DIGRAF DARI TABEL CAYLEY GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh:
SYIFAUL CHASANAH
NIM: 04510021

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2008

DIGRAF DARI TABEL CAYLEY GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
Dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
SYIFAUL CHASANAH
NIM 04510021

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2008

DIGRAF DARI TABEL CAYLEY GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh:
SYIFAUL CHASANAH
NIM 04510021

Telah Disetujui untuk Diuji
Malang, 15 Oktober 2008

Dosen Pembimbing I,

Wahyu Henky Irawan, M.Pd
NIP 150 300 415

Dosen Pembimbing II,

Achmad Nashichuddin, M.A
NIP 150 302 531

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M. Si
NIP 150 318 321

DIGRAF DARI TABEL CAYLEY GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh:
SYIFAUL CHASANAH
NIM 04510021

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal:
20 Oktober 2008

Susunan Dewan Penguji:		**Tanda Tangan**
1. Penguji Utama	**: Abdussakir, M.Pd** **NIP: 150 327 247**	( )
2. Ketua	**: Evawati Alisah, M.Pd** **NIP: 150 291 271**	( )
3. Sekretaris	**: Wahyu H. Irawan, M.Pd** **NIP: 150 300 415**	( )
4. Anggota	**: Ach. Nashichuddin, M.A** **NIP: 150 302 531**	( )

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP: 150 318 321

SURAT PERNYATAAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Syifaul Chasanah
NIM : 04510021
Fakultas : SAINTEK
Jurusan : Matematika
Judul Skripsi : Digraf Dari Tabel Cayley Grup Dihedral

Menyatakan bahwa skripsi tersebut adalah karya saya sendiri dan bukan karya orang lain, baik sebagian maupun keseluruhan, kecuali dalam bentuk kutipan yang telah disebutkan sumbernya.

Demikian surat pernyataan ini saya buat dengan sebenar-benarnya dan apabila pernyataan ini tidak benar, saya bersedia mendapatkan sanksi akademis.

Malang, 12 Oktober 2008
Yang menyatakan,

Syifaul Chasanah
NIM 04510021

Motto

خيرا لنا سأ نفعهم للنا س

Sebaik-baik manusia adalah yang paling bermanfaat bagi manusia yang lain

Persembahan

Karya tulis ini saya persembahkan kepada ayah dan ibu yang telah memberi semangat dalam meneruskan studi saya dengan baik.
Buat kakak Iil dan adik Doni yang telah membantu dalam mengerjakan karya tulis ini dan dengan sabar memberi dorongan.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'alamin segala puja dan puji syukur ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufiq dan hidayah-Nya kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan tugas akhir yang berupa skripsi ini. Sholawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada Nabi Muhammmad SAW, beserta seluruh keluarga, sahabat serta pengikutnya. Selanjutnya tidak lupa penulis ucapkan banyak terima kasih atas segala bantuan dan dorongan serta bimbingan yang tulus ikhlas kepada yang terhormat:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
2. Prof. Drs Sutiman Bambang Sumitro, SU, D.Sc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.
3. Ibu Sri Harini, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.
4. Bapak Wahyu Henky Irawan, M.Pd yang telah bersedia meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan dan pengarahan selama penulisan skripsi di bidang matematika.
5. Bapak Achmad Nashichuddin, M.A yang telah bersedia memberikan bimbingan dan pengarahan selama penulisan skripsi di bidang agama.
6. Bapak dan Ibu dosen serta segenap civitas akademik di UIN Malang khususnya dari Fakultas Sains dan Teknologi.
7. Ayah dan Ibu yang telah mendidik dan memotivasi penulis dalam menyelesaiakan tugas akhir ini.
8. Kakak dan Adik yang telah memberi dukungan kepada penulis dalam mengerjakan skripsi.
9. Teman-teman Matematika angkatan 2004 beserta semua pihak yang telah membantu penyelesaian skripsi ini.

Adanya banyak kekurangan dalam penulisan skripsi ini disebabkan keterbatasan ilmu yang dimiliki oleh penulis, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran demi perbaikan skripsi ini. Semoga sedikit hal yang tertulis dapat memberikan wacana baru yang bermanfaat. Amin.

Malang, 25 September 2008

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Chasanah, Syifaul. 2008. **Digraf dari Tabel Cayley Grup Dihedral**. Skripsi Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.

Pembimbing I : Wahyu Henky Irawan, M.Pd.
Pembimbing II : Achmad Nashichuddin, M.A.

Kata kunci: *Digraf, isomorfik, digraf Euler,digraf Hamilton, tabel Cayley , grup dihedral, refleksi, rotasi*

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika, yang di dalamnya terdapat bahasan mengenai digraf. Digraf (graf berarah) D adalah suatu himpunan tak kosong dari elemen-elemen yang disebut titik dan himpunan sisi berarah atau busur (mungkin kosong) yang menghubungkan titik-titik tersebut. Digraf D_1 isomorfik pada digraf D_2 jika terdapat pemetaan satu-satu dan onto ϕ, disebut suatu isomorfisme, dari $V(D_1)$ ke $V(D_2)$ sedemikian hingga $(uv) \in E(D_1)$ jika dan hanya jika $(\phi u, \phi v) \in E(D_2)$. Digraf yang memuat sirkuit Euler yaitu sirkuit yang memuat setiap busur D disebut digraf Euler. Suatu digraf terhubung D merupakan digraf Hamilton jika terdapat sikel (berarah) yang memuat setiap titik D. Sikel semacam ini disebut sikel Hamilton dalam D.

Suatu digraf dapat digambarkan dari suatu grup, salah satunya dari grup dihedral. Grup dihedral adalah grup dari himpunan simetri-simetri dari segi-*n* beraturan, dinotasikan D_{2n}, untuk setiap *n* bilangan bulat positif, $n \geq 3$. Di sini grup dihedral akan dibagi menjadi dua himpunan bagian yaitu:

i) $x = \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}\}$ atau yang dikenal dengan himpunan bagian rotasi;
ii) $y = \{s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}\}$ atau yang dikenal dengan himpunan bagian refleksi.

Digraf yang digambarkan berdasarkan tabel Cayley grup dihedral dapat dibentuk menurut baris atau kolomnya. Berdasarkan analisa penulis, untuk mendapatkan suatu digraf terhubung, dibuat suatu penggabungan antara dua elemen dari grup dihedral. Penggabungan dalam penulisan ini, lebih terfokus pada pasangan elemen *x* dengan *y* serta pasangan elemen *y* dengan *y*. Karena dengan pemilihan pasangan tersebut diharapkan akan mendapatkan suatu digraf terhubung. Pasangan elemen *x* dengan *x* tidak diambil, karena penggabungannya akan menghasilkan suatu digraf tak terhubung.

Berdasarkan pembahasan dalam skripsi ini, digraf yang digambarkan berdasarkan tabel Cayley grup dihedral mempunyai beberapa ciri. Penggabungan antara elemen *x* dan *y*, serta *y* dan *y* menjadikan digraf terhubung walaupun ada beberapa yang tak terhubung, setiap digraf dari penggabungan yang sama akan saling isomorfik, terdapat sikel Hamilton dan trail Euler.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan penelaahan tentang bilangan-bilangan, bentuk-bentuk dan lambang-lambang. Berkaitan dengan definisi tersebut, matematika seringkali dibagi menjadi tiga cabang, yaitu aljabar, analisis dan geometri. Aljabar membahas tentang bilangan dan pengabstrakannya, analisis membahas kekonvergenan dan limit, sedangkan geometri membahas tentang bentuk dan konsep-konsep yang berkaitan (Kerami, 2003: 158). Dalam perkembangan selanjutnya, cabang matematika menjadi semakin banyak dan salah satunya adalah teori graf. Teori graf berkembang sangat pesat, bahkan dalam perkembangannya dapat disejajarkan dengan aljabar yang lebih dahulu berkembang (Santosa, 2002: 1).

Graf merupakan suatu himpunan tak kosong dari elemen-elemen yang disebut titik dan himpunan sisi yang menghubungkan titik-titik tersebut. Penggunaan istilah dalam teori graf belum sepenuhnya bersifat baku. Misalkan untuk menyatakan suatu titik digunakan istilah node, dan untuk menyatakan suatu sisi digunakan istilah busur atau garis. Istilah-istilah dalam teori graf dapat diterima jika digunakan secara konsisten.

Teori graf mempunyai banyak manfaat, karena teori-teorinya dapat diterapkan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Permasalahan yang dirumuskan dengan teori graf dibuat sederhana, yaitu diambil aspek-aspek yang diperlukan dan dibuang aspek-aspek lainnya (Purwanto, 1998: 1). Graf digunakan untuk menggambarkan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Gambaran dari graf adalah dengan menyatakan objek dengan titik atau *vertex*, sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan garis atau *edge*.

Kesederhanaan bahasannya menyebabkan teori graf dapat diaplikasikan ke dalam beberapa bidang ilmu. Teori graf dapat diaplikasikan dalam bidang kimia, biologi, ilmu sosial, musik dan masih banyak bidang ilmu yang lain. Teori graf juga dapat diaplikasikan pada beberapa cabang ilmu matematika yang lain, salah satunya adalah aplikasi teori graf pada aljabar abstrak khususnya yang berkaitan dengan grup. Di mana pembahasan dalam teori graf menjelaskan suatu digraf (graf berarah) yang dapat digambarkan dari suatu grup dihedral. Digraf yang terbentuk dari suatu grup dapat mempunyai beberapa ciri.

Teori graf menurut definisinya adalah himpunan tidak kosong yang memuat elemen-elemen yang disebut titik, dan suatu daftar pasangan tidak terurut elemen itu yang disebut sisi. Dalam al-Qur'an elemen-elemen pada graf yaitu titik dapat menggambarkan obyek yang meliputi Pencipta (Allah) dan makhluk-Nya, sebagaiman firman Allah dalam Al-Qur'an surat Al-An'am ayat 38 disebutkan:

وَمَا مِن دَآبَّةٍ فِي ٱلۡأَرۡضِ وَلَا طَٰٓئِرٖ يَطِيرُ بِجَنَاحَيۡهِ إِلَّآ أُمَمٌ أَمۡثَالُكُمۚ مَّا
فَرَّطۡنَا فِي ٱلۡكِتَٰبِ مِن شَيۡءٖۚ ثُمَّ إِلَىٰ رَبِّهِمۡ يُحۡشَرُونَ ٣٨

Artinya: "Dan tiadalah binatang yang berada di bumi dan burung yang terbang dengan kedua sayapnya, melainkan umat-umat seperti kamu. Tiadalah Kami alpakan sesuatupun di dalam Al-Kitab, kemudian kepada Tuhanlah mereka dihimpunkan" (Q.S. Al-An'am: 38).

sedangkan sisi atau garis yang menghubungkan elemen-elemen tersebut menggambarkan hubungan antara Allah dengan makhluk-Nya dan juga hubungan sesama makhluk yang terjalin. Adanya makhluk-makhluk hidup yang disebutkan Allah, sebagaimana yang disebutkan oleh ayat ini, merupakan suatu pengetahuan yang diberikan Allah kepada manusia dan sebagai bahan pemikiran dan penelitian.

Matematika menguraikan hanya satu hal, proses berpikir, atau lebih tepat, penalaran yang menjurus kepada pembuktian. Sesuai dengan definisi tersebut, belum adanya kejelasan mengenai digraf yang dibentuk dari suatu grup, menuntut dilakukannya suatu penelitian untuk membuktikan kebenarannya. Sebagaimana pembinaan sikap yang diajarkan dalam Al-Qur’an surat An-Naml ayat 64 (Abdussakir, 2007: 54).

قُلۡ هَاتُواْ بُرۡهَٰنَكُمۡ إِن كُنتُمۡ صَٰدِقِينَ ٦٤

Artinya: “….Katakanlah: Tunjukkanlah bukti kebenaranmu, jika kamu memang orang-orang yang benar” (Q.S. An-Naml: 64).

Sebagai matematikawan, tidak boleh mengikuti dugaan atau zhan, hal yang masih lemah dan diragukan. Hal ini sangat tepat sebagai wujud aplikasi QS An-Najm ayat 28. (Abdussakir, 2007: 54)

وَمَا لَهُم بِهِۦ مِنۡ عِلۡمٍۖ إِن يَتَّبِعُونَ إِلَّا ٱلظَّنَّۖ وَإِنَّ ٱلظَّنَّ لَا يُغۡنِي مِنَ ٱلۡحَقِّ شَيۡـٔٗا ٢٨

Artinya: “Dan mereka tidak mempunyai sesuatu pengetahuanpun tentang itu. Mereka tidak lain hanyalah mengikuti persangkaan (zhan) sedangkan *persangkaan (zhan) itu tiada berfaedah sedikitpun terhadap kebenaran" (Q.S. An-Najm: 28).*

Berdasarkan uraian tersebut dalam penelitian ini akan dikaji tentang graf yang diberikan oleh suatu grup, dengan mengambil judul skripsi **"Digraf dari Tabel Cayley Grup Dihedral"**.

1.2 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana ciri-ciri digraf yang digambarkan berdasarkan tabel Cayley grup dihedral?

1.3 Fokus Masalah

Digraf yang digambarkan berdasarkan tabel Cayley dapat dibentuk menurut baris atau kolomnya. Untuk mendapatkan suatu digraf terhubung, dibuat suatu penggabungan antara dua elemen dari grup dihedral. Penggabungan dalam penulisan skripsi ini, lebih terfokus pada:

a. Pasangan elemen rotasi dengan refleksi
b. Pasangan elemen refleksi dengan refleksi

Karena dengan pemilihan pasangan tersebut diharapkan akan mendapatkan suatu digraf terhubung. Pasangan elemen rotasi dengan rotasi tidak diambil, karena penggabungannya akan menghasilkan suatu digraf tak terhubung.

1.4 Tujuan

Sesuai dengan rumusan masalah yang telah dipaparkan di atas, tujuan dari penelitian ini adalah menunjukkan ciri-ciri digraf yang digambarkan berdasarkan tabel Cayley grup dihedral.

1.5 Manfaat

a. Bagi penulis

Penelitian ini digunakan sebagai sarana untuk mengembangkan dan memperluas pengetahuan tentang ilmu yang telah diperolehnya dalam mengikuti perkuliahan selama ini, khususnya yang berkaitan dengan teori graf dan grup dihedral.

b. Bagi Lembaga

Hasil penelitian ini dapat digunakan sebagai tambahan bahan pustaka, tambahan sarana pembelajaran dan bahan pengembangan ilmu pengetahuan khususnya ilmu matematika yang berkaitan dengan teori graf dan grup.

1.6 Batasan Masalah

Pembahasan mengenai teori graf dalam matematika sangat luas. Agar tidak melampaui apa yang telah menjadi tujuan dari penulisan skripsi ini maka dibutuhkan suatu batasan masalah yang dapat digunakan sebagai acuan dalam penulisan lebih lanjut. Penulisan ini akan dibatasi pada masalah teori graf yang berkaitan graf isomorfik, sikel Hamilton dan trail Euler dari digraf grup dihedral D_6 dan D_8.

1.7 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur (kepustakaan). Sedangkan langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah

a. Merumuskan masalah

Sebelum peneliti melakukan kegiatannya, terlebih dahulu dibuat suatu rencana penelitian bermula dari suatu masalah yang berkaitan tentang ciri-ciri digraf yang digambarkan berdasarkan tabel Cayley grup dihedral.

b. Mengumpulkan data

Mengumpulkan data merupakan prosedur yang sistematis dan standart untuk memperoleh data yang diperlukan. Melalui buku Graph an Introductiory Approach (Robin J. Wilson dan John J. Watkins) dan sumber-sumber lain yang di dalamnya terdapat data-data yang relevan dengan pembahasan.

c. Menganalisis data

Langkah-langkah yang diambil untuk menganalisis data dalam penelitian ini adalah:

1. Menggambarkan digraf dari setiap elemen dalam tabel Cayley
2. Menggabungkan dua digraf yang telah terbentuk, yaitu dari pasangan rotasi dengan refleksi dan pasangan refleksi dengan refleksi.
3. Menunjukkan bahwa digraf yang terbentuk adalah isomorfik, mengandung sirkuit Euler dan sikel Hamilton.

d. Membuat kesimpulan

Kesimpulan dalam penulisan skripsi ini berupa tabel mengenai ciri-ciri digraf yang terbentuk dari tabel Cayley grup dihedral yaitu berkaitan dengan keisomorfikan, adanya sirkuit Euler dan sikel Hamilton.

e. Melaporkan (membuat laporan)

Langkah terakhir dari kegiatan penelitian adalah menyusun laporan dari penelitian yang telah dilakukan, yaitu berupa skripsi sebagai syarat untuk memperoleh gelar sarjana.

1.8 Sistematika Penulisan

Bab pertama merupakan pendahuluan yang berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, fokus masalah, tujuan, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab kedua menguraikan kajian teori yang berkaitan dengan pembahasan, antara lain pengertian graf, adjacent dan incident, derajat titik, graf beraturan-r graf terhubung, pengertian digraf, digraf isomorfik, digraf Euler, digraf Hamilton, operasi biner, pengertian grup, grup dihedral yang diawali dengan rotasi dan refleksi, dan hubungan Tuhan dengan Makhluk-Nya.

Bab ketiga merupakan pembahasan yang berisi tentang bagaimana ciri-ciri digraf yang digambarkan berdasarkan tabel Cayley grup dihedral setelah digabungkan dengan memilih sebarang dua pasangan elemennya.

Bab keempat adalah penutup yang berisi tentang kesimpulan dari hasil penelitian dan saran sebagai acuan bagi peneliti selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Graf

2.1.1 Pengertian Graf

Definisi 1

Graf G adalah suatu himpunan tidak kosong dari elemen-elemen yang disebut titik dan himpunan sisi (mungkin kosong) yang menghubungkan titik-titik tersebut (Wilson dan Watkins, 1990: 10).

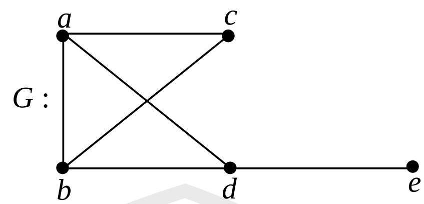
Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan E(G). Sedangkan banyaknya unsur di V disebut order dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di E disebut size dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari G tersebut cukup ditulis dengan p dan q (Chartrand dan Lesniak, 1986: 4).

Perhatikan graf G yang memuat himpunan titik V dan himpunan sisi E seperti berikut ini.

$V = \{ a, b, c, d, e\}$

$E = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (b, c), (d, e)\}$.

Graf G tersebut dapat digambar sebagai berikut



Gambar 2.1 Graf G

Graf G mempunyai 5 titik sehingga order G adalah $p = 5$. Graf G mempunyai 6 sisi sehingga size graf G adalah $q = 6$.

Graf G dengan $V = \{a, b, c, d, e\}$

$E = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (b, c), (d, e)\}$

Dapat juga ditulis dengan $V = \{a, b, c, d, e\}$

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$

dengan $e_1 = (a, b)$ $\quad$ $e_4 = (b, d)$

$e_2 = (a, c)$ $\quad$ $e_5 = (b, c)$

$e_3 = (a, d)$ $\quad$ $e_6 = (d, e)$

Definisi 2

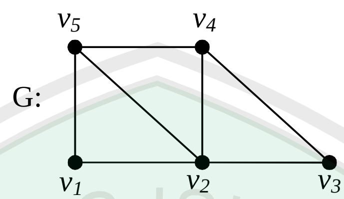
Graf H disebut subgraf dari G jika himpunan titik di H adalah subset dari himpunan titik-titik di G dan himpunan sisi-sisi di H adalah subset dari himpunan sisi di G. Dapat ditulis $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Jika H adalah subgraf G, maka dapat ditulis $H \subseteq G$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 8).

Perhatikan graf G yang memuat himpunan titik V dan himpunan sisi E seperti berikut ini.

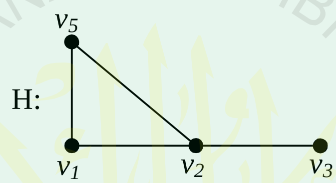
$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan

$E(G) = \{ (v_1\ v_2),(v_1\ v_5), (v_2\ v_3), (v_2\ v_4), (v_2\ v_5), (v_3\ v_4), (v_4 v_5)\}$

Graf *G* tersebut dapat digambar sebagai berikut



Gambar 2.2 Graf G



Gambar 2.3 Subgraf dari Graf G

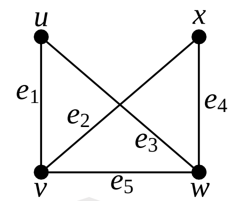
Gambar 2.2 dan 2.3 menunjukkan dua graf *G* dan *H* dan menunjukkan bahwa *H* subgraf *G*.

2.1.2 Adjacent dan Incident

Definisi 3

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik *u* dan *v*. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf *G*, maka *u* dan *v* disebut terhubung langsung (*adjacent*), *u* dan *e* serta *v* dan *e* disebut terkait langsung (*incident*). Untuk selanjutnya, sisi $e = (u,v)$ akan ditulis $e = uv$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 4).

Sebagai contoh perhatikan graf *G* yang memuat himpunan $V = \{u, v, w, x\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ berikut ini.



Gambar 2.4 Graf G

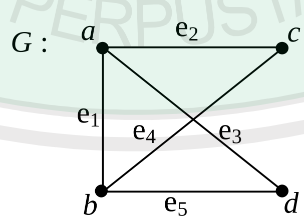
Dari Gambar 2.4 tersebut, titik *u* dan e_1 serta e_1 dan v adalah *incident* (terkait langsung) dan titik *u* dan *v* adalah *adjacent* (terhubung langsung).

2.1.3 Derajat Titik

Definisi 4

Derajat dari titik v di graf *G*, ditulis $\deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di *G* yang terkait langsung (*incident*) dengan *v*. Dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf *G*, maka tulisan $\deg_G(v)$ disingkat menjadi $\deg(v)$ (Chartrand dan Leniak, 1986:7).

Perhatikan graf *G* berikut yang mempunyai himpunan titik $V = \{a, b, c, d\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$.



Gambar 2.5 Graf G

Berdasarkan gambar, diperolah bahwa

$\deg(a) = 3$ $\deg(c) = 2$

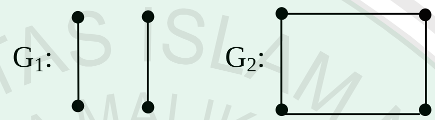
$\deg(b) = 3$ $\deg(d) = 2$

2.1.4 Graf Beraturan-r

Definisi 5

Graf beraturan – r adalah graf yang semua titiknya berderajat r, atau deg $v = r$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 9).

Contoh:



Gambar 2.6 Graf G Beraturan-1 dan Beraturan-2

2.2 Graf Terhubung

Definisi 6

Sebuah jalan (*walk*) u-v di graf G adalah barisan berhingga (tak kosong) $W : u = u_0, e_1, u_1, e_2, \ldots, u_{n-1}, e_n, u_n = v$ yang berselang seling antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik u dan diakhiri dengan titik v, dengan $e_i = u_{i-1}u_i$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$ adalah sisi di G. u_0 disebut titik awal, u_n disebut titik akhir, $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ disebut titik internal, dan n menyatakan panjang dari W (Chartrand dan Lesniak, 1986: 26).

Definisi 7

Jalan u-v disebut *tertutup* atau *terbuka* jika $u = v$ atau $u \neq v$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 26).

Definisi 8

Jalan u-v yang semua sisinya berbeda disebut *trail* u-v (Chartrand dan Lesniak, 1986: 26).

Definisi 9

Trail *u-v* yang titiknya berbeda disebut *path* (lintasan) *u-v* (Chartrand dan Lesniak, 1986: 26).

Definisi 10

Suatu titik u yang membentuk lintasan *u-u* disebut jalan trivial (Chartrand dan Lesniak, 1986: 26).

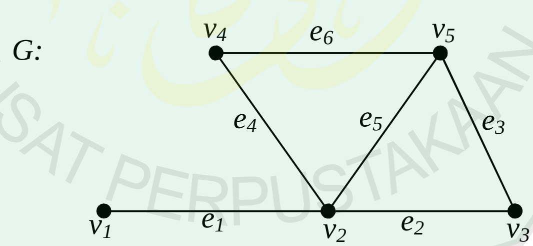
Definisi 11

Suatu jalan tertutup (*closed trail*) yang tak-trivial pada Graf *G* disebut Sirkuit *G*. (Chartrand dan Lesniak, 1986: 28).

Definisi 12

Sirkuit $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \ldots, v_{n-1}, e_{n-1}, e_n, v_n, v_1$ dengan $n \geq 3$ dan v_i berbeda untuk setiap *i* disebut Sikel (*cycle*) (Chartrand dan Lesniak, 1986: 28).

Contoh:



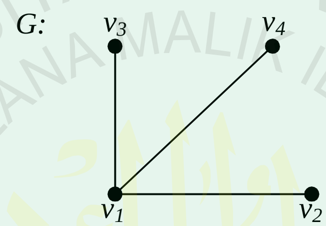
Gambar 2.7 Jalan pada Graf

Dari graf di atas jalan $v_1, e_1, v_2, e_5, v_5, e_6, v_4, e_4, v_2, e_2, v_3$ disebut sebagai *trail*, jalan $v_1, e_1, v_2, e_5, v_5, e_6, v_4$ disebut sebagai *path* (lintasan), jalan $v_2, e_2, v_3, e_3, v_5, e_6, v_4, e_4, v_2$ disebut sebagai sirkuit tetapi bukan sikel karena ada satu titik v_1 yang tidak terlewati.

Definisi 13

Misalkan u dan v titik berbeda pada graf G. Maka titik u dan v dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika terdapat lintasan $u - v$ di G. Sedangkan suatu graf G dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika untuk setiap titik u dan v di G terhubung (Chartrand dan Lesniak, 1986: 28).

Contoh:



Gambar 2.8 Graf Terhubung (*connected*)

2.3 Digraf

2.3.1 Definisi Digraf

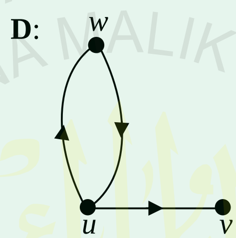
Definisi 14

Digraf (*Graf berarah/ Directed Graph*) **D** adalah pasangan himpunan (V, E) di mana V adalah himpunan tak kosong dari elemen-elemen yang disebut *titik* (*vertex*) dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan berurutan (u,v), yang mempunyai arah dari u ke v, dari titik-titik u,v di V yang disebut *busur*. Himpunan titik di **D** dinotasikan dengan V(**D**) dan himpunan busur dinotasikan dengan E(**D**) (Chartrand dan Lesniak, 1986: 14 dan Wilson dan Watkins, 1990:81).

Himpunan titik di digraf **D** disebut order dari **D** dan dilambangkan dengan *p(***D***)*, atau *p*. Sedangkan himpunan busur di digraf **D** adalah Size *q(***D***)* atau *q* (Chartrand dan Lesniak, 1986: 15).

Contoh:

Perhatikan digraf **D** dengan himpunan titik *V(***D***)* = {*u*, *v*, *w*} dan himpunan busur *E(***D***)* = {(*u*, *w*), (*w*, *u*), (*u*, *v*)} berikut ini.

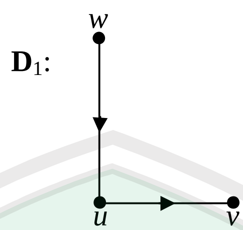


Gambar 2.9 Digraf **D**

Definisi 15

Digraf $\mathbf{D}_1$ disebut subdigraf dari digraf **D** jika himpunan titik di $\mathbf{D}_1$ adalah subset dari himpunan titik-titik di **D** dan himpunan sisi-sisi di $\mathbf{D}_1$ adalah himpunan sisi di **D**. Dapat ditulis $V(\mathbf{D}_1) \subseteq V(\mathbf{D}_2)$ dan $E(\mathbf{D}_1) \subseteq E(\mathbf{D}_2)$. Jika $\mathbf{D}_1$ adalah subdigraf **D**, maka dapat ditulis $\mathbf{D}_1 \subset \mathbf{D}$. Subdigraf $\mathbf{D}_1$ dari **D** adalah subdigraf merentang jika $\mathbf{D}_1$ mempunyai order yang sama seperti **D**. (Chartrand dan Lesniak, 1986: 16)

Contoh:



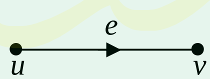
Gambar 2.10 Subdigraf dari Digraf **D**

2.3.2 Adjacent dan Incident

Definisi 16

Misal **D** digraf dan *u* dan *v* adalah titik-titik pada digraf **D**. Jika $e = (u, v)$ adalah busur di digraf **D**, maka *e* dikatakan menghubungkan *u* dan *v*, *u* adjacent ke *v* dan *v* *adjacent* dari *u*. Jika busur *e* diarahkan dari *u* ke *v* maka busur *e* disebut *incident* dari *u* dan *incident* ke *v*. (Chartrand dan Lesniak, 1986: 15 dan Wilson dan Watkins, 1990:84)

Contoh:



Gambar 2.11 Digraf **D**

Dari gambar tersebut, *u adjacent* ke *v* dan *v adjacent* dari *u* dan busur *e* *incident* dari *u* dan *incident* ke *v*.

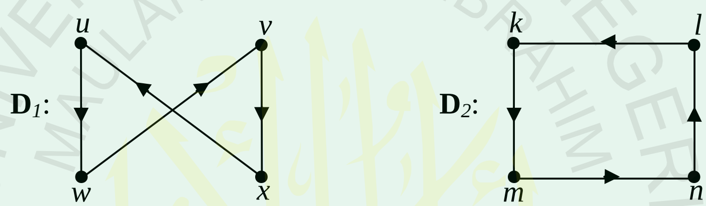
2.3.3 Digraf Isomorfik

Definisi 17

Digraf $\mathbf{D}_1$ isomorfik pada digraf $\mathbf{D}_2$ jika terdapat pemetaan satu-satu dan onto ϕ disebut suatu isomorfisme, dari $V(\mathbf{D}_1)$ ke $V(\mathbf{D}_2)$ sedemikian hingga

$(uv) \in E(\mathbf{D}_1)$ jika dan hanya jika $(\phi u, \phi v) \in E(\mathbf{D}_2)$. Relasi "isomorfisme pada" adalah suatu relasi ekivalen pada digraf. Jadi, relasi ini membagi himpunan dari semua digraf pada kelas ekivalen; dua digraf tidak isomorfik jika keduanya termasuk pada kelas ekivalen berbeda. Jika $\mathbf{D}_1$ isomorfik pada $\mathbf{D}_2$, maka dikatakan $\mathbf{D}_1$ dan $\mathbf{D}_2$ isomorfik dan ditulis $\mathbf{D}_1 \cong \mathbf{D}_2$. (Chartrand dan Lesniak, 1986: 15)

Contoh:



Gambar 2.12 Digraf Isomorfik

$\mathbf{D}_1$ isomorfik dengan $\mathbf{D}_2$ karena terdapat pemetaan satu-satu antara $V(\mathbf{D}_1)$ ke $V(\mathbf{D}_2)$, yaitu:

$$\begin{array}{lcccc} V(\mathbf{D}_1): & u & v & w & x \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_2): & k & n & m & l \end{array}$$

sedemikian hingga $ux \in E(\mathbf{D}_1)$ jika dan hanya jika $kl \in E(\mathbf{D}_2)$.

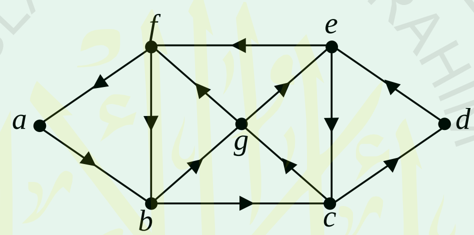
2.3.4 Digraf Euler

Definisi 18

Digraf terhubung **D** merupakan digraf Euler jika terdapat trail tertutup yang memuat setiap busur di **D**; trail semacam ini disebut trail Euler di **D**.

Digraf terhubung **D** dikatakan dapat ditelusuri busurnya jika terdapat trail terbuka yang memuat setiap busur di **D**. (Wilson dan Watkins, 1990: 132) Konsep trail Euler, sirkuit Euler dan digraf Euler sangat banyak dipolakan setelah graf bagiannya. Trail Euler digraf terhubung **D** adalah trail terbuka **D** yang memuat setiap busur **D**; sirkuit Euler **D** adalah sirkuit yang memuat setiap busur **D**. Digraf yang memuat sirkuit Euler disebut digraf Euler. (Chartrand dan Lesniak, 1986: 58)

Contoh:



Gambar 2.13 Digraf Euler

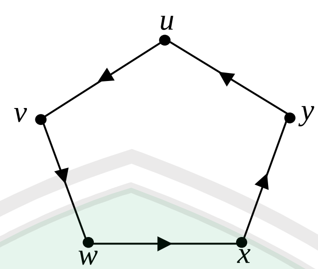
Digraf pada gambar di atas adalah digraf Euler karena terdapat sirkuit yang memuat semua busur pada digraf yaitu: *a*, *b*, *c*, *g*, *f*, *b*, *g*, *e*, *c*, *d*, *e*, *f*, *a*.

2.3.5 Digraf Hamilton

Definisi 19

Suatu digraf terhubung **D** merupakan digraf Hamilton jika terdapat sikel (berarah) yang memuat setiap titik **D**. Sikel semacam ini disebut sikel Hamilton dalam **D**. (Wilson dan Watkins, 1990:148)

Contoh:



Gambar 2.14 Digraf Hamilton

Digraf tersebut merupakan digraf Hamilton karena memuat sikel yang memuat setiap titik pada digraf, yaitu: *u*, *v*, *w*, *x*, *y*, *u*.

2.4 Operasi Biner

Misalkan S suatu himpunan yang tidak kosong. Operasi $\circ$ pada elemen-elemen S disebut biner, apabila setiap dua elemen a, $b \in S$ maka $(a \circ b) \in S$. Atau dapat dikatakan operasi $\circ$ merupakan pemetaan dari S x S ke S. Operasi $\circ$ pada S yang merupakan operasi biner bersifat tertutup (Sukirman, 2005: 35).

Misalkan operasi $\circ$ pada S adalah suatu operasi biner, maka berlaku:

1. Jika $\forall a, b \in S$ berlaku $a \circ b = b \circ a$, maka dikatakan bahwa operasi $\circ$ pada S bersifat komuatif.
2. Jika $\forall a, b \in S$ berlaku $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$, maka dikatakan bahwa operasi biner $\circ$ pada S bersifat assosiatif.
3. Jika ada $e \in S$ sedemikian hingga $\forall a \in S$ berlaku $a \circ e = e \circ a = a$, maka e disebut elemen identitas terhadap $\circ$.

4. Jika $\forall a \in S, \exists b \in S$ sedemikian hingga $a \circ b = b \circ a = e$ maka b disebut invers dari a terhadap operasi $\circ$. Invers dari a ditulis a^{-1}.

2.5 Grup

2.5.1 Definisi Grup

Definisi 20

Grup adalah suatu struktur aljabar yang dinyatakan sebagai $(G,*)$ dengan G tidak sama dengan himpunan kosong $(G \neq \phi)$ dan $*$ adalah operasi biner pada G yang memenuhi sifat-sifa berikut:

1. $(a*b)*c = a*(b*c)$, untuk semua $a,b,c \in G$ (yaitu $*$ assosiatif).
2. Ada suatu elemen e di G sehingga $a*e = e*a = a$, untuk semua $a \in G$ (e disebut identitas di G).
3. Untuk setiap $a \in G$ ada suatu element a^{-1} di G sehingga $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$ (a^{-1} di sebut invers dari a)

Sebagai tambahan, grup $(G,*)$ disebut *abelian* (grup komutatif) jika $a*b = b*a$ untuk semua $a,b \in G$ (Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 31 dan Dummit dan Foote, 1991:13-14).

Contoh:

Selidiki apakah (Z, +) dengan Z adalah himpunan bilangan bulat dan + operasi penjumlahan merupakan grup abelian.

Jawab:

Misalkan $a,b,c \in \mathrm{Z}$ dan + adalah operasi biner, (Z, +) adalah grup abelian jika memenuhi:

1. $(a+b)+c = a+(b+c)$, untuk semua $a,b,c \in Z$ (yaitu + assosiatif).

Untuk semua $a \in$ Z ada suatu element 0 di Z sehingga $a+0 = 0+a = a$ (0 disebut identitas di Z).

2. Untuk setiap $a \in$ Z ada suatu elemen $-a$ di Z sehingga $a+(-a) = (-a)+a = 0$ ($-a$ di sebut invers dari *a*).

3. Untuk semua $a,b \in Z$ maka $a+b = b+a$ (komutatif)

Jadi (Z, +) adalah grup abelian.

Contoh:

Selidiki apakah (Z, □) grup, Z adalah himpunan bilangan bulat dan □ didefinisikan dengan *a* □ *b* = *a* – 2*a*b + 1, di mana $a,b \in Z$.

Jawab:

1. Untuk setiap $a,b \in Z$ maka a □ b = a – 2ab + 1∈ Z
2. Untuk setiap $a,b,c \in Z$ maka

   (*a* □ *b*) □ *c* = *a* □ (*b* □ *c*)

   Untuk (*a* □ *b*) □ *c* = (*a* – 2*ab* + 1) □ *c*

   = (*a* – 2*ab* + 1) – 2(*a* – 2*ab* + 1)*c* + 1

   = *a* – 2*ac* – 2*ab* + 4*abc* – 2*c* + 2

   Untuk *a* □ (*b* □ *c*) = *a* □ (*b* – 2*bc* + 1)

   = *a*- 2*a*(*b* – 2*bc* + 1) + 1

   = *a* – 2*ab* + 4*abc* – 2*a* + 1

Karena (*a* □ *b*) □ *c* ≠ *a* □ (*b* □ *c*), maka (Z, □) bukan grup.

2.5.2 Grup Dihedral

Definisi 21

Pencerminan terhadap garis s adalah suatu pemetaan M_s sedemikian hingga untuk setiap titik P pada bidang dipenuhi:

$$M_s(p) = \begin{cases} P,\ jika\ P \in s \\ P'\ sehingga\ s\ adalah\ sumbu\ \overline{PP'},\ jika\ P \notin s \end{cases}$$

selanjutnya s disebut sumbu pencerminan atau disingkat cermin. (Kahfi, 1997: 58)

Definisi 22

Putaran searah jarum jam terhadap titik P sejauh $\theta°$ adalah pemetaan $R_{P,\theta}$ sedemikian hingga untuk setiap titik A pada bidang dipenuhi:

$$R_{P,\theta}(A) = \begin{cases} A,\ jika\ A = P \\ A'\ dengan\ PA' = PA\ dan\ \angle APA' = \theta,\ jika\ A \neq P \end{cases}$$

Titik P disebut pusat putaran dan θ disebut sudut putar. (Kahfi, 1997: 84)

Defnisi 23

Grup dihedral adalah grup dari himpunan simetri-simetri dari segi-*n* beraturan, dinotasikan D_{2n}, untuk setiap *n* adalah anggota bilangan bulat positif, $n \geq 3$. Dalam buku lain ada yang menuliskan grup dihedral dengan D_n (Dummit dan Foote, 1991: 24-25).

Misalkan D_{2n} suatu grup yang didefinisikan oleh *st* untuk $s, t \in D_{2n}$ yang diperoleh dari simetri (simetri sebagai fungsi pada segi-*n*, sehingga *st* adalah fungsi komposisi). Jika *s*, *t* akibat permutasi titik berturut-turut σ, τ, maka *st* akibat dari $\sigma \circ \tau$. Operasi biner pada D_{2n} adalah assosiatif karena fungsi komposisi adalah assosiatif. Identitas dari D_{2n} adalah identitas dari simetri (yang meninggalkan semua titik tetap), dinotasikan dengan 1, dan invers dari $s \in D_{2n}$ adalah kebalikan semua putaran dari simetri *s* (jadi jika *s* akibat permutasi pada titik σ, s^{-1} akibat dari σ^{-1}) (Dummit dan Foote, 1991: 24-25).

Karena grup dihedral akan digunakan secara ektensif, maka perlu beberapa notasi dan beberapa hitungan yang dapat menyederhanakan perhitungan selanjutnya dan membantu mengamati D_{2n} sebagai grup abstrak, yaitu:

(1) $1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}$

(2) $|s| = 2$,

(3) $s \neq r^i$ untuk semua *i*.

(4) $sr^i \neq sr^j$ untuk semua $0 \leq i, j \leq n-1$ dengan $i \neq j$. Jadi

$$D_{2n} = \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}\}$$

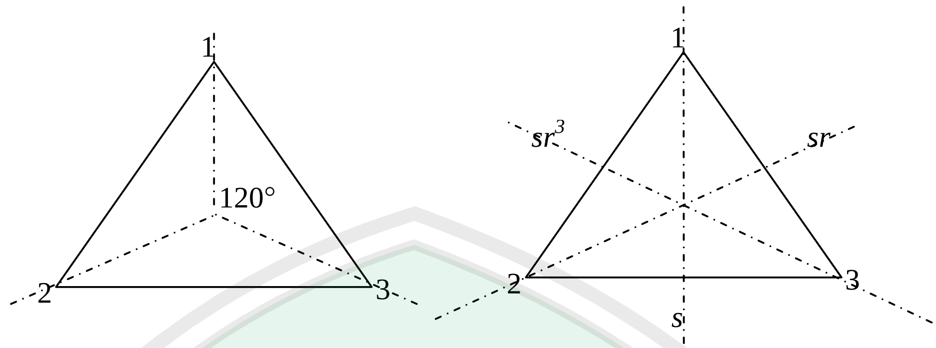
yaitu setiap elemen dapat dituliskan secara tunggal dalam bentuk $s^k r^i$ untuk $k = 0$ atau 1 dan $0 \leq i \leq n-1$.

(5) $sr = r^{-1}s$.

(6) $sr^i = r^{-i}s$, untuk semua $0 \leq i \leq n$ (Dummit dan Foote, 1991: 26).

Contoh:

D_6={1, *r*, r^2, *s*, *sr*, sr^2} merupakan grup dari himpunan simetri-simetri segitiga, yaitu:



Gambar 2.15 Simetri-simetri Segitiga

1: rotasi sejauh 360° r: rotasi sejauh 120° r^2: rotasi sejauh 240°

s: refleksi melalui 1 sr: refleksi melalui 2 sr^2: refleksi melalui 3

$D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$

2.6 Hubungan Tuhan dengan Makhluk-Nya

Allah SWT menyatakan bahwa Dia menguasai segala sesuatu, ilmu-Nya meliputi semua makhluk yang ada, Dialah yang mengatur alam semesta. Semua yang melata di permukaan bumi, semua yang terbang di udara, semua yang hidup di lautan, sejak dari yang kecil sampai yang besar, sejak dari yang nampak sampai kepada yang tidak nampak, hanya Dialah yang menciptakan, mengembangkan, mengatur dan memeliharanya (Gani, 1995:122). Sebagaimana firman Allah dalam surat Al-An'am ayat 38:

وَمَا مِن دَآبَّةٖ فِي ٱلۡأَرۡضِ وَلَا طَٰٓئِرٖ يَطِيرُ بِجَنَاحَيۡهِ إِلَّآ أُمَمٌ أَمۡثَالُكُمۚ مَّا
فَرَّطۡنَا فِي ٱلۡكِتَٰبِ مِن شَيۡءٖۚ ثُمَّ إِلَىٰ رَبِّهِمۡ يُحۡشَرُونَ ٣٨

Artinya: *"Dan tiadalah binatang yang berada di bumi dan burung yang terbang dengan kedua sayapnya, melainkan umat-umat seperti kamu. Tiadalah Kami alpakan sesuatupun di dalam Al-Kitab, kemudian kepada Tuhanlah mereka dihimpunkan" (Q.S. Al-An'am: 38).*

Setiap makhluk hidup di dunia ini pasti mempunyai hubungan, baik itu dengan penciptanya maupun dengan makhluk lainnya. Hubungan tersebut dapat merupakan hubungan yang baik maupun hubungan yang buruk. Semua makhluk yang diciptakan Allah itu akan lenyap atau mati dan kembali kepada pemiliknya, yaitu Allah SWT. Kemudian Dia akan membangkitkannya dan menghimpunnya untuk memberi pahala terhadap perbuatan yang baik dan memberikan siksaan terhadap perbuatan yang buruk (Gani, 1995:123).

2.6.1. Hubungan Tuhan dengan Manusia

Manusia diciptakan oleh Allah tidak lain hanya untuk beribadah kepada Allah, sebagaimana firman Allah dalam surat Azd-Zdariyat ayat 56:

وَمَا خَلَقْتُ ٱلْجِنَّ وَٱلْإِنسَ إِلَّا لِيَعْبُدُونِ ﴿٥٦﴾

Artinya: "Aku tidak menciptakan jin dan manusia melainkan agar mereka beribadah kepada-Ku" (Q.S. Azd-Zdariyat: 56).

Dalam kehidupan sehari-hari manusia sering lupa akan penciptanya dan seringkali tidak melaksanakan perintah-Nya dan tidak meninggalkan larangan-Nya. Padahal Allah telah memperingatkan manusia dengan firman-Nya bahwa manusia harus berada pada jalan yang benar yakni menjalankan perintah-Nya dan menjauhi larangan-Nya. Dalam Al-Qur'an surat Al-An'am ayat 153 dijelaskan bahwa:

وَأَنَّ هَٰذَا صِرَٰطِي مُسْتَقِيمًا فَٱتَّبِعُوهُ ۖ وَلَا تَتَّبِعُوا۟ ٱلسُّبُلَ فَتَفَرَّقَ بِكُمْ عَن سَبِيلِهِۦ ۚ ذَٰلِكُمْ وَصَّىٰكُم بِهِۦ لَعَلَّكُمْ تَتَّقُونَ ﴿١٥٣﴾

Artinya: "Dan bahwa (yang Kami perintahkan ini) adalah jalan-Ku yang lurus, maka ikutilah dia, dan janganlah kamu mengikuti jalan-jalan (yang lain), karena jalan-jalan itu mencerai beraikan kamu dari jalan-Nya. Yang demikian itu diperintahkan Allah agar kamu bertakwa" (Q.S. Al-An'am: 153).

Sebenarnya Allah telah memberi petunjuk kepada manusia dalam Al-Qur'an, mana perbuatan yang boleh dikerjakan dan mana perbuatan yang harus dijauhi oleh manusia. Kerana manusia mempunyai kelebihan dibandingkan dengan makhluk lain, maka dengan kelebihannya itulah dia dapat menentukan untuk memilih jalan yang akan ditempuhnya.

2.6.2. Hubungan Tuhan dengan Hewan

Bukanlah jenis manusia saja makhluk Allah yang hidup di bumi ini, banyak lagi macam dan ragam makhluk-makhluk lain, bahkan masih banyak yang belum diketahui manusia. Semuanya itu tunduk dan menghambakan diri kepada Allah SWT. Mengikuti perintah-perintah-Nya dan menghentikan larangan-larangan-Nya (Gani, 1995: 122). Salah satu contohnya adalah lebah yang diperintahkan untuk membuat sarangnya sendiri di tempat-tempat yang telah ditentukan oleh Allah sebagaimana firman-Nya dalam surat An-Nahl ayat 68:

وَأَوْحَىٰ رَبُّكَ إِلَى ٱلنَّحْلِ أَنِ ٱتَّخِذِى مِنَ ٱلْجِبَالِ بُيُوتًا وَمِنَ ٱلشَّجَرِ وَمِمَّا يَعْرِشُونَ ﴿٦٨﴾

Artinya: "Dan Tuhanmu mewahyukan kepada lebah: Buatlah sarang-sarang di bukit, di pohon-pohon kayu dan tempat yang dibikin manusia" (Q.S. An-Nahl: 68).

Tuhanmu telah memberikan ilham kepada lebah tentang sebab-sebab kehidupan dan sarana-sarana penghidupannya dengan cara agar ia membuat sarang-sarang di goa-goa gunung-gunung. Demikian pula agar ia membuat sarang-sarangnya di ranting-ranting pohon, di langit-langit rumah dan di tundun-tundun (Ibrahim, 1986: 211).

Demikianlah ayat ini menjelaskan bagaimana serangga-serangga ini dengan mendapatkan ilham dari Allah pulang ke sarang-sarangnya yang berbeda sejak dulu sampai sekarang ini (Ibrahim, 1986: 211-212).

2.6.3. Hubungan Manusia dengan Hewan

Hubungan manusia tidak hanya kepada Allah sebagai pencipta dan sesama manusia itu sendiri, tetapi manusia juga harus dapat berinteraksi dengan alam di sekitarnya. Misalkan saja interaksi manusia dengan hewan sebagai makhluk ciptaan Allah yang lain. Allah berfirman dalam surat An-Nahl ayat 66:

وَإِنَّ لَكُمْ فِي ٱلْأَنْعَٰمِ لَعِبْرَةً ۖ نُّسْقِيكُم مِّمَّا فِي بُطُونِهِۦ مِنۢ بَيْنِ فَرْثٍ وَدَمٍ
لَّبَنًا خَالِصًا سَآئِغًا لِّلشَّٰرِبِينَ ٦٦

Artinya: "Dan sesungguhnya pada binatang ternak itu benar-benar terdapat pelajaran bagi kamu. Kami memberimu minum daripada apa yang ada dalam perutnya (berupa) susu yang bersih antara tai dan darah yang mudah ditelan bagi orang-orang yang minum" (Q.S. An-Nahl: 66).

Sesungguhnya bagi kamu, wahai manusia di dalam binatang-binatang ternak yaitu onta dan kambing terdapat suatu petunjuk yang dapat kamu pergunakan sebagai ibarat dan kamu berpindah dalam petunjuknya dalam ketidak tahuan menuju pada pengenalan kepada pencipta yang menciptakan lagi Maha

Hakim dan Dia memberimu minum dari sebagian apa yang terdapat di dalam perut-perutnya berupa hal-hal yang terdapat diantara sisa-sisa makanan (yaitu Al-Fars - tai) dan darah sebagai susu yang bersih lagi lezat yang mudah didapatkan oleh orang-orang yang minum (Ibrahim, 1986: 214).

Dalam ayat lain Allah menyebutkan manfaat lain dari binatang ternak bagi manusia, yaitu dalam surat An-Nahl ayat 5 sampai 8:

وَٱلۡأَنۡعَٰمَ خَلَقَهَاۗ لَكُمۡ فِيهَا دِفۡءٞ وَمَنَٰفِعُ وَمِنۡهَا تَأۡكُلُونَ ٥

Artinya: "Dan Dia telah menciptakan binatang ternak untuk kamu, padanya ada bulu yang menghangatkan dan berbagai-bagai manfaat, dan kamu makan (apa yang dapat dimakan) daripadanya" (Q.S. An-Nahl: 5).

وَلَكُمۡ فِيهَا جَمَالٌ حِينَ تُرِيحُونَ وَحِينَ تَسۡرَحُونَ ٦

Artinya: "Dan kamu memperoleh pandangan indah padanya, ketika kamu membawanya kembali ke kandang, dan kamu melepaskannya ke tempat penggembalaan" (Q.S. An-Nahl: 6).

وَتَحۡمِلُ أَثۡقَالَكُمۡ إِلَىٰ بَلَدٖ لَّمۡ تَكُونُواْ بَٰلِغِيهِ إِلَّا بِشِقِّ ٱلۡأَنفُسِۚ إِنَّ
رَبَّكُمۡ لَرَءُوفٞ رَّحِيمٞ ٧

Artinya: "Dan ia memikul beban-bebanmu ke suatu negeri yang kamu tidak sanggup sampai kepadanya, melainkan dengan kesukaran-kesukaran (yang memayahkan) diri. Sesungguhnya Tuhanmu adalah Maha Pengasih lagi Maha penyayang" (Q.S. An-Nahl: 7).

وَٱلۡخَيۡلَ وَٱلۡبِغَالَ وَٱلۡحَمِيرَ لِتَرۡكَبُوهَا وَزِينَةٗۚ وَيَخۡلُقُ مَا لَا تَعۡلَمُونَ ٨

Artinya: "Dan (Dia telah menciptakan) kuda, bagal, dan keledai, agar kamu menungganginya dan (menjadikannya) perhiasan. Dan Allah menciptakan apa yang kamu tidak mengetahuinya"(Q.S. An-Nahl: 8).

Di dalam ayat ini menyebutkan tiga macam binatang tunggang yaitu: kuda, bagal dan himar yang masih merupakan kendaraan hiburan hingga kini (Jauhari, 1984: 202). Hal ini menunjukkan bahwa manusia dapat berinteraksi dengan binatang ternak. Hubungan tersebut dapat dilakukan dengan cara memelihara binatang ternak yang diberikan oleh Allah SWT agar dapat diambil manfaatnya, seperti memperoleh air susunya untuk diminum, dagingnya untuk dimakan, bulunya dapat dijadikan pakaian hangat dan dapat ditunggangi untuk mengantarkan manusia bepergian.

BAB III

PEMBAHASAN

Pada Bab III ini, akan dibahas mengenai digraf dari grup dihedral (D_6 dan D_8), yakni bagaimana ciri-ciri digraf yang digambarkan berdasarkan tabel Cayley grup dihedral. Kemudian digabungkan dengan memilih sebarang dua pasangan elemen grup dihedral.

Seperti yang telah diketahui bahwa grup dihedral merupakan grup dari himpunan simetri-simetri dari segi-*n* beraturan. Di sini grup dihedral akan dibagi menjadi dua himpunan bagian yaitu:

i) $x = \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}\}$ atau yang dikenal dengan himpunan bagian rotasi;

ii) $y = \{s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}\}$ atau yang dikenal dengan himpunan bagian refleksi

atau dapat dituliskan sebagai $x \subset D_{2n}$ dan $y \subset D_{2n}$.

Hasil operasi komposisi pada grup dihedral akan diberikan dalam bentuk tabel Cayley. Dari tabel Cayley tersebut akan digambarkan ke dalam bentuk digraf berdasarkan baris dan kolomnya. Langkah-langkah menggambarkan digraf dari tabel Cayley grup dihedral adalah sebagai berikut:

1. Menggambarkan setiap elemen dari grup dihedral sebagai titik pada digraf;
2. Menggambarkan busur pada digraf dengan cara memperhatikan operasinya, misalkan $a, b, c \in D_{2n}$, maka

$$a \circ b = c$$

dimana a: elemen yang mengoperasikan c: elemen hasil operasi

b: elemen yang dioperasikan

jika penggambaran digraf berdasarkan baris, maka *b* dan *c* digambarkan sebagai titik sedangkan *a* digambarkan sebagai busur berarah dari *b* ke *c*. Dan jika penggambaran digraf berdasarkan kolom *a* dan *c* digambarkan sebagai titik sedangkan *b* digambarkan sebagai busur berarah dari *a* ke *c*.

3. Selanjutnya akan digabungkan dua digraf dari masing-masing pasangan elemen *x* dengan *y* dan pasangan elemen *y* dengan *y* untuk memperoleh suatu digraf terhubung.

Setelah semua digraf tergambar, maka akan diuraikan beberapa hal yang berkaitan dengan pembahasan mengenai digraf, yaitu:

1. Keisomorfikan suatu digraf
2. Terdapatnya sikel
3. Terdapatnya trail tertutup.

Penulisan $a \circ D_{2n}$ dalam skripsi ini dimaksudkan untuk menyatakan operasi komposisi antara *a* yang dimisalkan sebagai salah satu elemen D_{2n} dengan semua elemen D_{2n}. Begitu juga dengan penulisan $D_{2n} \circ b$, dimaksudkan untuk menyatakan operasi komposisi antara semua elemen D_{2n} dengan b yang dimisalkan sebagai salah satu elemen D_{2n}.

3.1 Grup Dihedral D_6

Jika himpunan grup dihedral $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$ dikaitkan dengan suatu operasi komposisi maka hasilnya dapat ditunjukkan pada tabel Cayley sebagai berikut:

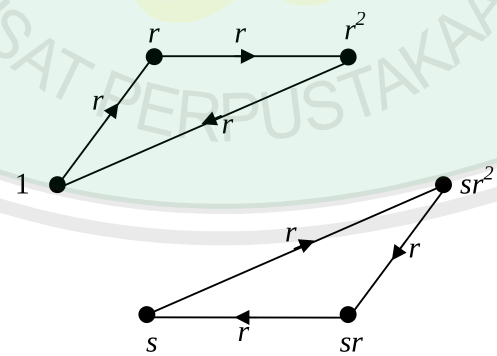
Tabel 3.1. Tabel Cayley D_6

$\circ$	1	r	r^2	s	sr	sr^2
1	1	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	sr
r^2	r^2	1	r	sr	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	1	r	r^2
sr	sr	sr^2	s	r^2	1	r
sr^2	sr^2	s	sr	r	r^2	1

Dari tabel Cayley tersebut, hasil operasi komposisi grup dihedral akan digambarkan ke dalam bentuk digraf. Penggambaran yang dilakukan akan dibedakan berdasarkan baris dan kolom dari tabel Cayley.

3.1.1. Digraf Grup Dihedral D_6 Berdasarkan Baris

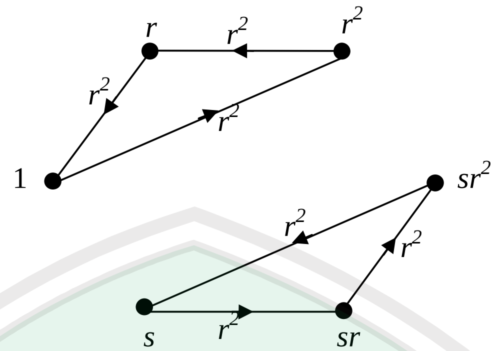
D$_1$:



Gambar 3.1. Digraf sikel 3 hasil Operasi $r \circ D_6$

(baris 2 dari tabel)

D$_2$:



Gambar 3.2. Digraf sikel 3 hasil Operasi $r^2 \circ D_6$

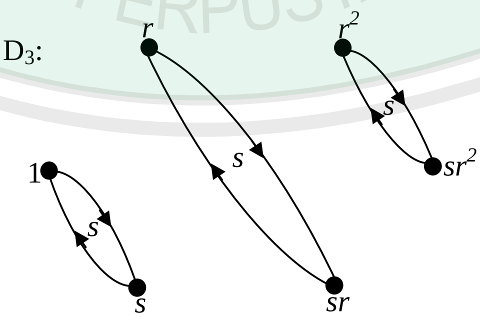
(baris 3 dari tabel)

Gambar di atas memperlihatkan bahwa operasi komposisi untuk setiap r, $r^2 \in x$ dengan elemen D_6 menghasilkan suatu digraf tak terhubung yang masing-masing memuat subdigraf sikel tiga. Pada **D**$_1$ dan **D**$_2$ terdapat korespondensi satu-satu antara titik-titik dari **D**$_1$ ke **D**$_2$, yaitu:

$$\begin{array}{lcccccc} V(\mathbf{D}_1): & 1 & r & r^2 & s & sr & sr^2 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_2): & s & sr & sr^2 & 1 & r & r^2 \end{array}$$

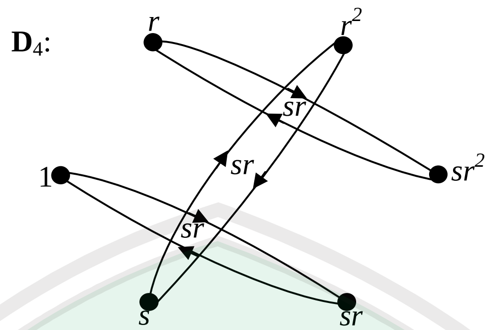
karena itu kedua digraf tersebut adalah digraf yang isomorfik, atau dapat dikatakan **D**$_1$ isomorfik dengan **D**$_2$ dan dituliskan sabagai $\mathbf{D}_1 \cong \mathbf{D}_2$.

D$_3$:



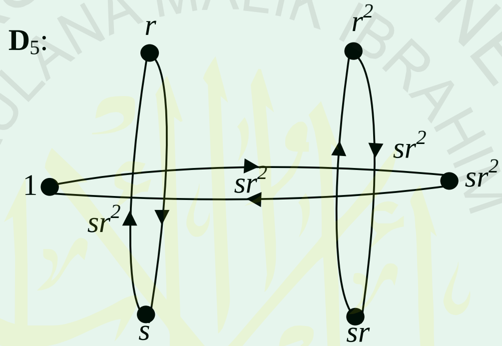
Gambar 3.3. Digraf hasil Operasi $s \circ D_6$

(baris 4 dari tabel)



Gambar 3.4. Digraf hasil Operasi $sr \circ D_6$

(baris 5 dari tabel)



Gambar 3.5. Digraf hasil Operasi $sr^2 \circ D_6$

(baris 6 dari tabel)

Gambar di atas memperlihatkan bahwa operasi komposisi untuk setiap elemen himpunan *y* dengan elemen D_6 menghasilkan suatu digraf tak terhubung yang masing-masing memuat subdigraf dimana setiap titiknya memiliki busur ganda atau dapat dikatakan sebagai suatu digraf tak terhubung beraturan-2. Antara digraf yang satu dengan digraf yang lain terdapat korespondensi satu-satu, yaitu:

$$\begin{array}{lcccccc} V(\mathbf{D}_3): & 1 & r & r^2 & s & sr & sr^2 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_4): & 1 & r & r^2 & sr & sr^2 & s \end{array}$$

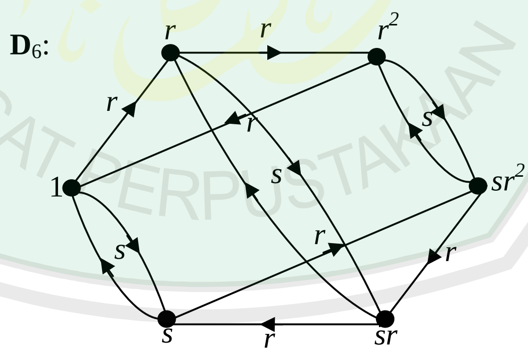
$$
\begin{array}{lcccccc}
V(\mathbf{D}_3): & 1 & r & r^2 & s & sr & sr^2 \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
V(\mathbf{D}_5): & 1 & r & r^2 & sr^2 & s & sr
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcccccc}
V(\mathbf{D}_4): & 1 & r & r^2 & s & sr & sr^2 \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
V(\mathbf{D}_5): & 1 & r & r^2 & sr & sr^2 & s
\end{array}
$$

karena itu, digraf tersebut adalah digraf yang saling isomorfik, atau dapat dituliskan sebagai $\mathbf{D}_3 \cong \mathbf{D}_4$, $\mathbf{D}_3 \cong \mathbf{D}_5$ dan $\mathbf{D}_4 \cong \mathbf{D}_5$.

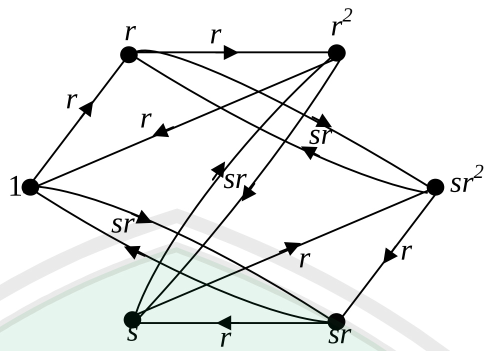
Selanjutnya, akan digabungkan dua digraf hasil operasi komposisi antara elemen-elemen x dengan y dan y dengan y. Penggabungan antara dua digraf hasil operasi komposisi antara elemen-elemen x dengan x tidak diambil, karena hasil penggabungannya akan menghasilkan suatu digraf tak terhubung.

Penggabungan Dua Digraf Hasil Operasi dengan r dan Hasil Operasi dengan Elemen y



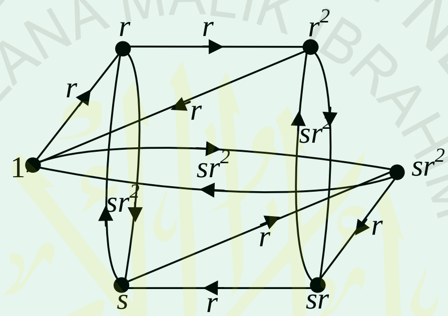
Gambar 3.6. Digraf Gabungan $r \circ D_6$ dan $s \circ D_6$

D$_7$:



Gambar 3.7. Digraf Gabungan $r \circ D_6$ dan $sr \circ D_6$

D$_8$:



Gambar 3.8. Digraf Gabungan $r \circ D_6$ dan $sr^2 \circ D_6$

Pada gambar tersebut terlihat bahwa penggabungan dua digraf **D**$_1$ dengan **D**$_3$, **D**$_4$ dan **D**$_5$ menghasilkan suatu digraf terhubung beraturan-4. Dari digraf-digraf tersebut dapat ditunjukkan beberapa hal sebagai berikut:

1. Digraf tersebut mempunyai korespondensi satu-satu, seperti yang dapat diuraikan berikut ini:

$$\begin{array}{lcccccc} V(\mathbf{D}_6): & 1 & r & r^2 & s & sr & sr^2 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_7): & 1 & r & r^2 & sr & sr^2 & s \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccc} V(\mathbf{D}_6): & 1 & r & r^2 & s & sr & sr^2 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_8): & 1 & r & r^2 & sr^2 & s & sr \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccc} V(\mathbf{D}_7): & 1 & r & r^2 & s & sr & sr^2 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_8): & 1 & r & r^2 & sr & sr^2 & s \end{array}$$

karena terdapat korespondensi satu-satu, maka setiap digraf isomorfik dengan digraf yang lainnya, atau dapat ditulis $\mathbf{D}_6 \cong \mathbf{D}_7$, $\mathbf{D}_6 \cong \mathbf{D}_8$ dan $\mathbf{D}_7 \cong \mathbf{D}_8$

2. Terdapat sikel pada masing-masing digraf di atas, yaitu:

$\mathbf{D}_6$: 1, r, r^2, sr^2, sr, s, 1

$\mathbf{D}_7$: 1, r, r^2, s, sr^2, sr, 1

$\mathbf{D}_8$: 1, r, r^2, sr, s, sr^2, 1

karena sikel-sikel tersebut melewati setiap titik yang terdapat pada masing-masing digraf, maka sikel tersebut dapat dikatakan sebagai sikel Hamilton sehingga termasuk sebagai digraf Hamilton.

3. Terdapat trail tertutup, yaitu:

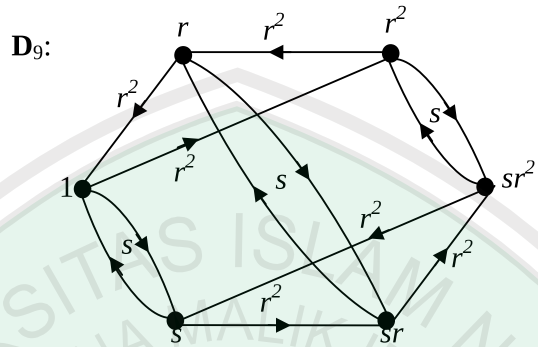
$\mathbf{D}_6$: 1, r, r^2, sr^2, sr, r, sr, s, 1, s, sr^2, r^2, 1

$\mathbf{D}_7$: 1, r, r^2, s, sr^2, r, sr^2, sr, 1, sr, s , r^2, 1

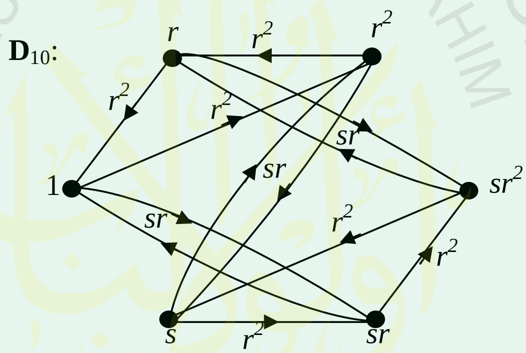
$\mathbf{D}_8$: 1, r, r^2, sr, s, r, s, sr^2, 1, sr^2, sr, r^2, 1

Dari uraian tersebut terlihat bahwa setiap busur pada digraf tersebut terlewati satu kali, sehingga dapat dikatakan bahwa digraf-digraf tersebut merupakan digraf Euler.

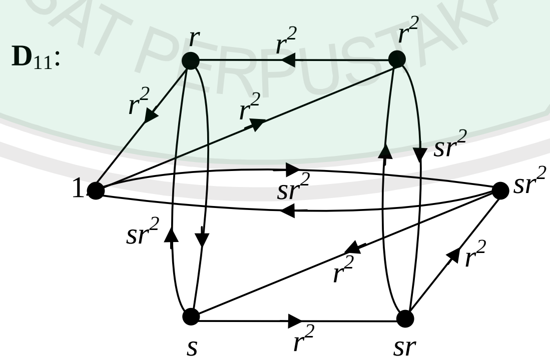
Penggabungan Dua Digraf Hasil Operasi dengan r^2 dan Hasil Operasi dengan Elemen y



Gambar 3.9. Digraf Gabungan $r^2 \circ D_6$ dan $s \circ D_6$



Gambar 3.10. Digraf Gabungan $r^2 \circ D_6$ dan $sr \circ D_6$



Gambar 3.11. Digraf Gabungan $r^2 \circ D_6$ dan $sr^2 \circ D_6$

Pada gambar tersebut terlihat bahwa penggabungan dua digraf $\mathbf{D}_2$ dengan $\mathbf{D}_3$, $\mathbf{D}_4$ dan $\mathbf{D}_5$ menghasilkan suatu digraf terhubung beraturan-4. Dari digraf-digraf tersebut dapat ditunjukkan beberapa hal sebagai berikut:

1. Digraf tersebut mempunyai korespondensi satu-satu, seperti yang dapat diuraikan berikut ini:

$$\begin{array}{lcccccc} V(\mathbf{D}_9): & 1 & r & r^2 & s & sr & sr^2 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{10}): & 1 & r & r^2 & sr & sr^2 & s \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccc} V(\mathbf{D}_9): & 1 & r & r^2 & s & sr & sr^2 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{11}): & 1 & r & r^2 & sr^2 & s & sr \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccc} V(\mathbf{D}_{10}): & 1 & r & r^2 & s & sr & sr^2 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{11}): & 1 & r & r^2 & sr & sr^2 & s \end{array}$$

   karena terdapat korespondensi satu-satu, maka setiap digraf isomorfik dengan digraf yang lainnya, atau dapat ditulis $\mathbf{D}_9 \cong \mathbf{D}_{10}$, $\mathbf{D}_9 \cong \mathbf{D}_{11}$ dan $\mathbf{D}_{10} \cong \mathbf{D}_{11}$

2. Terdapat sikel pada masing-masing digraf di atas, yaitu:

   $\mathbf{D}_9$: $1, r^2, r, sr, sr^2, s, 1$

   $\mathbf{D}_{10}$: $1, r^2, r, sr^2, s, sr, 1$

   $\mathbf{D}_{11}$: $1, r^2, r, s, sr, sr^2, 1$

   karena sikel-sikel tersebut melewati setiap titik yang terdapat pada masing-masing digraf, maka sikel tersebut dapat dikatakan sebagai sikel Hamilton sehingga termasuk sebagai digraf Hamilton.

3. Terdapat trail tertutup, yaitu:

D$_9$: 1, r^2, r, sr, sr^2, r^2, sr^2, s, 1, s, sr, r, 1

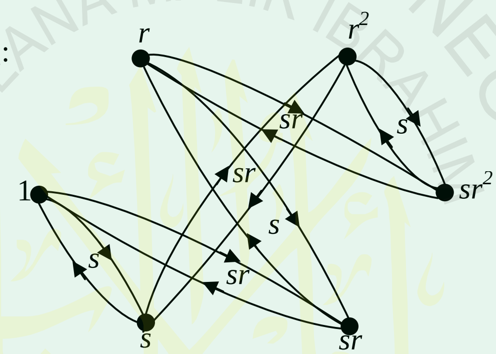
D$_{10}$: 1, r^2, r, sr^2, s, r^2, s, sr, 1, sr, sr^2, r, 1

D$_{11}$: 1, r^2, r, s, sr, r^2, sr, sr^2, 1, sr^2, s, r, 1

Dari uraian tersebut terlihat bahwa setiap busur pada digraf tersebut terlewati satu kali, sehingga dapat dikatakan bahwa digraf-digraf tersebut merupakan digraf Euler.

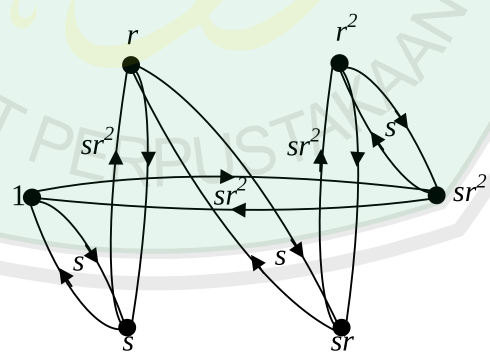
Penggabungan Dua Digraf Hasil Operasi dari Masing-masing Elemen y

D$_{12}$:



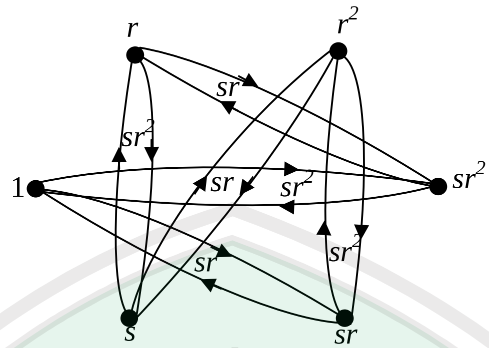
Gambar 3.12. Digraf Gabungan $s \circ D_6$ dan $sr \circ D_6$

D$_{13}$:



Gambar 3.13. Digraf Gabungan $s \circ D_6$ dan $sr^2 \circ D_6$

$\mathbf{D}_{14}$:



Gambar 3.14. Digraf Gabungan $sr \circ D_6$ dan $sr^2 \circ D_6$

Pada gambar tersebut terlihat bahwa penggabungan dua digraf $\mathbf{D}_3$ dengan $\mathbf{D}_4$ dan $\mathbf{D}_5$, serta penggabungan $\mathbf{D}_4$ dengan $\mathbf{D}_5$ menghasilkan suatu digraf terhubung beraturan-4. Dari digraf-digraf tersebut dapat ditunjukkan beberapa hal sebagai berikut:

1. Digraf tersebut mempunyai korespondensi satu-satu, seperti yang dapat diuraikan berikut ini:

$$\begin{array}{lcccccc} V(\mathbf{D}_{12}): & 1 & r & r^2 & s & sr & sr^2 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{13}): & 1 & r & r^2 & sr^2 & s & sr \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccc} V(\mathbf{D}_{12}): & 1 & r & r^2 & s & sr & sr^2 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{14}): & 1 & r & r^2 & sr & sr^2 & s \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccc} V(\mathbf{D}_{13}): & 1 & r & r^2 & s & sr & sr^2 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{14}): & 1 & r & r^2 & sr^2 & s & sr \end{array}$$

   karena terdapat korespondensi satu-satu, maka setiap digraf isomorfik dengan digraf yang lainnya, $\mathbf{D}_{12} \cong \mathbf{D}_{13}$, $\mathbf{D}_{12} \cong \mathbf{D}_{14}$ dan $\mathbf{D}_{13} \cong \mathbf{D}_{14}$

2. Terdapat sikel pada masing-masing digraf di atas, yaitu:

D$_{12}$: 1, s, r^2, sr^2, r, sr, 1

D$_{13}$: 1, sr^2, r^2, sr, r, s, 1

D$_{14}$: 1, sr^2, r, s, r^2, sr, 1

karena sikel-sikel tersebut melewati setiap titik yang terdapat pada masing-masing digraf, maka sikel tersebut dapat dikatakan sebagai sikel Hamilton sehingga termasuk sebagai digraf Hamilton.

3. Terdapat trail tertutup, yaitu:

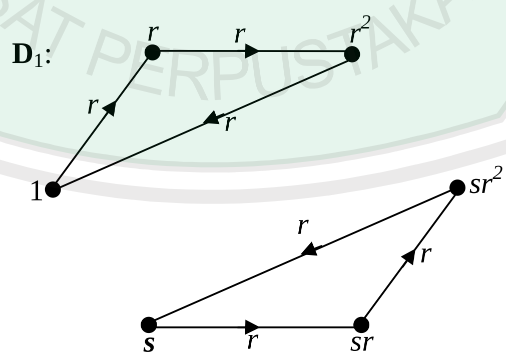
   D$_{12}$: 1, s, r^2, sr^2, r, sr, 1, sr, r, sr^2, r^2, s, 1

   D$_{13}$: 1, s, r, sr, r^2, sr^2, 1, sr^2, r^2, sr, r, s, 1

   D$_{14}$: 1, sr, r^2, s, r, sr^2, 1, sr^2, r, s, r^2, sr, 1

   Dari uraian tersebut terlihat bahwa setiap busur pada digraf tersebut terlewati satu kali, sehingga dapat dikatakan bahwa digraf-digraf tersebut merupakan digraf Euler.

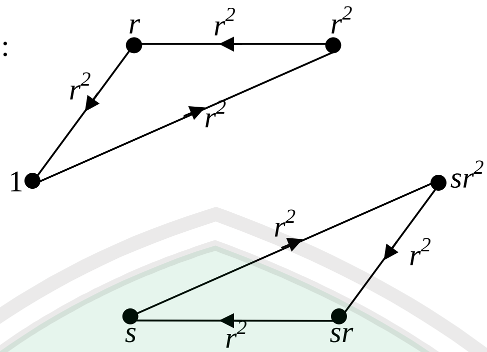
3.1.2. Digraf Grup Dihedral D_6 Berdasarkan Kolom



Gambar 3.15. Digraf sikel 3 hasil Operasi $D_6 \circ r$

(kolom 2 dari tabel)

$\mathbf{D}_2$:



Gambar 3.16. Digraf sikel 3 hasil Operasi $D_6 \circ r^2$

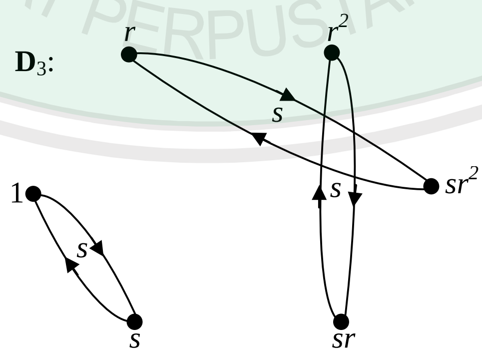
(kolom 3 dari tabel)

Gambar di atas memperlihatkan bahwa operasi komposisi setiap elemen D_6 dengan setiap r, $r^2 \in x$ menghasilkan suatu digraf tak terhubung beraturan-2 yang masing-masing memuat subdigraf sikel tiga. Pada $\mathbf{D}_1$ dan $\mathbf{D}_2$ terdapat korespondensi satu-satu antara titik-titik dari $\mathbf{D}_1$ ke $\mathbf{D}_2$, yaitu:

$$\begin{array}{lcccccc} V(\mathbf{D}_1): & 1 & r & r^2 & s & sr & sr^2 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_2): & 1 & r^2 & r & s & sr^2 & sr \end{array}$$

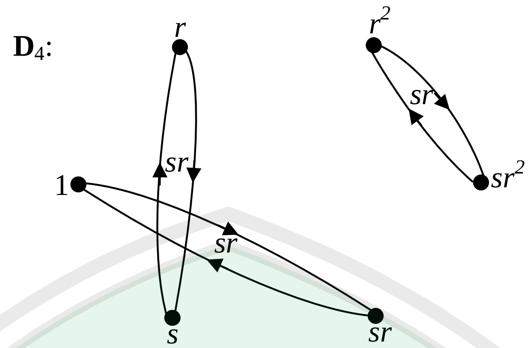
karena itu kedua digraf tersebut adalah digraf yang isomorfik, atau dapat dikatakan $\mathbf{D}_1$ isomorfik dengan $\mathbf{D}_2$ dan dituliskan sabagai $\mathbf{D}_1 \cong \mathbf{D}_2$.

$\mathbf{D}_3$:



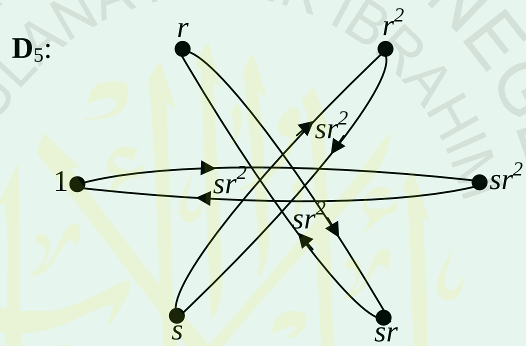
Gambar 3.17. Digraf hasil Operasi $D_6 \circ s$

(kolom 4 dari tabel)



Gambar 3.18. Digraf hasil Operasi $D_6 \circ sr$

(kolom 5 dari tabel)



Gambar 3.19. Digraf hasil Operasi $D_6 \circ sr^2$

(kolom 6 dari tabel)

Gambar di atas memperlihatkan bahwa operasi komposisi D_6 dengan setiap elemen himpunan y menghasilkan suatu digraf tak terhubung beraturan-2 yang masing-masing memuat subdigraf dimana setiap titiknya memiliki busur ganda. Antara digraf yang satu dengan digraf yang lain terdapat korespondensi satu-satu, yaitu:

$$
\begin{array}{lcccccc}
V(\mathbf{D}_3): & 1 & r & r^2 & s & sr & sr^2 \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
V(\mathbf{D}_4): & 1 & r & r^2 & sr & sr^2 & s
\end{array}
$$

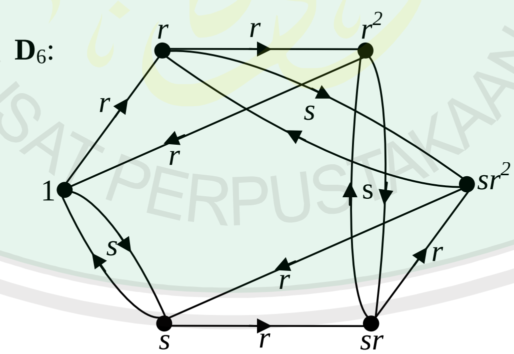
$$
\begin{array}{lcccccc}
V(\mathbf{D}_3): & 1 & r & r^2 & s & sr & sr^2 \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
V(\mathbf{D}_5): & 1 & r & r^2 & sr^2 & s & sr
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcccccc}
V(\mathbf{D}_4): & 1 & r & r^2 & s & sr & sr^2 \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
V(\mathbf{D}_5): & 1 & r & r^2 & sr & sr^2 & s
\end{array}
$$

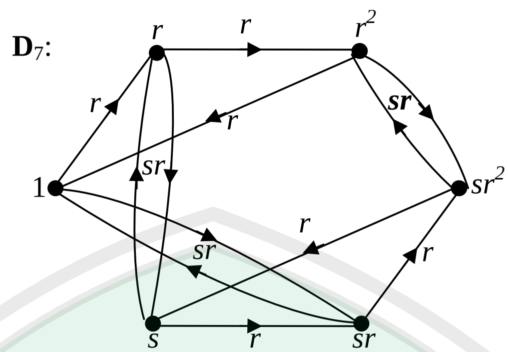
karena itu, digraf tersebut adalah digraf yang saling isomorfik, atau dapat dituliskan sebagai $\mathbf{D}_3 \cong \mathbf{D}_4$, $\mathbf{D}_3 \cong \mathbf{D}_5$ dan $\mathbf{D}_4 \cong \mathbf{D}_5$.

Selanjutnya, akan digabungkan dua digraf hasil operasi komposisi antara elemen-elemen *x* dengan *y* dan *y* dengan *y*. Penggabungan antara dua digraf hasil operasi komposisi antara elemen-elemen *x* dengan *x* tidak diambil, karena hasil penggabungannya akan menghasilkan suatu digraf tak terhubung.

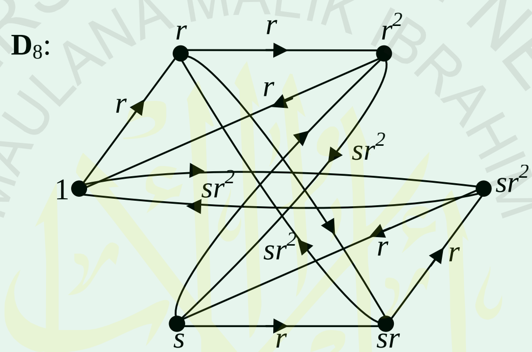
Penggabungan Dua Digraf Hasil Operasi dengan r dan Hasil Operasi dengan Elemen y



Gambar 3.20. Digraf Gabungan $D_6 \circ r$ dan $D_6 \circ s$



Gambar 3.21. Digraf Gabungan $D_6 \circ r$ dan $D_6 \circ sr$



Gambar 3.22. Digraf Gabungan $D_6 \circ r$ dan $D_6 \circ sr^2$

Pada gambar tersebut terlihat bahwa penggabungan dua digraf hasil operasi *r* dengan masing-masing anggota *y* menghasilkan suatu digraf terhubung beraturan-4. Dari digraf-digraf tersebut dapat ditunjukkan beberapa hal sebagai berikut:

1. Digraf tersebut mempunyai korespondensi satu-satu, seperti yang dapat diuraikan berikut ini:

$$\begin{array}{lcccccc} V(\mathbf{D}_6): & 1 & r & r^2 & s & sr & sr^2 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_7): & 1 & r & r^2 & sr & sr^2 & s \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccc} V(\mathbf{D}_6): & 1 & r & r^2 & s & sr & sr^2 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_8): & 1 & r & r^2 & sr^2 & s & sr \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccc} V(\mathbf{D}_7): & 1 & r & r^2 & s & sr & sr^2 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_8): & 1 & r & r^2 & sr & sr^2 & s \end{array}$$

karena terdapat korespondensi satu-satu, maka setiap digraf isomorfik dengan digraf yang lainnya, atau dapat ditulis $\mathbf{D}_6 \cong \mathbf{D}_7$, $\mathbf{D}_6 \cong \mathbf{D}_8$ dan $\mathbf{D}_7 \cong \mathbf{D}_8$

2. Terdapat sikel pada masing-masing digraf di atas, yaitu:

   $\mathbf{D}_6$: 1, r, r^2, sr, sr^2, s, 1

   $\mathbf{D}_7$: 1, r, r^2, sr^2, s, sr, 1

   $\mathbf{D}_8$: 1, r, r^2, s, sr, sr^2, 1

   karena sikel-sikel tersebut melewati setiap titik yang terdapat pada masing-masing digraf, maka sikel tersebut dapat dikatakan sebagai sikel Hamilton sehingga termasuk sebagai digraf Hamilton.

3. Terdapat trail tertutup, yaitu:

   $\mathbf{D}_6$: 1, r, r^2, sr, sr^2, r, sr^2, s, 1, s, sr, r^2, 1

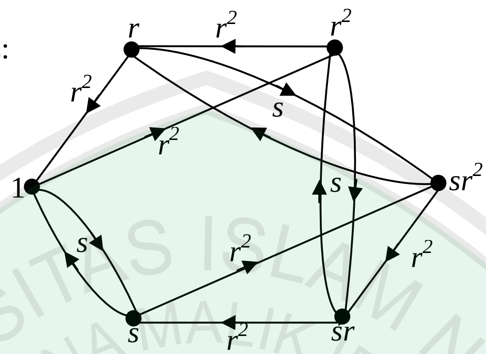
   $\mathbf{D}_7$: 1, r, r^2, sr^2, s, r, s, sr, 1, sr, sr^2, r^2, 1

   $\mathbf{D}_8$: 1, r, r^2, s, sr, r, sr, sr^2, 1, sr^2, s, r^2, 1

   Dari uraian tersebut terlihat bahwa setiap busur pada digraf tersebut terlewati satu kali, sehingga dapat dikatakan bahwa digraf-digraf tersebut merupakan digraf Euler.

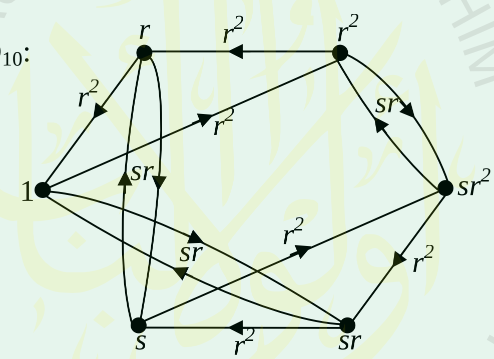
Penggabungan Dua Digraf Hasil Operasi dengan r^2 dan Hasil Operasi dengan Elemen y

D$_9$:



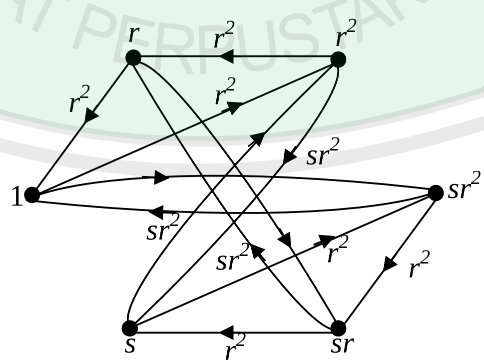
Gambar 3.23. Digraf Gabungan $D_6 \circ r^2$ dan $D_6 \circ s$

D$_{10}$:



Gambar 3.24. Digraf Gabungan $D_6 \circ r^2$ dan $D_6 \circ sr$

D$_{11}$:



Gambar 3.25. Digraf Gabungan $D_6 \circ r^2$ dan $D_6 \circ sr^2$

Pada gambar tersebut terlihat bahwa penggabungan dua digraf hasil operasi dengan r^2 dan hasil operasi dengan elemen y menghasilkan suatu digraf terhubung beraturan-4. Dari digraf-digraf tersebut dapat ditunjukkan beberapa hal sebagai berikut:

1. Digraf tersebut mempunyai korespondensi satu-satu, seperti yang dapat diuraikan berikut ini:

$$\begin{array}{lcccccc} D_9: & 1 & r & r^2 & s & sr & sr^2 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ D_{10}: & 1 & r & r^2 & sr & sr^2 & s \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccc} D_9: & 1 & r & r^2 & s & sr & sr^2 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ D_{11}: & 1 & r & r^2 & sr^2 & s & sr \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccc} D_{10}: & 1 & r & r^2 & s & sr & sr^2 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ D_{11}: & 1 & r & r^2 & sr & sr^2 & s \end{array}$$

   karena terdapat korespondensi satu-satu, maka setiap digraf isomorfik dengan digraf yang lainnya, atau dapat ditulis $\mathbf{D}_9 \cong \mathbf{D}_{10}$, $\mathbf{D}_9 \cong \mathbf{D}_{11}$ dan $\mathbf{D}_{10} \cong \mathbf{D}_{11}$

2. Terdapat sikel pada masing-masing digraf di atas, yaitu:

   $\mathbf{D}_9$: 1, r^2, r, sr^2, sr, s, 1

   $\mathbf{D}_{10}$: 1, r^2, r, s, sr^2, sr, 1

   $\mathbf{D}_{11}$: 1, r^2, r, sr, s, sr^2, 1

   karena sikel-sikel tersebut melewati setiap titik yang terdapat pada masing-masing digraf, maka sikel tersebut dapat dikatakan sebagai sikel Hamilton sehingga termasuk sebagai digraf Hamilton.

3. Terdapat trail tertutup, yaitu:

D$_9$: 1, r^2, r, sr^2, sr, r^2, sr, s, 1, s, sr^2, r, 1

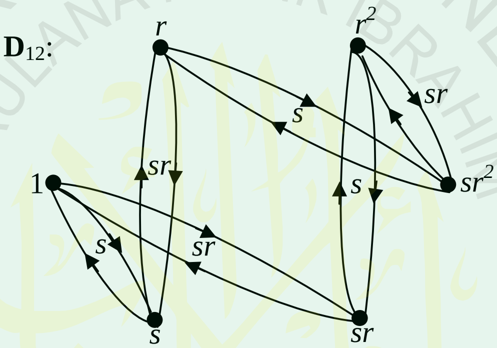
D$_{10}$: 1, r^2, r, s, sr^2, r^2, sr^2, sr, 1, sr, s, r, 1

D$_{11}$: 1, r^2, r, sr, s, r^2, s, sr^2, 1, sr^2, sr, r, 1

Dari uraian tersebut terlihat bahwa setiap busur pada digraf tersebut terlewati satu kali, sehingga dapat dikatakan bahwa digraf-digraf tersebut merupakan digraf Euler.

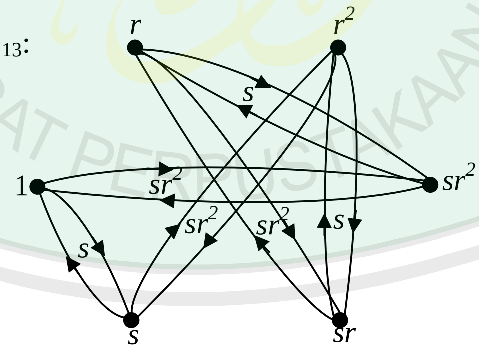
Penggabungan Dua Digraf Hasil Operasi dari Masing-masing Elemen y

D$_{12}$:



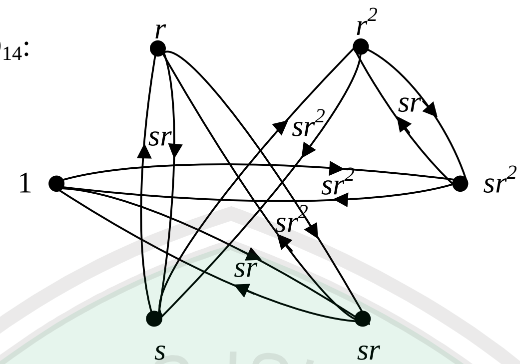
Gambar 3.26. Digraf Gabungan $D_6 \circ s$ dan $D_6 \circ sr$

D$_{13}$:



Gambar 3.27. Digraf Gabungan $D_6 \circ s$ dan $D_6 \circ sr^2$

$\mathbf{D}_{14}$:



Gambar 3.28. Digraf Gabungan $D_6 \circ sr$ dan $D_6 \circ sr^2$

Pada gambar tersebut terlihat bahwa penggabungan dua digraf hasil operasi *s* dengan *sr* dan sr^2 serta *sr* dengan sr^2 menghasilkan suatu digraf terhubung beraturan-4. Dari digraf-digraf tersebut dapat ditunjukkan beberapa hal sebagai berikut:

1. Digraf tersebut mempunyai korespondensi satu-satu, seperti yang dapat diuraikan berikut ini:

$$\begin{array}{lcccccc} V(\mathbf{D}_{12}): & 1 & r & r^2 & s & sr & sr^2 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{13}): & 1 & r & r^2 & s & sr^2 & sr \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccc} V(\mathbf{D}_{12}): & 1 & r & r^2 & s & sr & sr^2 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{14}): & 1 & r & r^2 & sr & sr^2 & s \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccc} V(\mathbf{D}_{13}): & 1 & r & r^2 & s & sr & sr^2 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{14}): & 1 & r & r^2 & sr & s & sr^2 \end{array}$$

   karena terdapat korespondensi satu-satu, maka setiap digraf isomorfik dengan digraf yang lainnya, atau dapat ditulis $\mathbf{D}_{12} \cong \mathbf{D}_{13}$, $\mathbf{D}_{13} \cong \mathbf{D}_{12}$ dan $\mathbf{D}_{13} \cong \mathbf{D}_{14}$.

2. Terdapat sikel pada masing-masing digraf di atas, yaitu:

D$_{12}$: 1, s, r, sr^2, r^2, sr, 1

D$_{13}$: 1, s, r^2, sr, r, sr^2, 1

D$_{14}$: 1, sr, r, s, r^2, sr^2, 1

karena sikel-sikel tersebut melewati setiap titik yang terdapat pada masing-masing digraf, maka sikel tersebut dapat dikatakan sebagai sikel Hamilton sehingga termasuk sebagai digraf Hamilton.

3. Terdapat trail tertutup, yaitu:

D$_{12}$: 1, s, r, sr^2, r^2, sr, 1, sr, r^2, sr^2, r, s, 1

D$_{13}$: 1, s, r^2, sr, r, sr^2, 1, sr^2, r, sr, r^2, s, 1

D$_{14}$: 1, sr, r, s, r^2, sr^2, 1, sr^2, r^2, s, r, sr, 1

Dari uraian tersebut terlihat bahwa setiap busur pada digraf tersebut terlewati satu kali, sehingga dapat dikatakan bahwa digraf-digraf tersebut merupakan digraf Euler.

Terdapat perbedaan digraf yang digambarkan berdasarkan baris dan kolom dari tabel Cayley grup dihedral D_6. Perbedaannya adalah digraf elemen rotasi (x) pada baris arah digraf dari s ke sr, sr ke sr^2 dan sr^2 ke s sedangkan pada kolom arah digraf sebaliknya. Pada elemen refleksi (y) perbedaan antara digraf baris dan kolom terlihat pada pasangan titik yang terhubung langsung dari titik r dan titik r^2, sedangkan yang terhubung lengsung ke titik 1 sama.

3.2 Grup Dihedral D_8

Jika himpunan grup dihedral $D_8 = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$ dikaitkan dengan suatu operasi komposisi maka hasilnya dapat ditunjukkan pada tabel Cayley sebagai berikut:

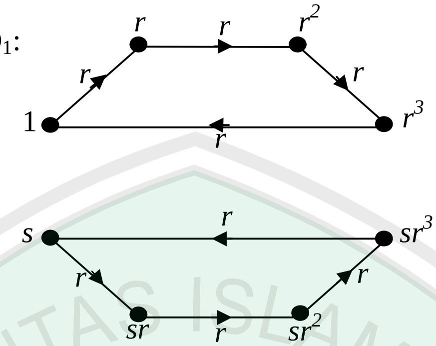
Tabel 3.2. Tabel Cayley D_8

$\circ$	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
1	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
r	r	r^2	r^3	1	sr	sr^2	sr^3	s
r^2	r^2	r^3	1	r	sr^2	sr^3	s	sr
r^3	r^3	1	r	r^2	sr^3	s	sr	sr^2
s	s	sr^3	sr^2	sr	1	r^3	r^2	r
sr	sr	s	sr^3	sr^2	r	1	r^3	r^2
sr^2	sr^2	sr	s	sr^3	r^2	r	1	r^3
sr^3	sr^3	sr^2	sr	s	r^3	r^2	r	1

Dari tabel Cayley tersebut, hasil operasi komposisi grup dihedral D_8 akan digambarkan ke dalam bentuk digraf. Penggambaran yang dilakukan akan dibedakan berdasarkan baris dan kolom dari tabel Cayley.

3.2.1. Digraf Grup Dihedral D_8 Berdasarkan Baris

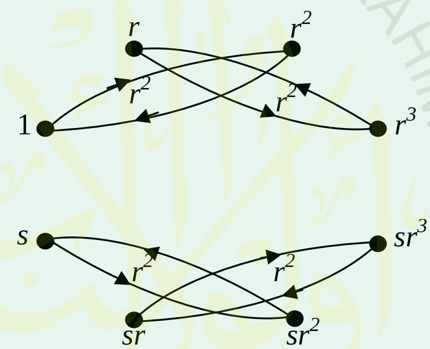
D$_1$:



Gambar 3.29. Digraf Hasil Operasi $r \circ D_8$

(baris 2 dari tabel)

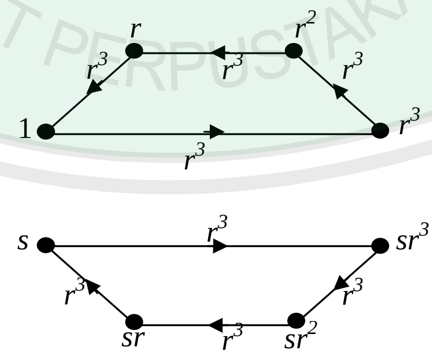
D$_2$:



Gambar 3.30. Digraf Hasil Operasi $r^2 \circ D_8$

(baris 3 dari tabel)

D$_3$:



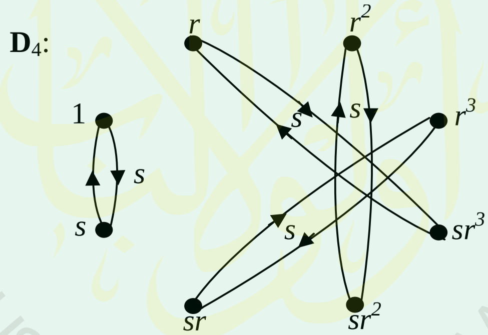
Gambar 3.31. Digraf Hasil Operasi $r^3 \circ D_8$

(baris 4 dari tabel)

Pada gambar tersebut terlihat bahwa $\mathbf{D}_1$ dan $\mathbf{D}_3$ merupakan digraf tak terhubung beraturan-2 yang terdiri dari subdigraf sikel empat, sedangkan $\mathbf{D}_2$ adalah digraf tak terhubung beraturan-2 yang setiap titiknya mempunyai busur rangkap. Pada digraf $\mathbf{D}_1$ dan $\mathbf{D}_3$ juga terdapat korespondensi satu-satu antara, yaitu:

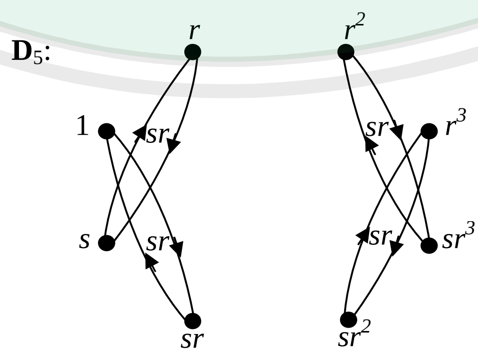
$$\begin{array}{lcccccccc} V(\mathbf{D}_1): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_3): & r^3 & r^2 & r & 1 & sr^3 & sr^2 & sr & s \end{array}$$

karena itu $\mathbf{D}_1$ dan $\mathbf{D}_3$ merupakan digraf yang isomorfik atau dapat ditulis $\mathbf{D}_1 \cong \mathbf{D}_3$, sedangkan $\mathbf{D}_2$ tidak isomorfik dengan $\mathbf{D}_1$ dan $\mathbf{D}_3$.



Gambar 3.32. Digraf Hasil Operasi $s \circ D_8$

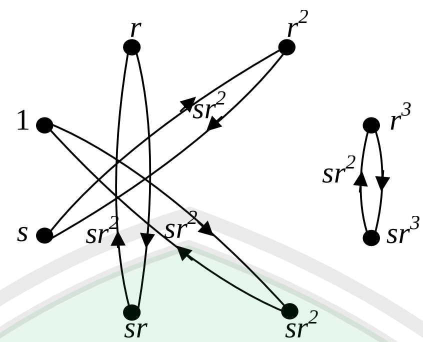
(baris 5 dari tabel)



Gambar 3.33. Digraf Hasil Operasi $sr \circ D_8$

(baris 6 dari tabel)

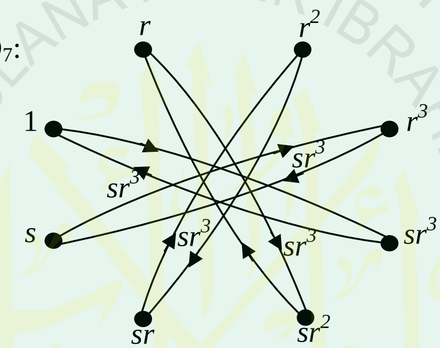
D$_6$:



Gambar 3.34. Digraf Hasil Operasi $sr^2 \circ D_8$

(baris 7 dari tabel)

D$_7$:



Gambar 3.35. Digraf Hasil Operasi $sr^3 \circ D_8$

(baris 8 dari tabel)

D$_4$, **D**$_5$, **D**$_6$, dan **D**$_7$ merupakan hasil operasi komposisi setiap anggota *y* dengan grup dihedral D_8. Digrafnya merupakan digraf tak terhubung beraturan-2 yang masing-masing titiknya mempunyai busur rangkap dan hanya menghubungkan pada satu titik saja.

$$\begin{array}{lcccccccc} V(\mathbf{D}_4): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_5): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr & sr^2 & sr^3 & s \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccc} V(\mathbf{D}_4): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_6): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr^2 & sr^3 & s & sr \end{array}$$

$$\begin{array}{llllllllll}
V(\mathbf{D}_4): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
V(\mathbf{D}_7): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr^3 & s & sr & sr^2
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllllllll}
V(\mathbf{D}_5): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
V(\mathbf{D}_6): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr & sr^2 & sr^3 & s
\end{array}$$

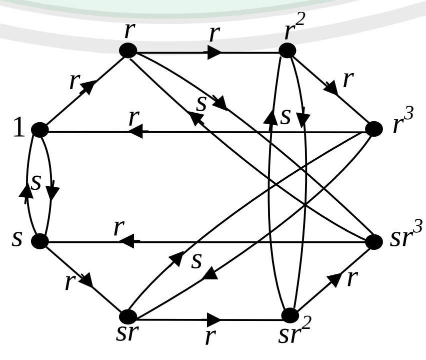
$$\begin{array}{llllllllll}
V(\mathbf{D}_5): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
V(\mathbf{D}_7): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr^2 & sr^3 & s & sr
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllllllll}
V(\mathbf{D}_6): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
V(\mathbf{D}_7): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr & sr^2 & sr^3 & s
\end{array}$$

Selanjutnya, sama seperti grup dihedral D_6 akan digabungkan dua digraf hasil operasi komposisi antara elemen-elemen x dengan y dan y dengan y. Penggabungan antara dua digraf hasil operasi komposisi antara elemen-elemen x dengan x tidak diambil, karena hasil penggabungannya akan menghasilkan suatu digraf tak terhubung.

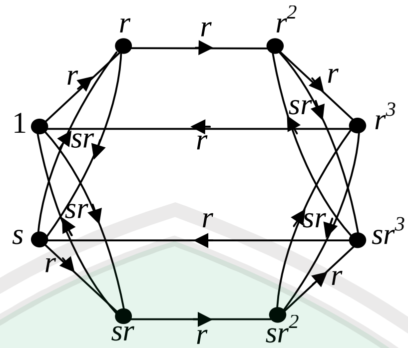
Penggabungan Dua Digraf Hasil Operasi dengan r dan Hasil Operasi dengan Elemen y

D$_8$:



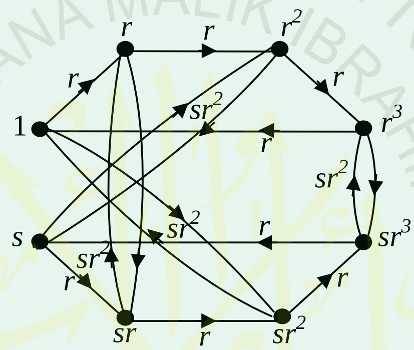
Gambar 3.36. Digraf Gabungan $r \circ D_8$ dengan $s \circ D_8$

D$_9$:



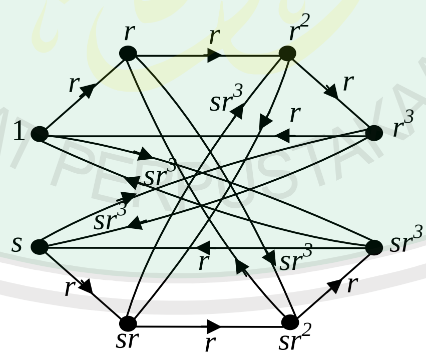
Gambar 3.37. Digraf Gabungan $r \circ D_8$ dengan $sr \circ D_8$

D$_{10}$:



Gambar 3.38. Digraf Gabungan $r \circ D_8$ dengan $sr^2 \circ D_8$

D$_{11}$:



Gambar 3.39. Digraf Gabungan $r \circ D_8$ dengan $sr^3 \circ D_8$

Pada gambar tersebut terlihat bahwa penggabungan dua digraf **D**$_1$ dengan **D**$_4$, **D**$_5$, **D**$_6$, dan **D**$_7$ menghasilkan suatu digraf terhubung beraturan-4. Dari digraf-digraf tersebut dapat ditunjukkan beberapa hal sebagai berikut:

1. Digraf tersebut mempunyai korespondensi satu-satu, seperti yang dapat diuraikan berikut ini:

$$\begin{array}{lcccccccc} V(\mathbf{D}_8): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_9): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr & sr^2 & sr^3 & s \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccc} V(\mathbf{D}_8): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{10}): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr^2 & sr^3 & s & sr \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccc} V(\mathbf{D}_8): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{11}): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr^3 & s & sr & sr^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccc} V(\mathbf{D}_9): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{10}): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr & sr^2 & sr^3 & s \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccc} V(\mathbf{D}_9): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{11}): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr^2 & sr^3 & s & sr \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccc} V(\mathbf{D}_{10}): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{11}): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr & sr^2 & sr^3 & s \end{array}$$

karena terdapat korespondensi satu-satu, maka setiap digraf isomorfik dengan digraf yang lainnya.

2. Terdapat sikel pada masing-masing digraf di atas, yaitu:

$\mathbf{D}_8$: 1, r, r^2, r^3, sr, sr^2, sr^3, s, 1

$\mathbf{D}_9$: 1, r, r^2, r^3, sr^2, sr^3, s, sr, 1

$\mathbf{D}_{10}$: 1, r, r^2, r^3, sr^3, s, sr, sr^2, 1

D$_{11}$: 1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3, 1

karena sikel-sikel tersebut melewati setiap titik yang terdapat pada masing-masing digraf, maka sikel tersebut dapat dikatakan sebagai sikel Hamilton sehingga termasuk sebagai digraf Hamilton.

3. Terdapat trail tertutup, yaitu:

D$_{8}$: 1, r, sr^3, s, 1, s, sr, r^3, sr, sr^2, r^2, sr^2, sr^3, r, r^2, r^3, 1

D$_{9}$: 1, r, r^2, r^3, sr^2, sr^3, r^2, sr^3, s, r, s, sr, 1, sr, sr^2, r^3, 1

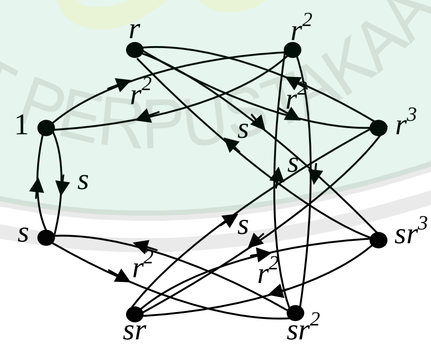
D$_{10}$: 1, r, r^2, r^3, sr^3, s, r^2, s, sr, r, sr, sr^2, 1, sr^2, sr^3, r^3, 1

D$_{11}$: 1, r, r^2, r^3, s, sr, r^2, sr, sr^2, r, sr^2, sr^3, 1, sr^3, s, r^3, 1

Dari uraian tersebut terlihat bahwa setiap busur pada digraf tersebut terlewati satu kali, sehingga dapat dikatakan bahwa digraf-digraf tersebut merupakan digraf Euler.

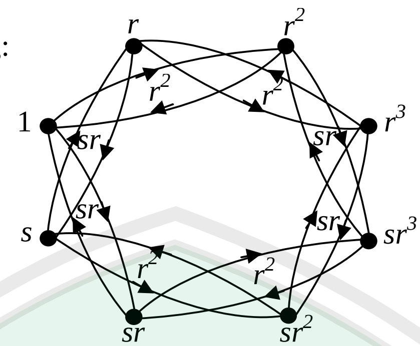
Penggabungan Dua Digraf Hasil Operasi dengan r^2 dan Hasil Operasi dengan Elemen y

D$_{12}$:



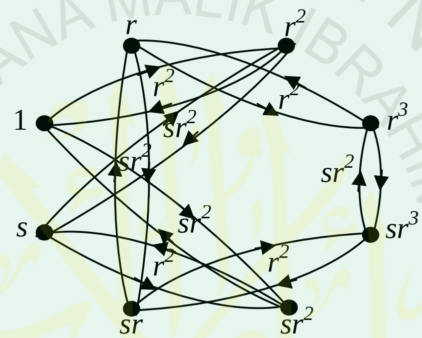
Gambar 3.40. Digraf Gabungan $r^2 \circ D_8$ dengan $s \circ D_8$

D$_{13}$:



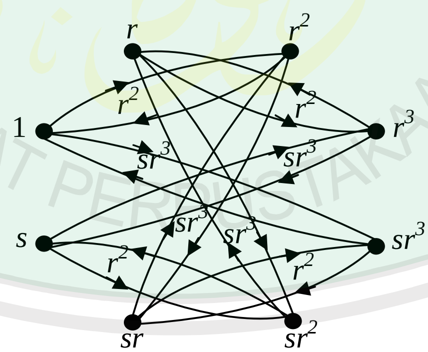
Gambar 3.41. Digraf Gabungan $r^2 \circ D_8$ dengan $sr \circ D_8$

D$_{14}$:



Gambar 3.42. Digraf Gabungan $r^2 \circ D_8$ dengan $sr^2 \circ D_8$

D$_{15}$:



Gambar 3.43. Digraf Gabungan $r^2 \circ D_8$ dengan $sr^3 \circ D_8$

Dari gambar di atas terlihat bahwa penggabungan **D**$_2$ dengan digraf hasil operasi masing-masing elemen *y* menghasilkan digraf tak terhubung beraturan-4 meskipun sekilas terlihat seperti digraf terhubung. Masing-masing digraf terdiri dari subdigraf sikel empat yang mempunyai busur rangkap. Dari digraf-digraf tersebut dapat ditunjukkan beberapa hal sebagai berikut:

1. Digraf tersebut mempunyai korespondensi satu-satu, seperti yang dapat diuraikan berikut ini:

$$\begin{array}{lcccccccc} V(\mathbf{D}_{12}): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{13}): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr & sr^2 & sr^3 & s \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccc} V(\mathbf{D}_{12}): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{14}): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr^2 & sr^3 & s & sr \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccc} V(\mathbf{D}_{12}): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{15}): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr^3 & s & sr & sr^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccc} V(\mathbf{D}_{13}): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{14}): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr & sr^2 & sr^3 & s \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccc} V(\mathbf{D}_{13}): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{15}): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr^2 & sr^3 & s & sr \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccc} V(\mathbf{D}_{14}): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{15}): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr & sr^2 & sr^3 & s \end{array}$$

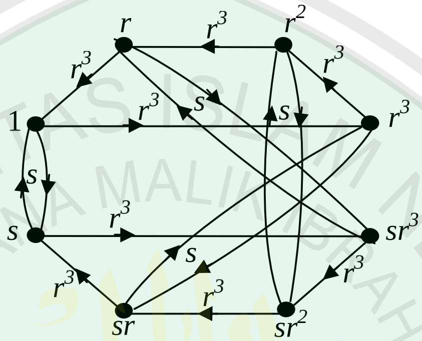
karena terdapat korespondensi satu-satu, maka setiap digraf isomorfik dengan digraf yang lainnya.

2. Pada digraf di atas tidak terdapat sikel Hamilton. Jadi digraf di atas bukan merupakan digraf Hamilton.

3. Pada digraf di atas juga tidak terdapat trail tertutup. Sehingga digraf tersebut bukan merupakan digraf Euler.

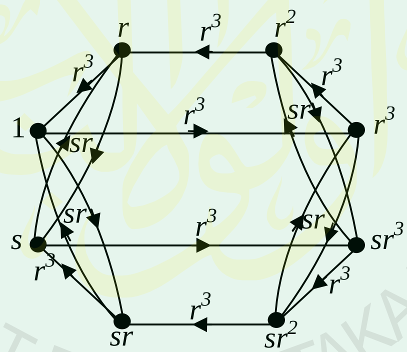
Penggabungan Dua Digraf Hasil Operasi dengan r^3 dan Hasil Operasi dengan Elemen y

D$_{16}$:



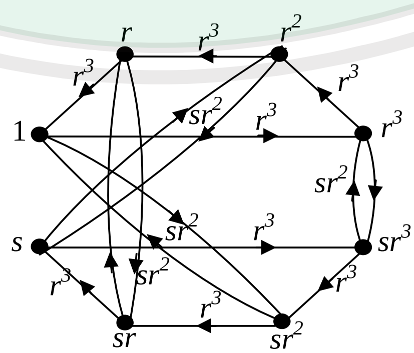
Gambar 3.44. Digraf Gabungan $r^3 \circ D_8$ dengan $s \circ D_8$

D$_{17}$:



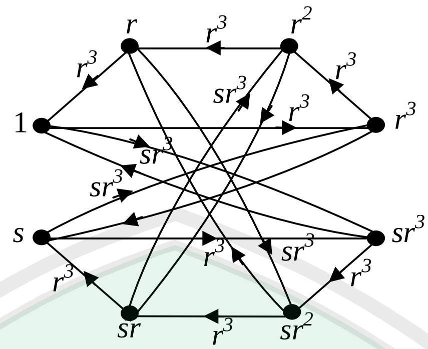
Gambar 3.45. Digraf Gabungan $r^3 \circ D_8$ dengan $sr \circ D_8$

D$_{18}$:



Gambar 3.46. Digraf Gabungan $r^3 \circ D_8$ dengan $sr^2 \circ D_8$

D19:



Gambar 3.47. Digraf Gabungan $r^3 \circ D_8$ dengan $sr^3 \circ D_8$

Dari gambar di atas terlihat bahwa penggabungan $\mathbf{D}_3$ dengan digraf hasil operasi elemen *y* menghasilkan digraf terhubung beraturan-4. $\mathbf{D}_{16}$ merupakan penggabungan $\mathbf{D}_3$ dengan $\mathbf{D}_4$, $\mathbf{D}_{17}$ merupakan penggabungan $\mathbf{D}_3$ dengan $\mathbf{D}_5$, $\mathbf{D}_{18}$ merupakan penggabungan $\mathbf{D}_3$ dengan $\mathbf{D}_6$, sedangkan $\mathbf{D}_{19}$ merupakan penggabungan $\mathbf{D}_3$ dengan $\mathbf{D}_6$. Dari digraf-digraf tersebut dapat ditunjukkan beberapa hal sebagai berikut:

1. Digraf tersebut mempunyai korespondensi satu-satu, seperti yang dapat diuraikan berikut ini:

$$
\begin{array}{lcccccccc}
V(\mathbf{D}_{16}): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
V(\mathbf{D}_{17}): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr & sr^2 & sr^3 & s
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcccccccc}
V(\mathbf{D}_{16}): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
V(\mathbf{D}_{18}): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr^2 & sr^3 & s & sr
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcccccccc}
V(\mathbf{D}_{16}): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
V(\mathbf{D}_{19}): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr^3 & s & sr & sr^2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcccccccc}
V(\mathbf{D}_{17}): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
V(\mathbf{D}_{18}): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr & sr^2 & sr^3 & s
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcccccccc}
V(\mathbf{D}_{17}): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
V(\mathbf{D}_{19}): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr^2 & sr^3 & s & sr
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcccccccc}
V(\mathbf{D}_{18}): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
V(\mathbf{D}_{19}): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr & sr^2 & sr^3 & s
\end{array}
$$

karena terdapat korespondensi satu-satu, maka setiap digraf isomorfik dengan digraf yang lainnya.

2. Terdapat sikel pada masing-masing digraf di atas, yaitu:

   $\mathbf{D}_{16}$: 1, r^3, r^2, r, sr^3, sr^2, sr, s, 1

   $\mathbf{D}_{17}$: 1, r^3, r^2, r, s, sr^3, sr^2, sr, 1

   $\mathbf{D}_{18}$: 1, r^3, r^2, r, sr, s, sr^3, sr^2, 1

   $\mathbf{D}_{19}$: 1, r^3, r^2, r, sr^2, sr, s, sr^3, 1

   karena sikel-sikel tersebut melewati setiap titik yang terdapat pada masing-masing digraf, maka sikel tersebut dapat dikatakan sebagai sikel Hamilton sehingga termasuk sebagai digraf Hamilton.

3. Terdapat trail tertutup, yaitu:

   $\mathbf{D}_{16}$: 1, r^3, r^2, r, sr^3, sr^2, r^2, sr^2, sr, r^3, sr, s, 1, s, sr^3, r, 1

   $\mathbf{D}_{17}$: 1, r^3, r^2, r, s, sr^3, r^2, sr^3, sr^2, r^3, sr^2, sr, 1, sr, s, r, 1

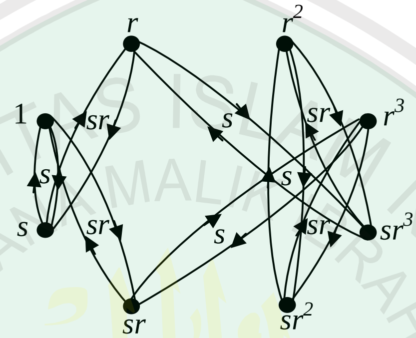
   $\mathbf{D}_{18}$: 1, r^3, r^2, r, sr, s, r^2, s, sr^3, r^3, sr^3, sr^2, 1, sr^2, sr, r, 1

   $\mathbf{D}_{19}$: 1, r^3, r^2, r, sr^2, sr, r^2, sr, s, r^3, s, sr^3, 1, sr^3, sr^2, r, 1

Dari uraian tersebut terlihat bahwa setiap busur pada digraf tersebut terlewati satu kali, sehingga dapat dikatakan bahwa digraf-digraf tersebut merupakan digraf Euler.

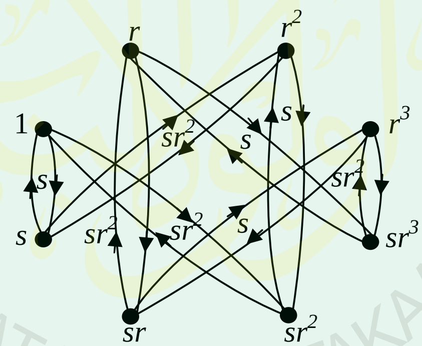
Penggabungan Dua Digraf Hasil Operasi dari Masing-masing Elemen y

D$_{20}$:



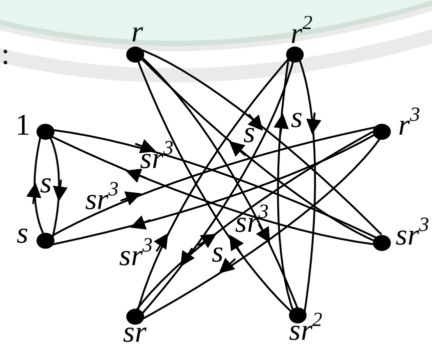
Gambar 3.48. Digraf Gabungan $s \circ D_8$ dengan $sr \circ D_8$

D$_{21}$:



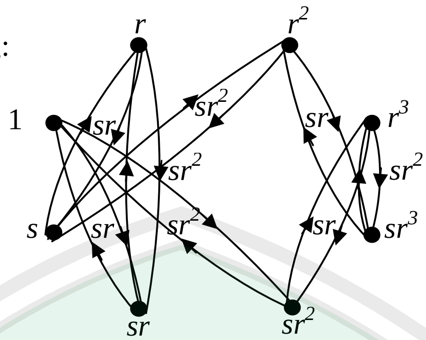
Gambar 3.49. Digraf Gabungan $s \circ D_8$ dengan $sr^2 \circ D_8$

D$_{22}$:



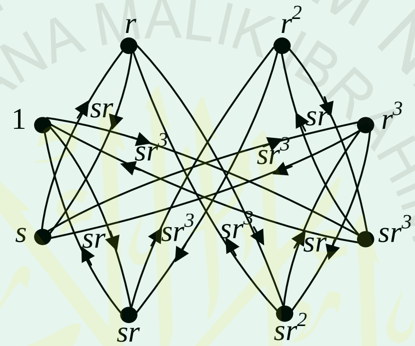
Gambar 3.50. Digraf Gabungan $s \circ D_8$ dengan $sr^3 \circ D_8$

D$_{23}$:



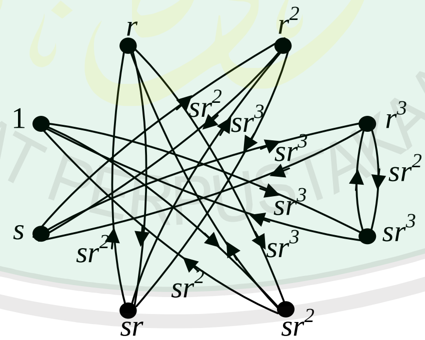
Gambar 3.51. Digraf Gabungan $sr \circ D_8$ dengan $sr^2 \circ D_8$

D$_{24}$:



Gambar 3.52. Digraf Gabungan $sr \circ D_8$ dengan $sr^3 \circ D_8$

D$_{25}$:



Gambar 3.53. Digraf Gabungan $sr^2 \circ D_8$ dengan $sr^3 \circ D_8$

Dari gambar di atas terlihat bahwa penggabungan **D**$_4$ dengan **D**$_5$ dan **D**$_7$, penggabungan **D**$_5$ dengan **D**$_6$, serta penggabungan **D**$_6$ dengan **D**$_7$ menghasilkan suatu digraf terhubung beraturan-4, sedangkan penggabungan **D**$_4$ dengan **D**$_6$ dan

$\mathbf{D}_5$ dengan $\mathbf{D}_7$ mengasilkan suatu digraf tak terhubung beraturan-4 yang terdiri dari subdigraf sikel empat berbusur rangkap.

1. Digraf tersebut mempunyai korespondensi satu-satu, seperti yang dapat diuraikan berikut ini:

$$\begin{array}{llllllllll} V(\mathbf{D}_{20}): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{22}): & 1 & r^3 & r^2 & r & s & sr^3 & sr^2 & sr \end{array}$$

$$\begin{array}{llllllllll} V(\mathbf{D}_{20}): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{23}): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr & sr^2 & sr^3 & s \end{array}$$

$$\begin{array}{llllllllll} V(\mathbf{D}_{20}): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{25}): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr^2 & s & sr^3 & sr \end{array}$$

$$\begin{array}{llllllllll} V(\mathbf{D}_{22}): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{23}): & 1 & r^3 & r^2 & r & sr & s & sr^3 & sr^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{llllllllll} V(\mathbf{D}_{22}): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{25}): & 1 & r^3 & r^2 & r & sr^2 & sr & s & sr^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{llllllllll} V(\mathbf{D}_{23}): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{25}): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr & sr^2 & sr^3 & s \end{array}$$

$$\begin{array}{llllllllll} V(\mathbf{D}_{21}): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{24}): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr & s & sr^3 & sr^2 \end{array}$$

karena terdapat korespondensi satu-satu, maka setiap digraf isomorfik dengan digraf yang lainnya.

2. Terdapat sikel pada digraf $\mathbf{D}_{20}$, $\mathbf{D}_{22}$, $\mathbf{D}_{23}$, dan $\mathbf{D}_{25}$, yaitu:

$\mathbf{D}_{20}$: 1, s, r, sr^3, r^2, sr^2, r^3, sr, 1

$\mathbf{D}_{22}$: 1, s, r^3, sr, r^2, sr^2, r, sr^3, 1

$\mathbf{D}_{23}$: 1, sr, r, s, r^2, sr^3, r^3, sr^2, 1

$\mathbf{D}_{25}$: 1, sr^2, r, sr, r^2, s, r^3, sr^3, 1

karena sikel-sikel tersebut melewati setiap titik yang terdapat pada masing-masing digraf, maka sikel tersebut dapat dikatakan sebagai sikel Hamilton sehingga termasuk sebagai digraf Hamilton. Sedangkan pada digraf $\mathbf{D}_{21}$ dan $\mathbf{D}_{24}$ tidak terdapat sikel Hamilton, sehingga $\mathbf{D}_{21}$ dan $\mathbf{D}_{24}$ bukan merupakan digraf Hamilton.

3. Terdapat trail tertutup pada digraf $\mathbf{D}_{20}$, $\mathbf{D}_{22}$, $\mathbf{D}_{23}$, dan $\mathbf{D}_{25}$, yaitu:

$\mathbf{D}_{20}$: 1, s, r, sr^3, r^2, sr^2, r^3, sr, 1, sr, r^3, sr^2, r^2, sr^3, r, s, 1

$\mathbf{D}_{22}$: 1, s, r^3, sr, r^2, sr^2, r, sr^3, 1, sr^3, r, sr^2, r^2, sr, r^3, s, 1

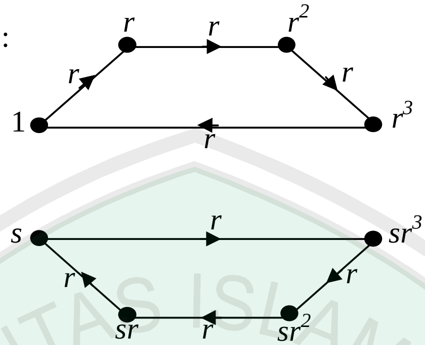
$\mathbf{D}_{23}$: 1, sr, r, s, r^2, sr^3, r^3, sr^2, 1, sr^2, r^3, sr^3, r^2, s, r, sr, 1

$\mathbf{D}_{25}$: 1, sr^2, r, sr, r^2, s, r^3, sr^3, 1, sr^3, r^3, s, r^2, sr, r, sr^2, 1

Dari uraian tersebut terlihat bahwa setiap busur pada digraf terlewati satu kali, sehingga dapat dikatakan bahwa digraf $\mathbf{D}_{20}$, $\mathbf{D}_{22}$, $\mathbf{D}_{23}$, dan $\mathbf{D}_{25}$ merupakan digraf Euler. Sedangkan pada digraf $\mathbf{D}_{21}$ dan $\mathbf{D}_{24}$ tidak terdapat trail tertutup yang melewati setiap busurnya, sehingga $\mathbf{D}_{21}$ dan $\mathbf{D}_{24}$ bukan merupakan digraf Euler.

3.2.2. Digraf Grup Dihedral D_8 Berdasarkan Kolom

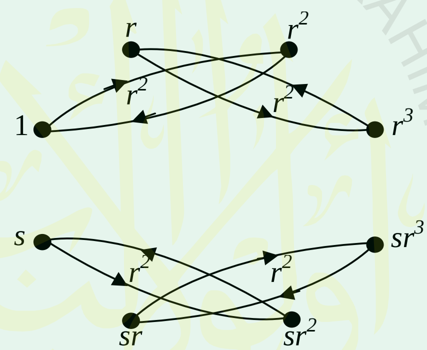
D$_1$:



Gambar 3.54. Digraf Hasil Operasi $D_8 \circ r$

(kolom 2 dari tabel)

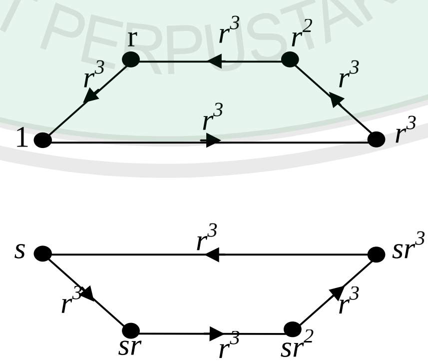
D$_2$:



Gambar 3.55. Digraf Hasil Operasi $D_8 \circ r^2$

(kolom 3 dari tabel)

D$_3$:



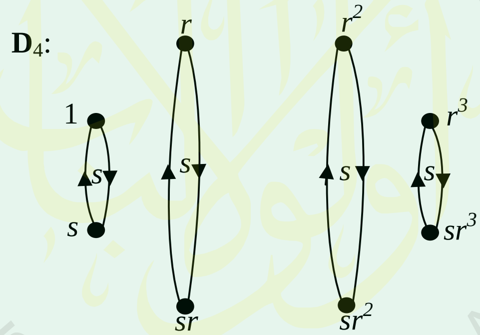
Gambar 3.56. Digraf Hasil Operasi $D_8 \circ r^3$

(kolom 4 dari tabel)

Pada gambar tersebut terlihat bahwa $\mathbf{D}_1$ dan $\mathbf{D}_3$ merupakan digraf tak terhubung beraturan-2 yang terdiri dari subdigraf sikel empat, sedangkan $\mathbf{D}_2$ adalah digraf tak terhubung beraturan-2 yang setiap titiknya mempunyai busur rangkap. Pada digraf $\mathbf{D}_1$ dan $\mathbf{D}_3$ juga terdapat korespondensi satu-satu antara, yaitu:

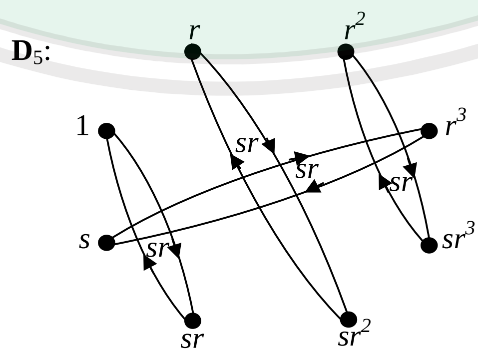
$$\begin{array}{lcccccccc} V(\mathbf{D}_1): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_3): & s & sr & sr^2 & sr^3 & 1 & r^3 & r^2 & r \end{array}$$

karena itu merupakan digraf yang isomorfik, sedangkan $\mathbf{D}_2$ tidak isomorfik dengan dua digraf yang lain.



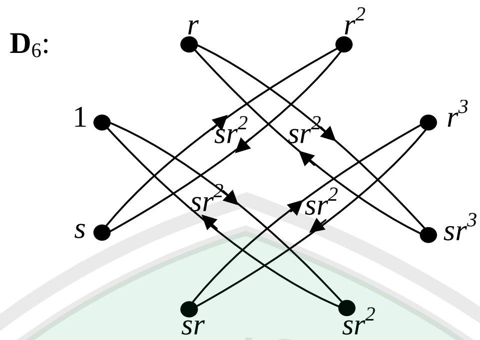
Gambar 3.57. Digraf Hasil Operasi $D_8 \circ s$

(kolom 5 dari tabel)



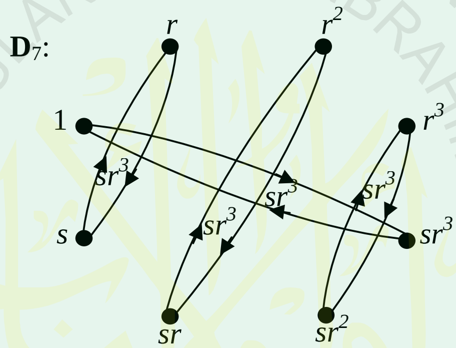
Gambar 3.58. Digraf Hasil Operasi $D_8 \circ sr$

(kolom 6 dari tabel)



Gambar 3.59. Digraf Hasil Operasi $D_8 \circ sr^2$

(kolom 7 dari tabel)



Gambar 3.60. Digraf Hasil Operasi $D_8 \circ sr^3$

(kolom 8 dari tabel)

D$_4$, **D**$_5$, **D**$_6$, dan **D**$_7$ merupakan hasil operasi komposisi grup dihedral D_8 dengan masing-masing elemen y. Digrafnya merupakan digraf tak terhubung beraturan-2 yang masing-masing titiknya mempunyai busur rangkap dan hanya menghubungkan pada satu titik saja. Antara digraf yang satu dengan digraf yang lain terdapat korespondensi satu-satu, yaitu:

$$\begin{array}{lcccccccc} V(\mathbf{D}_4): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_5): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr & sr^2 & sr^3 & s \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccc}
V(\mathbf{D}_4): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
V(\mathbf{D}_6): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr^2 & sr^3 & s & sr
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccc}
V(\mathbf{D}_4): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
V(\mathbf{D}_7): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr^3 & s & sr & sr^2
\end{array}$$

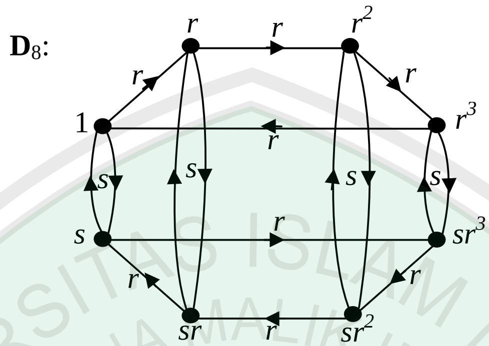
$$\begin{array}{lcccccccc}
V(\mathbf{D}_5): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
V(\mathbf{D}_6): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr & sr^2 & sr^3 & s
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccc}
V(\mathbf{D}_5): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
V(\mathbf{D}_7): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr^2 & sr^3 & s & sr
\end{array}$$

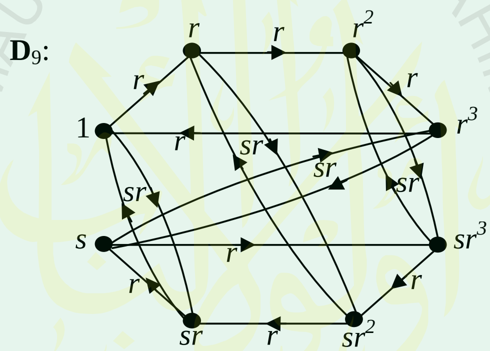
$$\begin{array}{lcccccccc}
V(\mathbf{D}_6): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
V(\mathbf{D}_7): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr & sr^2 & sr^3 & s
\end{array}$$

Selanjutnya, sama seperti grup dihedral D_6 akan digabungkan dua digraf hasil operasi komposisi antara elemen-elemen x dengan y dan y dengan y. Penggabungan antara dua digraf hasil operasi komposisi antara elemen-elemen x dengan x tidak diambil, karena hasil penggabungannya akan menghasilkan suatu digraf tak terhubung.

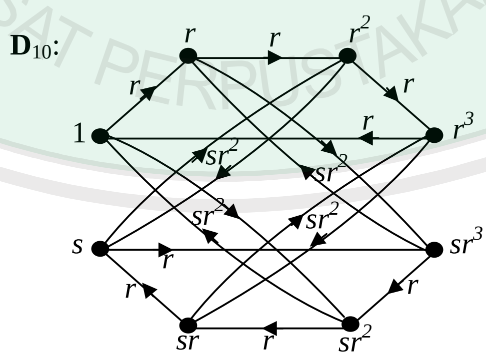
Penggabungan Dua Digraf Hasil Operasi dengan r dan Hasil Operasi dengan Elemen y



Gambar 3.61. Digraf Gabungan $D_8 \circ r$ dengan $D_8 \circ s$

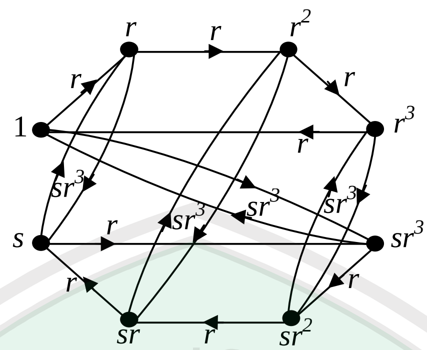


Gambar 3.62. Digraf Gabungan $D_8 \circ r$ dengan $D_8 \circ sr$



Gambar 3.63. Digraf Gabungan $D_8 \circ r$ dengan $D_8 \circ sr^2$

$\mathbf{D}_{11}$:



Gambar 3.64. Digraf Gabungan $D_8 \circ r$ dengan $D_8 \circ sr^3$

Dari gambar di atas terlihat bahwa penggabungan $\mathbf{D}_1$ dengan masing-masing digraf hasil operasi y menghasilkan digraf terhubung beraturan-4. Dari digraf-digraf tersebut dapat ditunjukkan beberapa hal sebagai berikut:

1. Digraf tersebut mempunyai korespondensi satu-satu, seperti yang dapat diuraikan berikut ini:

$$\begin{array}{lcccccccc}
V(\mathbf{D}_8): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
V(\mathbf{D}_9): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr & sr^2 & sr^3 & s
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccc}
V(\mathbf{D}_8): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
V(\mathbf{D}_{10}): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr^2 & sr^3 & s & sr
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccc}
V(\mathbf{D}_8): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
V(\mathbf{D}_{11}): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr^3 & s & sr & sr^2
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccc}
V(\mathbf{D}_9): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
V(\mathbf{D}_{10}): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr & sr^2 & sr^3 & s
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccc} V(\mathbf{D}_9): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{11}): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr^2 & sr^3 & s & sr \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccc} V(\mathbf{D}_{10}): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{11}): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr & sr^2 & sr^3 & s \end{array}$$

karena terdapat korespondensi satu-satu, maka setiap digraf isomorfik dengan digraf yang lainnya.

2. Terdapat sikel pada masing-masing digraf di atas, yaitu:

   $\mathbf{D}_8$: 1, r, r^2, r^3, sr^3, sr^2, sr, s, 1

   $\mathbf{D}_9$: 1, r, r^2, r^3, s, sr^3, sr^2, sr, 1

   $\mathbf{D}_{10}$: 1, r, r^2, r^3, sr, s, sr^3, sr^2, 1

   $\mathbf{D}_{11}$: 1, r, r^2, r^3, sr^2, sr, s, sr^3, 1

   karena sikel-sikel tersebut melewati setiap titik yang terdapat pada masing-masing digraf, maka sikel tersebut dapat dikatakan sebagai sikel Hamilton sehingga termasuk sebagai digraf Hamilton.

3. Terdapat trail tertutup, yaitu:

   $\mathbf{D}_8$: 1, r, r^2, r^3, sr^3, sr^2, r^2, sr^2, sr, r, sr, s, 1, s, sr^3, r^3, 1

   $\mathbf{D}_9$: 1, r, r^2, r^3, s, sr^3, r^2, sr^3, sr^2, r, sr^2, sr, 1, sr, s, r^3, 1

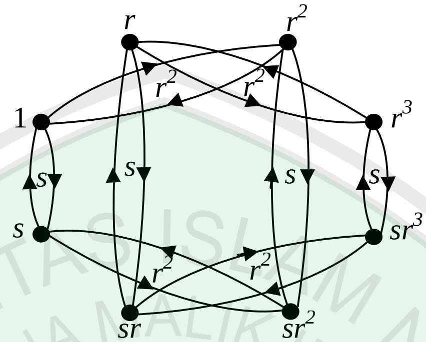
   $\mathbf{D}_{10}$: 1, r, r^2, r^3, sr, s, r^2, s, sr^3, r, sr^3, sr^2, 1, sr^2, sr, r^3, 1

   $\mathbf{D}_{11}$: 1, r, r^2, r^3, sr^2, sr, r^2, sr, s, r, s, sr^3, 1, sr^3, sr^2, r^3, 1

   Dari uraian tersebut terlihat bahwa setiap busur pada digraf tersebut terlewati satu kali, sehingga dapat dikatakan bahwa digraf-digraf tersebut merupakan digraf Euler.

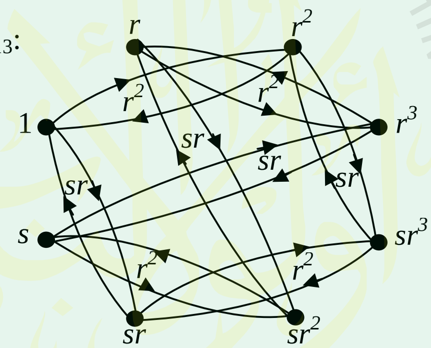
Penggabungan Dua Digraf Hasil Operasi dengan r^2 dan Hasil Operasi dengan Elemen y

D12:



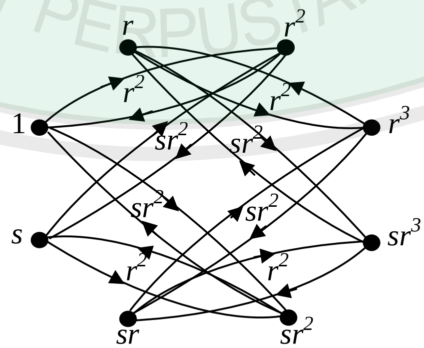
Gambar 3.65. Digraf Gabungan $D_8 \circ r^2$ dengan $D_8 \circ s$

D13:



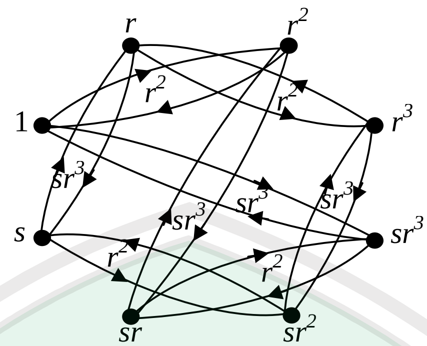
Gambar 3.66. Digraf Gabungan $D_8 \circ r^2$ dengan $D_8 \circ sr$

D14:



Gambar 3.67. Digraf Gabungan $D_8 \circ r^2$ dengan $D_8 \circ sr^2$

D$_{15}$:



Gambar 3.68. Digraf Gabungan $D_8 \circ r^2$ dengan $D_8 \circ sr^3$

Dari gambar di atas terlihat bahwa penggabungan **D**$_2$ dengan digraf hasil operasi elemen y menghasilkan digraf tak terhubung beraturan-4. Dari digraf-digraf tersebut dapat ditunjukkan beberapa hal sebagai berikut:

1. Digraf tersebut mempunyai korespondensi satu-satu, seperti yang dapat diuraikan berikut ini:

$$\begin{array}{lcccccccc} V(\mathbf{D}_{12}): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{13}): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr & sr^2 & sr^3 & s \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccc} V(\mathbf{D}_{12}): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{14}): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr^2 & sr^3 & s & sr \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccc} V(\mathbf{D}_{12}): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{15}): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr^3 & s & sr & sr^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccc} V(\mathbf{D}_{13}): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{14}): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr & sr^2 & sr^3 & s \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccc} V(\mathbf{D}_{13}): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{15}): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr^2 & sr^3 & s & sr \end{array}$$

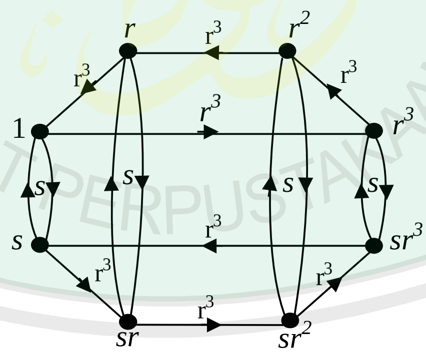
$$\begin{array}{lcccccccc} V(\mathbf{D}_{14}): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{15}): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr & sr^2 & sr^3 & s \end{array}$$

karena terdapat korespondensi satu-satu, maka setiap digraf isomorfik dengan digraf yang lainnya.

2. Pada digraf di atas tidak terdapat sikel Hamilton. Jadi digraf di atas bukan merupakan digraf Hamilton.
3. Pada digraf di atas juga tidak terdapat trail tertutup. Sehingga digraf tersebut bukan merupakan digraf Euler.

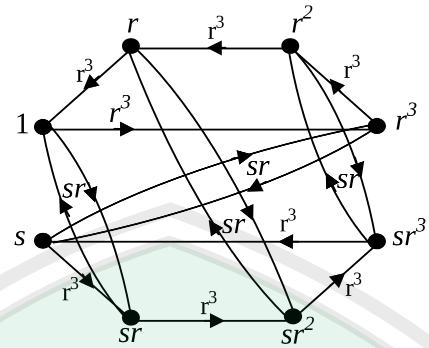
Penggabungan Dua Digraf Hasil Operasi dengan r^3 dan Hasil Operasi dengan Elemen y

$\mathbf{D}_{16}$:



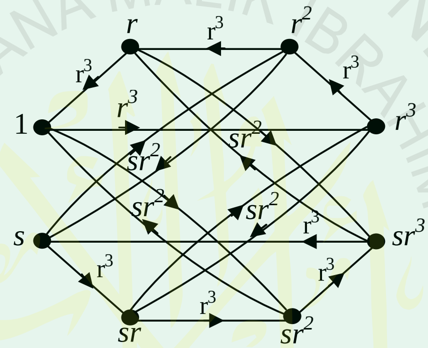
Gambar 3.69. Digraf Gabungan $D_8 \circ r^3$ dengan $D_8 \circ s$

D$_{17}$:



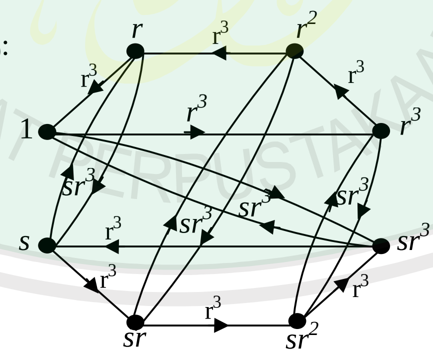
Gambar 3.70. Digraf Gabungan $D_8 \circ r^3$ dengan $D_8 \circ sr$

D$_{18}$:



Gambar 3.71. Digraf Gabungan $D_8 \circ r^3$ dengan $D_8 \circ sr^2$

D$_{19}$:



Gambar 3.72. Digraf Gabungan $D_8 \circ r^3$ dengan $D_8 \circ sr^3$

Dari gambar di atas terlihat bahwa penggabungan **D**$_3$ dengan digraf hasil operasi elemen *y* menghasilkan digraf terhubung beraturan-4. Dari digraf-digraf tersebut dapat ditunjukkan beberapa hal sebagai berikut:

1. Digraf tersebut mempunyai korespondensi satu-satu, seperti yang dapat diuraikan berikut ini:

$$\begin{array}{lcccccccc} V(\mathbf{D}_{16}): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{17}): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr & sr^2 & sr^3 & s \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccc} V(\mathbf{D}_{16}): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{18}): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr^2 & sr^3 & s & sr \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccc} V(\mathbf{D}_{16}): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{19}): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr^3 & s & sr & sr^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccc} V(\mathbf{D}_{17}): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{18}): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr & sr^2 & sr^3 & s \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccc} V(\mathbf{D}_{17}): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{19}): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr^2 & sr^3 & s & sr \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccc} V(\mathbf{D}_{18}): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{19}): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr & sr^2 & sr^3 & s \end{array}$$

karena terdapat korespondensi satu-satu, maka setiap digraf isomorfik dengan digraf yang lainnya.

2. Terdapat sikel pada masing-masing digraf di atas, yaitu:

$\mathbf{D}_{16}$: 1, r^3, r^2, r, sr, sr^2, sr^3, s, 1

$\mathbf{D}_{17}$: 1, r^3, r^2, r, sr^2, sr^3, s, sr, 1

$\mathbf{D}_{18}$: 1, r^3, r^2, r, sr^3, s, sr, sr^2, 1

$\mathbf{D}_{19}$: 1, r^3, r^2, r, s, sr, sr^2, sr^3, 1

karena sikel-sikel tersebut melewati setiap titik yang terdapat pada masing-masing digraf, maka sikel tersebut dapat dikatakan sebagai sikel Hamilton sehingga termasuk sebagai digraf Hamilton.

3. Terdapat trail tertutup, yaitu:

$\mathbf{D}_{16}$: 1, r^3, r^2, r, sr, sr^2, r^2, sr^2, sr^3, r^3, sr^3, s, 1, s, sr, r, 1

$\mathbf{D}_{17}$: 1, r^3, r^2, r, sr^2, sr^3, r^2, sr^3, s, r^3, s, sr, 1, sr, sr^2, r, 1

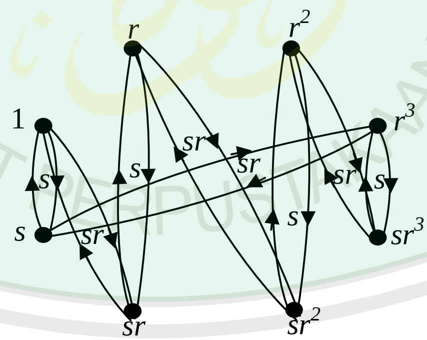
$\mathbf{D}_{18}$: 1, r^3, r^2, r, sr^3, s, r^2, s, sr, r^3, sr, sr^2, 1, sr^2, sr^3, r, 1

$\mathbf{D}_{19}$: 1, r^3, r^2, r, s, sr, r^2, sr, sr^2, r^3, sr^2, sr^3, 1, sr^3, s, r, 1

Dari uraian tersebut terlihat bahwa setiap busur pada digraf tersebut terlewati satu kali, sehingga dapat dikatakan bahwa digraf-digraf tersebut merupakan digraf Euler.

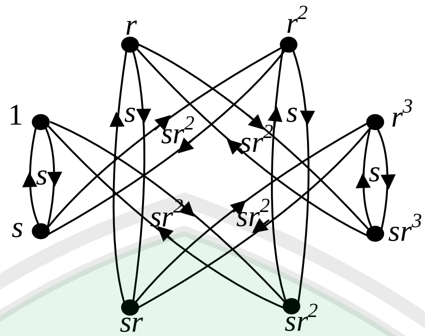
Penggabungan Dua Digraf Hasil Operasi dari Masing-masing Elemen y

$\mathbf{D}_{20}$:



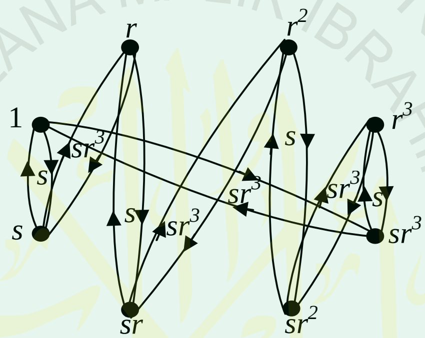
Gambar 3.73. Digraf Gabungan $D_8 \circ s$ dengan $D_8 \circ sr$

D$_{21}$:



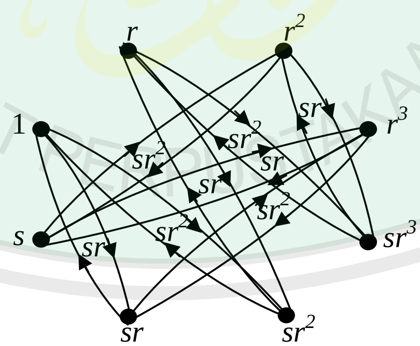
Gambar 3.74. Digraf Gabungan $D_8 \circ s$ dengan $D_8 \circ sr^2$

D$_{22}$:



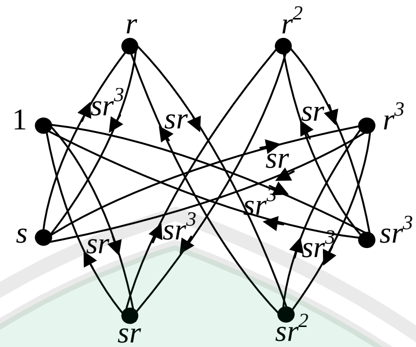
Gambar 3.75. Digraf Gabungan $D_8 \circ s$ dengan $D_8 \circ sr^3$

D$_{23}$:



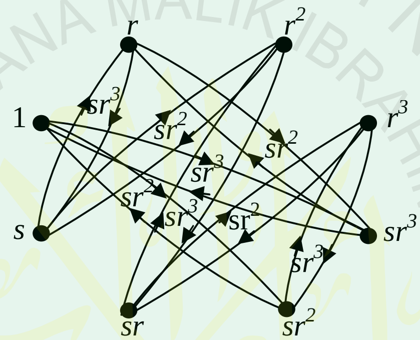
Gambar 3.76. Digraf Gabungan $D_8 \circ sr$ dengan $D_8 \circ sr^2$

$\mathbf{D}_{24}$:



Gambar 3.77. Digraf Gabungan $D_8 \circ sr$ dengan $D_8 \circ sr^3$

$\mathbf{D}_{25}$:



Gambar 3.78. Digraf Gabungan $D_8 \circ sr^2$ dengan $D_8 \circ sr^3$

Dari gambar di atas terlihat bahwa penggabungan $\mathbf{D}_4$ dengan $\mathbf{D}_5$ dan $\mathbf{D}_7$, penggabungan $\mathbf{D}_5$ dengan $\mathbf{D}_6$, serta penggabungan $\mathbf{D}_6$ dengan $\mathbf{D}_7$ menghasilkan suatu digraf terhubung beraturan-4, sedangkan penggabungan $\mathbf{D}_4$ dengan $\mathbf{D}_6$ dan $\mathbf{D}_5$ dengan $\mathbf{D}_7$ mengasilkan suatu digraf tak terhubung beraturan-4 yang terdiri dari subdigraf sikel empat berbusur rangkap.

Dari digraf-digraf tersebut dapat ditunjukkan beberapa hal sebagai berikut:

1. Digraf tersebut mempunyai korespondensi satu-satu, seperti yang dapat diuraikan berikut ini:

$$\begin{array}{lcccccccc} V(\mathbf{D}_{20}): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{22}): & 1 & r^3 & r^2 & r & s & sr^3 & sr^2 & sr \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccc} V(\mathbf{D}_{20}): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{23}): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr & sr^2 & sr^3 & s \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccc} V(\mathbf{D}_{20}): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{25}): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr^2 & sr^3 & s & sr \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccc} V(\mathbf{D}_{22}): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{23}): & 1 & r^3 & r^2 & r & sr & s & sr^3 & sr^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccc} V(\mathbf{D}_{22}): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{25}): & 1 & r^3 & r^2 & r & sr^2 & sr & s & sr^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccc} V(\mathbf{D}_{23}): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{25}): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr & sr^2 & sr^3 & s \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccc} V(\mathbf{D}_{21}): & 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ V(\mathbf{D}_{24}): & 1 & r & r^2 & r^3 & sr & s & sr^3 & sr^2 \end{array}$$

karena terdapat korespondensi satu-satu, maka setiap digraf isomorfik dengan digraf yang lainnya.

2. Terdapat sikel pada digraf $\mathbf{D}_{20}$, $\mathbf{D}_{22}$, $\mathbf{D}_{23}$, dan $\mathbf{D}_{25}$, yaitu:

   $\mathbf{D}_{20}$: 1, s, r^3, sr^3, r^2, sr^2, r, sr, 1

   $\mathbf{D}_{22}$: 1, s, r, sr, r^2, sr^2, r^3, sr^3, 1

   $\mathbf{D}_{23}$: 1, sr, r^3, s, r^2, sr^3, r, sr^2, 1

   $\mathbf{D}_{25}$: 1, sr^2, r^3, sr, r^2, s, r, sr^3, 1 karena sikel-sikel tersebut melewati setiap titik yang terdapat pada masing-masing digraf, maka sikel tersebut dapat dikatakan sebagai sikel Hamilton sehingga termasuk sebagai digraf Hamilton. Sedangkan pada digraf $\mathbf{D}_{21}$ dan $\mathbf{D}_{24}$ tidak terdapat sikel Hamilton, sehingga $\mathbf{D}_{21}$ dan $\mathbf{D}_{24}$ bukan merupakan digraf Hamilton.

3. Terdapat trail tertutup pada digraf $\mathbf{D}_{20}$, $\mathbf{D}_{22}$, $\mathbf{D}_{23}$, dan $\mathbf{D}_{25}$, yaitu:

   $\mathbf{D}_{20}$: $1, s, r^3, sr^3, r^2, sr^2, r, sr, 1, sr, r, sr^2, r^2, sr^3, r^3, s, 1$

   $\mathbf{D}_{22}$: $1, s, r, sr, r^2, sr^2, r^3, sr^3, 1, sr^3, r^3, sr^2, r^2, sr, r, s, 1$

   $\mathbf{D}_{23}$: $1, sr, r^3, s, r^2, sr^3, r, sr^2, 1, sr^2, r, sr^3, r^2, s, r^3, sr, 1$

   $\mathbf{D}_{25}$: $1, sr^2, r^3, sr, r^2, s, r, sr^3, 1, sr^3, r, s, r^2, sr, r^3, sr^2, 1$

   Dari uraian tersebut terlihat bahwa setiap busur pada digraf terlewati satu kali, sehingga dapat dikatakan bahwa digraf $\mathbf{D}_{20}$, $\mathbf{D}_{22}$, $\mathbf{D}_{23}$, dan $\mathbf{D}_{25}$ merupakan digraf Euler. Sedangkan pada digraf $\mathbf{D}_{21}$ dan $\mathbf{D}_{24}$ tidak terdapat trail tertutup yang melewati setiap busurnya, sehingga $\mathbf{D}_{21}$ dan $\mathbf{D}_{24}$ bukan merupakan digraf Euler.

Terdapat perbedaan digraf yang digambarkan berdasarkan baris dan kolom dari tabel Cayley grup dihedral D_8. Perbedaan pada elemen rotasi, digraf $\mathbf{D}_1$ dan $\mathbf{D}_3$ yang digambarkan berdasarkan baris arah digraf dimulai dari s ke sr, sr ke sr^2, sr^2 ke sr^3 dan sr^3 ke s, sedangkan yang berdasarkan kolom arah digraf sebaliknya. Pada elemen refleksi perbedaan antara baris dan kolom terlihat pada pasangan titik yang terhubung langsung dari titik r, r^2, dan r^3, sedangkan yang terhubung langsung dari titik 1 sama.

3.3. Pembahasan Mengenai Grup dan Graf dalam Al-Qur'an

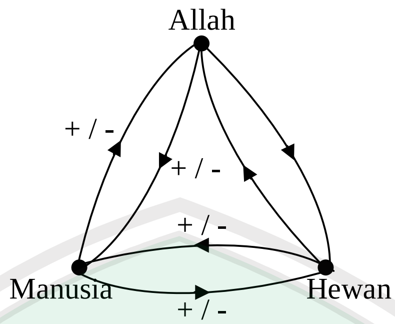
Grup adalah suatu struktur aljabar yang dinyatakan sebagai (G,*) dengan G merupakan himpunan tidak kosong dan * adalah operasi biner pada G yang memenuhi sifat-sifat assosiatif, mempunyai identitas dan mempunyai invers. Himpunan merupakan sekumpulan objek yang terdefinisi dengan jelas (*well defined*). Dalam Al-Qur'an surat Al-An'am ayat 38 disebutkan:

وَمَا مِن دَآبَّةٍ فِي ٱلۡأَرۡضِ وَلَا طَٰٓئِرٖ يَطِيرُ بِجَنَاحَيۡهِ إِلَّآ أُمَمٌ أَمۡثَالُكُمۚ مَّا
فَرَّطۡنَا فِي ٱلۡكِتَٰبِ مِن شَيۡءٖۚ ثُمَّ إِلَىٰ رَبِّهِمۡ يُحۡشَرُونَ ٣٨

Artinya: "Dan tiadalah binatang yang berada di bumi dan burung yang terbang dengan kedua sayapnya, melainkan umat-umat seperti kamu. Tiadalah Kami alpakan sesuatupun di dalam Al-Kitab, kemudian kepada Tuhanlah mereka dihimpunkan" (Q.S. Al-An'am: 38).

Jadi setiap makhluk di dunia ini merupakan suatu himpunan, yaitu himpunan binatang yang berada di bumi, himpunan burung yang terbang dengan kedua sayapnya dan masih banyak himpunan makhluk yang lainnya. Himpunan setiap makhluk hidup yang ada di dunia ini dan hubungan yang ada di antara makhluk hidup tersebut diumpamakan sebagai operasi biner, maka makhluk hidup bersama dengan interaksinya dapat membentuk suatu grup.

Hubungan antara Allah sebagai pencipta dan makhluk hidup sebagai ciptaan-Nya dapat digambarkan ke dalam bentuk digraf. Allah, manusia, dan hewan sebagai objek dapat digambarkan sebagai titik, dan hubungan antara ketiga objek tersebut digambarkan sebagai sisi berarah yang berlabel. Hubungan antara ketiga objek tersebut terlihat seperti gambar berikut ini:



Gambar .79. Hubungan antara Allah dengan Manusia dan Hewan

Pada gambar tersebut terlihat bahwa hubungan antara Allah sebagai pencipta dengan manusia dan hewan dapat digambarkan dalam bentuk digraf. Hubungan Allah dengan manusia digambarkan dengan dua sisi berarah (*arc*). Sisi yang mengarah dari manusia ke Allah menunjukkan bahwa jika manusia beribadah kepada Allah menjalankan semua perintah-Nya dan menjauhi larangan-Nya, maka Allah akan membalas parbuatan manusia tersebut dengan pahala dan hal tersebut dapat digambarkan dengan tanda positif pada label sisi yang menghubungkan titiknya. Jika manusia tidak mau menjalankan perintah Allah dan tidak menjauhi larangan-Nya, maka manusia akan mendapat dosa dan azab sesuai dengan perbuatan yang dilakukannya dan dapat digambarkan dengan tanda negatif pada sisi berarah yang menghubungkan titik-titiknya. Begitu juga dengan gambaran mengenai hubungan manusia dengan hewan, manusia akan memperoleh manfaat jika memelihara hewan ternak dengan baik dan jika tidak maka manusia tidak dapat memperoleh manfaat dari hewan ternak tersebut. Sedangkan hubungan Allah dengan hewan tidak pernah menjadi negatif karena hewan tidak sama dengan manusia, hewan hanya akan mengerjakan apa yang telah diperintahkan dan tidak akan dimintai pertanggung jawaban oleh Allah SWT.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Grup dihedral merupakan grup dari himpunan simetri-simetri dari segi-*n* beraturan. Di sini grup dihedral akan dibagi menjadi dua himpunan bagian yaitu:

i) $x = \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}\}$ atau yang dikenal dengan himpunan bagian rotasi;

ii) $y = \{s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}\}$ atau yang dikenal dengan himpunan bagian refleksi

atau dapat dituliskan sebagai $x \subset D_{2n}$ dan $y \subset D_{2n}$.

Berdasarkan pembahasan pada Bab III dapat dibuat sebuah tabel kesimpulan ciri-ciri digraf yang dibentuk berdasarkan tabel Cayley sebagai berikut:

Tabel 4.1 Tabel Ciri-ciri Digraf dari Tabel Cayley Grup Dihedral D_6 dan D_8

Digraf Gabungan Hasil Operasi	Ciri-ciri	
	D_6	D_8
1. r dengan y	Terhubung beraturan-4, saling isomorfik, terdapat sikel Hamilton dan sirkuit Euler.	Terhubung beraturan-4, saling isomorfik, terdapat sikel Hamilton dan sirkuit Euler.
2. r^2 dengan y	Terhubung beraturan-4, saling isomorfik, terdapat sikel Hamilton dan sirkuit Euler.	Tak terhubung beraturan-4, saling isomorfik, tidak terdapat sikel Hamilton dan sirkuit Euler.

3. r^3 dengan *y*		Terhubung beraturan-4, saling isomorfik, terdapat sikel Hamilton dan sirkuit Euler.
4. *s* dengan *sr*	Terhubung beraturan-4, isomorfik dengan digraf gabungan *s* dengan sr^2, terdapat sikel Hamilton dan sirkuit Euler.	Terhubung beraturan-4, isomorfik dengan digraf gabungan *s* dengan sr^3, *sr* dengan sr^2, dan sr^2 dengan sr^3, terdapat sikel Hamilton dan sirkuit Euler.
5. *s* dengan sr^2	Terhubung beraturan-4, isomorfik digraf gabungan *s* dengan *sr*, terdapat sikel Hamilton dan sirkuit Euler.	Tak terhubung beraturan-4, isomorfik dengan digraf gabungan *sr* dengan sr^3, tidak terdapat sikel Hamilton dan sirkuit Euler.
6. *s* dengan sr^3		Terhubung beraturan-4, isomorfik dengan digraf gabungan *s* dengan *sr*, *sr* dengan sr^2, dan sr^2 dengan sr^3, terdapat sikel Hamilton dan sirkuit Euler.
7. *sr* dengan sr^2	Terhubung beraturan-4, isomorfik dengan digraf	Terhubung beraturan-4, isomorfik dengan digraf

	gabungan *s* dengan *sr* dan *s* dengan sr^2, terdapat sikel Hamilton dan sirkuit Euler.	gabungan *s* dengan *sr*, *s* dengan sr^3, dan sr^2 dengan sr^3, terdapat sikel Hamilton dan sirkuit Euler.
8. *sr* dengan sr^3		Tak terhubung beraturan-4, isomorfik dengan digraf gabungan *s* dengan sr^2, tidak terdapat sikel Hamilton dan sirkuit Euler.
9. sr^2 dengan sr^3		Terhubung beraturan-4, isomorfik dengan digraf gabungan *s* dengan *sr*, *s* dengan sr^3, dan *sr* dengan sr^2, terdapat sikel Hamilton dan sirkuit Euler.

4.2 Saran

Pada skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pada pokok bahasan masalah digraf yang dibentuk berdasarkan tabel Cayley grup dehidral D_6 dan D_8. Untuk penulisan skripsi selanjutnya, penulis menyarankan untuk mengkaji masalah digraf yang dibentuk berdasarkan tabel Cayley dari grup yang lain atau kajian yang lebih dalam tentang keterkaitan teori graf dan grup mengingat pembahasan tentang grup sangat luas.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN-Malang Press.

Chartrand, Gery and Linda Lesniak. 1986. *Graphs and Digraphs Second Edition*. California: a Division of Wadsworth, Inc.

Dummit, David S. dan Richard M. Foote. 1991. *Abstract Algebra*. New Jersey: Prentice Hall, Inc.

Gani, Bustami A, dkk. 1995. *Al Qur'an dan Tafsirnya*. Yogyakarta: PT Dana Bakti.

Ibrahim, M. Ismail. 1986. *Sisi Mulia Al-Qur'an: Agama dan Ilmu*. Jakarta: CV. Rajawali.

Jauhari, Thanthawi. 1984. *Qur'an dan Ilmu Pengetahuan Moderen*. Surabaya: Usana Offset Printing

Kahfi, M. S. 1997.*Geometri Transformasi I*. Malang: IKIP Malang.

Kerami, Djati dan Cormentyna Sitanggang. 2003. *Kamus Matematika*. Jakarta: Balai Pustaka.

Purwanto. 1998. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP Malang.

Raishinghania, M. D. dan R. S. Aggarwal. 1980. *Modern Algebra. New Delhi*: S. Chand and Company Ltd.

Santosa, R. Gunawan. 2002. Aplikasi Teorema Polya Pada Enumerasi Graf Sederhana. (Online): (http://. Home. Unpar.ac. id/ -integral / volume 8 / integral 8 No. 1 / Aplikasi Teorema Polya. PDF. Diakses tanggal 4 Januari 2008)

Sukirman. 2005. *Pengantar Aljabar Abstrak*. Malang: UM Press.

Wilson, Robin J dan Watkins. 1990. *Graph and introductory approach*. Singapore: Open University course.

DEPARTEMEN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
JURUSAN MATEMATIKA
Jalan Gajayana 50 Malang 65144 Telp. / Faks. (0341) 558916

BUKTI KONSULTASI

Nama : Syifaul Chasanah
NIM : 04510021
Pembimbing I : Wahyu Henky Irawan, M. Pd.
Pembimbing II: Achmad Nashichuddin, M.A.
Judul Skripsi : Digraf Dari Tabel Cayley Grup Dihedral

No	Tanggal	Materi Konsultasi	Tanda Tangan
1	25 Juli 2008	Konsultasi Masalah	1.
2	11 Agustus 2008	Konsultasi Bab I	2.
3	15 Agustus 2008	Revisi Bab I	3.
4	20 Agustus 2008	ACC Bab I dan Konsultasi Bab II	4.
5	1 September 2008	Revisi Bab II	5.
6	13 September 2008	ACC Bab II dan Konsultasi Bab III	6.
7	22 September 2008	Revisi Bab III	7.
8	23 September 2008	ACC Bab III	8.
9	27 September 2008	Konsultasi Bab IV dan Abstrak	9.
10	27 September 2008	Konsultasi Keagamaan	10.
11	11 Oktober 2008	Revisi Bab IV dan Konsultasi Keseluruhan	11.
12	13 Oktober 2008	Revisi Keagamaan	12.
13	14 Oktober 2008	Revisi Keagamaan	13.
14	15 Oktober 2008	ACC Keseluruhan	14.

Malang, 15 Oktober 2008
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M. Si
NIP 150 318 321