

**PELABELAN GRACEFUL PADA GRAF KIPAS F_n DAN GRAF
KIPAS GANDA dF_n , n BILANGAN ASLI DAN $n \geq 2$**

SKRIPSI

Oleh :
LUTVI MAHFUDIYAH
NIM : 04510023



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2008**

HALAMAN PENGANTAR

**PELABELAN GRACEFUL PADA GRAF KIPAS F_n DAN GRAF
KIPAS GANDA dF_m , n BILANGAN ASLI DAN $n \geq 2$**

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam Memperoleh
Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
LUTVI MAHFUDIYAH
NIM. 04510023



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2008**

HALAMAN PERSETUJUAN

PELABELAN GRACEFUL PADA GRAF KIPAS F_n DAN GRAF KIPAS GANDA dF_n , n BILANGAN ASLI DAN $n \geq 2$

SKRIPSI

Oleh:
LUTVI MAHFUDIYAH
NIM. 04510023

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji

Tanggal: 29 Juli 2008

Pembimbing I

Abdussakir, M.Pd
NIP. 150 327 247

Pembimbing II

Abdul Aziz, M.Si
NIP. 150 377 256

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M. Si
NIP. 150 318 321

**PELABELAN GRACEFUL PADA GRAF KIPAS F_n DAN GRAF
KIPAS GANDA dF_n , n BILANGAN ASLI DAN $n \geq 2$**

SKRIPSI

Oleh:
LUTVI MAHFUDIYAH
NIM. 04510023

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal 31 Juli 2008

Susunan Dewan Penguji

Tanda Tangan

- | | | | |
|------------------|---|---|---|
| 1. Penguji Utama | : <u>Wahyu H. Irawan, M. Pd</u>
NIP. 150 300 415 | (|) |
| 2. Ketua | : <u>Usman Pagalay, M. Si</u>
NIP. 150 327 240 | (|) |
| 3. Sekretaris | : <u>Abdussakir, M. Pd</u>
NIP. 150 327 247 | (|) |
| 4. Anggota | : <u>Abdul Aziz, M. Si</u>
NIP. 150 377 256 | (|) |

**Mengetahui dan Mengesahkan
Ketua Jurusan Matematika**

Sri Harini, M. Si
NIP. 150 318 321

PERSEMBAHAN

Alhamdulillah Robbil' alamin

Segala Puji Bagi Allah SWT Seru Sekalian Alam

Terima Kasih Atas Rahmat, Taufik dan Hidayah-Nya yang Telah Diberikan

Kepadaku

Kupersembahkan Skripsi ini

Sebagai Cinta Kasih dan Baktiku

Kepada Orang-orang yang Aku Cintai dan Sayangi Selamanya

Bapak dan Ibu Tercinta

Kakak-kakakku, Adikku, dan Keponakan-keponakanku

MOTTO

وَابْتَغِ فِيمَا آتَاكَ اللَّهُ الدَّارَ الْآخِرَةَ وَلَا تَنْسَ نَصِيبَكَ مِنَ الدُّنْيَا ...

Carilah (kebahagiaan) negeri akhirat dengan segala potensi yang telah dianugerahkan Allah kepadamu dan janganlah melupakan bagianmu dari

kenikmatan yang halal di dunia...

(QS. Al-Qashash 28:77)

PUSAT PERPUSTAKAAN

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : LUTVI MAHFUDIYAH

NIM : 04510023

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 29 Juli 2008

Yang membuat pernyataan

Lutvi Mahfudiyah

NIM. 04510023

KATA PENGANTAR



Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Puji syukur kehadirat Allah SWT, karena atas taufik dan hidayah-Nya penulisan skripsi yang berjudul " *Pelabelan Graceful pada Graf Kipas F_n dan Graf Kipas Ganda dF_n dengan n Bilangan asli dan $n \geq 2$* " dapat diselesaikan.

Sholawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, yang telah mengantarkan umat manusia dari zaman kebodohan menuju zaman yang terang benderang, yaitu agama Islam.

Dalam penyusunan skripsi ini, penulis tidak dapat menyelesaikan sendiri tanpa bantuan dari berbagai pihak, untuk itu penulis mengucapkan rasa hormat dan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
2. Prof. Dr. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
3. Sri Harini, M.Si, selaku Ketua Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
4. Abdussakir, M.Pd, selaku dosen pembimbing yang senantiasa sabar memberi arahan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini.

5. Seluruh dosen yang telah memberikan ilmunya selama ini dan yang selalu membimbing dan memberi motivasi agar penulis dapat menyelesaikan studi dengan baik.
6. Bapak dan Ibu tercinta dan seluruh keluarga, yang selalu memberikan semangat dan motivasi baik moril maupun spirituil dalam mendidik dan membimbing penulis hingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
7. Beni Ashar, S.Si yang selalu membantu dan memberi nasihat-nasihat agar penulis cepat menyelesaikan skripsi ini.
8. Teman-teman mahasiswa Matematika angkatan 2004 yang telah memotivasi penulis untuk segera menyelesaikan skripsi.
9. Syeh Arrozaqi terima kasih atas keikhlasanya yang telah banyak membantu dan memotivasi penulis dalam penyusunan skripsi ini.
10. Teman – teman kos Sumbersari 51, terima kasih atas motivasi dan bantuan yang telah kalian berikan kepadaku selama menyelesaikan skripsi ini
11. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, yang telah memberikan bantuan baik moril, materiil maupun spiritual bagi penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi.

Penulis berdo'a semoga bantuan yang telah diberikan dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapatkan balasan yang setimpal. Penulis berharap, semoga skripsi ini bermanfaat. Amin.

Malang, 29 Juli 2008

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI	iii
DAFTAR GAMBAR	v
ABSTRAK	vii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang Masalah.....	1
1.2. Rumusan Masalah.....	4
1.3. Tujuan Masalah.....	5
1.4. Manfaat Penelitian.....	5
1.5. Metode Penelitian.....	6
1.6. Sistematika Penulisan.....	6
BAB II KAJIAN PUSTAKA	8
2.1. Definisi Graf.....	8
2.2. Operasi pada Graf.....	11
2.3. Graf Terhubung.....	13
2.4. Graf Kipas.....	17
2.5. Graf Kipas Ganda.....	17
2.6. Pelabelan Graceful.....	18
2.7. Teori Graf dalam al-Qur'an.....	19

BAB III PEMBAHASAN	28
3.1. Pelabelan Graceful pada Graf Kipas F_n	28
3.1.1. Graf Kipas F_n dimana $n = 2$	28
3.1.2. Graf Kipas F_n dimana $n = 3$	30
3.1.3. Graf Kipas F_n dimana $n = 4$	32
3.1.4. Graf Kipas F_n dimana $n = 5$	33
3.2. Pelabelan Graceful pada Graf Kipas dF_n	41
3.2.1. Graf Kipas Ganda dF_n dimana $n = 2$	41
3.2.2. Graf Kipas Ganda dF_n dimana $n = 3$	44
3.2.3. Graf Kipas Ganda dF_n dimana $n = 4$	46
3.2.4. Graf Kipas Ganda dF_n dimana $n = 5$	48
3.2.5. Graf Kipas Ganda dF_n dimana $n = 6$	50
BAB IV KESIMPULAN	65
4.1. Kesimpulan	65
4.2. Saran	67
DAFTAR PUSTAKA	
LAMPIRAN	

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1 Hubungan timbal balik antara Allah dengan hambanya.....	3
Gambar 2.1 Contoh Graf G	8
Gambar 2.2 Derajat Suatu Titik pada Graf.	9
Gambar 2.3 G_0 Beraturan-0 dan G_1 Beraturan-1.....	10
Gambar 2.4 Graf Komplit.	10
Gambar 2.5 Graf Bipartisi.....	10
Gambar 2.6 Graf Bipartisi Komplit $K_{3,3}$	11
Gambar 2.7 Gabungan Graf.	12
Gambar 2.8 Gambar Penjumlahan Dua Graf.	12
Gambar 2.9 Graf Hasil Kali Kartesius.....	13
Gambar 2.10 Gambar untuk Mengilustrasikan Jalan (walk).....	13
Gambar 2.11 Gambar Jalan Tertutup, Jalan Terbuka, Trail.....	14
Gambar 2.12 Contoh Lintasan.....	15
Gambar 2.13 Graf Lintasan $P_1, P_2, P_3,$ dan P_4	15
Gambar 2.14 Contoh Sirkuit pada Graf.	16
Gambar 2.15 Contoh Sikel pada Graf.....	16
Gambar 2.16 Contoh Graf Kipas F_n	17
Gambar 2.17 Contoh Graf Kipas Ganda dF_n	18
Gambar 2.18 Contoh Pelabelan Graceful pada Graf Star.....	19
Gambar 2.19 Graf Representasi Ibadah Sa'I.....	20
Gambar 2.20 Representasi Graf Terhadap Waktu-Waktu Shalat.....	23
Gambar 3.1 Penotasian Titik Graf Kipas F_2	29
Gambar 3.2 Pelabelan Graceful pada Graf Kipas F_2	29
Gambar 3.3 Penotasian Titik Graf Kipas F_3	30
Gambar 3.4 Pelabelan Graceful pada Graf Kipas F_3	31
Gambar 3.5 Penotasian Titik Graf Kipas F_4	32
Gambar 3.6 Pelabelan Graceful pada Graf Kipas F_4	32
Gambar 3.7 Penotasian Titik Graf Kipas F_5	33

Gambar 3.8 Pelabelan Graceful pada Graf Kipas F_5	34
Gambar 3.9 Graf Kipas F_n	36
Gambar 3.10 Penotasian Titik Graf Kipas Ganda dF_2	42
Gambar 3.11 Pelabelan Graceful pada Graf Kipas Ganda dF_2	42
Gambar 3.12 Penotasian Titik Graf Kipas Ganda dF_3	44
Gambar 3.13 Pelabelan Graceful pada Graf Kipas Ganda dF_3	44
Gambar 3.14 Penotasian Titik Graf Kipas Ganda dF_4	46
Gambar 3.15 Pelabelan Graceful pada Graf Kipas Ganda dF_4	46
Gambar 3.16 Penotasian Titik Graf Kipas Ganda dF_5	48
Gambar 3.17 Pelabelan Graceful pada Graf Kipas Ganda dF_5	48
Gambar 3.18 Penotasian Titik Graf Kipas Ganda dF_6	50
Gambar 3.19 Pelabelan Graceful pada Graf Kipas Ganda dF_6	51
Gambar 4.1 Graf Kipas F_n	65
Gambar 4.2 Graf Kipas Ganda dF_n	66



ABSTRAK

Mahfudiyah, Lutvi. 2008. *Pelabelan Graceful pada Graf Kipas F_n dan Graf Kipas Ganda dF_n , n Bilangan Asli dan $n \geq 2$* . Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang. Pembimbing: Abdussakir, M. Pd
Abdul Aziz, M.Si

Kata Kunci: Pelabelan Graceful, Graf Kipas F_n , dan Graf Kipas Ganda dF_n

Pelabelan didefinisikan sebagai pemberian label pada suatu graf G dengan bilangan bulat tak negatif pada titik atau sisi atau keduanya yang memenuhi aturan-aturan tertentu. Pelabelan graceful pada graf G adalah fungsi injektif f dari $V(G)$ ke $\{0, 1, 2, 3, \dots, |E(G)|\}$ sedemikian hingga jika sisi uv dilabeli $|f(u) - f(v)|$ maka hasilnya berbeda untuk semua sisi di G . Pada penelitian ini akan dibahas pelabelan graceful pada graf kipas F_n dan graf kipas ganda dF_n dengan n bilangan asli dan $n \geq 2$.

Pelabelan graceful pada graf kipas F_n , didefinisikan sebagai berikut:

Untuk titik v_0 , maka $f(v_0) = 0$

Untuk pelabelan titik pada graf kipas F_n untuk n adalah bilangan asli, maka:

$$f(v_i) = \begin{cases} i & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ 2n - i + 1 & \text{untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

Pelabelan graceful pada graf kipas ganda dF_n didefinisikan sebagai berikut:

Untuk titik v_1 , maka $f(v_1) = 0$

Untuk titik v_2 , maka $f(v_2) = 2$

Untuk pelabelan titik pada graf kipas ganda dF_n untuk n adalah bilangan asli, maka:

$$f(w_i) = \begin{cases} 3n - i & \text{untuk } i = 1, 2 \\ i + \frac{i-1}{2} & \text{untuk } i \text{ ganjil dan } i \geq 3 \\ 3n - \frac{3i}{2} + 1 & \text{untuk } i \text{ genap dan } i \geq 4 \end{cases}$$

Pembahasan mengenai pelabelan graceful ini masih terbuka bagi peneliti untuk mengadakan penelitian yang sejenis dengan jenis graf yang berbeda, misal graf pohon, graf sikel, dan lain sebagainya.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Gafur (2008) mengatakan bahwa ilmu pengetahuan dan teknologi tidak lepas dari peran serta ilmu matematika. Aplikasi ilmu matematika sangat banyak sekali dalam ilmu pengetahuan lain, salah satunya adalah teori graf. *Teori graf* adalah salah satu cabang matematika diskret yang penting dan banyak manfaatnya. Antara lain dalam komunikasi, transportasi, sistem antrian, dan penjadwalan.

Matematika sebagai disiplin ilmu dikenal sebagai *Queen of Science*, karena dalam konsep matematika banyak digunakan simbol yang mengosongkan arti yang juga bisa dipakai dan diterapkan di berbagai bidang keilmuan yang lain, sehingga matematika dapat diterapkan kapanpun, dimanapun dan terbukti telah memberikan pengaruh yang cukup besar serta mempunyai peranan penting terhadap kemajuan disiplin ilmu lainnya, di antaranya ilmu statistika, perbankan, dan telekomunikasi.

Sebagai sarana ilmiah, matematika merupakan salah satu disiplin ilmu yang tidak hanya terdapat satu keilmuan saja di dalamnya. Akan tetapi masih terdapat ilmu-ilmu lain yang menjadi sarana keilmuan bagi disiplin ilmu lain. Untuk mengetahui semua itu kita sebagai pelajar berkewajiban untuk mempelajari berbagai ilmu sedalam-dalamnya. Dalam islam, seorang muslim ataupun

muslimah diwajibkan untuk mencari ilmu walaupun tempat untuk mencari ilmu tersebut jauh.

Suatu graf terdiri dari himpunan tak kosong yang unsur-unsurnya disebut titik dan suatu himpunan tak berurutan dari titik tersebut yang disebut sisi. Gallian (2007: 1) menyatakan bahwa *pelabelan graf* dalam teori graf adalah pemberian label bilangan bulat tak negatif pada titik atau sisi atau keduanya dengan aturan-aturan tertentu. Pelabelan graf sudah banyak dikaji mulai tahun 1960-an, seperti valuasi- β yang diperkenalkan oleh Rosa pada tahun 1967. Sejak saat itu, sekitar 250 tulisan mengenai pelabelan banyak bermunculan. Menurut Gafur (2008) bahwa pelabelan graf menjadi topik yang banyak mendapat perhatian, karena model-model yang ada pada pelabelan graf berguna untuk aplikasi yang luas, seperti dalam masalah teori koding, kristolograsi sinar-x, radar, sistem alamat jaringan komunikasi, dan desain sirkuit.

Gallian (2007: 4) mengatakan bahwa *Pelabelan graceful* didefinisikan sebagai pemberian label pada titik suatu graf G yang memenuhi fungsi injektif dari himpunan titik ke himpunan bilangan bulat tak negatif $\{0, 1, 2, \dots, q\}$ sedemikian hingga jika sisinya mendapat label harga mutlak dari selisih pelabelan kedua titik yang terhubung langsung (*adjacent*) maka hasilnya berbeda. Dengan demikian, pelabelan graceful merupakan salah satu bentuk pelabelan pada titiknya saja sedangkan label sisinya menjadi akibat dari adanya label titik.

Teori graf yang merupakan salah satu cabang dari matematika tersebut menurut definisinya adalah himpunan yang tidak kosong yang memuat elemen-elemen yang disebut titik, dan suatu daftar pasangan tidak terurut elemen itu yang

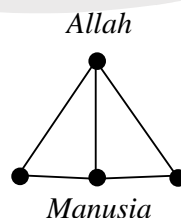
disebut sisi. Dalam teori Islam elemen-elemen yang dimaksud meliputi Pencipta (Allah) dan hamba-hambanya, sedangkan sisi atau garis yang menghubungkan elemen-elemen tersebut adalah bagaimana hubungan antara Allah dengan hambanya dan juga hubungan sesama hamba yang terjalin, *Hablun min Allah wa Hablun min An-Nas*. Sehingga dengan demikian, hal ini menunjukkan adanya suatu hubungan atau keterkaitan antara titik yang satu dengan titik yang lain.

Hal ini dikuatkan oleh firman Allah dalam al-Qur'an surat al-Hujurat ayat 10 yaitu:

إِنَّمَا الْمُؤْمِنُونَ إِخْوَةٌ فَأَصْلِحُوا بَيْنَ أَخَوَيْكُمْ وَاتَّقُوا اللَّهَ لَعَلَّكُمْ تُرْحَمُونَ

Artinya: "Orang-orang beriman itu sesungguhnya bersaudara. Sebab itu damaikanlah (perbaikilah hubungan) antara kedua saudaramu itu dan takutlah terhadap Allah, supaya kamu mendapat rahmat" (Q. S. Al-Hujurat: 10).

Sehingga dengan demikian, hal ini menunjukkan adanya suatu hubungan atau keterkaitan antara titik yang satu dengan titik yang lain. Jika dikaitkan dengan kehidupan nyata, maka banyaknya titik yang terhubung dalam suatu graf dapat diasumsikan sebagai banyaknya kejadian tertentu, yang selanjutnya kejadian-kejadian tersebut memiliki keterkaitan dengan titik lainnya yang merupakan kejadian sesudahnya.



Gambar 1.1 Hubungan timbal balik antara Allah dengan hambanya

Jika dikaitkan dengan kehidupan nyata, maka banyaknya titik yang terhubung dalam suatu graf dapat diasumsikan sebagai banyaknya kejadian tertentu, yang selanjutnya kejadian-kejadian tersebut memiliki keterkaitan dengan titik lainnya yang merupakan kejadian sesudahnya.

Pada penulisan skripsi ini, penulis hanya memfokuskan tentang pelabelan graceful pada graf kipas F_n dan graf kipas ganda dF_n , untuk n bilangan asli $n \geq 2$. Graf kipas F_n dibentuk dari penjumlahan graf komplet K_1 dan graf lintasan P_n . Sedangkan graf kipas ganda dF_n dibentuk dari penjumlahan graf komplet $2K_1$ dan graf lintasan P_n (Gallian, 2007: 16)

Beberapa kajian terdahulu tentang pelabelan graf pada titik, sisi, atau keduanya sudah banyak sekali telah dibahas pada skripsi lain. Untuk selanjutnya penulis tertarik untuk melanjutkan meneliti tentang *Pelabelan Graceful* karena pelabelan graceful untuk kelas-kelas graf masih ada satu yaitu pada graf superstar $S_{5,n}$. Maka dari itu penulis tertarik untuk merumuskan judul pada skripsi ini dengan **“Pelabelan Graceful pada Graf Kipas F_n dan Graf Kipas Ganda dF_n , n Bilangan Asli dan $n \geq 2$ ”**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah yang dapat dikemukakan adalah:

1. Bagaimana pelabelan pada graf F_n dengan n bilangan asli dan $n \geq 2$?
2. Bagaimana pelabelan pada graf dF_n dengan n bilangan asli dan $n \geq 2$?

1.3 Tujuan Penulisan

Berdasarkan rumusan masalah, maka tujuan dari penulisan ini adalah:

1. Menjelaskan pelabelan graceful pada graf F_n dengan n bilangan asli dan $n \geq 2$.
2. Menjelaskan pelabelan graceful pada graf dF_n dengan n bilangan asli dan $n \geq 2$.

1.4 Manfaat Penulisan

Dalam skripsi ini diharapkan dapat bermanfaat bagi berbagai pihak, di antaranya:

a. Bagi Penulis

Dalam penulisan skripsi ini, penulis diharapkan dapat mengetahui rumus fungsi pelabelan graceful pada graf F_n dan graf dF_n , serta menjelaskan bahwa graf F_n dan graf dF_n adalah graceful.

b. Bagi Pembaca

Diharapkan dapat menambah wawasan pengetahuan tentang pelabelan graceful pada graf F_n dan graf dF_n .

c. Bagi Lembaga

Bagi lembaga, penulisan skripsi ini dapat bermanfaat sebagai tambahan perbendaharaan karya tulis ilmiah.

1.5 Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian pustaka (*Library research*). Penelitian dilakukan dengan pertama kali melakukan kajian terhadap buku-buku teori graf dan jurnal-jurnal atau makalah-makalah yang memuat topik tentang pelabelan graceful pada graf. Langkah selanjutnya adalah mencoba melakukan pelabelan pada beberapa contoh graf kipas F_n dan kipas ganda dF_n . Melalui beberapa contoh tersebut, akhirnya dicari pola tertentu. Pola yang didapatkan masih dapat dianggap sebagai dugaan (konjektur). Konjektur yang dihasilkan kemudian dibuktikan dengan terlebih dahulu merumuskan konjekturnya sebagai suatu teorema yang dilengkapi dengan bukti-bukti.

1.6 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah penulis sekaligus pembaca dalam mengkaji skripsi ini, maka sistematika penulisannya dibagi menjadi empat bagian yaitu:

BAB I: PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penulisan, manfaat penulisan, dan sistematika penulisan.

BAB II: KAJIAN PUSTAKA

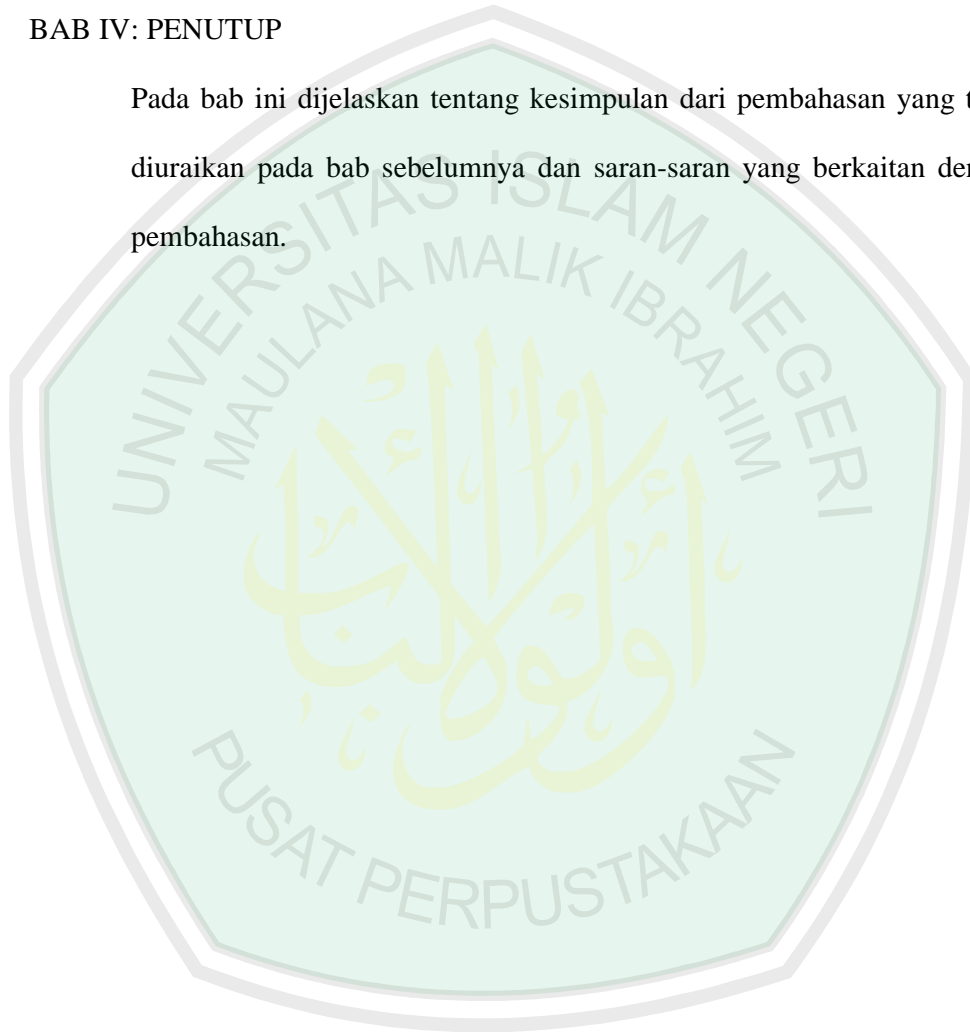
Pada bab ini dijelaskan tentang definisi graf, operasi pada graf, graf terhubung, graf kipas, graf kipas ganda, dan pelabelan graceful, Teori Graf dalam Al-Qur'an.

BAB III: PEMBAHASAN

Pada bab ini, dijelaskan tentang pembahasan mengenai langkah-langkah pelabelan graceful pada graf F_n dan graf dF_n .

BAB IV: PENUTUP

Pada bab ini dijelaskan tentang kesimpulan dari pembahasan yang telah diuraikan pada bab sebelumnya dan saran-saran yang berkaitan dengan pembahasan.

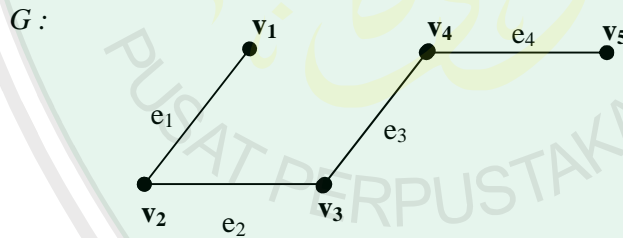


BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1. Definisi Graf

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan $(V(G), E(G))$ dimana $V(G)$ adalah himpunan tak kosong dari unsur-unsur yang disebut *titik* (*vertex*) dan $E(G)$ adalah himpunan dari pasangan tak terurut (u, v) dari titik-titik u dan v yang berbeda di $V(G)$ yang disebut *sisi* (*edge*). Selanjutnya sisi $e = (u, v)$ pada graf G ditulis $e = uv$. Banyaknya unsur di V disebut *order* dari G yang dilambangkan dengan $p(G)$, sedangkan banyaknya unsur di E disebut *ukuran* dari G yang dilambangkan dengan $q(G)$ (Chartrand and Lesniak, 1986: 4). Sebagai contoh, misal: $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5\}$. Maka G dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.1 Graph G dengan 5 Titik dan 4 Sisi

Graf G pada Gambar 2.1 mempunyai 5 titik sehingga $p(G) = 5$ dan mempunyai empat sisi yaitu:

$$e_1 = v_1v_2$$

$$e_2 = v_2v_3$$

$$e_3 = v_3v_4$$

$$e_4 = v_4v_5$$

sehingga ukuran G adalah $q(G) = 4$

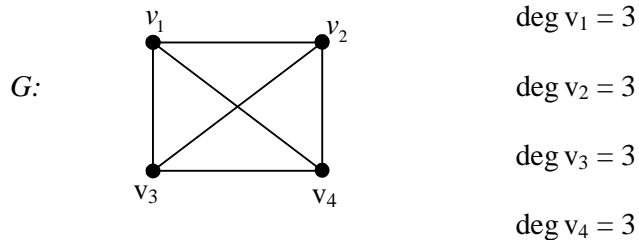
Sebuah sisi $e = uv$ dikatakan menghubungkan titik u dan v . Jika $e = uv$ adalah sisi di graf G , maka u dan v disebut *terhubung langsung (adjacent)*, v dan e serta u dan e disebut *terkait langsung (incident)*, titik u dan v disebut ujung dari e (Chartrand, 1986: 4)

Pada graf G Gambar 2.1, titik yang terhubung langsung adalah titik v_1 dan v_2 , titik v_2 dan v_3 , titik v_3 dan v_4 , titik v_4 dan v_5 . Titik v_1 dan v_4 tidak terhubung langsung karena tidak terdapat sisi diantara kedua titik tersebut. Dan titik yang terkait langsung adalah sebagai berikut:

1. Pada sisi e_1 yang terkait langsung v_1 dan v_2
2. Pada sisi e_2 yang terkait langsung v_2 dan v_3
3. Pada sisi e_3 yang terkait langsung v_3 dan v_4
4. Pada sisi e_4 yang terkait langsung v_4 dan v_5

Derajat titik v pada graf G adalah banyaknya sisi dari graf G yang terkait langsung dengan v . Derajat titik v pada graf G dinotasikan dengan $deg_G v$ atau dapat juga dinotasikan dengan $deg v$ (Chartrand and Lesniak, 1986: 7).

Perhatikan contoh berikut,



Gambar 2.2 Derajat Suatu Titik pada Graf G

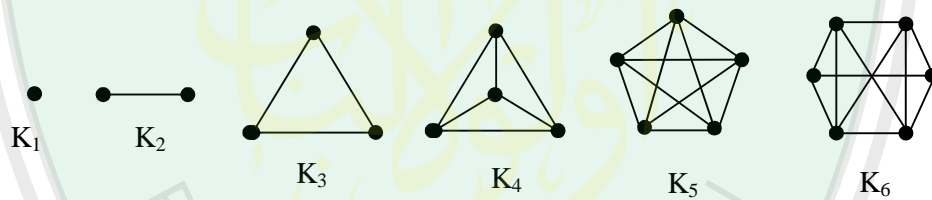
Suatu graf G dikatakan beraturan- r jika masing-masing titik v di G berderajat- r , atau $\deg v = r$ (Chatrand and Lesniak, 1986: 9).

Perhatikan contoh berikut,



Gambar 2.3 G_0 Graf Beraturan-0 dan G_1 Graf Beraturan-1

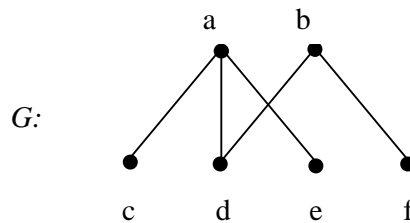
Graf komplit (complete) adalah graf yang setiap dua titik yang berbeda saling terhubung langsung. Graf komplit dengan n titik dinotasikan sebagai K_n (Wilson and Watkins, 1989: 36). Sebagai contoh, Gambar 2.4 adalah beberapa graf komplit.



Gambar 2.4 Graf Komplit

Graf bipartisi adalah graf yang himpunan titiknya dapat dipartisi menjadi himpunan A dan B sedemikian hingga setiap sisi graf mempunyai salah satu ujung di A dan salah satunya di B (Wilson and Watkins, 1989: 37).

Perhatikan gambar berikut,



Gambar 2.5 Graf Bipartisi

Graf G pada Gambar 2.5 adalah graf bipartisi karena himpunan titik di G dapat dipartisi menjadi dua himpunan, yaitu:

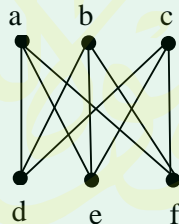
$$A = \{a, b\}$$

dan

$$B = \{c, d, e, f\}$$

sehingga masing-masing sisi di G mempunyai ujung di A dan di B . Himpunan titik dalam satu partisi tidak boleh terhubung langsung.

Graf G disebut *graf bipartisi komplit* jika G adalah graf bipartisi dan komplit. Graf bipartisi komplit yang masing-masing partisi memuat m dan n dilambangkan dengan $K_{(m,n)}$. Graf bipartisi komplit $K_{(1, n)}$ disebut dengan graf bintang (Chatrand and Lesniak, 1986: 10).



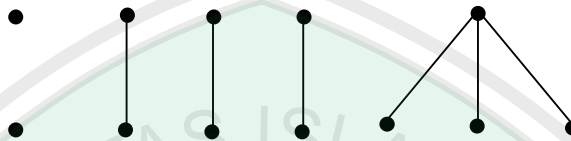
Gambar 2.6 Graf Bipartisi Komplit $K_{3,3}$

Graf G adalah bipartisi karena himpunan titik dapat dipartisi menjadi dua himpunan, dan graf komplit karena masing-masing titik dalam tiap partisi berbeda saling terhubung langsung.

2.2. Operasi pada Graf

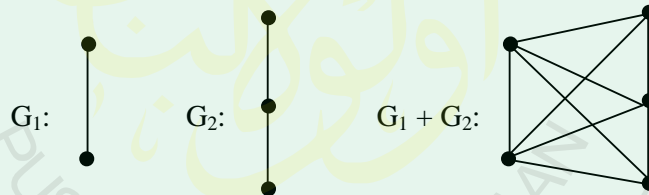
Gabungan dua graf G_1 dan G_2 yang dinotasikan dengan $G = G_1 \cup G_2$ mempunyai himpunan titik $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan

sisi $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$. Jika graf G memuat sebanyak $n \geq 2$ graf H , maka dinotasikan dengan $G = {}_nH$. Graf $2K_1 \cup 3K_2 \cup K_{(1,3)}$ akan ditunjukkan pada gambar sebagai berikut (Chartrand and Lesniak, 1986: 11).



Gambar 2.7 Gabungan Graf

Penjumlahan dua graf G_1 dan G_2 yang dinotasikan $G = G_1 + G_2$ mempunyai himpunan titik $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1) \text{ dan } v \in V(G_2)\}$. (Chartrand and Lesniak, 1986: 11).



Gambar 2.8 Gambar Penjumlahan Dua Graf

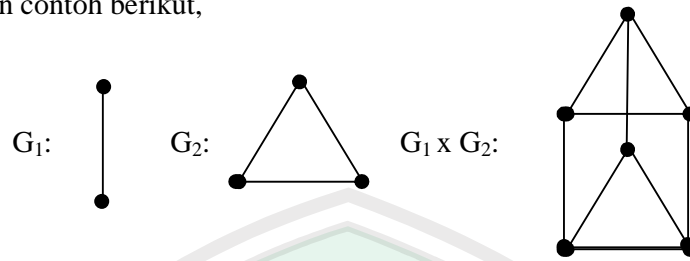
Hasil kali kartesius dari graf G_1 dan G_2 adalah graf yang dinotasikan $G = G_1 \times G_2$ dan mempunyai himpunan titik $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$, dan dua titik (u_1, u_2) dan (v_1, v_2) dari graf G terhubung langsung jika dan hanya jika

$$u_1 = v_1 \text{ dan } u_2v_2 \in E(G_2)$$

atau

$$u_2 = v_2 \text{ dan } u_1v_1 \in E(G_1) \quad (\text{Chartrand and Lesniak, 1986: 11}).$$

Perhatikan contoh berikut,



Gambar 2.9 Graf Hasil Kali Kartesius

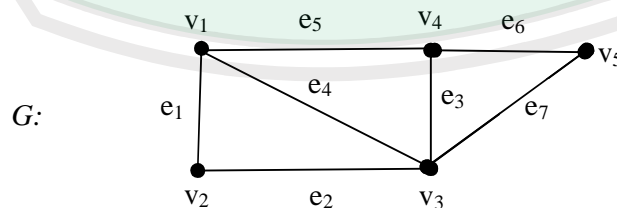
2.3. Graf Terhubung

Sebuah jalan pada graf G dinotasikan W adalah barisan hingga yang diawali dan diakhiri dengan titik dimana unsur-unsurnya saling bergantian

$$W : u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \dots, e_n, v_n = v$$

antara titik dan sisi, dengan $e_i = v_{i-1}v_i$ adalah sisi di G untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$. v_0 disebut titik awal dan v_n disebut titik akhir dan $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}$ disebut *titik internal*. Jalan yang tidak mempunyai sisi disebut *jalan trivial*. Adapun n menyatakan panjang dari W (Chatrand and Lesniak, 1986: 26).

Perhatikan graf G berikut,



Gambar 2.10 Gambar untuk Mengilustrasikan Jalan (walk)

Maka

$$W_1 = v_1, v_2, v_3, v_1, v_4, v_3, v_5, v_4, v_1$$

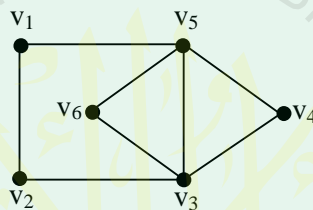
adalah jalan di G . W_1 mempunyai panjang 8

$$W_2 = v_1, v_4, v_2, v_3, v_4$$

bukan jalan di G karena sisi v_4v_2 tidak ada di G .

Jika $v_0 = v_n$, maka W disebut *jalan tertutup*. Sedangkan jika $v_0 \neq v_n$ maka W disebut *jalan terbuka*. Jika semua sisi di W berbeda, maka W disebut *trail* (Chatrand and Lesniak, 1986: 26).

Perhatikan gambar berikut,



Gambar 2.11 Gambar Jalan Tertutup, Jalan Terbuka, dan Trail

Maka

$$W_1 = v_4, v_5, v_1, v_2, v_3, v_6, v_5, v_3, v_4$$

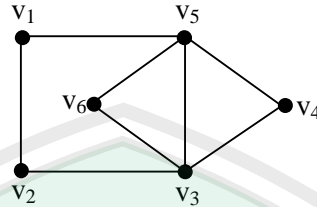
adalah jalan tertutup, dan merupakan trail karena semua sisinya berbeda atau tidak ada sisi yang dilalui lebih dari satu kali.

$$W_2 = v_5, v_3, v_2, v_1, v_5, v_3, v_4$$

adalah jalan terbuka, dan bukan trail karena sisi v_5v_3 dilalui lebih satu kali, atau dengan kata lain ada sisi yang sama pada jalan W_2 .

Jalan terbuka yang semua sisi dan titiknya berbeda disebut *lintasan*. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa setiap lintasan pasti trail, tetapi tidak semua trail merupakan lintasan (Wilson and Watkins, 1989: 35).

Perhatikan Gambar 2.12 berikut,



Gambar 2.12 Contoh Lintasan

Jalan

$$W_1 = v_1, v_2, v_3, v_5, v_4$$

$$W_2 = v_1, v_5, v_3, v_4$$

dan

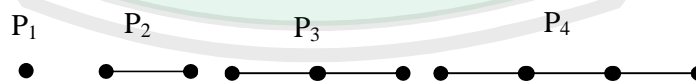
$$W_3 = v_1, v_2, v_3, v_6, v_5, v_4$$

adalah lintasan di G karena semua titiknya berbeda. Sedangkan

$$W_4 = v_1, v_5, v_4, v_3, v_5, v_3, v_2, v_1$$

adalah bukan termasuk lintasan karena terdapat titik yang sama v_3 dan v_5 .

Jika graf yang berbentuk lintasan dengan titik sebanyak n , maka disebut *graf lintasan* dan disimbolkan dengan P_n . Perhatikan gambar berikut,

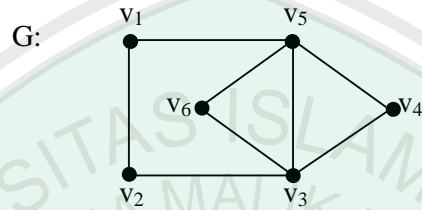


Gambar 2.13 Graf Lintasan $P_1, P_2, P_3,$ dan P_4

Trail tertutup dan taktrivial pada graf G disebut *sirkuit* di G . Sirkuit yang semua titik internalnya berbeda kecuali $v_1 = v_n$ disebut *sikel*. Sikel dengan panjang n disebut *sikel- n* (C_n). Sikel- n disebut genap atau ganjil bergantung pada n genap

atau ganjil. Panjang sikel pada sebuah graf paling kecil adalah 3 (Chatrand and Lesniak, 1986: 28).

Perhatikan gambar berikut,



Gambar 2.14 Contoh Sirkuit pada Graf

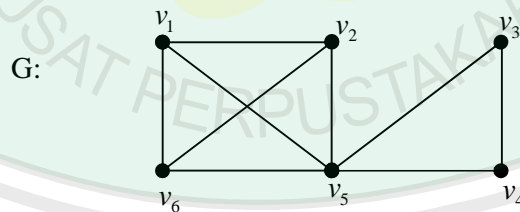
Contoh sirkuit pada Gambar 2.14 adalah:

$$W_1 = v_1, v_2, v_3, v_5, v_1$$

$$W_2 = v_3, v_5, v_3, v_6$$

$$W_3 = v_3, v_5, v_4$$

Perhatikan Gambar 2.15



Gambar 2.15 Contoh Sikel pada Graf G

Jalan $W_1 = v_1, v_2, v_6, v_1$

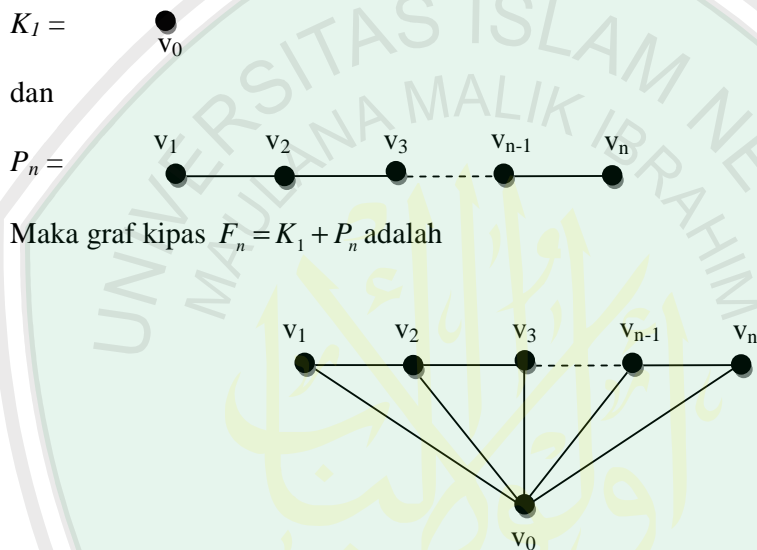
$$W_2 = v_2, v_6, v_5, v_1, v_2$$

adalah sikel di G dengan panjang $W_1 = 3$ dan $W_2 = 4$.

2.4. Graf Kipas

Graf kipas dibentuk dari penjumlahan graf komplit K_1 dan graf lintasan P_n yaitu $F_n = K_1 + P_n$, dengan demikian graf kipas mempunyai $(n+1)$ titik dan $(2n-1)$ sisi (Gallian, 2007: 16).

Untuk menggambarkan suatu graf kipas yaitu dengan memisalkan:



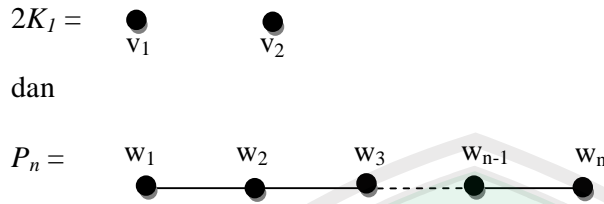
Gambar 2.16 Contoh Graf Kipas F_n

Titik v_0 untuk selanjutnya disebut titik pusat graf kipas F_n .

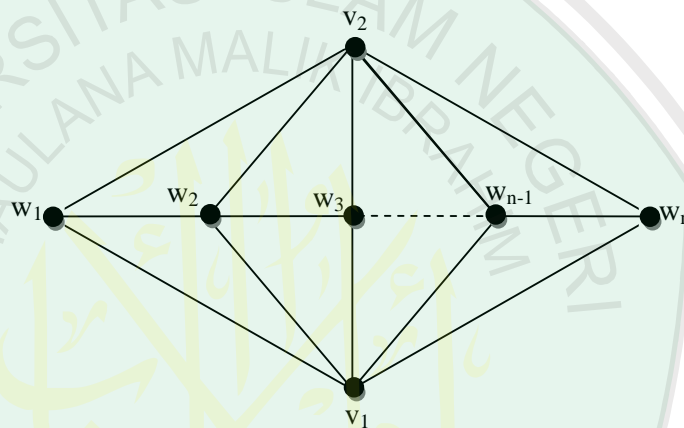
2.5. Graf Kipas Ganda

Graf kipas ganda dibentuk dari penjumlahan komplemen graf komplit $2K_1$ dan graf lintasan P_n yaitu $dF_n = 2K_1 + P_n$, dengan demikian graf kipas ganda mempunyai $(n+2)$ titik dan $(3n-1)$ sisi (Gallian, 2007: 16).

Untuk menggambarkan suatu graf kipas ganda yaitu dengan memisalkan:



Maka graf kipas ganda $dF_n = 2K_1 + P_n$ adalah



Gambar 2.17 Contoh Graf Kipas Ganda dF_n

Titik v_1 dan v_2 selanjutnya disebut titik pusat graf kipas ganda dF_n .

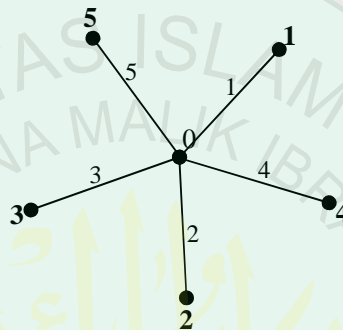
2.6. Pelabelan Graceful

Misal G graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Pelabelan Graceful adalah fungsi injektif dari $V(G)$ ke $\{0,1,2,\dots,|E(G)|\}$ sedemikian hingga jika sisi uv dilabeli $|f(u) - f(v)|$ hasilnya berbeda untuk semua sisi di G (Gallian, 2007: 4).

Pelabelan graceful didefinisikan sebagai pemberian label pada titik suatu graf G yang memenuhi fungsi injektif dari himpunan titik ke himpunan bilangan bulat tak negatif $\{0, 1, 2, \dots, q\}$ sedemikian sehingga jika sisinya mendapat label

harga mutlak dari selisih pelabelan kedua titik yang terhubung langsung (*adjacent*) maka hasilnya berbeda. Dengan demikian, pelabelan graceful merupakan salah satu bentuk pelabelan pada titiknya saja sedangkan label sisinya menjadi akibat dari adanya label titik.

Berikut ini adalah contoh pelabelan graceful pada graf star $K_{1,5}$



Gambar 2.18 Contoh Pelabelan Graceful pada Graf $K_{1,5}$

2.7. Teori Graf dalam Al-Qur'an

Banyak konsep-konsep matematika atau berbagai cabangnya, salah satunya teori graf yang tertuang dalam Al- Qur'an, diantaranya:

Suatu graf memiliki titik dan sisi artinya dalam graf tersebut terdapat dua titik yang memiliki lebih dari satu sisi memiliki hubungan dan integritas yang cukup signifikan pada sebuah ayat Al- Qur'an:

إِنَّ الصَّفَا وَالْمَرْوَةَ مِنْ شَعَائِرِ اللَّهِ ^ط فَمَنْ حَجَّ الْبَيْتَ أَوْ اعْتَمَرَ فَلَا جُنَاحَ عَلَيْهِ أَنْ

يَطُوفَ بِهِمَا وَمَنْ تَطَوَّعَ خَيْرًا فَإِنَّ اللَّهَ شَاكِرٌ عَلِيمٌ ﴿١٥٨﴾

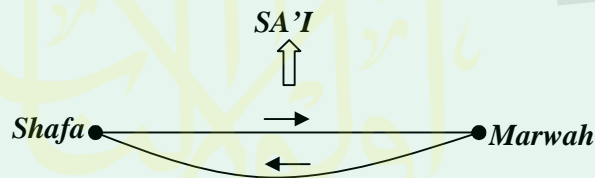
“ Sesungguhnya Shafaa dan Marwa adalah sebahagian dari syi'ar Allah. Maka barangsiapa yang beribadah haji ke Baitullah atau ber-'umrah, maka tidak ada dosa baginya mengerjakan sa'i antara keduanya. dan barangsiapa yang mengerjakan suatu kebajikan dengan

kerelaan hati, maka Sesungguhnya Allah Maha Mensyukuri kebaikan lagi Maha Mengetahui”.(Qs. Al-Baqarah, 02:158)

Sa’i arti harfiahnya adalah usaha, sedangkan arti syari’ahnya pada ibadah haji dan umroh adalah berbolak balik sebanyak tujuh kali antara bukit shafa dan marwah demi melaksanakan perintah Allah (Shihab, 2000:345). Sa’i merupakan salah satu rukun haji dan umroh, waktunya dilaksanakan setelah selesai melakukan thawaf. Dalam suatu hadis dijelaskan bahwa Rasulullah bersabda:

“Diwajibkan atas kamu melakukan Sa’i maka hendaklah kamu lakukan.” (Riwayat Ahmad).

Terkait dengan kejadian di atas, maka kejadian tersebut dapat direpresentasikan pada graf dengan sisi ganda sebagai berikut:



Gambar 2.19 Graf Representasi Ibadah Sa’i

Dari uraian di atas tidak menutup kemungkinan banyak konsep matematika khususnya teori graf yang masih belum dikaji dan terungkap melalui pendekatan Al-Qur’an. Seperti yang telah diuraikan sebelumnya, bahwa suatu graf memiliki dua unsur pokok yang disebut titik dan sisi. Titik-titik dalam suatu graf akan saling terhubung dengan adanya suatu garis yang dinamakan sisi. Sehingga dengan demikian, hal ini menunjukkan adanya suatu hubungan atau keterkaitan antara titik yang satu dengan titik yang lain.

Jika dikaitkan dengan kehidupan nyata, maka banyaknya titik yang terhubung dalam suatu graf dapat diasumsikan sebagai banyaknya kejadian tertentu, yang mana kejadian-kejadian tersebut memiliki keterkaitan dengan titik lainnya yang merupakan kejadian sesudahnya. Shalat dapat direpresentasikan dalam suatu graf. Shalat mempunyai kedudukan yang amat penting dalam Islam dan merupakan fondasi yang kokoh bagi tegaknya agama Islam. Ibadah shalat dalam Islam sangat penting, sehingga shalat harus dilakukan pada waktunya, dimanapun, dan bagaimanapun keadaan seorang muslim yang mukalaf.

Dalam kaitannya dengan peribadatan sholat, Allah swt berfirman:

فَإِذَا قَضَيْتُمُ الصَّلَاةَ فَادْكُرُوا اللَّهَ قِيَمًا وَقُعودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِكُمْ ۚ فَإِذَا
أَطْمَأْنَنْتُمْ فَأَقِيمُوا الصَّلَاةَ ۚ إِنَّ الصَّلَاةَ كَانَتْ عَلَى الْمُؤْمِنِينَ كِتَابًا مَّوْقُوتًا ﴿١٠٣﴾

Artinya: “Maka apabila kamu Telah menyelesaikan shalat(mu), ingatlah Allah di waktu berdiri, di waktu duduk dan di waktu berbaring. Kemudian apabila kamu Telah merasa aman, Maka Dirikanlah shalat itu (sebagaimana biasa). Sesungguhnya shalat itu adalah fardhu yang ditentukan waktunya atas orang-orang yang beriman” (Q.S. An-Nisaa’: 103).

Dalam ayat tersebut dijelaskan bahwa waktu-waktu sholat telah ditentukan waktunya dan telah menjadi suatu ketetapan, baik itu sholat fardhu maupun sholat sunnah. Sholat lima waktu diwajibkan dalam sehari (dhuhur, ‘ashar, maghrib, ‘isya’, dan subuh) merupakan sholat yang wajib ditunaikan dan tidak boleh ditinggalkan. Waktu pelaksanaan antara satu waktu sholat fardhu berbeda dengan empat waktu sholat yang lain dan telah ditetapkan oleh Allah swt. Akan tetapi kelima waktu sholat tersebut saling mengikat dan tidak diperbolehkan hanya melaksanakan satu sholat saja.

Adapun hubungan waktu shalat tersebut dengan teori graf adalah bahwa waktu-waktu shalat tersebut merupakan suatu himpunan yang terdiri dari waktu shalat fardhu (dzhuhur, 'ashar, maghrib, 'isya' dan subuh) dan waktu shalat sunnah sebagai ekspresi dari himpunan titik dalam graf. Sedangkan keterikatan antara kelima shalat fardhu tersebut yang tidak dapat ditinggalkan salah satunya dalam menunaikannya dan shalat sunnah sebagai pelengkap shalat fardhu merupakan ekspresi dari garis atau sisi yang menghubungkan titik-titik dalam graf.

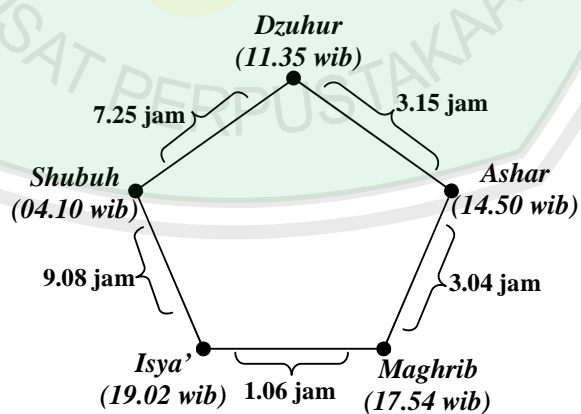
Shalat wajib dilaksanakan lima kali sehari semalam, yaitu pada waktu: *Dzuhur, Ashar, Magrib, Isya', dan Shubuh*. Shalat wajib yang mula-mula dilakukan Rasulullah Saw. adalah shalat dzuhur pada esoknya malam isra' tersebut (Depag RI, 1988:833).

Al- Qur'an tidak menerangkan secara terperinci waktu-waktu pelaksanaan shalat fardhu, akan tetapi, didalam hadis Rasulullah SAW waktu-waktu shalat telah dinyatakan secara terperinci, batas awal sampai batas akhir waktu setiap shalat. Di antara hadis yang menerangkan waktu-waktu shalat tersebut adalah hadis yang diriwayatkan oleh ahmad An- nasa'iy dan At-Turmudzi dari Jabir ibn Abdullah r.a adalah sebagai berikut:

“Bahwasanya Jibril datang kepada Nabi Saw, lalu berkata kepadanya: “ bangun dan bershalatlah” maka nabipun shalat dzuhur diketika telah tergelincir matahari. Kemudian Jibril datang pula kepada nabi pada waktu ashar, lalu berkata: “ bangun dan bershalatlah”. Maka nabi bershalat ketika bayangan segala sesuatu itu sepanjang dirinya. Kemudian Jibril datang pula kepada nabi pada waktu maghrib, lalu berkata: “ bangun dan bershalatlah” maka nabi shalat maghrib diwaktu telah terbenam matahari. Kemudian Jibril datang pada waktu isya', lalu berkata: “ bangun dan bershalatlah” maka nabi bershalat isya' diwaktu telah hilang mega-mega merah. Kemudian Jibril datang pula di waktu shubuh, diketika telah cemerlang fajar. Pada keesokan harinya ibril datang lagi untuk shalat dhuhur. Jibril berkata: “ bangun dan bershalatlah”, maka nabi shalat

dzuhur ketika bayangan segala sesuatu telah menjadi sepanjang dirinya. Kemudian Jibril datang lagipada waktu ashar, lalu berkata: “ bangun dean bershalatlah”, maka nabi bershalat ashar ketika telah terjadi bayangan segala sesuatu dua kali bayangan dirinya. Kemudian Jibril datang lagi pada waktu maghrib sama seperti waktu beliau datang kemaren . kemudian Jibril datang lagi pada waktu isya’ diketika telah berlalu separoh malam, atau sepertiga malam, maka nabipun bershalat isya’ kemudian jibril datang lagi waktu fajar telah bersinar terang, lalu berkata: “ bangun dan bershalatlah”, maka nabi bangun dan bershalat shubuh. Sesudah itu Jibril berkata: “waktu-waktu diantara kedua waktu ini, itulah waktu shalat” (kitab hadist imam Ahmad, hadist ke 10819).

Saat ini penentuan waktu shalat bisa ditentukan dengan penerapan ilmu astronomi dan falakiyah sehingga ketentuan waktu shalat didapatkan berdasarkan satuan waktu yang ada dengan melihat perbedaan waktu GMT yang telah disepakati tanpa harus melihat bayangan suatu benda. Waktu sholat dan selisih dengan waktu shalat sebelumnya atau sesudahnya menjadikan shalat-shalat yang diwajibkan tersebut saling berkesinambungan antara satu dan yang lainnya. Sehingga dengan ditetapkannya waktu shalat dan selisihnya tersebut dapat menjaga kaum muslimin dari kelalaian.



Gambar 2.20 Representasi Graf Terhadap Waktu-Waktu Shalat

Berbicara tentang pemberian label sesuai dengan aturan yang ada, hal ini menunjukkan bahwa suatu graf graceful telah memiliki ukuran label tertentu sehingga bisa dikatakan graceful. Jika direlevansikan dengan kajian Al-Qur'an adalah sejajar dengan ayat yang menyebutkan bahwa segala sesuatu yang ada di dunia ini diciptakan oleh Allah SWT. sesuai dengan kadar dan ukurannya dan ditata-Nya dengan sedemikian rapi. Demikianlah sebagaimana yang tertera pada surat Al-Qamar ayat 49:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

*"...Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran"
(Qs. al Qamar, 54:49)*

Berkenaan dengan ayat di atas Abdusysykir (2007:80) mengatakan bahwa semua yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitungan-hitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya. Namun rumus-rumus yang ada sekarang bukan diciptakan manusia sendiri, tetapi sudah disediakan. Manusia hanya menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika.

Begitupun dalam hal ini, suatu graf bisa terlabeli dengan pelabelan graceful karena sudah memiliki ukuran yang sempurna dengan cara dan aturan yang dibuat oleh manusia secara sistematis. Dari sinilah Al-Qur'an telah mengajak kepada setiap pembacanya untuk membahas, dan mengkaji suatu ilmu untuk memperluas khasanah keilmuannya.

Penemuan sekaligus pembuktian rumus-rumus yang digunakan dalam pelabelan pada graf yang berkaitan dengan penotasian pada titiknya selain bertujuan untuk menemukan pola tertentu agar lebih mudah untuk mencarinya.

Setelah mengetahui dengan jelas hasil dari pembahasan di atas yang intinya adalah menemukan rumus untuk pola pelabelan graceful pada graf kipas dan kipas ganda, serta membuktikan bahwa pelabelan pada sisinya selalu berbeda.

Jika dikaitkan dengan kajian agama Islam, hal ini dapat direlevansikan dengan Al-Qur'an yang menyebutkan bahwa kebenaran sesuatu tidak cukup hanya dengan bentuk ucapan, dan tulisan saja, tetapi perlu dan harus dibuktikan.

Hal ini sesuai pada surat Al-Baqarah ayat 111:

وَقَالُوا لَنْ يَدْخُلَ الْجَنَّةَ إِلَّا مَنْ كَانَ هُودًا أَوْ نَصْرِيًّا تِلْكَ أَمَانِيُّهُمْ قُلْ هَاتُوا بُرْهَانَكُمْ إِنْ كُنْتُمْ صَادِقِينَ ﴿١١١﴾

Artinya: Dan mereka (Yahudi dan Nasrani) berkata: "Sekali-kali tidak akan masuk surga kecuali orang-orang (yang beragama) Yahudi atau Nasrani". demikian itu (hanya) angan-angan mereka yang kosong belaka. Katakanlah: "Tunjukkanlah bukti kebenaranmu jika kamu adalah orang yang benar"(Q.S. Al-Baqarah: 111).

Allah SWT penguasa yang memiliki wewenang tunggal dalam hal surga dan negara, secara langsung membantah para Ahli Kitab. Allah tidak menggunakan perantara dan tidak memerintahkan siapapun termasuk Nabi Muhammad SAW untuk menjawab kebohongan itu. tidak memerlukan bukti dari mereka menyangkut kebohongan mereka, karena Allah Maha Mengetahui segala sesuatu. Tetapi manusia perlu. Karena itu, di sini Allah memerintahkan Nabi Muhammad SAW.: *katakanlah wahai Muhammad kepada mereka, "Tunjukkanlah kepada kami bukti kebenaran kamu jika kamu adalah orang yang benar"*. Bukti yang dimaksud di sini adalah berupa wahyu Illahi, karena surga dan neraka adalah wewenang Allah. Hanya Dia yang mengetahui siapa yang berhak memasukinya.

Nabi Muhammad SAW. pun tidak tahu. Itu sebabnya, maka bukti kebenaran yang dituntut adalah informasi-Nya, yakni wahyu-wahyu yang disampaikan kepada utusan-utusan-Nya (Shihab, 2002: 296-297).

Dalam surat Al-an'am ayat 143 juga disebutkan:

ثَمْنِيَّةَ أَزْوَاجٍ مِّنَ الضَّأْنِ اثْنَيْنِ وَمِنَ الْمَعْزِ اثْنَيْنِ قُلْ ءَآذَكُرَيْنِ حَرَّمَ أَمْرَ
الْأُنثِيَّيْنَ أَمَّا أَشْتَمَلَتْ عَلَيْهِ أَرْحَامُ الْأُنثِيَّيْنَ نَبِّئُونِي بِعِلْمٍ إِن كُنْتُمْ صَادِقِينَ ﴿١٤٣﴾

Artinya: "(yaitu) delapan binatang yang berpasangan, sepasang domba, sepasang dari kambing. Katakanlah: "Apakah dua yang jantan yang diharamkan Allah ataukah dua yang betina, ataukah yang ada dalam kandungan dua betinanya?" Terangkanlah kepadaku dengan berdasar pengetahuan jika kamu memang orang-orang yang benar" (Q.S. Al-An'am: 143).

Ayat di atas menjelaskan tentang pengecaman dan pembungkaman oleh Allah SWT. terhadap segala kebohongan orang-orang Musyrikin tentang pengharaman dan penghalalan binatang ternak yang berjumlah delapan pasang yakni sepasang domba, sepasang kambing, sepasang lembu, dan sepasang unta. Terangkanlah kepadaku berdasar pengetahuan yang jelas dan dapat dipertanggungjawabkan, apa alasan penghalalan dan pengharaman itu, jika kamu memang benar-benar dalam penghalalan dan pengharaman itu.

Berdasarkan ayat di atas, hendaknya segala sesuatu baik perkataan maupun perbuatan baik yang tertulis maupun yang tidak, jika memang benar adanya, maka sudah sepatutnya untuk diberikan pembuktiannya.

Hal yang utama yang dapat dijadikan sebagai refleksi dari semuanya yakni ternyata setelah banyak mempelajari matematika yang merupakan ilmu hitung – menghitung serta banyak mengetahui mengenai masalah yang terdapat dalam

matematika yang dapat direlevansikan dalam agama Islam sesuai dengan konsep-konsep yang ada dalam Al-Qur'an, maka akan dapat menambah keyakinan diri akan kebesaran Allah SWT selaku sang pencipta yang serba Maha, salah satunya adalah Maha Matematis. Karena Dialah sang raja yang sangat cepat dan teliti dalam semua masalah perhitungan (Abdusysyahir, 2007: 83).

Hal ini sesuai dalam Al-Qur'an surat Al- Baqarah ayat 202:

أُولَئِكَ لَهُمْ نَصِيبٌ مِّمَّا كَسَبُوا وَاللَّهُ سَرِيعُ الْحِسَابِ

Artinya: "Mereka itulah orang-orang yang mendapat bagian daripada yang mereka usahakan; dan Allah sangat cepat perhitungan-Nya" (Q.S. Al-Baqarah: 202).

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas tentang pelabelan graceful pada graf kipas F_n , dan graf kipas ganda dF_n untuk n bilangan asli dan $n \geq 2$. Pembahasan mengenai pelabelan graceful pada graf kipas F_n dan kipas ganda dF_n diklasifikasikan menjadi dua bagian, yaitu:

1. Pelabelan pada graf kipas F_n dan graf kipas ganda dF_n , dengan n adalah bilangan asli ganjil.
2. Pelabelan pada graf kipas F_n dan graf kipas ganda dF_n , dengan n adalah bilangan asli genap.

Pelabelan graceful pada graf kipas F_n dan graf kipas ganda dF_n dimulai dari $n = 2$

3.1. Pelabelan Graceful Pada Graf Kipas F_n

3.1.1. Graf Kipas F_n , dimana $n = 2$

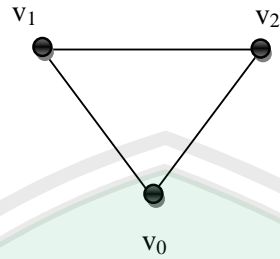
Cara menggambarkan graf kipas dimana $n = 2$, maka dimisalkan terlebih dahulu bahwa :

$$K_1 = \bullet \\ v_0$$

dan

$$P_2 = \bullet \text{---} \bullet \\ v_1 \quad v_2$$

maka graf kipas $F_2 = K_1 + P_2$ adalah:



Gambar 3.1. Penotasian Titik Graf Kipas F_2

Pelabelan graceful untuk titik-titik dari graf kipas F_2 , sehingga memenuhi fungsi satu-satu dari himpunan titik $\{v_0, v_1, v_2\}$ ke himpunan bilangan bulat taknegatif $\{0, 1, 2, 3\}$ sebagai berikut:



Gambar 3.2. Pelabelan Graceful pada Graf Kipas F_2

Dari dua macam pelabelan graceful di atas gambar yang dipilih dalam skripsi ini adalah yang memetakan v_0 ke 0 dan v_1 ke 1. Hal ini dilakukan untuk mempermudah mendapatkan polanya.

Jika pelabelan tersebut dijadikan suatu bentuk fungsi, maka diperoleh:

$$f(v_0) = 0$$

$$f(v_1) = 1$$

$$f(v_2) = 3$$

Berdasarkan pelabelan tersebut, jika dilihat dari indeks titik, maka dapat dibedakan antara indeks titik ganjil dan indeks titik genap dengan v_0 sebagai titik pusat.

a. Titik pusat

v_0 , maka $f(v_0) = 0$

b. Untuk titik dengan indeks bilangan asli ganjil

v_1 , maka $f(v_1) = 1$

Jadi dapat disimpulkan:

$$f(v_i) = i \quad i = 1$$

c. Untuk titik dengan indeks bilangan asli genap

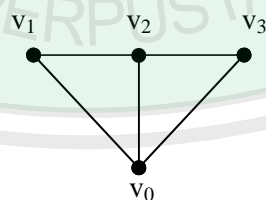
v_2 , maka $f(v_2) = 3 = (2 \times 2) - 2 + 1 = 2n - i + 1$

Jadi dapat disimpulkan:

$$f(v_i) = 2n - i + 1 \quad i = 2$$

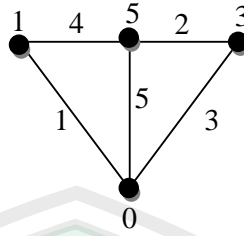
3.1.2. Graf Kipas F_n , dimana $n = 3$

Misalkan titik pada graf kipas F_3 dinotasikan sebagai berikut:



Gambar 3.3. Penotasian Titik pada Graf Kipas F_3

Pelabelan untuk titik-titik dari graf kipas F_3 , sehingga memenuhi fungsi satu-satu dari himpunan titik $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ ke himpunan bilangan bulat taknegatif $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, sebagai berikut:



Gambar 3.4. Pelabelan Graceful pada Graf Kipas F_3

Jika pelabelan tersebut dijadikan suatu bentuk fungsi, maka diperoleh:

$$f(v_0) = 0$$

$$f(v_1) = 1$$

$$f(v_2) = 5$$

$$f(v_3) = 3$$

Berdasarkan pelabelan tersebut, jika dilihat dari indeks titik, maka dapat dibedakan antara indeks titik ganjil dan indeks titik genap dengan v_0 sebagai titik pusat.

a. Titik pusat

$$v_0, \text{ maka } f(v_0) = 0$$

b. Untuk titik dengan indeks bilangan asli ganjil

$$v_1, \text{ maka } f(v_1) = 1$$

$$v_3, \text{ maka } f(v_3) = 3$$

Jadi dapat disimpulkan:

$$f(v_i) = i \quad i = 1, 3$$

c. Untuk titik dengan indeks bilangan asli genap

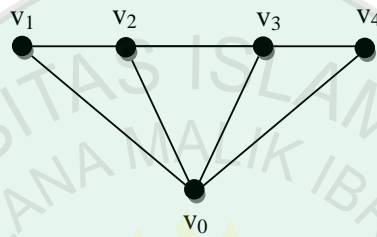
$$v_2, \text{ maka } f(v_2) = 5 = (2 \times 3) - 2 + 1 = 2n - i + 1$$

Jadi dapat disimpulkan:

$$f(v_i) = 2n - i + 1 \quad i = 2$$

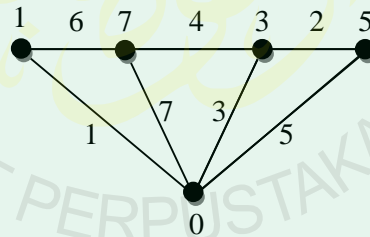
3.1.3. Graf Kipas F_n , dimana $n = 4$

Misalkan titik pada graf kipas F_4 dinotasikan sebagai berikut:



Gambar 3.5. Penotasian Titik pada Graf Kipas F_4

Pelabelan untuk titik-titik dari graf kipas F_4 , sehingga memenuhi fungsi satu-satu dari himpunan titik $\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ke himpunan bilangan bulat taknegatif $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, sebagai berikut:



Gambar 3.6. Pelabelan Graceful pada Graf Kipas F_4

Jika pelabelan tersebut dijadikan suatu bentuk fungsi, maka diperoleh:

$$f(v_0) = 0$$

$$f(v_1) = 1$$

$$f(v_2) = 7$$

$$f(v_3) = 3$$

$$f(v_4) = 5$$

Berdasarkan pelabelan tersebut, jika dilihat dari indeks titik, maka dapat dibedakan antara indeks titik ganjil dan indeks titik genap dengan v_0 sebagai titik pusat.

- a. Titik pusat

$$v_0, \text{ maka } f(v_0) = 0$$

- b. Untuk titik dengan indeks bilangan asli ganjil

$$v_1, \text{ maka } f(v_1) = 1$$

$$v_3, \text{ maka } f(v_3) = 3$$

Jadi dapat disimpulkan:

$$f(v_i) = i \quad i = 1, 3$$

- c. Untuk titik dengan indeks bilangan asli genap

$$v_2, \text{ maka } f(v_2) = 7 = (2 \times 4) - 2 + 1 = 2n - i + 1$$

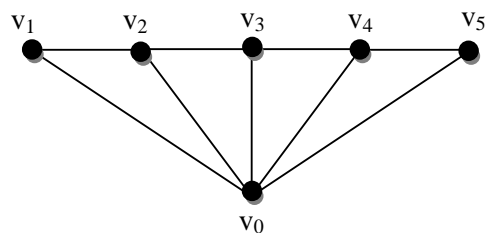
$$v_4, \text{ maka } f(v_4) = 5 = (2 \times 4) - 4 + 1 = 2n - i + 1$$

Jadi dapat disimpulkan:

$$f(v_i) = 2n - i + 1 \quad i = 2, 4$$

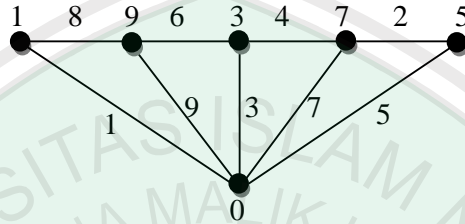
3.1.4. Graf Kipas F_n , dimana $n = 5$

Misalkan titik pada graf kipas F_5 dinotasikan sebagai berikut:



Gambar 3.7. Penotasian Titik Graf Kipas F_5

Pelabelan untuk titik-titik dari graf kipas F_5 , sehingga memenuhi fungsi satu-satu dari himpunan titik $\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ ke himpunan bilangan bulat taknegatif $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, sebagai berikut:



Gambar 3.8. Pelabelan Graceful pada Graf Kipas F_5

Jika pelabelan tersebut dijadikan suatu bentuk fungsi, maka diperoleh:

$$f(v_0) = 0$$

$$f(v_1) = 1$$

$$f(v_2) = 9$$

$$f(v_3) = 3$$

$$f(v_4) = 7$$

$$f(v_5) = 5$$

Berdasarkan pelabelan tersebut, jika dilihat dari indeks titik, maka dapat dibedakan antara indeks titik ganjil dan indeks titik genap dengan v_0 sebagai titik pusat.

a. Titik pusat

$$v_0, \text{ maka } f(v_0) = 0$$

b. Untuk titik dengan indeks bilangan asli ganjil

$$v_1, \text{ maka } f(v_1) = 1$$

$$v_3, \text{ maka } f(v_3) = 3$$

v_5 , maka $f(v_5) = 5$

Jadi dapat disimpulkan:

$$F(v_i) = i \quad i = 1, 3, 5$$

c. Untuk titik dengan indeks bilangan asli genap

$$v_2, \text{ maka } f(v_2) = 9 = (2 \times 5) - 2 + 1 = 2n - i + 1$$

$$v_4, \text{ maka } f(v_4) = 7 = (2 \times 5) - 4 + 1 = 2n - i + 1$$

Jadi dapat disimpulkan:

$$f(v_i) = 2n - i + 1 \quad i = 2, 4$$

Dari uraian di atas diperoleh:

Teorema I:

Graf kipas F_n adalah graceful untuk setiap n bilangan asli dan $n \geq 2$.

Bukti:

Misal:

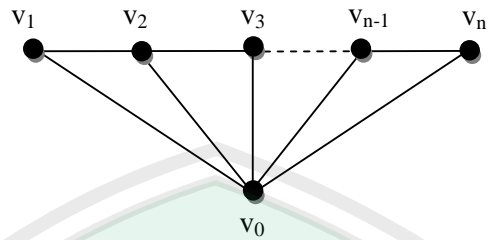
$$V(F_n) = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_n\} \text{ dan}$$

$$E(F_n) \text{ itu adalah: } v_0v_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$v_i v_{i+1} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n-1$$

Jadi banyak titik di $V(F_n)$ adalah $(n + 1)$, dan banyak sisi di $E(F_n)$ adalah $(2n - 1)$.

Maka F_n dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.9. Graf Kipas F_n

Buat fungsi f dari $V(F_n)$ ke $\{0, 1, 2, \dots, q\}$ dengan aturan:

$$f(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } i = 0 \\ i & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ 2n - i + 1 & \text{untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

a. Akan ditunjukkan bahwa f fungsi injektif

Ambil v_i dan v_j titik di F_n dengan $f(v_i) = f(v_j)$

1. Untuk i dan j ganjil

Karena $f(v_i) = f(v_j)$

Maka $i = j$

Jadi $v_i = v_j$

2. Untuk i dan j genap

Karena $f(v_i) = f(v_j)$

$$2n - i + 1 = 2n - j + 1$$

$$2n - i = 2n - j$$

$$-i = -j$$

$$i = j$$

Jadi $v_i = v_j$

Jadi f merupakan fungsi injektif dari $\{v_0, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ke $\{0, 1, 2, 3, \dots, q\}$.

b. Akan dibuktikan bahwa $0 \leq f(v_i) \leq q$ atau $V(F_n)$ dipetakan ke $\{0, 1, 2, 3, \dots, q\}$

1. $f(v_0) = 0$, maka $0 \leq f(v_i) \leq q$

2. untuk i ganjil akan ditunjukkan $0 \leq f(v_i) \leq q$. Diketahui $f(v_i) = i$

a) n genap, maka $i = 3, 5, \dots, n$

Karena $3 \leq i \leq n-1 \leq 2n-1$

Maka $3 \leq i \leq 2n-1$

Maka $0 \leq 3 \leq f(v_i) \leq 2n-1$

Jadi $0 \leq f(v_i) \leq q$

b) n ganjil, maka $i = 3, 5, \dots, n-1$

Karena $3 \leq i \leq n-1 \leq 2n-1$

Maka $3 \leq i \leq 2n-1$

Maka $0 \leq 3 \leq f(v_i) \leq 2n-1$

Jadi $0 \leq f(v_i) \leq q$

3. untuk i genap akan ditunjukkan $0 \leq f(v_i) \leq q$. Diketahui $f(v_i) = 2n - i + 1$

a) n ganjil, maka $i = 2, 4, 6, \dots, n-1$

Karena i genap, maka $2 \leq i \leq n-1$

akan ditunjukkan dari ruas kiri:

$$2 \leq i$$

$$-i + 2 \leq 0$$

$$(2n - 1) - i + 2 \leq 2n - 1$$

$$2n - i + 1 \leq 2n - 1$$

$$f(v_i) \leq q$$

akan ditunjukkan dari ruas kanan:

$$i \leq n - 1$$

$$-i \geq -n + 1$$

$$-i + 1 \geq -n + 1 + 1$$

$$2n - i + 1 \geq 2n - n + 2$$

$$f(v_i) \geq n + 2 \geq 0$$

$$0 \leq f(v_i)$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa untuk i genap dengan n ganjil

terbukti $0 \leq f(v_i) \leq q$

b) n genap, maka $i = 2, 4, 6, \dots, n$

karena i genap, maka $2 \leq i \leq n$

akan ditunjukkan dari ruas kiri:

$$2 \leq i$$

$$-i + 2 \leq 0$$

$$(2n - 1) - i + 2 \leq 2n - 1$$

$$2n - i + 1 \leq 2n - 1$$

$$f(v_i) \leq q$$

akan ditunjukkan dari ruas kanan:

$$i \leq n$$

$$-i \geq -n$$

$$-i + 1 \geq -n + 1$$

$$2n - i + 1 \geq 2n - n + 1$$

$$f(v_i) \geq n + 1 \geq 0$$

$$0 \leq f(v_i)$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa untuk i genap dengan n ganjil terbukti

$$0 \leq f(v_i) \leq q$$

b. Akan dibuktikan bahwa $|f(v_i) - f(v_j)|$ adalah berbeda untuk setiap (v_i, v_j) di G

Diketahui bahwa sisi pada F_n adalah: $v_0v_i, i = 2, 3, 4, \dots, n$ dan

$$v_i v_{i+1}, i = 2, 3, 4, \dots, n - 1$$

1. v_0v_i akan selalu berbeda, untuk setiap i

Akan dibuktikan jika $i \neq j$ maka label v_0v_i berbeda dengan v_0v_j .

Label v_0v_i adalah $|f(v_0) - f(v_i)|$ dan label v_0v_j adalah $|f(v_0) - f(v_j)|$

a. i genap dan j genap (i dan j sama-sama genap)

$$\text{Maka } |f(v_0) - f(v_i)| = |0 - (2n - i + 1)| = |2n - i + 1|$$

$$\text{dan } |f(v_0) - f(v_j)| = |0 - (2n - j + 1)| = |2n - j + 1|$$

$$\text{Karena } i \neq j \text{ maka } |2n - i + 1| \neq |2n - j + 1|$$

b. i genap dan j ganjil (salah satu i atau j ganjil)

$$\text{Maka } |f(v_0) - f(v_i)| = |0 - (2n - i + 1)| = |2n - i + 1|$$

$$\text{dan } |f(v_0) - f(v_j)| = |0 - j| = |j|$$

Diketahui:

$$i = 1, 2, 3, \dots, n \text{ dan}$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\text{Karena } 2n - i + 1 \geq 0$$

Maka $|2n - i + 1| = 2n - i + 1$

Karena $j \geq 0$, maka $|j| = j$

Andaikan $2n - i + 1 = j$

Maka $i + j = 2n + 1$

Hal itu tidak mungkin

Karena $i + j \leq 2n$

Jadi $|2n - i + 1| \neq |j|$

c. i ganjil dan j ganjil (i dan j sama-sama ganjil)

Maka $|f(v_0) - f(v_i)| = |0 - i| = |i|$

dan $|f(v_0) - f(v_j)| = |0 - j| = |j|$

Karena $i \neq j$ maka $|i| \neq |j|$

2. $v_i v_{i+1}$ akan selalu berbeda

Akan dibuktikan jika $i \neq j$ maka label $v_i v_{i+1}$ berbeda dengan $v_j v_{j+1}$

Label $v_i v_{i+1}$ adalah $|f(v_i) - f(v_{i+1})|$ dan label $v_j v_{j+1}$ adalah $|f(v_j) - f(v_{j+1})|$

a. i genap dan j genap (i dan j sama-sama genap)

Maka $|f(v_i) - f(v_{i+1})| = |(2n - i + 1) - (i + 1)| = |2n - 2i|$

dan $|f(v_j) - f(v_{j+1})| = |(2n - j + 1) - (j + 1)| = |2n - 2j|$

Karena $i \neq j$ maka $|2n - 2i| \neq |2n - 2j|$

b. i genap dan j ganjil (salah satu i atau j ganjil)

Maka $|f(v_i) - f(v_{i+1})| = |(2n - i + 1) - (i + 1)| = |2n - 2i|$

dan $|f(v_j) - f(v_{j+1})| = |j - (2n - (j + 1) + 1)|$

$$= |j - (2n - j - 1 + 1)|$$

$$= |j - (2n - j)|$$

$$= |j - 2n + j|$$

$$= |2j - 2n|$$

$$= |2n - 2j|$$

Karena $i \neq j$ maka $|2n - 2i| \neq |2n - 2j|$

c. i ganjil dan j ganjil (i dan j sama-sama ganjil)

$$\text{Maka } |f(v_i) - f(v_{i+1})| = |i - (2n - (i + 1) + 1)|$$

$$= |i - (2n - i - 1 + 1)|$$

$$= |i - 2n + i + 1 - 1|$$

$$= |2i - 2n|$$

$$|f(v_j) - f(v_{j+1})| = |j - (2n - (j + 1) + 1)|$$

$$= |j - (2n - j - 1 + 1)|$$

$$= |2j - 2n|$$

karena $i \neq j$ maka $|2i - 2n| \neq |2j - 2n|$

Dari uraian di atas $|f(v_i) - f(v_j)|$ akan berbeda sesuai nilai i dan j

Jadi, $|f(v_i) - f(v_j)|$ adalah berbeda, $\forall (v_i, v_j)$ di G

Dengan demikian, terbukti bahwa graf kipas F_n adalah graceful untuk setiap n bilangan asli dan $n \geq 2$.

3.2 Pelabelan Graceful pada Graf Kipas Ganda dF_n

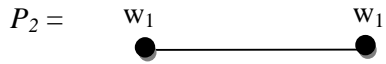
3.2.1. Graf Kipas Ganda dF_n , dimana $n = 2$

Cara menggambar graf kipas ganda dimana $n = 2$, maka dimisalkan

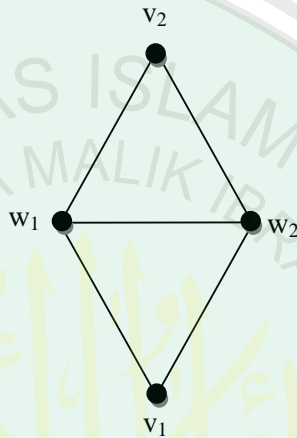
dulu bahwa:

$$2K_1 = \begin{array}{cc} \bullet & \bullet \\ v_1 & v_2 \end{array}$$

dan

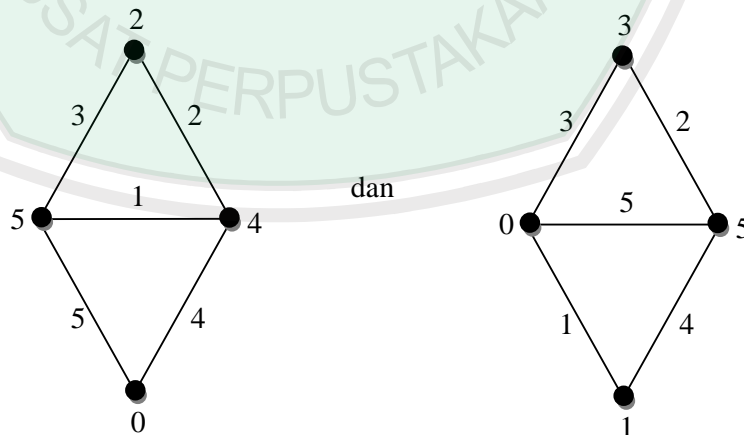


Maka graf kipas ganda $dF_2 = 2K_1 + P_2$ adalah:



Gambar 3.10. Penotasian Titik Graf Kipas Ganda dF_2

Pelabelan untuk titik-titik dari graf kipas ganda dF_2 , sehingga memenuhi fungsi satu-satu dari himpunan titik $\{v_1, v_2, w_1, w_2\}$ ke himpunan bilangan bulat taknegatif $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, sebagai berikut:



Gambar 3.11. Pelabelan Graceful pada Graf Kipas Ganda dF_2

Dari dua macam pelabelan graceful di atas gambar yang dipilih dalam skripsi ini adalah yang memetakan v_1 ke 1 dan v_2 ke 2. Hal ini dilakukan untuk mempermudah mendapatkan polanya.

Jika pelabelan tersebut dijadikan suatu bentuk fungsi, maka diperoleh:

$$f(v_1) = 0$$

$$f(v_2) = 2$$

$$f(w_1) = 5$$

$$f(w_2) = 4$$

Berdasarkan pelabelan tersebut, jika dilihat dari indeks titiknya, maka dapat dibedakan antara indeks titik ganjil dan indeks titik genap dengan v_1 dan v_2 sebagai titik pusat.

a. Titik pusat

$$v_1, \text{ maka } f(v_1) = 0$$

$$v_2, \text{ maka } f(v_2) = 2$$

b. Titik dengan indeks 1 dan 2

$$w_1, \text{ maka } f(w_1) = 5 = (3 \times 2) - 1 = 3n - i$$

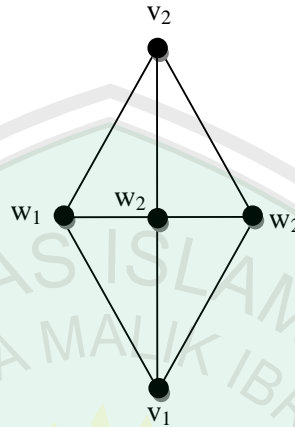
$$w_2, \text{ maka } f(w_2) = 4 = (3 \times 2) - 2 = 3n - i$$

Jadi dapat disimpulkan:

$$f(w_i) = 3n - i \quad i = 1, 2$$

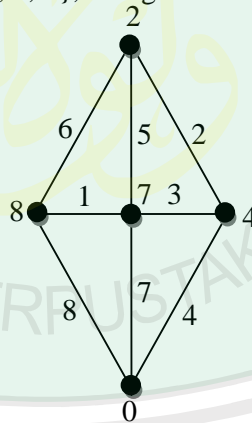
3.2.2. Graf Kipas Ganda dF_n , dimana $n = 3$

Misalkan titik pada graf kipas ganda dF_3 dinotasikan sebagai berikut:



Gambar 3.12. Penotasian Titik Graf Kipas Ganda dF_3

Pelabelan untuk titik-titik dari graf kipas ganda dF_3 , sehingga memenuhi fungsi satu-satu dari himpunan titik $\{v_1, v_2, w_1, w_2, w_3\}$ ke himpunan bilangan bulat taknegatif $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, sebagai berikut:



Gambar 3.13. Pelabelan Graceful pada Graf Kipas Ganda dF_3

Jika pelabelan tersebut dijadikan suatu bentuk fungsi, maka diperoleh:

$$f(v_1) = 0$$

$$f(v_2) = 2$$

$$f(w_1) = 8$$

$$f(w_2) = 7$$

$$f(w_3) = 4$$

Berdasarkan pelabelan tersebut, jika dilihat dari indeks titiknya, maka dapat dibedakan antara indeks titik ganjil dan indeks titik genap dengan v_1 dan v_2 sebagai titik pusat.

a. Titik pusat

$$v_1, \text{ maka } f(v_1) = 0$$

$$v_2, \text{ maka } f(v_2) = 2$$

b. Titik dengan indeks 1 dan 2

$$w_1, \text{ maka } f(w_1) = 8 = (3 \times 3) - 1 = 3n - i$$

$$w_2, \text{ maka } f(w_2) = 7 = (3 \times 3) - 2 = 3n - i$$

Jadi dapat disimpulkan:

$$f(v_i) = 3n - i \quad i = 1, 2$$

c. Untuk titik dengan indeks bilangan asli ganjil

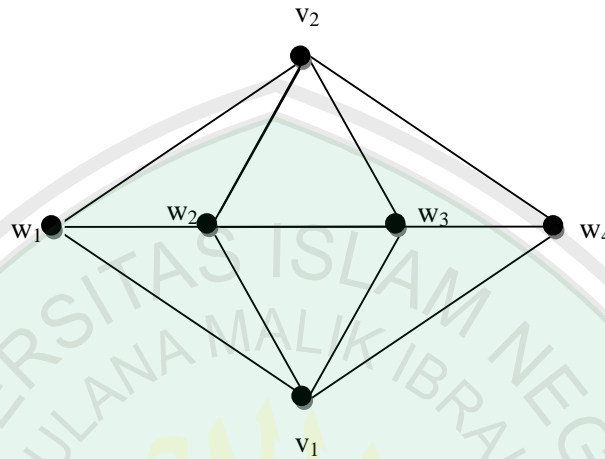
$$w_3, \text{ maka } f(w_3) = 4 = 3 + 1 = 3 + \frac{3-1}{2} = i + \frac{i-1}{2}$$

Jadi dapat disimpulkan:

$$f(v_i) = i + \frac{i-1}{2} \quad i = 3$$

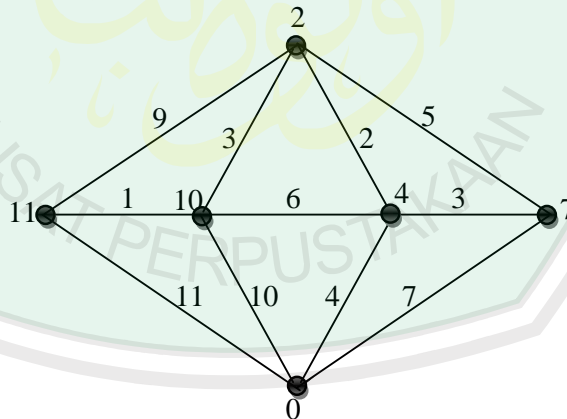
3.2.3. Graf Kipas Ganda dF_n , dimana $n = 4$

Misalkan titik pada graf kipas ganda dF_4 dinotasikan sebagai berikut:



Gambar 3.14. Penotasian titik pada Graf Kipas Ganda dF_4

Pelabelan untuk titik-titik dari graf kipas ganda dF_4 , sehingga memenuhi fungsi satu-satu dari himpunan titik $\{v_1, v_2, w_1, w_2, w_3, w_4\}$ ke himpunan bilangan bulat taknegatif $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$, sebagai berikut:



Gambar 3.15. Pelabelan Graceful pada Graf Kipas Ganda dF_4

Jika pelabelan tersebut dijadikan suatu bentuk fungsi, maka diperoleh:

$$f(v_1) = 0$$

$$f(v_2) = 2$$

$$f(w_1) = 11$$

$$f(w_2) = 10$$

$$f(w_3) = 4$$

$$f(w_4) = 7$$

Berdasarkan pelabelan tersebut, jika dilihat dari indeks titiknya, maka dapat dibedakan antara indeks titik ganjil dan indeks titik genap dengan v_1 dan v_2 sebagai titik pusat.

a. Titik pusat

$$v_1, \text{ maka } f(v_1) = 0$$

$$v_2, \text{ maka } f(v_2) = 2$$

b. Titik dengan indeks 1 dan 2, maka:

$$w_1, \text{ maka } f(w_1) = 11 = (3 \times 4) - 1 = 3n - i$$

$$w_2, \text{ maka } f(w_2) = 10 = (3 \times 4) - 2 = 3n - i$$

Jadi dapat disimpulkan:

$$f(v_i) = 3n - i \quad i = 1, 2$$

c. Untuk titik dengan indeks bilangan asli ganjil

$$w_3, \text{ maka } f(w_3) = 4 = 3 + 1 = 3 + \frac{3-1}{2} = i + \frac{i-1}{2}$$

Jadi dapat disimpulkan:

$$f(v_i) = i + \frac{i-1}{2} \quad i = 3$$

d. Untuk titik dengan indeks bilangan asli genap

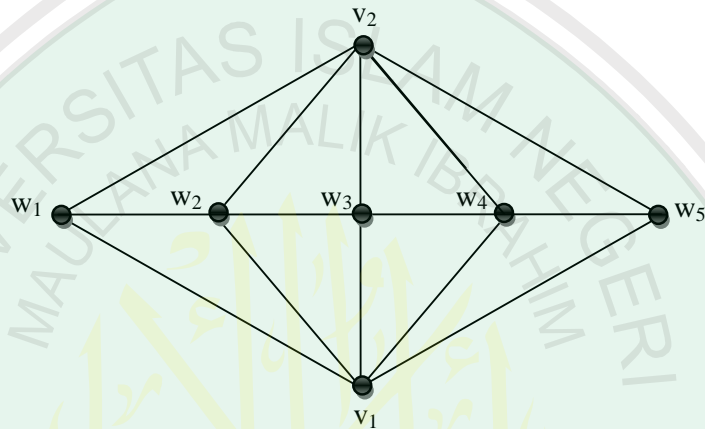
$$w_4, \text{ maka } f(w_4) = 7 = (3 \times 4) - \left(\frac{3 \times 4}{2}\right) + 1 = 3n - \frac{3i}{2} + 1$$

Jadi dapat disimpulkan:

$$f(v_i) = 3n - \frac{3i}{2} + 1 \quad i = 4$$

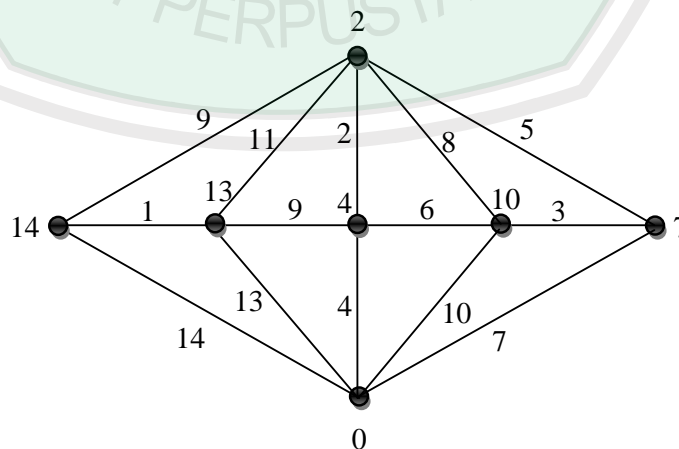
3.2.4. Graf Kipas Ganda dF_n , dimana $n = 5$

Misalkan titik pada graf kipas ganda dF_n dinotasikan sebagai berikut:



Gambar 3.16. Penotasian Titik pada Graf Kipas Ganda dF_5

Pelabelan untuk titik-titik dari graf kipas ganda dF_5 , sehingga memenuhi fungsi satu-satu dari himpunan titik $\{v_1, v_2, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ ke himpunan bilangan bulat taknegatif $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$, sebagai berikut:



Gambar 3.17. Pelabelan Gracaful pada Graf Kipas Ganda dF_5

Jika pelabelan tersebut dijadikan suatu bentuk fungsi, maka diperoleh:

$$f(v_1) = 0$$

$$f(v_2) = 2$$

$$f(w_1) = 14$$

$$f(w_2) = 13$$

$$f(w_3) = 4$$

$$f(w_4) = 10$$

$$f(w_5) = 7$$

Berdasarkan pelabelan tersebut, jika dilihat dari indeks titiknya, maka dapat dibedakan antara indeks titik ganjil dan indeks titik genap dengan v_1 dan v_2 sebagai titik pusat.

a. Titik pusat

$$v_1, \text{ maka } f(v_1) = 0$$

$$v_2, \text{ maka } f(v_2) = 2$$

b. Titik dengan indeks 1 dan 2, maka:

$$w_1, \text{ maka } f(w_1) = 14 = (3 \times 5) - 1 = 3n - i$$

$$w_2, \text{ maka } f(w_2) = 13 = (3 \times 5) - 2 = 3n - i$$

Jadi dapat disimpulkan:

$$f(v_i) = 3n - i \quad i = 1, 2$$

c. Untuk titik dengan indeks bilangan asli ganjil

$$w_3, \text{ maka } f(w_3) = 4 = 3 + 1 = 3 + \frac{3-1}{2} = i + \frac{i-1}{2}$$

$$w_5, \text{ maka } f(w_5) = 7 = 5 + 2 = 5 + \frac{5-1}{2} = i + \frac{i-1}{2}$$

Jadi dapat disimpulkan:

$$f(v_i) = i + \frac{i-1}{2} \quad i = 3, 5$$

d. Untuk titik dengan indeks bilangan asli genap

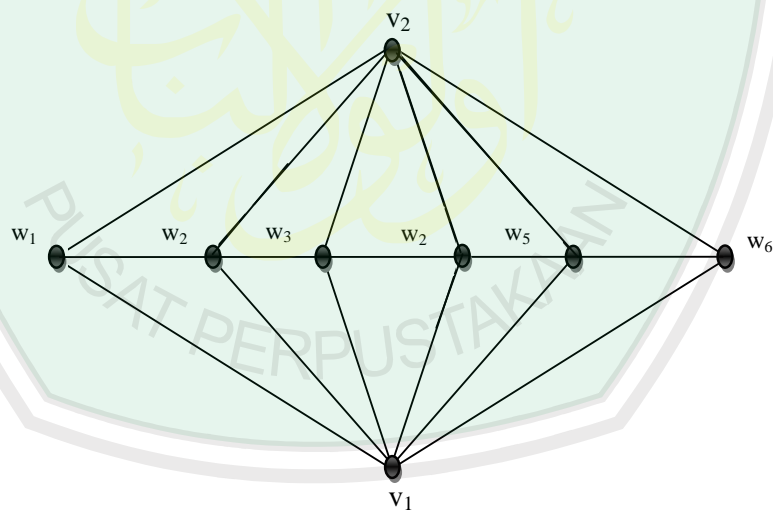
$$w_4, \text{ maka } f(w_4) = 10 = (3 \times 5) - \left(\frac{3 \times 4}{2}\right) + 1 = 3n - \frac{3i}{2} + 1$$

Jadi dapat disimpulkan:

$$f(v_i) = 3n - \frac{3i}{2} + 1 \quad i = 4$$

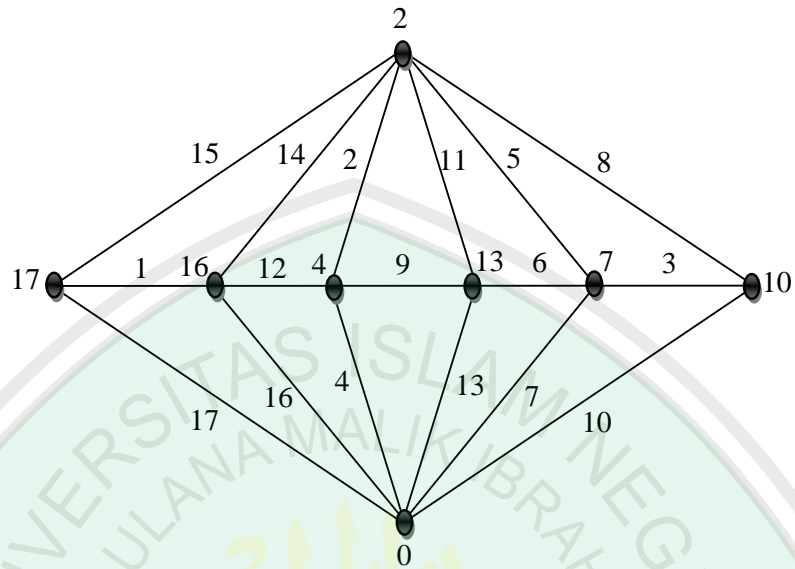
3.2.4. Graf Kipas Ganda dF_n , dimana $n = 6$

Misalkan titik pada graf kipas ganda dF_6 dinotasakan sebagai berikut:



Gambar 3.18. Penotasian Titik pada Graf Kipas Ganda dF_6

Pelabelan untuk titik-titik dari graf kipas ganda dF_6 , sehingga memenuhi fungsi satu-satu dari himpunan titik $\{v_1, v_2, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$ ke himpunan bilangan bulat taknegatif $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$, sebagai berikut:



Gambar 3.19. Pelabelan Graf Kipas Ganda dF_6

Jika pelabelan tersebut dijadikan suatu bentuk fungsi, maka diperoleh:

$$f(v_1) = 0$$

$$f(v_2) = 2$$

$$f(w_1) = 17$$

$$f(w_2) = 16$$

$$f(w_3) = 4$$

$$f(w_4) = 13$$

$$f(w_5) = 7$$

$$f(w_6) = 10$$

Berdasarkan pelabelan tersebut, jika dilihat dari indeks titiknya, maka dapat dibedakan antara indeks titik ganjil dan indeks titik genap dengan v_1 dan v_2 sebagai titik pusat.

a. Titik pusat

$$v_1, \text{ maka } f(v_1) = 0$$

$$v_2, \text{ maka } f(v_2) = 2$$

b. Titik dengan indeks 1 dan 2, maka:

$$w_1, \text{ maka } f(w_1) = 17 = (3 \times 6) - 1 = 3n - i$$

$$w_2, \text{ maka } f(w_2) = 16 = (3 \times 6) - 2 = 3n - i$$

Jadi dapat disimpulkan:

$$f(v_i) = 3n - i \quad i = 1, 2$$

c. Untuk titik dengan indeks bilangan asli ganjil

$$w_3, \text{ maka } f(w_3) = 4 = 3 + 1 = 3 + \frac{3-1}{2} = i + \frac{i-1}{2}$$

$$w_5, \text{ maka } f(w_5) = 7 = 5 + 2 = 5 + \frac{5-1}{2} = i + \frac{i-1}{2}$$

Jadi dapat disimpulkan:

$$f(v_i) = i + \frac{i-1}{2} \quad i = 3, 5$$

d. Untuk titik dengan indeks bilangan asli genap

$$w_4, \text{ maka } f(w_4) = 13 = (3 \times 6) - \left(\frac{3 \times 4}{2}\right) + 1 = 3n - \frac{3i}{2} + 1$$

$$w_6, \text{ maka } f(w_6) = 10 = (3 \times 6) - \left(\frac{3 \times 6}{2}\right) + 1 = 3n - \frac{3i}{2} + 1$$

Jadi dapat disimpulkan:

$$f(v_i) = 3n - \frac{3i}{2} + 1 \quad i = 4, 6$$

Dari uraian di atas diperoleh:

Teorema II:

Graf kipas ganda dF_n adalah graceful untuk setiap n bilangan asli dan $n \geq 2$

Bukti:

Misal

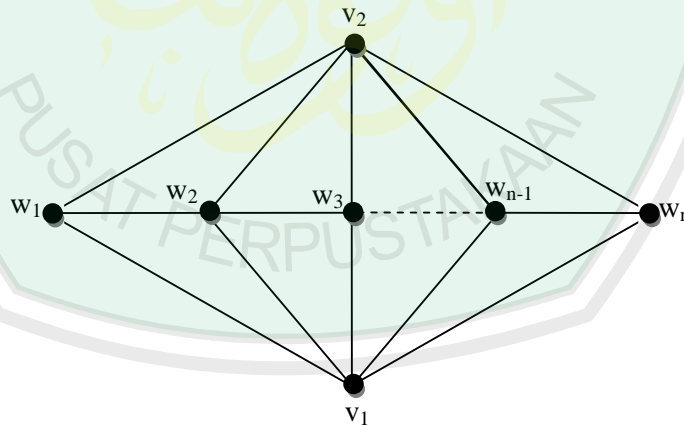
$dF_n = \{v_1, v_2, w_1, w_2, \dots, w_n\}$ dan

$E(dF_n)$ itu adalah: v_1w_i dan v_2w_i $i = 1, 2, 3, \dots, n$

w_iw_{i+1} $i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$

Jadi banyak titik di $V(dF_n)$ adalah $(n + 2)$, dan banyak sisi di $E(F_n)$ adalah $(3n - 1)$.

Maka dF_n dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.20. Graf Kipas Ganda dF_n

Buat fungsi f dari $V(dF_n)$ ke $\{0,1,2,\dots,q\}$ dengan aturan:

$$f(v_1) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } i = 1 \\ 1 & \text{untuk } i = 2 \end{cases}$$

$$f(w_i) = \begin{cases} 3n - i & \text{untuk } i = 1, 2 \\ i + \frac{i-1}{2} & \text{untuk } i \text{ ganjil dan } i \geq 3 \\ 3n - \frac{3i}{2} + 1 & \text{untuk } i \text{ genap dan } i \geq 4 \end{cases}$$

a. Akan ditunjukkan bahwa f fungsi injektif

Ambil w_i dan w_j titik di dF_n dengan $f(w_i) = f(w_j)$

1. Untuk i dan j ganjil

Karena $f(w_i) = f(w_j)$

$$\text{Maka } i + \frac{i-1}{2} = j + \frac{j-1}{2}$$

$$2i + i - 1 = 2j + j - 1$$

$$3i - 1 = 3j - 1$$

$$3i = 3j$$

$$i = j$$

Jadi $w_i = w_j$

2. Untuk i dan j genap

Karena $f(w_i) = f(w_j)$

$$\text{Maka } 3n - \frac{3i}{2} + 1 = 3n - \frac{3j}{2} + 1$$

$$6n - 3i + 2 = 6n - 3j + 2$$

$$6n - 3i = 6n - 3j$$

$$-3i = -3j$$

$$-i = -j$$

$$i = j$$

Jadi $w_i = w_j$

Jadi f merupakan fungsi injektif dari $\{v_1, v_2, w_1, w_2, \dots, w_n\}$ titik ke $\{0, 1, 2, 3, \dots, q\}$.

b. Akan dibuktikan bahwa $\{v_1, v_2, w_1, w_2, \dots, w_n\}$ dipetakan ke $\{0, 1, 2, 3, \dots, q\}$

1. $f(v_1) = 0 \in \{0, 1, 2, 3, \dots, q\}$

2. $f(v_2) = 2 \in \{0, 1, 2, 3, \dots, q\}$

3. Akan dibuktikan $0 \leq f(w_i) \leq q$. Diketahui $f(w_i) = 3n - i$

a) $f(w_1) = 3n - 1 \in \{0, 1, 2, \dots, 3n - 1\}$

sehingga $0 \leq 3n - 1 \leq 3n - 1$

maka $0 \leq f(w_1) \leq q$

b) $f(w_2) = 3n - 2 \in \{0, 1, 2, \dots, 3n - 2, 3n - 1\}$

sehingga $0 \leq 3n - 2 \leq 3n - 1$

maka $0 \leq f(w_2) \leq q$

4. Untuk i ganjil akan ditunjukkan $0 \leq f(w_i) \leq q$. Diketahui $f(w_i) =$

$$i + \frac{i-1}{2}$$

a) n ganjil, maka $i = 3, 5, 7, \dots, n$

Karena $3 \leq i \leq n \leq 3n - 1$

Sehingga $3 \leq i \leq n$

$$6 \leq 2i \leq 2n$$

$$6 \leq 3i - 1 \leq 2n$$

$$0 \leq 6 \leq 3i - 1 \leq 2n \leq 3n - 1$$

Maka $6 \leq f(w_i) \leq 3n - 1$

Jadi $0 \leq f(w_i) \leq q$

b) n genap, maka $i = 3, 5, 7, \dots, n - 1$

Karena $3 \leq i \leq n - 1 \leq 3n - 1$

Sehingga $3 \leq i \leq n - 1$

$$6 \leq 2i \leq 2n - 2$$

$$6 \leq 3i - 1 \leq 2n - 2$$

$$0 \leq 6 \leq 3i - 1 \leq 2n - 2 \leq 3n - 1$$

Maka $6 \leq f(w_i) \leq 3n - 1$

Jadi $0 \leq f(w_i) \leq q$

5. Untuk i genap akan ditunjukkan $0 \leq f(w_i) \leq q$. Diketahui $f(w_i) =$

$$3n - \frac{3i}{2} + 1$$

a) n ganjil, maka $i = 4, 6, \dots, n - 1$

karena i genap, maka $4 \leq i \leq n - 1$

akan ditunjukkan dari ruas kiri:

$$4 \leq i$$

$$-i \leq -4$$

$$-\frac{3i}{2} \leq -6$$

$$-\frac{3i}{2} + 1 \leq -5$$

$$3n - \frac{3i}{2} + 1 \leq 3n - 5$$

$$3n - \frac{3i}{2} + 1 \leq 3n - 1$$

$$f(w_i) \leq q$$

akan ditunjukkan dari ruas kanan:

$$i \leq n - 1$$

$$-i \geq -n + 1$$

$$-\frac{3i}{2} \geq \frac{3}{2}(-n + 1)$$

$$-\frac{3i}{2} \geq -\frac{3n}{2} + \frac{3}{2}$$

$$-\frac{3i}{2} + 1 \geq 3n - \frac{3n}{2} + \frac{3}{2} + 1$$

$$-\frac{3i}{2} + 1 \geq -\frac{3n}{2} + \frac{5}{2}$$

$$3n - \frac{3i}{2} + 1 \geq 3n - \frac{3n}{2} + \frac{5}{2}$$

$$3n - \frac{3i}{2} + 1 \geq \frac{3n}{2} + \frac{5}{2} \geq 0$$

$$0 \leq 3n - \frac{3i}{2} + 1$$

$$0 \leq f(w_i)$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa untuk i genap dengan n ganjil
 terbukti $0 \leq f(w_i) \leq q$

b. n genap, maka $i = 4, 6, \dots, n$

karena i genap, maka $4 \leq i \leq n$

akan ditunjukkan dari ruas kiri:

$$4 \leq i$$

$$-i \leq -4$$

$$-\frac{3i}{2} \leq -6$$

$$-\frac{3i}{2} + 1 \leq -5$$

$$3n - \frac{3i}{2} + 1 \leq 3n - 5$$

$$3n - \frac{3i}{2} + 1 \leq 3n - 1$$

$$f(w_i) \leq q$$

akan ditunjukkan dari ruas kanan:

$$i \leq n$$

$$-i \geq -n$$

$$-\frac{3i}{2} \geq -\frac{3n}{2}$$

$$-\frac{3i}{2} + 1 \geq -\frac{3n}{2} + 1$$

$$3n - \frac{3i}{2} + 1 \geq 3n - \frac{3n}{2} + 1$$

$$3n - \frac{3i}{2} + 1 \geq \frac{3n}{2} + 1$$

$$3n - \frac{3i}{2} + 1 \geq \frac{3n}{2} + 1 \geq 0$$

$$0 \leq f(w_i)$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa untuk i genap dengan n ganjil terbukti

$$0 \leq f(w_i) \leq q$$

- c. Akan dibuktikan bahwa $|f(w_i) - f(w_j)|$ adalah berbeda untuk setiap (w_i, w_j) di G

Diketahui bahwa pada dF_n adalah: $w_0 w_i = |f(w_0) - f(w_i)|$ dan

$$w_i w_{i+1} = |f(w_i) - f(w_{i+1})|$$

1. $w_0 w_i$ akan selalu berbeda

Akan dibuktikan jika $i \neq j$ maka label $w_0 w_i$ berbeda dengan $w_0 w_j$

Label $w_0 w_i$ adalah $|f(w_0) - f(w_i)|$ dan label $w_0 w_j$ adalah $|f(w_0) - f(w_j)|$

- a) i genap dan j genap (i dan j sama-sama genap)

$$\text{Maka } |f(w_0) - f(w_i)| = \left| 0 - \left(3n - \frac{3i}{2} + 1 \right) \right| = \left| 3n - \frac{3i}{2} + 1 \right|$$

$$\text{dan } |f(w_0) - f(w_j)| = \left| 0 - \left(3n - \frac{3j}{2} + 1 \right) \right| = \left| 3n - \frac{3j}{2} + 1 \right|$$

$$\text{Karena } i \neq j \text{ maka } \left| 3n - \frac{3i}{2} + 1 \right| \neq \left| 3n - \frac{3j}{2} + 1 \right|$$

- b) i genap dan j ganjil (salah satu i atau j ganjil)

$$\text{Maka } |f(w_0) - f(w_i)| = \left| 0 - \left(3n - \frac{3i}{2} + 1 \right) \right| = \left| 3n - \frac{3i}{2} + 1 \right|$$

$$\text{dan } |f(w_0) - f(w_j)| = \left| 0 - \left(j + \frac{j-1}{2} \right) \right| = \left| j + \frac{j-1}{2} \right|$$

Diketahui

$$i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\text{Karena } 3n - \frac{3i}{2} + 1 \geq 0, \text{ maka } \left| 3n - \frac{3i}{2} + 1 \right| = 3n - \frac{3i}{2} + 1$$

$$\text{Karena } j + \frac{j-1}{2} \geq 0, \text{ maka } \left| j + \frac{j-1}{2} \right| = j + \frac{j-1}{2}$$

$$\text{Andaikan } 3n - \frac{3i}{2} + 1 = j + \frac{j-1}{2}$$

Maka

$$3n - \frac{3i}{2} + 1 = j + \frac{j-1}{2}$$

$$6n - 3i + 2 = 2j + j - 1$$

$$6n + 3 = 3i + 3j$$

$$2n + 1 = i + j$$

$$\text{Karena } 1 \leq i, j \leq n$$

Maka $i + j \leq 2n$, terjadi kontradiksi

$$\text{Jadi } \left| 3n - \frac{3i}{2} + 1 \right| \neq \left| j + \frac{j-1}{2} \right|$$

c) i ganjil dan j ganjil (i dan j sama-sama ganjil)

$$\text{Maka } |f(w_0) - f(w_i)| = \left| 0 - \left(i + \frac{i-1}{2} \right) \right| = \left| i + \frac{i-1}{2} \right|$$

$$\text{dan } |f(w_0) - f(w_j)| = \left| 0 - \left(j + \frac{j-1}{2} \right) \right| = \left| j + \frac{j-1}{2} \right|$$

$$\text{Karena } i \neq j \text{ maka } \left| i + \frac{i-1}{2} \right| \neq \left| j + \frac{j-1}{2} \right|$$

2. $w_i w_{i+1}$ akan selalu berbeda

Akan dibuktikan jika $i \neq j$ maka label $w_i w_{i+1}$ berbeda dengan $w_j w_{j+1}$

Label $w_i w_{i+1}$ adalah $|f(w_i) - f(w_{i+1})|$ dan Label $w_j w_{j+1}$ adalah $|f(w_j) - f(w_{j+1})|$

a) i genap dan j genap (i dan j sama-sama genap)

$$\begin{aligned} \text{maka } |f(w_i) - f(w_{i+1})| &= \left| \left(3n - \frac{3i}{2} + 1 \right) - \left((i+1) + \frac{(i+1)-1}{2} \right) \right| \\ &= \left| \left(\frac{6n - 3i + 2}{2} \right) - \left(\frac{2i + 2 + i + 1 - 1}{2} \right) \right| \\ &= \left| \left(\frac{6n - 3i + 2}{2} \right) - \left(\frac{3i + 2}{2} \right) \right| \\ &= \left| \frac{6n - 3i + 2 - 3i - 2}{2} \right| \\ &= \left| \frac{6n - 6i}{2} \right| \\ &= |3n - 3i| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{dan } |f(w_j) - f(w_{j+1})| &= \left| \left(3n - \frac{3j}{2} + 1 \right) - \left((j+1) + \frac{(j+1)-1}{2} \right) \right| \\ &= \left| \left(\frac{6n - 3j + 2}{2} \right) - \left(\frac{2j + 2 + j + 1 - 1}{2} \right) \right| \end{aligned}$$

$$= \left| \left(\frac{6n-3j+2}{2} \right) - \left(\frac{3j+2}{2} \right) \right|$$

$$= \left| \frac{6n-3j+2-3j-2}{2} \right|$$

$$= \left| \frac{6n-6j}{2} \right|$$

$$= |3n-3j|$$

karena $i \neq j$ maka $|3n-3i| \neq |3n-3j|$

b) i genap dan j ganjil (salah satu i atau j ganjil)

$$\text{maka } |f(w_i) - f(w_{i+1})| = \left| \left(3n - \frac{3i}{2} + 1 \right) - \left((i+1) + \frac{(i+1)-1}{2} \right) \right|$$

$$= \left| \left(\frac{6n-3i+2}{2} \right) - \left(\frac{2i+2+i+1-1}{2} \right) \right|$$

$$= \left| \left(\frac{6n-3i+2}{2} \right) - \left(\frac{3i+2}{2} \right) \right|$$

$$= \left| \frac{6n-3i+2-3i-2}{2} \right|$$

$$= \left| \frac{6n-6i}{2} \right|$$

$$= |3n-3i|$$

$$\text{dan } |f(w_j) - f(w_{j+1})| = \left| \left(j + \frac{j-1}{2} \right) - \left(3n - \frac{3(j+1)}{2} + 1 \right) \right|$$

$$= \left| \left(\frac{2j+j-1}{2} \right) - \left(3n - \frac{3j+3}{2} + 1 \right) \right|$$

$$= \left| \left(\frac{3j-1}{2} \right) - \left(\frac{6n-3j+5}{2} \right) \right|$$

$$= \left| \frac{3j-1-6n+3j-5}{2} \right|$$

$$= \left| \frac{6j-6n-6}{2} \right|$$

$$= |3j-3n-3|$$

Diketahui

$$i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, n$$

Karena $3n-3i \geq 0$, maka $|3n-3i| = 3n-3i$

Karena $|3j-3n-3|$, maka $|3j-3n-3| = 3j-3n-3$

$$\text{Andaikan } 3n-3i = 3j-3n-3$$

Maka

$$3n-3i = 3j-3n-3$$

$$3n-3n+3 = 3j-3i$$

$$6n+3 = 3j+3i$$

$$2n+1 = j+i$$

Karena $1 \leq i, j \leq n$

Maka $i + j \leq 2n$, terjadi kontradiksi

Jadi $|3n-3i| \neq |3j-3n-3|$

c) i ganjil dan j ganjil (i dan j sama-sama ganjil)

$$\begin{aligned}
\text{maka } |f(w_i) - f(w_{i+1})| &= \left| \left(i + \frac{i-1}{2} \right) - \left(3n - \frac{3(i+1)}{2} + 1 \right) \right| \\
&= \left| \left(\frac{2i+i-1}{2} \right) - \left(\frac{6n-(3i+1)+2}{2} \right) \right| \\
&= \left| \left(\frac{3i-1}{2} \right) - \left(\frac{6n-3i+5}{2} \right) \right| \\
&= \left| \frac{3i-1-6n+3i-5}{2} \right| \\
&= \left| \frac{6i-6n-6}{2} \right| \\
&= |3i-3n-3| \\
|f(w_j) - f(w_{j+1})| &= \left| \left(j + \frac{j-1}{2} \right) - \left(3n - \frac{3(j+1)}{2} + 1 \right) \right| \\
&= \left| \left(\frac{2j+j-1}{2} \right) - \left(3n - \frac{3j+3}{2} + 1 \right) \right| \\
&= \left| \left(\frac{3j-1}{2} \right) - \left(\frac{6n-3j+5}{2} \right) \right| \\
&= \left| \frac{3j-1-6n+3j-5}{2} \right| \\
&= \left| \frac{6j-6n-6}{2} \right| \\
&= |3j-3n-3|
\end{aligned}$$

karena $i \neq j$ maka $|3i-3n-3| \neq |3j-3n-3|$

Dari uraian di atas $|f(w_i) - f(w_j)|$ akan berbeda sesuai nilai i

Jadi, $|f(w_i) - f(w_j)|$ adalah berbeda, $\forall (w_i, w_j)$ di G

Dengan demikian, terbukti bahwa graf kipas ganda dF_n adalah graceful untuk setiap n bilangan asli dan $n \geq 2$.

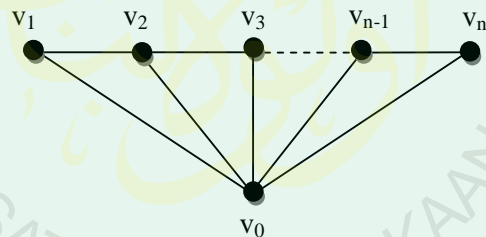
BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan, maka dapat disimpulkan bahwa graf Kipas F_n dan graf Kipas Ganda dF_n adalah graf graceful untuk setiap n bilangan asli dan $n \geq 2$. Pelabelan graceful pada graf Kipas F_n dan graf Kipas Ganda dF_n , untuk n bilangan asli dan $n \geq 2$ adalah sebagai berikut:

1. Misal graf kipas F_n dengan n bilangan asli dan $n \geq 2$ digambarkan sebagai berikut:

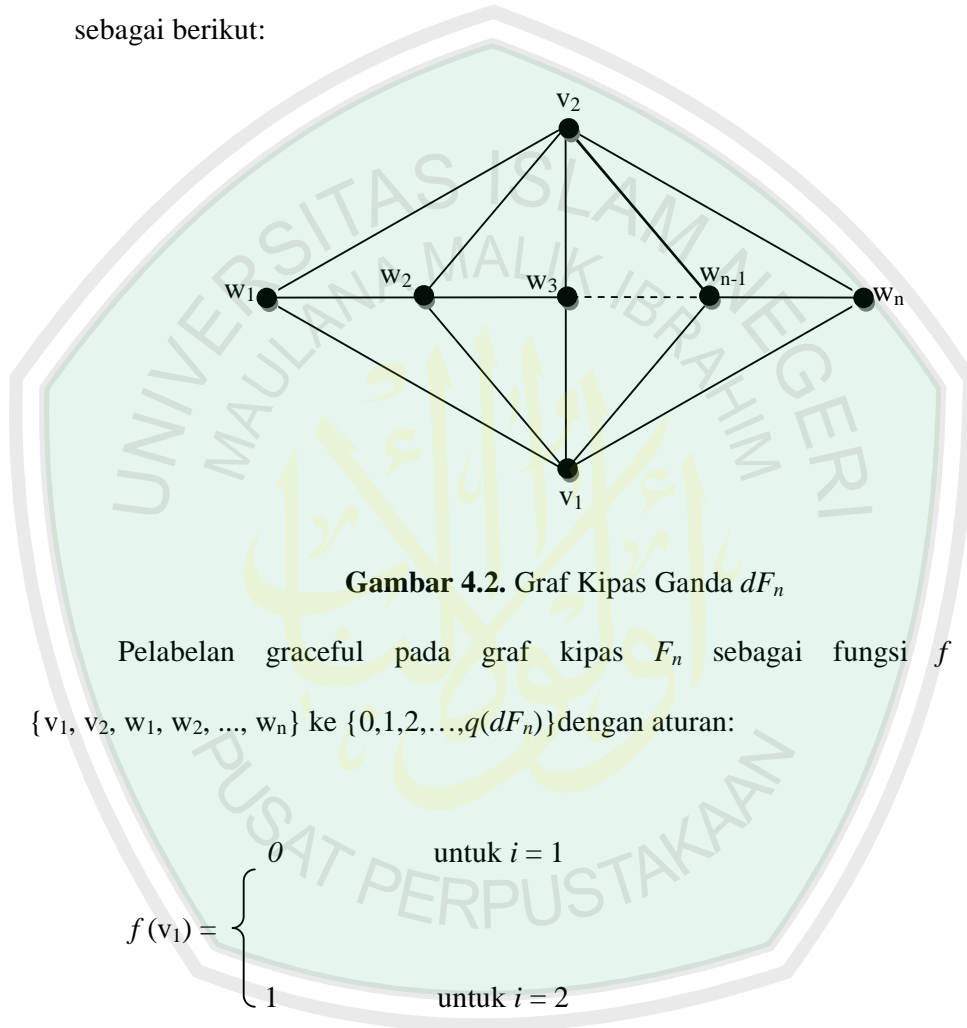


Gambar 4.1. Graf Kipas F_n

Pelabelan graceful pada graf kipas F_n sebagai fungsi f dari $\{v_0, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ke $\{0, 1, 2, \dots, q(F_n)\}$ dengan aturan:

$$f(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } i = 0 \\ i & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ 2n - i + 1 & \text{untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

2. Misal graf kipas ganda dF_n dengan n bilangan asli dan $n \geq 2$ digambarkan sebagai berikut:



$$f(w_i) = \begin{cases} 3n - i & \text{untuk } i = 1, 2 \\ i + \frac{i-1}{2} & \text{untuk } i \text{ ganjil dan } i \geq 3 \\ 3n - \frac{3i}{2} + 1 & \text{untuk } i \text{ genap dan } i \geq 4 \end{cases}$$

4.2 Saran

Pembahasan mengenai pelabelan graceful ini masih terbuka bagi peneliti lain untuk melanjutkan penelitian ini pada aplikasinya dan bisa juga mengadakan penelitian yang sejenis dengan jenis-jenis graph yang berbeda, misalnya graf pohon, graf sikel, dan lain sebagainya.



DAFTAR PUSTAKA

- Abdusysyahir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.
- Chartrand, G. dan Lesniak, L. 1986. *Graph and Digraph 2nd Edition*. California: Wadsworth. Inc.
- Departemen Agama RI. 1988. *Ensiklopedia Islam di Indonesia*. Jakarta: Direktorat Jendral Pembinaan Kelembagaan Agama Islam.
- Fuad Pasya, Ahmad. 2004. *Dimensi Sains Al-Qur'an Menggali Ilmu Pengetahuan Dari Al-Qur'an*. Solo: Tiga Serangkai.
- Gafur, Abdul. 2008. *Eksentrik Digraf dari Graf Star, Graf Double Star, Graf Komplit Bipartit dan Pelabelan Konsektif pada Graf Sikel dan Graf Bipartit Komplit*. (Online): ([http://www. Combinatoric. Com](http://www.Combinatoric.Com). Diakses tanggal 15 Juli 2008).
- Gallian, Joseph. A. 2007. *A Dynamic Survey of Graph Labeling*. (Online): ([http://www. Combinatorics. Com](http://www.Combinatorics.Com). Diakses Tanggal 7 Maret 2008).
- Kamil Abdhushshamad, Muhammad. 2003. *Mukjizat Ilmiah dalam Al-Qur'an*. Jakarta: Akbar media eka sarana.
- Mulyono, Agus dan Abtokhi, Ahmad. 2006. *Fisika dan Al-Qur'an*. Malang: UIN Press.
2008. *Pelabelan Graceful (Graceful Labeling) pada Graf Superstar $S_{5,n}$* . UIN Malang: Skripsi tidak diterbitkan.
- Rahman, Afzalur. 1992. *Al-Qur'an Sumber Ilmu Pengetahuan*. Jakarta: Rineka Cipta.
- Shiu, W. C dkk. 2000. *Super-Edge-Graceful Labelings of Multi-Level Wheel Graphs Fan Graphs and Actinia Graph*. (Online): ([http://www. Combinatorics. Com](http://www.Combinatorics.Com). Diakses tanggal 15 Juli 2008).
- Wilson. Robin J dan Walkins, John J. 1990. *Graphs An Introductory Approach: A first Course in Discrete Mathematic*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Quraish Shihab, M. 2000. *Tafsir Al-Misbah Pesan, Kesan & Keserasian Al-Qur'an vol. I*. Ciputat: Lentera Hati.
- Quraish Shihab, M. 2003. *Tafsir Al-Misbah Pesan, Kesan & Keserasian Al-Qur'an vol. II*. Ciputat: Lentera Hati.



DEPARTEMEN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345
Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Lutvi Mahfudiyah
Nim : 04510023
Fakultas/ jurusan : Sains Dan Teknologi/ Matematika
Judul skripsi : PELABELAN GRACEFUL PADA GRAF KIPAS F_n
DAN GRAF KIPAS GANDA dF_n , n BILANGAN
ASLI DAN $n \geq 2$
Pembimbing : Abdussakir, M.Pd
Abdul Aziz, M. Si

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan
1	21 Februari 2008	Proposal	1.
2	5 Maret 2008	ACC Proposal	2.
3	12 Maret 2008	Konsultasi BAB III	3.
4	19 Maret 2008	Revisi BAB III	4.
5	9 April 2008	Revisi BAB III	5.
6	25 Juni 2008	ACC BAB III	6.
7	4 Juli 2008	Konsultasi BAB I dan II	7.
8	9 Juli 2008	Revisi BAB I dan II	8.
9	21 Juli 2008	Revisi BAB I dan II	9.
10	24 Juli 2008	ACC BAB I dan II	10.
11	25 Juli 2008	Konsultasi Keseluruhan	11.
12	26 Juli 2008	ACC Keseluruhan	12.

Malang, 28 Juli 2008
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321