

**SOLUSI ANALITIK DAN SOLUSI NUMERIK
PERSAMAAN DIFUSI KONVEKSI**

SKRIPSI

Oleh:

**DEWI FARIDA ROZIANA
NIM: 03510035**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2008**

**SOLUSI ANALITIK DAN SOLUSI NUMERIK
PERSAMAAN DIFUSI KONVEKSI**

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Universitas Islam Negeri (UIN) Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S. Si)

Oleh:

**DEWI FARIDA ROZIANA
NIM: 03510035**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2008**

**SOLUSI ANALITIK DAN SOLUSI NUMERIK
PERSAMAAN DIFUSI KONVEKSI**

SKRIPSI

Oleh:

**DEWI FARIDA ROZIANA
NIM: 03510035**

Telah diperiksa dan disetujui untuk diuji
Tanggal: 27 Maret 2008

Dosen Pembimbing Matematika

Dosen Pembimbing Keagamaan

Drs. H. Turmudi, M.Si
NIP: 150 209 630

Ach.Nasihuddin, M.A
NIP. 150 302 531

Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321

**SOLUSI ANALITIK DAN SOLUSI NUMERIK
PERSAMAAN DIFUSI KONVEKSI**

SKRIPSI

Oleh:

DEWI FARIDA ROZIANA

NIM: 03510035

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal 8 April 2008

SUSUNAN DEWAN PENGUJI:

TANDA TANGAN

- | | | | |
|--------------------|--------------------------|---|---|
| 1. Penguji utama | : Abdussakir, M. Pd | (|) |
| 2. Ketua | : Wahyu Henky Irawan | (|) |
| 3. Sekretaris | : Drs. H. Turmudi, M. Si | (|) |
| 4. Anggota Penguji | : Ach. Nashihuddin, M. A | (|) |

Mengetahui dan Mengesahkan
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321

MOTTO

*Siapa yang membawa kebaikan, maka ia memperoleh
(balasan) yang lebih baik dari padanya, sedang mereka itu
adalah orang-orang yang aman tenteram dari pada kejutan
yang dahsyat pada hari itu*

*Jangan lelah berusaha
Iringi langkah menanggapi ridlo Ilahi
Akan cerah masa datang*

LEMBAR PERSEMBAHAN



*Guru-guru terhormat yang telah memberikan ilmu dan teladan yang baik,
Ayahanda Sukardi, Ibunda Masfi'ah dan Saudara-saudaraku Utik, Afif, dan Thoif.*

Achmad Mochammad

Seseorang yang selalu terjaga dalam sikapku.

*Sahabatku Nana, Aan S.Psi, Aurel, Rini, Tustus, lala, Mimin, Lilic, Nia serta semua
teman-teman angkatan 2003.*

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Segala puji bagi Allah SWT karena atas rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Untuk itu, iringan do'a dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.
3. Ibu Sri Harini, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.
4. Drs. H. Turmudi, M.Si dan Bapak Ach. Nashihuddin, M. A yang telah bersedia meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan dan pengarahan selama penulisan skripsi.
5. Segenap dosen pengajar atas ilmu yang telah diberikan kepada penulis.
6. Ayah Sukardi dan Ibu Masfi'ah tercinta, Utik, Afif, Thoif tersayang yang senantiasa memberikan do'a dan dukungan moril serta materil kepada penulis.

7. Teman-teman Matematika, terutama angkatan 2003 beserta semua pihak yang telah membantu penyelesaian skripsi ini.

Maka dengan iringan doa semoga Allah SWT akan menempatkan mereka dalam kakasih-Nya dan memberikan pahala yang berlipat ganda di dunia dan di akhirat. Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih terdapat kekurangan dan kelemahan, oleh karena itu para pembaca dapat memperbaiki dan melanjutkan sebagai pengembangan dan perbaikan lebih lanjut

Akhirnya, penulis berharap karya tulis ilmiah ini dapat bermanfaat bagi penulis khususnya dan bagi pembaca pada umumnya.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, 27 Maret 2008

Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
LEMBAR PERSETUJUAN	i
LEMBAR PENGESAHAN	ii
MOTTO	iii
LEMBAR PERSEMBAHAN	iv
KATA PENGANTAR	v
DAFTAR ISI	vii
DAFTAR GAMBAR	ix
ABSTRAK	x
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Batasan Masalah.....	5
1.4 Tujuan.....	5
1.5 Metode Penelitian.....	5
1.6 Sistematika Penulisan	6
BAB II KAJIAN TEORI	
2.1 Persamaan Diferensial Parsial.....	8
2.2 Solusi Analitik Persamaan Diferensial Parsial.....	12
2.2.1 Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial	12
2.2.2 Metode Pemisahan Variabel.....	13

2.3 Deret Fourier	15
2.3.1 Deret Fourier dari Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil.....	17
2.4 Integral Fourier.....	20
2.5 Deret Taylor	22
2.6 Kesalahan Pemotongan.....	26
2.7 Diferensial Numerik	28
2.8 Persamaan Difusi.....	31
2.9 Metode Beda Hingga pada Persamaan Difusi Konveksi.....	35
2.10 Matrik Tri-diagonal	38
2.11 Selalu Mencari Solusi dalam Perspektif Islam.....	42

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Solusi Analitik	48
3.2 Solusi Numerik	60
3.3 Analisis Galat.....	75
3.4 Solusi Analitik dan Solusi Numerik dalam Perspektif Islam.....	79

BAB IV PENUTUP

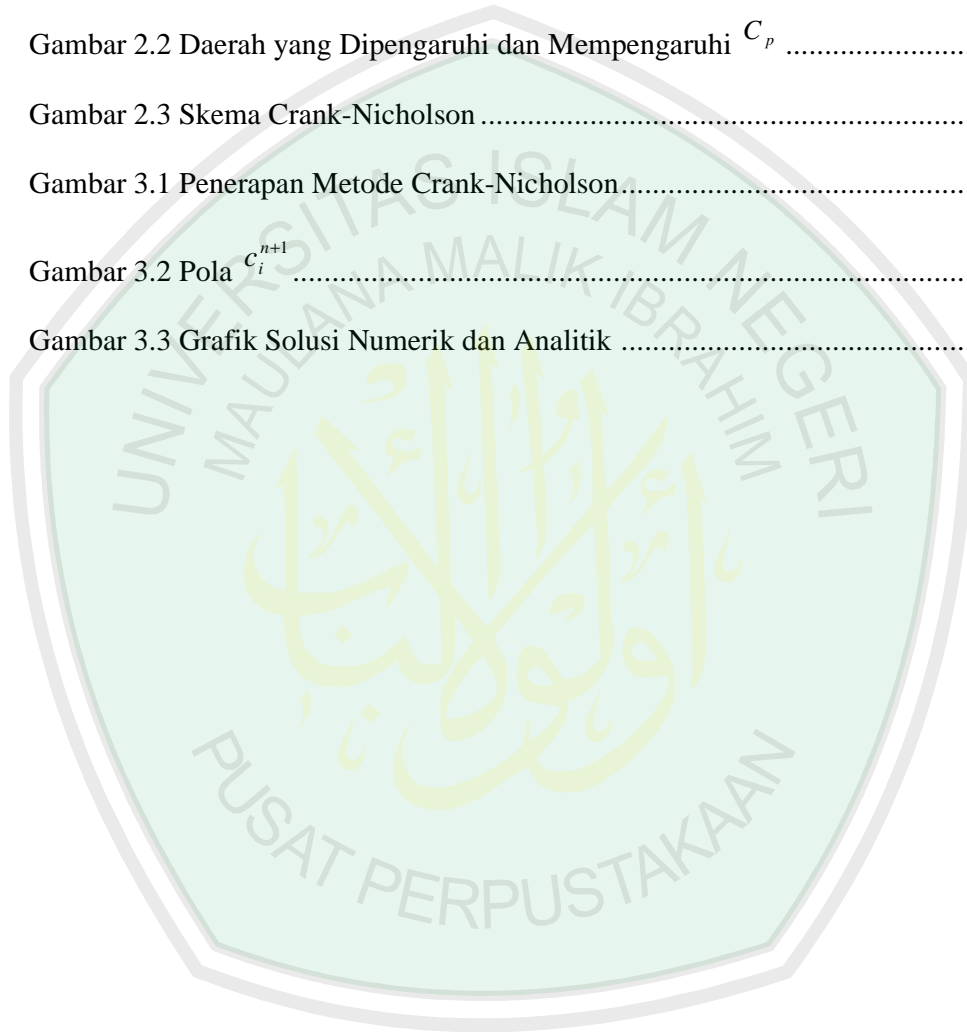
4.1 Kesimpulan	83
4.2 Saran	85

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Balok.....	32
Gambar 2.2 Daerah yang Dipengaruhi dan Mempengaruhi C_p	36
Gambar 2.3 Skema Crank-Nicholson	37
Gambar 3.1 Penerapan Metode Crank-Nicholson.....	61
Gambar 3.2 Pola C_i^{n+1}	64
Gambar 3.3 Grafik Solusi Numerik dan Analitik	74



ABSTRAK

Roziana, Dewi Farida. 2008. **Solusi Analitik dan Solusi Numerik Persamaan Difusi Konveksi**. Skripsi. Jurusan Matematika. Fakultas Sains dan Teknologi. Universitas Islam Negeri (UIN) Malang
Pembimbing: (I) Drs. H. Turmudi, M.Si; (II) Ach. Nashihuddin, M.A

Kata Kunci: Persamaan Diferensial Parsial, Persamaan Difusi, Metode Pemisahan Variabel, Skema Crank-Nicholson.

Pada ilmu kimia fisik untuk menggambarkan suatu fenomena dapat dibuat suatu model matematika yang berbentuk Persamaan Differensial Parsial (PDP). Model matematika yang sering ditemui dalam bidang kimia fisik untuk menjelaskan konsentrasi dari suatu zat kimia disebut sebagai persamaan difusi. Jika difusi juga dipengaruhi oleh kecepatan yang sering disebut dengan persamaan difusi konveksi. Selesaian dari persamaan tersebut adalah nilai konsentrasi zat kimia suatu produk baik bahan mentah maupun hasil industri bahan kimia di lokasi (titik) x dan setiap waktu t pada suatu.

Bentuk umum persamaan difusi konveksi adalah
$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - v \frac{\partial c}{\partial x}$$

dimana c adalah konsentrasi D adalah koefisien difusi, v adalah kecepatan aliran, x adalah ruang/ lokasi, dan t adalah waktu. Persamaan difusi konveksi ini merupakan salah satu bentuk Persamaan Diferensial Parsial yang dapat diselesaikan secara numerik maupun analitik. Dalam penyelesaian secara numerik dan analitik digunakan kondisi batas $c(0,t) = c(L,t) = 0$ dan kondisi awal $c(x,0) = f(x_0)$ dimana $f(x_0) = 1,5 \cdot 10^{-2}$.

Dalam penelitian ini peneliti menggunakan penelitian literatur atau penelitian perpustakaan. Kepustakaan yang dikehendaki penulis disini adalah buku matematika, kimia fisika, mekanisme fluida, metode numerik dan serta segala macam kepustakaan yang sedapat mungkin menguatkan dan mendukung penulis dalam menyelesaikan pembahasan skripsi ini.

Dalam skripsi ini, secara analitik penulis menggunakan metode pemisahan variabel sedangkan secara numerik penulis hanya membatasi pada metode beda hingga skema Crank-Nicholson dengan bantuan software Matlab dengan mengetahui kondisi awal, kondisi batas, jarak $L = 5 \text{ cm}$ dengan interval $x = 0,5 \text{ cm}$ sedangkan, jarak interval $t = 0,05 \text{ s}$, $D_{fus} = 1,46 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ dan $v = 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ cm s}^{-1}$. Solusi analitik merupakan pengontrol galat dari selesaian persamaan difusi konveksi secara numerik. Dari penyelesaian persamaan dengan kedua solusi tersebut didapatkan galat yang kecil, hal tersebut membuktikan bahwa solusi numerik dengan skema Crank-Nicholson hasilnya mendekati solusi eksaknya. Untuk penelitian selanjutnya dapat digunakan persamaan difusi dua

dimensi dengan metode ADI (*Alternating Direct Implicit Methode*) sebagai bahan serta dapat digunakan software yang lebih baik sesuai dengan perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi.



BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Perkataan Matematika berasal dari kata benda *mathema* yang berarti pengetahuan, dan dari kata kerja *manthanein* yang berarti belajar; sehingga dari segi etimologik dapat dikatakan bahwa matematika adalah ilmu tentang cara mempelajari pengetahuan (Bumulo, 2003:1). Kalau didasarkan langkah-langkah yang dilakukan, dapat dikatakan bahwa matematika adalah studi dan klasifikasi dari berbagai struktur dan pola. Kalau ditinjau dari segi materi, penerapan, dan pendekatannya, menurut pengertian lama, dapat dikatakan bahwa matematika adalah ilmu tentang bilangan atau bentuk serta terapannya.

Dalam hubungan dengan berbagai ilmu pengetahuan, matematika berfungsi sebagai bahasa ilmu dengan lingkup universal sebab dengan menggunakan matematika dapat dilakukan abstraksi dari kenyataan-kenyataan yang sangat rumit menjadi suatu model sehingga dapat dicapai ketajaman dalam memberikan deskripsi, mempermudah untuk mengadakan klasifikasi, kalkulasi dan dengan komputasi matematika akan meningkatkan kemampuan untuk mengadakan evaluasi dan prediksi (Bumulo, 2003:1). Dengan kata lain matematika merupakan alat bantu untuk menyederhanakan penyajian pemahaman masalah. Dengan menggunakan bahasa matematika, suatu masalah dapat menjadi lebih sederhana untuk disajikan, dipahami, dianalisis, dan dipecahkan (Dumairy, 1990:9).

Salah satu ilmu pengetahuan yang menggunakan bahasa matematika adalah ilmu kimia fisik. Ilmu kimia fisik ini adalah ilmu yang mempelajari fenomena makroskopik, mikroskopik, atom, subatom, dan partikel dalam sistem dan proses kimia berdasarkan prinsip-prinsip dan konsep-konsep fisika, (http://ms.wikipedia.org/wiki/kimia_fisika.html). Pada ilmu kimia fisik untuk menggambarkan suatu fenomena dapat dibuat suatu model matematika yang berbentuk Persamaan Differensial Parsial (PDP). Persamaan tersebut merupakan laju perubahan terhadap dua atau lebih variabel bebas yang biasanya terdiri dari waktu dan jarak (ruang) (Triatmojo, 2002:201). Dengan kata lain PDP adalah persamaan diferensial yang mengandung satu atau lebih turunan parsial. Persamaan ini haruslah melibatkan paling sedikit dua variabel bebas (Ayres,1995:231). Model matematika yang sering ditemui dalam bidang kimia fisik untuk menjelaskan konsentrasi dari suatu zat kimia disebut sebagai persamaan difusi. Persamaan difusi merupakan persamaan diferensial parsial yang menggambarkan difusi partikel monoenergetik sesuai dengan teori difusi. Difusi adalah gerakan atom atau molekul dalam gas, larutan atau padatan dari daerah konsentrasi yang lebih tinggi ke konsentrasi yang lebih rendah (<http://ms.wikipedia.org/wiki/kimia.html>). Dalam hal ini, Adolp Fick (Raju, 1993: 335) menyatakan bahwa massa dari suatu zat terlarut (solute) yang melintas pada suatu unit area per unit waktu dengan suatu arah tertentu besar difusi molekulnya searah dengan gradien konsentrasi pada arah tersebut jadi $\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$. Jika difusi juga dipengaruhi oleh kecepatan yang sering disebut dengan persamaan difusi

konveksi maka persamaannya menjadi $\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - v \frac{\partial c}{\partial x}$. Selesaian persamaan difusi berupa nilai konsentrasi zat kimia suatu produk baik bahan mentah maupun hasil industri bahan kimia di lokasi (titik) x dan setiap waktu t .

Masalah matematika khususnya persamaan diferensial parsial dapat diselesaikan baik secara analitik maupun numerik. Solusi analitik merupakan solusi kontinu sehingga solusi dari nilai variabel bebas dapat ditemukan, sangat akurat, dan tepat. Sedangkan solusi numerik solusi dapat diperoleh pada poin-poin grid terpisah, aproksimasi, kesalahan kuantitatif harus dikendalikan dengan baik untuk ketelitian (Lam, 1994:20). Atau dengan kata lain solusi analitik adalah selesaian yang memenuhi persamaan semula secara eksak sedangkan numerik adalah selesaian yang berupa hampiran (Susila, 1993: 2).

Menurut pandangan Islam setiap masalah ada beberapa penyelesaian yang dapat diambil jalan keluar atau solusi pemecahan dari suatu masalah. Ketika suatu masalah itu sulit untuk diselesaikan dengan satu cara maka hal tersebut pasti ada cara atau penyelesaian yang lain.

Sebagaimana dalam Firman-Nya pada Qur'an Surat Alam Nasyroh, ayat 5-6:

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾ إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾

Artinya: “ Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan (5) Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan (6)”. (Bahreisy, QS. Alam Nasyroh (94): 5-6)

Dalam suatu riwayat dikemukakan bahwa ketika turun ayat ini (S.94:2-6) Rasulullah SAW. bersabda: "*Bergembiralah kalian karena akan datang kemudahan bagi kalian. Kesusahan tidak akan mengalahkan dua kemudahan.*" (Diriwayatkan oleh Ibnu Jarir yang bersumber dari al-Hasan).

Dari penjabaran ayat tersebut dapat diketahui bahwa ada kemudahan yang telah dikaruniakan Allah pada hamba-Nya sebagai beberapa solusi alternatif. Hal ini terbesit dari masalah matematika khususnya persamaan diferensial parsial dapat diselesaikan baik secara analitik maupun numerik.

Salah satu metode numerik untuk penyelesaian persamaan diferensial parsial adalah metode beda hingga. Dimana metode beda hingga itu sendiri memiliki bermacam skema. Pada skripsi ini akan dicoba penggunaan skema Crank-Nicholson yang lebih sederhana dan mudah dipahami. Skema ini cukup baik dalam menyelesaikan persamaan difusi satu dimensi. Di samping itu dari segi numerik, skema ini mempunyai tingkat kestabilan yang lebih baik dibandingkan skema-skema numerik lainnya terhadap penyelesaian persamaan difusi satu dimensi.

Dari ilustrasi di atas, maka penulis tertarik untuk mengambil judul skripsi "*Solusi Analitik dan Solusi Numerik Persamaan Difusi Konveksi*".

1.2. Rumusan Masalah

Permasalahan dalam penulisan skripsi ini adalah:

1. Bagaimana menentukan solusi analitik persamaan difusi konveksi?
2. Bagaimana menentukan solusi numerik persamaan difusi konveksi?

3. Bagaimana perbandingan hasil penyelesaian dari solusi analitik dan solusi numerik persamaan difusi konveksi?

1.3. Batasan Masalah

Berdasarkan luasnya permasalahan yang terkait dengan persamaan diferensial parsial, maka dalam penulisan skripsi ini akan dibatasi pada:

1. Persamaan diferensial parsial difusi konveksi satu dimensi

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - v \frac{\partial c}{\partial x}.$$

2. Solusi numerik dengan menggunakan metode beda hingga skema Crank-Nicholson.
3. Solusi analitik dengan menggunakan metode pemisahan variabel.
4. Sistem balok dalam keadaan stedy (tunak) tidak berubah terhadap waktu.

1.4. Tujuan

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah:

1. Mendeskripsikan solusi analitik persamaan diferensial parsial difusi konveksi.
2. Mendeskripsikan solusi numerik persamaan diferensial parsial difusi konveksi.
3. Mendeskripsikan perbandingan dari solusi analitik dan solusi numerik persamaan diferensial parsial difusi konveksi.

1.5. Metode Penelitian

Dalam penelitian ini peneliti menggunakan penelitian literatur atau penelitian perpustakaan yaitu penelitian yang bertujuan untuk mengumpulkan data dan informasi dengan bantuan bermacam-macam materi yang terdapat diperpustakaan, seperti buku-buku, jurnal, dokumen. Kepustakaan yang dikehendaki penulis disini adalah buku, jurnal, dan dokumen yang terkait dengan kajian matematika, kimia, fisika, fluida, metode numerik dan segala macam kepustakaan yang sedapat mungkin menguatkan dan mendukung penulis dalam menyelesaikan pembahasan skripsi ini.

Pengumpulan data merupakan salah satu dari proses penelitian. Data-data ini didapat dari proses membaca dan menganalisis buku dasar-dasar matematika, kimia fisika.

1.6. Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah:

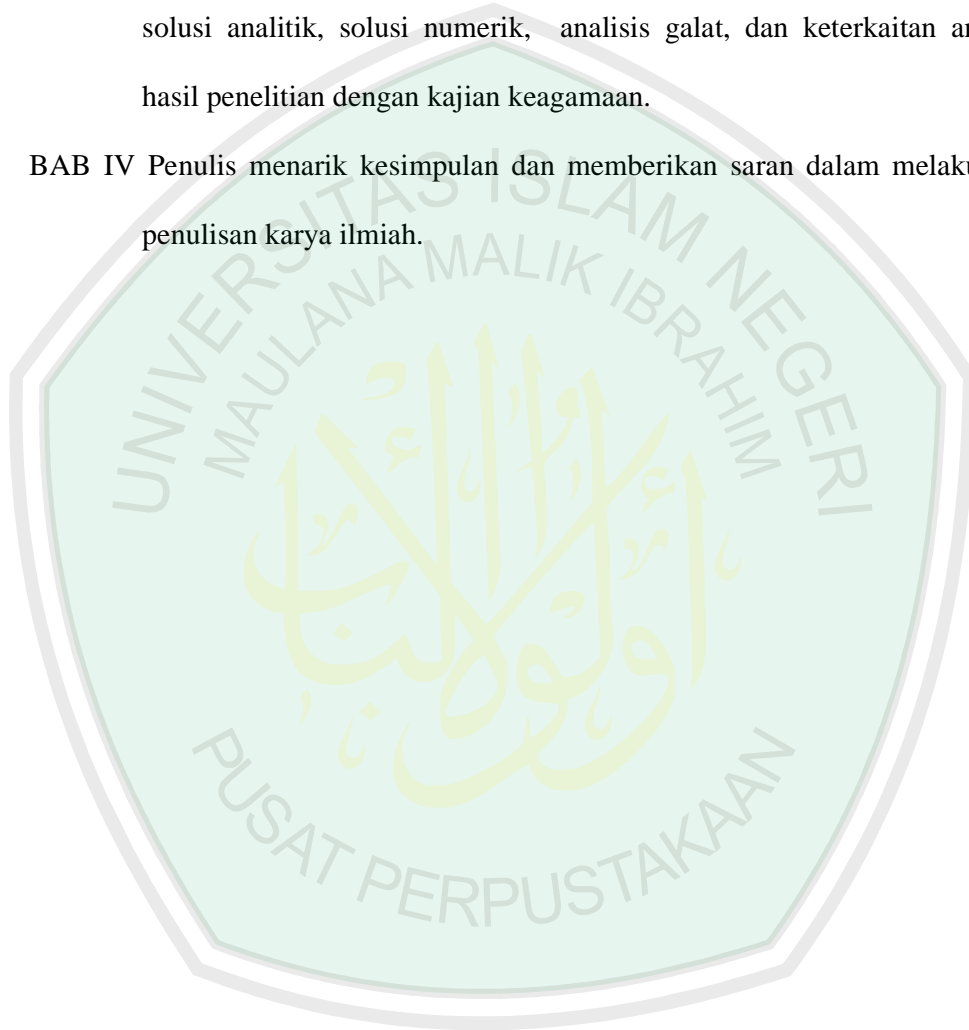
BAB I Dalam bab ini penulis mengkaji tentang pendahuluan yang terdiri latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, metode penelitian, sistematika penulisan.

BAB II Penulis mengkaji tentang teori-teori yang ada kaitannya dengan hal-hal penulis bahas diantaranya persamaan diferensial parsial, solusi analitik, deret Fourier, integral Fourier, deret Taylor, kesalahan pemotongan, diferensial numerik, persamaan difusi, metode beda hingga pada

persamaan difusi konveksi, matrik tri-diagonal, selalu mencari solusi dalam perspektif Islam.

BAB III Dalam bab ini penulis mengkaji tentang pembahasan yang terdiri dari solusi analitik, solusi numerik, analisis galat, dan keterkaitan antara hasil penelitian dengan kajian keagamaan.

BAB IV Penulis menarik kesimpulan dan memberikan saran dalam melakukan penulisan karya ilmiah.



BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan Diferensial Parsial (PDP) adalah persamaan yang memuat sebuah fungsi dari dua atau lebih peubah yang tidak diketahui dan turunan-turunan parsialnya terhadap peubah tersebut (Spiegel, tanpa tahun:276).

Misalkan f suatu fungsi dua variabel x dan y . Turunan parsial f terhadap x adalah suatu fungsi yang dinyatakan oleh $D_x f$, yang nilai fungsinya di setiap titik (x,y) dalam domain f diberikan oleh

$$D_x f(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad (2.1)$$

apabila limit ini ada. Dengan cara yang sama, turunan parsial f terhadap y adalah suatu fungsi, yang dinyatakan oleh $D_y f$, yang nilai fungsinya di setiap titik (x,y) dalam domain f diberikan oleh

$$D_y f(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \quad (2.2)$$

apabila limit ini ada.

Proses pencarian turunan parsial tersebut disebut pendiferensialan parsial.

$D_x f$ menyatakan fungsi yang merupakan turunan parsial f terhadap variabel pertama. $D_x f(x, y)$ menyatakan nilai fungsi $D_x f$ di titik (x,y) . Notasi lain secara

Leibnitz untuk $D_x f$ adalah $\frac{\partial f}{\partial x}$. Notasi lain untuk $D_x f(x, y)$ adalah $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$.

Dengan cara yang sama, notasi-notasi lain untuk $D_y f$ adalah $\frac{\partial f}{\partial y}$. Notasi lain

untuk $D_y f(x, y)$ adalah $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$.

Bila $z = f(x, y)$, dapat ditulis $\frac{\partial z}{\partial x}$ untuk $D_x f(x, y)$. Turunan parsial tidak

dapat dipandang sebagai hasil bagi dari ∂z dan ∂x karena masing-masing simbol

ini tidak mempunyai arti secara terpisah. Notasi $\frac{\partial y}{\partial x}$ dapat dianggap sebagai hasil

bagi dua diferensial apabila y suatu fungsi satu variabel x , tetapi tidak ada tafsiran

yang serupa seperti itu untuk $\frac{\partial z}{\partial x}$ (Leithold, 1991:313). Dalam persamaan

diferensial parsial perlu diketahui beberapa notasi turunan parsial yang terlibat

yaitu:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad u_t = \frac{\partial u}{\partial t} \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Sebagai contoh diberikan bentuk kasus dari persamaan diferensial parsial berikut

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z \text{ dimana: } z = f(x, y)$$

Dalam hal ini variabel-variabel x dan y adalah variabel bebas, sedangkan z adalah

variabel terikat. Untuk mencari nilai $\frac{\partial z}{\partial x}$ yaitu dideferensialkan z terhadap x

dengan menjaga y sebagai konstanta, sedangkan untuk memperoleh $\frac{\partial z}{\partial y}$ yaitu

dideferensialkan z terhadap y dengan menjaga x sebagai konstanta.

Persamaan diferensial parsial banyak dijumpai dalam banyak kasus, misalnya persamaan gelombang, perpindahan panas dan massa, difusi, fisika nuklir, aerodinamika, elektromagnetik, dan lain-lain.

Beberapa hal berkaitan dengan persamaan diferensial parsial adalah sebagai berikut:

1. Orde

Orde suatu persamaan diferensial parsial adalah dari turunan parsial tertinggi dalam persamaan tersebut.

Contoh:

a. $u_t = u_x$ (orde 1)

b. $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ (orde 2)

2. Jumlah variabel

Jumlah variabel dalam persamaan diferensial parsial adalah jumlah variabel bebasnya.

Contoh:

a. $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ (2 Variabel)

b. $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ (3 Variabel)

3. Persamaan Diferensial Parsial Linear Dan Non Linear

Persamaan diferensial parsial dapat diklasifikasikan menjadi linear atau non linear apabila variabel bebas dan turunannya tidak merupakan hasil perkalian. Bentuk umum Persamaan Diferensial Parsial (PDP) linear tingkat dua dalam dua variabel bebas adalah:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \quad (2.3)$$

Dengan $A, B, C, D, E, F,$ dan G merupakan fungsi dalam x dan y . Sedangkan suatu PDP dikatakan non linear jika variabel tak bebas u dan turunan parsialnya muncul dalam persamaan dengan cara tidak linear (dipangkatkan atau dikalikan).

Persamaan diferensial parsial orde 2 dalam 2 variabel yang tidak berbentuk persamaan (2.3) disebut persamaan non linier.

Contoh:

a. $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ (linear)

b. $u_{xx} + u_{yy} + u = 4$ (linear)

c. $u_{xx} + yu_y + u = 1$ (non linear)

d. $u_{xx} + u_{yy} + u^2 = 0$ (non linear)

4. Persamaan Diferensial Parsial linear Homogen

Persamaan umum diferensial parsial linier (2.3) disebut homogen jika

$G = 0$ untuk semua x dan y , sedangkan jika $G \neq 0$ disebut non homogen.

5. Tipe-Tipe Dasar Dari Persamaan Linear

Suatu klasifikasi penting dalam PDP adalah terdiri dari tipe parabolik, hiperbolik, dan eliptik. Persamaan linear orde 2 atau persamaan (2.3) diklasifikasikan berdasarkan aturan berikut ini:

a. Persamaan Ellips jika : $B^2 - 4AC < 0$

Contoh: persamaan Poisson

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + g = 0$$

dan persamaan Laplace

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

b. Persamaan Parabola jika : $B^2 - 4AC = 0$

Contoh: persamaan perambatan panas

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

c. Persamaan Hiperbola jika: $B^2 - 4AC > 0$

Contoh: persamaan gelombang

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

(Triatmojo, 2002:201)

2.2 Solusi Analitik Persamaan Diferensial Parsial

2.2.1 Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial

Selesaian dari suatu persamaan diferensial adalah suatu fungsi tanpa turunan-turunan dan yang memenuhi persamaan tersebut (Soehardjo, 1996:9-3).

Dalam penyelesaian persamaan diferensial parsial dikenal istilah selesaian umum dan selesaian khusus. Selesaian umum itu sendiri adalah suatu selesaian yang terdiri dari sejumlah fungsi bebas sembarang yang jumlahnya sesuai dengan orde persamaannya. Sedangkan selesaian khusus merupakan suatu selesaian yang bisa didapatkan dari penyelesaian umumnya dengan pilihan khusus dari fungsi

sebarang (Spiegel, 1994:2). Sebagai contoh $u = x^2y - \frac{1}{2}xy^2 + F(x) + G(y)$

merupakan penyelesaian dari persamaan $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2x - y$. Solusi ini disebut sebagai penyelesaian umum karena terdiri dari dua fungsi bebas sembarang yaitu $F(x)$ dan $G(y)$. Secara khusus kalau $F(x) = 2 \sin x$, $G(y) = 3y^4 - 5$, akan ditemukan penyelesaian khususnya sebagai berikut

$$u = x^2 y - \frac{1}{2} xy^2 + 2 \sin x + 3y^4 - 5$$

2.2.2 Metode Pemisahan Variabel

Persamaan diferensial parsial linier tingkat tinggi dengan beberapa keistimewaan, dapat diselesaikan dengan metode pemisahan variabel.

Bentuk umum persamaan diferensial parsial tersebut adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a_0 z + a_1 \frac{\partial z}{\partial x} + a_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dots + a_n \frac{\partial^n z}{\partial x^n} + \\ b_0 z + b_1 \frac{\partial z}{\partial y} + b_2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \dots + b_m \frac{\partial^m z}{\partial y^m} + \\ c_0 z + c_1 \frac{\partial z}{\partial t} + c_2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \dots + c_k \frac{\partial^k z}{\partial t^k} = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

dengan keistimewaan:

1. Tidak terdapat derivatif parsial terhadap lebih dari satu variabel bebas.
2. $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$, yaitu koefisien dari turunan parsial terhadap x , merupakan fungsi dari x saja atau konstanta.
 $b_i (i = 1, 2, \dots, m)$, yaitu koefisien dari turunan parsial terhadap y merupakan fungsi dari y saja atau konstanta.
 $c_i (i = 1, 2, \dots, k)$, yaitu koefisien dari turunan parsial terhadap t merupakan fungsi dari t saja atau konstanta.

Penyelesaian persamaan diferensial parsial (2.4) dapat dimisalkan sebagai berikut:

$$Z(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t) \quad (2.5)$$

Jika (2.5) disubstitusikan ke (2.4) diperoleh:

$$a_0XYT + a_1X'YT + a_2X''YT + \dots + a_nX^{(n)}YT + \\ b_0XYT + b_1XY'T + b_2XY''T + \dots + b_mXY^{(m)}T + \\ c_0XYT + c_1XYT' + c_2XYT'' + \dots + c_kXYT^{(k)} = 0$$

dan jika ini dibagi dengan $Z = XYT$ diperoleh:

$$a_0 + a_1 \frac{X'}{X} + a_2 \frac{X''}{X} + \dots + a_n \frac{X^{(n)}}{X} + \\ b_0 + b_1 \frac{Y'}{Y} + b_2 \frac{Y''}{Y} + \dots + b_m \frac{Y^{(m)}}{Y} + \\ c_0 + c_1 \frac{T'}{T} + c_2 \frac{T''}{T} + \dots + c_k \frac{T^{(k)}}{T} = 0 \quad (2.6)$$

Perhatikan bahwa:

$$X' = \frac{dX}{dx}; X'' = \frac{d^2X}{dx^2}; \dots; X^{(n)} = \frac{d^n X}{dx^n} \\ Y' = \frac{dY}{dy}; Y'' = \frac{d^2Y}{dy^2}; \dots; Y^{(m)} = \frac{d^m Y}{dy^m} \\ T' = \frac{dT}{dt}; T'' = \frac{d^2T}{dt^2}; \dots; T^{(k)} = \frac{d^k T}{dt^k}$$

Jika (2.6) berturut-turut didiferensialkan terhadap variabel x, y dan t , diperoleh:

$$\frac{d}{dx} \left(a_0 + a_1 \frac{X'}{X} + a_2 \frac{X''}{X} + \dots + a_n \frac{X^{(n)}}{X} \right) = 0 \\ \frac{d}{dy} \left(b_0 + b_1 \frac{Y'}{Y} + b_2 \frac{Y''}{Y} + \dots + b_m \frac{Y^{(m)}}{Y} \right) = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(c_0 + c_1 \frac{T'}{T} + c_2 \frac{T''}{T} + \dots + c_k \frac{T^{(k)}}{T} \right) = 0$$

Maka ini berarti bahwa:

$$\begin{aligned}
 a_0 + a_1 \frac{X'}{X} + a_2 \frac{X''}{X} + \dots + a_n \frac{X^n}{X} &= k_1 \\
 b_0 + b_1 \frac{Y'}{Y} + b_2 \frac{Y''}{Y} + \dots + b_m \frac{Y^m}{Y} &= k_2 \\
 c_0 + c_1 \frac{T'}{T} + c_2 \frac{T''}{T} + \dots + c_k \frac{T^k}{T} &= k_3
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

Dimana k_1, k_2, k_3 adalah konstanta sembarang dan dengan melihat persamaan (2.6) haruslah

$$k_1 + k_2 + k_3 = 0$$

Maka jelas bahwa (2.7) adalah suatu sistem persamaan diferensial biasa yang ekuivalen dengan persamaan diferensial (2.4).

Misalkan selesaian yang bebas linier dari sistem (2.7) berturut-turut adalah:

$$X_i(x, k_1), i = 1, 2, \dots, n;$$

$$Y_j(y, k_2), j = 1, 2, \dots, m$$

dan

$$T_s(t, k_3), s = 1, 2, \dots, k.$$

Maka selesaian umum dari persamaan diferensial parsial (2.4)

$$Z = \sum_{i=1}^n X_i(x, k_1) \cdot \sum_{j=1}^m Y_j(y, k_2) \cdot \sum_{s=1}^k T_s(t, k_3)$$

(Soehardjo, 1996:4-8)

2.3 Deret Fourier

Fungsi $f(t)$ disebut fungsi periodik bila terdapat bilangan positif p , sehingga berlaku $f(t + p) = f(t)$ untuk setiap t dalam domain f . p terkecil disebut periode dari f . Dalam aplikasi, jumlah dari beberapa fungsi periodik merupakan fungsi periodik. Misal $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ berturut-turut mempunyai

periode p_1, p_2, \dots, p_n , maka $f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t)$ mempunyai periode kelipatan persekutuan terkecil dari p_1, p_2, \dots, p_n . Hal ini sangat dimungkinkan sebab semesta pembicaraan untuk beberapa bentuk fungsi tersebut (periode) hanya terbatas pada bilangan rasional. Namun bilamana semesta pembicaraan (periode) merupakan bilangan irasional maka secara umum sifat tersebut tidak berlaku, yaitu jumlah dua fungsi periodik bukan merupakan fungsi periodik. Sebagai contoh, kedua fungsi $\sin t$ dan $\sin(t\sqrt{2})$ merupakan fungsi periodik dengan periode 2π dan $\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$, namun fungsi $\sin t + \sin(t\sqrt{2})$ bukan merupakan fungsi periodik, (Mursita, 2005: 143).

Sedangkan fungsi $f(t)$ disebut fungsi kontinu bagian demi bagian pada interval $[a, b]$ bila dipenuhi berikut:

1. Interval $[a, b]$ dapat dibagi menjadi sebanyak hingga sub interval sehingga $f(t)$ kontinu pada sub interval tersebut.
 2. Limit dari $f(t)$ pada setiap ujung dari sub interval adalah berhingga.
- atau dapat dikatakan bahwa fungsi $f(t)$ mempunyai sebanyak hingga titik diskontinu.

Misalkan $f(t)$ didefinisikan pada $(-L, L)$, periodik dengan periode $2L$, kontinu bagian demi bagian, maka derat Fourier dari $f(t)$ didefinisikan berikut:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + b_n \sin \frac{n\pi t}{L} \right) \quad (2.8)$$

dengan a_0, a_n dan b_n disebut koefisien Fourier dari $f(t)$,

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) dt \quad (2.9)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt, n = 1, 2, 3, \dots$$

Misalkan $f(t)$ terdefinisi pada $(0, 2L)$, periodik dengan periode $p = 2L$ dan kontinu bagian demi bagian pada $(0, 2L)$, maka koefisien Fourier dari $f(t)$ diberikan sebagai berikut:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(t) dt \quad (2.10)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt, n = 1, 2, 3, \dots$$

Untuk selanjutnya, bila $f(t)$ terdefinisi pada suatu interval dan periodik dengan periode sama dengan panjang interval maka batas integral dari koefisien Fourier merupakan ujung-ujung dari interval tersebut (Mursita, 2005:145).

2.3.1 Deret Fourier dari Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil

Definisi:

Fungsi $f(t)$ disebut fungsi genap bila berlaku $f(-t) = f(t)$ untuk setiap $t \in D_f$ dan fungsi $f(t)$ disebut fungsi ganjil bila berlaku $f(-t) = -f(t)$ untuk setiap $t \in D_f$. Sifat-sifat fungsi genap dan fungsi ganjil diberikan sebagai berikut;

1. Grafik fungsi genap, $y = f(t)$ simetris terhadap sumbu Y dan grafik fungsi ganjil, $y = f(t)$ simetris terhadap titik pusat salib sumbu.

2. Hasil kali dua fungsi genap dan hasil kali dua fungsi ganjil merupakan fungsi genap, sedangkan hasil kali antara fungsi genap dengan fungsi ganjil merupakan fungsi ganjil.

3. Bila $f(t)$ fungsi genap maka $\int_{-L}^L f(t) dt = 2 \int_0^L f(t) dt$. Bila $f(t)$ fungsi

ganjil, maka $\int_{-L}^L f(t) dt = 0$.

Misalkan $f(t)$ fungsi genap dan $g(t)$ fungsi ganjil terdefinisi pada suatu interval $(-L, L)$, keduanya kontinu bagian demi bagian dan periodik dengan periode $p = 2L$, maka deret Fourier dari $f(t)$ dan $g(t)$ berturut-turut disebut deret Fourier Cosinus dan deret Fourier Sinus. Bentuknya yaitu:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} \quad (2.11)$$

Dengan koefisien Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) dt, a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt, n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.12)$$

dan

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{L} \quad (2.13)$$

dengan koefisien Fourier:

$$b_n = \int_{-L}^L g(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt, n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.14)$$

Batas integrasi untuk setiap koefisien dari $f(t)$ atau $g(t)$ adalah ujung-ujung interval yang diberikan.

Jika fungsi $f(t)$ terdefinisi pada $0 \leq t \leq L$, maka fungsi $f(t)$ dapat diperluas pada $-L \leq t \leq L$ dan dipandang periodik dengan periode $p = 2L$, menjadi:

- a. $f(t)$ merupakan fungsi genap. Bila fungsi $f(t)$ diperderetkan maka merupakan deret Fourier Cosinus, yaitu:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L}t \quad (2.15)$$

dengan koefisien Fourier:

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) dt, a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{n\pi}{L}t dt, n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.16)$$

- b. $f(t)$ merupakan fungsi ganjil. Bila fungsi $f(t)$ diperderetkan maka merupakan deret Fourier Sinus, yaitu:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L}t \quad (2.17)$$

dengan koefisien Fourier:

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin \frac{n\pi}{L}t dt, n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.18)$$

(Mursita, 2005:148).

2.4 Integral Fourier

Misalkan fungsi $f(t)$ kontinu bagian demi bagian dan periodik dengan periode $p = T$ terdefinisi pada interval $(0, T)$, maka deret Fourier dari $f(t)$ diberikan sebagai berikut:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{2n\pi t}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi t}{T} \right] \quad (2.19)$$

dengan menggunakan notasi Euler,

$$\begin{aligned} \cos \frac{2n\pi t}{T} &= \frac{1}{2} \left(e^{2in\pi t/T} + e^{-2in\pi t/T} \right) \text{ dan} \\ \sin \frac{2n\pi t}{T} &= \frac{1}{2i} \left(e^{2in\pi t/T} - e^{-2in\pi t/T} \right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

maka bentuk (2.19) dapat dituliskan menjadi,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{2} \left(e^{2in\pi t/T} + e^{-2in\pi t/T} \right) + \frac{b_n}{2i} \left(e^{2in\pi t/T} - e^{-2in\pi t/T} \right) \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right) e^{2in\pi t/T} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} \right) e^{-2in\pi t/T} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right) e^{2in\pi t/T} + \sum_{n=-1}^{-\infty} \left(\frac{a_{-n}}{2} - \frac{b_{-n}}{2i} \right) e^{2in\pi t/T} \\ &= \frac{a_0}{2} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right) + \sum_{n=-1}^{-\infty} \left(\frac{a_{-n}}{2} - \frac{b_{-n}}{2i} \right) \right) e^{2in\pi t/T} \\ &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right) + \sum_{n=-1}^{-\infty} \left(\frac{a_{-n}}{2} - \frac{b_{-n}}{2i} \right) \right] e^{2in\pi t/T} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Dari bentuk (2.21), nilai dalam kurung besarnya dapat dinotasikan dengan notasi

kompleks $\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n$, C_n merupakan bilangan kompleks dan berlaku $C_{-n} = \overline{C_n}$. Jadi

deret Fourier dari fungsi periodik $f(t)$ yang terdefinisi pada $(0, T)$ dengan periode $p = T$ dapat dinyatakan dengan notasi kompleks,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{2in\pi/T} \quad (2.22)$$

Adapun besar koefisien Fourier kompleks C_n ditentukan sebagai berikut:

Misalnya diambil periode $p = T = 1$ maka bentuk (2.22) dapat dinyatakan dengan,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{2in\pi} \quad (2.23)$$

Bila kedua ruas dari bentuk (2.23) dikalikan dengan $e^{-2ik\pi}$ maka didapatkan,

$$\begin{aligned} e^{-2ik\pi} f(t) &= e^{-2ik\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{2in\pi} = \Lambda + e^{-2ik\pi} C_k e^{2ik\pi} + \Lambda \\ &= K + C_k + K \\ C_k &= e^{-2ik\pi} f(t) - \sum_{n=-\infty, n \neq k}^{\infty} C_n e^{2\pi i(n-k)t} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Bila kedua ruas dari (2.24) diintegrasikan terhadap t pada interval $[0,1]$, maka akan didapatkan rumusan dari C_n . Yang perlu ditentukan terlebih dahulu adalah nilai integral suku kedua dari ruas kanan bentuk (2.24). Dengan memandang suatu sifat bahwa integral dari jumlah sama dengan jumlah dari integral maka C_n dapat dikeluarkan dari integral. Sehingga yang perlu dihitung adalah

$$\begin{aligned} \int e^{2\pi i(n-k)t} dt &= \frac{1}{2\pi i(n-k)} e^{2\pi i(n-k)t} \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2\pi i(n-k)} [e^{2\pi i(n-k)} - e^0] \\ &= \frac{1}{2\pi i(n-k)} [1-1] = 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

diketahui bahwa nilai integral (2.25) sama dengan nol hal ini dikarenakan $n \neq k$.

Sehingga didapatkan,

$$C_k = \int_0^1 e^{-2\pi ikt} f(t) dt$$

Dari apa yang telah diuraikan sebelumnya, terlihat bahwa untuk fungsi periodik $f(t)$ yang terdefinisi pada $[0,1]$ dengan periode $p=1$ dapat dinyatakan deret Fourier sebagaimana bentuk (2.23) dengan koefisien Fourier dari $f(t)$,

$$C_n = \int_0^1 e^{-2\pi i n t} f(t) dt \quad (2.26)$$

Dengan menggunakan bentuk (2.26) dapat ditunjukkan bahwa $C_{-n} = \overline{C_n}$. Untuk deret Fourier (2.19), maka koefisien Fourier dari fungsi $f(t)$ diberikan dengan,

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-2\pi i n t} f(t) dt \quad (2.27)$$

Demikian seterusnya, batas integral dari koefisien Fourier C_n sangat bergantung dari daerah definisi dari fungsi $f(t)$ (Mursita, 2005:152).

2.5 Deret Taylor

Deret Taylor merupakan dasar untuk menyelesaikan masalah dalam metode numerik, terutama penyelesaian persamaan diferensial. Jika suatu fungsi $f(x)$ diketahui dititik x_i dan semua turunan dari f terhadap x diketahui pada titik tersebut, maka deret Taylor (persamaan 2.28) dapat dinyatakan nilai f pada titik x_{i+1} yang terletak pada jarak Δx dari titik x_i .

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i) \frac{\Delta x}{1!} + f''(x_i) \frac{\Delta x^2}{2!} + f'''(x_i) \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots + f^{(n)}(x_i) \frac{\Delta x^n}{n!} + R_n \quad (2.28)$$

Dengan

$f(x_i)$: fungsi dititik x_i

$f(x_{i+1})$: fungsi dititik x_{i+1}

$f', f'', f''', \dots, f^{(n)}$: turunan pertama, kedua, ..., ke-n dari fungsi.

Δx : langkah ruang, yaitu jarak antara x_i dan x_{i+1}

R_n : kesalahan pemotongan

! ; operator faktorial, misalkan bentuk $3! = 1 \times 2 \times 3$; $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4$

Berikut teorema dasar deret Taylor beserta buktinya.

Teorema:

Andaikan f suatu fungsi demikian sehingga f dan semua turunan-turunannya ada dalam suatu selang $(a - r, a + r)$. Maka fungsi itu dapat diuraikan menjadi deret Taylor, dalam rumusan sebagai berikut:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

untuk semua x sehingga $|x - a| < r$ jika dan hanya jika

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1} = 0$$

dengan setiap ξ_n ada di antara x dan a

Bukti:

Di dalam selang $(a - r, a + r)$, fungsi f memenuhi hipotesis sebagai berikut

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \quad (2.29)$$

dengan $P_n(x)$ adalah polinom Taylor berderajat n dari f dan $R_n(x)$ adalah sukusisanya yang diberikan oleh

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad (2.30)$$

dengan setiap ξ_n ada diantara x dan a

Sekarang $P_n(x)$ adalah jumlah n buah suku pertama dari deret Taylor dari f pada a . Jadi bila kita buktikan bahwa $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x)$ ada dan sama dengan $f(x)$ jika dan hanya jika $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, teorema itu akan terbukti. Dari persamaan (2.29)

$$P_n(x) = f(x) - R_n(x) \quad (2.31)$$

jika $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$ maka menurut persamaan (2.31)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) &= f(x) - \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) \\ &= f(x) - 0 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

sekarang dari hipotesis bahwa $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = f(x)$ kita akan membuktikan bahwa

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0. \text{ Dari persamaan (2.29)}$$

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

Jadi

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) &= f(x) - \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) \\
&= f(x) - f(x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

jadi teorema terbukti.

(Leithold, 1991:98)

Dari persamaan 2.28 maka deret Taylor yang hanya memperhitungkan satu suku pertama dari ruas kanan akan mempunyai bentuk umum sebagai berikut

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) \quad (2.32)$$

Bentuk persamaan (2.32) dapat disebut sebagai perkiraan orde nol, nilai f pada titik x_{i+1} sama dengan nilai pada x_i . Perkiraan tersebut adalah benar jika fungsi yang diperkirakan adalah suatu konstan. Jika fungsi tidak konstan maka harus diperhitungkan suku-suku berikutnya dari deret Taylor.

Sedangkan bentuk deret Taylor order satu, yang memperhitungkan dua suku pertama dapat ditulis dalam bentuk:

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i) \frac{\Delta x}{1!} \quad (2.33)$$

Yang merupakan bentuk persamaan garis lurus (linier). Dengan cara yang analog, maka deret Taylor yang memperhitungkan tiga suku pertama dari ruas kanan dapat ditulis menjadi:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i) \frac{\Delta x}{1!} + f''(x_i) \frac{\Delta x^2}{2!} \quad (2.34)$$

Persamaan (2.34) disebut perkiraan order dua (Triatmojo, 2002:7).

2.6 Kesalahan Pemotongan (*Truncation Error*)

Deret Taylor akan memberikan perkiraan suatu fungsi dengan benar jika semua suku dari deret tersebut diperhitungkan. Dalam praktek hanya beberapa suku pertama saja yang diperhitungkan, sehingga hasil perkiraan tidak tepat seperti pada penyelesaian analitik. Ada kesalahan karena tidak diperhitungkannya suku-suku terakhir dari deret Taylor. Kesalahan ini disebut dengan kesalahan pemotongan (*truncation error*, R_n), yang ditulis dalam bentuk:

$$R_n = O(\Delta x^{n+1})$$

Indeks n menunjukkan bahwa deret yang diperhitungkan adalah sampai pada suku ke- n , sedang subskrip $n+1$ menunjukkan bahwa kesalahan pemotongan mempunyai order $n+1$. Notasi $O(\Delta x^{n+1})$ berarti bahwa kesalahan pemotongan mempunyai order Δx^{n+1} atau kesalahan adalah sebanding dengan langkah ruang pangkat $n+1$. Kesalahan pemotongan tersebut adalah kecil apabila:

1. Interval Δx adalah kecil.
2. Memperhitungkan lebih banyak suku dari deret Taylor.

Pada perkiraan order satu, besarnya kesalahan pemotongan adalah:

$$O(\Delta x^2) = f''(x_i) \frac{\Delta x^2}{2!} + f'''(x_i) \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots \quad (2.35)$$

(Triatmojo, 2002:9)

Penyelesaian secara numerik dari suatu persamaan matematika hanya memberikan nilai perkiraan yang mendekati nilai eksak (benar) dari penyelesaian analitis. Berarti dalam penyelesaian numerik tersebut terdapat kesalahan (galat)

terhadap nilai eksak dan ketidak pastian dapat terjadi. Galat adalah suatu nilai penyimpangan dari nilai sebenarnya (Triatmojo, 2002:2).

Ada tiga macam kesalahan perkiraan:

1. Kesalahan bawaan (inheren) adalah kesalahan dari nilai data.
2. Kesalahan pembulatan terjadi karena tidak diperhitungkannya beberapa angka terakhir dari suatu bilangan. Sebagai contoh:
77.56253214 dapat dibulatkan menjadi 77.563
2.1412357 dapat dibulatkan menjadi 2.14
3. Kesalahan pemotongan terjadi karena tidak dilakukannya hitungan sesuai dengan prosedur matematik yang benar, (Suryoputro, 2001: 10).

Ada dua jenis kesalahan hubungan antara nilai eksak dan nilai perkiraan yaitu:

1. Galat absolut adalah kesalahan perbedaan (selisih) antara nilai eksak dan nilai perkiraan (pendekatan pada nilai sebenarnya).

Dituliskan:

$$x = \bar{x} + e$$

dimana x adalah nilai sebenarnya

\bar{x} adalah pendekatan pada nilai sebenarnya

e adalah galat

disini e adalah galat absolut yaitu

$$e = x - \bar{x}$$

2. Kesalahan relatif adalah tingkat kesalahan yang dilakukan dengan membandingkan kesalahan yang terjadi dengan nilai eksak

$$e_R = \frac{e}{x}$$

dengan

e_R = galat relatif

e = galat absolut

x = nilai eksak

Galat relatif sering diberikan dalam bentuk persen sebagai berikut:

$$e_R = \frac{e}{x} \times 100\%$$

(Djojodiharjo, 2000:15)

2.7 Diferensial Numerik

Diferensial numerik digunakan untuk memperkirakan bentuk diferensial kontinu menjadi bentuk diskret. Diferensial numerik ini banyak digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Bentuk tersebut dapat diturunkan berdasar deret Taylor

Deret Taylor pada persamaan (2.28) dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)\Delta x + O(\Delta x^2) \quad (2.36)$$

atau

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x} - O\Delta x \quad (2.37)$$

Bentuk diferensial dari persamaan (2.37) disebut diferensial maju order satu. Disebut diferensial maju karena menggunakan data pada titik x_i dan x_{i+1}

untuk memperhitungkan diferensial. Jika data yang digunakan adalah dititik x_i dan x_{i-1} , maka disebut diferensial mundur, dan deret Taylor menjadi:

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i) \frac{\Delta x}{1!} - f''(x_i) \frac{\Delta x^2}{2!} - f'''(x_i) \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots \quad (2.38)$$

atau

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i) \Delta x + O(\Delta x^2) \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (2.40)$$

Apabila data yang digunakan untuk memperkirakan diferensial dari fungsi adalah pada titik x_{i-1} dan x_{i+1} , maka perkiraannya disebut diferensial terpusat.

Jika persamaan (2.28) dikurangi persamaan (2.38) didapat:

$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) = 2f'(x_i) \Delta x + 2f'''(x_i) \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots$$

atau

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2\Delta x} - f'''(x_i) \frac{\Delta x^2}{6} \dots$$

atau

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \dots \quad (2.41)$$

Dari persamaan (2.41) terlihat bahwa kesalahan pemotongan berorder Δx^2 sedang pada diferensial maju dan mundur berorder Δx , untuk interval Δx kecil, nilai kesalahan pemotongan yang berorder $2 \Delta x^2$ lebih kecil dari order 1 (Δx). Hal ini menunjukkan bahwa perkiraan diferensial terpusat lebih teliti dibanding diferensial maju atau mundur.

Sedangkan untuk turunan kedua suatu fungsi dapat diperoleh dengan menjumlahkan persamaan (2.28) dengan persamaan (2.38):

$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) = 2f'(x_i)\Delta x + 2f''(x_i)\frac{\Delta x^2}{2!} + 2f'''(x_i)\frac{\Delta x^4}{4!} + \dots$$

atau

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{\Delta x^2} - f'''(x_i)\frac{\Delta x^2}{12} - \dots$$

atau

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{\Delta x^2} - O(\Delta x^2) \quad (2.42)$$

Dari uraian diatas dapat disimpulkan bahwa bentuk diferensial (biasa atau parsial) dapat diubah dalam bentuk diferensial numerik (beda hingga).

Apabila fungsi mengandung lebih dari satu variabel bebas, seperti $f(x,y)$, maka bentuk deret Taylor menjadi:

$$f(x_{i+1}, y_{j+1}) = f(x_i, y_j) + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\Delta x}{1!} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\Delta y}{1!} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\Delta y^2}{2!} + \dots \quad (2.43)$$

Dengan cara yang sama, turunan pertama terhadap variabel x dan y berturut-turut dapat ditulis dalam bentuk (diferensial maju):

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f(x_{i+1}, y_j) - f(x_i, y_j)}{\Delta x} \quad (2.44)$$

atau

$$\frac{\partial f}{\partial y} \approx \frac{f(x_i, y_{j+1}) - f(x_i, y_j)}{\Delta y} \quad (2.45)$$

Untuk menyederhanakan penulisan, selanjutnya bentuk $f(x_i, y_j)$ ditulis menjadi $f_{i,j}$ dengan subskrip i dan j menunjukkan komponen dalam arah sumbu x dan sumbu y . Apabila fungsi berada dalam sistem tiga dimensi (sistem koordinat x, y, z); maka $f(x_i, y_j, z_k)$ ditulis menjadi $f_{i,j,k}$. Dengan cara seperti itu maka persamaan (2.44) dan (2.45) dapat ditulis menjadi:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x} \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \approx \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta y} \quad (2.47)$$

Untuk diferensial terpusat bentuk di atas menjadi:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \approx \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta y} \quad (2.49)$$

Dengan cara yang sama, turunan kedua terhadap x dan y dapat ditulis menjadi:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{f_{i-1,j} - 2f_{i,j} + f_{i+1,j}}{\Delta x^2} \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \approx \frac{f_{i,j-1} - 2f_{i,j} + f_{i,j+1}}{\Delta y^2} \quad (2.51)$$

(Triatmojo, 2002:9)

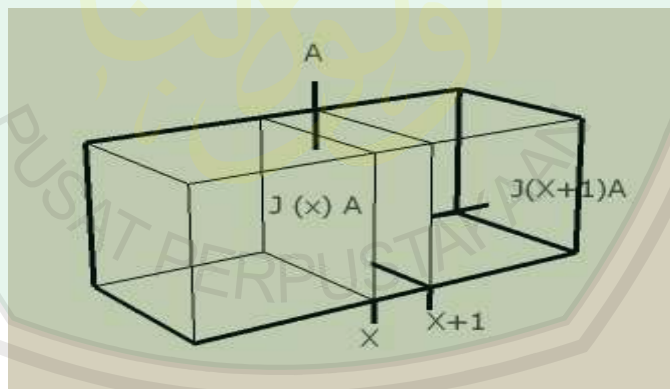
2.8 Persamaan Difusi

Difusi adalah gerakan atom atau molekul dalam gas, larutan atau padatan dari daerah konsentrasi yang lebih tinggi ke konsentrasi yang lebih rendah.

Persamaan difusi adalah persamaan diferensial parsial yang menggambarkan difusi partikel monoenergetik sesuai dengan teori difusi, (<http://ms.wikipedia.org/wiki/kimia.html>). Salah satu proses difusi yang tergantung terhadap waktu yang berhubungan dengan kimia adalah distribusi konsentrasi dalam pelarut yang ditambah zat terlarut. Contohnya adalah gula berdifusi dicairan teh tawar sehingga menjadi manis, flourida dalam air dan lain-lain.

Hukum pertama Fick tentang difusi yang dikemukakan oleh Ilmuwan Jerman, Adolph Fick menyatakan bahwa fluks materi (jumlah partikel per satuan luas per satuan waktu) sebanding dengan gradien rapatan pada suatu titik (Atkins, 1999:288). Fluks partikel menuruti gradien konsentrasi.

Dalam hal perumusan masalah persamaan difusi pada kasus berikut, maka dapat diperhatikan Gambar 2.1 di bawah ini



Jika diperhatikan lempengan tipis dengan luas penampang lintang A dan tebal dari x sampai $x + l$ (Gambar 2.1). Kita misalkan konsentrasi pada x pada waktu t adalah c . Jumlah mol partikel yang memasuki lempengan persatuan waktu adalah JA , sehingga kenaikan konsentrasi di dalam lempengan (yang volumenya Jl) yang disebabkan oleh fluks dari kiri adalah:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{JA}{Al} = \frac{J}{l}$$

Terdapat pula aliran keluar melalui jendela kanan. Fluks melalui jendela itu adalah J' , dan perubahan konsentrasi yang dihasilkan:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{-J'A}{Al} = \frac{-J'}{l}$$

Sehingga laju perubahan konsentrasi dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{J - J'}{l}$$

Setiap fluks sebanding dengan gradien konsentrasi pada jendela. Dengan menggunakan hukum pertama Fick, dapat ditulis:

$$\begin{aligned} J - J' &= -D \frac{\partial c}{\partial x} + D \frac{\partial c'}{\partial x} \\ &= -D \frac{\partial c}{\partial x} + D \frac{\partial}{\partial x} \{c + \partial l\} \\ &= D l \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Jika digantikan hubungan ini ke dalam ungkapan untuk laju perubahan konsentrasi dalam lempengan, maka diperoleh bentuk umum persamaan difusi sebagai berikut

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (2.52)$$

Persamaan (2.52) biasanya disebut hukum kedua Fick tentang difusi; pada tahap ini kita sudah mengetahui bahwa c merupakan fungsi dari x dan t dan turunannya dituliskan sebagai turunan parsial.

Persamaan difusi menunjukkan bahwa laju perubahan konsentrasi sebanding dengan turunan kedua dari konsentrasi terhadap jarak. Jika konsentrasi berubah dengan tajam dari titik ke titik (jika distribusinya tidak merata) maka konsentrasi berubah dengan cepat terhadap waktu. Jika lengkungannya nol, maka konsentrasinya lambat laun menjadi konstan. Jika konsentrasi berkurang secara linier dengan jarak, maka konsentrasi pada setiap titik adalah konstan karena aliran partikel ke dalam tepat diimbangi oleh aliran keluar.

Persamaan difusi dapat dianggap sebagai perumusan matematis dari dugaan berdasarkan intuisi, bahwa terdapat kecenderungan alamiah untuk menghilangkan ketidakmerataan distribusi. Lebih singkatnya: alam tidak menyukai ketidakmerataan. Dalam hal transport partikel yang berasal dari gerakan aliran fluida, maka difusi yang terjadi disebut sebagai difusi konveksi. Jika sekarang ini kita mengabaikan difusi, maka fluks partikel melalui luas A dalam selang waktu Δt jika fluida mengalir dengan velositas v , dapat dihitung dengan cara yang sudah kita gunakan beberapa kali sebelumnya (dengan menghitung partikel dalam jarak $v \Delta t$), yaitu:

$$J = \frac{cAv\Delta t}{A\Delta t} = cv \quad (2.53)$$

J ini disebut fluks konveksi. Dengan argumen yang sama seperti sebelumnya, maka laju perubahan konsentrasi dalam lempengan dengan panjang l dan luas A , adalah:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{J - J'}{l} = \left\{ c - \left[c + \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right) l \right] \right\} \frac{v}{l}$$

(Diasumsikan bahwa velositas tidak bergantung pada posisi).

Jika difusi dan konveksi sama perannya, maka perubahan konsentrasi total dalam daerah itu merupakan penjumlahan kedua efek tersebut, sehingga persamaan difusi tergeneralisasi:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - v \frac{\partial c}{\partial x} \quad (2.54)$$

Persamaan difusi merupakan persamaan turunan orde kedua terhadap ruang dan persamaan turunan orde pertama terhadap waktu. Oleh karena itu kita harus menentukan dua kondisi batas untuk ketergantungan pada ruang (x), dan satu kondisi awal untuk ketergantungan pada waktu (t). Persamaan ini merupakan dasar untuk perancangan reaktor dalam industri kimia dan dasar dari penggunaan sumber dalam sel hidup (Atkins, 1999:320).

2.9 Metode Beda Hingga pada Persamaan Difusi

Pandang persamaan difusi berikut dengan kondisi awal dan batasnya

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - v \frac{\partial c}{\partial x}$$

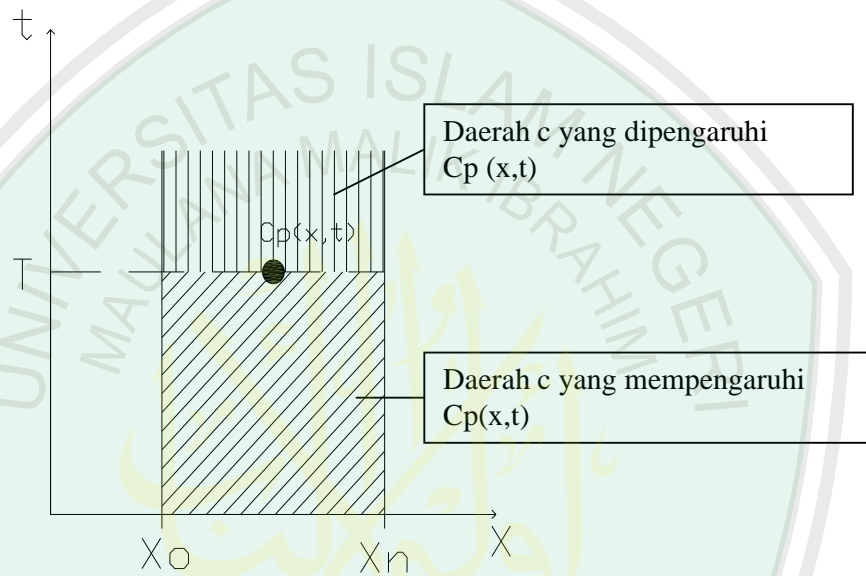
$$c(x,0) = f(x) \text{ untuk } 0 \leq x \leq x_n \quad (2.55)$$

$$c(0,t) = f(0) \quad (2.56)$$

$$c(a,t) = f(a) \quad (2.57)$$

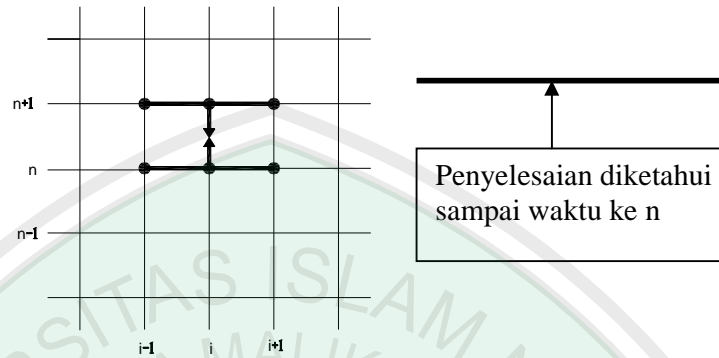
c adalah konsentrasi, D merupakan koefisien difusi, v adalah kecepatan aliran difusi, x adalah lokasi/ ruang, sedangkan t adalah waktu. Kondisi batas (2.55) disebut kondisi awal. Sedangkan kondisi (2.56) dan (2.57) disebut dengan kondisi batas. Persamaan difusi konveksi ini merupakan bentuk persamaan diferensial parsial dalam kategori parabola dimana $B^2 - 4AC = 0$. Tujuan dari

pemecahan persamaan difusi konveksi ini adalah mendapatkan nilai $c(x,t)$ di antara $0 < x < x_n$ dan $t > 0$. Pada persamaan differensial parsial parabolik nilai $c(x,T)$ akan dipengaruhi oleh nilai $c(x,t)$, $t \leq T$ seperti diilustrasikan pada Gambar 2.2



Gambar 2.2 Daerah yang Dipengaruhi dan Mempengaruhi C_p

Ada beberapa teknik dalam memecahkan persamaan difusi konveksi salah satunya dengan metode beda hingga skema Crank-Nicholson. Skema ini mempunyai tingkat kestabilan yang lebih baik dibandingkan skema-skema beda hingga yang lain. Skema jaringan titik hitungan diberikan oleh Gambar (2.3)



Gambar 2.3 Skema Crank-Nicholson

Solusi numerik persamaan difusi konveksi dengan menggunakan metode beda hingga skema Crank-Nicholson yang menggunakan dasar dari persamaan deret Taylor, sehingga menghasilkan turunan pertama

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t} \quad (2.58)$$

Turunan pertama (2.58) merupakan diferensial terpusat.

Turunan ke dua fungsi terhadap x adalah:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{c_{i-1}^{n+1} - 2c_i^{n+1} + c_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{c_{i-1}^n - 2c_i^n + c_{i+1}^n}{\Delta x^2} \right) \quad (2.59)$$

Dari diferensial numerik (2.58) dan (2.59) kemudian disubstitusikan ke dalam persamaan difusi konveksi (2.54) sehingga diperoleh persamaan difusi konveksi dalam bentuk terdiskritisasi (Kosasih, 2006:466). Dari bentuk persamaan difusi yang terdiskritisasi dapat dibentuk suatu pola iterasi. Pola yang diperoleh akan diterapkan pada sistem yang dipilih (dalam hal ini penulis memilih

aliran zat kimia dalam balok yang letaknya mendatar). Penerapan pola pada $i = 1, 2, \dots, M$ akan memberikan sistem persamaan linier dengan bentuk tridiagonal.

2.10 Matrik Tridiagonal

Matrik tridiagonal adalah matrik bujursangkar yang seluruh elemen bukan 0 (nol) berada di sekitar elemen diagonal, sementara elemen lainnya bernilai 0 (nol). Sebagai contoh diberikan matriks A sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

Salah satu algoritma yang digunakan dalam penyelesaian bentuk matriks adalah algoritma Thomas. Algoritma Thomas sangat cocok untuk menyelesaikan persamaan linier simultan yang dapat dibentuk menjadi matriks tridiagonal.

Algoritma proses dekomposisi Thomas:

1. Mendapatkan matriks $[L]$ dan $[U]$.
2. Menyelesaikan $[L]\{y\} = \{b\}$.
3. Menyelesaikan $[U]\{x\} = \{z\}$

Berdasarkan Sistem Persamaan Linier (SPL) :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3$$

$$a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 = b_4$$

O N

$$a_{m-1}x_{m-1} + a_m x_m = b_m \quad (2.60)$$

Dengan menggunakan notasi matriks, sistem persamaan di atas (2.60) dapat dituliskan:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ M & M & M & M & M & O & M & M & M \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda & a_{n-1n-2} & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ M \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ M \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

Pada sistem tridiagonal diatas tampak bahwa mayoritas dari elemen pada koefisien matriksnya adalah nol. Untuk sistem tridiagonal ini, digunakan tiga vektor a , d dan c untuk menyimpan nilai elemen yang bukan nol sepanjang diagonal mayor dan sub-diagonalnya sehingga matriks di atas menjadi:

$$\begin{bmatrix} d_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & d_2 & c_2 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & d_3 & c_3 & 0 & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ M & M & M & M & M & O & M & M & M \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda & a_{n-1} & d_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & a_n & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ M \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ M \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

$A \qquad \qquad \qquad x \qquad \qquad \qquad b$

Pertama-tama yang dilakukan dalam pemecahan sistem persamaan linier (SPL) dengan koefisien matriks tri-diagonal adalah matriks A didekomposisikan menjadi LU , yaitu matriks segitiga bawah dan segitiga atas. Setelah dekomposisi, matriks diatas menjadi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 1 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 1 & \Lambda & 0 & 0 \\ M & M & M & O & M & M \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & \alpha_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 & c_1 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & c_2 & \Lambda & 0 & 0 \\ M & M & M & O & M & M \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & \delta_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & \delta_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ M \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ M \\ b_n \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

$L \qquad \qquad \qquad U \qquad \qquad \qquad x \qquad \qquad \qquad b$

Dengan perkalian matriks, persamaan di atas berbentuk matrik (2.64).

MATRIK TRIDIAGONAL

Di PDF hal. 40



Setelah mengubah elemen-elemen pada vektor a dan d dengan α dan δ persamaan (2.63) dapat diproses lanjut. Jika Ux disebut dengan g , maka persamaan (2.63) dapat dituliskan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 1 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 1 & \Lambda & 0 & 0 \\ \text{M} & \text{M} & \text{M} & \text{O} & \text{M} & \text{M} \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & \alpha_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \text{M} \\ g_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \text{M} \\ b_n \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

$L \qquad g \qquad b$

Dari persamaan di atas diperoleh:

$$\begin{aligned} g_1 &= b_1 \\ \alpha_2 g_1 + g_2 &= b_2 \rightarrow g_2 = b_2 - \alpha_2 g_1 \\ \alpha_3 g_2 + g_3 &= b_3 \rightarrow g_3 = b_3 - \alpha_3 g_2 \\ \text{MM} \\ \alpha_n g_{n-1} + g_n &= b_n \rightarrow g_n = b_n - \alpha_n g_{n-1} \end{aligned} \quad (2.66)$$

Karena g adalah Ux , maka:

$$\begin{bmatrix} \delta_1 & c_1 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & c_2 & \Lambda & 0 & 0 \\ \text{M} & \text{M} & \text{M} & \text{O} & \text{M} & \text{M} \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & \delta_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & \delta_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \text{M} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \text{M} \\ g_n \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

$U \qquad x \qquad g$

$$x_n = \frac{g_n}{\delta_n}$$

$$\delta_{n-1} x_{n-1} + c_{n-1} x_n = g_{n-1} \rightarrow x_{n-1} = \frac{g_{n-1} - c_{n-1} x_n}{\delta_{n-1}}$$

$$\delta_{n-2} x_{n-2} + c_{n-2} x_{n-1} = g_{n-2} \rightarrow x_{n-2} = \frac{g_{n-2} - c_{n-2} x_{n-1}}{\delta_{n-2}} \quad (2.68)$$

MM

$$\delta_1 x_1 + c_1 x_2 = g_1 \rightarrow x_1 = \frac{g_1 - c_1 x_2}{\delta_1}$$

2.12 Selalu Mencari Solusi Dalam Perspektif Islam

Al-Quran dan Hadist merupakan dasar dalam ajaran Islam. Telah disebutkan dalam Al-Quran tentang keharusan bagi umat Islam untuk bekerja dengan sungguh-sungguh dan sepenuh hati. Al-Quran tidak menganjurkan kepada umat Islam untuk tidak melakukan suatu aktivitas selama hidupnya.

Dua ayat terakhir dari surat Alam Nasyrah menguraikan hal tersebut secara gamblang. Dalam surat Alam Nasyrah, terlebih dahulu ditanamkan optimisme kepada setiap muslim. Sebagaimana yang telah dijelaskan pada Bab I. sehingga dalam mencari solusi dari suatu masalah, kita harus mencurahkan seluruh kemampuan kita dan harus yakin bahwa Allah selalu memberi kemudahan. Selain itu sikap patang menyerah dalam menghadapi suatu masalah juga berperan penting. Hal ini sebagaimana firman Allah:

يٰۤاِبْنَىٓ اٰذْهَبُوْا فَتَحَسَّسُوْا مِنْ يُۤوسُفَ وَاٰخِيهِ وَاَلَا تٰتٰىسُوْا مِنْ رَّوْجِ
اَللّٰهِ اِنَّهٗ لَا ئٰاِيْسُ مِنْ رَّوْجِ اَللّٰهِ اِلَّا الْقَوْمُ الْكٰفِرُوْنَ ﴿٨٧﴾

Artinya: “ Hai anak-anakku, pergilah kamu, maka carilah berita tentang Yusuf dan saudaranya dan jangan kamu berputus asa dari rahmat Allah. Sesungguhnya tiada berputus asa dari rahmat Allah, melainkan kaum yang kafir” (QS. Yusuf: 87).

Bahwasannya kita tidak boleh berputus asa dari rahmat Allah, bahwa Dia akan melampangkan kesusahan ini. Sehingga, jiwa menjadi tenteram dan hati menjadi tenang. Sesungguhnya, tidak berputus asa dari rahmat Allah kecuali kaum kafir kepada kekuasaan dan kelapangan rahmad-Nya, sehingga, apabila mereka tidak berhasil memperoleh apa yang mereka inginkan, serta

menyingkirkan malapetaka atau mengambil manfaat, maka mereka membunuh dirinya sendiri karena bersedih dan berduka-cita.

Adapun orang-orang yang benar-benar beriman, tidak akan dibuat berputus asa oleh musibah dan kesusahan dari rahmad Tuhannya dan bahwa Dia akan melupakan kesusahannya (Maraghi, 1988: 47).

Sebagai seorang muslim, kita dituntut untuk bertindak dan berbuat berdasarkan ilmu pengetahuan dan konsep yang matang (pribadi profesional). Hal ini sebagaimana firman Allah:

وَلَا تَقْفُ مَا لَيْسَ لَكَ بِهِ عِلْمٌ إِنَّ السَّمْعَ وَالْبَصَرَ وَالْفُؤَادَ كُلُّ أُولَئِكَ
كَانَ عَنْهُ مَسْئُولًا ﴿٣٦﴾

Artinya: “ Dan janganlah kamu mengikuti apa yang kamu tidak mempunyai pengetahuan tentangnya. Sesungguhnya pendengaran, penglihatan dan hati, semuanya itu akan diminta pertanggung jawaban (QS. Al-Isyrah:36).

Apa yang ingin diketahui manusia mempunyai sifat umum, kompleks dan mempunyai arti luas. Dengan demikian, seorang muslim dituntut untuk dapat berpikir secara urut, logis, kritis dan argumentatif dengan selalu berlandaskan pada firman Allah. Untuk itu, dalam menggunakan akal, umat Islam harus memperhatikan:

1. Batasan hukum agama adalah wahyu Allah Al-Qur'an dan As-Sunnah, bukan akal atau logika manusia

2. Adanya ayat-ayat muhkamat (yang terang dan tegas dan mudah dipahami) adalah tanda dari keberdayaan akal dan ayat-ayat mutasyabihat yang masih membutuhkan pengkajian merupakan tanda dari keterbatasan akal.
3. Jika terdapat dalil naqli atas suatu masalah, maka akal harus tunduk padanya.
4. Tidak mengubah dalil naqli untuk kepentingan pribadinya.
5. Tidak menganalogkan masalah dengan hal yang bertentangan dengan dalil Allah.
6. Tidak semua masalah agama dapat diselesaikan dengan daya kritis otak manusia.
7. Menahan diri dari melakukan sesuatu yang mubadzir (sia-sia).
8. Memiliki landasan pemahaman kuat dan mendalam terhadap agama melalui penguasaan berbagai disiplin ilmu agama.
9. Berusaha memahami bahasa Arab, karena teks agama ditulis dengan bahasa Arab.
10. Mempunyai motivasi yang ikhlas dalam pengembangan keilmuan (<http://labbaik.wordpress.com/kedudukan-akal-dalam-islam.html>).

Hal tersebut diatas mempunyai peran dalam menggunakan logika terkait dengan kajian agama terhadap sains dan teknologi yang semakin mewarnai kehidupan kita. Manusia telah dikaruniai akal untuk mengkaji ilmu pengetahuan yang beraneka macam seperti:

1. Pengetahuan indrawi, pengetahuan yang menuntut indera dalam memperolehnya. Pengetahuan ini biasanya digunakan di berbagai cabang ilmu empirik seperti: Fisika, Kimia, Biologi.
2. Pengetahuan rasional, pengetahuan ini tersusun dari konsep-konsep abstraktif yang disebut juga dengan konsep sekunder yang masih membutuhkan pembuktian lebih lanjut dalam bentuk premis-premis analogis. Seperti logika, filsafat dan matematika.
3. Pengetahuan tekstual, pengetahuan ini bersifat sekunder karena ketergantungannya terhadap pengetahuan sebelumnya, yaitu pengetahuan tentang sumber informasi yang tepercaya (otoritas) dan diperoleh melalui informasi orang yang jujur. Misalnya, pengetahuan para pemeluk agama yang mereka peroleh dari ucapan para pemuka agama.
4. Pengetahuan syuhudi, pengetahuan ini terkait langsung dengan wujud objek kajiannya dan disertai oleh penafsiran konseptual empunya. Dengan demikian tidak tertutup kemungkinan terdapat perbedaan antar individu (<http://isyraq.wordpress.com>).

Dari penjelasan diatas, dapat ditarik kesimpulan bahwa dalam mencari solusi alternatif, kita dapat menggunakan jalan logika atau metode rasional. Akan tetapi, kita harus ingat pula akan keterbatasan akal yang dapat menghasilkan pengertian yang berbeda antar individu dan peranan wahyu Allah sebagai landasan pengembangan ilmu pengetahuan.

Sebagai contohnya adalah Al-Khawarizmi, seorang tokoh Islam telah melakukan metode ini dalam pengembangan keilmuannya. Dalam memahami

suatu masalah, ia dapat memaksimalkan peran akal sehingga ia tidak hanya mengenali satu subjek saja, tetapi ia juga mampu menyelesaikan masalah dalam subyek tersebut. Khawarizmi juga menggunakan ilmunya untuk lebih memahami tauhid kepada Allah.



BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini dijelaskan tentang solusi persamaan diferensial parsial pada persamaan difusi konveksi baik secara analitik maupun numerik dengan langkah sebagai berikut:

1. Menetapkan kondisi batas dan kondisi awal serta panjang sistem dari persamaan difusi konveksi.
2. Mencari solusi analitik dari persamaan difusi konveksi.
3. Mencari solusi numerik dari persamaan difusi konveksi.
4. Meneliti galat dari solusi analitik dan solusi numerik

Asumsi yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan difusi konveksi

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_{fus} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - v \frac{\partial c}{\partial x} \text{ dalam dimensi satu sebagai berikut:}$$

1. Misalkan $c(x,t)$ terdefinisi pada selang $0 \leq x \leq 5$ dan $t \geq 0$.
2. Fungsi $c(x,t)$ berlaku kondisi batas $c(0,t) = 0$ dan $c(5,t) = 0$
3. Fungsi $c(x,t)$ berlaku kondisi awal yaitu $c(x,0) = f(x_0)$, dengan $f(x_0) = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$.

Dengan kondisi awal dan kondisi batas yang telah ditetapkan serta nilai dari $\Delta x = 0,5 \text{ cm}$ dan $\Delta t = 0,05 \text{ s}$ yang telah diketahui dan besarnya $v = 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ cm s}^{-1}$ dan $D_{fus} = 1,46 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ yang diketahui juga sehingga diperoleh nilai atau besarnya konsentrasi suatu zat pada proses difusi pada saat $t=1, t=2, \dots$, dan seterusnya. Dari solusi numerik yang ada maka untuk mengontrol galat kita dapat melihat hasil dari solusi analitiknya.

3.1 Solusi Analitik

Solusi analitik dilakukan pada balok yang memiliki panjang L yang didalamnya terjadi proses difusi konveksi. Persamaan difusi konveksi dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_{fus} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - v \frac{\partial c}{\partial x}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (3.1)$$

Dengan nilai batas (*Boundary value*)

$$c(0,t) = c(L,t) = 0, \quad t > 0 \quad (3.2)$$

dan nilai awal (*Initial value*)

$$c(x,0) = f(x_0), \quad \text{dimana nilai } f(x_0) = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \quad 0 < x < L \quad (3.3)$$

Pemecahan persamaan (3.1) bertujuan untuk mengetahui konsentrasi $c(x,t)$ pada balok tersebut. Dalam hal ini $c(x,t)$ didefinisikan sebagai konsentrasi pada posisi x dan waktu t dari persamaan (3.1) yang memenuhi syarat yang ditentukan oleh sifat fisik tersebut. Dalam menentukan penyelesaian $c(x,t)$ dari persamaan (3.1) yang memenuhi syarat awal dan syarat batas adalah dengan menerapkan metode pemisahan variabel dengan definisi

$$c(x,t) = X(x)T(t) \quad (3.4)$$

Dimana $X(x)$ adalah fungsi yang tergantung pada variabel x dan $T(t)$ adalah fungsi yang tergantung pada variabel t .

- a. Mendefinisikan turunan-turunan parsial pada persamaan difusi konveksi hingga mendapatkan persamaan diferensial biasa.

Karena $c(x,t) = X(x)T(t)$, maka dapat didefinisikan turunan-turunan parsial c sebagai berikut

$$\frac{\partial c}{\partial t} = X(x) \left(\frac{d}{dt} T \right)$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \left(\frac{d^2}{dx^2} X \right) T(t)$$

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \left(\frac{d}{dx} X \right) T(t)$$

Jika bentuk di atas disubstitusikan ke persamaan (3.1), maka persamaan (3.1)

$$\text{menjadi } X(x) \left(\frac{d}{dt} T \right) = D_{fus} \left(\frac{d}{dx^2} X \right) T(t) - v \left(\frac{d}{dx} X \right) T(t) \quad (3.5)$$

Persamaan (3.5) dapat ditulis sebagai bentuk

$$X(x)T'(t) = D_{fus}X''(x)T(t) - vX'(x)T(t)$$

$$X(x)T'(t) = T(t)(D_{fus}X''(x) - vX'(x))$$

$$\frac{D_{fus}X''(x) - vX'(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} \quad (3.6)$$

Ruas kiri memuat fungsi yang hanya tergantung pada x , sedangkan ruas kanan memuat fungsi yang hanya tergantung t . Ini berarti ruas kanan maupun ruas kiri sama dengan suatu konstanta λ , diperoleh

$$\frac{D_{fus}X''(x) - vX'(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda \quad (3.7)$$

Dimana λ merupakan konstanta dan disebut sebagai konstanta pemisah.

Persamaan (3.7) menghasilkan dua persamaan diferensial biasa yaitu

$$D_{fus}X''(x) - vX'(x) - \lambda X(x) = 0 \quad (3.8)$$

$$T'(t) - \lambda T(t) = 0 \quad (3.9)$$

b. Menentukan selesaian $X(x)$ dan $T(t)$ dari kedua persamaan diferensial biasa

Dalam menentukan selesaian $X(x)$ dan $T(t)$ dari kedua persamaan diferensial biasa ini (Persamaan (3.8) dan Persamaan (3.9)) maka $c(x,t) = X(x)T(t)$ harus memenuhi syarat batas dan syarat awal. Penyelesaian persamaan (3.8) yang hanya tergantung pada x diasumsikan $X(x)$ harus memenuhi syarat batas yang homogen

$$D_{fus} \left(\frac{d^2}{dx^2} X \right) - v \left(\frac{d}{dx} X \right) = \lambda X(x)$$
$$\begin{aligned} c(0,t) = X(0)T(t) &= 0 \\ c(L,t) = X(L)T(t) &= 0 \end{aligned} \quad \text{untuk semua } t \quad (3.10)$$

Jika $T(t) = 0$, maka $c(x,t)$ merupakan penyelesaian trivial yaitu $c = 0$. Agar memenuhi kondisi batas:

$$\begin{aligned} X(0) &= 0 \\ X(L) &= 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

harus mendapatkan penyelesaian non trivial. Dimana solusi non trivial didapat jika $T(t) \neq 0$.

Untuk memperoleh selesaian non trivial persamaan (3.10) dengan koefisien konstanta diperoleh dengan bentuk eksponensial yaitu $X(x) = e^{rx}$ merupakan solusi persamaan diferensial homogen

$$D_{fus} X''(x) - vX'(x) - \lambda X(x) = 0.$$

Dengan mensubstitusikan solusi tersebut dan turunannya ke dalam persamaan diferensial didapat:

$$D_{fus}(e^{rx})'' - v(e^{rx})' - \lambda e^{rx} = 0$$

$$e^{rx}(D_{fus}r^2 - vr - \lambda) = 0$$

sebab $e^{rx} \neq 0, \forall x \in \mathfrak{R}$, maka $D_{fus}r^2 - vr - \lambda = 0$ disebut persamaan karakteristik dari persamaan diferensial. Akar persamaan karakteristik dari persamaan diferensial adalah:

$$r_1 = \frac{v + \sqrt{v^2 + 4D_{fus}\lambda}}{2D_{fus}}$$

$$r_2 = \frac{v - \sqrt{v^2 + 4D_{fus}\lambda}}{2D_{fus}}$$

kemungkinan nilai r_1 dan r_2 bergantung dari nilai diskriminan, yaitu:

1. Bila $v^2 + 4D_{fus}\lambda > 0$ maka $r_1 \neq r_2$ (akar real dan berbeda).
2. Bila $v^2 + 4D_{fus}\lambda = 0$ maka $r_1 = r_2$ (akar real dan sama).
3. Bila $v^2 + 4D_{fus}\lambda < 0$ maka r_1, r_2 merupakan bilangan kompleks (imajiner).

1. Akar Karakteristik Real dan Berbeda

Misalkan persamaan karakteristik dari persamaan (3.8) merupakan bilangan real dan berbeda, $r_1 \neq r_2$. Maka $x_1(x) = e^{r_1x}$ dan $x_2(x) = e^{r_2x}$ merupakan solusi bebas linier dari persamaan diferensial homogen tersebut. Solusi umum dapat dituliskan:

$$X(x) = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} \quad (3.12)$$

sedangkan solusi khusus persamaan diferensial ditentukan dengan mencari nilai dari C_1 dan C_2 yang disubstitusikan pada syarat batasnya yaitu

$$X(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0 \text{ atau } C_1 = -C_2$$

$$X(L) = C_1 e^{r_1 L} + C_2 e^{r_2 L} = 0$$

$$\Leftrightarrow -C_2 e^{r_1 L} + C_2 e^{r_2 L} = 0$$

$$\Leftrightarrow C_2 (-e^{r_1 L} + e^{r_2 L}) = 0$$

Karena $-e^{r_1 L} + e^{r_2 L} \neq 0$

sehingga diperoleh $C_2 = 0$ karena $C_1 = -C_2$, maka $C_2 = 0$, akibatnya $X(x) = 0$,

sehingga tidak ada solusi tak trivial untuk $v^2 + 4D_{fus} \lambda > 0$.

2. Akar Karakteristik Real dan Sama

Misalkan persamaan karakteristik dari persamaan (3.8) untuk merupakan bilangan real dan sama, $X(x) = \frac{v}{2D_{fus}}$. Maka salah satu solusi persamaan tersebut

adalah $x_1 = e^{rx} = e^{\frac{v}{2D_{fus}}x}$. Untuk menentukan solusi yang lain, solusi kedua untuk

persamaan (3.8) didapat dengan memisalkan: $x_2 = w(x)y_1 = w(x)e^{\frac{v}{2D_{fus}}x}$. Fungsi

$w(x)$ dicari dengan mensubstitusikan solusi kedua dan turunan ke dalam persamaan (3.8):

$$x_2 = w(x)y_1 = w(x)e^{\frac{v}{2D_{fus}}x}$$

$$x_2' = w'(x)e^{\frac{v}{2D_{fus}}x} - \frac{v}{2D_{fus}}w(x)e^{\frac{vx}{2D_{fus}}}$$

$$x_2'' = \left(w''(x) - \frac{v}{2D_{fus}}w'(x) + \frac{v^2}{4D_{fus}^2}w(x) \right) e^{\frac{vx}{2D_{fus}}}$$

$$D_{fus} \left(w''(x) - \frac{v}{2a} w'(x) + \frac{v}{4D_{fus}^2} w(x) \right) e^{\frac{vx}{2D_{fus}}} -$$

$$v \left(w'(x) - \frac{v}{2D_{fus}} w(x) \right) e^{\frac{v}{2D_{fus}}x} + cw(x)e^{\frac{v}{2D_{fus}}x} = 0$$

$$D_{fus} \left(w''(x) - \frac{v}{2a} w'(x) + \frac{v}{4D_{fus}^2} w(x) \right) - v \left(w'(x) - \frac{v}{2D_{fus}} w(x) \right) + cw(x) = 0$$

$$D_{fus} w''(x) - \left(\frac{v^2}{4D_{fus}} - c \right) w''(x) = 0$$

karena $v^2 + 4D_{fus} \lambda = 0$, maka $D_{fus}''(x) = 0$. Sehingga, $w(x)$ dapat dinyatakan sebagai fungsi linear yaitu $w(x) = px + q$.

Ambil $p = 1$ dan $q = 0$, didapatkan $w(x) = x$ dan solusi kedua:

$x_2 = xe^{\frac{v}{2D_{fus}}x}$. Solusi pertama dan kedua Persamaan (3.8), r_1 dan r_2 merupakan solusi bebas linear, sehingga solusi umum persamaan (3.8) bila akar karakteristiknya dimisalkan r , yaitu

$$X(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx} \quad (3.13)$$

Dari persamaan (3.13) disubstitusikan syarat batas sehingga diperoleh

$$X(0) = C_1 = 0$$

$$X(L) = C_1 + LC_2 \text{ atau } LC_2$$

akibatnya $X(x) = 0$, jadi tidak ada solusi tak trivial.

3. Akar karakteristik Kompleks

Misal akar karakteristik dari persamaan (3.8) kompleks:

$$r_1 = \alpha + i\beta \text{ dan } r_2 = \alpha - i\beta \text{ dengan } i = \sqrt{-1}$$

dimana α dan β adalah bilangan real

$$\alpha = \frac{v}{2D_{fus}}, \quad \beta = \frac{\sqrt{v^2 + 4D_{fus}\lambda}}{2D_{fus}}$$

Dengan menyatakan bahwa fungsi $e^{r_1 x}$ dan $e^{r_2 x}$ adalah solusi untuk persamaan (3.8) dimana $r_1 = \alpha + i\beta$ merupakan bilangan kompleks yang berarti

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} \quad (3.14)$$

dimana $e^{i\beta x}$ itu sendiri diperoleh dengan cara diasumsikan pada deret Maclaurin, untuk e^z sama dengan z untuk bilangan real, yang mana $i^2 = -1$ sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \Lambda \\ &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} + \Lambda \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \Lambda \right) + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \Lambda \right) \end{aligned}$$

Ekspansi deret untuk bilangan real dan bilangan imajiner bagian demi bagian pada deret Maclaurin pada $\cos \theta$ dan $\sin \theta$ dapat disederhanakan sebagai berikut

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) \quad (3.14)$$

Persamaan (3.14) disebut rumus Euler.

Ketika rumus Euler dengan $\theta = \beta x$ digunakan pada persamaan (3.14) didapatkan

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) \quad (3.15)$$

Maka solusi umum persamaan (3.8) ditulis

$$\begin{aligned}
X(x) &= C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \\
&= C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha+i\beta)x} \\
&= C_1 e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) + C_2 e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x) \\
&= (C_1 + C_2) e^{\alpha x} \cos \beta x + i(C_1 - C_2) e^{\alpha x} \sin \beta x
\end{aligned}$$

dengan mensubstitusikan syarat batasnya $X(0) = X(L) = 0$

$$\begin{aligned}
X(x) &= e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) \\
X(0) &= e^{\alpha \cdot 0} (C_1 \cos \beta \cdot 0 + C_2 \sin \beta \cdot 0) \\
&= C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 \\
&= C_1
\end{aligned}$$

maka diperoleh $X(0) = C_1 = 0$, jadi $X(x) = e^{\alpha x} C_2 \sin \beta x$.

$$X(L) = e^{\alpha L} (C_1 \cos \beta L + C_2 \sin \beta L) \text{ karena } C_1 = 0 \text{ maka}$$

$e^{\alpha L} C_2 \sin \beta L = 0$ atau $\sin \beta L = 0$ untuk memperoleh solusi tak trivial $X(x) \neq 0$,

ambil $C_2 \neq 0$ sehingga nilai eigennya harus memenuhi

$$\sin \beta L = 0$$

$$\beta L = n\pi$$

$$\beta = \frac{n\pi}{L}$$

$$\frac{\sqrt{v^2 + 4D_{fus} \lambda}}{2D_{fus}} = \frac{n\pi}{L}$$

$$\sqrt{v^2 + 4D_{fus} \lambda} = \frac{2D_{fus} n\pi}{L}$$

$$v^2 + 4D_{fus} \lambda = \left(\frac{2D_{fus} n\pi}{L} \right)^2$$

$$\lambda = \frac{\left(\frac{2D_{fus} n\pi}{L} \right)^2 - v^2}{4D_{fus}}$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Jadi nilai eigennya r_1 dan r_2 adalah positif, maka dari persamaan (3.8) diperoleh fungsi eigen yaitu

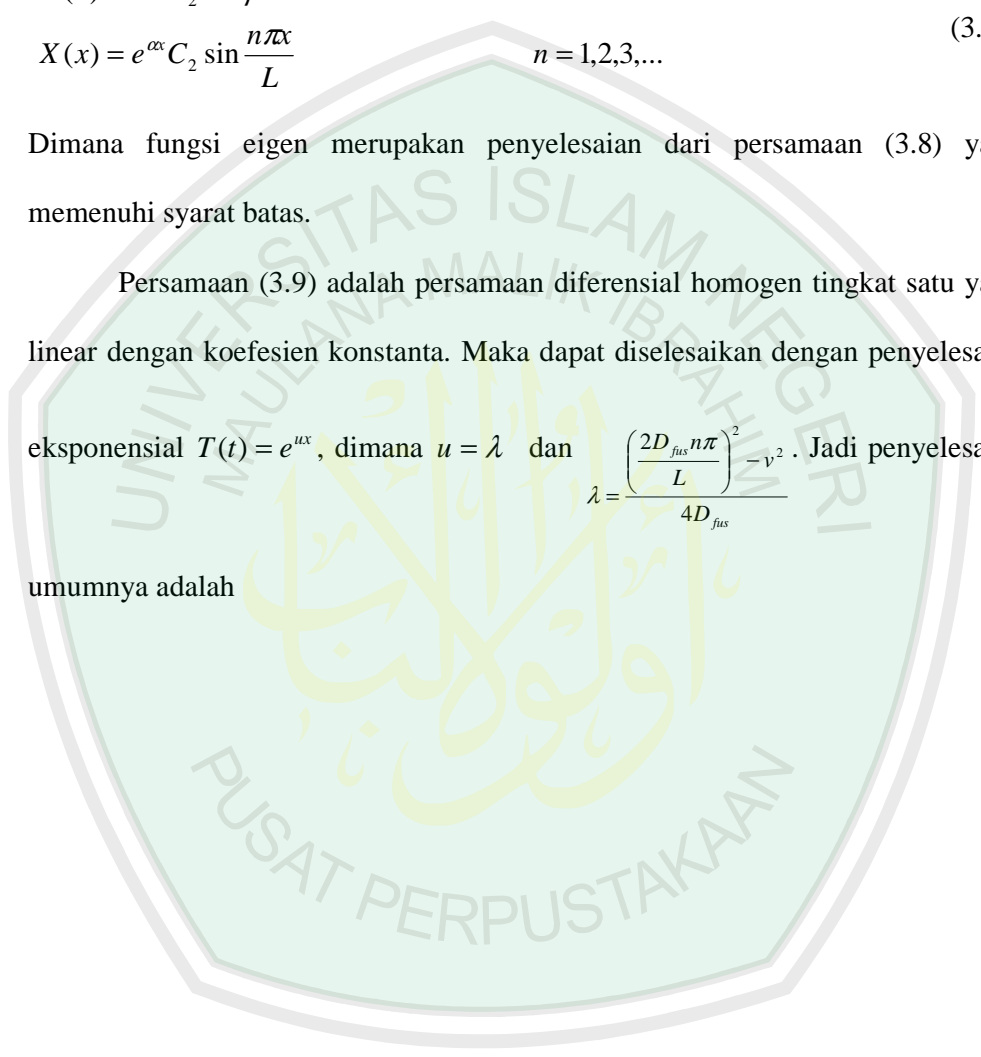
$$\begin{aligned} X(x) &= e^{\alpha x} C_2 \sin \beta x \\ X(x) &= e^{\alpha x} C_2 \sin \frac{n\pi x}{L} \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.16)$$

Dimana fungsi eigen merupakan penyelesaian dari persamaan (3.8) yang memenuhi syarat batas.

Persamaan (3.9) adalah persamaan diferensial homogen tingkat satu yang linear dengan koefisien konstanta. Maka dapat diselesaikan dengan penyelesaian

eksponensial $T(t) = e^{ux}$, dimana $u = \lambda$ dan $\lambda = \frac{\left(\frac{2D_{fus} n\pi}{L}\right)^2 - v^2}{4D_{fus}}$. Jadi penyelesaian

umumnya adalah



$$T'(t) - \lambda T(t) = 0$$

$$T'(t) - \frac{\left(\frac{2D_{fus}n\pi}{L}\right)^2 - v^2}{4D_{fus}} T(t) = 0$$

$$T'(t) = \frac{\left(\frac{2D_{fus}n\pi}{L}\right)^2 - v^2}{4D_{fus}} T(t)$$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{\left(\frac{2D_{fus}n\pi}{L}\right)^2 - v^2}{4D_{fus}} T(t)$$

$$\int \frac{T'(t)}{T(t)} dt = \int \frac{\left(\frac{2D_{fus}n\pi}{L}\right)^2 - v^2}{4D_{fus}} dt$$

$$\ln T(t) - \frac{\left(\frac{2D_{fus}n\pi}{L}\right)^2 - v^2}{4D_{fus}} t = C$$

$$\ln T(t) = C + \frac{\left(\frac{2D_{fus}n\pi}{L}\right)^2 - v^2}{4D_{fus}} t$$

$$\ln T(t) = \ln e^{C + \frac{\left(\frac{2D_{fus}n\pi}{L}\right)^2 - v^2}{4D_{fus}} t}$$

$$T(t) = e^{C + \frac{\left(\frac{2D_{fus}n\pi}{L}\right)^2 - v^2}{4D_{fus}} t}, \quad c = e^C$$

$$T(t) = ce^{\frac{\left(\frac{2D_{fus}n\pi}{L}\right)^2 - v^2}{4D_{fus}} t}$$

(3.17)

Dimana c adalah konstanta, dengan mensubstitusikan persamaan (3.16) dan (3.17)

ke persamaan difusi konveksi (3.1) menjadi:

$$c(x,t) = X(x)T(t)$$

$$\begin{aligned} &= e^{\frac{v}{2D_{fus}}x} C_2 \sin \beta x e^{-\alpha t} \\ &= e^{\frac{v}{2D_{fus}}x} C_2 \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) e^{\frac{\left(\frac{2D_{fus}n\pi}{L} \right)^2 - v^2}{4D_{fus}}t} \\ &= B \sin \frac{n\pi x}{L} e^{\frac{\left(\frac{2D_{fus}n\pi}{L} \right)^2 - v^2}{4D_{fus}}t + \frac{v}{2D_{fus}}x} \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Jadi penyelesaian persamaan difusi konveksi satu dimensi adalah

$$\begin{aligned} C_n(x,t) &= X_n(x)T_n(t) \\ C_n(x,t) &= B_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{\frac{\left(\frac{2D_{fus}n\pi}{L} \right)^2 - v^2}{4D_{fus}}t + \frac{v}{2D_{fus}}x} \end{aligned} \quad (3.18)$$

dimana B_n merupakan konstanta dengan prinsip superposisi. Maka persamaan difusi konveksi satu dimensi yang linear (3.18) menjadi

$$C(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{\frac{\left(\frac{2D_{fus}n\pi}{L} \right)^2 - v^2}{4D_{fus}}t + \frac{v}{2D_{fus}}x} \quad (3.19)$$

Untuk menyelesaikan persamaan satu dimensi (dengan kondisi batas nol), maka persamaan (3.19) menunjukkan persamaan difusi konveksi yang dapat diselesaikan jika syarat awalnya adalah

$$C(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{\frac{v}{2D_{fus}}x} \quad (3.20)$$

c. Menentukan koefisien B_n

Untuk menentukan koefisien B_n diasumsikan bahwa

$$f(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{\frac{v}{2D_{fus}}x} \quad (3.21)$$

Berdasarkan ulasan persamaan difusi konveksi, maka fungsi eigen $e^{\frac{v}{2D_{fus}}x} \sin \frac{n\pi x}{L}$

memenuhi faktor integral yaitu

$$\int_0^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0; m \neq n \\ \frac{L}{2}; m = n \end{cases} \quad (3.22)$$

Dimana m dan n adalah bilangan positif

Persamaan (3.21) dikalikan dengan $\left[\frac{\sin m\pi x}{L} \right]$ menjadi

$$f(x_0) \frac{\sin m\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} e^{\frac{v}{2D_{fus}}x} \quad (3.23)$$

Kemudian diintegalkan dari $x=0$ sampai $x=L$

$$\int_0^L f(x_0) \frac{\sin m\pi x}{L} dx = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} e^{\frac{v}{2D_{fus}}x} dx \quad (3.24)$$

Dari persamaan (3.22) didapat bahwa tiap elemen jumlahan adalah nol ketika $n \neq m$ dan untuk $n = m$ mempunyai kontribusi pada jumlah tak hingga, maka pada persamaan (3.24) m dapat diganti oleh n menjadi:

$$\int_0^L f(x_0) \frac{\sin m\pi x}{L} dx_0 = B_n \int_0^L \sin^2 \frac{n\pi x}{L} e^{\frac{v}{2D_{fus}}x} dx \quad (3.25)$$

$$B_n = \frac{\int_0^L f(x_0) \sin \frac{n\pi x}{L} dx}{\int_0^L \sin^2 \frac{n\pi x}{L} e^{\frac{v}{2D_{fus}}x} dx}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{L} \int_0^L f(x_0) e^{-\frac{v}{2D_{fus}} x} \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\
&= -\frac{2f(x_0) e^{-\frac{v}{2D_{fus}} x} \cos \frac{n\pi x}{L}}{n\pi}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Jadi persamaan difusi konveksi satu dimensi adalah

$$\begin{aligned}
c(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{L} \int_0^L f(x_0) e^{-\frac{v}{2D_{fus}} x} \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right] \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-\left(\frac{2Dn\pi}{L}\right)^2 t + \frac{v}{2D_{fus}} x} \\
\text{atau} \\
c(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2f(x_0) e^{-\frac{v}{2D_{fus}} x} \cos \frac{n\pi x}{L}}{n\pi} \right) \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-\left(\frac{2Dn\pi}{L}\right)^2 t + \frac{v}{2D_{fus}} x}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

dengan memasukkan nilai $L = 5 \text{ cm}$, $D = 1,46 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ dan $v = 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ cm s}^{-1}$ pada persamaan (3.27) maka akan didapatkan besarnya konsentrasi pada $\Delta x = 0,5$ dan $\Delta t = 0.005$ yang ingin diketahui. Dengan bantuan program Matlab grafik hasil dari solusi analitik dapat dilihat pada Gambar 3.3.

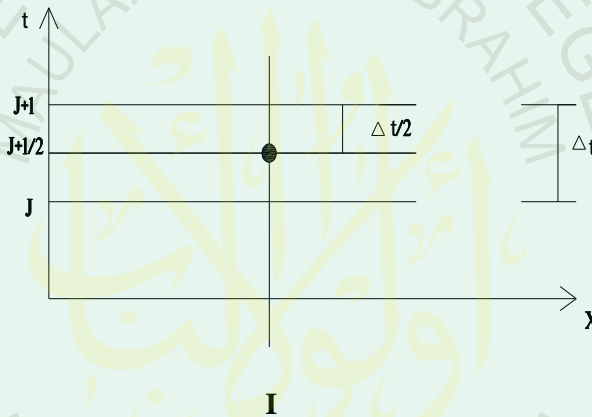
3.2 Solusi Numerik

Salah satu metode numerik untuk penyelesaian persamaan diferensial parsial adalah metode beda hingga. Dimana metode beda hingga itu sendiri memiliki bermacam skema (implisit, eksplisit, Crank-Nicholson). Pada skripsi ini akan dicoba penggunaan skema Crank-Nicolson yang lebih sederhana dan mudah dipahami. Skema ini cukup baik dalam menyelesaikan persamaan difusi satu dimensi. Di samping itu dari segi numerik, skema ini mempunyai tingkat

kestabilan yang lebih baik dibandingkan skema-skema numerik lainnya terhadap penyelesaian persamaan difusi satu dimensi.

a. Mengubah persamaan difusi konveksi ke dalam bentuk terdiskritisasi.

Pada skema Crank-Nicholson, variabel $n+1$ dihitung berdasarkan variabel pada waktu ke n yang sudah diketahui (Gambar 3.1). dengan menggunakan skema yang ditunjukkan pada Gambar (3.1) fungsi variabel (konsentrasi) $c(x,t)$ dan turunannya dalam ruang dan waktu didekati oleh bentuk berikut:



Gambar 3.1 Penerapan metode Crank-Nicholson

Dengan metode ini nilai turunan $\left(\frac{\partial c}{\partial t}\right)_i^{n+1/2}$ dihitung

$$\left(\frac{\partial c}{\partial t}\right)_i^{n+1/2} = \frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{2(\Delta t / 2)}$$

$$\left(\frac{\partial c}{\partial t}\right)_i^{n+1/2} = \frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t} \tag{3.28}$$

Untuk $\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)_i^{n+1/2}$ dihitung

$$\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)_i^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)_i^n + \left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)_i^{n+1} \right]$$

Dengan menggunakan diskretisasi perbedaan tengah:

$$\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)_i^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left[\frac{c_{i+1}^n - c_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{c_{i+1}^{n+1} - c_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right] \quad (3.29)$$

sedangkan $\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\right)_i^{n+1/2}$ didapatkan dari

$$\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\right)_i^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\right)_i^n + \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\right)_i^{n+1} \right]$$

atau

$$\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\right)_i^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left[\frac{c_{i+1}^n - 2c_i^n + c_{i-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{c_{i+1}^{n+1} - 2c_i^{n+1} + c_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right] \quad (3.30)$$

Dengan mensubstitusikan (3.28), (3.29) dan (3.30) ke persamaan difusi konveksi

(3.1), bentuk diskretisasi perbedaan hingga dari (3.1) adalah:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} = D_{fus} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -v \frac{\partial c}{\partial x} + D_{fus} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t} = & -\frac{v}{2} \left[\frac{c_{i+1}^n - c_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{c_{i+1}^{n+1} - c_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right] \\ & + \frac{D_{fus}}{2} \left[\frac{c_{i+1}^n - 2c_i^n + c_{i-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{c_{i+1}^{n+1} - 2c_i^{n+1} + c_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right] \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned}
& -\left(\frac{v}{4\Delta x} + \frac{D_{fus}}{2\Delta x^2}\right)c_{i-1}^{n+1} + \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{D_{fus}}{\Delta x^2}\right)c_i^{n+1} + \left(\frac{v}{4\Delta x} - \frac{D_{fus}}{2\Delta x^2}\right)c_{i+1}^{n+1} = \\
& \left(\frac{v}{4\Delta x} + \frac{D_{fus}}{2\Delta x^2}\right)c_{i-1}^n + \left(\frac{1}{\Delta t} - \frac{D_{fus}}{\Delta x^2}\right)c_i^n - \left(\frac{v}{4\Delta x} - \frac{D_{fus}}{2\Delta x^2}\right)c_{i+1}^n
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Jika dimisalkan

$$s = \frac{v}{2\Delta x} \quad \text{dan} \quad h = \frac{D_{fus}}{\Delta x^2}$$

maka persamaan (3.32) dapat dibentuk menjadi

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}(s+h)c_{i-1}^{n+1} + \left[\frac{1}{\Delta t} + h\right]c_i^{n+1} + \frac{1}{2}(s-h)c_{i+1}^{n+1} = \\
& \frac{1}{2}(s+h)c_{i-1}^n + \left[\frac{1}{\Delta t} - h\right]c_i^n - \frac{1}{2}(s-h)c_{i+1}^n
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Dari persamaan (3.33) maka dapat disederhanakan ke dalam bentuk sebagai berikut:

$$Ac_{i-1}^{n+1} + Bc_i^{n+1} + Cc_{i+1}^{n+1} = -Ac_{i-1}^n + \left[\frac{1}{\Delta t} - h\right]c_i^n - Cc_{i+1}^n \tag{3.34}$$

atau

$$Ac_{i-1}^{n+1} + Bc_i^{n+1} + Cc_{i+1}^{n+1} = K \tag{3.35}$$

Dimana

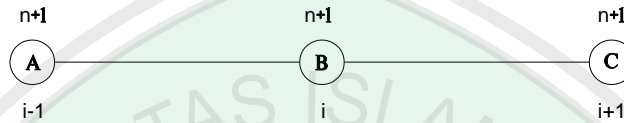
$$A = -\frac{1}{2}(s+h) \quad B = \frac{1}{\Delta t} + h$$

$$C = \frac{1}{2}(s-h)$$

$$K = -Ac_{i-1}^n + \left[\frac{1}{\Delta t} - h\right]c_i^n - Cc_{i+1}^n \tag{3.36}$$

- b. Membentuk pola iterasi bagi bentuk persamaan difusi konveksi yang terdiskritisasi hingga terbentuk matriks tridiagonal

Persamaan (3.33) dapat dibuat pola perhitungan bagi $c_{i,j}^{n+1}$ sebagai berikut



Gambar 3.2 Pola c_i^{n+1}

Penerapan persamaan (3.34) pada $i = 1, 2, \dots, M-1$ akan memberikan sistem persamaan linear dengan bentuk tridiagonal sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix}
 B & C & 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\
 A & B & C & 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\
 0 & A & B & C & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & A & B & C & 0 & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & A & B & C & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & A & B & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\
 M & M & M & M & M & M & 0 & M & M & M \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda & B & C & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda & A & B & C \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & A & B
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 c_1^{n+1} \\
 c_2^{n+1} \\
 c_3^{n+1} \\
 c_4^{n+1} \\
 c_5^{n+1} \\
 c_6^{n+1} \\
 c_7^{n+1} \\
 M \\
 c_{i-1}^{n+1} \\
 c_i^{n+1}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 K_1 \\
 K_2 \\
 K_3 \\
 K_4 \\
 K_5 \\
 K_6 \\
 K_7 \\
 M \\
 K_{i-1} \\
 K_i
 \end{bmatrix}
 \quad (3.37)$$

Ruas kanan matriks (3.37) dapat juga dibuat matriks terpisahnya sebagai berikut

dimana $F = \frac{1}{\Delta t} - h$:

$$\begin{bmatrix}
 F & -C & 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\
 -A & F & -C & 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -A & F & -C & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -A & F & -C & 0 & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -A & F & -C & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -A & F & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\
 M & M & M & M & M & M & 0 & M & M & M \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda & F & -C & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda & -A & F & C \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & -A & F
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 c_1^n \\
 c_2^n \\
 c_3^n \\
 c_4^n \\
 c_5^n \\
 c_6^n \\
 c_7^n \\
 M \\
 c_{i-1}^n \\
 c_i^n
 \end{bmatrix}
 \quad (3.38)$$

Matriks seperti di atas dapat diselesaikan dengan menggunakan metode yang telah diberikan dalam Bab II untuk mendapatkan nilai c_i ($i = 1, \dots, M$). Matriks tersebut merupakan matriks tri-diagonal karena koefisien dari matriks tersebut banyak yang bernilai nol.

$$\text{Jadi untuk penyelesaian persamaan difusi konveksi } \frac{\partial c}{\partial t} = D_{fus} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - v \frac{\partial c}{\partial x}$$

dengan kondisi awal (3.3) dan kondisi batas (3.2) pada balok dilakukan dengan membagi balok tersebut menjadi sejumlah pias. Panjang pias adalah $\Delta x = L/M$, dengan M adalah jumlah pias sedangkan interval waktu hitungan adalah Δt . Dengan persamaan (3.31) dan kondisi batas ke dua ujung balok, memungkinkan untuk menghitung c_i^{n+1} ($i = 1, \dots, M-1$) berdasarkan nilai c_i^n ($i = 1, \dots, M$) yang telah diketahui. Pada awal perhitungan, nilai awal dari konsentrasi c_i^0 diketahui sebagai kondisi awal. Dari nilai awal tersebut dan kondisi batas, dapat dihitung nilai c di sepanjang balok ($i = 1, \dots, M$) pada waktu berikutnya. Nilai yang telah dihitung tersebut digunakan untuk menghitung c_i ($i = 1, \dots, M$) untuk waktu

berikutnya lagi. Prosedur hitungan ini diulangi lagi sampai akhirnya di dapat nilai $c_i (i = 1, \dots, M)$ untuk semua waktu yang diinginkan.

Dengan nilai $D = 1,46 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2 / \text{sec}$ dan $v = 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ cm s}^{-1}$ panjang balok 5 cm dan dibagi menjadi 10 pias, sehingga panjang pias adalah $\Delta x = 5/10 = 0,5 \text{ cm}$. Kondisi awal dan kondisi batas untuk $\Delta x = 0,5 \text{ cm}$ diberikan dalam bentuk angka seperti terlihat dalam table 3.2. Berdasarkan kondisi tersebut kemudian dihitung nilai c_i^n disepanjang balok ($x = 2;4;6;\dots$) dan pada setiap waktu $n = (1,2,3,\dots)$. Hitungan dilakukan untuk beberapa keadaan untuk $\Delta t = 0,05$. Sehingga nilai s dan h dapat diketahui sebagai berikut

$$\begin{aligned} s &= \frac{v}{2\Delta x^2} & h &= \frac{D_{fus}}{\Delta x^2} \\ &= \frac{1,6 \cdot 10^{-4}}{2(0,5)^2} & \text{dan} &= \frac{1,46 \cdot 10^{-5}}{(0,5)^2} \\ &= 1,6 \cdot 10^{-4} & &= 5,84 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

Dengan menggunakan nilai-nilai tersebut persamaan (3.34) menjadi

$$Ac_{i-1}^{n+1} + Bc_i^{n+1} + Cc_{i+1}^{n+1} = K \quad (3.39)$$

Dimana

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{2}(s + h) & B &= \frac{1}{\Delta t} + h \\ &= -\frac{1}{2}(1,6 \cdot 10^{-4} + 5,84 \cdot 10^{-5}) & &= \frac{1}{0,05} + 5,84 \cdot 10^{-5} \\ &= -10,92 \cdot 10^{-5} & &= 20,0000584 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{1}{2}(s-h) \\
 &= \frac{1}{2}(1,6 \cdot 10^{-4} - 5,84 \cdot 10^{-5}) \\
 &= 5,08 \cdot 10^{-5}
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\Delta t} - h = \frac{1}{0,05} - 5,84 \cdot 10^{-5} = 19,9999416$$

$$\begin{aligned}
 K &= -Ac_{i-1}^n + \left[\frac{1}{\Delta t} - h \right] c_i^n - Cc_{i+1}^n \\
 &= 8,92 \cdot 10^{-5} c_{i-1}^n + 19,999946 c_i^n - 13,08 \cdot 10^{-5} c_{i+1}^n
 \end{aligned}$$

Persamaan (3.39) digunakan untuk menghitung konsentrasi c_i^n dari $i = 1$ sampai 9 dan dari $n = 1$ sampai dengan waktu yang dikehendaki (dalam contoh ini $n = 10$). Untuk $n = 1$ dan i bergerak dari $i = 0$ sampai 11, persamaan (3.39) dapat ditulis dalam bentuk berikut ini. Dalam persamaan tersebut c_i^1 adalah konsentrasi di titik i pada waktu ke 1, sedangkan c_i^0 adalah konsentrasi pada awal hitung (kondisi awal).

Untuk $n = 0$

$i = 1$:

$$\begin{aligned}
 Ac_0^1 + Bc_1^1 + Cc_2^1 &= -Ac_0^0 + \left[\frac{1}{\Delta t} - h \right] c_1^0 - Cc_2^0 \\
 K_1 &= 10,92 \cdot 10^{-5} (0) + 19,9999416 \cdot (1,5 \cdot 10^{-2}) - 5,08 \cdot 10^{-5} (1,5 \cdot 10^{-2}) \\
 &= 0,299998362
 \end{aligned}$$

$i = 2$:

$$\begin{aligned}
 Ac_1^1 + Bc_2^1 + Cc_3^1 &= -Ac_1^0 + \left[\frac{1}{\Delta t} - h \right] c_2^0 - Cc_3^0 \\
 K_2 &= 10,92 \cdot 10^{-5} (1,5 \cdot 10^{-2}) + 19,9999416 \cdot (1,5 \cdot 10^{-2}) - 5,08 \cdot 10^{-5} (1,5 \cdot 10^{-2}) \\
 &= 0.3
 \end{aligned}$$

$i = 3$:

$$Ac_2^1 + Bc_3^1 + Cc_4^1 = -Ac_2^0 + \left[\frac{1}{\Delta t} - h \right] c_3^0 - Cc_4^0$$

$$K_3 = 10,92 \cdot 10^{-5} (1,5 \cdot 10^{-2}) + 19,9999416 \cdot (1,5 \cdot 10^{-2}) - 5,08 \cdot 10^{-5} (1,5 \cdot 10^{-2}) \\ = 0.3$$

$i = 4$:

$$Ac_3^1 + Bc_4^1 + Cc_5^1 = -Ac_3^0 + \left[\frac{1}{\Delta t} - h \right] c_4^0 - Cc_5^0$$

$$K_4 = 10,92 \cdot 10^{-5} (1,5 \cdot 10^{-2}) + 19,9999416 \cdot (1,5 \cdot 10^{-2}) - 5,08 \cdot 10^{-5} (1,5 \cdot 10^{-2}) \\ = 0.3$$

$i = 5$:

$$Ac_4^1 + Bc_5^1 + Cc_6^1 = -Ac_4^0 + \left[\frac{1}{\Delta t} - h \right] c_5^0 - Cc_6^0$$

$$K_5 = 10,92 \cdot 10^{-5} (1,5 \cdot 10^{-2}) + 19,9999416 \cdot (1,5 \cdot 10^{-2}) - 5,08 \cdot 10^{-5} (1,5 \cdot 10^{-2}) \\ = 0.3$$

$i = 6$:

$$Ac_5^1 + Bc_6^1 + Cc_7^1 = -Ac_5^0 + \left[\frac{1}{\Delta t} - h \right] c_6^0 - Cc_7^0$$

$$K_6 = 10,92 \cdot 10^{-5} (1,5 \cdot 10^{-2}) + 19,9999416 \cdot (1,5 \cdot 10^{-2}) - 5,08 \cdot 10^{-5} (1,5 \cdot 10^{-2}) \\ = 0.3$$

$i = 7$:

$$Ac_6^1 + Bc_7^1 + Cc_8^1 = -Ac_6^0 + \left[\frac{1}{\Delta t} - h \right] c_7^0 - Cc_8^0$$

$$K_7 = 10,92 \cdot 10^{-5} (1,5 \cdot 10^{-2}) + 19,9999416 \cdot (1,5 \cdot 10^{-2}) - 5,08 \cdot 10^{-5} (1,5 \cdot 10^{-2}) \\ = 0.3$$

$i = 8$:

$$Ac_7^1 + Bc_8^1 + Cc_9^1 = -Ac_7^0 + \left[\frac{1}{\Delta t} - h \right] c_8^0 - Cc_9^0$$

$$K_8 = 10,92 \cdot 10^{-5} (1,5 \cdot 10^{-2}) + 19,9999416 \cdot (1,5 \cdot 10^{-2}) - 5,08 \cdot 10^{-5} (1,5 \cdot 10^{-2}) \\ = 0.3$$

$i=9$:

$$Ac_8^1 + Bc_9^1 + Cc_{10}^1 = -Ac_8^0 + \left[\frac{1}{\Delta t} - h \right] c_9^0 - Cc_{10}^0$$

$$K_9 = 10,92 \cdot 10^{-5} (1,5 \cdot 10^{-2}) + 19,9999416 \cdot (1,5 \cdot 10^{-2}) - 5,08 \cdot 10^{-5} (0)$$

$$= 0.300000762$$

Bentuk matrik tri-diagonalnya adalah sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} B & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A & B & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & B & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & B & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A & B & C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A & B & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A & B & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A & B & C \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^1 \\ c_2^1 \\ c_3^1 \\ c_4^1 \\ c_5^1 \\ c_6^1 \\ c_7^1 \\ c_8^1 \\ c_9^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \\ K_5 \\ K_6 \\ K_7 \\ K_8 \\ K_9 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

$A \qquad \qquad \qquad x \qquad \qquad \qquad B$

Dengan Algoritma Thomas seperti yang telah dijabarkan pada bab II kita dapat memperoleh nilai c_i .

Selanjutnya hasil hitungan pada waktu $n = 0$ tersebut digunakan untuk menghitung konsentrasi pada waktu $n = 1$ dan seterusnya sampai dengan n yang diinginkan. Hitungan ini dapat dilakukan dengan menggunakan bantuan komputer dalam kesempatan ini penulis menggunakan program MATLAB. Hasil program adalah sebagai mana tertera pada Tabel 3.1:

MATRIK HAL.70

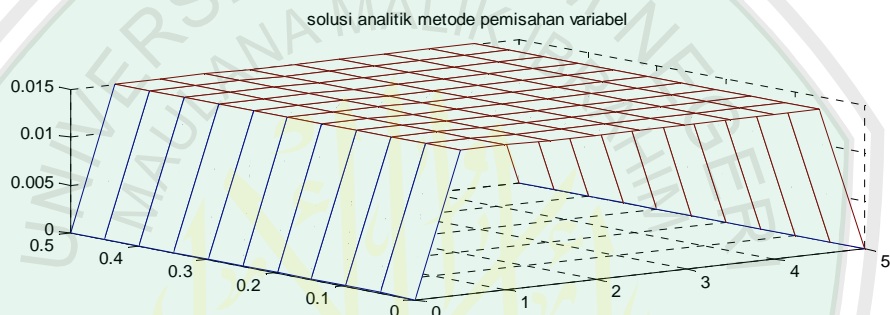
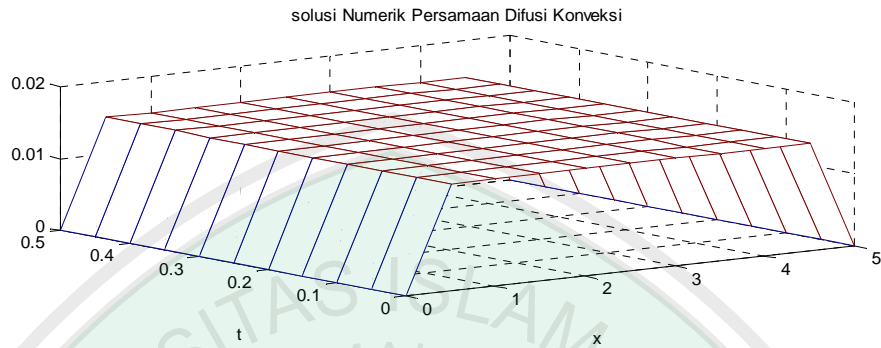
Di PDF hal. 70



TABEL HASIL SOLUSI NUMERIK HAL. 71-73

Di PDF hal. 71-73





Gambar 3.3

Grafik Solusi Numerik dan Solusi Analitik

3.3 Analisis Galat

Penyelesaian secara numerik dari suatu persamaan matematika hanya memberikan nilai perkiraan yang mendekati nilai eksak (benar) dari penyelesaian analitik. Berarti dalam penyelesaian numerik tersebut terdapat kesalahan (galat) terhadap nilai eksak dan ketidakpastian dapat terjadi. Untuk menghitung nilai-nilai konsentrasi sepanjang sumbu x yang berbentuk matriks besar berukuran 9×9 penulis menggunakan program Matlab. Hal ini dilakukan untuk menghindari ketidakteelitian dalam menyelesaikan matriksnya dalam memecahkan kecepatan pada semua x dan t yang diinginkan. Hasilnya dapat dilihat pada Tabel 3.1. Hasil hitungan kedua solusi tersebut menunjukkan bahwa perubahan konsentrasi terjadi secara berangsur-angsur, dan hal ini sesuai dengan kondisi fisik.

Galat kesalahan dari penyelesaian secara analitik dan numerik dari persamaan difusi konveksi terdiri dari galat absolut dan galat relatif seperti yang telah dijelaskan pada BAB II. Galat absolut merupakan selisih antara nilai eksak dan nilai perkiraan. Yang dimaksud nilai eksak disini adalah besarnya konsentrasi yang dicari secara analitik dengan metode pemisahan variabel sedangkan nilai perkiraan adalah besarnya konsentrasi yang dicari dengan metode numerik skema Crank-Nicolson. Untuk pencarian galat dapat dicari dengan bantuan program Matlab. Hasil dari pencarian galat secara keseluruhan ditabelkan yaitu pada Tabel 3.2 sebagai berikut:

TABEL GALAT HAL 76-78

Di PDF hal. 76-78



Dari Tabel (3.2) dapat dilihat galat pada setiap x dan t yang ada tidak terlalu besar dalam bentuk 10^{-5} jadi ini membuktikan bahwa metode Crank-Nicholson ini merupakan solusi numerik yang nilainya mendekati nilai eksaknya.

Galat dari iterasi 1 sampai 10 yang paling kecil adalah pada iterasi 1 pada $x = 0,5$, $t = 0,05$ yaitu sebesar 0.04850749164148. Galat untuk $x = 1$ sampai $x = 8$ dari iterasi 1 sampai 10 saling berdekatan karena besarnya konsentrasi pada titik tersebut baik secara analitik maupun numerik konsentrasinya berubah sedikit demi sedikit. Perubahan konsentrasi pada setiap titik yang sangat kecil itu menunjukkan laju difusi yang sangat pelan dikarenakan kecepatan transport partikel atau konveksinya sangat lambat yaitu $1,6 \cdot 10^{-4} \text{ cm s}^{-1}$ selain juga dipengaruhi oleh besarnya koefisien difusinya.

3.4 Solusi Analitik dan Solusi Numerik dalam perspektif islam

Dalam penelitian kali ini, penulis mencari solusi numerik dan solusi analitik dari persamaan difusi konveksi. Dengan kedua solusi tersebut penulis mencari nilai konsentrasi zat kimia suatu produk baik bahan mentah maupun hasil industri bahan kimia di lokasi (titik) x dan setiap waktu t pada suatu sistem yang berupa balok. Hal tersebut merupakan salah satu bukti bahwa matematika berfungsi sebagai bahasa ilmu dengan lingkup universal. Bahwasannya matematika dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan dalam bidang kimia fisik yaitu persamaan difusi konveksi dan ilmu matematika itu sendiri merupakan suatu bentuk ilmu yang diturunkan oleh Allah SWT.

Masalah matematika khususnya persamaan diferensial parsial dapat diselesaikan baik secara analitik maupun numerik merupakan bukti bahwa setiap

masalah ada beberapa penyelesaian yang dapat kita ambil sebagai jalan keluar atau sebagai solusi pemecahan dari suatu masalah. Ketika suatu masalah itu sulit untuk diselesaikan dengan satu cara maka hal tersebut pasti ada cara atau penyelesaian yang lain. Sebagaimana dalam Firman-Nya pada Qur'an Surat Alam Nasyroh, ayat 5-6:

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾ إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾

Artinya: “ *Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan (5) Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan (6)*”. (QS. Alam Nasyroh (94): 5-6)

Dari penjabaran ayat tersebut kita dapat mengetahui bahwa ada kemudahan yang telah dikaruniakan Allah pada kita sebagai beberapa solusi alternatif.

Dengan solusi numerik dan solusi analitik, penulis menjadikannya sebagai cara untuk mengetahui konsentrasi disetiap titik untuk dikaji dalam penelitian ini. Setelah terdapat beberapa peneliti sebelumnya, dimana mereka telah mendapatkan solusi dari persamaan kimia fisik yang lain, tidak ada salahnya jika tetap berusaha untuk menyelesaikan persamaan difusi konveksi yang merupakan salah satu persamaan matematis pada bidang kimia fisik agar kita dapat mengembangkan ilmu pengetahuan yang ada. Maka, penulis mengharapkan untuk bersikap pantang menyerah dan percaya diri saat mengerjakan atau menyelesaikan suatu metode sampai mendapatkan solusinya. Saat gagal atau tidak bisa menyelesaikan, kita dituntut untuk mencari cara lain untuk menyelesaikannya.

Harus percaya diri bahwa setiap usaha yang kita lakukan tidak akan sia-sia. Mencoba dan terus mencoba, sampai pada akhirnya kita dapat menyelesaikannya. Kegagalan dengan satu metode tidak boleh mengurangi semangat untuk mencari metode yang lain sampai mendapatkan solusi. Saat keberhasilan untuk mendapatkan suatu solusi tercapai maka rasa puas dan syukur akan tumbuh. Sungguh dalam mencari solusi persamaan untuk mengetahui konsentrasi dalam waktu dan jarak tertentu mengajarkan pentingnya sikap pantang menyerah, selalu semangat dan percaya diri. Inilah sikap mutiara yang sangat berguna dalam kehidupan.

Sikap pantang menyerah, pantang berputus asa dan percaya diri sangat dianjurkan dan merupakan perintah dalam Al-Qur'an. Dalam hidup, jangan suka berputus asa. Jangan apatis, tapi hiduplah dengan optimis. Putus asa itu adalah sikap hidup orang kafir dan harus dihindari. Kita harus percaya diri dan yakin bahwa Allah akan selalu menyertai. Sikap optimis bahwa rahmat Allah akan selalu menyertai akan menghasilkan sikap sadar dan tawakkal. Kita perlu merenungkan firman Allah dalam QS Yusuf ayat 87

يٰۤاِبْنَىٓ اٰدَهْبُوْا فَاَتَحَسَّسُوْا مِنْ يُّوسُفَ وَاٰخِيهِ وَاَلَا تٰتٰىسُوْا مِنْ رُّوْحِ
اَللّٰهِ اِنَّهٗ لَا ئٰاِيْسُ مِنْ رُّوْحِ اَللّٰهِ اِلَّا الْقَوْمُ الْكٰفِرُوْنَ ﴿٨٧﴾

Artinya: "Hai anak-anakku, pergilah kamu, maka carilah berita tentang Yusuf dan saudaranya dan jangan kamu berputus asa dari rahmat Allah. Sesungguhnya tiada berputus asa dari rahmat Allah, melainkan kaum yang kafir" (QS Yusuf (12): 87)

Dalam QS Al-Hijr ayat 56

قَالَ وَمَنْ يَقْنَطُ مِنْ رَحْمَةِ رَبِّهِ إِلَّا الضَّالُّونَ



Artinya: Ibrahim berkata: "Tidak ada orang yang berputus asa dari rahmat Tuhan-nya, kecuali orang-orang yang sesat" (QS Al-Hijr (15): 56)

Sehingga dalam mencari solusi atau memecahkan suatu persamaan difusi konveksi sampai mengetahui konsentrasi dalam kondisi tertentu akan terbentuk pribadi yang berkualitas dan mengasah kemampuan berfikir untuk pantang menyerah. Sikap tersebut diharapkan bisa membawa kita semua kepada fitrah penciptaannya, yaitu mencapai ridho Allah SWT. Dalam penelitiannya penulis berusaha untuk memenuhi tujuan tersebut, meskipun masih sangat sederhana.

BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Dari uraian dan pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa

1. Solusi analitik dengan pemisahan variabel, besarnya konsentrasi pada persamaan difusi konveksi diperoleh dengan menggunakan langkah-langkah sebagai berikut:

a. Membentuk persamaan difusi konveksi dengan metode pemisahan variabel

$$c(x,t) = X(x)T(t).$$

b. Mengumpulkan fungsi yang tergantung pada x pada ruas kiri, fungsi tergantung pada t pada ruas kanan, dan kedua ruas harus sama dengan sebuah konstanta, sehingga didapat dua persamaan diferensial biasa.

c. Menentukan $X(x)$ (fungsi eigen) dari persamaan diferensial biasa

$$D_{fus} X''(x) - vX'(x) - \lambda X(x) = 0.$$

d. Nilai eigen yang didapat disubstitusikan pada persamaan diferensial biasa

$$T'(t) - \lambda T(t) = 0$$

e. $X(x)$ dan $T(t)$ dari persamaan diferensial biasa diketahui disubstitusikan

ke $c_n(x,t)$.

f. Dengan menggunakan prinsip superposisi diperoleh

$$C(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{\left(\frac{2D_{fus}n\pi}{L}\right)^2 - v^2 \frac{v}{2D_{fus}} x} t.$$

g. Konstanta B_n ditentukan dengan menggunakan syarat awal

$$c(x,0) = f(x_0) \text{ dan eksistensi deret Fourier.}$$

2. Solusi numerik dengan skema Crank-Nicholson, besarnya konsentrasi pada persamaan difusi konveksi diperoleh dengan menggunakan langkah-langkah sebagai berikut:

c. Solusi bagi persamaan difusi dikerjakan dengan mengubah persamaan difusi konveksi ke dalam bentuk terdiskritisasi.

d. Kemudian dibentuk pola iterasi bagi bentuk persamaan difusi konveksi yang terdiskritisasi

e. Pola dikerjakan pada system yang dipilih (dalam hal ini penulis memilih aliran zat dalam balok yang letaknya mendatar).

f. Pergerakan pola dalam sistem yang telah dipilih akan membentuk matriks.

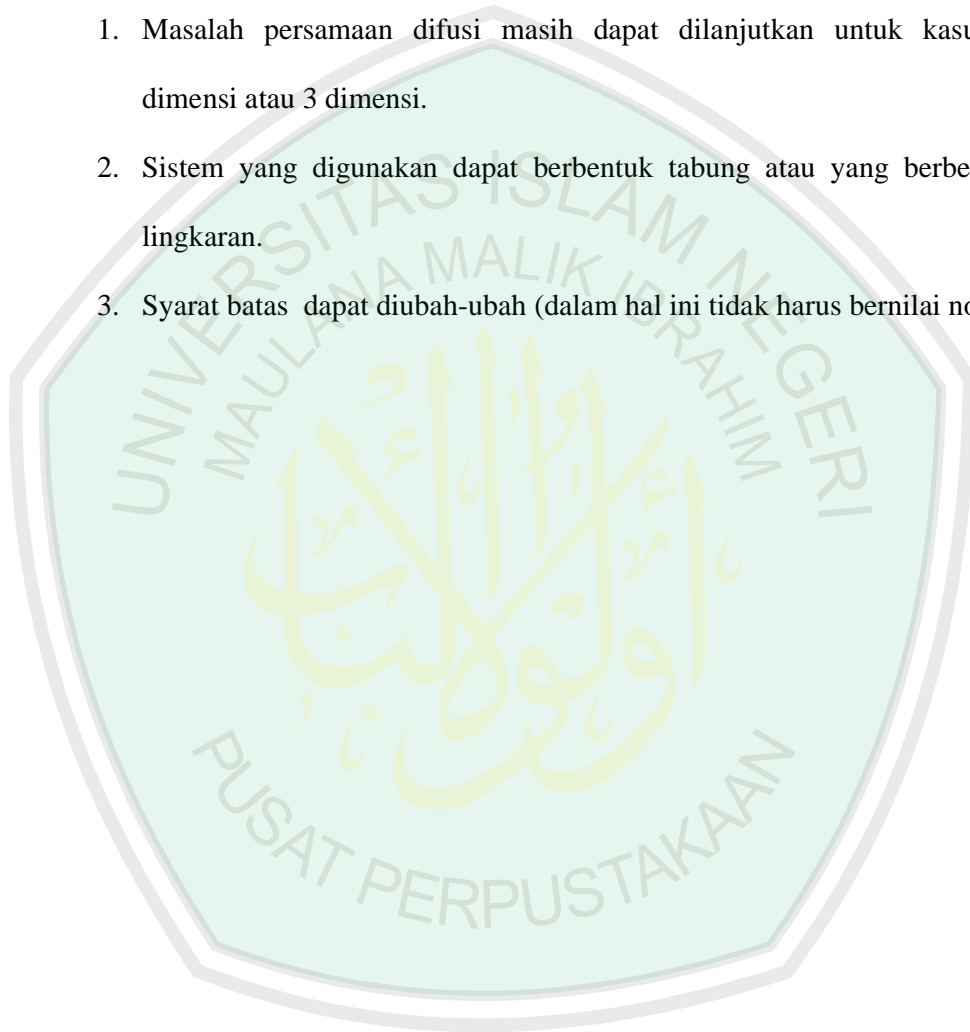
g. Selesaian matriks iterasi untuk mendapatkan nilai konsentrasi sepanjang sumbu x (karena dalam hal ini penulis menerapkan pada kasus 1 dimensi yang memuat sumbu x).

3. Dari solusi secara analitik dan hasil iterasi secara numerik untuk persamaan difusi konveksi sama-sama mendapatkan nilai atau besarnya konsentrasi dari suatu zat pada system tetapi besarnya konsentrasi antara kedua solusi itu terdapat selisih yang disebut dengan galat. Jadi solusi analitik sebagai pengontrol galat untuk solusi numerik. Besarnya galat pada penyelesaian difusi konveksi tidak terlalu besar yang berarti bahwa skema Crank-Nicholson merupakan skema yang nilainya mendekati solusi eksaknya. Jika t semakin

lama galatnya semakin kecil karena perubahan konsentrasi yang semakin lama semakin kecil.

4.2 **Saran**

1. Masalah persamaan difusi masih dapat dilanjutkan untuk kasus 2 dimensi atau 3 dimensi.
2. Sistem yang digunakan dapat berbentuk tabung atau yang berbentuk lingkaran.
3. Syarat batas dapat diubah-ubah (dalam hal ini tidak harus bernilai nol).



DAFTAR PUSTAKA

- Atkins.P.W. 1999. Kimia Fisika. Jilid II Edisi Keempat. Jakarta: Erlangga
- Brady, James E. 1994. *Kimia Universitas Asas dan Struktur*. Jilid I Edisi Kelima. Alih bahasa oleh Dra. Sukmariah Maun, dkk. Jakarta: Binarupa Aksara
- Bumolo, Hussain dan Mursinto Djoko. 2003. *Matematika untuk Ekonomi dan Aplikasinya*. Malang: Bayu Media
- Djojodihardjo, Harijono. 2000. *Metode Numerik*. Jakarta: PT. Gramedia Pustaka Utama
- Dumairy. 1990. *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta: BPFE
- Frank Ayres. J. C. Ault dan Lily Ratna. 1995. *Persamaan Differential dalam Satuan SI Metric*. Jakarta: Erlangga
- Isyraq.wordpress. 2007. [Pandangan Islam Tentang Ilmu Pengetahuan](http://isyraq.wordpress.com/pandangan-dunia-filosofis-sebuah-alternatif.html), <http://isyraq.wordpress.com/pandangan-dunia-filosofis-sebuah-alternatif.html>.
- Kosasih, P. Buyung. 2006. *Komputasi Numerik, Teori dan Aplikasi*. Yogyakarta: Andi
- Labbaik.wordpress. Kedudukan Akal dalam Islam, <http://labbaik.wordpress.com/kedudukan-akal-dalam-islam.html>.
- Lam C. Y. 1994. *Applied Numerical Methods for Partial Differential Equation*, Prentice-Hall. Inc, Singapore
- Leithold Louis. 1991. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik*. Edisi Kelima. Jakarta: Erlangga
- Mursita, Danang. 2005. *Matematika Lanjut untuk Perguruan Tinggi*. Bandung: Rekayasa Sains
- Mushthafa, Ahmad A. 1988. *Terjemah Tafsir al-Maraghi 13*. Semarang: CV. Toha Putra
- Perisaidakwah.2007. Tafsir Surah Alam Nasyroh, <http://perisaidakwah.com/content/view.html>.
- Raju, Rangga KG. 1993. *Flow Through Open Channels*. New Delhi: Mc Graw Hill

Soedarjo. 1996. *Matematika IV*. Diktat ITS

Spiegel, Murray R. 1994. *Matematika Lanjutan untuk Para Insinyur dan Ilmuwan*. Terjemahan oleh Drs. Koko Martono. Jakarta: Erlangga

Spiegel, Murray R. Tanpa tahun. *Analisis Fourier*. Terjemahan oleh Asjhar Imron. Jakarta: Erlangga

Suryoputro, Nugroho. 2001. *Metode Numerik Terapan untuk Teknik Sipil*. Diktat UM

Susila, I Nyoman. 1993. *Dasar-dasar Metode Numerik*. Bandung: F.MIPA ITB

Triatmojo, Bambang. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer*. Yogyakarta: Beta Offset

Wikipedia. 2007. Kimia, <http://ms.wikipedia.org/wiki/kimia.html>.

Wikipedia. 2007. Kimia Fisika, http://ms.wikipedia.org/wiki/kimia_fisika.html.



LAMPIRAN I

```

clc;clear;format long;
disp('=====')
disp('Program Pencarian Solusi Persamaan Difusi Konveksi')
disp('Dengan Metode Beda Hingga Skema Crank-Nicholson')
disp('By: Dewi Farida Roziana')
disp('=====')
disp("")
disp('Persamaan difusi konveksi')
disp(' dc/dt=Dd2c/dx2-vdc/dt');
disp('Kondisi Awal:');
disp(' c(x,0)=1.5*10^(-2), 0<=x<=5');
disp('Kondisi Batas:');
disp(' c(0,t)=c(5,t)=0');
disp("")
D=input('Masukkan konstanta difusi,D=');
v=input('Masukkan kecepatan difusi,v=');
N=input('Masukkan banyaknya iterasi t,N=');
dx=input('Masukkan jarak interval x,dx=');
dt=input('Masukkan jarak interval t,dt=');
l=v/(2*dx);
m=D/dx^2;
A=(l+m)/(-2);
B=(1/dt)+m;
C=(l-m)/2;
U=zeros(11,11);
%kondisi awal
U(1,:)=1.5*10^(-2);
%kondisi batas
for n=1:N
    U(:,1)=0;
    U(:,end)=0;
end
% iterasi Crank-Nicholson
%membuat matrix tridiagonal
for i=1:11
    T(i,i)=B;
    T2(i,i)=(1/dt)-m;
    if i<11
        T(i,i+1)=C;
        T(i+1,i)=A;
        T2(i,i+1)=-C;
        T2(i+1,i)=-A;
    end
end
end

```

```

for i=2:11
    % penyusunan matriks konstanta D2
    D2=T2*U(i-1,:);
    %solusi T*U=D2 untuk U
    U(i,:)=(pinv(T)*D2);
end

disp('');
disp('hasil komputasi:');
disp('Baris=t dan Kolom=x');
disp('=====')
disp(U);
ax=[0:dx:5];
at=[0:dt:0.5];
mesh(ax,at,U);xlabel('x');ylabel('t');
title('solusi Numerik Persamaan Difusi Konveksi')
disp('=====')

```





DEPARTEMEN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MALANG

Jl. Gajayana No. 50 Malang 65144. Telp (0341) 551354.

KARTU BIMBINGAN SKRIPSI

Nama : DEWI FARIDA ROZIANA
NIM : 03510035
Fakultas/Jurusan : SAINS DAN TEKNOLOGI/ MATEMATIKA
Judul : SOLUSI ANALITIK DAN SOLUSI NUMERIK
PERSAMAAN DIFUSI KONVEKSI

PEMBIMBING : I. Drs. H. Turmudi, M. Si
II. Ach. Nashihuddin, M.A

No	Tanggal	Materi	Tanda Tangan Pembimbing
1.	06 Maret 2007	Seminar Proposal Skripsi	1.
2.	19 Juli 2007	Penyerahan Bab I dan II	2.
3.	31 Juli 2007	Revisi Bab I dan II	3.
4.	06 Agustus 2007	Revisi Bab II	4.
5.	15 Agustus 2007	Revisi Bab II	5.
6.	27 Agustus 2007	Revisi Bab I	6.
7.	03 September 2007	Revisi Bab II	7.
8.	19 September 2007	Penyerahan Kajian Keagamaan Bab I dan II	8.
9.	09 Oktober 2007	Revisi Kajian Keagamaan Bab I dan II	9.
10.	25 Oktober 2007	ACC Kajian Keagamaan Bab I dan II	10.
11.	21 Nopember 2007	Revisi Bab I dan II, Penyerahan Bab III	11.
12.	20 Desember 2007	Penyerahan Keagamaan BAB III	12.
13.	15 Januari 2008	ACC Keagamaan Bab III	13.
14.	06 Maret 2008	Revisi Bab I, II dan III	14.
15.	19 Maret 2008	Revisi Bab I, II dan III	15.
16.	27 Maret 2008	ACC Bab I, II dan III	16.

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321

SURAT PERNYATAAN

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Dewi Farida Roziana
NIM : 03510035
Fakultas : Sains dan Teknologi
Jurusan : Matematika
Judul Skripsi : Solusi Analitik dan Solusi Numerik Persamaan Difusi
Konveksi

Menyatakan bahwa Skripsi tersebut adalah karya saya sendiri dan bukan karya orang lain baik sebagian maupun keseluruhan, kecuali dalam bentuk kutipan yang telah disebut sumbernya.

Selanjutnya apabila dikemudian hari ada "klaim" dari pihak lain, bukan menjadi tanggung jawab Dosen Pembimbing dan atau pengelola Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang, tetapi menjadi tanggung jawab saya sendiri.

Demikian surat pernyataan ini saya buat dengan sebenar-benarnya dan apabila pernyataan ini tidak benar, saya bersedia mendapat sanksi akademis.

Malang, 16 April 2008
Yang menyatakan,

Dewi Farida Roziana