PENDUGAAN PARAMETER MODEL REGRESI NONLINIER MULTIPLIKATIF DENGAN MENGGUNAKAN METODE MAKSIMUM LIKELIHOOD

SKRIPSI

Oleh:

EVIANA CHANDRA DEWI
NIM. 03510020

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2008

PENDUGAAN PARAMETER MODEL REGRESI NONLINIER MULTIPLIKATIF DENGAN MENGGUNAKAN METODE MAKSIMUM LIKELIHOOD

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:

EVIANA CHANDRA DEWI
NIM. 03510020

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2008

PENDUGAAN PARAMETER MODEL REGRESI NONLINIER MULTIPLIKATIF DENGAN MENGGUNAKAN METODE MAKSIMUM LIKELIHOOD

SKRIPSI

Oleh :

EVIANA CHANDRA DEWI
NIM. 03510020

Telah disetujui untuk diuji

Malang, 15 Maret 2008

Dosen pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Sri Harini, M.Si	**Ach. Nasihuddin, M.A**
NIP. 150 318 321	**NIP. 150 302 531**

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si

NIP. 150 318 321

PENDUGAAN PARAMETER MODEL REGRESI NONLINIER MULTIPLIKATIF DENGAN MENGGUNAKAN METODE MAKSIMUM LIKELIHOOD

SKRIPSI

OLEH:

EVIANA CHANDRA DEWI
NIM. 03510020

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal:
7 April 2008

Susunan Dewan Penguji:		Tanda Tangan
1. Penguji Utama	: Drs. H. Turmudi, M.Si	( )
2. Ketua	: Wahyu H. Irawan, M.Pd	( )
3. Sekretaris	: Sri Harini, M.Si	( )
4. Anggota	: Ach. Nasihuddin, M.A	( )

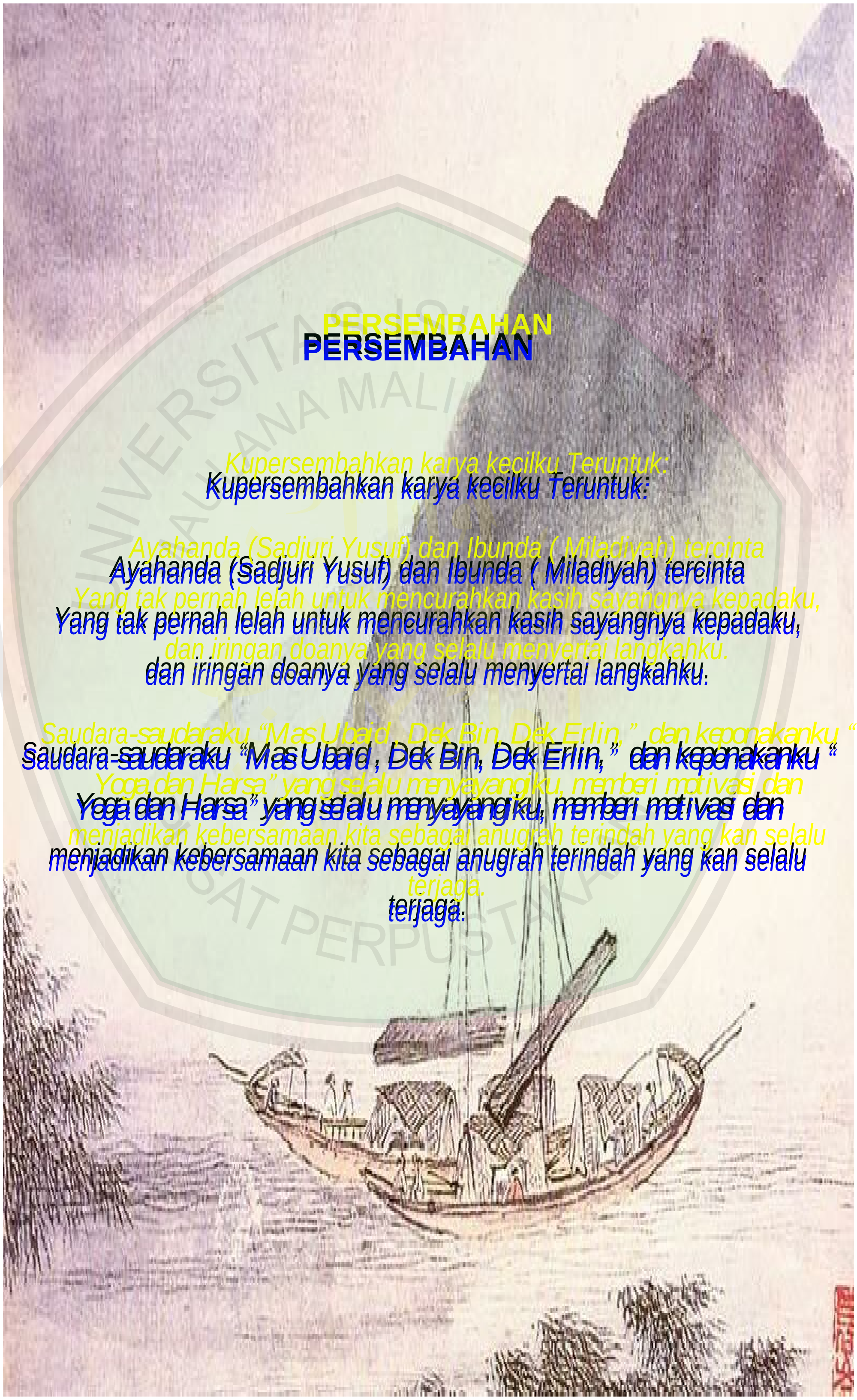
Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321

MOTTO

إِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرٗا ۝٦

"Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan"
(Qs. An Nashr: 6)



PERSEMBAHAN

Kupersembahkan karya kecilku Teruntuk:

Ayahanda (Sadjuri Yusuf) dan Ibunda (Miladiyah) tercinta

Yang tak pernah lelah untuk mencurahkan kasih sayangnya kepadaku, dan iringan doanya yang selalu menyertai langkahku.

Saudara-saudaraku “Mas Ubaid , Dek Bin, Dek Erlin,” dan keponakanku “ Yoga dan Harsa” yang selalu menyayangiku, memberi motivasi dan menjadikan kebersamaan kita sebagai anugrah terindah yang kan selalu terjaga.

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Alhamdulillah segala puji dan syukur, penulis panjatkan kehadirat Allah Swt yang telah melimpahkan segala rahmat, taufik dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul "**Pendugaan Parameter Model Regresi Nonlinier Multiplikatif Dengan Menggunakan Metode Maksimum Likelihood"**. Shalawat serta salam penulis haturkan keharibaan Sang pendidik sejati Rasulullah SAW, serta para Sahabat, Tabi'in dan para umat yang senantiasa berjalan dalam risalah-Nya.

Dengan terselesainya penulisan skripsi ini, tak lupa penulis mengucapkan terima kasih yang setulus-tulusnya kepada semua pihak yang telah memberikan sumbangan baik moril maupun spiritual. Dengan segala kerendahan hati penulis menyampaikan rasa terima kasih yang sebesar-besarnya kepada :

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU.,D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Malang.
3. Sri Harini, M.Si, selaku Dosen pembimbing dan ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Malang, yang telah bersedia meluangkan waktunya untuk membimbing dan mengarahkan penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi.

4. Ach. Nasihuddin, M.A, selaku Dosen Pembimbing, yang telah membimbing dan mengarahkan penulis dalam menghubungkan konsep matematika dengan Al-Qur'an.
5. Segenap dosen pengajar atas ilmu yang telah diberikan kepada penulis.
6. Ayahanda dan Ibunda tercinta, serta saudara-saudaraku, atas motivasi baik dalam bentuk moril maupun materiil yang telah diberikan, yang telah ikhlas memberikan do'a, kasih sayang serta bimbingan yang senantiasa menyertaiku dalam meraih sukses.
7. Teman-teman seperjuangan angkatan 2003, yang telah memberikan semangat dan motivasi kepada penulis.
8. Dan semua pihak yang telah membantu atas terselesainya penulisan skripsi ini yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa dalam penulisan skripsi ini masih banyak terdapat kekurangan-kekurangan. Dengan segala kerendahan hati dan tangan terbuka, penulis mengharapkan adanya kritik dan saran yang bersifat membangun dari para pembaca. Akhirnya dengan harapan mudah-mudahan penulisan skripsi ini bermanfaat bagi kita semua. Amin.

Malang, 17 Februari 2008

Penyusun

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

No **Judul** **Halaman**

DAFTAR SIMBOL

Lambang Matematika

$\sim$	: Berdistribusi
$\leq$	: Lebih kecil atau sama dengan
$\geq$	: Lebih besar atau sama dengan
∞	: Tak berhingga
$<$	: Lebih kecil daripada
$>$	: Lebih kecil daripada
$\prod$	: Untuk perkalian
$\sum$	: Untuk penjumlahan

Abjad Yunani

μ	: Mu
Θ θ	: Theta
σ	: Sigma
λ	: Lambda
π	: Pi
ϕ	: Phi
∂	: Dho
ε	: Epsilon

Lambang Khusus

μ	: Nilai Tengah
$\bar{X}$	: Rata-rata pada pengamatan X
$\bar{Y}$	: Rata-rata pada pengamatan Y
$\rightarrow$	: Menuju
s^2	: Ragam untuk sampel
σ^2	: Ragam (varian) untuk populasi
A	: Matrik A yang entri-entrinya merupakan peubah acak
$\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^*$	: Vektor β yang entri-entrinya terdiri dari parameter $\ln \beta_1, \beta_2, ..., \beta_i$
$\underset{\sim}{\mathbf{0}}$	:Vektor 0 yang entri-entrinya terdiri dari bilangan nol
$\hat{\theta}$	: Penduga dari parameter θ
E	: Expectation (nilai harapan)
H_0	: Hipotesis nol
T	: Transpose
$L(x_1, ..., x_n; \theta)$	: Fungsi likelihood
$f_{X_1, ..., X_n}(x_1, ..., x_n; \theta)$	: Fungsi padat peluang
$X_1, X_2, X_3, ..., X_n$	: Peubah acak
N	: Normal

ABSTRAK

Chandra Dewi, Eviana. 2008. **Pendugaan Parameter Model Regresi Nonlinier Multiplikatif Dengan Menggunakan Metode Maksimum Likelihood,** Skripsi, Jurusan Matematika, Fakultas Sains Dan Teknologi Universitas Islam Negeri Malang, Pembimbing: Sri Harini, M.Si dan Ach. Nasihuddin, M.A.

Kata kunci: Pendugaan parameter, Regresi Nonlinier Multiplikatif, Metode Maksimum Likelihood

Dalam statistik inferensial, proses penarikan kesimpulan terdiri dari 2 bagian, yaitu pendugaan parameter dan pengujian hipotesis. Pendugaan parameter dilakukan untuk mendapatkan nilai parameter sampel yang mendekati nilai parameter populasi dengan meminimumkan nilai galat. Sedangkan untuk melakukan pengujian hipotesis, terlebih dahulu harus menentukan penduga parameternya. Adapun penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan penduga parameter model regresi nonlinier multiplikatif dengan menggunakan metode maksimum likelihood, dan mengetahui cara menentukan jumlah kuadrat regresi (JKR^*) dari hipotesis linier umum. Penentuan JKR^* ini digunakan untuk menentukan koefisien determinasi (R^2) atau statistik uji (F hitung).

Model regresi nonlinier dibagi menjadi 2 macam yaitu model *linier instrinsik* dan model *nonlinier instrinsik*. Model *linier instrinsik* yaitu model regresi nonlinier *yang* dapat ditransformasikan kedalam bentuk linier, sedangkan model *nonlinier instrinsik* tidak dapat ditransformasikan kedalam bentuk linier. Model regresi nonlinier multiplikatif merupakan model *linier instrinsik*. Untuk meminimumkan galat dari model regresi nonlinier multiplikatif, maka memerlukan suatu metode. Dalam penelitian ini mengunakan metode maksimum likelihood, dan dilanjutkan dengan metode pengganda lagrange.

Penduga parameter model regresi nonlinier multiplikatif diperoleh dengan mengunakan metode maksimum likelihood yang diasumsikan berdistribusi normal dan metode pengganda lagrange yang diasumsikan mempunyai syarat pembatas*(constrain condition)*. Selanjutnya pada pengujian hipotesis linier umum, penentuan JKR^* diperoleh dengan menentukan terlebih dahulu jumlah kuadrat model regresi awal (JKS) dan jumlah kuadrat model regresi reduksi (JKW).

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Sejak peradaban manusia bermula, matematika memainkan peranan yang sangat penting dalam kehidupan sehari-hari. Berbagai bentuk simbol digunakan untuk membantu perhitungan, pengukuran, penilaian dan peramalan. Salah satu cabang dari matematika terapan adalah statistika, yang menggunakan teori probabilitas sebagai alat dan memberikan deskripsi, analisis dan perkiraan fenomena dan digunakan dalam seluruh ilmu.

Statistik merupakan salah satu cabang pengetahuan yang paling banyak mendapatkan perhatian dan dipelajari oleh ilmuan dari hampir semua bidang ilmu pengetahuan, terutama peneliti yang dalam penelitiannya banyak menggunakan statistik sebagai dasar analisis maupun perancangannnya. Dapatlah dikatakan bahwa statistika mempunyai sumbangan yang penting dan besar terhadap kemajuan berbagai bidang ilmu pengetahuan.

Dalam statistik inferensial, proses penarikan kesimpulan terdiri dari 2 bagian, yaitu pendugaan parameter-parameter populasi, dan pengujian hipotesis yang menspesifikasikan nilai parameter. Untuk menyelidiki populasi bila populasi terlalu besar, maka melakukan pendugaan parameter populasi dengan cara mengambil sampel. Misalnya parameter dari populasi adalah μ dan σ^2, dengan melakukan pendugaan, maka diperoleh $\hat{\mu} = \overline{X}$ dan $\hat{\sigma}^2 = s^2$. Hasil dari pendugaan diharapkan mendapatkan nilai galat sekecil mungkin. Sedangkan untuk melakukan pengujian hipotesis, terlebih dahulu harus menentukan penduga parameternya.

Suatu penelitian khususnya yang melibatkan variabel respon dan variabel explanatory, maka model regresi merupakan model yang cocok digunakan dalam manganalisis data. Model regresi ini mempunyai 2 bentuk yaitu berbentuk linier dan tak linier dalam parameternya. Model yang linier dalam parameternya adalah yang dapat didekati dengan teknik-teknik regresi berganda, seperti model-model polinom**.** Model yang tak linier dalam parameternya dikatakan *linier instrinsik* bila suatu transformasi dapat membuatnya linier. Kurva-kurva logaritma dan exponensial termasuk golongan ini. Model yang tidak dapat dilinierkan melalui transformasi dikatakan *nonlinier instrinsik* dan analisis yang berhubungan diduga disebut regresi tak linier (Steel dan Torrie, 540: 1993). Penggunaan analisis regresi ini bertujuan untuk mediskripsikan data, pendugaan (*estimasi*) parameter, dan peramalan.

Salah satu model regresi nonlinier (yang secara *instrinsik linier*) adalah model multiplikatif. Untuk menduga parameter model multiplikatif maka diperlukan metode yang tepat agar mendapatkan galat sekecil mungkin. Terdapat banyak metode untuk menduga parameter model nonlinier, akan tetapi salah satu metode klasik untuk menduga model regresi nonlinier adalah metode maksimum likelihood. Metode maksimum likelihood pertama kali dibahas oleh R.A. Fisher pada tahun 1930 (Suparman,148:1989).

Model regresi *nonlinier instrinsik*, penduga parameternya diperoleh secara iterative. Sedangkan untuk mendapatkan penduga parameternya dari model *linier* *instrinsik* yaitu dengan mentransformasikan terlebih dahulu kedalam bentuk linier, yang bertujuan untuk mempermudah mendapatkan penduga dari parameternya. Terdapat beberapa macam asumsi terhadap nilai pengamatan (*variabel random*) dalam pendugaan parameter, antara lain: nilai pengamatannya diasumsikan berdistribusi normal, berdistribusi binomial, berdistribusi seragam, berdistribusi eksponensial dan lain sebagainya.

Terkait dengan masalah estimasi/ pendugaan diatas, telah disinggung dalam Al-Qur’an surat Ash-Shaffaat ayat 147.

وَأَرۡسَلۡنَٰهُ إِلَىٰ مِاْئَةِ أَلۡفٍ أَوۡ يَزِيدُونَ ١٤٧

Artinya: Dan Kami utus dia kepada seratus ribu orang atau lebih (Qs. Ash-Shaffaat/37:147)

Pada Qs. Ash-Shaffaat ayat 147 tersebut dijelaskan bahwa Nabi Yunus diutus kepada umatnya yang jumlahnya 100.000 orang atau lebih. Jika membaca ayat tersebut secara seksama, maka terdapat rasa atau kesan ketidakpastian dalam menentukan jumlah umat Nabi Yunus. Mengapa harus menyatakan 100.000 atau lebih? Mengapa tidak menyatakan dengan jumlah yang sebenarnya? Bukankah Allah Swt mengetahui yang ghaib dan yang nyata? Bukankah Allah Swt Maha Mengetahui Segala Sesuatu, termasuk jumlah umat Nabi Yunus? (Abdusysyakir, 153: 2007). Dari gambaran diatas diketahui bahwa itulah contoh estimasi/pendugaan dalam Al-Qur’an.

Dalam mempelajari ilmu-ilmu yang terkandung didalam Al-Qur’an, membutuhkan suatu pemahaman dan penafsiran secara mendalam. sebagaimana firman Allah Swt:

أَفَلَا يَتَدَبَّرُونَ ٱلْقُرْءَانَ ۚ وَلَوْ كَانَ مِنْ عِندِ غَيْرِ ٱللَّهِ لَوَجَدُوا۟ فِيهِ ٱخْتِلَـٰفًا

كَثِيرًا ﴿٨٢﴾

Artinya: Maka Apakah mereka tidak memperhatikan Al Quran? kalau kiranya Al Quran itu bukan dari sisi Allah, tentulah mereka mendapat pertentangan yang banyak di dalamnya (Qs. An-Nisaa'/4:82).

Ayat diatas memerintahkan umat Islam untuk merenungkan ayat-ayatNya dan memahami pesan-pesanNya. Al-Qur'an juga mencela orang-orang munafik yang tidak memahami maksud Al-Quran dan Hadist. Allah berfirman:

... فَمَالِ هَـٰٓؤُلَآءِ ٱلْقَوْمِ لَا يَكَادُونَ يَفْقَهُونَ حَدِيثًا ﴿٧٨﴾

Artinya: ...Maka mengapa orang-orang itu (orang munafik) Hampir-hampir tidak memahami pembicaraan sedikitpun? (Qs. An-Nisaa'/4: 78).

Pemahaman manusia terhadap Al-Qur'an bertingkat-tingkat sesuai dengan kondisi dan kemampuan masing-masing. Di zaman sekarang, orang lebih perlu belajar hal-hal yang disajikan Al-Qur'an daripada zaman dahulu agar mampu menyingkap rahasia-rahasia dibalik ayat-ayatNya demi kebaikan dunia dan akhirat (Pasya, 2004: 39).

Atas dasar uraian diatas, peneliti akan mengkaji **" Pendugaan Parameter Model Regresi Nonlinier Multiplikatif dengan Menggunakan Metode Maksimum Likelihood".**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas, maka permasalahan dirumuskan sebagai berikut:

1. Bagaimana cara menentukan penduga parameter model regresi nonlinier multiplikatif dengan menggunakan metode maksimum likelihood.
2. Bagaimana cara mendapatkan jumlah kuadrat regresi (JKR^*) model regresi nonlinier multiplikatif dari pengujian hipotesis linier umum.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah

1. Untuk mengetahui pendugaan parameter model regresi nonlinier multiplikatif dengan menggunakan metode maksimum likelihood.
2. Menjelaskan cara mendapatkan jumlah kuadrat regresi (JKR^*) model regresi nonlinier multiplikatif dari pengujian hipotesis linier umum.

1.4 Batasan Masalah

Untuk memfokuskan permasalahan agar tidak keluar dari pembahasan, maka penelitian ini dibatasi pada model regresi nonlinier multiplikatif yang diasumsikan mempunyai syarat pembatas $\mathbf{A}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^* = \underset{\sim}{\mathbf{0}}$

1.5 Manfaat penelitian

Dengan adanya penelitian ini, dapat mengetahui penggunaan asumsi distribusi yang sesuai dalam menduga parameter model regresi dan mengetahui pendugaan parameter model regresi nonlinier multiplikatif yang diduga dengan menggunakan metode maksimum likelihood, serta asumsi syarat pembatas yang digunakan.

1.6 Metode Penelitian

Dalam penelitian ini mengunakan penelitian perpustakaan (*Library Research*). Penelitian perpustakaan bertujuan untuk mengumpulkan data dan informasi dengan bermacam-macam material yang terdapat dalam ruangan perpustakaan, seperti buku-buku, majalah, dokumen catatan dan kisah-kisah sejarah dan lain-lainnya (Mardalis,1990:28).

Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini adalah:

1. Merumuskan masalah. Membuat rancangan terlebih dahulu mengenai suatu permasalahan yang akan dibahas.
2. Mengumpulkan data. Mengumpulkan berbagai literature yang berhubungan dengan permasalahan yang akan dibahas dengan cara membaca dan memahami materi yang berkaitan. Dalam hal ini, literature yang digunakan berupa buku-buku yang berkaitan dengan masalah pendugaan parameter dan metode maksimum likelihood.
3. Menyelesaikan permasalahan dengan menggunakan metode deduksi yaitu cara berpikir yang berangkat dari hal-hal yang umum menuju kesimpulan yang khusus. Penelitian ini berangkat dari suatu model kemudian dicari penduga parameternya dengan menggunakan suatu metode.
4. Membuat kesimpulan. Kesimpulan merupakan jawaban singkat dari permasalahan yang telah dikemukakan dalam pembahasan.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

Bab I : Pendahuluan yang Meliputi: Latar Belakang, Rumusan Masalah, Tujuan Penelitian, Manfaat Penelitian, Metode Penelitian, Sistematika Penulisan.

Bab II : Tinjauan Pustaka Berisi Tentang: Pendugaan Parameter, Model Regresi Nonlinier, Model Regresi dalam Pendekatan Matrik, Pengujian Hipotesis Linier Umum dalam Regresi, Metode Maksimum Likelihood, Metode Pengganda Lagrange, Pendapat Para Ulama' dalam Menafsirkan Surat Ash-Shaffaat Ayat 147.

Bab III : Pembahasan Berisi Tentang: Uraian Cara Menentukan Penduga Parameter Model Regresi Nonlinier Multiplikatif dengan Metode Maksimum Likelihood, Menentukan JKR^* pada Pengujian Hipotesis Linier Umum $\mathbf{A}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^* = \mathbf{0}$, dan Korelasi Al-Qur'an Surat Ash-Shaffaat Ayat 147 dengan Matematika.

Bab IV : Penutup Berisi Kesimpulan dan Saran.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pendugaan Parameter

2.1.1 Pengertian Pendugaan Parameter dan Penduga

Pendugaan (*estimasi*) adalah proses yang menggunakan sampel statistik untuk menduga atau menaksir hubungan parameter populasi yang tidak diketahui. Pendugaan merupakan suatu pernyataan mengenai parameter populasi yang diketahui berdasarkan populasi dari sampel, dalam hal ini sampel random, yang diambil dari populasi yang bersangkutan. Jadi dengan pendugaan ini, keadaan parameter populasi dapat diketahui (Hasan, 2002: 111). Menurut Yitnosumarto (1990:211-212), penduga (*estimato*r) adalah anggota peubah acak dari statistik yang mungkin untuk sebuah parameter (anggota peubah diturunkan). Besaran sebagai hasil penerapan penduga terhadap data dari semua contoh disebut nilai duga (*estimate*).

2.1.2 Sifat-Sifat Penduga

1) Tak bias (*unbias*)

   Satu hal yang menjadi tujuan dalam pendugaan adalah penduga harus mendekati nilai sebenarnya dari parameter yang diduga tersebut. Misalkan terdapat parameter θ. Jika $\hat{\theta}$ merupakan penduga tak bias (*unbiased estimator*) dari parameter θ, maka:

$$E\left(\hat{\theta}\right) = \theta$$

(Yitnosumarto,1990: 212)

2) Efisien

Suatu penduga (misalkan: $\hat{\theta}$) dikatakan efisien bagi parameter (θ) apabila penduga tersebut mempunyai varians yang kecil. Apabila terdapat lebih dari satu penduga, penduga yang efisien adalah penduga yang mempunyai varian terkecil. Dua buah penduga dapat dibandingkan efisiensinya dengan menggunakan efisiensi relative (*Relative efficiency*). Efisiensi relatif $\hat{\theta}_2$ terhadap $\hat{\theta}_1$ dirumuskan:

$$\mathrm{R}\left(\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_1\right) = \frac{E\left(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}\right)^2}{E\left(\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}\right)^2}$$

$$= \frac{E\left(\hat{\theta}_1 - E\left(\hat{\theta}_1\right)\right)^2}{E\left(\hat{\theta}_2 - E\left(\hat{\theta}_2\right)\right)^2}$$

$$= \frac{\operatorname{var}\hat{\theta}_1}{\operatorname{var}\hat{\theta}_2}$$

$R = \frac{\hat{\theta}_1}{\hat{\theta}_2}$, Jika R>1 maka $\hat{\theta}_1 > \hat{\theta}_2$ artinya secara relatif $\hat{\theta}_2$ lebih efisien daripada $\hat{\theta}_1$, dan jika R<1 maka $\hat{\theta}_1 < \hat{\theta}_2$ artinya secara relatif $\hat{\theta}_1$ lebih efisien daripada $\hat{\theta}_2$.

3) Konsisten

Suatu penduga dikatakan konsisten apabila memenuhi syarat sebagai berikut:

1) Jika ukuran sampel semakin bertambah maka penduga akan mendekati parameternya. Jika besar sampel menjadi tak terhingga maka penduga

konsisten harus dapat memberi suatu penduga titik yang sempurna terhadap parameternya. Jadi, $\left(\hat{\theta}\right)$ merupakan penduga konsisten, jika dan hanya jika:

$$E\left(\hat{\theta} - E(\theta)\right)^2 \to 0 \text{ jika } n \to \infty$$

2) Jika ukuran sampel bertambah besar maka distribusi sampling penduga akan mengecil menjadi suatu garis tegak lurus diatas parameter yang sama dengan probabilitas sama dengan 1.

(Hasan, 2002: 113-115)

2.2 Model Regresi Non Linier

Model regresi non linier dibagi menjadi dua jenis yaitu model *linier instrinsik* dan model *nonlinier instrinsik*. Jika suatu model adalah *linier instrinsik*, maka model ini dapat dinyatakan melalui transformasi yang tepat terhadap peubahnya, kedalam bentuk model linier baku yang dinyatakan dalam bentuk berikut ini:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 Z_1 + \beta_2 Z_2 + \ldots + \beta_p Z_p + \varepsilon$$

Dimana:

Y_i	= Nilai pengamatan ke-i, i=1,2,...n
β_0	= Parameter intersep
$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_p$	= Parameter slope
Z	= Peubah-peubah acak yang terdiri dari $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$
ε	= Galat

Jika suatu model nonlinier tidak dapat dinyatakan dalam bentuk baku ini, berarti model itu secara *nonlinier instrinsik* (Draper dan Smith,1992: 212).

Diantara bentuk-bentuk model (*linier instrinsik)* yang dapat ditransformasikan kedalam bentuk linier (Soelistyo, 2001: 342-344) adalah sebagai berikut:

a. Bentuk Polynomial

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + \beta_3 X_i^3 + ... + \varepsilon_i$$

khususnya bentuk parabola dan bentuk polynomial pangkat 3

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + \varepsilon_i$$

dan

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + \beta_3 X_i^3 + \varepsilon_i$$

Contoh:

Kurva biaya rata-rata dan harga total. Transformasi kedalam bentuk linier mudah sekali dijalankan dengan mengganti, misalnya saja, X_i^2 dengan Z_i, yaitu dengan jalan mengkuadratkan data pengamatan variabel X_i sehingga $X_i^2 = Z_i$ untuk model regresi biaya rata-rata. Jika X_i^3 diganti pula dengan W_i untuk model regresi biaya total akan diperoleh model

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 Z_i + \beta_3 W_i + \varepsilon_i$$

b. Bentuk Perkalian (Multiplikatif)

Model multiplikatif merupakan model *linier instrinsik*, dinyatakan dalam bentuk :

$$Y_i = \beta_0 X_{i1}^{\beta_1} X_{i2}^{\beta_2} \ldots \varepsilon_i \qquad (2.1)$$

Dimana β_0, β_1, dan β_2 adalah parameter yang tidak diketahui, dan ε adalah galat acak yang bersifat multiplikatif. Dengan melogaritma naturalkan persamaan (2.1), model tersebut berubah menjadi bentuk linier.

$$\ln(Y_i) = \ln\left(\beta_0 X_{i1}^{\beta_1} X_{i2}^{\beta_2} \ldots \varepsilon_i\right)$$

$$\ln(Y_i) = \ln(\beta_0) + \ln\left(X_{i1}^{\beta_1}\right) + \ln\left(X_{i2}^{\beta_2}\right) + \ldots + \ln(\varepsilon_i)$$

$$\ln Y_i = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln X_{i1} + \beta_2 \ln X_{i2} + \ldots + \ln \varepsilon_i \qquad (2.2)$$

Model persamaan (2.1) sudah dalam bentuk persamaan (2.2) sehingga dapat ditangani melalui prosedur regresi linier baku (Draper and smith, 1992: 213).

Model (2.2) merupakan model linier dalam bentuk $\ln \varepsilon$. ε dalam hal ini tidak berdistribusi normal, sebab yang berdistribusi normal adalah $\ln \varepsilon = 0$

c. Bentuk Eksponensial

$$Y_i = e^{\beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \ldots + \beta_k X_{ik}} \varepsilon_i$$

Transformasi juga dapat dijalankan dengan mudah dengan mengambil transformasi logarimanya

$$\ln(Y_i) = \ln\left(e^{\beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \ldots + \beta_k X_{ik}} \varepsilon_i\right)$$

$$\ln(Y_i) = \ln\left(e^{\beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \ldots + \beta_k X_{ik}} \varepsilon_i\right)$$

$$\ln(Y_i) = \ln e^{\beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \ldots + \beta_k X_{ik}} + \ln \varepsilon_i$$

$$\ln\left(Y_i\right) = \left(\beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + ... + \beta_k X_{ik}\right) \ln e + \ln \varepsilon_i$$

$$\ln\left(Y_i\right) = \left(\beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + ... + \beta_k X_{ik}\right)(1) + \ln \varepsilon_i$$

$$\ln Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + ... + \beta_k X_{ik} + \ln \varepsilon_i$$

Model seperti ini adalah model linear dalam bentuk semi log yang dapat berupa log-lin atau lin-log.

d. Bentuk berkebalikan (Respirokal)

$$Y_i = \frac{1}{\beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + ... + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i}$$

Transformasi modelnya adalah

$$\frac{1}{Y_i} = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + ... + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i$$

Bentuk respirokal yang lain adalah

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{X_i} + ... + \varepsilon_i$$

Contoh:

Dalam bentuk polynomial, $\frac{1}{X_i}$ dapat diganti dengan Z_i sehingga model akan menjadi linear lagi. Bentuk seperti model itu dapat dilihat pada kurva Phillips, yang mencoba membuktikan hubungan antara laju pengangguran dan laju inflasi.

e. Bentuk Semilog

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \log X_{i1} + \beta_2 \log X_{i2} + ... + \varepsilon_i$$

atau

$$\log Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + ... + \varepsilon_i$$

Contoh:

Penggunaan model semilog adalah untuk perhitungan dengan rumus bunga majemuk dan perhitungan laju pertumbuhan. Setiap model hubungan variabel yang tidak linear tetapi yang secara instrinsik linear tersebut mempunyai sifat seperti model hubungan linear biasa.

Sedangkan bentuk model *nonlinier instrinsik* (yang tidak dapat ditransformasikan kedalam bentuk linier) (Ananta,1987: 56-58) adalah sebagai berikut:

a. Fungsi Produksi Cobb-Douglas

$$Y_i = \alpha K_i^{\beta_1} L_i^{\beta_2} + \varepsilon_i$$

dengan

Y_i	= Out-put
α, β_1, β_2	= Parameter
K	= Jumlah modal fisik
L	= Mutu modal manusia
ε	= Galat

Fungsi produksi cobb-douglas ini berbeda dengan persamaan $Y_i = \beta_0 X_{i1}^{\beta_1} X_{i2}^{\beta_2} \varepsilon_i$ dalam hal galatnnya (ε)-nya. Disini ε tidak merupakan perkalian dengan variabel bebas. Maka parameter model ini tidak dapat dilinierkan.

b. Fungsi produksi dengan elastisitas konstan

$$Y_i = \partial \left\{ \delta K^{-\rho} + (1-\delta) L^{-\rho} \right\}^{-\upsilon/\rho} e^{\varepsilon}$$

Untuk $\partial > 0; 1 > \delta > 0; \upsilon > 0; \rho > -1$

Dengan

Y_i = Out-put

K = Jumlah modal fisik

L = Mutu modal manusia

e = 2.71828

$\partial, \delta, \rho, \upsilon$ = Parameter

ε = Galat

c. Model logistik

Model logistik ini digunakan untuk menunjukkan sesuatu yang pada mulanya tumbuh dengan pelan-pelan; kemudian tumbuh makin cepat dan amat cepat; akhirnya pertumbuhannya menjadi pelan-pelan lagi. Sebuah contoh adalah pertumbuhan persentase penduduk pasangan usia subur yang memakai alat keluarga berencana. Diawal program, presentase itu sulit naiknya karena masyarakat masih belum terbiasa dengan program keluarga berencana. Kemudian tercapailah suatu titik yang masyarakat sudah mulai mengenal program tersebut. Presentase meningkat dengan cepat dan makin cepat. Akhirnya kelompok tersisa (yang masih belum memakai alat keluaga berencana) adalah kelompok yang sulit dicapai. Oleh karenanya, ketika presentase pemakai alat keluarga berencana sudah relatif tinggi, pertumbuhan presentase ini akan menurun.

$$Y_i = \frac{c}{1 + ac^{-bt_i}} + \varepsilon_i$$

Dengan

Y_i = Presentase penduduk pasangan usia subur yang berkeluarga berencana

t = Tahun, misalnya 1, 2, 3,…

c,a = Parameter

e = 2.71828

ε = Galat

2.3 Model Regresi dalam Pendekatan Matrik

Model regresi yang paling sederhana adalah model regresi linier. model regresi linier sederhana terdiri dari satu variabel. Model tersebut dapat digeneralisasikan menjadi lebih dari satu atau dalam k variabel. Persamaan bagi model regresi linier dengan k variabel diberikan sebagai berikut:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_2 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_k X_k + \varepsilon \qquad (2.3)$$

Bila pengamatan mengenai $Y, X_1, X_2, \ldots, X_K$ dinyatakan masing-masing dengan $Y_i, X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{iK}$ dan galatnya ε_i. Maka persamaan (2.3) dapat dituliskan sebagai:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \ldots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i \text{ , } i = 1, 2, \ldots, n$$

Dinotasikan dalam bentuk matrik, sehingga menjadi:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ . \\ . \\ . \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & . & . & . & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & . & . & . & X_{k2} \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & . & . & . & X_{nk} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ . \\ . \\ . \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ . \\ . \\ . \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \qquad (2.4)$$

Misalkan:

$$\underset{\sim}{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ . \\ . \\ . \\ Y_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & . & . & . & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & . & . & . & X_{k2} \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & . & . & . & X_{nk} \end{bmatrix}. \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ . \\ . \\ . \\ \beta_k \end{bmatrix} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ . \\ . \\ . \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Persamaan (2.4) dapat dinyatakan sebagai:

$$\underset{\sim}{\mathbf{Y}} = \mathbf{X}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Dimana:

$\underset{\sim}{\mathbf{Y}}$ adalah vektor respon $n \times 1$

$\mathbf{X}$ adalah matrik peubah bebas ukuran $n \times (k+1)$

$\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}$ adalah vektor parameter ukuran $(k+1) \times 1$ yang tak diketahui

$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ adalah vektor galat ukuran $n \times 1$

(Sembiring,1995: 134-135)

Sistem (2.1) dikenal sebagai penyajian matrik model regresi linier (k-variabel) umum. Sistem tersebut bisa ditulis lebih ringkas sebagai:

$$\underset{n \times 1}{\underset{\sim}{\mathbf{Y}}} = \underset{n \times (k+1)}{\mathbf{X}} \; \underset{(k+1) \times 1}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}} + \underset{n \times 1}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}} \qquad (2.5)$$

2.4 Pengujian Hipotesis Linier Umum dalam Regresi

Suatu hipotesis linier mungkin saja terdiri atas lebih dari suatu pernyataan tentang β. H_1 selalu berupa pernyatan bahwa H_0 tidak benar, sehingga hipotesis alternative ini tidak dicantumkan dalam teladan-teladan berikut. Beberapa teladan hipotesis, antara lain:

Teladan 1. Model: $E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$

$$H_0 : \beta_1 = 0$$

$$\beta_2 = 0 \text{ (dua fungsi linier yang bebas)}$$

(yang dimaksud bebas adalah bebas linier artinya pernyataan yang satu tidak dapat diperoleh sebagai suatu kombinasi linier pernyataan-pernyataan lainnya dalam grup tersebut).

Teladan 2. Model: $E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + ... + \beta_k X_k$

$$H_0 : \beta_1 = 0$$

$$\beta_3 = 0$$

.
.
.

$$\beta_k = 0 \text{ (k fungsi linier yang semuanya bebas)}$$

Teladan 3.

Model: $E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + ... + \beta_k X_k$

$$H_0 : \beta_1 - \beta_2 = 0$$

$$\beta_2 - \beta_3 = 0$$

.
.
.

$$\beta_{k-1} - \beta_k = 0 \text{ (k-1 fungsi linier yang semuanya bebas)}$$

Teladan 4. ***(Bentuk Umum)***

$$\text{Model: } E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_k X_k$$

$$H_0 : a_{10}\beta_0 + a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \ldots + a_{1k}\beta_k = 0$$

$$a_{20}\beta_0 + a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \ldots + a_{2k}\beta_k = 0$$

$$a_{m0}\beta_0 + a_{m1}\beta_1 + a_{m2}\beta_2 + \ldots + a_{mk}\beta_k = 0$$

Dalam hipotesis ini ada m fungsi linier yang tersusun atas $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ yang belum tentu semuanya bebas. Di dalam notasi matrik, H_0 tersebut dapat dituliskan sebagai

$$H_0 : \mathbf{A}\underset{\sim}{\beta} = \underset{\sim}{\mathbf{0}}$$

Dimana:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{10} & a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1k} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2k} \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ a_{m0} & a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mk} \end{bmatrix} \quad \underset{\sim}{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ . \\ . \\ . \\ \beta_k \end{bmatrix}$$

(Draper and Smith, 1992: 98-99)

Dalam pengujian hipotesis terdapat pengukuran kesesuaian garis regresi, yang bertujuan untuk menguji ketepatan garis regresi. Menurut Gaspersz (1991:130), Pengukuran Sisaan (*residual*) dari regresi atau sering disebut juga dengan galat (*error*) dari regresi dapat membantu untuk mengetahui sejauh mana persamaan yang diduga sesuai atau cocok dengan data contoh.

Galat dari persamaan regresi dapat diduga sebagai berikut:

$$\varepsilon_i = y_i - \hat{y}_i \tag{2.6}$$

Suatu galat ε_i yang besar menunjukkan garis regresi itu tidak cocok karena terdapat penyimpangan yang besar antara nilai yang sesungguhnya, y_i, yang diperoleh berdasarkan persamaan regresi.

Persamaan (2.6) dapat ditulis sebagai:

$$\left(y_i - \hat{y}_i\right) = \left(y_i - \overline{Y}\right) - \left(\hat{y}_i - \overline{Y}\right)$$

Atau

$$\left(\hat{y}_i - \overline{Y}\right) = \left(y_i - \overline{Y}\right) + \left(y_i - \hat{y}_i\right) \tag{2.7}$$

Karena ukuran contoh sebesar n buah pengamatan, maka jumlah kuadrat sebanyak n buah penyimpangan dalam bentuk hubungan (2.7) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\sum\left(\hat{y}_i - \overline{Y}\right)^2 = \sum\left(y_i - \overline{Y}\right)^2 + \sum\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2$$

JKT JKR JKG

Dimana:

JKT = jumlah kuadrat total

JKR = jumlah kuadrat regresi

JKG = jumlah kuadrat galat

Dalam hipotesis linier umum, terdapat penduga model awal dan penduga model reduksi. Pada penduga model awal, jumlah kuadrat sisa disimbolkan dengan JKS. Karena penduga model awal terdapat syarat pembatas, maka model tersebut direduksi untuk mendapatkan penduga model reduksi (penduga yang mempunyai syarat pembatas). Jumlah kuadrat sisa dari penduga model reduksi disimbolkan JKW. Selisih JKW-JKS disebut jumlah kuadrat regresi yang berasal dari hipotesis $\mathbf{A}\underset{\sim}{\beta} = \underset{\sim}{\mathbf{0}}$ (JKR^*).

2.5 Metode Maksimum Likelihood

Definisi 1. Fungsi likelihood

Fungsi likelihood dari n variabel random $X_1, X_2, ..., X_n$ didefinisikan sebagai fungsi kepadatan bersama dari n variabel random. Fungsi kepadatan bersama $f_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n;\theta)$, yang mempertimbangkan fungsi dari θ. Jika $X_1,...,X_n$ adalah sampel random dari fungsi kepadatan $f(x;\theta)$, maka fungsi likelihoodnya adalah $f(x_1;\theta)f(x_2;\theta),...,f(x_n;\theta)$ (Mood, Graybill and Boes, 1986: 278)

Notasi.

Untuk mengingatkan dalam mempelajari fungsi likelihood sebagai fungsi dari θ, dapat dinotasikan $L(x_1,...,x_n;\theta)$ atau $L(\cdot;x_1,...,x_n)$

Contoh:

Jika $X_1, X_2, ..., X_n$ adalah random sampel dari distribusi X ~N(0,1), Fungsi likelihoodnya adalah:

$$L(x_1, x_2,..., x_n;\theta) = f(X_1 : \theta)f(X_2 : \theta)...f(X_n : \theta), \theta \in \Theta$$

Karena berdistribusi Normal, maka fungsi $f(x;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x_i-\theta)^2}$

fungsi likelihodnya adalah:

$$L(x_1, x_2,..., x_n;\theta) = f(X_1 : \theta)f(X_2 : \theta)...f(X_n : \theta)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x_1-\theta)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x_2-\theta)^2} \cdots \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x_n-\theta)^2}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x_1-\theta)^2 + \left(-\frac{1}{2}(x_2-\theta)^2\right) + \dots + \left(-\frac{1}{2}(x_n-\theta)^2\right)}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left\{(x_1-\theta)^2 + (x_2-\theta)^2 + \dots + (x_n-\theta)^2\right\}}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2}$$

$$= \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2}$$

Sehingga fungsi likelihood dapat dituliskan sebagai berikut:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2}$$

Definisi 2.

Maksimum likelihood estimator, Misalkan:

$$L(\theta) = L(x_1, \dots, x_n; \theta)$$

Merupakan fungsi likelihood dari variabel random $X_1, X_2, \dots, X_n$. Jika $\hat{\theta}$ [dimana $\hat{\theta} = \hat{\vartheta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ merupakan fungsi dari pengamatan $x_1, \dots, x_n$] adalah nilai $\hat{\theta}$ pada $\underline{\bar{\Theta}}$ yang memaksimumkan $L(\theta)$, maka $\hat{\Theta} = \hat{\vartheta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ adalah maksimum likelihood estimator dari θ untuk sampel $x_1, x_2, ..., x_n$ (Mood, Graybill and Boes, 279: 1986).

Contoh:

Andaikan bahwa sampel random berukuran n berdistribusi Bernoulli.

$f(x;p) = p^x q^{1-x} I_{(0,1)}(x),$ untuk $0 \le p \le 1$ dan $q = 1 - p$

Nilai sampel $x_1, x_2, ..., x_n$ menjadi barisan bernilai nol dan satu, dan fungsi likelihoodnya adalah

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i} q^{1-x_i} = p^{\Sigma x_i} q^{n-\Sigma x_i},$$

dimisalkan :

$$y = \sum xi$$

Maka fungsi likelihoodnya menjadi:

$$L(p) = p^{y_i} q^{n-y_i}$$

Dengan melogaritmakan persamaan diatas, diperoleh:

$$\log L(p) = y \log p + (n - y) \log q \qquad (2.8)$$

Untuk mendapatkan penduga dari p maka dengan mendiferensialkan persamaan (2.8) terhadap p, diperoleh:

$$\frac{\partial \log L(p)}{\partial p} = \frac{y}{p} - \frac{n-y}{q} \qquad (2.9)$$

Karena $\frac{\partial \log L(p)}{\partial p} = 0$, Persamaan (2.9) menjadi

$$\frac{y}{p} - \frac{n-y}{q} = 0$$

Untuk $q = 1 - p$, maka:

$$\frac{y}{p}-\frac{n-y}{1-p}=0$$

$$\frac{y}{p}=\frac{n-y}{1-p}$$

$$y-py=p(n-y)$$

$$-py-p(n-y)=-y$$

$$-p(y+n-y)=-y$$

$$p=\frac{-y}{-n}$$

$$\hat{p}=\frac{y}{n}=\frac{1}{n}\sum x_i=\bar{x}$$

2.6 Metode Pengganda Lagrange

Metode pengganda lagrange digunakan untuk mendapatkan nilai maksimum relative dan nilai minimum *relative* dari sebuah fungsi yang mempunyai syarat pembatas (*constrain condition*). Jika diketahui fungsi $F(x, y, z)$ dengan syarat pembatas $\phi(x, y, z)=0$, maka fungsi pembantu adalah:

$$G(x, y, z) \equiv F(x, y, z)+\lambda\phi(x, y, z)$$

yang memenuhi syarat

$$\frac{\partial G}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial G}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial G}{\partial z}=0$$

merupakan syarat-syarat perlu untuk maksimum relative atau minimum relative. Parameter λ, yang tak tergantung dari x, y, z dinamakan pengganda lagrange (*lagrange multiplier*).

Metode tersebut dapat digeneralisasikan. Jika ingin mencari nilai maksimum *relative* atau minimum *relative* dari sebuah fungsi $F(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ yang memenuhi syarat-syarat pembatas $\phi_1(x_1, ..., x_n) = 0$, $\phi_2(x_1, ..., x_n) = 0, \ldots \phi_k(x_1, ..., x_n) = 0$, maka dibentuk fungsi pembantu adalah:

$$G(x_1, x_2, ..., x_n) = F + \lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 + ... + \lambda_k\phi_k$$

Yang memenuhi syarat-syarat (perlu)

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} = 0,\ \frac{\partial G}{\partial x_2} = 0, \ldots, \frac{\partial G}{\partial x_n} = 0$$

dimana $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ yang tidak tergamtung dari $x_1, x_2, ..., x_n$ adalah pengganda-pengganda lagrange.

(Spiegel,1984:166-167)

2.7 Pendapat Para Ulama' dalam Menafsirkan Surat Ash-Shaffaat Ayat 147

Islam adalah agama yang mengatasi dan melintasi waktu karena sistem nilai yang dikandungnya adalah mutlak. Kebenaran nilai Islam bukan hanya untuk masa dahulu, namun juga sekarang dan akan datang. Nilai-nilai dalam Islam adalah sepanjang masa. Jadi Islam memiliki pandangan–hidup mutlaknya sendiri, merangkumi persoalan keTuhanan, keNabian, kebenaran, alam semesta, dan lain-lain.

Dalam Al-Qur'an pada surat Ash-Shaffaat terdapat ayat yang menyinggung masalah matematika, yaitu tentang pendugaan. Surat Ash-Shaffaat adalah Makiyah, yakni turun sebelum Nabi hijrah ke Madinah. Ash-Shaffaat berarti yang berbaris baris, kalimat yang pertama dari ayat yang pertama. Yang disebutkan berbaris-baris itu adalah Malaikat-Malaikat Tuhan dialam malakut, yang tidak tahu berapa jutakah bilangannya, kecuali Allah Swt sendiri. Sedangkan bintang dilangit, yang dapat dilihat mata. Sedangkan pasir dipantai yang dapat ditampung tangan. Sedangkan daun dirimba yang dapat dilihat ketika berpucuk, berdaun dan tanggal dari tampuknya, lagi tidak dapat kita manusia menghitungnya, apatah lagi Malaikat yang ghaib (Amrullah, 1981:106).

Pendugaan dalam matematika disinggung dalam surat Ash-Shaffaat ayat 147, yaitu:

وَأَرْسَلْنَٰهُ إِلَىٰ مِاْئَةِ أَلْفٍ أَوْ يَزِيدُونَ ﴿١٤٧﴾

Artinya: Dan Kami utus dia kepada seratus ribu orang atau lebih (Qs. Ash-Shaffaat/37:147)

Sebab turunnya ayat diatas yaitu menceritakan tentang kisah Nabi Yunus. Bahwa tatkala Yunus diancam akan disiksa oleh kaumnya, maka dia keluar dari kalangan mereka sebelum mendapat perintah dari Allah Swt untuk hijrah. Lalu dia naik kapal, namun kapal itu tidak bisa berjalan dan para awak kapal menyangka bahwa kapal itu apabila memuat seorang budak yang melarikan diri, maka kapal itu tidak bisa berjalan. Oleh karena itu mereka melakukan undian dan ternyata undian itu keluar untuk Yunus, maka dilemparkanlah dirinya kedalam air (Al-Maraghi,1974:136).

Abdusysyakir (2007:155-156) mengatakan bahwa pendugaan (estimasi) adalah keterampilan untuk menentukan sesuatu tanpa melakukan proses perhitungan secara eksak. Dalam matematika terdapat tiga jenis estimasi yaitu estimasi banyak/jumlah (numerositas), estimasi pengukuran dan estimasi komputasional.Estimasi banyak/ jumlah

1. Estimasi banyak adalah menentukan banyaknya objek tanpa menghitung secara eksak. Objek disini maknanya sangat luas. Objek dapat bermakna orang, uang kelereng, titik, dan mobil. Estimasi pada Qs. Ash-Shaffaat ayat 147 adalah estimasi banyak yaitu banyaknya orang.
2. Estimasi pengukuran

   Estimasi pengukuran adalah menentukan ukuran sesuatu tanpa menghitung secara eksak. Ukuran disini maknanya sangat luas. Ukuran dapat bermakna ukuran waktu, panjang, luas, usia dan volume. Ketika melihat orang berjalan tanpa menanyakan tanggal lahirnya, pembaca dapat menebak/menaksir usianya.
3. Estimasi komputasional

   Estimasi komputasional adalah menentukan hasil suatu operasi hitung tanpa menghitungnya secara eksak. Seseorang mungkin akan menghitung dengan cara membulatkan kepuluhan terdekat.

Dari pengertian diatas, maka dapat diketahui kaitan ayat diatas dengan pendugaan terletak pada kalimat مِاْئَة أَلْفٍأَوْ يَزِيدُونَ, Karena ayat tersebut dalam menentukan jumlah umat Nabi Yunus tidak dengan perhitungan secara eksak, Sehingga terdapat perbedaan pendapat para ulama’ dalam menafsirkan ayat tersebut.

Shihab dalam Tafsir al-Misbah (2003: 84) menjelaskan bahwa kata (أَو) auw/ atau pada firmannya (أَوْ يَزِيدُونَ) auw yaziduun, lebih dipahami oleh sementara ulama’ dalam arti bahkan, ada juga yang memahami dalam arti dan.

Jika dipahami dalam arti atau, maka ayat ini bagaikan menyatakan jumlah mereka banyak, menurut perhitungannnya adalah seratus ribu/lebih. Jika dipahami dalam arti dan/bahkan, maka itu berarti mereka diutus kepada dua kelompok, yang pertama berjumlah seratus ribu(100.000) dan yang satu lagi adalah yang lebih dari itu. Dalam satu riwayat dinyatakan jumlah dua puluh ribu. Yang seratus ribu adalah orang-orang Yahudi penduduk Nainawa, yang ketika itu berada dalam kerajaan Asy'ur, sedang yang lebih adalah selain orang Yahudi yang bermukim juga di negeri itu.

Pendapat yang lain yaitu Amrullah dalam Tafsir al-Ahzar (1976:194), Menceritakan bahwa setelah Nabi Yunus sehat dan kuat kembali, dia diperintahkan Tuhan melaksanakan perintah yang dipikulnya kepadanya, yaitu mendatangi dan melakukan dakwah kepada kaumnya di negeri Ninive ini, yang berjumlah 100.000 orang atau lebih, artinya lebih dari 100.000, kurang tidak. Tugas itupun dilaksanakannya dengan baik karena kesalahan yang telah diperbuatnya dahulu itu, lari meninggalkan tugas karena murka/ iba hati kepada kaumnya, telah menginsafi dan berjanji akan mengubahnya, sebagaimana dalam pangkal surat Ash-shaffaat ayat 148 :

... فَـَٔامَنُوا۟ ﴿١٤٨﴾

artinya: Lalu mereka beriman...(Qs. Ash-Shaffaat/37:148).

Maka berimanlah mereka yaitu kaum Nabi Yunus yang lebih dari seratus itu, semua merekapun telah beriman.

Al-Maraghi dalam Tafsir Al-Maraghi (1974:138), menceritakan bahwa Nabi Yunus sekali lagi diutus oleh kaum itu dan mereka ada 100.000 bahkan lebih. Maka menjadi stabil keadaan mereka dan beriman kepada Yunus. Karena, setelah Yunus keluar dari kalangan mereka, mereka berpikir benar-benar telah melakukan kekeliruan, dan jika mereka tidak mengikuti Rasul, maka mereka akan binasa, seperti yang terjadi atas umat-umat sebelum mereka. Maka tatkala Yunus kembali kepada mereka dan menyeru kepada Tuhannya, maka mereka menyambut seruan Yunus itu dengan taat dan tunduk kepada perintah dan larangan Allah. Maka kami anugrahi kenikmatan kepada mereka dalam kehidupan ini hingga ajal, dan mereka pun mati sebagaimana matinya orang-orang lain.

Al-Mahally dan As-Syuyuthi, dalam Tafsir Jalalain, (1990:1945-1946), menjelaskan bahwa وَأَرۡسَلۡنَٰهُ *(Dan kami utus dia*) sesudah itu, sebagaimana status sebelumnya, kepada kaum Bunainawiy yang tinggal didaerah Mausul- إِلَىٰ مِاْئَةِ أَلۡفٍ أَوۡ يَزِيدُونَ (*kepada seratus ribu orang atau*) bahkan يَزِيدُونَ (*lebih dari itu*) yakni lebih dua puluh atau tiga puluh atau tujuh puluh ribu orang.

Para ulama' diatas mempunyai versi yang berbeda-beda dalam menafsirkan مِاْئَةِ أَلۡفٍ أَوۡ يَزِيدُونَ, hal ini karena ayat tersebut tidak ada kejelasan dalam menerangkan jumlah umat Nabi Yunus. Para ulama memperkirakan jumlah umat Nabi Yunus dengan jumlah yang berbeda-beda tetapi meskipun demikian tidak ada yang mengatakan kurang dari 100.000 orang.

Tabel 2.1
Penafsiran Ulama ' Pada Qs. As-Shaffaat Ayat 147

NO	ULAMA'	TAFSIR	PENDAPAT ULAMA' DALAM MENAFSIRKAN مِائَةِ أَلْفٍ أَوْ يَزِيدُونَ
1	M. Quraish Shihab	Al-Misbah pesan, kesan dan keserasian Al-Qur'an	a. أَوْ يَزِيدُونَ yang berarti "atau": diduga sebanyak 100.000 orang atau lebih b. أَوْ يَزِيدُونَ. yang berarti "dan" diduga sebanyak: 1. 100.000 orang-orang Yahudi penduduk Nainawa 2. 20.000 selain orang-orang Yahudi penduduk Nainawa
2	Abdulmalik Abdulkarim Amrullah (HAMKA)	Al-Azhar	Diduga sebanyak 100.000 orang atau lebih, artinya lebih dari 100.000, kurang tidak.
3	Ahmad Musthafa Al-Maraghi	Al-Maraghi	Diduga sebanyak 100.000 orang atau lebih
4	Imam Jalaluddin Al-Mahally dan Imam Jalaluddin As-Suyuthi	Jalalain	Sebanyak 100.000 orang dan يَزِيدُونَ "lebih" diduga sebanyak 20.000, atau 30.000 orang, atau 70.000 orang

Dari ayat diatas diketahui bahwa terdapat perbedaan pendapat para ulama' dalam menduga banyaknya umat Nabi Yunus. يَزِيدُونَ yang bermakna *lebih* itu oleh para ulama' diduga sebanyak 20.000 orang, 30.000 orang, atau 70.000 orang. Ada juga yang hanya mengatakan *lebih saja*. Jika mengatakan *lebih saja*, maka bisa saja 10.000 orang atau 15.000 orang, hal ini karena ayat tersebut tidak mengatakan jumlah umat Nabi Yunus yang sebenarnya.

Makna lebih disini terdapat suatu batasan tertentu. Jika umat Nabi Yunus dinyatakan dalam X, maka mempunyai interval $100.000 \leq X < 200.000$, artinya umat Nabi Yunus tidak kurang dari 100.000 dan tidak sampai 200.000 orang.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Penentuan Penduga Parameter Model Regresi Nonlinier Multiplikatif

Dalam menentukan penduga parameter model Regresi Nonlinier Multiplikatif, terlebih dahulu harus mengasumsikan variabel indepedent dengan distribusi yang akan digunakan. Penelitian ini mengasumsikan variabel indepedent berdistribusi normal dengan mean $=\mu$ dan varian = σ^2, dan dalam menduga parameter menggunakan metode Maksimum Likelihood.

3.1.1 Menentukan Penduga Parameter $\underset{\sim}{\beta}^*$ Model Regresi Nonlinier Multiplikatif

Regresi nonlinier multiplikatif dinyatakan dalam bentuk:

$$Y_i = \beta_0 X_{i1}^{\beta_1} X_{i2}^{\beta_2} \ldots \varepsilon_i \qquad (3.1)$$

Persamaan (3.1) dilinierkan dengan menggunakan logaritma natural, Sehingga modelnya menjadi:

$$\ln(Y_i) = \ln\left(\beta_0 X_{i1}^{\beta_1} X_{i2}^{\beta_2} \ldots \varepsilon_i\right)$$

$$\ln(Y_i) = \ln(\beta_0) + \ln\left(X_{i1}^{\beta_1}\right) + \ln\left(X_{i2}^{\beta_2}\right) + \ldots + \ln(\varepsilon_i)$$

$$\ln Y_i = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln X_{i1} + \beta_2 \ln X_{i2} + \ldots + \ln \varepsilon_i \qquad (3.2)$$

ε tidak berdistribusi normal, karena yang berdistribusi normal adalah $\ln \varepsilon$

Dengan menggunakan pendekatan matrik, maka persamaan (3.2) dinotasikan dalam bentuk matrik, sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \ln Y_1 \\ \ln Y_2 \\ . \\ . \\ . \\ \ln Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \ln X_{11} & \ln X_{12} & . & . & . & \ln X_{1k} \\ 1 & \ln X_{21} & \ln X_{22} & . & . & . & \ln X_{2k} \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ 1 & \ln X_{n1} & \ln X_{n2} & . & . & . & \ln X_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln \beta_0 \\ \beta_1 \\ . \\ . \\ . \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ln \varepsilon_1 \\ \ln \varepsilon_2 \\ . \\ . \\ . \\ \ln \varepsilon_n \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

Misalkan:

$$\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^* = \begin{bmatrix} \ln Y_1 \\ \ln Y_2 \\ . \\ . \\ . \\ \ln Y_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}^* = \begin{bmatrix} 1 & \ln X_{11} & \ln X_{12} & . & . & . & \ln X_{1k} \\ 1 & \ln X_{21} & \ln X_{22} & . & . & . & \ln X_{2k} \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ 1 & \ln X_{n1} & \ln X_{n2} & . & . & . & \ln X_{nk} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^* = \begin{bmatrix} \ln \beta_0 \\ \beta_1 \\ . \\ . \\ . \\ \beta_k \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^* = \begin{bmatrix} \ln \varepsilon_1 \\ \ln \varepsilon_2 \\ . \\ . \\ . \\ \ln \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Dengan demikian, Bentuk linier Regresi Nonlinier Multiplikatif dengan pendekatan matrik adalah:

$$\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^* = \mathbf{X}^* \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^* + \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \tag{3.4}$$

$$nx1 \qquad nx(k+1) \qquad (k+1)x1 \qquad nx1$$

Karena persamaan (3.4) diasumsikan berdistribusi normal, maka Fungsi Kepadatan Bersama dengan ε_i variabel indepedent berdistribusi normal, dirumuskan sebagai:

$$f\left(\varepsilon_i\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma}\right)^2} \tag{3.5}$$

Fungsi likelihood (L) didefinisikan sebagai fungsi kepadatan bersama dari random error. Ketika random error diasumsikan independent, maka fungsi kepadatan bersama merupakan hasil dari fungsi marjinal, dirumuskan sebagai:

$$L\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n;\sigma^2\right)=f\left(\varepsilon_1\right)\cdot f\left(\varepsilon_2\right)\cdot f\left(\varepsilon_3\right)\ldots f\left(\varepsilon_n\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\varepsilon_1}{\sigma}\right)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\varepsilon_2}{\sigma}\right)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\varepsilon_3}{\sigma}\right)^2}\ldots\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma}\right)^2}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\varepsilon_1}{\sigma}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\varepsilon_2}{\sigma}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\varepsilon_3}{\sigma}\right)^2+\ldots+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma}\right)^2}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right)\varepsilon_1^2+\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right)\varepsilon_2{}^2+\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right)\varepsilon_3^2+\ldots+\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right)\varepsilon_i^2}$$

$$=\left(\frac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2+\ldots+\varepsilon_i^2\right)}$$

$$=\left(\frac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2}$$

$$=\frac{1}{\left(2\pi\right)^{\frac{n}{2}}\sigma^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2} \tag{3.6}$$

Pada persamaan (3.6) didapatkan jumlah kuadrat kesalahan $\left(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2\right)$. $\left(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2\right)$

diperoleh dari mengkuadratkan persamaan (3.4) yaitu:

$$\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2 = \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*T}\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*} = \left(\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*}\right)^{T}\left(\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*}\right) \tag{3.7}$$

kemudian persamaan (3.7) disubstitusikan ke dalam persamaan (3.6) sehingga diperoleh:

$$L\left(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n; \sigma^2\right) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\left(\sigma^2\right)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{1}{\left(2\sigma^2\right)}\left[\left(\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*}\right)^{T}\left(\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*}\right)\right]} \tag{3.8}$$

Untuk menyelesaikan persamaan (3.8), maka menggunakan logaritma natural, didapatkan:

$$\ln(L) = \ln\left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\left(\sigma^2\right)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{\left(2\sigma^2\right)}\left[\left(\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*}\right)^{T}\left(\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*}\right)\right]}\right)$$

$$= \ln\left((2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot \left(\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{\left(2\sigma^2\right)}\left[\left(\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*}\right)^{T}\left(\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*}\right)\right]}\right)$$

$$= \ln\left((2\pi)^{-\frac{n}{2}}\right) + \ln\left(\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}} + \ln\left(e^{-\frac{1}{\left(2\sigma^2\right)}\left[\left(\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*}\right)^{T}\left(\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*}\right)\right]}\right)$$

$$= -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 + \left\{-\frac{1}{\left(2\sigma^2\right)}\left[\left(\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*}\right)^{T}\left(\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*}\right)\right]\right\}\ln e$$

$$= -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 + \left\{-\frac{1}{\left(2\sigma^2\right)}\left[\left(\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*}\right)^{T}\left(\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*}\right)\right]\right\}(1)$$

$$= -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{\left(2\sigma^2\right)}\left(\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*T}\mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*}\right)$$

$$= -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{\left(2\sigma^2\right)}\left(\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \left(\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*T}\mathbf{X}^{*}\right)^{T}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*}\right)$$

$$= -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln \sigma^2 - \frac{1}{\left(2\sigma^2\right)}\left(\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*}\right)$$

$$= -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln \sigma^2 - \frac{1}{\left(2\sigma^2\right)}\left(\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - 2\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*}\right)$$

$$= -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} + \frac{1}{2\sigma^2}2\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \frac{1}{2\sigma^2}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*}$$

$$= -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} + \frac{1}{\sigma^2}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \frac{1}{2\sigma^2}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*} \quad (3.9)$$

Untuk mendapatkan penduga parameter $\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*}$ yaitu dengan memaksimumkan persamaan (3.9) terhadap $\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*}$, artinya mendiferensialkan $\ln\left(\mathrm{L}\right)$ terhadap $\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*}$, diperoleh:

$$\frac{\partial \ln(\mathrm{L})}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*}} = \frac{1}{\sigma^2}\mathbf{X}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \frac{1}{\sigma^2}\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*}$$

$$\frac{\partial \ln(\mathrm{L})}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*}} = \underset{\sim}{\mathbf{0}}$$, Sehingga:

$$\frac{1}{\sigma^2}\mathbf{X}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \frac{1}{\sigma^2}\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{*} = \underset{\sim}{\mathbf{0}}$$

$$\frac{1}{\sigma^2}\mathbf{X}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} = \frac{1}{\sigma^2}\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{*}$$

$$\mathbf{X}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} = \mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{*} \quad (3.10)$$

$$\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{*} = \left(\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^{*}\right)^{-1}\mathbf{X}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} \quad (3.11)$$

Penduga parameter pada persamaan (3.12), dikatakan sebagai penduga parameter model awal. Karena terdapat syarat pembatas *(constrain condition*) yang diasumsikan dengan $\mathbf{A}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*} = \underset{\sim}{\mathbf{0}}$ maka model awal direduksi untuk mendapatkan penduga parameter $\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^*$ yang mengandung suatu syarat pembatas *(constrain condition*) yaitu dengan menggunakan metode pengganda lagrange (dimana penduga $\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^*$ yang mengandung syarat pembatas dikatakan sebagai penduga model reduksi dinotasikan dengan $\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_c^*$). Regresi nonlinier multiplikatif yang telah ditransformasikan kedalam bentuk linier dan dijadikan dalam bentuk matrik adalah:

$$\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^* = \mathbf{X}^*\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^* + \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^*$$

Kemudian meminimumkan $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*T}\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^*$ dengan syarat pembatas *(constrain condition*):

$\mathbf{A}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^* = \underset{\sim}{\mathbf{0}}$, dimana :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{10} & a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1k} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2k} \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ a_{m0} & a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mk} \end{bmatrix}. \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^* = \begin{bmatrix} \ln\beta_0 \\ \beta_1 \\ . \\ . \\ . \\ \beta_k \end{bmatrix} \text{ dan } \underset{\sim}{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3.12)$$

sehingga *linier constrain* nya dapat dinyatakan sebagai berikut*:*

$$g_i \equiv \mathbf{a}_i^T\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^* = \underset{\sim}{\mathbf{0}} \qquad (3.13)$$

dengan $\mathbf{a}_i$ adalah baris ke-i, i = 1,2,3,…,m dari matrik A, dimana A adalah matrik berukuran $m \times (k+1)$.

Dengan menggunakan metode pengganda lagrange

$$r = \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*T}\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^* + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i \qquad (3.14)$$

Dimana:

r = fungsi pembantu

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*} = \underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i = \underset{\sim}{\boldsymbol{\lambda}}^{T}\left(\mathbf{A}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*}\right)$$

$$= \left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\lambda}}^{T}\mathbf{A}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*}\right)^{T}$$

$$= \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*T}\mathbf{A}^{T}\underset{\sim}{\boldsymbol{\lambda}} \qquad (3.15)$$

Persamaan (3.8) dan (3.15) disubstitusikan ke dalam persamaan (3.14):

$$r = \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*T}\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*} + \sum_{i=1}^{q} \lambda_i g_i$$

$$= \left(\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*}\right)^{T}\left(\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*}\right) + \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*T}\mathbf{A}^{T}\underset{\sim}{\boldsymbol{\lambda}}$$

$$= \underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*T}\mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*T}\mathbf{A}^{T}\underset{\sim}{\boldsymbol{\lambda}}$$

$$= \underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - (\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*T}\mathbf{X}^{*})^{T}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*T}\mathbf{A}^{T}\underset{\sim}{\boldsymbol{\lambda}}$$

$$= \underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*T}\mathbf{A}^{T}\underset{\sim}{\boldsymbol{\lambda}}$$

$$= \underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - 2\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*T}\mathbf{A}^{T}\underset{\sim}{\boldsymbol{\lambda}} \qquad (3.16)$$

Kemudian persamaan (3.16) didiferensialkan terhadap $\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*}$, Sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial r}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*}} = -2\mathbf{X}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} + 2\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*} + \mathbf{A}^{T}\underset{\sim}{\boldsymbol{\lambda}}$$

$\frac{\partial r}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*}} = \underset{\sim}{\mathbf{0}}$, maka:

$$-2\mathbf{X}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} + 2\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_{\mathbf{c}}^{*} + \mathbf{A}^{T}\underset{\sim}{\boldsymbol{\lambda}} = \underset{\sim}{\mathbf{0}}$$

$$2\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_{\mathbf{c}}^{*} = -2\mathbf{X}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \mathbf{A}^{T}\underset{\sim}{\boldsymbol{\lambda}}$$

$$2\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_{\mathbf{c}}^{*} = 2\mathbf{X}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \mathbf{A}^{T}\underset{\sim}{\boldsymbol{\lambda}}$$

$$\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_{\mathbf{c}}^{*} = \mathbf{X}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \frac{1}{2}\mathbf{A}^{T}\underset{\sim}{\boldsymbol{\lambda}}$$

$$\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_{\mathbf{c}}^{*} = \left(\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^{*}\right)^{-1}\mathbf{X}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \frac{1}{2}\left(\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^{*}\right)^{-1}\mathbf{A}^{T}\underset{\sim}{\boldsymbol{\lambda}}$$

$$\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_{\mathbf{c}}^{*} = \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{*} - \frac{1}{2}\left(\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^{*}\right)^{-1}\mathbf{A}^{T}\underset{\sim}{\boldsymbol{\lambda}}$$

$$\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_{\mathbf{c}}^{*} = \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{*} - \frac{1}{2}\left(\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^{*}\right)^{-1}\mathbf{A}^{T}\underset{\sim}{\boldsymbol{\lambda}} \qquad (3.17)$$

Setelah diperoleh $\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_{\mathbf{c}}^{*}$, kemudian persamaan (3.17) disubstitusikan ke persamaan berikut ini:

$$\mathbf{A}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_{\mathbf{c}}^{*} = \underset{\sim}{\mathbf{0}}$$

$$\mathbf{A}(\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{*} - \frac{1}{2}\left(\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^{*}\right)^{-1}\mathbf{A}^{T}\underset{\sim}{\boldsymbol{\lambda}}) = \underset{\sim}{\mathbf{0}}$$

$$\mathbf{A}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{*} - \frac{1}{2}\mathbf{A}\left(\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^{*}\right)^{-1}\mathbf{A}^{T}\underset{\sim}{\boldsymbol{\lambda}} = \underset{\sim}{\mathbf{0}} \qquad (3.18)$$

$$\mathbf{A}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{*} - \frac{1}{2}\underset{\sim}{\boldsymbol{\lambda}}^{T}\mathbf{A}\left(\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^{*}\right)^{-1}\mathbf{A}^{T} = \underset{\sim}{\mathbf{0}}$$

$$\frac{1}{2}\underset{\sim}{\boldsymbol{\lambda}}^{T}\mathbf{A}\left(\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^{*}\right)^{-1}\mathbf{A}^{T} = -\mathbf{A}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{*}$$

$$-\frac{1}{2}\underset{\sim}{\boldsymbol{\lambda}} = [\mathbf{A}\left(\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^{*}\right)^{-1}\mathbf{A}^{T}]^{-1}(-\mathbf{A}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{*})$$

$$\frac{1}{2}\underset{\sim}{\boldsymbol{\lambda}} = [\mathbf{A}\left(\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^{*}\right)^{-1}\mathbf{A}^{T}]^{-1}\mathbf{A}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{*} \qquad (3.19)$$

Mensubstitusikan persamaan (3.19) kedalam persamaan (3.17), sehingga:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_c^* = \hat{\boldsymbol{\beta}}^* - \left\{[\mathbf{A}\left(\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^*\right)^{-1}\mathbf{A}^T]^{-1}\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}}^*\right\}\left(\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^*\right)^{-1}\mathbf{A}^T$$

$$= \hat{\boldsymbol{\beta}}^* - \left(\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^*\right)^{-1}\mathbf{A}^T\left[\mathbf{A}\left(\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^*\right)^{-1}\mathbf{A}^T\right]^{-1}\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}}^* \qquad (3.20)$$

$\hat{\boldsymbol{\beta}}_c^*$ merupakan penduga parameter dari model reduksi, vektor $\hat{\boldsymbol{\beta}}_c^*$ terdiri dari parameter $\ln\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$,..., $\hat{\beta}_n$.

3.1.2 Menentukan Penduga Parameter σ^2 Model Regresi Nonlinier Multiplikatif

Untuk mendapatkan penduga dari σ^2 yaitu dengan memaksimumkan persamaan (3.9) terhadap σ^2 artinya mendiferensialkan persamaan (3.9) terhadap σ^2, diperoleh:

$$\frac{\partial \ln(L)}{\sigma^2} = -\frac{n}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sigma^4}\right)\mathbf{Y}^{*T}\mathbf{Y}^* + \left(-\frac{1}{\sigma^4}\right)\boldsymbol{\beta}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\mathbf{Y}^* - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sigma^4}\right)\boldsymbol{\beta}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^*\boldsymbol{\beta}^*$$

$$= -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^4}\right)\mathbf{Y}^{*T}\mathbf{Y}^* - \left(\frac{1}{\sigma^4}\right)\boldsymbol{\beta}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\mathbf{Y}^* + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^4}\right)\boldsymbol{\beta}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^*\boldsymbol{\beta}^*$$

$\frac{\partial \ln(L)}{\sigma^2} = \mathbf{0}$ Maka:

$$-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\mathbf{Y}^{*T}\mathbf{Y}^* - \left(\frac{1}{\sigma^4}\right)\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\mathbf{Y}^* + \frac{1}{2\sigma^4}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^*\hat{\boldsymbol{\beta}}^* = \mathbf{0}$$

$$\frac{n}{2\sigma^2} = \frac{1}{2\sigma^4}\mathbf{Y}^{*T}\mathbf{Y}^* - \frac{1}{\sigma^4}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\mathbf{Y}^* + \frac{1}{2\sigma^4}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^*\hat{\boldsymbol{\beta}}^*$$

$$\frac{n}{2\sigma^2} = \frac{1}{2\sigma^4}\left(\mathbf{Y}^{*T}\mathbf{Y}^* - 2\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\mathbf{Y}^* + \hat{\boldsymbol{\beta}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^*\hat{\boldsymbol{\beta}}^*\right)$$

$$n2\sigma^4 = 2\sigma^2\left(\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - 2\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} + \hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^{*}\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}}^{*}\right)$$

$$n\sigma^2 = \left(\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - 2\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} + \hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^{*}\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}}^{*}\right)$$

$$\sigma^2 = \frac{\left(\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - 2\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} + \hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^{*}\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}}^{*}\right)}{n} \qquad (3.21)$$

Karena $\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{*T}\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{*} = \underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - 2\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^{*}\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}}^{*}$, maka:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{*T}\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{*}}{n}$$

Kemudian menentukan penduga parameter σ_c^2 yang mengandung suatu syarat pembatas, karena $\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{\mathbf{c}}^{*T}\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{\mathbf{c}}^{*} = \underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}}_{\mathbf{c}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*}$,dimana:

$$\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}}_{\mathbf{c}}^{*} = \hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}}^{*} - \left(\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^{*}\right)^{-1}\mathbf{A}^{T}\left[\mathbf{A}\left(\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^{*}\right)^{-1}\mathbf{A}^{T}\right]^{-1}\mathbf{A}\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}}^{*}$$

sehingga diperoleh penduga σ_c^2 sebagai berikut:

$$\hat{\sigma}_c^2 = \frac{1}{n}\left(\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \left\{\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}}^{*} - \left(\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^{*}\right)^{-1}\mathbf{A}^{T}\left[\mathbf{A}\left(\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^{*}\right)^{-1}\mathbf{A}^{T}\right]^{-1}\mathbf{A}\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}}^{*}\right\}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{\mathbf{c}}^{*T}\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{\mathbf{c}}^{*}$$

3.2 Penentuan Jumlah Kuadrat Regresi (JKR^*) pada Pengujian Hipotesis Linier Umum $\mathbf{A}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*} = \underset{\sim}{\mathbf{0}}$

Pengujian hipotesis linier umum ini, berlaku untuk hipotesis nol atau $H_0 : \mathbf{A}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*} = \underset{\sim}{\mathbf{0}}$. Untuk mendapatkan jumlah kuadrat regresi (JKR^*), menggunakan rumus:

$$JKR^* = JKW - JKS$$

dimana:

JKR^{*} = Jumlah kuadrat regresi dari hipotesis $\mathbf{A}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*} = \underset{\sim}{\mathbf{0}}$

JKS = Jumlah kuadrat model awal

JKW = Jumlah kuadrat model reduksi

Untuk mendapatkan JKR^{*} terlebih dulu harus menentukan JKS dan JKW, Berdasarkan persamaan (3.11) maka:

$$\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{*} = \underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{*}$$

JKS diperoleh dengan mengkuadratkan kesalahan (galat) dari model regresi awal dirumuskan:

$$\begin{aligned}
JKS &= \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{*T}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{*} \\
&= \left(\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{*}\right)^{T}\left(\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{*}\right) \\
&= \underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*T}\mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{*} - \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} + \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{*} \\
&= \underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \left(\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*T}\mathbf{X}^{*}\right)^{T}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{*} - \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{T*}\mathbf{X}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} + \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{*} \\
&= \underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} + \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{*} \\
&= \underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - 2\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} + \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{*} \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (3.12), dimana $\mathbf{X}^{*\,T}\mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{*} = \mathbf{X}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*}$, maka persamaan (3.12) disubstitusikan kedalam persamaan (3.30), menjadi:

$$\begin{aligned}
JKS &= \underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - 2\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} + \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} \\
&= \underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - 2\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{*T}\mathbf{X}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} + \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{T*}\mathbf{X}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} \\
&= \underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{T*}\mathbf{X}^{*T}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*}
\end{aligned}$$

$$= \underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*}$$

Setelah diperoleh JKS, kemudian menetukan JKW. Berdasarkan persamaan (3.20) untuk $\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{*} = \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_{\mathbf{c}}^{*}$ maka:

$$\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{\mathbf{c}}^{*} = \underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_{\mathbf{c}}^{*}$$

JKW diperoleh dengan mengkuadratkan kesalahan (galat) dari model regresi reduksi dirumuskan:

$$\begin{aligned}
\mathrm{JKW} &= \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{\mathbf{c}}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{\mathbf{c}}^{*} \\
&= \left(\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_{\mathbf{c}}^{*}\right)^{\mathrm{T}}\left(\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_{\mathbf{c}}^{*}\right) \\
&= \underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_{\mathbf{c}}^{*} - \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_{\mathbf{c}}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} + \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_{\mathbf{c}}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_{\mathbf{c}}^{*} \\
&= \underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_{\mathbf{c}}^{*} - \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_{\mathbf{c}}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} + \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_{\mathbf{c}}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_{\mathbf{c}}^{*} \\
&= \underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \left(\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*}\right)^{\mathrm{T}}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_{\mathbf{c}}^{*} - \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_{\mathbf{c}}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} + \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_{\mathbf{c}}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_{\mathbf{c}}^{*} \\
&= \underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_{\mathbf{c}}^{\mathrm{T}*}\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_{\mathbf{c}}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} + \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_{\mathbf{c}}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_{\mathbf{c}}^{*} \\
&= \underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - 2\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_{\mathbf{c}}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} + \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_{\mathbf{c}}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_{\mathbf{c}}^{*} \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

berdasarkan persamaan (3.12), untuk $\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{*} = \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_{\mathbf{c}}^{*}$ sehingga $\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_{\mathbf{c}}^{*} = \mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*}$, disubstitusikan ke persamaan (3.23), diperoleh:

$$\begin{aligned}
\mathrm{JKW} &= \underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - 2\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_{\mathbf{c}}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} + \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_{\mathbf{c}}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} \\
&= \underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - 2\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_{\mathbf{c}}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} + \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_{\mathbf{c}}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} \\
&= \underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_{\mathbf{c}}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} \\
&= \underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_{\mathbf{c}}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*}
\end{aligned}$$

Setelah diperoleh JKS dan JKW, kemudian menentukan JKR^*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{JKR}^* &= \mathrm{JKW} - \mathrm{JKS} \\
&= \left(\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}{}_{\mathbf{c}}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*}\right)\left(\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}{}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*}\right) \\
&= \underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}{}_{\mathbf{c}}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} + \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}{}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} \\
&= -\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}{}_{\mathbf{c}}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} + \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}{}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} \\
&= \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}{}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}{}_{\mathbf{c}}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} \qquad (3.24)
\end{aligned}
$$

Kemudian mensubstitusikan (3.20) kedalam persamaan (3.24), sehingga:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{JKR}^* &= \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}{}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \left\{\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}{}^{*} - \left(\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left[\mathbf{A}\left(\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right]^{-1}\mathbf{A}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}{}^{*}\right\}\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} \\
&= \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}{}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \left\{\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}{}^{*} - \left(\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left[\mathbf{A}\left(\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right]^{-1}\mathbf{A}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}{}^{*}\right\}\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} \\
&= \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}{}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} - \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}{}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} + \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}{}^{*\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left[\mathbf{A}\left(\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right]^{-1}\mathbf{A}\left(\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*}\right)^{-1}\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} \\
&= \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}{}^{*\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left[\mathbf{A}\left(\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right]^{-1}\mathbf{A}\left(\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*}\right)^{-1}\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*} \\
&= \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}{}^{*\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left[\mathbf{A}\left(\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right]^{-1}\mathbf{A}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}{}^{*} \\
&= \left(\mathbf{A}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}{}^{*}\right)^{\mathrm{T}}\left[\mathbf{A}\left(\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right]^{-1}\mathbf{A}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}{}^{*}
\end{aligned}
$$

3.2 Korelasi Al-Qur'an Surat Ash-Shaffaat Ayat 147 dengan Matematika

Ilmu matematika yang telah dipelajari oleh manusia sejak zaman dahulu, salah satu konsepnya terdapat dalam Al-Qur'an. Sebagaimana dalam BAB II, bahwa Pendugaan parameter disinggung terdapat dalam surat Ash-Shaffaat ayat

147. Peneliti pada bab ini akan menghubungkan antara Qs. Ash-Shaffaat ayat 147 dengan konsep pendugaan dalam matematika.

Al-Qur'an merupakan kitabullah yang di dalamnya terkandung ilmu-ilmu Allah. Untuk mendapatkan ilmu tersebut perlu mengkaji Al-Quran secara mendalam. Salah satu ilmu Allah yang dibahas dalam penelitian ini adalah tentang pendugaan. Konsep pendugaan dalam matematika ternyata telah terkonsep sejak zaman Nabi Muhammad. Hal tersebut terbukti sebagaimana yang telah dijelaskan dalam Al-Qur'an Surat Ash-Shaffaat ayat 147, yang secara tidak langsung telah melahirkan konsep pendugaan.

وَأَرۡسَلۡنَٰهُ إِلَىٰ مِاْئَةِ أَلۡفٍ أَوۡ يَزِيدُونَ ١٤٧

Artinya: Dan Kami utus dia kepada seribu orang atau lebih (Qs. Ash-Shaffaat/37:147)

Pengertian pendugaan dalam surat Ash-Shaffaat ayat 147 merupakan pendugaan (*estimasi*) banyak, maksudnya menghitung jumlah umat Nabi Yunus tidak secara eksak, yaitu melalui penaksiran. Dari sini diketahui bahwa pendugan dalam ayat tersebut merupakan pendugaan dalam konsep yang sederhana dan dalam matematika digunakan untuk perhitungan-perhitungan dasar matematika.

Dengan seiring berkembangnya zaman, berkembang pula ilmu pengetahuan. Konsep pendugaan dalam surat Ash-Shaffaat ayat 147 merupakan konsep dasar matematika yang kemudian dikembangkan salah satunya dalam bidang statistik, dimana pengertian pendugaan dalam statistik adalah proses yang menggunakan sampel statistik untuk menduga atau menaksir hubungan parameter populasi yang tidak diketahui.

Perbedaan pendugaan dalam surat Ash-Shaffaat dengan pendugaan parameter dalam penelitian ini terletak pada objek yang diduga dan syarat atau sifat-sifat yang harus dipenuhi. Dalam surat Ash-Shaffaat ayat 147 menduga terhadap banyaknya jumlah dan syarat penduga berupa interval yaitu $100.000 \le X \le 200.000$, sedangkan dalam penelitian ini menduga model regresi yang penduganya berupa rumus, yang dapat diterapkan dalam penelitian-penelitian lapangan. Penduga tersebut dengan syarat harus memenuhi sifat-sifat yaitu unbias, konsisten dan efisien.

Dari sini perlu diketahui, bahwa ilmu pengetahuan umum seperti matematika khususnya konsep pendugaan parameter, yang diyakini oleh sebagian orang diciptakan oleh orang-orang barat nonmuslim, ternyata telah terkonsep dalam Al-Qur'an. Hal ini membuktikan bahwa Al-Qur'an tidak hanya berbicara tentang ilmu-ilmu agama saja, akan tetapi juga berbicara tentang ilmu pengetahuan umum. Dalam Al-Qur'an, konsep-konsep ilmu pengetahuan tidak disajikan secara langsung, akan tetapi berupa pengetahuan yang membutuhkan penafsiran secara mendalam. Oleh karena itu Allah Swt telah memberi akal dan pikiran Manusia, guna untuk berpikir dan mengkaji Al-Qur'an, menguak rahasia-rahasia yang terkandung dalam Al-Qur'an.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah diuraikan pada bab sebelumnya, maka beberapa kesimpulan dapat dinyatakan sebagai berikut:

1. Dengan menggunakan metode maksimum likelihood, penduga parameter $\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*}$ untuk model regresi nonlinier multiplikatif berdasarkan pendekatan matrik adalah:

$$\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{*} = \left(\mathbf{X}^{*\,\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*}\right)^{-1}\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^{*}$$

   Penduga parameter $\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*}$ dari model regresi nonlinier multiplikatif dengan asumsi mempunyai syarat pembatas $\mathbf{A}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*} = \underset{\sim}{\mathbf{0}}$, diperoleh dengan menggunakan metode pengganda lagrange,yaitu:

$$\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_{\mathbf{c}}^{*} = \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{*} - \left(\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left[\mathbf{A}\left(\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right]^{-1}\mathbf{A}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{*}$$

2. Penduga parameter $\hat{\sigma}^2$ dari model regresi nonlinier multiplikatif diperoleh dengan mendiferensialkan fungsi likelihood, adalah sebagai berikut:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{*}}{n}$$

   Untuk penduga parameter σ_c^2 pada model regresi nonlinier multiplikatif yang telah direduksi dengan syarat pembatas $\mathbf{A}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*} = \underset{\sim}{\mathbf{0}}$ diperoleh:

$$\hat{\sigma}_c^2 = \frac{1}{n}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{\mathbf{c}}^{*\mathrm{T}}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{\mathbf{c}}^{*}$$

3. Jumlah kuadrat regresi pada pengujian hipotesis linier umum $\mathbf{A}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{*} = \underset{\sim}{\mathbf{0}}$, diperoleh:

$$\text{JKR}^{*} = \left(\mathbf{A}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{*}\right)^{\text{T}} \left[\mathbf{A}\left(\mathbf{X}^{*\text{T}}\mathbf{X}^{*}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\text{T}}\right]^{-1} \mathbf{A}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{*}$$

4.2 Saran

Dalam Penelitian ini, peneliti menggunakan model regresi nonlinier multiplikatif yang merupakan model *linier instrinsik*. Bagi pembaca yang ingin melakukan penelitian serupa, peneliti menyarankan menggunakan model *non linier instrinsik*

DAFTAR PUSTAKA

Abdusysyakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. UIN-Malang press: Malang.

Al-Mahally, Imam Jalalud-din dan As-Suyuthi, Imam Jalalud-din. 1990. *Terjemah Tafsir Jalalain Berikut Asbaabun Nuzul*. Sinar Baru: Bandung.

Al-Maraghiy, Ahmad Musthafa. 1989. *Tafsir Al-Maraghiy*. Toha Putra: Semarang.

Amrullah, Abdulmalik Abdulkarim. 1981. *Tafsir Al-Azhar*. Yayasan Latimojong: Surabaya.

Ananta, Aris. 1987. *Landasan Ekonometrika*. Gramedia: Jakarta.

Depag RI. 1989. *Al-Qur'an dan Terjemahannya*. Surabaya: CV. Jaya Sakti.

Draper, Norman and Smith, Harry. 1992. *Analisi Regresi Terapan*. PT. Gramedia Pustaka Utama: Jakarta.

Gaspersz, Vincent. 1991. *Ekonometrika Terapan*. Tarsito: Bandung.

Hasan, Iqbal. 2002. *Pokok-Pokok Materi Statistik 2 (Statistik Deskriptif)*. Bumi Aksara: Jakarta.

Mardalis.1990. *Metode Penelitian Suatu Pendekatan Proposal*. Bumi Aksara: Jakarta.

Mood, M Alexander dkk.1986. *Introduction to the Theory of Statistics*. Mcgraw-Hill Book Company.

Pasya, Ahmad Fuad. 2004. *Dimensi Sains Al-Qur'an*. Tiga Serangkai: Solo.

Sembiring, R.K. 1995. *Analisis Regresi*. ITB: Bandung.

Shihab, M. Quraish. 2003. *Tafsir Al-Mishbah Pesan, Kesan dan Keserasian Al-Qur'an*. Lentera Hati: Bandung. Vol:12.

Soelistyo. 2001. *Dasar-Dasar Ekonometrika*. BPFE: Yogyakarta.

Spiegel, Murray R.1984. *Kalkulus Lanjutan*. Erlangga: Jakarta.

Steel, Robert G.D. and Torri, James H. 1989. *Prinsip dan Prosedur Statistika Suatu Pendekatan Biometrik.* Gramedia: Jakarta.

Suparman. 1989. *Statistik Matematik*. CV. Rajawali: Jakarta.

Yitnosumarto, Suntoyo. 1990. *Dasar-Dasar Statistika*. C.V Rajawali: Jakarta.

DEPARTEMEN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jalan gajayana 50 Malang 65144 Telepon/faksimile (0341)558933

BUKTI KONSULTASI

Nama : Eviana Chandra Dewi
NIM : 03510020
Fakultas : Sains Dan Teknologi
Jurusan : Matematika
Judul Skripsi : *Pendugaan Parameter Model Regresi Nonlinier Multiplikatif dengan Menggunakan Metode Maksimum Likelihood*
Pembimbing I : Sri Harini, M.Si.
Pembimbing II : Ach. Nasihuddin, M.A.

No.	Tanggal	Yang Dikonsultasikan	Tanda Tangan
1.	10 November 2007	Pengajuan Judul	1.
2.	24 November 2007	Bab I , Bab II	2.
3.	10 Desember 2007	Pengajuan ayat	3.
4.	18 Desember 2007	Revisi Bab I , Bab II	4.
5.	25 Januari 2008	Bab III, IV	5.
6.	31 Januari 2008	Revisi Bab III, IV	6.
7.	2 Februari 2008	Kajian Islam	7.
8.	3 Maret 2008	Abstrak	8.
9.	14 Maret 2008	ACC Keseluruhan	9.

Mengetahui,
Ketua Jurusan

<u>Sri Harini, M.Si</u>
NIP. 150 318 321