*g(t(i)+(12*h/13),x(i)+(1932*k1/2197)
      -(7200*k2/2197)+(7296*k3/2197),y(i)+(1932*m1/2197)
      -(7200*m2/2197)+(7296*m3/2197));;
   k5=h*f(t(i)+h,x(i)+(439*k1/216)-(8*k2)+(3680*k3/513)
      -(845*k4/4104),y(i)+(439*m1/216)-(8*m2)+(3680*m3/513)
      -(845*m4/4104));
```

```
   m5=h*g(t(i)+h,x(i)+(439*k1/216)-(8*k2)+(3680*k3/513)
      -(845*k4/4104),y(i)+(439*m1/216)-(8*m2)+(3680*m3/513)
      -(845*m4/4104));
   k6=h*f(t(i)+(1*h/2),x(i)-(8*k1/27)+(2*k2)
      -(3544*k3/2565)+(1859*k4/4104)-(11*k5/40),
      y(i)-(8*m1/27)+(2*m2)-(3544*m3/2565)+(1859*m4/4104)
      -(11*m5/40));
   m6=h*g(t(i)+(1*h/2),x(i)-(8*k1/27)+(2*k2)
      -(3544*k3/2565)+(1859*k4/4104)-(11*k5/40),
      y(i)-(8*m1/27)+(2*m2)-(3544*m3/2565)+(1859*m4/4104)
      -(11*m5/40));
   x(i+1)=x(i)+(25*k1/216)+(1408*k3/2565)+(2197*k4/4104)-(1*k5/5);
   y(i+1)=y(i)+(25*m1/216)+(1408*m3/2565)+(2197*m4/4104)-(1*m5/5);

end
disp('hasil komputasi')
disp('  iterasi      t            x                    y')
A=[[1:i+1]' t' x y];
for i=1:n+1
   fprintf('%8.0f%      8.2f%        8.14f ...
            %8.14f \n',A(i,1),A(i,2),A(i,3),A(i,4))
end
disp(['Waktu Komputasi=',num2str(toc)])
plot(t',x,'-o',t',y,'-*')
grid on
title('Grafik Model Predator-Prey(RKF45 I-4)')
legend('populasi mangsa','populasi pemangsa')
xlabel('Waktu')
ylabel('jumlah populasi')
```

Lampiran 12. Program Matlab untuk Metode Runge Kutta Fehlberg Bentuk I(orde 5)

```
clc;clear;format long;
disp('============================================================')
disp('Program Solusi Numerik Sistem Persamaan Diferensial Lotka
      Volterra')
disp('      Dengan Metode Runge Kutta Fehlberg Bentuk I(orde-5) ')
disp('                      Siti Nur Urifah                       ')
disp('                           03510057                         ')
disp('============================================================')
tic;
disp('f(x,y,t)=p*x-q*x.*y')
disp('g(x,y,t)=-r*y+s*x.*y')
p=input('masukkan laju kelahiran mangsa, p =');
q=input('masukkan laju kematian pemangsa, q =');
r=input('masukkan laju interaksi mangsa dan pemangsa, r =');
s=input('masukkan laju interaksi mangsa dan pemangsa, s =');
disp ('sistem persamaan diferensial Lotka Volterra yang dimaksud
adalah:')
disp (['f(x,y,t)=',num2str(p),'*x',num2str(-q),'*x.*y'])
disp (['g(x,y,t)=',num2str(-r),'*y+',num2str(s),'*x.*y'])

f=inline ([num2str(p),'*x',num2str(-q),'*x.*y'],'t','x','y')
g=inline ([num2str(-r),'*y+',num2str(s),'*x.*y'],'t','x','y')

x0=input('jumlah awal populasi mangsa, x(0)=');
y0=input('jumlah awal populasi pemangsa, y(0)=');
h=input('masukkan jarak interval, h =');
a=input('masukkan batas bawah interval waktu =');
b=input('masukkan batas atas interval waktu=');
n=(b-a)/h;
x=zeros(n,1);x(1)=x0;
y=zeros(n,1);y(1)=y0;
t=[0:h:n*h];

for i = 1:n
   k1=h*f(t(i),x(i),y(i));
   m1=h*g(t(i),x(i),y(i));
   k2=h*f(t(i)+(h/4),x(i)+(k1/4),y(i)+(m1/4));
   m2=h*g(t(i)+(h/4),x(i)+(k1/4),y(i)+(m1/4));
   k3=h*f(t(i)+(3*h/8),x(i)+(3*k1/32)+(9*k2/32),
   y(i)+(3*m1/32)+(9*m2/32));
   m3=h*g(t(i)+(3*h/8),x(i)+(3*k1/32)+(9*k2/32),
      y(i)+(3*m1/32)+(9*m2/32));
   k4=h*f(t(i)+(12*h/13),x(i)+(1932*k1/2197)
      -(7200*k2/2197)+(7296*k3/2197),y(i)+(1932*m1/2197)
      -(7200*m2/2197)+(7296*m3/2197));
   m4=h*g(t(i)+(12*h/13),x(i)+(1932*k1/2197)
      -(7200*k2/2197)+(7296*k3/2197),y(i)+(1932*m1/2197)
      -(7200*m2/2197)+(7296*m3/2197));;
   k5=h*f(t(i)+h,x(i)+(439*k1/216)-(8*k2)+(3680*k3/513)
      -(845*k4/4104),y(i)+(439*m1/216)-(8*m2)+(3680*m3/513)
      -(845*m4/4104));
```

```
   m5=h*g(t(i)+h,x(i)+(439*k1/216)-(8*k2)+(3680*k3/513)
      -(845*k4/4104),y(i)+(439*m1/216)-(8*m2)+(3680*m3/513)
      -(845*m4/4104));
   k6=h*f(t(i)+(1*h/2),x(i)-(8*k1/27)+(2*k2)
      -(3544*k3/2565)+(1859*k4/4104)-(11*k5/40),y(i)-
      (8*m1/27)+(2*m2)-(3544*m3/2565)+(1859*m4/4104)-(11*m5/40));
   m6=h*g(t(i)+(1*h/2),x(i)-(8*k1/27)+(2*k2)
      -(3544*k3/2565)+(1859*k4/4104)-(11*k5/40),y(i)-
      (8*m1/27)+(2*m2)-(3544*m3/2565)+(1859*m4/4104)-(11*m5/40));
   x(i+1)=x(i)+(16*k1/135)+(6656*k3/12825)+(28561*k4/56437)
         -(9*k5/50)+(2*k6/55);
   y(i+1)=y(i)+(16*m1/135)+(6656*m3/12825)+(28561*m4/56437)
         -(9*m5/50)+(2*m6/55);
   end
disp('hasil komputasi')
disp('  iterasi       t           x                    y')
A=[[1:i+1]' t' x y];
for i=1:n+1
    fprintf('%8.0f   %8.2f    %8.14f   . . .
            %8.14f \n',A(i,1),A(i,2),A(i,3),A(i,4))
end
disp(['Waktu Komputasi=',num2str(toc)])
plot(t',x,'-o',t',y,'-*')
grid on
title('Grafik Model Predator-Prey(RKF45 I-5)')
legend('populasi mangsa','populasi pemangsa')
xlabel('Waktu')
ylabel('jumlah populasi')
```

Lampiran 13. Program Matlab untuk Metode Runge Kutta Fehlberg Bentuk II(orde 4)

```
clc;clear;format long;
disp('==========================================================')
disp('Program Solusi Numerik Sistem Persamaan Diferensial Lotka
      Volterra')
disp('      Dengan Metode Runge Kutta Fehlberg Bentuk II(orde-4)')
disp('                     Siti Nur Urifah                       ')
disp('                       03510057                            ')
disp('==========================================================')

tic;
disp('f(x,y,t)=p*x-q*x.*y')
disp('g(x,y,t)=-r*y+s*x.*y')
p=input('masukkan laju kelahiran mangsa, p =');
q=input('masukkan laju kematian pemangsa, q =');
r=input('masukkan laju interaksi mangsa dan pemangsa, r =');
s=input('masukkan laju interaksi mangsa dan pemangsa, s =');
disp ('sistem persamaan diferensial Lotka Volterra yang dimaksud
       adalah:')
disp (['f(x,y,t)=',num2str(p),'*x',num2str(-q),'*x.*y'])
disp (['g(x,y,t)=',num2str(-r),'*y+',num2str(s),'*x.*y'])

f=inline ([num2str(p),'*x',num2str(-q),'*x.*y'],'t','x','y')
g=inline ([num2str(-r),'*y+',num2str(s),'*x.*y'],'t','x','y')

x0=input('jumlah awal populasi mangsa, x(0)=');
y0=input('jumlah awal populasi pemangsa, y(0)=');

h=input('masukkan jarak interval waktu, h =');
a=input('masukkan batas bawah interval waktu=');
b=input('masukkan batas atas interval waktu=');
n=(b-a)/h;
x=zeros(n,1);x(1)=x0;
y=zeros(n,1);y(1)=y0;
t=[0:h:n*h];

for i = 1:n
   k1=f(t(i),x(i),y(i));
   m1=g(t(i),x(i),y(i));
   k2=f(t(i)+(h/5),x(i)+(k1*h/5),y(i)+(m1*h/5));
   m2=g(t(i)+(h/5),x(i)+(k1*h/5),y(i)+(m1*h/5));
   k3=f(t(i)+(3*h/10),x(i)+(3*k1*h/40)+(9*k2*h/40),
      y(i)+(3*m1*h/40)+(9*m2*h/40));
   m3=g(t(i)+(3*h/10),x(i)+(3*k1*h/40)+(9*k2*h/40),
      y(i)+(3*m1*h/40)+(9*m2*h/40));
   k4=f(t(i)+(3*h/5),x(i)+(3*k1*h/10)
      -(9*k2*h/10)+(6*k3*h/5),y(i)+(3*m1*h/10)
      -(9*m2*h/10)+(6*m3*h/5));
   m4=g(t(i)+(3*h/5),x(i)+(3*k1*h/10)
      -(9*k2*h/10)+(6*k3*h/5),y(i)+(3*m1*h/10)
      -(9*m2*h/10)+(6*m3*h/5));
```

```
    k5=f(t(i)+h,x(i)-(11*k1*h/54)+(5*k2*h/2)
        -(70*k3*h/27)+(35*k4*h/27),y(i)-(11*m1*h/54)+(5*m2*h/2)
        -(70*m3*h/27)+(35*m4*h/27));
    m5=g(t(i)+h,x(i)-(11*k1*h/54)+(5*k2*h/2)
        -(70*k3*h/27)+(35*k4*h/27),y(i)-(11*m1*h/54)+(5*m2*h/2)
        -(70*m3*h/27)+(35*m4*h/27));
    k6=f(t(i)+7*h/8,x(i)+(1631*k1*h/55296)+(175*k2*h/512)
        +(575*k3*h/13824)+(44275*k4*h/110592)+(253*k5*h/4096),
        y(i)+(1631*m1*h/55296)+(175*m2*h/512)+(575*m3*h/13824)+(4427
        5*m4*h/110592)+(253*m5*h/4096));
    m6=g(t(i)+7*h/8,x(i)+(1631*k1*h/55296)+(175*k2*h/512)
        +(575*k3*h/13824)+(44275*k4*h/110592)+(253*k5*h/4096),y(i)+(
        1631*m1*h/55296)+(175*m2*h/512)+(575*m3*h/13824)
        +(44275*m4*h/110592)+(253*m5*h/4096));
    x(i+1)=x(i)+((37*k1/378)+(250*k3/621)+(125*k4/594)
             +(512*k6/1771))*h;
    y(i+1)=y(i)+((37*m1/378)+(250*m3/621)+(125*m4/594)
             +(512*m6/1771))*h;
end

disp('=========================================================')
disp('hasil komputasi')
disp('  iterasi       t           x                y')
A=[[1:i+1]' t' x y];
for i=1:n+1
    fprintf('%8.0f %8.2f     %8.14f   . . .
             %8.14f \n',A(i,1),A(i,2),A(i,3),A(i,4))
end
disp(['Waktu Komputasi=',num2str(toc)])
plot(t',x,'-o',t',y,'-*')
grid on
title('Grafik Model Predator-Prey(RKF45 II-4)')
legend('populasi mangsa','populasi pemangsa')
xlabel('Waktu')
ylabel('jumlah populasi')
```

Lampiran 14. Program Matlab untuk Metode Runge Kutta Fehlberg Bentuk II(orde 5)

```
clc;clear;format long;
disp('==========================================================')
disp('Program Solusi Numerik Sistem Persamaan Diferensial Lotka
      Volterra')
disp('   Dengan Metode Runge Kutta Fehlberg  Bentuk II(orde-5)  ')
disp('                      Siti Nur Urifah                     ')
disp('                        03510057                          ')
disp('==========================================================')

tic;
disp('f(x,y,t)=p*x-q*x.*y')
disp('g(x,y,t)=-r*y+s*x.*y')
p=input('masukkan laju kelahiran mangsa, p =');
q=input('masukkan laju kematian pemangsa, q =');
r=input('masukkan laju interaksi mangsa dan pemangsa, r =');
s=input('masukkan laju interaksi mangsa dan pemangsa, s =');
disp ('sistem persamaan diferensial Lotka Volterra yang dimaksud
        adalah:')
disp (['f(x,y,t)=',num2str(p),'*x',num2str(-q),'*x.*y'])
disp (['g(x,y,t)=',num2str(-r),'*y+',num2str(s),'*x.*y'])

f=inline ([num2str(p),'*x',num2str(-q),'*x.*y'],'t','x','y')
g=inline ([num2str(-r),'*y+',num2str(s),'*x.*y'],'t','x','y')

x0=input('jumlah awal populasi mangsa, x(0)=');
y0=input('jumlah awal populasi pemangsa, y(0)=');

h=input('masukkan jarak interval, h=');
a=input('masukkan batas bawah interval waktu =');
b=input('masukkan batas atas interval waktu =');
n=(b-a)/h;
x=zeros(n,1);x(1)=x0;
y=zeros(n,1);y(1)=y0;
t=[0:h:n*h];

for i = 1:n
   k1=f(t(i),x(i),y(i));
   m1=g(t(i),x(i),y(i));
   k2=f(t(i)+(h/5),x(i)+(k1*h/5),y(i)+(m1*h/5));
   m2=g(t(i)+(h/5),x(i)+(k1*h/5),y(i)+(m1*h/5));
   k3=f(t(i)+(3*h/10),x(i)+(3*k1*h/40)+(9*k2*h/40),
         y(i)+(3*m1*h/40)+(9*m2*h/40));
   m3=g(t(i)+(3*h/10),x(i)+(3*k1*h/40)+(9*k2*h/40),
       y(i)+(3*m1*h/40)+(9*m2*h/40));
   k4=f(t(i)+(3*h/5),x(i)+(3*k1*h/10)
      -(9*k2*h/10)+(6*k3*h/5),y(i)+(3*m1*h/10)
      -(9*m2*h/10)+(6*m3*h/5));
   m4=g(t(i)+(3*h/5),x(i)+(3*k1*h/10)
      -(9*k2*h/10)+(6*k3*h/5),y(i)+(3*m1*h/10)
      -(9*m2*h/10)+(6*m3*h/5));
```

```
   k5=f(t(i)+h,x(i)-(11*k1*h/54)+(5*k2*h/2)
      -(70*k3*h/27)+(35*k4*h/27),y(i)-(11*m1*h/54)+(5*m2*h/2)
      -(70*m3*h/27)+(35*m4*h/27));
   m5=g(t(i)+h,x(i)-(11*k1*h/54)+(5*k2*h/2)
     -(70*k3*h/27)+(35*k4*h/27),y(i)-(11*m1*h/54)+(5*m2*h/2)
        -(70*m3*h/27)+(35*m4*h/27));
   k6=f(t(i)+7*h/8,x(i)+(1631*k1*h/55296)+(175*k2*h/512)
      +(575*k3*h/13824)+(44275*k4*h/110592)+(253*k5*h/4096),
      y(i)+(1631*m1*h/55296)+(175*m2*h/512)+(575*m3*h/13824)
      +(44275*m4*h/110592)+(253*m5*h/4096));
   m6=g(t(i)+7*h/8,x(i)+(1631*k1*h/55296)+(175*k2*h/512)
      +(575*k3*h/13824)+(44275*k4*h/110592)+(253*k5*h/4096),
      y(i)+(1631*m1*h/55296)+(175*m2*h/512)+(575*m3*h/13824)
      +(44275*m4*h/110592)+(253*m5*h/4096));
   x(i+1)=x(i)+((2825*k1/27648)+(18575*k3/48384)+(13525*k4/55296)
         +(277*k5/14336)+(1*k6/4))*h;
   y(i+1)=y(i)+((2825*m1/27648)+(18575*m3/48384)+(13525*m4/55296)
         + (277*m5/14336)+(1*m6/4))*h;
end

disp('=========================================================')
disp('hasil komputasi')
disp('  iterasi      t           x                    y')
A=[[1:i+1]' t' x y];
for i=1:n+1
    fprintf('%8.0f  %8.2f      %8.14f  . . .
              %8.14f\n',A(i,1),A(i,2),A(i,3),A(i,4))
end
disp(['Waktu Komputasi=',num2str(toc)])
plot(t',x,'-o',t',y,'-*')
grid on
title('Grafik Model Predator-Prey(RKF45 II-5)')
legend('populasi mangsa','populasi pemangsa')
xlabel('Waktu')
ylabel('jumlah populasi')
```

Lampiran 15. Program Matlab untuk Metode Heun

```
clc;clear;format long;
disp('===========================================================')
disp('Program Solusi Numerik Sistem Persamaan Diferensial Lotka
      Volterra')
disp('           Dengan Metode Heun                            ')
disp('            Siti Nur Urifah                              ')
disp('               03510057                                  ')
disp('===========================================================')
tic;
disp('f(x,y,t)=p*x-q*x.*y')
disp('g(x,y,t)=-r*y+s*x.*y')
p=input('masukkan laju kelahiran mangsa, p =');
q=input('masukkan laju kematian pemangsa, q =');
r=input('masukkan laju interaksi mangsa dan pemangsa, r =');
s=input('masukkan laju interaksi mangsa dan pemangsa, s =');
disp ('sistem persamaan diferensial Lotka Volterra yang dimaksud
       adalah:')
disp (['f(x,y,t)=',num2str(p),'*x',num2str(-q),'*x.*y'])
disp (['g(x,y,t)=',num2str(-r),'*y+',num2str(s),'*x.*y'])

f=inline ([num2str(p),'*x',num2str(-q),'*x.*y'],'t','x','y')
g=inline ([num2str(-r),'*y+',num2str(s),'*x.*y'],'t','x','y')

x0=input('jumlah awal populasi mangsa, x(0)=');
y0=input('jumlah awal populasi pemangsa, y(0)=');

h=input('masukkan jarak interval, h =');
a=input('masukkan batas bawah interval waktu =');
b=input('masukkan batas atas interval waktu =');
n=(b-a)/h;
x=zeros(n,1);x(1)=x0;
y=zeros(n,1);y(1)=y0;
t=[0:h:n*h];

for i = 1:n
   x1=f(t(i),x(i),y(i));
   y1=g(t(i),x(i),y(i));
   x2=x(i)+x1*h;
   y2=y(i)+y1*h;
   x3=f(t(i+1),x2,y2);
   y3=g(t(i+1),x2,y2);
   x(i+1)=x(i)+(x1+x3)/2*h;
   y(i+1)=y(i)+(y1+y3)/2*h;
end

disp('===========================================================')
disp('hasil komputasi')
disp('  iterasi      t          x                   y')
A=[[1:i+1]' t' x y];
for i=1:101
    fprintf('%8.0f  %8.2f      %8.14f   . . .
              %8.14f \n',A(i,1),A(i,2),A(i,3),A(i,4))
```

```
end
disp(['Waktu Komputasi=',num2str(toc)])
plot(t',x,'-o',t',y,'-*')
grid on
title('Grafik Model Predator-Prey(Heun)')
legend('populasi mangsa','populasi pemangsa')
xlabel('Waktu')
ylabel('jumlah populasi')
```