ANALISIS PERSAMAAN DIFERENSIAL MODEL POPULASI KONTINU UNTUK SPESIES TUNGGAL

SKRIPSI

Oleh:

ARINA FIRDAUSIL JANNAH
NIM: 03510019

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2008

ANALISIS PERSAMAAN DIFERENSIAL MODEL POPULASI KONTINU UNTUK SPESIES TUNGGAL

SKRIPSI

Diajukan Kepada :

Universitas Islam Negeri Malang

Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam

Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S. Si)

Oleh :

ARINA FIRDAUSIL JANNAH

NIM : 03510019

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM PUSAT PERPUSTAKAAN

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG

2008

ANALISIS PERSAMAAN DIFERENSIAL MODEL POPULASI KONTINU UNTUK SPESIES TUNGGAL

SKRIPSI

Oleh :

ARINA FIRDAUSIL JANNAH

NIM: 03510019

Telah Disetujui oleh:

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Drs. Usman Pagalay, M. Si	Ach. Nasichuddin, M.A
NIP. 150327240	NIP. 150 302 531

Tanggal 19 Maret 2008

Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150318321

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM PUSAT PERPUSTAKAAN

ANALISIS PERSAMAAN DIFERENSIAL MODEL POPULASI KONTINU UNTUK SPESIES TUNGGAL

SKRIPSI

Oleh :

ARINA FIRDAUSIL JANNAH

NIM: 03510019

Telah Dipertahankan Di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal, 10 April 2008

SUSUNAN DEWAN PENGUJI		TANDA TANGAN
1. Penguji Utama	**: Abdussakir, M. Pd**	**( )**
2. Ketua Penguji	**: Evawati Alisah, M. Pd**	**( )**
3. Sekretaris Penguji	**: Drs. Usman Pagalay, M. Si**	**( )**
4. Anggota Penguji	**: Ach. Nashichuddin, M. A**	**( )**

Mengetahui dan Mengesahkan
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321

LEMBAR PERSEMBAHAN

"Demi masa sesungguhnya manusia itu
benar-benar dalam kerugian,
kecuali orang-orang yang beriman dan mengerjakan
amal saleh
dan nasehat menasehati supaya menta'ati kebenaran
dan nasehat menasehati supaya selalu sabar"
(QS. Al-'Ashr : ayat 1-3)

Manusia itu lemah, butuh dan fakir
di hadapan Allah Ta'ala.
Maka angkatlah dan tengadahkan
tanganmu,
tunduklah, mintalah kepada-Nya
ampunan, perlindungan
dan taufik di dunia dan di akhirat,
ambillah kebaikan darinya

Ya Robb, ajarilah hamba untuk menjadi hamba-Mu yang ikhlas, sabar, dan selalu bersyukur atas segala ketentuan-Mu.....

Kupersembahkan
Karya sederhanaku ini
Kepada Abah Mudjib dan Mami Masruhin tercinta
Mbak Dewi, Mas Budi, Mbak Atik, Mas Aviv,
Dek Elyva, Dek Ade, Dek Echa, dan Dek Achy
Spesial Untuk **M. Anang Naharu (Mas A'ANG)**
Dukunganmu sangat berarti n' Semoga Cinta Kita Abadi Selamanya. Amiiiin.....!!
Deny dan anis jadikanlah hari-hari bersama kita sebagai kenangan yang takkan pernah terlupakan.

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
PUSAT PERPUSTAKAAN

MOTTO

تُخْرِجُ ٱلْحَىَّ مِنَ ٱلْمَيِّتِ وَتُخْرِجُ ٱلْمَيِّتَ مِنَ ٱلْحَىِّ وَيُحْيِ ٱلْأَرْضَ

بَعْدَ مَوْتِهَا ۚ وَكَذَٰلِكَ تُخْرَجُونَ ١٩

Dia mengeluarkan yang hidup dari yang mati dan mengeluarkan yang mati dari yang hidup dan menghidupkan bumi sesudah matinya. dan seperti Itulah kamu akan dikeluarkan (dari kubur) (Q.S. Ar-Rum: 19)

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM PUSAT PERPUSTAKAAN

SURAT PERNYATAAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Arina Firdausil Jannah

NIM : 03510019

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Analisis persamaan diferensial model populasi kontinu untuk spesies tunggal

Menyatakan bahwa skripsi tersebut adalah karya saya sendiri dan bukan karya orang lain, baik sebagian maupun keselurahan, kecuali dalam bentuk kutipan yang telah disebutkankan sumbernya.

Selanjutnya apabila dikemudian hari ada "klaim" dari pihak lain, bukan menjadi tanggung jawab Dosen Pembimbing dan/atau Pengelola Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang, tetapi menjadi tanggung jawab saya sendiri

Demikian surat pernyataan ini saya buat dengan sebenar-benarnya dan apabila pernyataan ini tidak benar, saya bersedia mendapat sanksi akademis.

Malang, 16 April 2008

Yang menyatakan,

Arina Firdausil Jannah

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM PUSAT PERPUSTAKAAN

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Alhamdulillah segala puja dan puji syukur segalanya penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT, karena limpahan rahmat, hidayah serta inayah-Nya, sehingga penulis bisa menyelesaikan skripsi ini dengan judul analisis persamaan diferensial model populasi kontinu untuk spesies tunggal. Shalawat serta salam senantiasa penulis panjatkan kepada Nabi Besar Muhammad SAW, yang telah membimbing manusia ke jalan yang benar, yaitu jalan yang di Ridhai Allah SWT.

Karya ini sulit untuk dapat terwujud manakala penulis tidak mendapat bantuan dari berbagai pihak, baik berupa saran maupun peminjaman buku, lebih-lebih bantuan yang bersifat moral. Karena itulah sepatutnya diucapkan terima kasih yang tak terhingga, terutama penulis tujukan kepada yang terhormat :

1. Prof DR. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang. Sumintro, SU. DSc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Malang.
3. Sri Harini, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Malang.
4. Drs. Usman Pagalay, M.Si selaku Dosen Pembimbing yang telah memberikan bimbingan kepada penulis hingga terselesaikannya skripsi ini.

5. Ach. Nashichuddin, M.A selaku Dosen Pembimbing Integrasi Sains dan Islam yang telah memberikan bimbingan kepada penulis hingga terselesaikannya skripsi ini.
6. Bapak/Ibu Dosen Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Malang beserta stafnya atas ilmu dan pengalaman yang diberikan.
7. Ayahanda Achmad Mudjib dan ibunda Masrukhin tercinta yang tiada lelah memberikan do'a dan kasih sayang serta kepercayaan.
8. Kakak-kakak tersayang mbak dewi, mbak atik, mas budi, mas aviv yang selalu memberikan semangat, doa dan kasih sayang.
9. Buat tante Mutia Lina Dewi dan om Mujiyanto terima kasih atas motivasi-motivasi yang telah diberikan dan selalu mendengarkan keluh kesah penulis.
10. Buat seseorang yang jauh di sana (Kakanda M. Anang Naharu) yang selalu memberi support penulis dan menemani penulis sampai terselesainya skripsi ini.
11. Teman-teman Matematika angkatan 2003 yang selalu memberi semangat dan siap memberi bantuan
12. Teman-teman kost Sumbersari IA/ 78 mbak Dhona, mbak Lilis, Fitri, Lym, Iik, Yuli, Lis, Susan, khususnya Deny dan Anis yang telah memberikan semangat, dorongan dan do'a serta selalu menemani dalam suka dan duka.
13. Semua pihak yang telah membantu dalam penulisan skripsi ini yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM PUSAT PERPUSTAKAAN

Demikianlah apa yang dapat saya sampaikan dalam tulisan ini, semoga apa yang saya hasilkan ini dapat bermanfaat bagi semua pihak, terutama bagi pihak-pihak yang terkait dengan skripsi ini.

Penulis menyadari masih banyak kekurangan dan keterbatasan dalam skripsi ini, oleh karena itu, penulis mengharapkan saran dan kritik yang membangun untuk menyempurnakan tulisan ini.

Malang, April 2008

Penulis

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM PUSAT PERPUSTAKAAN

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL
HALAMAN PENGAJUAN i
HALAMAN PERSETUJUAN ii
HALAMAN PENGESAHAN iii
HALAMAN PERSEMBAHAN iv
MOTTO v
SURAT PERNYATAAN vi
KATA PENGANTAR vii
DAFTAR ISI x
DAFTAR TABEL xii
DAFTAR GAMBAR xiii
DAFTAR LAMPIRAN xiv
ABSTRAK xv

BAB I : PENDAHULUAN
1.1. Latar Belakang Masalah..... 1
1.2. Rumusan Masalah 3
1.3. Tujuan Penulisan 3
1.4. Batasan Masalah 4
1.5. Manfaat Pembahasan 4
1.6. Metode Penelitian 4
1.7. Sistematika Penulisan 5
BAB II : KAJIAN PUSTAKA
2.1. Turunan 6
2.2. Persamaan Diferensial dan Solusi 7
2.3. Kondisi Awal dan Kesetimbangan 9
2.4. Fungsi Kontinu 9
2.5. Populasi dan Atribut-Atributnya 11

2.6. Hukum dan Fakta-fakta Eksperimental 12
2.7. Analisis Kestabilen Linier 13
2.8. Efek Histeresis 15
2.9. Siklus Kehidupan dan Kematian 15
BAB III: PEMBAHASAN
3.1. Model Populasi Eksponensial 19
3.2. Model Populasi Logistik 25
3.3. Model Populasi Spruce Budworm 33
3.4. Model Populasi Delay 41
3.5. Siklus Kehidupan dan Kematian dalam Islam dan Matematika 47
BAB IV: PENUTUP
4.1. Kesimpulan 50
4.2. Saran 51
DAFTAR PUSTAKA
LAMPIRAN
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM PUSAT PERPUSTAKAAN

DAFTAR TABEL

3.1 Tabel Populasi Dunia 24

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM
PUSAT PERPUSTAKAAN

DAFTAR GAMBAR

2.1 Gambar Kestabilan Solusi-solusi Setimbang 14

2.2 Gambar Titik-titik Kesetimbangan 14

3.1 Grafik Solusi $\frac{dN}{dt} = 0$ 21

3.2 Grafik Solusi $\frac{dN}{dt} kN(t) > 0$ 22

3.3 Grafik Solusi $\frac{dN}{dt} kN(t) < 0$ 23

3.4 Grafik Arah Kurva Solusi $\frac{dN}{dt} kN(t) > 0$ dan $\frac{dN}{dt} kN(t) < 0$ 24

3.5 Gambar Populasi Dunia 24

3.6 Grafik Model Populasi Logistik dengan Kuantitas Sumberdaya K=2 28

3.7 Rangkuman Arah Kurva Model Logistik dan Kelengkungannya 31

3.8 Fit Data Populasi di Amerika Serikat 32

3.9 Fit Data Populasi di Prancis 33

3.10 Grafik Solusi Model Populasi *Spruce Budworm* 35

3.11 Perpotongan Dua Kurva pada Persamaan $R\left[1-\frac{u}{q}\right]=\left[\frac{u}{1+u^2}\right]$ 37

3.12 Grafik Nilai R berubah-ubah dan q tetap 38

3.13 Grafik Solusi Setimbang pada Model $\frac{du}{dt}=0.4u-\frac{1}{30}u^2-\frac{u^2}{1+u^2}$ 40

3.14 Gambar Grafik $F(u) = 0.4u - \frac{1}{30}u^2 - \frac{u^2}{1+u^2}$ 40

3.15 Analisis Solusi pada Model Delay 43

3.16 Grafik Pertumbuhan Model Delay 46

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Maple Worksheet untuk Populasi Eksponensial 53
Lampiran 2. Maple Worksheet untuk Populasi Logistik 56
Lampiran 3. Maple Worksheet untuk popuLasi *Spruce Budworm* 58
Lampiran 4. Matlab Grafik Pertumbuhan Model Delay 64

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM
PUSAT PERPUSTAKAAN

ABSTRAK

Jannah, Arina Firdausil. 2008. **Analisis Persamaan Diferensial Model Populasi Kontinu untuk Speies Tunggal.**
Pembimbing: (I) Usman Pagalay, M.Si (II) Ach. Nashichuddin, M.A.

Kata Kunci: Model populasi kontinu, persamaan diferensial, spesies tunggal.

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang mengandung fungsi dan turunan. Pada matematika terdapat suatu kajian tentang pemodelan matematika Salah satu fenomena yang dapat dimodelkan ke dalam bentuk matematika adalah populasi spesies tunggal yang kontinu. Maka pembahasan dilakukan dengan tujuan (1) untuk memperoleh hasil analisis model populasi kontinu untuk spesies tunggal dengan menggunakan persamaan diferensial, (2) untuk mengetahui penyelesaian model populasi kontinu untuk spesies tunggal dengan menggunakan persamaan diferensial setelah dianalisis.

Penurunan model dari keadaan nyata menjadi model matematika dilakukan terhadap populasi suatu spesies tunggal. Suatu analisis kualitatif kemudian digunakan untuk meneliti model populasi kontinu: eksponensial, logistik, *Spruce budworm*, dan *Delay*. Dengan menganalisa kestabilan linear model, dapat diketahui perilaku solusi atau kestabilan solusi setimbangnya. Hasil yang didapat dari analisis model populasi kontinu yaitu untuk mengendalikan populasi agar tetap setimbang dan untuk mendukung analisis dibuat interpretasi grafik visualnya. Dari pembahasan ini dapat ditarik kesimpulan bahwa masing-masing model memiliki perilaku solusi yang unik antara lain, bifurkasi dan periodik. Efek-efek alami seperti kematian dan kelahiran, persaingan dan predasi, serta keberadaan sumberdaya juga berpengaruh terhadap dinamika populasi. Untuk mengembangkan model populasi kontinu untuk spesies tunggal, maka penulis menyarankan agar dilakukan analisis lanjut terhadap model populasi kontinu dan faktor-faktor yang lain.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Persamaan matematika merupakan salah satu bentuk relasi dari matematika. Setiap persamaan matematika perlu dianalisis supaya dapat diketahui kegunaannya dalam kehidupan praktis, khususnya bidang sains dan teknologi. Hal ini dilakukan karena fungsi utama persamaan matematika ialah sebagai model dari problematika kehidupan sehari-hari. ***Model*** merupakan versi sederhana dari dunia nyata (Odum, 1975:8). Walaupun tidak semua masalah dapat dimodelkan secara matematis, tetapi persamaan matematika lebih mudah untuk dipelajari.

Salah satu bentuk persamaan ialah persamaan diferensial. Persamaan diferensial adalah suatu relasi yang menyangkut satu atau lebih turunan dari sebuah fungsi yang tak diketahui dan mungkin fungsi itu sendiri (Davis, 1992:6). Pada umumnya, yang ingin diketahui dari suatu persamaan diferensial adalah selesaian, nilai minimum dan maksimum, nilai akar, atau perilaku fungsi persamaan tersebut. Banyak cara yang bisa dilakukan untuk dapat menganalisis persamaan diferensial, misalnya dengan analisis kualitatif, pendekatan metode numerik, atau dengan bantuan komputer.

Persamaan diferensial dapat diperoleh dari pemodelan permasalahan yang ada di lingkungan sehari-hari, namun dalam memodelkan suatu permasalahan tersebut, harus memperhatikan suatu hukum tertentu dan fakta yang ada. Pemodelan permasalahan tersebut biasa dikenal dengan pemodelan matematika.

Persamaan diferensial sangat penting dalam pemodelan matematika, karena banyak hubungan fisis secara matematis yang muncul dalam bentuk persamaan ini.

Salah satu aplikasi pemodelan matematika ialah untuk memodelkan populasi biologi, baik yang berhubungan dengan populasi manusia, spesies berbahaya semacam bakteri dan virus ataupun yang lain. Sejak jaman dahulu para ahli mempelajari permasalahan populasi, khususnya manusia, hewan, dan tumbuhan. Terdapat beberapa macam model populasi spesies tunggal yang kontinu. Kontinu dalam hal ini berarti populasi bergantung waktu tanpa putus. Dari waktu ke waktu bentuk tiap model dimodifikasi sehingga dapat menggambarkan dengan lebih teliti keadaan sebenarnya. Bentuk yang konservatif yaitu,

$$\frac{dN}{dt} = Kelahiran - Kematian + Migrasi \ ,$$

Dengan N(t) menyatakan populasi suatu spesies pada saat t. Bentuk-bentuk lain tergantung situasi apa yang akan dianalisis. Dengan adanya model-model populasi ini, memudahkan para ahli untuk dapat memproyeksikan populasi satu spesies pada suatu waktu tertentu, atau menekan laju populasi agar tetap seimbang.

Sebagaimana telah dijelaskan di atas yang menyatakan populasi secara matematika yaitu dalam kehidupan itu ada kelahiran dan ada juga kematian serta ada pula migrasi, karena Allah S.W.T mengeluarkan yang hidup dari yang mati dan mengeluarkan yang mati dari yang hidup. Sebagaimana telah disebutkan dalam ayat Al-Qur’an surat *Ar-Rum 19-20* sebagai berikut:

تُخْرِجُ ٱلْحَىَّ مِنَ ٱلْمَيِّتِ وَتُخْرِجُ ٱلْمَيِّتَ مِنَ ٱلْحَىِّ وَيُحْيِ ٱلْأَرْضَ بَعْدَ مَوْتِهَا ۚ وَكَذَٰلِكَ تُخْرَجُونَ ﴿١٩﴾

Artinya:

Dia mengeluarkan yang hidup dari yang mati dan mengeluarkan yang mati dari yang hidup dan menghidupkan bumi sesudah matinya. dan seperti Itulah kamu akan dikeluarkan (dari kubur).

وَمِنْ ءَايَٰتِهِۦٓ أَنْ خَلَقَكُم مِّن تُرَابٍ ثُمَّ إِذَآ أَنتُم بَشَرٌ تَنتَشِرُونَ ﴿٢٠﴾

Artinya:

Dan di antara tanda-tanda kekuasaan-Nya ialah dia menciptakan kamu dari tanah, Kemudian tiba-tiba kamu (menjadi) manusia yang berkembang biak.

Berdasarkan latar belakang di atas, terlihat pentingnya suatu analisis persamaan differensial model populasi kontinu spesies tunggal. Oleh karena itu, analisis matematis tersebut akan dibahas sebagai tugas akhir dengan judul, **"Analisis Persamaan Diferensial Model Populasi Kontinu Untuk Spesies Tunggal".**

1.2. Rumusan Masalah

Dari latar belakang di atas maka permasalahan dirumuskan sebagai berikut yaitu Bagaimana penyelesaian model populasi kontinu untuk spesies tunggal menggunakan persamaan diferensial setelah di analisis.

1.3. Tujuan Penulisan

Tujuan yang dapat diambil dari rumusan masalah diatas, yaitu untuk mengetahui penyelesaian model populasi kontinu untuk spesies tunggal menggunakan persamaan diferensial setelah dianalisis.

1.4. Batasan Masalah

Penulisan tugas akhir ini memilki batasan sebagai berikut:

1. Di dalam penulisan ini penulis hanya memakai satu spesies karena penulis menggunakan penelitian spesies tunggal.
2. Software yang digunakan untuk menampilkan grafik dan perhitungan numerik hanya maple 8 dan matlab.

1.5. Manfaat Pembahasan

1. Bagi Penulis

   Merupakan sarana untuk mengaplikasikan dan mengembangkan disiplin keilmuan yang selama ini menjadi minat yang dipelajari.
2. Bagi Pembaca

   Sebagai wacana dan pengetahuan tentang persamaan diferensial model populasi kontinu untuk spesies tunggal.

1.6. Metode Penelitian

Dalam bahasa Yunani kata metode tertulis "*method*" yang berarti cara atau jalan. Dalam hal ini penulis menggunakan metode penelitian kepustakaan atau studi kepustakaan. Penelitian kepustakaan yaitu penelitian yang dalam menunjukkan penelitiannya dilakukan dengan cara mendalami, mencermati, menelaah dan mengidentifikasi pengetahuan yang ada dalam kepustakaan (sumber bacaan, buku-buku referensi atau hasil penelitian lain). (Iqbal Hasan, 2002:45)

Dari penjelasan diatas, dapat dirumuskan bahwa dalam penelitian ini memaparkan perilaku model populasi berbentuk PD yang terdapat dalam

kehidupan sehari-hari. Dalam banyak literatur ataupun jurnal mengenai model populasi ini. Seringkali penulisnya memberikan pemaparan yang tak disertai dengan analisis yang lengkap, sehingga masih belum bisa dimengerti oleh pembaca secara langsung.

Informasi untuk penelitian ini dikumpulkan dari buku-buku acuan mengenai matematika biologi, jurnal – jurnal dan artikel di internet mengenai model matematika tentang populasi. Buku acuan utama yang digunakan adalah Mathematical Biology oleh Murray (2002) dan Differential Equation for Mathematic, Science and Engineering oleh Davis (1992).

1.7. Sistematika Pembahasan

Untuk memudahkan pembahasan dalam skripsi ini, penulis membagi ke dalam empat bab, yaitu:

BAB I : Bab I membahas latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, dan sistematika pembahasan.

BAB II: Bab II membahas beberapa teori pendukung yaitu turunan, persamaan diferensial dan solusi, kondisi awal dan kesetimbangan, fumgsi kontinu, populasi dan atribut-atributnya, hukum dan fakta-fakta eksperimental, analisis kestabilan linier, efek histeresis dan contoh-contonya.

BAB III: Bab III membahas tentang model populasi *Eksponensial*, model populasi *Logistik*, model populasi *Spruce Budworm*, model populasi *Delay* beserta interpretasinya.

BAB IV: Bab IV (Penutup) membahas kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1. Turunan

Turunan atau diferensial sering dikenal di dalam matematika dengan sebutan kemiringan atau garis singgung (*slope*) dan kecepatan sesaat. Sebutan lainnya yaitu laju pertumbuhan (biologi), keuntungan marginal (ekonomi), kepadatan kawat (fisika), laju pemisahan (kimia), dan lain-lain. Jadi turunan merupakan studi mengenai perubahan yang terjadi dalam satu kuantitas saat kuantitas lain yang bergantung padanya berubah. Beberapa contoh turunan antara lain:

(1) Perubahan tekanan darah pada pasien terjadi akibat penambahan beberapa miligram obat tertentu;

(2) Perubahan pada hasil panen yang terjadi akibat penambahan pupuk;

(3) Perubahan pertumbuhan kultur bakteri setiap bertambahnya waktu. (Purcell dan Varberg, 1984: 114)

Definisi 2.1.1

Misal *f* suatu fungsi. Turunan dari *f* adalah suatu fungsi yang lain *f*' (dibaca "*f* aksen") yang nilainya pada sebarang bilangan *c* adalah,

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

asal limit tersebut ada. (Purcell dan Varberg, 1984: 115).

Cara penulisan (notasi untuk turunan dari $y = f(x)$

Turunan	Notasi f'	Notasi y'	Notasi D	Notasi Leibniz
Pertama	$f'(x)$	y'	$D_x y$	$\frac{dy}{dx}$
Kedua	$f''(x)$	y''	$D^2_x y$	$\frac{d^2y}{dx^2}$
Ketiga .	$f'''(x)$	y'''	$D^3_x y$	$\frac{d^3y}{dx^3}$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
Ke-n	$f^{(n)}(x)$	$y^{(n)}$	$D^n_x y$	$\frac{d^n y}{dx^n}$

(Purcell dan Varberg, 1984:151)

Contoh 2.1.1.1:

Misalkan $f(x) = 13x - 6$. cari $f'(4)$

Penyelesaian:

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[13(4+h) - 6] - [13(4) - 6]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{13h}{h} = \lim_{h \to 0} 13 = 13$$

2.2 Persamaan Diferensial dan Solusi

Persamaan diferensial adalah suatu relasi yang menyangkut satu atau lebih turunan dari sebuah fungsi yang tak diketahui. Turunan tertinggi yang terjadi pada persamaan diferensial disebut *order* (Davis, 1992:6).

Contohnya:

(1) $\frac{dv}{dt} - 2v = 3v^2$,

(2) $\frac{d^2y}{dx^2} = c^2 y + 2x$,

(3) $\phi_{xx} + \phi_{yy} - \phi_x = \ell^y + y\cos(x)$

Keterangan:

$\frac{dv}{dt}$: Turunan pertama terhadap t

$\frac{d^2y}{dx^2}$: Turunan kedua terhadap x

Persamaan diferensial pada (1) disebut persamaan diferensial biasa berorder satu, karena terdapat fungsi yang tak diketahui $v(t)$ bergantung pada hanya satu peubah bebas t dan memiliki turunan tertinggi satu. Begitu juga dengan (2), merupakan persamaan diferensial biasa berorder dua, karena terdapat fungsi yang tak diketahui $y(x)$ bergantung pada satu peubah bebas x dan memiliki turunan tertinggi dua. Pada (3) fungsi yang tak diketahui $\phi(x,y)$ bergantung lebih dari satu peubah bebas yaitu x dan y. oleh karena itu persamaan yang demikian disebut persamaan diferensial parsial.

Solusi dari suatu persamaan diferensial ialah fungsi yang dapat diturunkan sedemikian sehingga jika disubtitusikan dalam fungsi yang tak diketahui dalam persamaan diferensial tersebut, menghasilkan suatu identitas (Davis, 1992:7).

2.3 Kondisi Awal dan Kesetimbangan

Solusi umum dari persamaan diferensial berorder *n* memiliki konstanta sebarang sebanyak *n*, seperti pada definisi sebelumnya. Agar persamaan diferensial tersebut memiliki karakteristik maka konstanta tersebut harus tetap agar terdapat solusi tunggal dengan cara menentukan syarat bantu kondisi awal (*initial conditions*). Kondisi awal biasanya merupakan posisi waktu awal saat t = 0. Dengan kondisi awal tersebut akan terdapat *masalah nilai awal*.

Definsisi 2.3.1

Suatu persamaan diferensial order *n* yang memiliki *n* syarat bantu untuk waktu awal yang sama dari variabel bebasnya dinamakan *masalah nilai awal*. (Rahardi dkk, 2003:10).

Keadaan setimbang atau *ekuilibrium* dari suatu persamaan diferensial adalah sebarang selesaian konstan persamaan tersebut. Titik yang menyebabkan konstan disebut *titik kesetimbangan*. Keadaan setimbang tersebut dikatakan *stabil* jika seluruh solusi yang dekat dengan titik kesetimbangan menuju titik itu.

2.4 Fungsi Kontinu

Definisi 2.4.1

Suatu fungsi $f(x)$ dikatakan kontinu pada suatu titik $x = c$ jika syarat-syarat berikut terpenuhi:

1. $f(x)$ terdefinisi pada $x = c$; yaitu, $f(x)$ ada,
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ ada,
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Jika salah satu dari syarat di atas tidak terpenuhi maka fungsi tersebut dikatakan *tidak kontinu* pada $x = c$ (Arya dan Lardner, 1979:83).

Contoh 2.4.1.1:

Diketahui $f(x) = \begin{cases} 1 \; untuk \;\; x \geq 0 \\ -1 \; untuk \;\; x < 0 \end{cases}$

Selidiki kontinuitas *f(x)* di $x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1 \; (terdefinisi) \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(0) = 1 \; (ada) \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0^+} = f(x) = f(0)$$

Jadi *f(x)* kontinu di sebelah kanan pada $x = 0$

Tetapi $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1 \neq f(0)$.

Jadi diskontinu di sebelah kiri pada $x = 0$. Berarti *f(x)* diskontinu pada $x = 0$.

Teorema 2.4.2

Misalkan *f* kontinu pada suatu selang *I* dan dapat didiferensialkan pada setiap titik dalam *I*;

(i) Jika *f'*(*x*) > 0 untuk setiap *x* titik dalam *I*, jika untuk setiap pasang bilangan x_1 dan x_2 dalam *I* $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ maka *f* naik pada *I*.

(ii) Jika *f'*(*x*) < 0 untuk setiap *x* titik dalam *I*, jika untuk setiap pasang bilangan x_1 dan x_2 dalam *I* $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ maka *f* turun pada *I*.

Bukti:

Kita andaikan bahwa *f* kontinu pada *I* dan bahwa $f'(x) > 0$ di setiap titik *x* di bagian dalam *I*. Pandang dua titik sebarang x_1 dan x_2 dari *I* dengan $x_1 < x_2$.

Selanjutnya diterapkan pada selang $[x_1, x_2]$, terdapat sebuah *c* dalam (x_1, x_2) yang memenuhi

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Karena $f'(c) > 0$, kita lihat bahwa $f(x_2) - f(x_1) > 0$ yakni $f(x_2) > f(x_1)$. Inilah apa yang kita maksudkan pada waktu kita mengatakan *f* adalah naik pada *I*.

Teorema 2.4.3

Misalnya *f* terdiferensialkan dua kali pada suatu selang terbuka (a,b);

(i) Jika *f*" (*x*) > 0 untuk setiap *x* titik dalam (*a*,*b*), maka *f* cekung terbuka ke atas pada (*a*,*b*).

(ii) Jika *f*"(*x*) < 0 untuk setiap *x* titik dalam (*a*,*b*), maka *f* cekung terbuka ke bawah pada (*a*,*b*). (Purcell dan Varberg, 1984)

2.5 Populasi dan Atribut-atributnya

Populasi didefinisikan sebagai kumpulan dari suatu jenis tertentu di dalam komunitas. Populasi tidak hanya ditemukan dalam ilmu biologi, namun banyak juga ditemukan pada bidang lain seperti fisika, kimia, ekonomi, dan sebagainya. Dalam Biologi, sebuah populasi merupakan seluruh organisme dari spesies yang sama yang menempati suatu ruang tertentu (Odum, 1975:122). Diperoleh definisi-definisi atribut dalam suatu populasi sebagai berikut.

1. Densitas: ukuran kepadatan populasi dalam satu satuan ruang.
2. Natalitas (*birth rate*): banyaknya individu yang bertambah ke dalam populasi akibat hasil reproduksi.
3. Mortalitas (*death rate*): banyaknya individu yang berkurang akibat kematian.

4. *Dispersal* (migrasi): banyaknya individu yang berpindah ke luar atau yang ke dalam.
5. Angka pertumbuhan populasi (*Population growth rate*): banyaknya individu dalam populasi akibat natalitas, mortalitas, dan *dispersal.*
6. Dispersion: cara individu menyebar dalam suatu ruang, umumnya secara acak, seragam, atau menggerombol.
7. Sebaran umur: proporsi individu-individu yang berbeda umur dalam kelompok.
8. *Karakteristik genetik* tiap individu, contohnya dalam hal adaptasi atau reproduksi.

2.6 Hukum dan Fakta-fakta Eksperimental

Pemodelan matematika membutuhkan hukum-hukum dan fakta-fakta eksperimental sesuai dengan masalah yang akan dimodelkan. Oleh karena itu, model populasi ini membutuhkan hukum yang mempengaruhi populasi dan fakta eksperimental yang berhubungan dengan populasi (Davis, 1992:129) sebagai berikut:

1. Hukum Kekekalan Populasi

   Perubahan populasi pada suatu periode waktu tertentu adalah banyaknya individu yang masuk dikurangi banyaknya individu yang keluar.
2. Fakta Eksperimental Populasi

   Bagian dari individual-individual di dalam suatu populasi yang bereproduksi dan yang mati pada suatu periode waktu tertentu adalah konstan. Konstanta-konstanta yang dimaksud biasa disebut angka kelahiran dan angka kematian.

2.7 Analisis Kestabilan Linier

Secara umum, jika populasi ditentukan oleh

$$\frac{dN}{dt} = f(N),$$

dengan $f(N)$ suatu fungsi taklinier atas N, maka solusi setimbang N^* adalah solusi dari $f(N) = 0$ dan stabil jika $f'(N^*) < 0$ dan takstabil jika $f'(N^*) > 0$.

Liniernya sekitar N^* dapat ditulis,

$$N(t) = N(t) - N^*, \quad |n(t) < 1,$$

Sehingga dengan hampiran Taylor, $\frac{dN}{dt} = f(N.)$ menjadi,

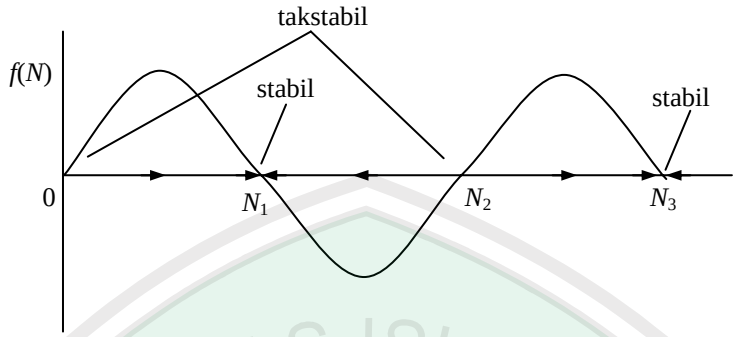
$$\frac{dN}{dt} = f(N^* + n) \approx f(N^*) + nf'(N^*) + \ldots,$$

untuk order pertama hampiran di atas dalam $n(t)$ diperoleh,

$$\frac{dN}{dt} \approx nf'(N^*).$$

Sehingga n naik atau turun bergantung dari $f'(N^*) < 0$ atau $f'(N^*) > 0$.

Terdapat bermacam kesetimbangan populasi N^* yang merupakan solusi dari $f(N) = 0$, tergantung pada bentuk model $f(N)$. Secara grafik menggambar $f(N)$ versus N dapat memperlihatkan titik-titik setimbang saat memotong sumbu N. setiap gradien $f'(N^*)$ pada masing-masing titik setimbang menentukan kestabilan liniernya.



Gambar 2.1 Kestabilan Solusi-solusi Setimbang,
(Digambar ulang dari Murray, (2002)).

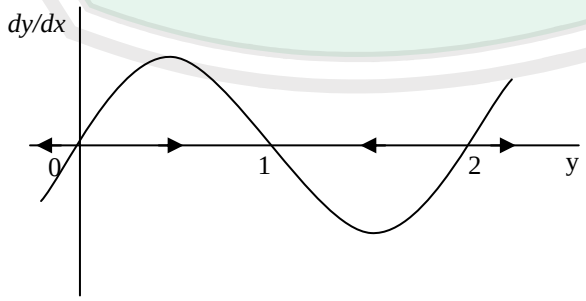
Perhatian $f(N)$ pada Gambar 2.1. Gradien $f'(N^*)$ pada $N = 0$ dan $N = N_2$ positif, sehingga ekuilibrium ini takstabil, sedangkan pada $N = N_1$ dan $N = N_3$ stabil. Tanda panah menunjukkan kestabilan atau ketakstabilan (Murray, 2002:5-6).

Contoh 2.7.1:

Misal suatu populasi ditentukan sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dx} = y(y-1)(y-2) = F(y). \qquad (1)$$

Persanaan (1) memiliki solusi setimbang pada $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ dan $y_3 = 2$.



Gambar 2.2 Titik-titik Kesetimbangan $F(y)$

Pada $y_1 = 0$ dan $y_3 = 2$ takstabil karena gradiennya positif, sedangkan $y_2 = 1$ gradiennya negatif. Bukti:

$F'(y) = 3y^2 - 6y + 2,$

Sehingga $F'(0) = 2$, $F'(1) = -1$, dan $F'(2) = 8$. Perhatikan bahwa tanda panah juga menunjukkan $y_2 = 1$ stabil.

2.8 Efek Histeresis

Istilah *histeresis* berasal dari bahasa Yunani kuno yang berarti kekurangan. Pertama kali diperkenalkan oleh Sir James Alfred Ewing. *Histeresis* merupakan suatu sifat dari sistem (umumnya sistem fisik) yang tidak secara instan mengikuti gaya yang dikenalkan kepadanya, tetapi secara lamban, atau tidak kembali secara keseluruhan ke keadaan setimbang aslinya. Contohnya, jika pisau dempul ditekankan pada suatu tembok dengan kuat, maka akan mengambil bentuk baru, dan saat dilepaskan pisau tidak akan kembali ke bentunya semula, atau setidaknya tidak segera kembali dan tidak keseluruhan. (http://en.wikipedia.org/).

2.9 Siklus Kehidupan dan Kematian

قُلِ ٱللَّهُمَّ مَٰلِكَ ٱلۡمُلۡكِ تُؤۡتِي ٱلۡمُلۡكَ مَن تَشَآءُ وَتَنزِعُ ٱلۡمُلۡكَ مِمَّن تَشَآءُ وَتُعِزُّ مَن
تَشَآءُ وَتُذِلُّ مَن تَشَآءُ ۖ بِيَدِكَ ٱلۡخَيۡرُ ۖ إِنَّكَ عَلَىٰ كُلِّ شَيۡءٖ قَدِيرٞ ﴿٢٦﴾ تُولِجُ ٱلَّيۡلَ فِي
ٱلنَّهَارِ وَتُولِجُ ٱلنَّهَارَ فِي ٱلَّيۡلِ ۖ وَتُخۡرِجُ ٱلۡحَيَّ مِنَ ٱلۡمَيِّتِ وَتُخۡرِجُ ٱلۡمَيِّتَ مِنَ
ٱلۡحَيِّ ۖ وَتَرۡزُقُ مَن تَشَآءُ بِغَيۡرِ حِسَابٖ ﴿٢٧﴾

Artinya:

26. Katakanlah: "Wahai Tuhan yang mempunyai kerajaan, Engkau berikan kerajaan kepada orang yang Engkau kehendaki dan Engkau cabut kerajaan dari orang yang Engkau kehendaki. Engkau muliakan orang yang Engkau kehendaki dan Engkau hinakan orang yang Engkau kehendaki. di tangan

Engkaulah segala kebajikan. Sesungguhnya Engkau Maha Kuasa atas segala sesuatu.

27. *Engkau masukkan malam ke dalam siang dan Engkau masukkan siang ke dalam malam. Engkau keluarkan yang hidup dari yang mati, dan Engkau keluarkan yang mati dari yang hidup[191]. dan Engkau beri rezki siapa yang Engkau kehendaki tanpa hisab (batas)".*

Kedua ayat di atas menggambarkan sejumlah dinamika dan kenyataan yang memenuhi hati, perasaan, penglihatan, dan indra manusia. Kenyataan dimasukkannya malam ke dalam siang dan sebaliknya serta dikeluarkannya sesuatu yang hidup dari sesuatu yang mati dan sebaliknya menunjukkan kekuasaan dan keesaan Allah bagi hati yang mau mendengar suara fitrah dan keimanan yang benar.

Dimasukkannya malam ke dalam siang dan siang ke dalam malam diartikan bahwa malam mengambil sebagian waktu dari siang dan siang mengambil sebagian waktu dari malam pada perputaran musim atau malam masuk ke sebagian waktu siang dan siang masuk ke sebagian waktu malam keltika senja dan pagi hari. Baik arti pertama maupun kedua, yang jelas hati manusia seolah-olah ”melihat tangan Tuhan” ketika menggerakkan falak, membalikkan bola planet yang gelap di depan planet yang terang dan membalik tempat-tempat yang gelap dengan tempat-tempat yang terang. Sedikit demi sedikit gelapnya terserap ke dalam terangnya siang. Sedikit demi sedikit pagi bernafas dalam gelap. Sedikit demi sedikit siang menjadi panjang karena diambil dari sebagian malam di awal musim panas. Sedikit demi sedikit malam juga menjadi panjang yang mengambil sebagian waktu siang di musim dingin. Semua itu

adalah gerakan yang tidak mungkin dikendalikan oleh manusia atau terjadi secara kebetulan tanpa perencanaan.

Begitu juga dengan gejala kehidupan dan kematian. Masing-masing masuk ke bagian yang lain secara perlahan dan bertahap. Setiap saat, di mana ada kehidupan, selalu ada kematian. Sel-sel yang hidup akan mati dan akan lahir sel-sel yang baru. Makhluk yang mati akan digantikan oleh makhluk lain yang hidup, begitu seterusnya. Ini terjadi pada satu makhluk.

Kehidupan dan kematian merupakan gerak yang dialami oleh setiap makhluk hidup di seluruh alam semesta, yaitu gerakan yang tidak terlihat dan dalam, yang diperlihatkan oleh ayat Al-Qur'an pada hati dan akal manusia. Gerakan ini memberitahukan kekuasaan Allah yang merencanakan dan mengaturnya. Lalu, bagaimana manusia berusaha lari dari rencana dan aturan Tuhan itu? Bagaimana mereka saling menjadikan yang lain sebagai budak atau sebagai Tuhan, padahal semua rezeki mereka berada di tangan Allah? Siklus tentang kematian dan kehidupan sungguh merupakan sentuhan yang mengingatkan hati manusia akan kenyataan yang lebih besar, yaitu hakikat keesaan Allah.

Siklus kehidupan dan kematian merupakan suatu mukjizat dan rahasia kehidupan itu sendiri. Ciri utama siklus kehidupan tumbuh-tumbuhan adalah air, karbon dioksida, nitrogen, dan garam nonorganik yang berada di dalam tanah berubah menjadi zat-zat organik berkat bantuan energi matahari, tumbuh-tumbuhan hijau, enzim yang berada di dalamnya, dan beberapa jenis bakteri. Zat-zat organik yang mengandung kehidupan itu dikenal dengan nama protoplasma

dan terdapat di semua makhluk hidup. Selanjutnya, zat-zat itu berubah lagi (mati) dalam bentuk sampah, produk metabolisme, dan pernapasannya, kemudian dalam bentuk tubuh secara keseluruhan ketika ia mati dan tidak lagi tunduk pada faktor pelarutan bakteri dan kimia yang mengubahnya menjadi zat sederhana nonorganik dan siap memasuki fase kehidupan baru. Begitulah, setiap saat Allah mengeluarkan kehidupan dari sesuatu yang mati dan mengeluarkan kematian dari sesuatu yang hidup. Siklus yang terjadi berulang-ulang ini hanya terjadi pada makhluk yang dititipi rahasia kehidupan oleh Allah. (Fuad Pasya, 2004:133-136)

Ayat di atas mengingatkan orang-orangyang mau berfikir pada penciptaan kehidupan dari materi bumi yang mati. Begitulah, Al-qur'an menjelaskan gejala dikeluarkannya sesuatu yang hidup dari sesuatu yang mati agar dapat mengeluarkan sesuatu yang mati dari sesuatu yang hidup. Di situlah letak kemukjizatannya.

Seorang mukmin yang khusyuk akan bertasbih mengagungkan Tuhan ketika ia melihat dan mengamati alam sekitarnya. Tanah yang tandus dan keras, disiram air hujan hingga menjadi subur dan menumbuhkan tumbuh-tumbuhan hijau yang segar. Semua itu menjadi saksi atas kekuasaan Allah bahwa Dia akan menghidupkan kembali orang-orang yang telah mati dan membangkitkan kembali mayat dari kuburnya. Dengan demikian, keimanannya makin bertambah.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Model Populasi Eksponensial

Model populasi eksponensial sering dijumpai dalam ilmu kependudukan. Model ini merupakan model yang paling sederhana karena hanya memperhitungkan angka kematian dan angka kelahiran, tanpa memperhatikan faktor *dispersal* seperti emigrasi, imigrasi, atau transmigrasi.

Karena banyaknya individu yang lahir dan yang *mati* dari t ke $t + \Delta t$ sebesar $k_b N(t)\,\Delta t$ dan $k_d N(t)\,\Delta t$, serta perubahan populasi dari t ke $t + \Delta t$ adalah $N(t + \Delta t) - N(t)$, maka:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{(t+\Delta t) - t}$$

$$\Rightarrow \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} \approx \frac{k_b N(t)\Delta t - k_b N(t)\Delta t}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (k_b - k_d)\, N(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dN}{dt} = (k_b - k_d)\, N(t)$$

Sebelum memulai memodelkannya, maka dibutuhkan Hukum Kekekalan Populasi dan Fakta Eksperimental yang ada pada Bab II. Selanjutnya model populasi eksponensial dinyatakan dalam bentuk:

$$\frac{dN}{dt} = k_b N(t) - k_d N(t) \qquad (3.1.1)$$

Keterangan:

N(t) : banyaknya populasi suatu spesies pada waktu t,

N(0) : banyaknya populasi suatu spesies pada waktu t = 0, disebut populasi awal (kondisi awal), misal sebesar N_o,

k_b dan k_d : angka kelahiran dan angka kematian, k_b dan k_d konstanta-konstanta positif.

k_b *N(t)* : angka individu yang bertambah dalam populasi sesuai kelahiran pada waktu *t*.

$k_d N(t)$: angka individu yang mati dalam populasi sesuai kematian pada waktu t.

Misalkan $k = k_b - k_d$, maka diperoleh

$$\frac{dN}{dt} = kN(t) \qquad (3.1.2)$$

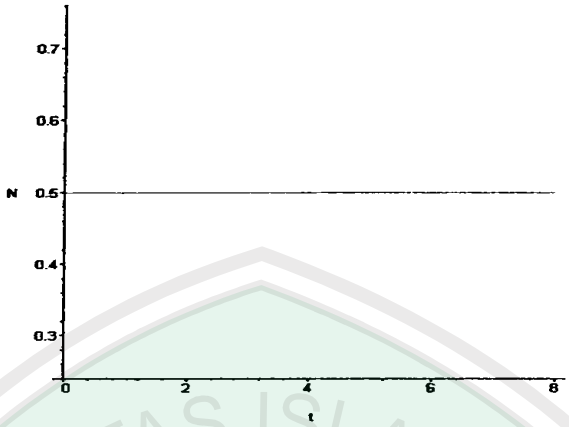
Dari penurunan persamaan di*atas*, maka didapatkan tiga kasus. Kasus yang pertama jika $k_b = k_d$, yang kedua jika $k_b > k_d$, dan yang ketiga jika $k_b < k_d$.

1. Kasus $k_b = kd$.

   Jika $k_b = k_d$ maka $k = k_b - k_d = 0$. Sehingga persamaan (3.1.2) menjadi

   $$\frac{dN}{dt} = 0$$

   Solusi persamaan tersebut adalah *N(t)* = C, C konstanta positif. Berikut ini interpretasi grafik solusi N(t) = C, misalkan untuk C = 0.5.



Gambar 3.1 Grafik Solusi $\frac{dN}{dt} = 0$

Terlihat dari Gambar 3.1 bahwa untuk setiap t nilai N selalu konstan pada N = 2. Sehingga kesimpulan dari Gambar 3.1 adalah jika angka kematian dan angka kelahiran benar-benar sama maka banyaknya individu dalam populasi akan tetap.

2. Kasus $k_b > k_d$.

Jika $k_b > k_d$ maka $k = k_b - k_d > 0$. Sehingga persamaan (3.1.2) menjadi

$$\frac{dN}{dt} = kN(t) > 0$$

$$dN = kN(t)dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{kN} dN = dt$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{kN} dN = \int dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k} \ln|N| = t + c$$

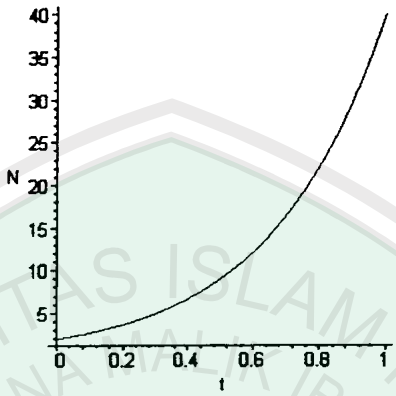
$$\Leftrightarrow \ln|N| = k(t + c)$$

$$\Leftrightarrow |N| = e^{k(t+c)}$$

$$\Rightarrow N(t) = Ce^{kt}, C = e^{kc} > 0$$

$$\frac{dN}{dt} = 0$$

Jadi solusi untuk persamaan di atas adalah $N(t) = Ce^{kt}$, $C = e^{kc} > 0$. Bentuk contoh interpretasi grafiknya untuk $N(0) = 2$ dan k = 3 sebagai berikut,



Gambar 3.2 Grafik Solusi $\frac{dN}{dt} = kN(t) > 0$

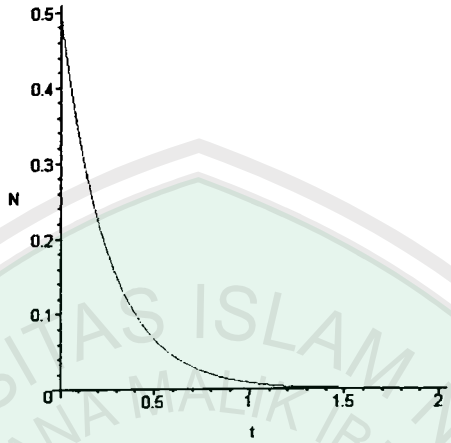
Dari Gambar 3.2 dapat disimpulkan bahwa: jika angka kelahiran lebih dari angka kematian maka banyaknya individu dalam populasi akan terus bertambah.

3. Kasus $k_b < k_d$.

Jika $k_b < k_d$ maka $k = k_b - k_d < 0$. Sehingga persamaan (3.1.2) menjadi

$$\frac{dN}{dt} = kN(t) < 0$$

Solusi untuk persamaan tersebut dapat diperoleh seperti pada nomor 2, yaitu $N(t) = Ce^{kt}$, $C = e^{kc}$. Bentuk contoh interpretasi grafiknya untuk $N(0) = 0.5$ dan $k = -4$ sebagai berikut,



Gambar 3.3 Grafik Solusi $\frac{dN}{dt} = kN(t) < 0$

Dari Gambar 3.3 dapat disimpulkan bahwa: jika angka kematian melebihi angka kelahiran maka banyaknya individu dalam populasi akan terus berkurang bahkan akan punah.

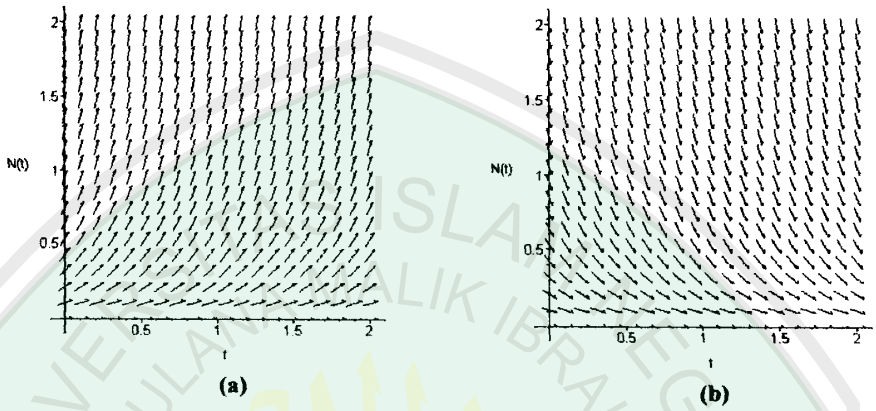
Dari tiga kasus di atas, jika $k > 0$ maka $N'(t) > 0$, yang mengakibatkan N(t) naik, dan jika $k < 0$ maka $N(t) < 0$, yang mengakibatkan $N(t)$ turun. Sekarang untuk memeriksa kelengkungan kurvanya, akan dihitung N'' W

$$N''(t)\frac{dN'}{dt} = \frac{d(kN(t))}{d} = k\frac{dN(t)}{dt} = k^2 N(t)$$

Tanda dari turunan kedua tersebut sama seperti tanda dari N(t). Jika $N''(t)$ positif maka kurva akan terbuka ke atas, sedangkan jika $N''(t)$ negatif maka kurva akan terbuka ke bawah.

Untuk mengetahui arah kurva selesaian, perhatikan persamaan (3.1.2). Karena ruas kanan persamaan tersebut tidak mengandung variabel bebas t, maka gradien kurva solusinya hanya bergantung pada tanda dari N. Dengan kata lain,

seluruh kurva solusi akan naik saat N bertanda positif ($k > 0$), atau kurva solusi akan turun jika N negatif ($k < 0$). Berikut ini contoh grafik arah kurva solusi.



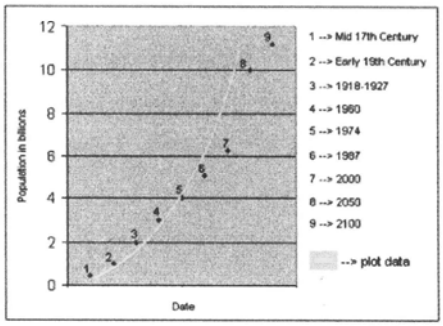
Gambar 3.4 (a) $\frac{dN}{dt} = kN(t)\ k > 0$ (b) $\frac{dN}{dt} = kN(t)\ k < 0$

Kesimpulan dari analisis model eksponensial di atas adalah bahwa populasi dapat setimbang jika angka kematian sama dengan angka kelahiran. Model yang telah dibahas di atas menurut Malthus dalam Murray (2002) tidak realistis. Menurutnya pertumbuhan populasi akan dibatasi oleh faktor pembatas, seperti persediaan makanan, kompetisi, dan sebagainya. Perhatikan tabel berikut,

Tabel 3.1 Tabel Populasi Dunia

Date	Mid 17th Century	Early 19th Century	1918-1927	1960	1974	1987	2000	2050	2100
Population in billions	0.5	1	2	3	4	5	6.3	10	11.2

(Sumber: Murray (2002, hlm. 2))



Dari Gambar 3.5 terlihat bahwa populasi dunia tumbuh secara eksponensial sejak tahun 1900. Namun, mulai tahun 1987, data sudah tidak sesuai lagi dengan kurva pertumbuhan eksponensial. Berdasarkan laporan WHO tahun 1992 tentang reproduksi manusia seluruh dunia, 100 juta kegiatan seksual tiap hari menghasilkan 910 ribu konsepsi dan 356 ribu penularan penyakit. WHO memperkirakan bahwa 300 juta pasangan tidak menginginkan anak lagi tetapi menolak keluarga berencana (KB). Dari 910 ribu konsepsi tiap hari tersebut separuhnya tidak direncanakan. Terdapat 150 ribu aborsi tiap hari, sepertiganya dilakukan secara berbahaya yang mengakibatkan 500 kematian.

Oleh karena itu diperlukan suatu penyesuaian terhadap model populasi eksponensial, seperti yang akan dibahas pada subbab berikut.

3.2. Model Populasi Logistik

Model ini pertama kali diperkenalkan oleh Verhulst (1804 - 1849) dan merupakan pengembangan dari model populasi eksponensial. Verhulst dalam Murray (2002) menyarankan adanya pembatas terhadap pertumbuhan populasi. Dalam model ini, kompetisi akan sumberdaya diperhitungkan karena keterbatasannya. Saat populasi tumbuh, makanan dan ruang menjadi langka. Terjadi persaingan untuk mendapatkan sumberdaya tersebut, sehingga mengakibatkan kematian, kelaparan, dan penyakit.

Logistik adalah pengembangan dari model pertumbuhan populasi yang dipengaruhi (dikurangi) oleh faktor kompetisi akan sumberdaya. Pengaruh faktor kompetisi sumberdaya tersebut dirumuskan sebagai berikut:

$\frac{r}{K}N^2(t)$ dengan r sebagai kostanta positif yang menyatakan angka pertumbuhan, K sebagai konstanta bawaan sumberdaya, *N(t)* sebagai banyaknya populasi pada waktu *t*. Diasumsikan $N^2(t)$ karena banyaknya populasi pada waktu *t* meningkat sebesar $N \times N\ (N^2)$, sehingga mendapatkan bentuk model populasi logistik sebagai berikut:

$$\frac{dN}{dt} rN(t) - \frac{r}{K}N^2(t) \qquad (3.2.1)$$

Keterangan:

N(t) : banyaknya populasi suatu spesies pada waktu *t*,

N(0) : banyaknya populasi suatu spesies pada waktu t = 0, disebut populasi awal (kondisi awal), misal sebesar N_o,

r : konstanta positif yang menyatakan angka pertumbuhan.

rN(t) : banyaknya individu yang bertambah pada saat *t.*

K : konstanta, kapasitas bawaan sumberdaya *(carrying capacity).*

Cara memodelkan populasi yang dibatasi oleh kompetisi (3.2.1), misalkan angka kematian dipengaruhi oleh kompetisi, sedangkan angka kelahiran tidak. Selanjutnya digunakan asumsi-asumsi sebagai berikut:

- Jika populasi (*N)* kecil, ukurannya proporsional dengan angka pertumbuhannya. Secara matematis dapat dituliskan sebagai berikut, jika N kecil maka $\frac{dN(t)}{dt} \approx rN(t)$, *r* konstanta dt

- Sedangkan jika populasi (N) terlalu besar untuk ditopang oleh sumberdaya (K), populasi akan turun. Secara matematis, jika $N > K$ maka $\frac{dN}{dt} =< 0$

Kemudian dari model eksponensial (3.1.2) dengan mengganti konstanta k dengan r, akan dimodifikasi sesederhana mungkin dengan "faktor" yang dekat dengan 1 jika N kecil, tetapi jika $N > K$, "faktor" tersebut menjadi negatif. Bentuk "faktor" yang paling sederhana yang memenuhi syarat di atas ialah,

$$\text{faktor} = \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

Sehingga bentuk model populasi yang telah dimodifikasi dengan "faktor" yaitu,

$$\frac{dN(t)}{dt} = r\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)N(t)$$

sehingga diperoleh (3.2.1).

Terdapat dua titik kesetimbangan pada (3.2.1), yakni

$$rN(t) - \frac{r}{K}N^2(t) = 0$$

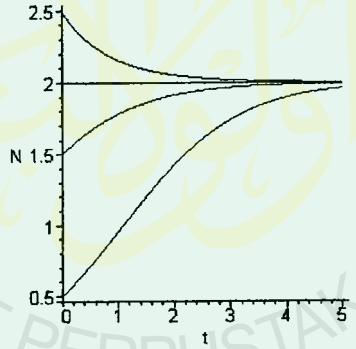
$$\Rightarrow rN(t)\left[1 - \frac{1}{K}N(t)\right] = 0,$$

$$rN(t) = 0 \Leftrightarrow N(t) = 0 \; atau \; 1 - \frac{1}{K}N(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{K}N(t) = 1$$

$$\Leftrightarrow N(t) = K$$

Untuk $N(t) = 0$ takstabil karena linearisasi disekitarnya mengakibatkan $\frac{dN}{dt} \approx rN$, sehingga N tumbuh secara eksponensial untuk sebarang kondisi awal. Sedangkan untuk $N(t) = K$ stabil karena linearisasi disekitarnya mengakibatkan $\frac{d(N-K)}{dt} \approx -r(N-K)$ sehingga $N \rightarrow K$ saat $t \rightarrow \infty$ (lihat kembali Bab II tentang kestabilan linear). Hal ini berarti, populasi akan menuju keseimbangan pada suatu waktu walaupun pada awalnya banyak populasi melebihi atau kurang daripada kapasitas sumberdaya. Dalam hal ini populasi tidak akan punah, asalkan kapasitas sumberdaya konstan. Seperti terlihat pada grafik berikut untuk r =1 dari K=2, kondisi awal N(0) = 0.5, $N(0)$ = 1.5 dan $N(O)$=2.5



Gambar 3.6 Grafik Model Populasi Logistik dengan Kuantitas sumberdaya K = 2.

Dari Gambar 3.6, jika populasi awal seimbang dengan sumberdaya yang ada $(N_o = K)$ maka populasi akan tetap. Jika populasi awal lebih sedikit dibandingkan sumberdaya yang ada $(N_o < K)$, maka populasi akan tumbuh dan akhirnya mendekati konstan saat sumberdaya tidak mampu menopang banyaknya populasi. Sedangkan jika populasi awal melebihi sumberdaya yang ada $(N_o > K)$ maka populasi akan turun dan akhirnya mendekati konstan.

Sekarang akan dicari selesaian dari (3.2.1) menggunakan metode dalam persamaan diferensial yaitu metode variabel terpisah. Perhatikan lagi persamaan diferensial (3.2.1)

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) - \frac{r}{K}N^2(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dN}{rN(t) - \frac{r}{K}N^2(t)} = dt$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dN}{r\left[N(t) - \frac{1}{K}N^2(t)\right]} = \int dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{r}\ln\left|\frac{N(t)}{N[t] - K}\right| = t + \ln|c|\text{, c konstanta positif}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left|\frac{N(t)}{N(t) - K}\right| = rt + \ln|C|\text{, C konstanta}$$

$$\Leftrightarrow \frac{N(t)}{N(t) - K} = e^{rt}$$

$$\Leftrightarrow N(t) = Ce^{rt}N(t) - KCe^{rt}$$

$$\Leftrightarrow N(t) - Ce^{rt}N(t) = -KCe^{rt}$$

$$\Leftrightarrow N(t)\left[1 - Ce^{rt}N\right] == KCe^{rt}$$

$$\Leftrightarrow N(t) = \frac{KCe^{rt}}{Ce^{rt} - 1} \qquad (3.2.2)$$

Misal saat $t = 0,\ N(0) = N_0,$ maka diperoleh:

$$N(0) = \frac{KC}{C-1} \Leftrightarrow N_0 = \frac{KC}{C-1}$$

$$\Leftrightarrow CN_0 - N_0 = KC$$

$$\Leftrightarrow CN_0 - KC = N_0$$

$$C = \frac{N_0}{N_0 - K}$$

Substitusikan C ke persamaan (3.2.2), menghasilkan:

$$N(t)=\frac{K\left[\frac{N_0}{N_0-K}\right]e^{rt}}{\left[\frac{N_0}{N_0-K}\right]e^{rt}-1}$$

$$=\frac{\frac{Ke^{rt}N_0}{N_0-K}}{\frac{e^{rt}N_0-[N_0-K]}{N_0-K}}$$

$$=\frac{N_0Ke^{rt}}{e^{rt}N_0-N_0+K}$$

Jadi selesaian dari (3.2.1) dengan $N(0) = N_o$ adalah

$$N(t)=\frac{N_0Ke^{rt}}{e^{rt}N_0-N_0+K} \qquad (3.2.3)$$

Sekarang akan dipaparkan secara kualitatif, perilaku kurva-kurva solusi (3.2.3). Dari (3.2.1),

$$\frac{dN}{dt}=rN(t)-\frac{r}{K}N^2(t)$$

$$=N(t)\left[r-\frac{r}{K}N(t)\right]>0 \text{ saat } r-\frac{r}{K}N(t)>0$$

dan

$$\frac{dN}{dt}=rN(t)-\frac{r}{K}N^2(t)$$

$$=N(t)\left[r-\frac{r}{K}N(t)\right]>0$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa $\frac{dN}{dt} > 0$ untuk $N(t) < K$. Sebaliknya $\frac{dN}{dt} < 0$ jika $N(t) > K$.

Selanjutnya akan ditentukan kelengkungan kurva solusi melalui tanda N". Tanda N'' ditentukan oleh $N' = \frac{dN}{dt}$ dan oleh $r - \frac{r}{K}N(t)$

$$N'' = \frac{dN}{dt} = \frac{d\left[rN(t) - \frac{r}{K}N^2(t)\right]}{dt}$$

$$= r\frac{dN(t)}{dt} - \frac{2rN(t)}{K}\frac{dN(t)}{dt}$$

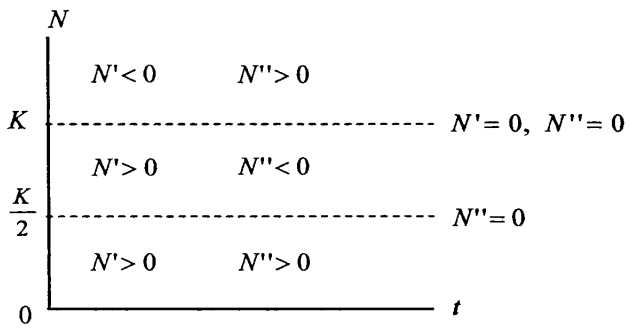
$$= rN' - \frac{2r}{K}NN'$$

$$N'' = N'\left[r = \frac{2r}{K}N\right]$$

N'' positif saat $N < \frac{K}{2}$ dan N'' negatif saat $N > \frac{K}{2}$. $N'' = 0$ jika

$$N' = \frac{dN}{dt}$$

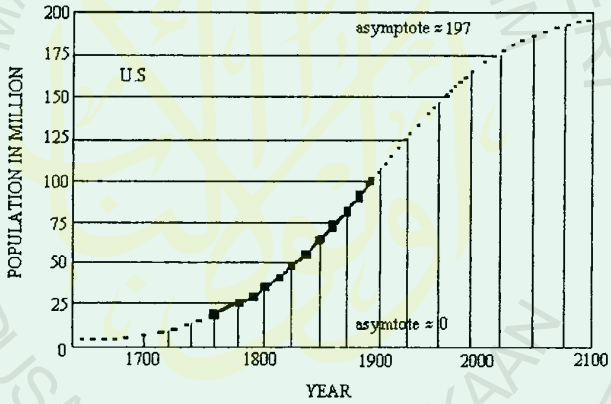
atau $N = \frac{K}{2}$ Berikut rangkuman arah kurva dan kelengkungannya.



Gambar 3.7 Rangkuman Arah Kurva Model Logistik dan Kelengkungannya.

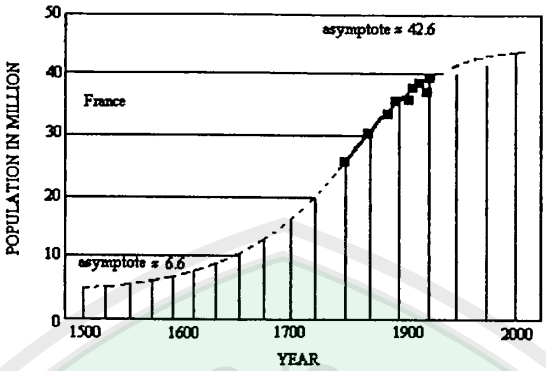
Dari analisis di atas, dapat disimpulkan bahwa kesetimbangan populasi dengan kapasitas sumberdaya konstan, dapat selalu diperoleh pada waktu yang akan datang, kecuali populasi awalnya nol. Hal ini diakibatkan oleh persaingan dalam populasi itu sendiri memperebutkan sumberdaya yang terbatas (konstan).

Model populasi logistik dapat digunakan untuk membandingkan (fit) data sebenarnya dengan model, karena memiliki tiga parameter N_o, K, dan r. Model ini telah digunakan para ahli untuk mensensus populasi di Amerika Serikat dan Prancis pada berbagai periode. Berikut ini gambar fit data kependudukan dari negara Amerika Serikat dan Prancis.



Gambar 3.8 Fit Data Populasi di Amerika Serikat. (Digambar ulang dari Murray (2002)).

Gambar 3.8 menunjukkan fit data yang cukup balk atas populasi di Amerika Serikat dari tahun 1790 sampai sekitar tahun 1910. Dari gambar itu, bagian bawah kurva di-fit-kan.



Gambar 3.9 Fit Data Populasi di Prancis. (Digambar ulang dari Murray (2002)).

Berbeda dengan Gambar 3.8, Gambar 3.9 yang di-fit-kan adalah bagian atas kurva. Terdapat data yang tidak berada pada kurva, yang berarti prediksi atas data salah, hal ini terjadi karena data yang di-fit-kan hanya sebagian data. Namun dengan beberapa parameter lagi dan sedikit aljabar kesalahan prediksi terhadap data dapat dikurangi.

3.3. Model Populasi Spruce *Budworm*

Model ini pertama kali diturunkan berdasarkan serangan larva serangga *(spruce budworm)* yang menggundulkan hutan cemara *(balsam fir)* di sekitar Kanada Untuk mengontrol populasi larva serangga tersebut, maka diperlukan predator alaminya yaitu burung. Model ini merupakan pengembangan dari model populasi logistik, namun khusus untuk kasus populasi *budworm*. Populasi *Spruce Budworm* dimodelkan sebagai berikut:

$$\frac{dN}{dt} = r_b N(t) - \frac{r_b}{K_b} N^2(t) - P(N)$$

r_b menyatakan angka kelahiran linear *budworm*, K_b menyatakan kepadatan sumber daya. Suku P(N) menyatakan faktor pemanenan atau predasi (oleh

burung). Dalam hal ini, predasi dapat dilakukan dengan cukup besar walaupun populasi *budworm* tinggi. Efek seperti ini disebut *saturasi*. Sebaliknya, terdapat penurunan predasi jika populasi *budworm* juga mengalami penurunan. Hal ini merupakan hal yang umum terjadi jika predator memiliki banyak pilihan makanan. Oleh karena itu, terdapat *batas atas* angka kematian *budworm* terhadap predasi. *Batas atas* merupakan fungsi dari variabel cara memangsa, variabel perilaku, dan variabel karakter habitat.

Dari uraian di atas, *P(N)* turun secara cepat saat $N \rightarrow 0$ dan *P(N)* mendekati *batas atas* saat N $\rightarrow \infty$. Secara matematis, menyatakan bentuk *P(N)* sebagai berikut:

$$P(N) = \frac{BN^2(t)}{A^2 + N^2(t)} \qquad (3.3.2)$$

dengan A dan B konstanta positif. Setelah (3.3.2) disubstitusikan pada (3.3.1) diperoleh

$$\frac{dN}{dt} r_b N(t) - \frac{r_b}{K_b} N^2(t) - \frac{BN^2(t)}{A^2 + N^2(t)} \qquad (3.3.3)$$

Keterangan:

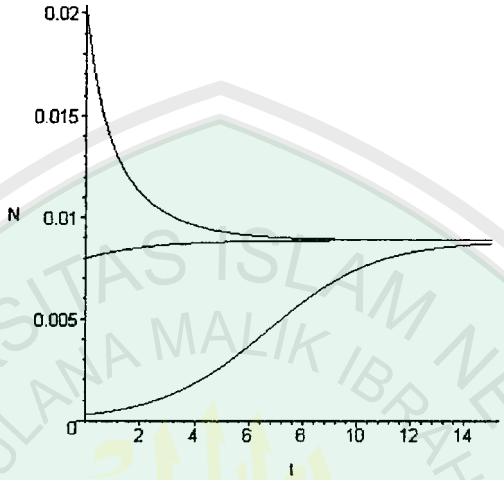
r_b : konstanta positif, angka pertumbuhan budworm, berdimensi (waktu)$^{-1}$,

K_b : konstanta positif yang menyatakan kapasitas bawaan berdimensi sama dengan N,

A : konstanta positif ukuran dimulainya efek saturasi dan berdimensi sama dengan N

B : konstanta positif berdimensi *N*(waktu)$^{-1}$.

Gambar grafik solusi (3.3.3) untuk r_b = 3, K_b = 8/5, A = 0.5, B =1, dan *N(0) = 0.02*, *N(O) = 0.008*, dan *N(O)* = 0.0003 adalah sebagai berikut.



Gambar 3.10 Grafik solusi model Spruce budworm.

Gambar 3.10 memperlihatkan bahwa untuk kondisi awal N(O) = 0.0003, populasi naik secara eksponensial kemudian melandai menuju kesetimbangan. Pada *N(O)* = 0.008, populasi tumbuh melandai menuju kesetimbangan, dan pada *N(O) = 0.02*, populasi turun secara eksponensial menuju kesetimbangan. Semua solusi menuju ke kesetimbangan sebesar ± 0.009.

Selanjutnya langkah awal menganalisa model (3.3.3) adalah dengan menentukan kesetimbangan dan kestabilan. Kesetimbangan terjadi jika $N' = \frac{dN}{dt} = 0$, sehingga (3.3.3) menjadi,

$$r_b N(t) - \frac{r_b}{K_b} N^2(t) - \frac{BN^2(t)}{A^2 + N^2(t)} = 0$$

$$r_b N(t)\left[1 - \frac{N(t)}{K_b}\right] - \frac{BN^2(t)}{A^2 + N^2(t)} = 0 \qquad (3.3.4)$$

Karena kerumitan persamaan (3.3.4), maka untuk menyederhanakannya perlu didefinisikan variabel-variabel dan parameter-parameter tak berdimensiseperti berikut:

$$u(\tau)=\frac{N(t)}{A}\Rightarrow N(t)\ Au(\tau), R=\frac{Ar_b}{B},\ q=\frac{K_b}{A},\quad \tau=\frac{Bt}{A}\Rightarrow\frac{d\tau}{dt}=\frac{B}{A},$$

dengan aturan rantai dan substitusi parameter-parameter tersebut ke (3.3.4) diperoleh,

$$\frac{d(Au(\tau))}{dt}\ \frac{BR}{A}Au(\tau)-\frac{BR}{A}\frac{A^2u^2(\tau)}{K_b}-\frac{BA^2u^2(\tau)}{A^2+A^2u^2(\tau)}$$

$$A\frac{du}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}$$

$$=A\frac{du}{d\tau}\frac{B}{A}$$

$$=BRu-BRu^2\frac{A}{K_b}-\frac{Bu^2}{1+u^2}$$

$$=B\left[Ru-\frac{Ru^2}{q}-\frac{u^2}{1+u^2}\right]$$

$$\frac{du}{d\tau}=Ru\left[1-\frac{u}{q}\right]-\frac{u^2}{1+u^2} \qquad (3.3.5)$$

Misalkan f didefinisikan sebagai fungsi dari (3.3.5),

$$f(u;R,q)=\frac{du}{d\tau}=Ru\left[1-\frac{u}{q}\right]-\frac{u^2}{1+u^2} \qquad (3.3.6)$$

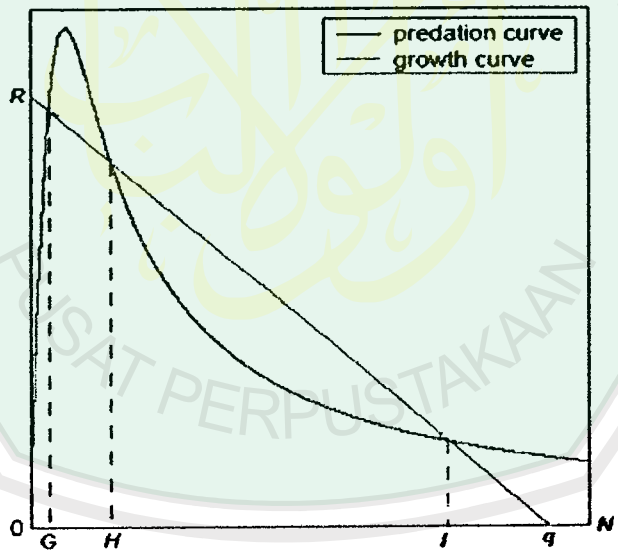
Terlihat bahwa f terdiri dari dua konstanta yaitu R dan q. Solusi setimbang dari (3.3.6) adalah

$$f(u;R,q)=0\Rightarrow Ru\left[1-\frac{u}{q}\right]-\frac{u^2}{1+u^2} \qquad (3.3.7)$$

Solusi trivialnya yaitu u = 0. Solusi setimbang ini takstabil karena gradiennya positif yaitu $\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{u=0} = R > 0$. Jika ada solusi setimbang taknol yang lainnya, maka solusinya yaitu,

$$R\left[1-\frac{u}{q}\right]=\left[\frac{u}{1+u^2}\right] \qquad (3.3.8)$$

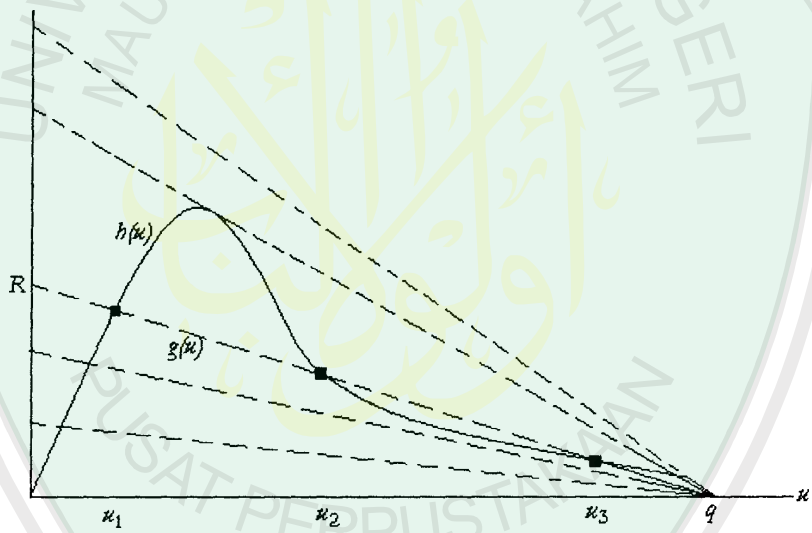
Ruas kiri menyatakan angka kelahiran per kapita dan ruas kanan menyatakan angka kematian per kapita. Ruas kin' dan kanan pada (3.3.8) dapat digambarkan grafiknya terhadap u, seperti pada Gambar 14.



Gambar 3.11 Perpotongan Dua Kurva Pada Persamaan (3.3.8).

Pada Gambar 3.11, yang menyatakan angka pertumbuhan per kapita ialah garis lurus (*growth curve*) yang perpotongannya di R dan q, dan yang menyatakan angka kematian per kapita ialah kurva *(predation curve)* yang dimulai dari titik asal dan asimtotik terhadap sumbu u saat *t* semakin besar. Karena u proporsional terhadap N, maka sumbu u dapat dianggap sebagai sumbu

N Titik-titik setimbang dari (3.3.8) merupakan perpotongan kedua kurva tersebut, yaitu G, H, dan I (Bassar, 2000). Secara umum, persamaan (3.3.8) dapat memiliki satu, dua, atau tiga solusi taknal, bergantung dari parameter R dan q yang mempengaruhi perpotongan kurva keduanya. Misalkan $h(u)= \frac{u}{1+u}$ dan g(u) = $R\left[1-\frac{u}{q}\right]$h(u) memiliki nilai maksimum 0.5 pada u =1. Jika *h(u)* dan g(u) saling dipotongkan, untuk nilai R tertentu dan q tetap, maka diperoleh seperti Gambar 3.12.



Gambar 3.12 Nilai R berubah-ubah dan q tetap.
(digambar ulang dari Murray (2002))

Sekarang perhatikan bahwa,

$$R\left[1-\frac{u}{q}\right] = \left[\frac{u}{1+u^2}\right]$$

$$\Rightarrow Ru-\frac{Ru}{q}=\frac{u}{1+u^2}$$

$$\Rightarrow Rqu - Ru = \frac{qu}{1+u^2}$$

$\Rightarrow$ $(1 + u^2)$ (Rqu – Ru) = qu

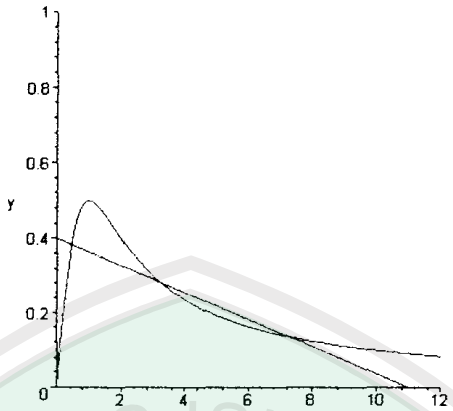
$$\Rightarrow u^2 - qu^2 + \left(\frac{R+q}{R}\right)u - q = 0$$

Dikriminan dari persamaan di atas adalah,

$$\Delta \equiv 2q^3 - 9q - \frac{9q^2}{R} + 27q - 4 - \frac{4q}{R} + \frac{4q^2}{3}$$

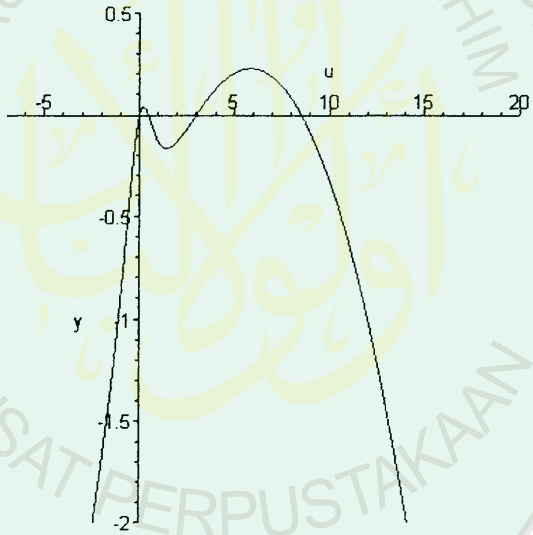
Untuk 0 < 0 terdapat satu akar real dan dua akar kompleks. Untuk $\Delta > 0$ terdapat tiga akar real berbeda. Untuk 0 = 0 terdapat satu akar real dan dua akar kompleks. Sehingga satu solusi setimbang taknol dari (3.3.8) untuk *q* yang tetap, dapat diperoleh jika $R \leq \frac{3q(9q+4)}{2(3q^3+2q^2\ 27q-6)}$

Dan Gambar 3.12 telah diketahui bahwa terdapat maksimal tiga solusi setimbang taknol dari model *Spruce Budworm* saat *R* naik untuk *q* yang tetap, atau sebaliknya saat *q* bervariasi dan *R* tetap. Ekuilibrium u = u_2 takstabil karena $\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{u=u_2}$ > 0, sedangkan u_1, dan u_3 stabil karena $\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{u=u_2, u=u_3} < 0$. Contohnya untuk model *spruce budworm*, $\frac{du}{dt}$ = *F(u)* = 0.4u - $\frac{u^2}{1+u^2}$ dengan *R = 0.4* dan q =*12* . Jelas bahwa $0.4 > \frac{3(12)(9(12)+4)}{2(3(12)^3+2(12)^2+27(12)-6)} = \frac{336}{965}$. Sehingga *F(u)* memiliki tiga akar real. Gambar solusi setimbang model tersebut seperti berikut.



Gambar 3.13 Solusi setimbang pada model $\frac{du}{dt} = 0.4u - \frac{1}{30}u^2 - \frac{u^2}{1+u^2}$

Sedangkan gambar grafik *F(u)* adalah sebagai berikut,



Gambar 3.14 Gambar grafik $F(u) = 0.4u - \frac{1}{30}u^2 - \frac{u^2}{1+u^2}$

Dengan menggunakan kalkulasi program Maple 8, diperoleh nilai $u_1 \approx 0.45$, $u_2 \approx 2.97$, dan $u_3 \approx 8.49$. Solusi setimbang taknol yang stabil pada u_2 , sedangkan yang takstabil pada u_1, an u_3.

Secara umum, untuk suatu nilai *R* dan *q*, jika terdapat satu solusi setimbang taknol u_1, maka u_1, akan stabil. Jika terdapat dua solusi setimbang

taknol u_1, dan u_2 , maka u_1, stabil dan u_2 takstabil. Sedangkan jika terdapat tiga solusi setimbang taknol u_1, u_2 , dan u_3, maka u_1, dan u_3 takstabil serta u_2 stabil. Secara riil, jika R terus naik, angka pertumbuhan akan melebihi angka kematian sehingga populasi *budworm* meningkat drastis dan dapat menggundulkan hutan dengan cepat. Namun, jika *R* diturunkan maka u_2 dan u_3 akan bersatu bahkan hilang dan populasi akan turun tiba-tiba ke u_1. Hal ini disebut *efek histeresis.*

Kembali ke model awal (3.3.3), dapat disimpulkan bahwa terdapat satu solusi setimbang taknol jika konstanta $R = \frac{Ar_b}{B} \leq \frac{3q(9q-4)}{2(3q^3+2q^2+27q-6)}$, dengan $q = \frac{K_b}{A}$. Solusi umum dari model (3.3.3) sulit untuk ditentukan. Namun yang terpenting adalah pengaruh kestabilan kesetimbangan terhadap populasi *budworm.* Jika hutan cukup lebat, maka populasi *budworm* akan meningkat. Sedangkan jika kepadatan hutan dikendalikan, populasi *budworm* cenderung akan stabil. Jika sudut pandang yang digunakan adalah *budworm* sebagai hama, maka sebaiknya kepadatan hutan dikendalikan atau menambah jumlah predator, agar hutan tidak cepat gundul.

3.4. Model Populasi *Delay*

Salah satu kekurangan model populasi tunggal pada subbab sebelumnya ialah angka kelahiran suatu individu dianggap muncul seketika tanpa menunggu untuk mencapai tingkat kedewasaan, periode kehamilan, clan sebagainya. Masa tunggu (tunda) tersebut dapat digunakan untuk membentuk model persamaan diferensial sebagai berikut,

$$\frac{dN(t)}{dt} = f(N(t), N(t-T)) \qquad (3.4.1)$$

Dengan masa tunda *(delay)* $T > 0$ adalah parameter. Model (3.4.1) digunakan untuk mengembangkan model populasi logistik, agar dapat membangkitkan perilaku periodik, yang disebut Model Populasi *Delay*,

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\left[1 - \frac{N(t-T)}{K}\right] \qquad (3.4.2)$$

Keterangan:

$N(t)$: banyaknya populasi suatu spesies pada waktu t,

$N(0)$: banyaknya populasi suatu spesies pada waktu t = 0, disebut populasi awal (kondisi awal), misal sebesar N.,

r : konstanta positif.

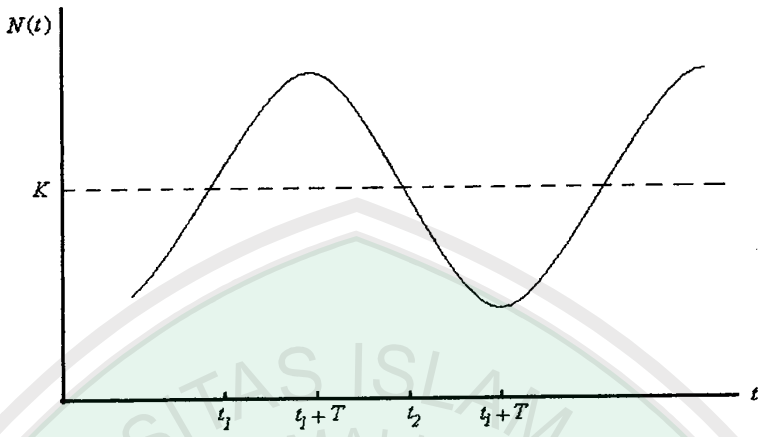
$rN(t)$: banyaknya individu yang bertambah pada saat t.

K : konstanta kapasitas bawaan sumberdaya (carrying capacity).

T : parameter masa tunda.

$N(t-T)$: banyaknya populasi suatu spesies pada waktu sebelum t.

Sifat solusi (3.4.2) berbeda dari model populasi logistik. Oleh karena itu solusi umumnya harus ditentukan secara numerik (Murray, 2002). Sekarang akan dianalisa solusi dari (3.4.2), dengan penalaran sebagai berikut.



Gambar 3.15 Analisa solusi pada model delay.

Misalkan untuk suatu $t = t_1, N(t_1) = K$ dan untuk suatu waktu $t < t_1$, $N(t\text{-}T) < K$. Karena $1 - \frac{N(t-T)}{K} > 0, \frac{dN(t)}{dt} > 0$, maka $N(t_1)$ menaik. Saat $t = t_1 + T$, $N(t\text{-}T) = N(t,) = K$, maka $\frac{dN(t)}{dt} = 0$. Untuk t, $+$ $T < t < t_2$, $N(t\text{-}T) > K$, maka $\frac{dN(t)}{dt} <$ 0dan $N(t)$ menurun sampai $t = t_2$+T, sehingga $\frac{dN(t)}{dt}$ = 0 lagi karena $N\ (t+T\text{-}T) = N(t_2) =$ K. Dari penjelasan tersebut terdapat perilaku periodik. Perilaku periodik ini sangat penting dalam pemodelan populasi yang memiliki siklus tertentu (Murray, 2002). Model populasi untuk spesies tunggal *nondelay* tidak dapat membangkitkan perilaku periodik seperti model populasi eksponensial, logistik, dan *Spruce budworm*.

Misal t_p merupakan periode, maka $N(t + t_p = N(t)$ untuk semua t . Solusi setimbang dari (3.4.2) adalah pada $N = 0$ dan N = K. Akan ditunjukkan bahwa keadaan kesetimbangan $N = 0$ dan $N = K$ tak stabil dengan melakukan

linearisasi (3.4.2). Linearisasi sekitar N = 0 memenuhi $\frac{dN}{dt} \approx rN$, yang menunjukkan bahwa $N = 0$ merupakan pertumbuhan eksponensial takstabil. Sekarang yang perlu diperhatikan adalah $N=K$. Akan dibentuk (3.4.2) menjadi tak berdimensi dengan menuliskan,

$$N^*(t) = \frac{N(t)}{K},\ t^* = rt \qquad T^* = Rt, \qquad (3.4.5a)$$

Dengan tanda bintang menyatakan nilai tak berdimensi. Maka (3.4.2) (dengan menghilangkan tanda bintang untuk penyederhanaan) menjadi,

$$\frac{dN(t)}{dt} = N(t)\left[1 - N(t\ T)\right] \qquad (3.4.5b).$$

Pada (3.4.5b) solusi setimbangnya pada $N=0$ dan $N=1$. Linearisasi sekitar $N=1$, dengan menulis,

$$N(t) = 1 + n(t) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dn(t)}{dt} \approx -n(t-T) \qquad (3.4.6)$$

Solusi untuk $n(t)$ berbentuk,

$$n(t) = ce^{\lambda t} \qquad (3.4.7)$$

dengan c suatu konstanta dan nilai-nilai eigen λ merupakan solusi persamaan transenden (3.4.7) untuk T > 0. Agar n(t) merupakan fungsi eksponensial naik, maka solusi dari λ harus memenuhi Re(λ) > 0

Misal $\lambda = \mu \rightarrow i\omega + Mo$. Akan dicari bilangan real μ_o sehingga semua solusi λ memenuhi Re(λ) < , μ_o . Modulus dari (3.4.7), yaitu $|\lambda| = e^{\mu T} \rightarrow \infty$, maka $e^{\mu T} \rightarrow \infty$, sehingga $\mu \rightarrow -\infty$. Jadi terdapat suatu bilangan μ_o yang membatasi Re(λ) di atas. Misalkan $z = \frac{1}{\lambda}$ dan $w(z) = 1 + ze^{-T/z}$ maka w(z) memiliki nilai

singularitas pada z = 0. Nilai singularitas ialah suatu nilai fungsi yang menyebabkan fungsi itu tak tedefinisi (Wiley, 1979). Jadi pada lingkungan sekitar z = 0, w(z) = 0 memiliki akar kompleks sebanyak takhingga. Jadi terdapat takhingga akar dari λ.

Sekarang akan diambil bagian real dan imajiner dari persamaan (3.4.7), disebut,

$$\mu = -e^{\mu T}\cos(\omega T), \omega = e^{-\mu T}\sin(\omega T), \qquad (3.4.8)$$

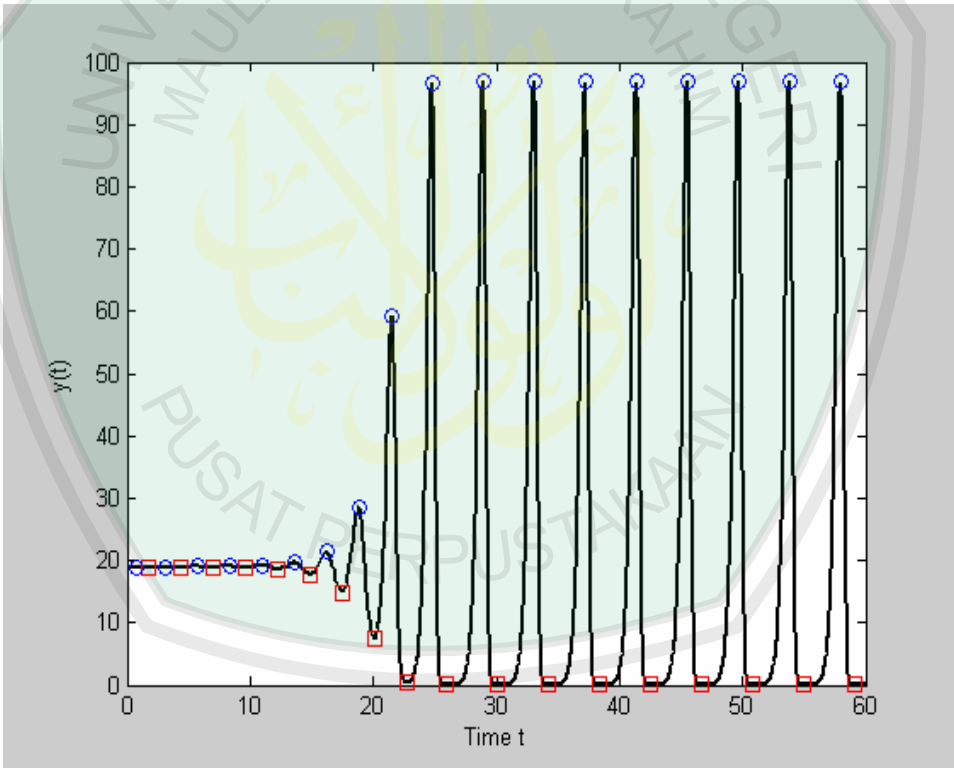
dan menentukan *range* dari T sedemikian sehingga ,u < 0. Pertama, misal ditetapkan λ real, yaitu ω = 0. Dari (3.4.8), ω = 0 memenuhi persamaan kedua dan yang pertama menjadi $\mu = e^{-\mu T}$. Dalam hal ini tidak terdapat akar positif $\mu > 0$ karena $e^{-\mu T} > 0$ untuk semua μT. Kedua, misalkan ω < 0, dari (3.4.8) jika ω merupakan solusi, maka begitu juga dengan -ω. Tanpa mengurangi sifat keumuman, perhatikan ω > dari persamaan Dari persamaan (3.4.8) yang pertama, agar $\mu > 0$ diperlukan $\omega T < \frac{\pi}{2}$ karena $e^{-\mu T} > 0$ untuk semua μT Jika μ = 0, persamaan (3.4.8) yang kedua hanya memiliki solusi ω = 1 pada T = $\frac{\pi}{2}$. Gradien dari $\mu T - e^{-\mu T}\cos(\omega T)$ pada μ= 0, sebut, $\left.\frac{\partial \mu}{\partial T}\right|_{T=\pi/2} > 0$. Jadi diperoleh syarat untuk T agar stabil, yaitu

$$0 < T < \frac{\pi}{2} \qquad (3.4.9)$$

Kembali ke persamaan (3.4.2), setelah analisa di atas, dapat diperoleh bahwa keadaan setimbang N(t) = K stabil jika 0 < rT <π/2 dan takstabil untuk rT

> $\pi/2$. Nilai $rT = \pi/2$ merupakan nilai bifurkasi (Murray, 2002), yang membuat karakter solusi dari (3.4.8) menjadi berubah secara tiba-tiba, dari keadaan setimbang stabil menjadi takstabil akibat perilaku periodik.

Sebagai contoh dari populasi persamaan differensial model delay ini jika nilai parameter yang di gunakan adalah N(0) = 100, r = 0.106 hari, K = 2800 dan T = 17 da T=-17 hari maka akan bisa dilihat dari grafik model delay di bawah untuk mengetahui bagaimana pertumbuhan spesies tunggal mengalami percepatan ataukah perlambatan.



Gambar 3.16. Grafik Pertumbuhan Model Delay

Dari grafik di atas bahwa dapat dilihat bahwa pertumbuhan spesies tunggal itu selalu memiliki siklus yaitu pertumbuhan yang mengalami percepatan dan dan perlambatan.

Sangat rumit untuk menentukan solusi umum model populasi *delay* secara kualitatif. Metode numerik bisa digunakan untuk mendapatkan hasil yang lebih baik (Murray, 2002).

3.5. Siklus Kehidupan dan Kematian dalam Islam dan Matematika

Bahwasannya kehidupan itu adalah suatu garis lurus yang tidak berbelok arah yang arahnya hanya satu tidak mempunyai arah lain, dan terfokus pada suatu yang dituju saja. Ia hanya mempunyai satu sudut yang tetap/ kemiringan garis yang tetap dan tak akan berubah seperti gambar berikut:

Begitupula dalam suatu spesies tunggal misalnya dalam siklus kehidupan dan kematian itu tidak akan berbelok arah karena kehidupan dan kematian itu lurus telah diciptakan dan ditentukan oleh Allah S.W.T sejak ada dalam kandungan. Dalam perjalanan hidup seorang muslim tidak perlu berbelok arah, dari titik B ia hanya lurus menuju satu titik A yang tak ada duanya (Allah maha tunggal) dengan cara yang telah digariskan oleh sang pembuat hidup tersebut dengan aturan-aturan yang indah dalam yang terdapat di dalam Al-Qur'an dan Al-Hadits. Orang yang tidak berbelok arah (konsisten) setelah memahami tujuan hidup ini sebenarnya hanya menuju Allah *Rabbul 'Alamin* saja, maka dialah orang yang bahagia. Firman Allah S.W.T dalam Al-Qur'an surat *Asy Syura: 15:*

فَلِذَٰلِكَ فَٱدۡعُۖ وَٱسۡتَقِمۡ كَمَآ أُمِرۡتَۖ وَلَا تَتَّبِعۡ أَهۡوَآءَهُمۡۖ وَقُلۡ ءَامَنتُ بِمَآ
أَنزَلَ ٱللَّهُ مِن كِتَٰبٖۖ وَأُمِرۡتُ لِأَعۡدِلَ بَيۡنَكُمُۖ ٱللَّهُ رَبُّنَا وَرَبُّكُمۡۖ لَنَآ أَعۡمَٰلُنَا
وَلَكُمۡ أَعۡمَٰلُكُمۡۖ لَا حُجَّةَ بَيۡنَنَا وَبَيۡنَكُمُۖ ٱللَّهُ يَجۡمَعُ بَيۡنَنَاۖ وَإِلَيۡهِ ٱلۡمَصِيرُ ١٥

Artinya :

> *Maka Karena itu Serulah (mereka kepada agama ini) dan tetaplah sebagai mana diperintahkan kepadamu dan janganlah mengikuti hawa nafsu mereka dan Katakanlah: "Aku beriman kepada semua Kitab yang diturunkan Allah dan Aku diperintahkan supaya berlaku adil diantara kamu. Allah-lah Tuhan kami dan Tuhan kamu. bagi kami amal-amal kami dan bagi kamu amal-amal kamu. tidak ada pertengkaran antara kami dan kamu, Allah mengumpulkan antara kita dan kepada-Nyalah kembali (kita)".*

Bahawasannya di dalam kehidupan ada yang dinamakan dengan populasi, disini populasi yang dipakai adalah tentang kelahiran dan kematian dimana angka kelahiran dan angka kematian tersebut bisa dirumuskan dalam matematika yakni : $\frac{dN}{dt} = k_b N(t) - k_d N(t)$. Dengan rumus tersebut kita dapat menghitung banyaknya angka kelahiran dan angka kematian serta kita dapat menaksir atau mengira-ngira bagaimana pertumbuhan pada waktu yang akan datang apakah angka kelahiran lebih besar dari angka kematian ataukah sebaliknya angka kelahiran akan lebih kecil dari angka kematian dan ataukah angka kelahiran sama dengan angka kematian. Dan banyak faktor-faktor yang dapat mempengaruhi misalnya banyaknya wabah penyakit yang bisa mengakibatkan penduduk meninggal, ada juga banyak wanita hamil yang tidak menginginkan kelahiran anaknya karena hasil dari hubungan gelap akhirnya di bunuh anaknya tersebut dengan jalan aborsi. Makanya kita sebagai manusia ciptaan Allah S.W.T harus bisa mensyukuri

dan dengan hati ynag ikhlas akan adanya kehidupan di dunia ini dan kematian (kehidupan di akhirat) pasti hidup kita akan lebih merasa damai dan tentram sampai akhir hayat karena semua manusia berasal dari tanah dan akan kembali ke tanah.

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM PUSAT PERPUSTAKAAN

BAB IV

PENUTUP

4.1. Kesimpulan

1. *Model Populasi Eksponensial*

   Bentuk model populasi eksponensial adalah sebagai berikut:

$$\frac{dN}{dt} = k_b N(t) - k_d N(t)$$

   Dengan analisis secara kualitatif, telah diperoleh solusi umum, kesetimbangan, dan stabilitas solusi setimbangnya. Hasil analisis model ini yaitu kesetimbangan populasi terjadi jika angka kematian sama dengan angka kelahiran. Populasi akan naik jika angka kelahiran lebih besar dari angka kematian, dan akan turun jika angka kelahiran lebih kecil dari angka kematian.

2. *Model Populasi Logistik*

   Bentuk model populasi logistik adalah sebagai berikut:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) - \frac{r}{K} N^2(t).$$

   Dengan analisis secara kualitatif, telah diperoleh solusi umum, kesetimbangan, dan stabilitas solusi setimbangnya. Hasil analisis model ini yaitu populasi akan setimbang menuju kapasitas sumberdaya. Hal ini terjadi karena kapasitas sumberdaya yang terbatas (konstan) diperebutkan oleh setiap individu dalam populasi.

3. *Model Populasi Spruce budworm*

Bentuk model populasi spruce budworm adalah sebagai berikut:

$$\frac{dN}{dt} = r_b\, N(t) - \frac{r_b}{K_b} N^2(t) - \frac{BN^2(t)}{A^2 + N^2(t)}$$

Dengan analisis secara kualitatif, telah diperoleh kesetimbangan, dan stabilitas solusi setimbangnya. Hasil analisis model ini yaitu jika $\frac{Ar_b}{B} \leq \frac{3q(9q+4)}{2(3q^3+2q^2+27q-6)}$ dengan q = $\frac{K_b}{A}$, maka akan terdapat satu solusi setimbang. Interpretasi model populasi ini, populasi akan sangat cepat tumbuh jika kapasitas sumberdaya (K_b) cukup besar dan tanpa adanya faktor predasi $\left(\frac{BN^2(t)}{A^2+N^2(t)}\right)$. Karena terdapat efek saturasi di dalam faktor predasi, maka pertumbuhan populasi dapat dikendalikan dengan memperbesar faktor predasi atau mengurangi kepadatan kapasitas sumberdaya.

4. *Model Delay*

Bentuk model populasi delay adalah sebagai berikut:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\left[1 - \frac{N(t-T)}{K}\right]$$

Dengan analisis secara kualitatif, telah diperoleh kesetimbangan, dan stabilitas solusi setimbangnya. Hasil interpretasi model ini yaitu banyaknya populasi akan berubah-ubah secara periodik, karena terdapat waktu tunda individu untuk mencapai tingkat kedewasaan dalam

berkembang baik, periode kehamilan, keberadaan sumberdaya, dan sebagainya.

4.2. Saran

Dalam penulisan tugas akhir ini, masih terdapat kekurangan-kekurangan. Oleh karena itu, bagi pihak-pihak yang berminat melanjutkan atau mengembangkan kajian, maka penulis menyarankan untuk menganalisis model populasi kontinu lain, juga pengaruh faktor-faktor lain selain yang tersebut di atas dan juga tidak menggunakan satu spesies tunggal saja serta spesies yang spesifik.

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM PUSAT PERPUSTAKAAN

DAFTAR RUJUKAN

Arya, Jagdish C. and Robin W. Lardner. 1979. *Mathematics for The Biological Scienes*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Bassar, Ron. 2000. *Qualitative Analysis of Spruce Budworm Outbreaks and Declines.* (online). http://online.redwoods.co.caus/instruct/darnold/, diakses 18 januari 2008

Bear, H.S. 1962. *Differential Equations.* Washington: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Davis, Paul W. 1992. *Differential Equations for Mathematics, Science, and Engineering.* New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Kartono. 2001. *Maple untuk Persamaan Differensial.* Yogyakarta: J&J Learning.

Ludwig et. Al.1978. *Qualitative Analysis of insect Outbreak Systems: The Spruce Budworm and Forest*. Canada: Journal of Animal and Ecology.

Murray, J.D. 2002. *Matematical Biology 1 An Introduction, 3rd Edition.* New York: Springer.

Odum, Eugene P. 1975. ECOLOGY: *The Link Between The Natural and The Social Sciences, second edition*. New York: Holt Rinehart and Winston.

Pasya, Ahmad Fuad. 2004. *Dimensi Sains Al-Qur'an.* Solo: Penerbit Tiga Serangkai.

Purcell, Edwin J. and Dale Varberg. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitis, Edisi Kelima.* Terjemahan oleh I Nyoman susila dkk. Bandung: Penerbit Erlangga.

Rahardi, Rustanto dkk. 2003. *Persamaan Differential Biasa, Common Textbook (Edisi Revisi)*. Malang: Technical Cooperation Project for Development of Science and Mathematics teaching for Primary ang secondary Education in Indonesia (IMSTEP).

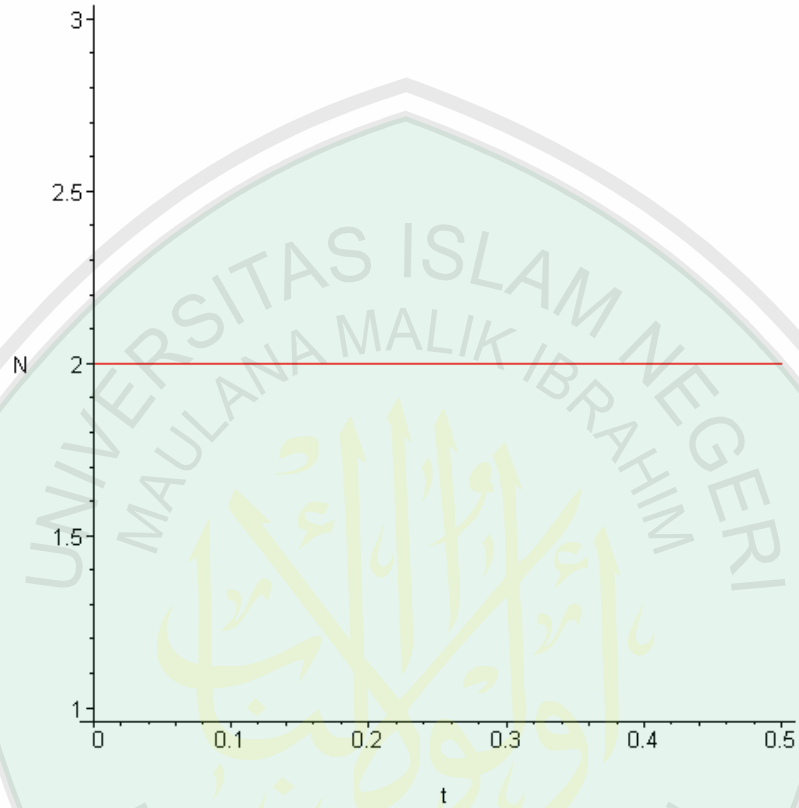
Bakar, Abu Syaikh. 2004. *Tafsir Al-Qur'an AL-AISAR*. Jakarta: Darus Sunnah.

Wylie, Charles Raymond. 1979. *Differential Equations*. New York: McGraw-Hill, Inc.

Wikipedia. (online). http://en.wikipedia.org/, diakses tanggal 11 februari 2008.

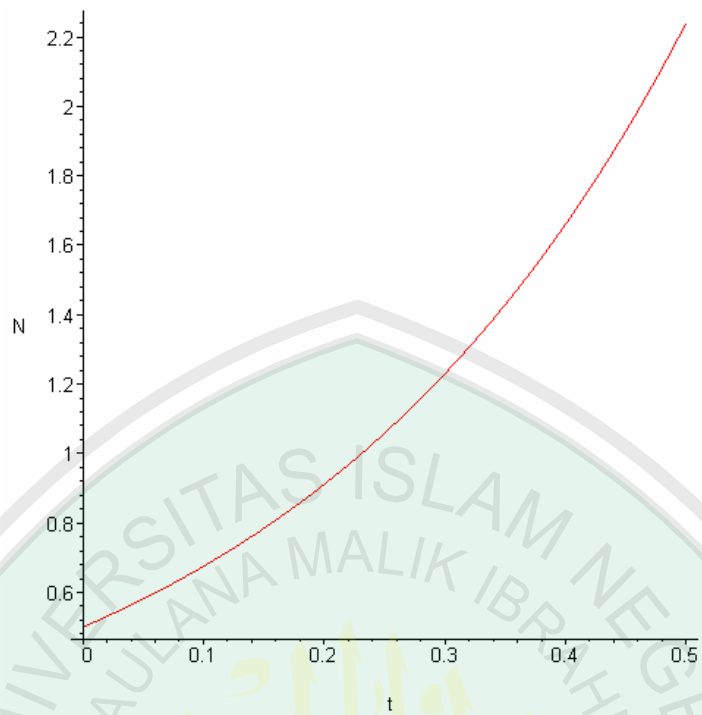
```
> restart:with(plots):
Warning, the name changecoords has been redefined

> pers:=dsolve({D(N)(t) = 0, N(0)=2}, type=numeric,
range=0..0.5):
> odeplot(pers);
```

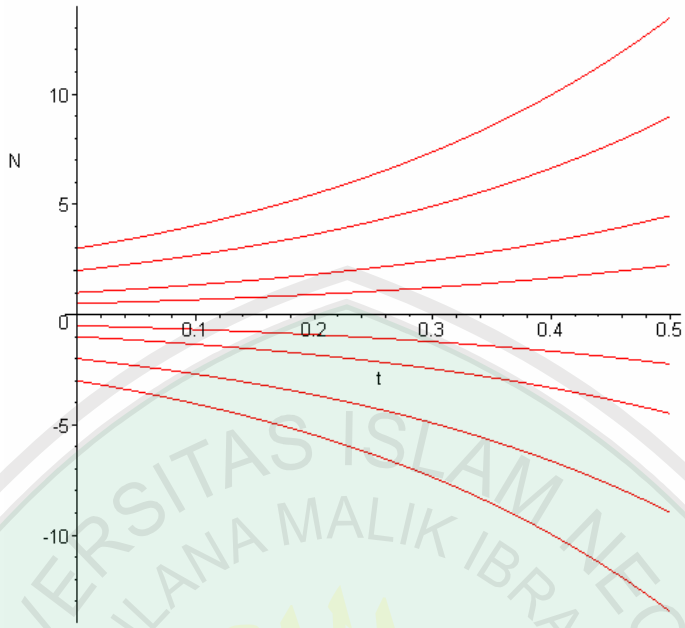



```
> p:=odeplot(pers):
> pers1:=dsolve({D(N)(t) = 3*N(t), N(0)=0.5}, type=numeric,
range=0..0.5):
> odeplot(pers1);p1:=odeplot(pers1):
```

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM PUSAT PERPUSTAKAAN

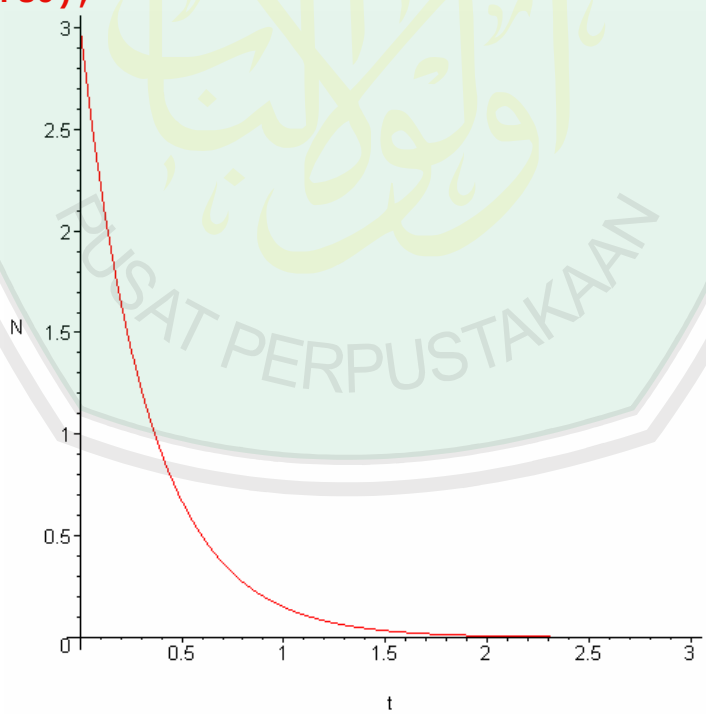



```
> pers2:=dsolve({D(N)(t) = 3*N(t), N(0)=2}, type=numeric,
range=0..0.5):
> p2:=odeplot(pers2):
> pers3:=dsolve({D(N)(t) = 3*N(t), N(0)=1}, type=numeric,
range=0..0.5):
> p3:=odeplot(pers3):
> pers4:=dsolve({D(N)(t) = 3*N(t), N(0)=3}, type=numeric,
range=0..0.5):
> p4:=odeplot(pers4):
> pers5:=dsolve({D(N)(t) = 3*N(t), N(0)=-0.5}, type=numeric,
range=0..0.5):
> p5:=odeplot(pers5):
> pers6:=dsolve({D(N)(t) = 3*N(t), N(0)=-2}, type=numeric,
range=0..0.5):
> p6:=odeplot(pers6):
> pers7:=dsolve({D(N)(t) = 3*N(t), N(0)=-1}, type=numeric,
range=0..0.5):
> p7:=odeplot(pers7):
> pers8:=dsolve({D(N)(t) = 3*N(t), N(0)=-3}, type=numeric,
range=0..0.5):
> p8:=odeplot(pers8):
> display({p1,p2,p3,p4,p5,p6,p7,p8});
```



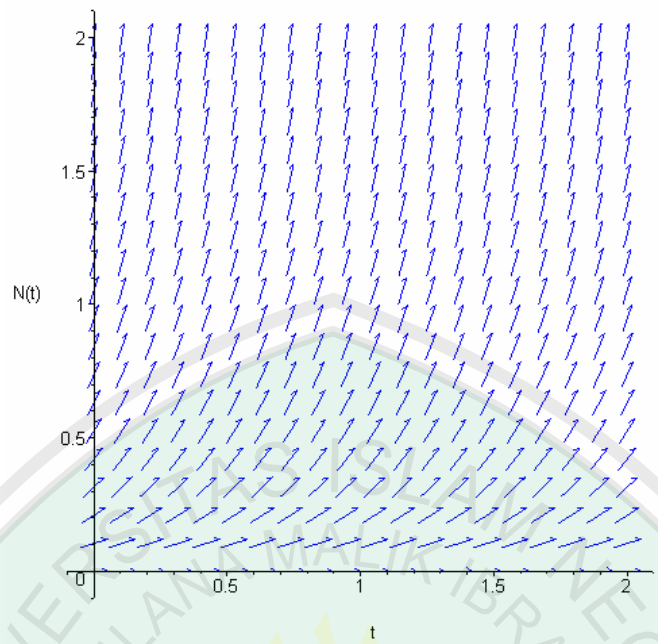

```
> pers9:=dsolve({D(N)(t) = -3*N(t), N(0)=3}, type=numeric,
range=0..3):

> odeplot(pers9);
```

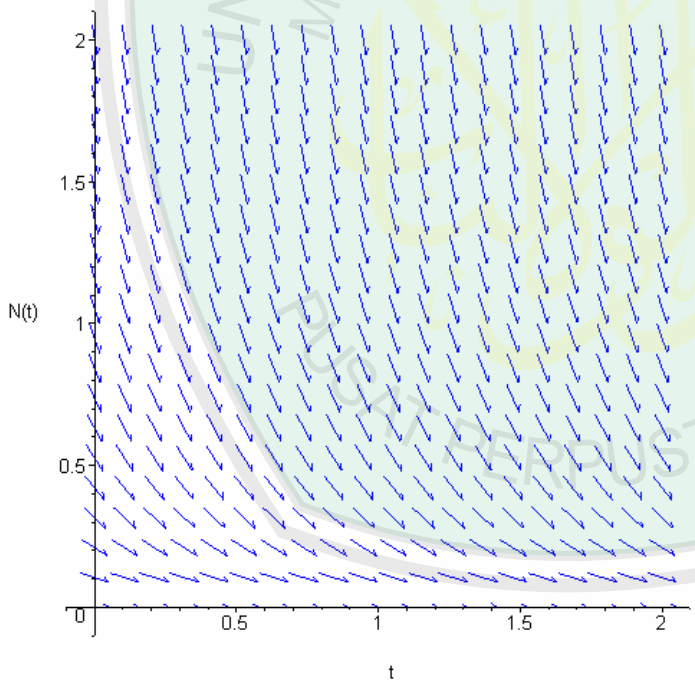



```
> with(DEtools):
> dfieldplot([diff(N(t),t)=3*N(t)], [N(t)],t=0..2, N=0..2,
arrows=small,color=blue);
```

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM PUSAT PERPUSTAKAAN




```
> dfieldplot([diff(N(t),t)=-3*N(t)],[N(t)],t=0..2, N=0..2,
arrows=small,color=blue);
```

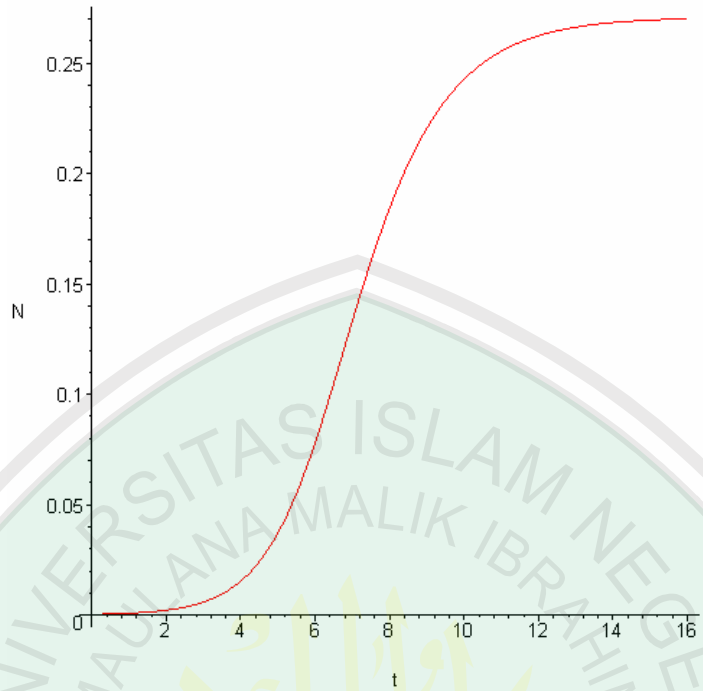



```
>restart:with(plots):with(DEtools):
Warning, the name changecoords has been redefined

> eq1:=dsolve({D(N)(t)=N(t)*(1-3*N(t)/5)-
(N(t)^2/(0.25+N(t)^2)), N(0)=0.0003},
type=numeric,range=0..16);


> odeplot(eq1);
```

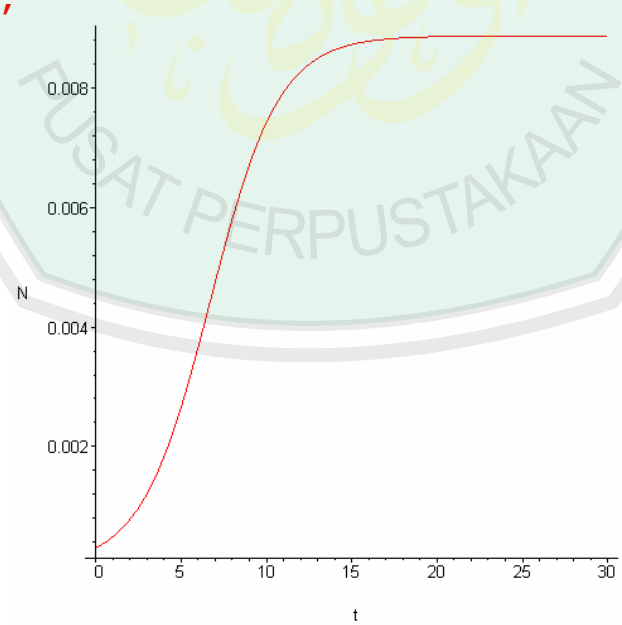
in *eq1* the value of *rb* = 0.5, *K* = 5/3, *B* = 1, and *A* = 0.5



n *eq1* the value of *rb* = 0.5, *K* = 5/3, *B* = 1, and *A* = 0.5

```
> eq2:=dsolve({D(N)(t)=(0.5)*N(t)*(1-5*N(t)/8)-(N(t)^2/((4/225)+N(t)^2)),
N(0)=0.0003},type=numeric,range=0..30);

> odeplot(eq2);
```



in *eq2* the value of *rb* = 3, *K* = 8/5, *B* = 1, and *A* = 2/15.

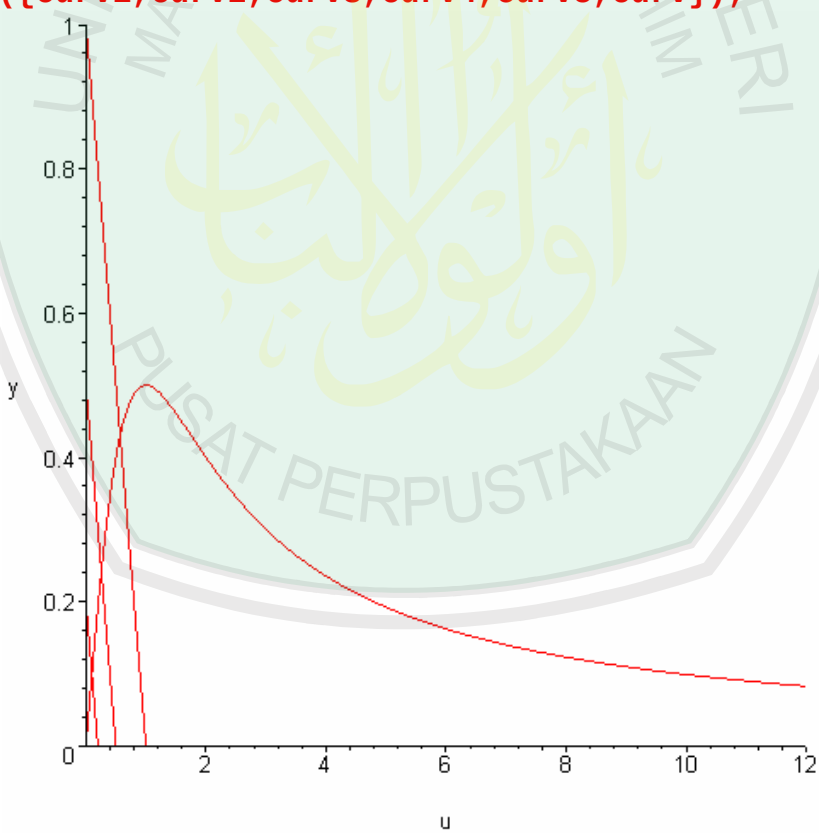
```
>
> restart:with(plots):with(DEtools):
Warning, the name changecoords has been redefined
```

```
> lu:=R*(1-u/q);ru:=u/(u^2+1);curv:=plot(ru,u=0..12,y=0..1):
```

$$lu := R\left(1 - \frac{u}{q}\right)$$

$$ru := \frac{u}{u^2 + 1}$$

```
> y1:=1-u:
> curv1:=plot(y1,u=0..11,y=0..1):
> y2:=0.5-u:
> curv2:=plot(y2,u=0..11,y=0..1):
> y3:=0.2-u:
> curv3:=plot(y3,u=0..11,y=0..1):
> y4:=15-u:
> curv4:=plot(y4,u=0..11,y=0..1):
> y5:=50-u:
> curv5:=plot(y5,u=0..11,y=0..1):
> display({curv1,curv2,curv3,curv4,curv5,curv});
```




```
> diff(ru,u);
```

$$\frac{1}{u^2 + 1} - \frac{2\,u^2}{(u^2 + 1)^2}$$

```
> j:=1/(u^2+1)-(2*u^2/(u^2+1)^2)=0;
```

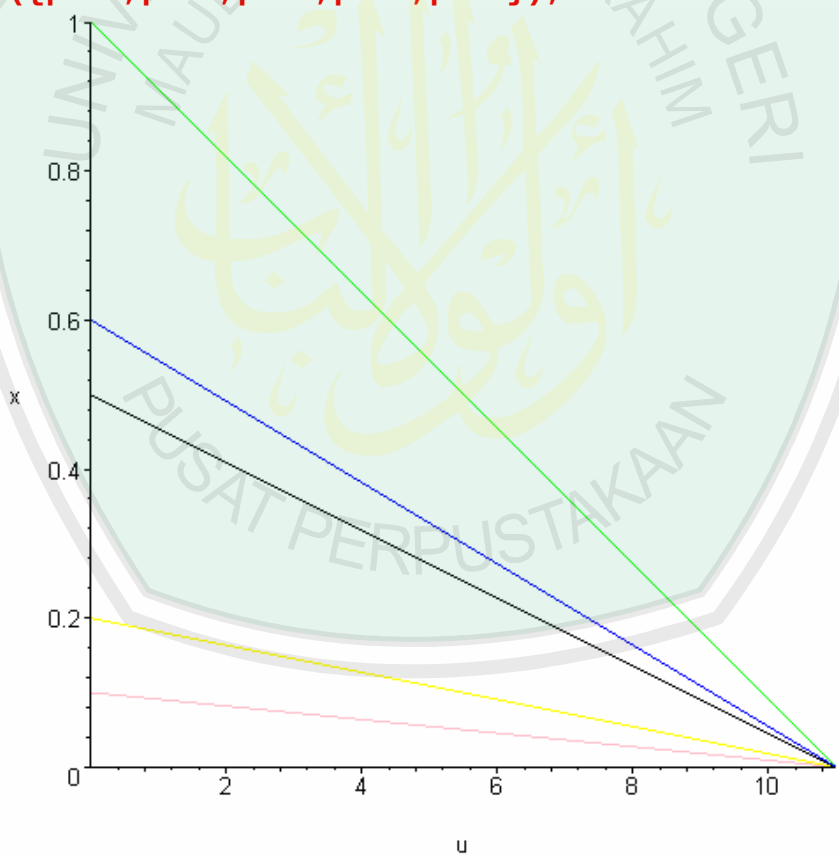
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM PUSAT PERPUSTAKAAN

$$j := \frac{1}{u^2+1} - \frac{2\,u^2}{(u^2+1)^2} = 0$$

```
> solve (j);
```

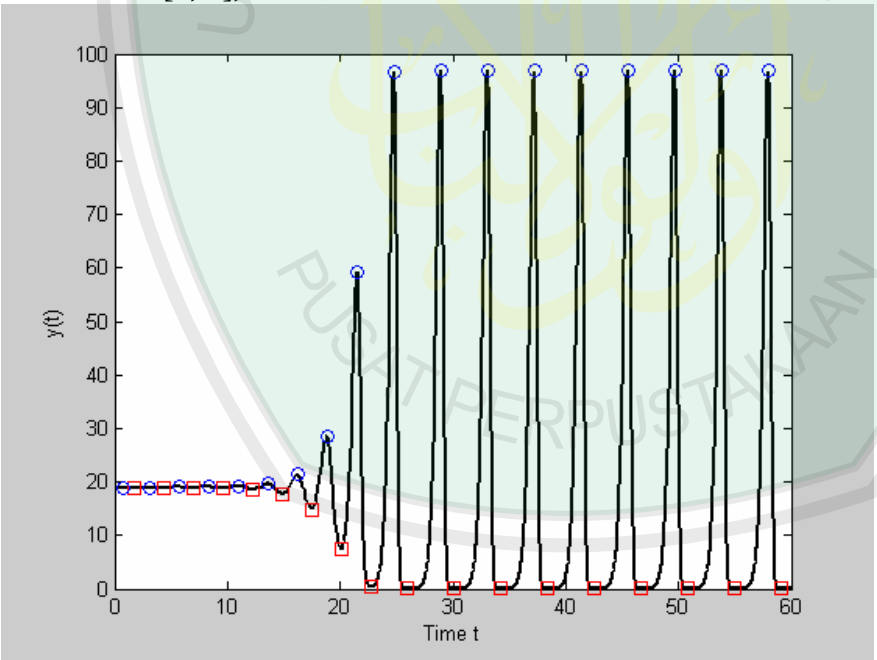
$$-1, 1$$

```
> x1:=1-(1/11)*u:
> plo1:=plot(x1,u=0..11,x=0..1,color=green):
> x2:=0.6-(0.6/11)*u:
> plo2:=plot(x2,u=0..11,x=0..1,color=blue):
> x3:=0.5-(0.5/11)*u:
> plo3:=plot(x3,u=0..11,x=0..1,color=black):
> x4:=0.2-(0.2/11)*u:
> plo4:=plot(x4,u=0..11,x=0..1,color=yellow):
> x5:=0.1-(0.1/11)*u:
> plo5:=plot(x5,u=0..11,x=0..1,color=pink):
> display({plo1,plo2,plo3,plo4,plo5});
```



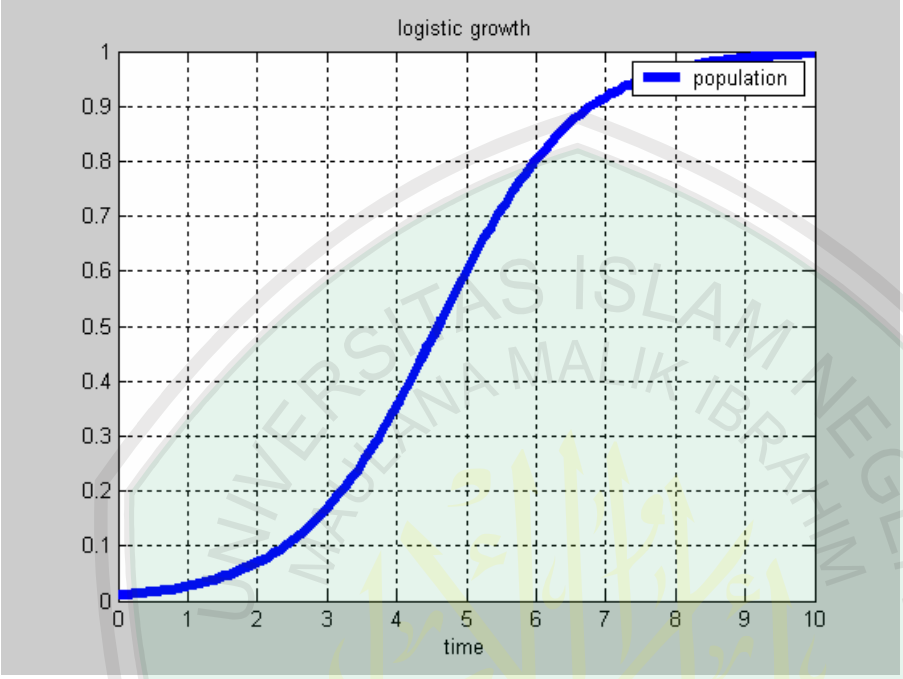

```
function sol = ch4ex4
r = 3.5; m = 19;
options = ddeset('Events',@events,'InitialY',19.001,...
'RelTol',1e-4,'AbsTol',1e-7);
sol = dde23(@ddes,0.74,19,[0, 60],options,r,m);
```

```
plot(sol.y,sol.yp);
xlabel('y(t)');
ylabel('y''(t)');
n1 = find(sol.ie == 1);
x1 = sol.xe(n1);
y1 = sol.ye(1,n1);
n2 = find(sol.ie == 2);
x2 = sol.xe(n2);
y2 = sol.ye(1,n2);
figure
plot(sol.x,sol.y,'k',x1,y1,'rs',x2,y2,'bo')
xlabel('Time t');
ylabel('y(t)');
%=========================================================
function dydt = ddes(t,y,Z,r,m)
dydt = r*y*(1 - Z/m);
function [value,isterminal,direction] = events(t,y,Z,r,m)
dydt = ddes(t,y,Z,r,m);
value = [dydt; dydt];
direction = [+1; -1];
isterminal = [0; 0];
```




```
T = 10; % maximum time
r = 1; % rate
kappa = 1; % capacity
c0 = 0.01; % initial value
%--------------------- execution --------------------------
t = linspace (0,T,100);
e = exp(r*t);
```

```
c = c0*kappa*e./(kappa+c0*(e-1));
%--------------------- graphical output -------------------
plot (t,c); grid;
xlabel ('time'); legend ('population');
title ('logistic growth');
```



UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM PUSAT PERPUSTAKAAN