PELABELAN GRACEFUL *(GRACEFUL LABELING)* PADA GRAF SUPERSTAR $S_{5,n}$

SKRIPSI

Oleh :

ZAINIATUL MUARRIFAH
NIM. 03510054

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2008

PELABELAN GRACEFUL *(GRACEFUL LABELING)* PADA GRAF SUPERSTAR $S_{5,n}$

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S. Si)

Oleh :

ZAINIATUL MUARRIFAH
NIM. 03510054

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2008

PELABELAN GRACEFUL *(GRACEFUL LABELING)* PADA GRAF SUPERSTAR $S_{5,n}$

SKRIPSI

Oleh :

ZAINIATUL MUARRIFAH
NIM. 03510054

Telah disetujui untuk diuji

Malang, 6 Februari 2008

Dosen pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Wahyu Henky Irawan, M.Pd	**Ahmad Barizi, M.A**
NIP. 150 300 415	**NIP. 150 283 991**

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M. Si

NIP. 150 318 321

PELABELAN GRACEFUL *(GRACEFUL LABELING)* PADA GRAF SUPERSTAR $S_{5,n}$

SKRIPSI

Oleh

ZAINIATUL MUARRIFAH
NIM. 03510054

Telah Dipertahankan Di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains

Tanggal

12 April 2008

Susunan Dewan Penguji:		**Tanda Tangan**
1. Penguji Utama	**: Dr. Yus M. Cholily, M.Si**	**( )**
2. Ketua	**: Abdussakir, M.Pd**	**( )**
3. Sekretaris	**: Wahyu Henky Irawan, M.Pd**	**( )**
4. Anggota	**: Ahmad Barizi, M.A**	**( )**

Mengetahui dan mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

<u>Sri Harini, M. Si</u>
NIP. 150 318 321

MOTTO

يُرِيدُ ٱللَّهُ بِكُمُ ٱلْيُسْرَ وَلَا يُرِيدُ بِكُمُ ٱلْعُسْرَ

“Allanghendaki kemudahan bagimu, dan tidak menghendaki kesukaran bagimu”

PERSEMBAHAN

Robby… tak lupa kutengadahkan tangan untuk syukur nikmat dan ridhoMu. Dengan kerendahanku…kusadari betapa kerdil semesta eksistensiku di hadapanMu, meski seringkali alunan-alunan syukur di dada di gelayuti rasa malu, namun lewat gulir tasbih dan detak jantungku, beribu hamdalah terlantun syahdu di setiap sujudku untuk seluruh karuniaMu

Dengan kerendahan hati, kupersembahkan karya kecilku untuk:

Ayah Achmad Zain dan Bunda Wasiatus shodariyah
(makasih banyak untuk do,a dan kasih sayang yang senantiasa mengalir untuk nanda, maafin nanda karena hanya ini yang bisa nanda berikan saat ini . Semoga Allah membuka pintu kebahagiaanNya untuk kita)
Adik kecilku yang udah mulai dewasa "Zainun"(tetap semangat dan rajin belajar ya walau bagaimanapun keadaan kita saat ini)

Keluarga besarku (mbah putri, bu ain, bapak, mas qoid, mas bashor, mbak umi' dan kedua ponakanku tersayang), makasih banget atas dukungan dan kepeduliannya ma aku. karena keluarga inilah aku dapatkan banyak hal dan segalanya yang aku cari.

Mas Dzannieku, jangan pernah lelah ya dengerin keluh kesahku..makasih banget atas semuanya, atas dukungan,semangat dan ketulusan mas. Mas dah banyak ngajari aku tentang kehidupan dan kesabaran hingga aku bisa tetap berjalan di jalanku dengan penuh keyakinan.

Sodari dan best friendku
(evi, tek"iswa"kecil, nytha, emoth) Hari- hariku di kampus ini banyak terisi oleh kebersamaan bersama kalian. So thanks so much untuk semangat, motivasi dan semuanya. tetap jaga hubungan kita ya?
Akhirnya.....kita bisa wisuda bareng!!
Love U all...

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

Puji syukur ke hadirat Allah Swt., penguasa alam semesta dan isinya ini, atas rahmat, karunia, dan hidayahNya sehingga penulisan skripsi yang berjudul "Pelabelan Graceful *(Graceful Labeling)* pada Graf Superstar $S_{5,n}$" dapat terselesaikan dengan baik. Shalawat serta salam tetap terlimpahkan atas junjungan Nabi Muhammad Saw., yang telah memberikan tuntunan dan suri tauladan kepada seluruh makhluk menuju jalan yang diridho'iNya yaitu *Diinul Islam* yang diterangi dengan cahaya keimanan.

Kiranya penulis menyadari sepenuhnya bahwa penyelesaian skripsi ini telah banyak mendapatkan bantuan dan dorongan semangat dari berbagai pihak. Oleh karena itu dengan segala kerendahan dan ketulusan hati, penulis ingin mengucapkan hormat dan terima kasih yang setinggi-tingginya kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor UIN Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., DSc, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.
3. Sri Harini, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.
4. Wahyu Henky Irawan, M.Pd, selaku dosen pembimbing matematika yang telah bersedia meluangkan waktunya untuk memberikan pengarahan kepada penulis dalam penulisan skripsi ini.
5. Ahmad Barizi, M.A, selaku dosen pembimbing kajian keagamaan yang telah banyak membimbing dan memberikan masukan kepada penulis.

6. Semua dosen dan Guru-guru yang telah menyalurkan ilmunya kepada penulis sehingga penulis bisa terus melangkah menyelesaikan skripsi ini.
7. Ayah, Ibu, dan Adik tersayang yang telah memberi dukungan penuh dan limpahan do'a terhadap penulis.
8. Rekan-rekan matematika 2003 yang telah memberikan semangat dan motivasi kepada penulis.
9. Kepada semua pihak yang telah banyak membantu yang tidak bisa penulis sebutkankan satu persatu.

Tiada balasan yang dapat penulis berikan selain doa, semoga Allah Swt menerima dan memberikan imbalan yang lebih atas jerih payah serta memberikan perlindungan kepada kita semua.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa skripsi ini jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, saran dan kritik yang bersifat konstruktif dari para pembaca sangat penulis harapkan. Akhirnya, hanya kepada Allah Swt. penulis berserah diri dan semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis pada khususnya dan semua pihak pada umumnya.

Malang, 13 Februari 2008

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Muarrifah, Zainiatul. 2008, **Pelabelan Graceful *(Graceful Labeling)* pada Graf Superstar *$S_{5,n}$*,** Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Malang.
Pembimbing: Wahyu Henky Irawan, M.Pd
Ahmad Barizi, M.A

Kata kunci: Pelabelan Graceful, Graf Superstar

Graf memiliki dua unsur pokok yang disebut titik dan sisi. Hubungan antara keduanya dapat dikaitkan dengan suatu kejadian tertentu melalui pendekatan al-Qur'an. Salah satu kejadian yang terkait dengan pernyataan diatas adalah peristiwa hijrah Nabi Muhammad Saw. yang tercantum dalam al – Qur'an surat al- Baqarah ayat 218. Pelabelan graf merupakan salah satu materi graf yang berkembang dan mendapat banyak perhatian saat ini. Dengan mengkaji dan menganalisa pelabelan tertentu akan didapatkan suatu bentuk pola rumusnya.

Pelabelan graf didefinisikan sebagai pemberian label bilangan bulat tak negatif (Z^+) pada titik atau sisi atau keduanya dengan memenuhi aturan-aturan tertentu. Pelabelan graceful pada graf G adalah fungsi injektif f dari V (G) ke $\{0,1,2,\ldots,|E(G)|\}$ sedemikian hingga jika sisi xy dilabeli $|f(x)-f(y)|$ maka hasilnya berbeda. Pada penelitian ini akan dibahas pelabelan graceful pada graf superstar $S_{5,n}$.

Pelabelan graceful pada graf Superstar $S_{5,n}$ didefinisikan sebagai berikut:
Untuk titik v_0, maka $f(v_0) = 0$ (selalu 0, karena menjadi pusat sampai titik ke n)
Untuk pelabelan titik pada graf Superstar $S_{5,n}$ untuk n adalah bilangan asli, maka:

$$f(v_i) = 5n - \frac{i-1}{2} \quad \begin{cases} i = 1,3,5,\ldots,5n & \text{dimana } n \text{ ganjil} \\ i = 1,3,5,\ldots,5n-1 & \text{dimana } n \text{ genap} \end{cases}$$

$$f(v_i) = \frac{i}{2} \quad \begin{cases} i = 2,4,6,\ldots,5n-1 & \text{dimana } n \text{ ganjil} \\ i = 2,4,6,\ldots,5n & \text{dimana } n \text{ genap} \end{cases}$$

Pembahasan mengenai pelabelan graceful ini masih terbuka bagi peneliti lain untuk mengadakan penelitian yang sejenis dengan jenis-jenis graf yang berbeda, misalnya graf roda, graf kipas dan sebagainya.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Sebagian dari sejarah ilmu pengetahuan alam adalah catatan dari usaha manusia secara *kontinue* untuk merumuskan konsep-konsep dan unsur-unsur dalam bidang ilmu pengetahuan untuk dapat diuraikan ke dalam dunia nyata. Berbicara tentang ilmu pengetahuan, Al-Qur'an telah memberikan kepada manusia kunci ilmu pengetahuan tentang dunia dan akhirat serta menyediakan peralatan untuk mencari dan meneliti segala sesuatu agar dapat mengungkap dan mengetahui keajaiban dari kedua dunia itu (Rahman, 1992:12). Tidak diragukan lagi bahwa Al-Qur'an, dengan anjuran memperhatikan dan berfikir yang diulanginya beberapa kali menjadikan aktivitas studi dan penelitian dalam berbagai bidang sebagai sebuah keharusan bagi umat Islam. Karena itu Islam memerintahkan manusia untuk beribadah dan berfikir (Pasya, 2004:5)

Manusia telah diciptakan dengan kelebihan akal, mempunyai peranan sangat penting untuk dapat menggali dan memanfaatkan segala bentuk ciptaanNya sebagaimana telah dijelaskan dalam Al-Qur'an. Dengan semua kelebihannya manusia berperan untuk mengembangkan ilmu pengetahuan. Selanjutnya melalui aktivitas studi dan penelitiannya manusia diharuskan mampu memahami kebenaran Al-Qur'an.

Allah berfirman:

وَلِيَعْلَمَ ٱلَّذِينَ أُوتُوا۟ ٱلْعِلْمَ أَنَّهُ ٱلْحَقُّ مِن رَّبِّكَ فَيُؤْمِنُوا۟ بِهِۦ
فَتُخْبِتَ لَهُۥ قُلُوبُهُمْ ۗ وَإِنَّ ٱللَّهَ لَهَادِ ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓا۟ إِلَىٰ صِرَٰطٍ مُّسْتَقِيمٍ
٥٤

"Dan orang-orang yang telah diberi ilmu, meyakini bahwasanya Al Qur'an itulah yang hak dari Tuhan-mu lalu mereka beriman dan tunduk hati mereka kepadanya dan Sesungguhnya Allah adalah pemberi petunjuk bagi orang-orang yang beriman kepada jalan yang lurus " (Qs. Al- Hajj, 22: 54)

Dalam ayat lain juga dijelaskan,

وَلَا تَقْفُ مَا لَيْسَ لَكَ بِهِۦ عِلْمٌ ۚ إِنَّ ٱلسَّمْعَ وَٱلْبَصَرَ وَٱلْفُؤَادَ كُلُّ أُو۟لَـٰٓئِكَ
كَانَ عَنْهُ مَسْـُٔولًا ٣٦

"Dan janganlah kamu mengikuti apa yang kamu tidak mempunyai pengetahuan tentangnya." (Qs. Al- Israa', 17: 36)

Ayat pertama di atas menjelaskan bahwa manusia yang telah berilmu lewat akal dan hatinya mampu memahami dan mengungkap segala bentuk ciptaanNya yang telah disebutkan dalam Al-Qur'an. Islam menghendaki akidah yang dilandasi oleh dasar pengetahuan yang benar, bukan atas dasar taklid maupun perkiraan. Sehingga menegaskan suatu sistem yang sempurna bagi hati dan akal untuk menyertakan metode-metode ilmiah dan penalaran dalam menjalankan tugasnya yang telah tersebut di atas. Demikian halnya aktivitas manusia dalam memahami konsep matematika memerlukan suatu pengetahuan dasar sehingga mampu menangkap integrasi Al-Qur'an dan Sains.

Abdushshamad (2002:27) mengatakan bahwa banyak sekali ditemukan mukjizat ilmu pengetahuan dalam Al-Qur'an secara garis besar, termasuk matematika. Namun, Al-Qur'an tidak mengangkat metode baru atau teknik baru dalam masalah ini, melainkan telah menunjukkan tentang adanya eksistensi dari sesuatu yang ada di balik alam semesta dengan cara yang sama seperti yang ia tunjukkan mengenai eksistensi dari alam semesta itu sendiri (Rahman, 1992:15).

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran – ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdusysyakir, 2007:79).

Dalam Al-Qur'an surat Al-Qamar ayat 49 disebutkan

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَٰهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

"Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran".
(Qs.Al- Qamar, 54: 49)

Shihab (2003:482) menafsirkan bahwa kata *qadar* pada ayat di atas diperselisihkan oleh para ulama. Dari segi bahasa kata tersebut dapat berarti *kadar tertentu* yang tidak bertambah atau berkurang, atau berarti *kuasa*. Tetapi karena ayat tersebut berbicara tentang segala sesuatu yang berada dalam kuasa Allah, maka adalah lebih tepat memahaminya dalam arti *ketentuan* dan *sistem yang telah ditetapkan terhadap segala sesuatu*. Tidak hanya terbatas pada salah satu aspeknya saja. Manusia misalnya, telah ada *kadar yang ditetapkan* Allah baginya. Selaku jenis makhluk ia dapat makan, minum dan berkembang biak melalui *sistem yang ditetapkan-Nya*. Manusia memiliki potensi baik dan buruk. Ia dituntut untuk mempertanggungjawabkan pilihannya. Manusia dianugerahkan Allah petunjuk dengan kedatangan sekian rasul untuk membimbing mereka. Akalpun dianugerahkan-Nya kepada mereka, demikian seterusnya yang kesemuanya dan yang selainnya termasuk dalam *sistem* yang sangat tepat, teliti dan akurat yang telah ditetapkan Allah Swt. Demikian juga Allah telah menetapkan *sistem* dan *kadar* bagi ganjaran atau balasan-Nya yang akan diberikan kepada setiap orang.

Dalam ayat lain disebutkan

ٱلَّذِي لَهُۥ مُلۡكُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِ وَلَمۡ يَتَّخِذۡ وَلَدٗا وَلَمۡ يَكُن لَّهُۥ شَرِيكٞ
فِي ٱلۡمُلۡكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَيۡءٖ فَقَدَّرَهُۥ تَقۡدِيرٗا ٢

"…dan Dia Telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran ukurannya dengan serapi-rapinya". (Qs. Al-Furqan, 25: 2)

.

Semua yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitungan-hitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya. Namun rumus-rumus yang ada sekarang bukan diciptakan manusia sendiri, tetapi sudah disediakan. Manusia hanya menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika. (Abdusysyakir, 1997:80).

Matematika sebagai disiplin ilmu dikenal sebagai *Queen of Science*, karena dalam konsep matematika banyak digunakan simbol yang mengosongkan arti yang juga bisa dipakai dan diterapkan di berbagai bidang keilmuan yang lain, sehingga matematika dapat diterapkan kapanpun, dimanapun dan terbukti telah memberikan pengaruh yang cukup besar serta mempunyai peranan penting terhadap kemajuan disiplin ilmu lainnya, di antaranya ilmu statistika, perbankan, dan telekomunikasi.

Dewasa ini semakin banyak muncul penggunaan model matematika maupun penalaran matematika sebagai alat bantu dalam menyelesaikan permasalahan yang dihadapi dalam berbagai disiplin ilmu. Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang penting dan banyak manfaatnya karena teori-teorinya dapat diterapkan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Dengan mengkaji dan menganalisa model atau rumusan teori graf dapat diperlihatkan peranan dan kegunaannya dalam memecahkan permasalahan.

Terkait dengan pernyataan di atas, pelabelan graf merupakan salah satu materi graf yang berkembang dan mendapat perhatian saat ini. Ditinjau dari pengertiannya, Galian (2007:1) menyatakan bahwa pelabelan graf adalah pemberian label bilangan bulat tak negatif (Z^+) pada titik atau sisi atau keduanya dengan memenuhi aturan-aturan tertentu. Wilson (1990:8) menyatakan graf adalah suatu diagram yang terdiri dari titik-titik (*points*) yang disebut *vertex* (*node*/titik) yang dihubungkan dengan garis yang dinamakan sisi dimana setiap sisi terhubung dengan tepat 2 *vertex*. Dengan demikian akan terdapat dua jenis pelabelan graf, yaitu pelabelan graf pada titiknya dan pelabelan graf pada sisinya. Pelabelan suatu graf yang melibatkan pemberian nilai pada sisi maupun titik disebut dengan pelabelan total (*total labeling*).

Pelabelan graceful didefinisikan sebagai pemberian label pada titik suatu graf *G* yang memenuhi fungsi injektif dari himpunan titik ke himpunan bilangan bulat tak negatif {0, 1, 2,…*e*}sedemikian hingga jika sisinya mendapat label harga mutlak dari selisih pelabelan kedua titik yang yang terhubung langsung (*adjacent*) maka hasilnya berbeda. Sebuah graf disebut graceful jika dapat dikenai pelabelan Graceful. Dengan demikian pelabelan graceful merupakan salah satu bentuk pelabelan pada titiknya saja, sedangkan label sisinya menjadi akibat dari adanya label titik yang berbeda semua.

Pelabelan graf, khususnya pelabelan graceful yang akan dibahas pada skripsi ini mempunyai beberapa nilai penting dalam memahami tafsiran Al-Qur'an. *Kadar* dan *sistem* yang telah dijelaskan pada ayat di atas, dalam kaitannya dengan pelabelan graceful kadar dan *sistem* yang dimaksud menjelaskan tentang pemberiaan nilai (tanda) bilangan bulat tak negatif pada titik-titik suatu graf dengan aturan yang telah ditentukan sehingga setiap sisi pada suatu graf tersebut dapat terlabeli dengan hasil harga mutlak yang berbeda dari selisih antara dua titik yang berbeda pula. Begitulah Al Qur'an menjelaskan dan menjadi sumber dari ilmu pengetahuan yang telah banyak dikembangkan dimuka bumi ini, khususnya perkembangan ilmu matematika.

Beberapa kajian terdahulu tentang pelabelan graceful untuk jenis-jenis graf tertentu telah dibahas pada skripsi yang lain seperti pada graf lintasan P_n, graf hasil kali kartesius dan graf sikel C_2. Penulis tertarik untuk melanjutkan meneliti pelabelan graceful pada jenis graf yang lain, yaitu pada graf superstar $S_{5,n}$. Selain memiliki bentuk yang menarik, graf ini identik dengan sebuah bintang yang memiliki 5 sudut. Oleh karena itu penulis merumuskan judul pada skripsi ini "***Pelabelan Graceful (Graceful Labeling) pada Graf Superstar*** $S_{5,n}$ ".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan judul dan latar belakang di atas untuk memberikan landasan dan memfokuskan penelitian, maka peneliti merumuskan masalah pada "bagaimana menentukan pelabelan graceful pada graf superstar $S_{5,n}$ ".

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini adalah menjelaskan cara menentukan pelabelan graceful pada graf superstar $S_{5,n}$.

1.4 Manfaat Penelitian

1 Jurusan Matematika

Hasil pembahasan ini dapat digunakan sebagai tambahan bahan dalam pengembangan ilmu matematika khususnya di kalangan mahasiswa jurusan matematika.

2 Peneliti

Melalui penelitian ini dapat menambah penguasaan materi, sebagai pengalaman dalam melakukan penelitian dan menyusun karya ilmiah dalam bentuk skripsi, serta media untuk mengaplikasikan ilmu matematika yang telah diterima dalam bidang keilmuannya.

3 Pengembangan Ilmu Pengetahuan

Menambah wawasan dan mempertegas keilmuan matematika dalam peranannya terhadap perkembangan teknologi dan disiplin ilmu lain.

1.5 Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi ini lebih terarah, maka penulis menggunakan sistematika penulisan sebagai berikut:

BAB I : PENDAHULUAN

Pada bab ini terdiri dari latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan pembahasan, batasan masalah, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II : KAJIAN PUSTAKA

Pada bab ini difokuskan pada materi atau teori yang berkaitan dengan skripsi ini, yaitu: definisi graf, dasar-dasar graf, jenis-jenis graf, fungsi, barisan aritmatika, dan pelabelan graceful.

BAB III : PEMBAHASAN

Berisi pembahasan tentang pelabelan graceful pada graf Superstar $S_{5,n}$.

BAB IV : PENUTUP

Pada bab ini terdiri dari kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Definisi Graf

Wilson (1990: 8) menyatakan graf adalah suatu diagram yang terdiri dari titik-titik (*points*) yang disebut *vertex* (*node*/titik) yang dihubungkan dengan garis yang dinamakan sisi dimana setiap sisi terhubung dengan tepat 2 *vertex*.

Secara matematis graf didefinisikan sebagai berikut, Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V,E), yang mana dalam hal ini :

V = himpunan tidak kosong dari simpul-simpul (*vertices atau node*) = $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$

E = himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan sepasang simpul = $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$

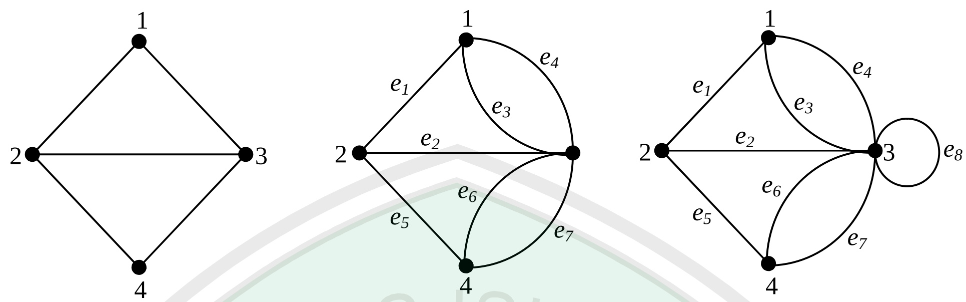
atau $G = (V,E)$.

Himpunan simpul (V) tidak boleh kosong, sedangkan himpunan sisi (E) boleh kosong. Jadi, sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu pun, tetapi simpulnya harus ada, minimal satu. Graf yang mempunyai satu simpul tanpa sisi dinamakan graf trivial (Munir, 2003:291). Simpul yang dimaksud pada pernyataan di atas adalah titik pada pernyataan yang lain.

Simpul pada graf dapat dilabeli dengan huruf, seperti *a*, *b*, *c*, ..., *z* dengan bilangan asli 1, 2, 3,... atau gabungan keduanya. Sedangkan sisi yang menghubungkan simpul v_i dengan v_j dinyatakan dengan pasangan (v_i,v_j) atau dengan lambang $e_1, e_2, ..., e_n$. Dengan kata lain, jika e adalah sisi yang menghubungkan simpul v_i dengan simpul v_j, maka e dapat ditulis sebagai

$$e = (v_i, v_j)$$

Secara geometri graf dapat digambarkan sebagai sekumpulan noktah (simpul) yang dihubungkan dengan sebuah garis (sisi).



(a) G_1 **(a)** G_2 **(a)** G_1

Gambar 2.1 Graf dengan Himpunan Titik *V* dan Himpunan Sisi *E*

Gambar di atas memperlihatkan tiga graf, G_1, G_2, G_3. G_1 adalah graf dengan simpul *V* dan sisi *E* adalah

V = {1, 2, 3, 4}

E = {(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(3,4)}

G_2 adalah graf dengan himpunan simpul *V* dengan sisi *E* adalah :

V = {1, 2, 3, 4}

E = {(1,2),(2,3),(1,3),(1,3),(2,4),(3,4),(3,4)}

$= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$

G_3 adalah graf dengan himpunan simpul *V* dan himpunan sisi *E* :

V = {1, 2, 3, 4}

E = {(1,2),(2,3),(1,3),(1,3),(2,4),(3,4),(3,4),(3,3)}

$= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$

(Munir, 2003:292)

Banyak konsep-konsep matematika atau berbagai cabangnya, salah satunya teori graf yang tertuang dalam Al- Qur'an, diantaranya: Q.S. Al-Nisa', 04: 03;

Q.S. Al-Baqarah, 02: 158 dan 218; Q.S. Yasin, 36: 40. Al- Qur'an merupakan mukjizat yang bersifat abadi dan bersifat ilmiah yang sebenarnya mengajak kepada setiap pembacanya untuk membahas dan meneliti ayat-ayat dalam rangka menemukan hakekat keilmiahan yang ditetapkan sebagai suatu ilmu. Oleh karena itu tidaklah mengherankan apabila Al-Qur'an mampu menegaskan kebenaran dan kesesuaiannya terhadap apa yang dihasilkan oleh penemuan-penemuan ilmu pengetahuan yang bersifat kontemporer setelah ratusan tahun ditemukan oleh para pakar dengan kajian, pembahasan dan penalaran (Mulyono dan Abtokhi, 2006:3).

Dari uraian di atas tidak menutup kemungkinan banyak konsep matematika khususnya teori graf yang masih belum dikaji dan terungkap melalui pendekatan Al-Qur'an. Seperti yang telah diuraikan sebelumnya, bahwa suatu graf memiliki dua unsur pokok yang disebut titik dan sisi. Titik-titik dalam suatu graf akan saling terhubung dengan adanya suatu garis yang dinamakan sisi. Sehingga dengan demikian, hal ini menunjukkan adanya suatu hubungan atau keterkaitan antara titik yang satu dengan titik yang lain.

Jika dikaitkan dengan kehidupan nyata, maka banyaknya titik yang terhubung dalam suatu graf dapat diasumsikan sebagai banyaknya kejadian tertentu, yang mana kejadian-kejadian tersebut memiliki keterkaitan dengan titik lainnya yang merupakan kejadian sesudahnya. Shalat dapat direpresentasikan dalam suatu graf. Shalat mempunyai kedudukan yang amat penting dalam Islam dan merupakan fondasi yang kokoh bagi tegaknya agama Islam. Ibadah shalat dalam Islam sangat penting, sehingga shalat harus dilakukan pada waktunya, dimanapun, dan bagaimanapun keadaan seorang muslim yang mukalaf.

Shalat wajib disebut juga shalat *maktubah* atau shalat *mafrudhah*, mulai diperlakukan pada malam Isra' tahun 621 M. Shalat wajib dilaksanakan lima kali sehari semalam, yaitu pada waktu: *Dzuhur, Ashar, Magrib, Isya', dan Shubuh*. Shalat wajib yang mula-mula dilakukan Rasulullah Saw. adalah shalat dzuhur pada esoknya malam isra' tersebut (Depag RI, 1988:833).

Firman Allah dalam Al-Qur'an surat Al- Nisa' ayat 103

إِنَّ ٱلصَّلَوٰةَ كَانَتۡ عَلَى ٱلۡمُؤۡمِنِينَ كِتَٰبٗا مَّوۡقُوتٗا

„ …Sesungguhnya shalat itu adalah fardhu yang ditentukan waktunya" (Qs. Al- Nisa', 4:103).

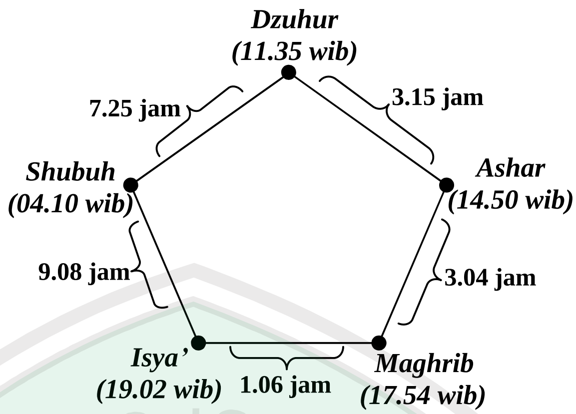
Al- Qur'an tidak menerangkan secara terperinci waktu-waktu pelaksanaan shalat fardhu, akan tetapi, didalam hadis Rasulullah Saw waktu-waktu shalat telah dinyatakan secara terperinci, batas awal sampai batas akhir waktu setiap shalat. Di antara hadis yang menerangkan waktu-waktu shalat tersebut adalah hadis yang diriwayatkan oleh ahmad An nasa'iy dan At-Turmudzi dari Jabir ibn Abdullah r.a adalah sebagai berikut:

"Bahwasanya Jibril datang kepada Nabi Saw, lalu berkata kepadanya: " bangun dan bershalatlah" maka nabipun shalat dzuhur diketika telah tergelincir matahari. Kemudian Jibril datang pula kepada nabi pada waktu ashar, lalu berkata: " bangun dan bershalatlah". Maka nabi bershalat ketika bayangan segala sesuatu itu sepanjang dirinya. Kemudian Jibril datang pula kepada nabi pada waktu maghrib, lalu berkata: " bangun dan bershalatlah" maka nabi shalat maghrib diwaktu telah terbenam matahari. Kemudian Jibril datang pada waktu isya', lalu berkata: " bangun dan bershalatlah" maka nabi bershalat isya' diwaktu telah hilang mega-mega merah. Kemudian Jibril datang pula di waktu shubuh, diketika telah cemerlang fajar. Pada keesokan harinya ibril datang lagi untuk shalat dhuhur. Jibril berkata: " bangun dan bershalatlah", maka nabi shalat dzuhur ketika bayangan segala sesuatu telah menjadi sepanjang dirinya. Kemudian Jibril datang lagipada waktu ashar, lalu berkata: " bangun dean bershalatlah", maka nabi bershalat ashar ketika telah terjadi bayangan segala sesuatu dua kali bayangan dirinya. Kemudian Jibril datang lagi pada waktu maghrib sama seperti waktu

> *beliau datang kemaren . kemudian Jibril datang lagi pada waktu isya' diketika telah berlalu separoh malam, atau sepertiga malam, maka nabipun bershalat isya' kemudian jibril datang lagi waktu fajar telah bersinar terang, lalu berkata: " bangun dan bershalatlah", maka nabi bangun dan bershalat shubuh. Sesudah itu Jibril berkata: "waktu-waktu diantara kedua waktu ini, itulah waktu shalat"* (kitab hadist imam Ahmad, hadist ke 10819).

Berdasarkan hadis di atas maka dapat diperinci ketentuan waktu shalat untuk waktu Dzuhur dimulai sejak matahari tergelincir yaitu sesaat setelah mencapai titik kulminasi dalam peredaran hariannya sampai bayang-bayang sesuatu sama panjangnya atau tiba waktu ashar, waktu Ashar dimulai saat panjang bayang-bayang suatu benda sama dengan bendanya ditambah dengan bayang-bayang saat matahari berkulminasi sampai matahari terbenam, waktu Maghrib dimulai sejak matahari terbenam sampai hilang mega merah, waktu shubuh dimulai sejak matahari terbenam sampai hilangnya mega merah, waktu Isya' dimulai sejak hilangnya mega merah sampai separuh malam (terbit fajar), dan waktu Shubuh dimulai sejak terbit fajar sampai terbit matahari.

Saat ini penentuan waktu shalat bisa ditentukan dengan penerapan ilmu astronomi dan falakiyah sehingga ketentuan waktu shalat didapatkan berdasarkan satuan waktu yang ada dengan melihat perbedaan waktu GMT yang telah disepakati tanpa harus melihat bayangan suatu benda. Waktu sholat dan selisih dengan waktu shalat sebelumnya atau sesudahnya menjadikan shalat-shalat yang diwajibkan tersebut saling berkesinambungan antara satu dan yang lainnya. Sehingga dengan ditetapkannya waktu shalat dan selisihnya tersebut dapat menjaga kaum muslimin dari kelalaian.



Gambar 2.2 Representasi Graf Terhadap Waktu-Waktu Shalat

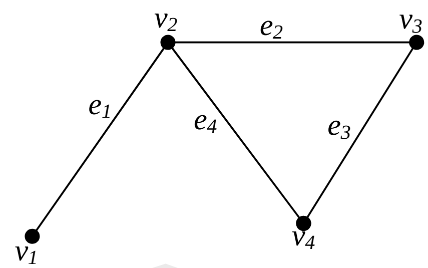
2.2 Dasar-Dasar Graf

1. Terhubung Langsung *(adjacent)*

Dua buah simpul pada pada graf tak berarah *G* dikatakan adjacent bila keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi (Munir, 2003 : 301). Chartrand dan Lesniak (1986: 4) menyatakan sisi *e* = (*u*, *v*) dikatakan menghubungkan titik *u* dan *v*. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka *u* dan *v* disebut terhubung langsung *(adjacent)*.

2. Terkait Langsung *(incident)*

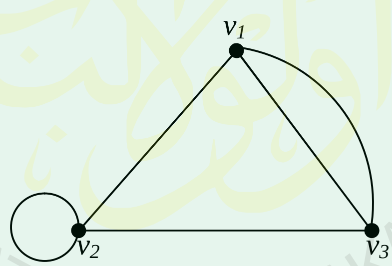
Jika sisi $e = (u, v)$ akan ditulis *e* = *uv*, maka *u* dan *e* serta *v* dan *e* disebut terkait langsung *(incident)* (Chartrand dan Lesniak, 1986: 4). Pada Gambar 2.3 titik v_3 *adjacent* dengan titik v_2 dan v_4, tetapi tidak *adjacent* dengan titik v_1. Sisi e_4 incident dengan titik v_4 dan v_2, tetapi tidak *incident* dengan titik v_1



Gambar 2.3 Graf untuk Mengilustrasikan *Adjacent* dan *Incident*

3. Loop dan Sisi Ganda

Apabila titik *u* dan *v* pada graf *G* dihubungkan oleh lebih dari satu sisi maka sisi tesebut dinamakan sisi ganda. Sebuah sisi yang berawal dan berakhir pada satu titik yang sama dinamakan loop. Suatu graf yang tidak mengandung sisi ganda dan loop disebut graf sederhana (Chartrand and Oellerman, 1993: 2). Untuk selanjutnya graf yang dibahas dalam skripsi ini adalah graf sederhana. Pada Gambar 2.4 diberikan contoh graf yang mengandung loop dan sisi ganda.



Gambar 2.4 Graf yang Memuat Loop dan Sisi Ganda

Suatu graf yang memiliki sisi ganda, artinya dalam graf tersebut terdapat dua titik yang memiliki lebih dari satu sisi memiliki hubungan dan integritas yang cukup signifikan pada sebuah ayat Al- Qur’an:

إِنَّ ٱلصَّفَا وَٱلْمَرْوَةَ مِن شَعَآئِرِ ٱللَّهِ ۖ فَمَنْ حَجَّ ٱلْبَيْتَ أَوِ ٱعْتَمَرَ فَلَا
جُنَاحَ عَلَيْهِ أَن يَطَّوَّفَ بِهِمَا ۚ وَمَن تَطَوَّعَ خَيْرًا فَإِنَّ ٱللَّهَ شَاكِرٌ
عَلِيمٌ ﴿١٥٨﴾

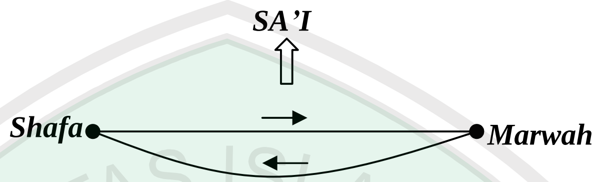
" Sesungguhnya Shafaa dan Marwa adalah sebahagian dari syi'ar Allah. Maka barangsiapa yang beribadah haji ke Baitullah atau ber-'umrah, maka tidak ada dosa baginya mengerjakan sa'i antara keduanya. dan barangsiapa yang mengerjakan suatu kebajikan dengan kerelaan hati, maka Sesungguhnya Allah Maha Mensyukuri kebaikan lagi Maha Mengetahui".(Qs. Al-Baqarah, 02:158)

Sa'i arti harfiahnya adalah usaha, sedangkan arti syari'ahnya pada ibadah haji dan umroh adalah berbolak balik sebanyak tujuh kali antara bukit shafa dan marwah demi melaksanakan perintah Allah (Shihab, 2000:345). Sa'i merupakan salah satu rukun haji dan umroh, waktunya dilaksanakan setelah selesai melakukan thawaf. Dalam suatu hadis dijelaskan bahwa Rasulullah bersabda:

"Diwajibkan atas kamu melakukan Sa'i maka hendaklah kamu lakukan." (Riwayat Ahmad)

Pelaksaan Sa'i lebih bersifat sebagai pemantapan keimanan. Dalam hal ini Allah seakan-akan mengingatkan kepada seluruh umatnya yang sedang melakukan badah haji, betapa luar biasanya keikhlasan Nabi Ibrahim dan keluarganya dalam menjalankan perintah Allah. Betapa Nabi Ibrahim pernah diperintahkan Allah untuk meninggalkan istri dan anak kesayangannya di sebuah padang tandus, sehingga membuat istrinya berlarian kesana kemari untuk mencari sumber air antara bukit shafa dan marwah. Akhirnya memang terbukti, bahwa Allah selalu memberikan jalan keluar yang berada di luar jangkauan pemikiran, kepada hamba yang taat dan ikhlas kepadaNya. Sumur Zam-zampun menjadi salah satu keajaiban dunia karena tidak pernah kering selama ribuan tahun. Momentum itulah yang diabadikan Allah dalam sa'i.

Terkait dengan kejadian di atas, maka kejadian tersebut dapat direpresentasikan pada graf dengan sisi ganda sebagai berikut:

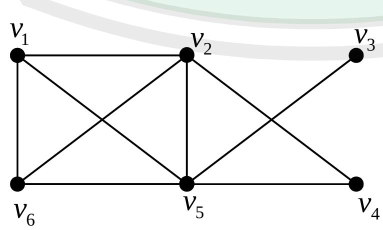


Gambar 2.5 Graf Representasi Ibadah Sa'i

Melakukan Sa'i hendaklah dimulai dari bukit Shafa dengan jumlah tujuh kali bolak-balik dan akan selesai di bukit Marwah, dengan ketentuan dari Shafa ke Marwah dihitung satu kali dan dari Marwah ke Shafa satu kali yang lain. Dalam pelaksanaannya terdapat dua jalan yang menghubungkan dua bukit tersebut. Satu jalan menuju ke bukit shafa dan satu jalan yang lain menuju ke bukit Marwah (Depag RI, 1988:830).

4. Derajat *(degree)*

Derajat titik v pada graf G adalah jumlah sisi dari graf G yang *incident* dengan v. Derajat titik v pada graf G dinotasikan dengan $deg_G\ v$ atau secara sederhana dapat juga dinotasikan dengan $deg\ v$ (Chatrand and Lesniak, 1986:7).



$\deg_G v_1 = 3$ $\quad$ $\deg_G v_4 = 2$

$\deg_G v_2 = 4$ $\quad$ $\deg_G v_5 = 5$

$\deg_G v_3 = 1$ $\quad$ $\deg_G v_6 = 3$

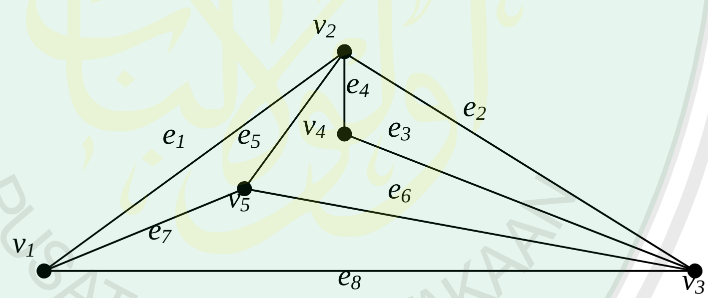
Gambar 2.6 Graf untuk Mengilustrasikan Derajat Suatu Titik

5. Jalan *(walk)*, Trail, dan Lintasan (*path)*

Misal u dan v adalah titik-titik di graf G. sebuah jalan u-v dalam graf G adalah barisan berselang-seling

$$u = u_0, e_1, u_1, e_2, \ldots u_{n-1}, e_n, u_n = v$$

antara titik dan sisi yang dimulai dengan titik dan di akhiri dengan titik sedemikian hingga $e_i = u_{i-1}u_i$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$. Sebuah jalan u-v dikatakan tertutup jika $u = v$, dan dikatakan terbuka jika $u \neq v$. Suatu jalan u-v disebut trail u-v jika semua sisi pada jalan itu berlainan. Suatu jalan u-v yang semua titiknya berbeda dinamakan lintasan *(path)* (Chartrand and Lesniak, 1986:26). Pada Gambar 2.7 diberikan contoh sebuah graf G dengan $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_2, v_2, e_5, v_5, e_6, v_3, e_3, v_4$ adalah jalan, $v_1, e_1, v_2, e_5, v_5, e_7, v_1, e_8, v_3, e_3, v_4$ adalah trail, dan v_1, e_8, v_3, e_3, v_4, adalah lintasan.



Gambar 2.7 Graf untuk Mengilustrasikan Jalan, Trail, dan Lintasan

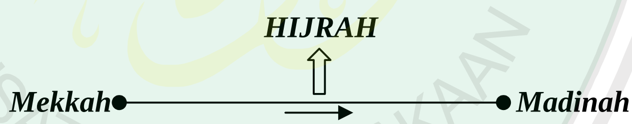
Pengilustrasian jalan dan lintasan dapat diambil dari sebuah ayat yang menjelaskan tentang hijrah.

Firman Allah dalam Al-Qur'an:

إِنَّ ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ وَٱلَّذِينَ هَاجَرُواْ وَجَٰهَدُواْ فِى سَبِيلِ ٱللَّهِ أُوْلَٰٓئِكَ
يَرۡجُونَ رَحۡمَتَ ٱللَّهِۚ وَٱللَّهُ غَفُورٞ رَّحِيمٞ ٢١٨

”Sesungguhnya orang-orang yang beriman, orang-orang yang berhijrah dan berjihad di jalan Allah, mereka itu mengharapkan rahmat Allah, dan Allah Maha Pengampun lagi Maha Penyayang ”(*Qs. Al- Baqarah, 02:218)*

Hijrah menurut pengertiannya adalah berpindah tempat, hijrah dilakukan di masa nabi Muhammad Saw atas perintah Allah Swt. Hal ini disebabkan karena Lahirnya agama islam menimbulkan berbagai macam pertentangan masyarakat mekah. Berbagai penganiayaan, penyerangan terhadap kaum muslimin dilakukan masyarakat Mekah guna menyingkirkan agama islam. Ketika penganiayaan semakin menjadi-jadi nabi Muhammad berpikir untuk pindah ke suatu tempat di Madinah yang sebelumnya bernama Yasrib. Tempat ini dianggap sebagai tempat yang lebih mudah dan aman untuk melakukan misinya menyebarluaskan agama Allah. Bersama pengikutnya yang berjumlah ± 70 orang akhirnya nabi meninggalkan Mekkah menuju Madinah. Hijrah nabi dari mekkah ke madinah dapat menjadi suatu gambaran sebuah lintasan atau jalan pada suatu graf. Representasi hijrah nabi digambarkan pada lintasan berikut:



Gambar 2.8 Graf Representasi Hijrah Nabi

6. Terhubung *(connected)* dan Tak terhubung *(disconnected)*

Suatu graf *G* disebut terhubung *(connected)* jika untuk setiap titik *u* dan *v* di *G* terdapat lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut. Sedangkan jika terdapat dua titik pada graf *G* yang tidak dihubungkan oleh suatu lintasan, maka graf *G* disebut graf tak terhubung *(disconnected)* (Chartrand and Oellerman, 1993:21). Untuk selanjutnya graf yang dibahas dalam skripsi ini adalah graf terhubung sederhana. Sebagai contoh Gambar 2.9 (a) adalah graf terhubung dan

(b) adalah graf tak terhubung karena tidak ada lintasan yang menghubungkan antara v_4 dan v_5

(a) (b)

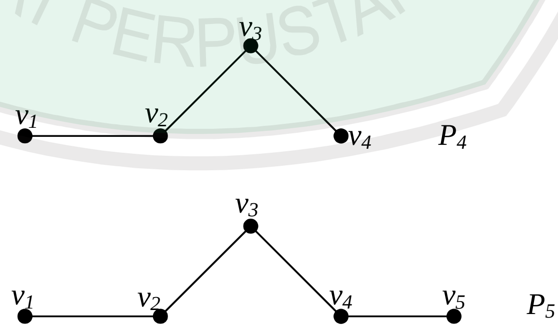
Gambar 2.9 (a) Graf Terhubung (b) Graf Tak Terhubung

2.3 Jenis-Jenis Graf

Graf dibagi menjadi beberapa kelas. Pada subbab ini dibahas mengenai jenis-jenis graf yang berkaitan pada skripsi ini.

1. Graf Lintasan

   Graf lintasan adalah graf yang terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan dengan n titik dinotasikan dengan P_n (Alifah, 2005: 5). Graf lintasan P_4 dan P_5 ditunjukkan pada Gambar 2.10



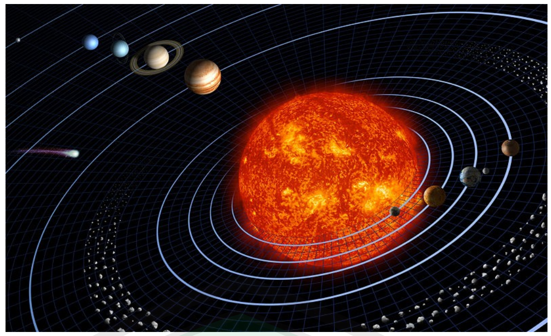
Gambar 2.10 Graf Lintasan P_4 dan P_5

2. Graf Superstar

Suatu graf G disebut graf superstar (disebut graf spider dalam beberapa artikel) jika graf tersebut memuat gabungan m graf lintasan P_n dengan 1 titik akhir di setiap lintasan P_n saling bersekutu pada satu titik, yang kemudian titik tersebut disebut titik pusat (Shiu dkk, 1998:1). Untuk selanjutnya graf superstar dinotasikan dengan $S_{m,n}$ dengan m adalah banyak lintasan sedangkan n adalah banyak titik di setiap lintasan. Pada Gambar 2.11 dapat dilihat graf superstar $S_{5,3}$.

Gambar 2.11 Graf Superstar $S_{5,3}$

Suatu graf Superstar tergambar pada susunan tata surya di ruang angkasa. Para ahli perbintangan telah menjelaskan bahwa matahari dikelilingi oleh sekumpulan benda angkasa yang terdiri dari planet, bulan, dan komet yang selalu mengikuti matahari dan tunduk terhadap kekuatan gravitasi matahari (Abdushshamad, 2003:29).



Gambar 2.12 Susunan tata surya

Gaya grafitasi menarik dan menghubungkan benda-benda langit itu, sedangkan gaya tolak justru mendorong benda-benda itu jauh ke luar angkasa sesuai dengan pengaruh daya pada benda-benda itu. Dengan demikian, benda-benda angkasa itu berjalan pada dimensi yang tetap dalam kelompoknya. Artinya, Allah Swt. memang menyetarakan gaya grafitasi yang menarik benda-benda langit untuk saling berdekatan dengan daya geraknya yang diperolehnya dari gaya tolak. Allah mencegah benda-benda langit agar tidak berjatuhan melalui kekuatan atau gaya pengangkat dan menjaganya dari keterceraian melalui kekuatan atau gaya pengikat. Demikianlah seluruh komponen alam raya diatur sedemikian rupa oleh sistem yang sangat rapi (Pasya, 2004:54)

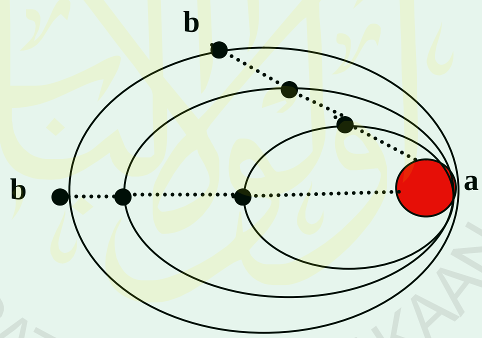
Dari uraian tersebut maka graf Superstar dapat diasumsikan sebagai susunan dari tata surya, dengan titik pusat diasumsikan sebagai matahari dan titik-titik lainnya diasumsikan sebagai benda-benda langit yang mengelilingi matahari sesuai dengan garis edarnya dan berjalan pada dimensi yang tetap dalam kelompoknya.

Allah berfirman dalam Al-Qur’an

لَا ٱلشَّمْسُ يَنۢبَغِى لَهَآ أَن تُدْرِكَ ٱلْقَمَرَ وَلَا ٱلَّيْلُ سَابِقُ ٱلنَّهَارِ ۚ وَكُلٌّ فِى فَلَكٍ يَسْبَحُونَ ﴿٤٠﴾

> *“Tidaklah mungkin bagi matahari mendapatkan bulan dan malampun tidak dapat mendahului siang. dan masing-masing beredar pada garis edarnya”.(Qs. Yâsîn , 36: 40)*

Ayat diatas menunjukkan tentang gerakan kumpulan benda angkasa yang ada di sekeliling matahari. Artinya, matahari, bulan, dan bumi yang diumpamakan dengan malam dan siang masing-masing mesti beredar bersama-sama mengelilingi matahari. Sehingga dengan pengaitan pada graf superstar akan terilustrasi seperti pada Gambar 2.13



Gambar 2.13 Representasi Tata Surya pada Graf Superstar $S_{2,3}$

Dengan asumsi, a adalah matahari dan b adalah benda-benda langit yang mengelilingi matahari.

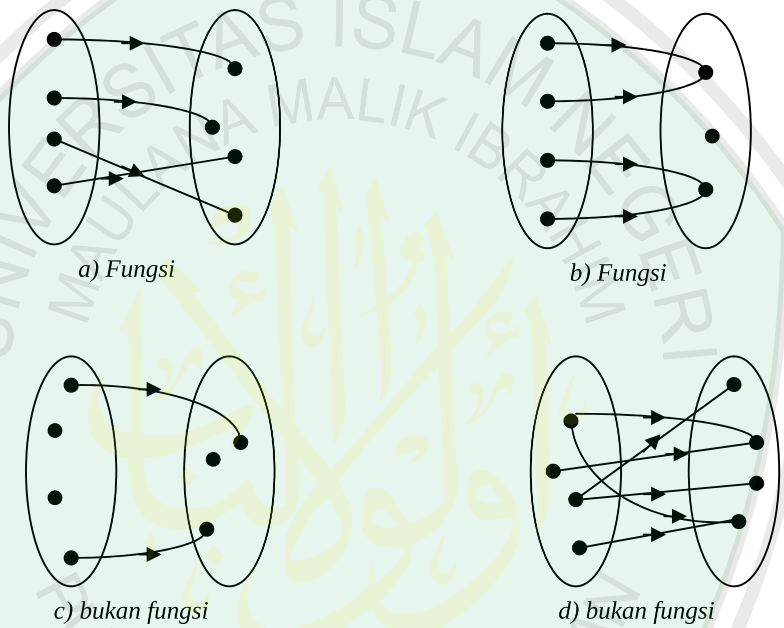
2.4 Fungsi

Albertson dan Hutchinson (1988:40) menyatakan bahwa suatu fungsi *f* adalah suatu pemetaan dari himpunan *D* kepada himpunan *T* dengan sifat bahwa untuk setiap elemen *d* di *D*, *f* memetakan *d* kepada suatu elemen tertentu, dinotasikan *f(d)* dari *T*. *D* disebut *domain f*, dan *T* disebut *codomain f*, ditulis *f: D*

$\rightarrow T$. *f(d)* sering disebut bayangan *(image)* dari *d* oleh *f*, dan semua himpunan *image* disebut *range R* dari *f*. Dinotasikan

$$R = \{f(d): d \in D\}$$

Suatu pemetaan dikatakan fungsi jika tidak ada elemen dari domain yang dipasangkan pada dua atau lebih elemen di range. Pernyataan tersebut diilustrasikan pada Gambar 2.14



Gambar 2.14 Ilustrasi Fungsi

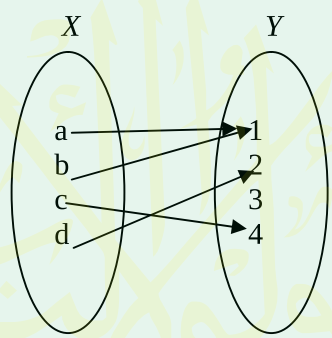
Menurut Balakrishnan (1991:7) fungsi dinyatakan sebagai berikut: Misal *X* dan *Y* adalah dua himpunan tak kosong. *X* dan *Y* pada pernyataan ini identik dengan himpunan *D* dan himpunan *T* pada pernyataan sebelumnya. Suatu fungsi *f* dari *X* ke *Y*, dinotasikan dengan $f: X \rightarrow Y$, adalah aturan yang memasangkan setiap elemen di *X* kepada elemen tertentu di *Y*. Himpunan *X* disebut *domain* fungsi dan himpunan *Y* disebut *codomain*. Jika *y* adalah elemen di *Y* yang dipasangkan oleh fungsi *f* pada elemen *x*, maka *y* disebut *bayangan* atau peta dari

x dan x disebut *prapeta* dari y dan ditulis $y = f(x)$. Himpunan $f(X)$ disebut range fungsi. Range suatu fungsi merupakan subset dari codomainnya. Jika f adalah suatu fungsi dari X ke Y, maka pernyataan ini dikatakan bahwa f memetakan himpunan X pada Y. sebagai contoh Gambar 2.15 adalah suatu fungsi $f: X \to Y$, dimana

$X = \{a, b, c, d\}$ dan $Y = \{1, 2, 3, 4\}$. Kemudian aturan f didefinisikan dengan

$f(a) = 1, f(b) = 1, f(c) = 4$, dan $f(d) = 2$.

Range dari f adalah {1, 2, 4}, dimana range tersebut adalah proper subset dari codomain Y



Gambar 2.15 Fungsi $f : X \to Y$

Keterangan:

$f: X \to Y$

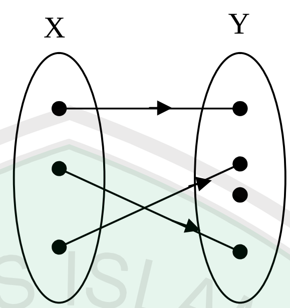
$f: a \to 1$

ditulis sebagai $f(a) = 1$

1 disebut bayangan atau *peta* dari a

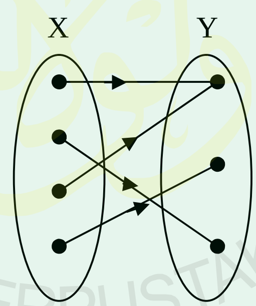
a disebut *prapeta* dari 1

Suatu fungsi f dari X ke Y dikatakan fungsi satu satu *(one to one)* atau *injective* jika tidak ada dua elemen berbeda di X yang dipetakan kepada satu elemen yang sama di *Y*. Dengan kata lain , jika $x_1, x_2 \in X$, dan $x_1 \neq x_2$ maka, $f(x_1) \neq f(x_2)$ (Roman, 1989:40)



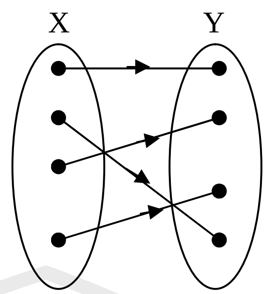
Gambar 2.16 Fungsi Satu-Satu

Fungsi *f* dikatakan fungsi pada (*onto*) atau *surjektif* jika *f* adalah suatu fungsi dari *X* ke *Y* dan range dari *f* adalah *Y*, maka *f* dikatakan fungsi pada (*onto*). Definisi fungsi pada (*onto*) dapat dinyatakan dengan notasi $\forall y \in Y, \exists x \in X \ni y = f(x)$



Gambar 2.17 Fungsi Onto

Apabila fungsi *f* memenuhi fungsi *injektif* dan *surjektif* maka *f* dinamakan fungsi *bijektif* (Johnsonbaugh, (1989:28). Contoh fungsi *bijektif* digambarkan pada gambar berikut:



Gambar 2.18 Fungsi Bijektif

Terkait dengan definisi fungsi diatas Al-Qur'an juga menjelaskan bahwa allah menciptakan setiap makhluqNya berpasang-pasangan. Sebagaimana Allah berfirman:

وَمِن كُلِّ شَيْءٍ خَلَقْنَا زَوْجَيْنِ لَعَلَّكُمْ تَذَكَّرُونَ ﴿٤٩﴾

"... Dan segala sesuatu kami ciptakan berpasang-pasangan supaya kamu mengingat kebesaran Allah "(Qs. adz-Dzariyat, 5:49)

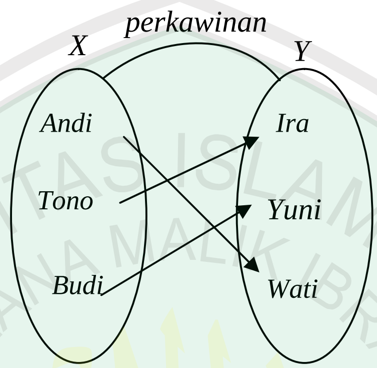
Dalam ayat lain disebutkan:

سُبْحَانَ الَّذِي خَلَقَ الْأَزْوَاجَ كُلَّهَا مِمَّا تُنبِتُ الْأَرْضُ وَمِنْ أَنفُسِهِمْ وَمِمَّا لَا يَعْلَمُونَ ﴿٣٦﴾

"Maha Suci Tuhan yang Telah menciptakan pasangan-pasangan semuanya, baik dari apa yang ditumbuhkan oleh bumi dan dari diri mereka maupun dari apa yang tidak mereka ketahui" (QS.Yâsȋn , 36: 36)

Dari segi bahasa, kata *azwaj* adalah bentuk jamak dari kata *zauj* yakni *pasangan*. Kata ini – menurut pakar bahasa Al-Qur'an, ar- Raghib al-Ashfahani, digunakan untuk masing-masing dari dua hal yang berdampingan (bersamaan), baik jantan maupun betina, binatang (termasuk binatang berakal yakni manusia) dan juga digunakan menunjuk kedua. Dia juga digunakan menunjuk hal yang sama bagi selain binatang seperti alas kaki (Shihab, 2002:539)

Jika suatu makhluq, dimisalkan pasangan antara laki-laki dan perempuan dibuat suatu bentuk fungsi, maka $f: X \longrightarrow Y$, dimana X = {Andi, Tono, Budi} dan Y = {Ira, Yuni, Wati}. Kemudian aturan f didefinisikan dengan f(Andi) = Wati, f(Tono) = Ira, f(Budi) = Yuni, sehingga



Gambar 2.19 Ilustrasi pasangan dalam bentuk fungsi

Dalam Al-Qur’an pasangan antara laki-laki dan perempuan adalah merupakan suatu bentuk ikatan perkawinan. Sehingga fungsi yang memasangkan antara yang satu dan lainnya tersebut dapat pula menjadi bentuk adanya ikatan pernikahan pada keduanya. Dalam pandangan Islam suami istri diibaratkan sebagai pakaian antara satu sama lain, sebagaimana yang telah diterangkan dalam Al-Qur’an surat Al-Baqarah, 02:187

هُنَّ لِبَاسٌ لَّكُمْ وَأَنتُمْ لِبَاسٌ لَّهُنَّ ۗ

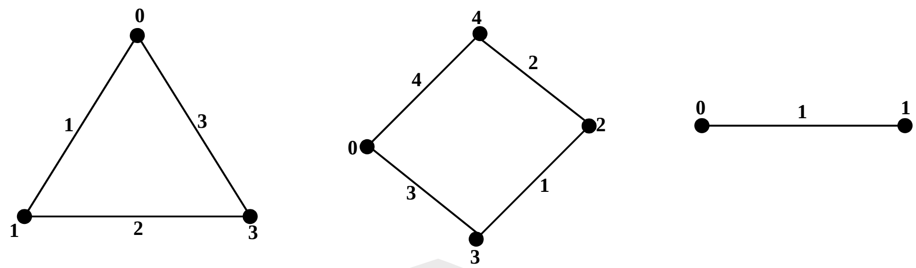
”Mereka adalah Pakaian bagimu, dan kamupun adalah pakaian bagi mereka”

Asy-Syirazi (1992:506) mengungkapkan bahwa seorang suami diperumpamakan sebagai pakaian bagi seorang istri dan seorang istri merupakan bagi suaminya. Itu berarti hubungan antara suami dan istri itu sangat erat. Pakaian berfungsi untuk menjaga badan dari panas dan dingin serta bahaya-bahaya yang lain dan juga pakaian berguna untuk menutupi aurat-aurat badan. Selain itu, pakaian juga merupakan hiasan bagi manusia. Pasangan suami istri masing-masing menjaga satu sama lain dari penyimpangan dan kekurangan-kekurangan. Sedangkan jika dilihat fungsi dari sebuah pakaian untuk menutupi aurat, maka seorang suami harus bisa menutupi aib seorang istri, karena aib istri merupakan aib ia juga, begitu juga sebaliknya. Hal inilah yang menunjukkan bahwa fungsi juga termuat dalam Al-Qur'an.

2.4 Pelabelan Graceful

Galian (2007:1) menyatakan bahwa pelabelan graf adalah pemberian label bilangan bulat tak negatif (Z^+) pada titik atau sisi atau keduanya dengan memenuhi aturan-aturan tertentu. Pelabelan suatu graf yang melibatkan pemberian nilai pada sisi maupun titik disebut dengan pelabelan total (*total lebeling*).

Pelabelan graf diperkenalkan pertama kali oleh Rosa pada tahun 1967. Rosa mendefinisikan pelabelan ini sebagai suatu fungsi nilai β pada suatu graf G yang memenuhi fungsi injektif dari himpunan titik di G ke himpunan $\{0,1,2,...,q\}$, sedemikian hingga jika setiap sisi xy diberi label $|f(x)-f(y)|$ maka setiap sisi xy akan mendapat label yang berbeda semua. Selanjutnya Golomb menyebut pelabelan ini sebagai pelabelan graceful dan dikenal sampai sekarang (Gallian, 2007:4). Graf yang dapat dikenai pelabelan graceful disebut graf graceful. Beberapa graf graceful ditunjukkan pada Gambar 2.20



Gambar 2.20 Graf Graceful

Jika berbicara tentang pemberian label sesuai dengan aturan yang ada, hal ini menunjukkan bahwa suatu graf graceful telah memiliki ukuran label tertentu sehingga bisa dikatakan graceful. Mengenai ukuran, Allah berfirman dalam Al-Qur’an

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَٰهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

”…Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran”
(Qs. al Qamar, 54:49)

Berkenaan dengan ayat di atas Abdusysyakir (2007:80) mengatakan bahwa semua yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitungan-hitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya. Namun rumus-rumus yang ada sekarang bukan diciptakan manusia sendiri, tetapi sudah disediakan. Manusia hanya menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika.

Begitupun dalam hal ini, suatu graf bisa terlabeli dengan pelabelan graceful karena sudah memiliki ukuran yang sempurna dengan cara dan aturan yang dibuat oleh manusia secara sistematis. Dari sinilah Al-Qur’an telah mengajak kepada setiap pembacanya untuk membahas, dan mengkaji suatu ilmu untuk memperluas khasanah keilmuannya.

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan di bahas mengenai pelabelan graceful pada graf superstar $S_{5,n}$, untuk setiap n bilangan asli. Dimana setiap n bilangan asli memiliki himpunan titik yang berindeks ganjil dan titik berindeks genap. Maka dari itu pembahasan mengenai pelabelan pada graf superstar $S_{5,n}$ untuk pelabelan titik dikasifikasikan menjadi dua bagian, yaitu:

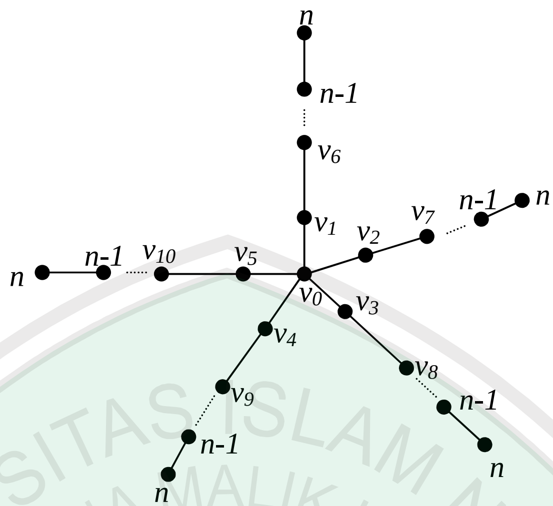
1. Pelabelan pada graf superstar $S_{5,n}$, dimana n adalah bilangan asli dengan titik berindeks ganjil.
2. Pelabelan pada graf superstar $S_{5,n}$, dimana n adalah bilangan asli dengan titik berindeks genap.

Penulis memberi label dengan pelabelan graceful pada graf superstar $S_{5,n}$ dimulai dari $n = 1$.

Misalkan graf superstar $S_{5,n}$ mempunyai himpunan titik dan himpunan sisi:

$V\left(S_{5,n}\right)=\left\{v_0, v_1, v_2, v_3, ..., v_{5n}\right\}$

$E\left(S_{5,n}\right)=\left\{v_0v_1, v_0v_2, v_0v_3, ..., v_pv_{p+5}\right\}$ dimana $1 \le p \le 5\left(n-1\right)$, maka graf superstar $S_{5,n}$ dapat digambarkan sebagai berikut:



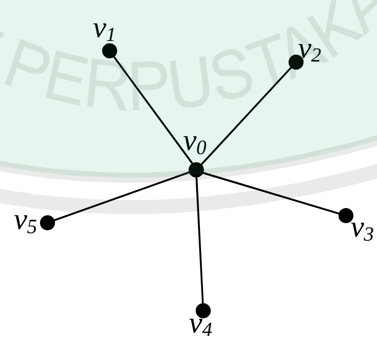
Gambar 3.1 Graf Superstar $S_{5,n}$

Dengan demikian, graf superstar $S_{5,n}$ memiliki titik sebanyak $5n + 1$ dengan satu titik v_0 yang menjadi titik pusat dengan label yang ditetapkan 0 dan berlaku untuk seterusnya.

3.1 Pelabelan Graceful pada Graf Superstar $S_{5,n}$

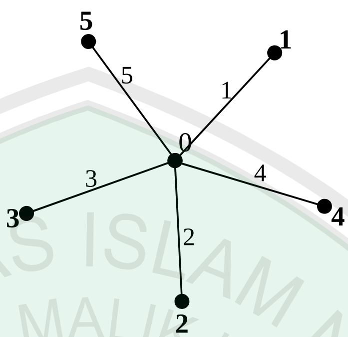
1. Graf Superstar $S_{5,n}$, dimana $n = 1$

Diberikan penotasian titik dari graf superstar $S_{5,1}$



Gambar 3.2 Penotasian Graf Superstar $S_{5,1}$

Beri label untuk titik-titik dari graf superstar $S_{5,1}$ sehingga memenuhi fungsi satu-satu dari himpunan titik ke himpunan bilangan bulat tak negatif $\{0,1,2,...,e\}$, sebagai berikut:



Gambar 3.3 Pelabelan Graf Superstar $S_{5,1}$

Jika pelabelan tersebut dijadikan suatu bentuk fungsi, maka diperoleh:

$$f(v_0) = 0$$

$$f(v_1) = 5$$

$$f(v_2) = 1$$

$$f(v_3) = 4$$

$$f(v_4) = 2$$

$$f(v_5) = 3$$

Sebagai akibat, maka diperoleh:

$$f(v_0v_1) = |f(v_1) - f(v_0)| = 5$$

$$f(v_0v_2) = |f(v_2) - f(v_0)| = 1$$

$$f(v_0v_3) = |f(v_3) - f(v_0)| = 4$$

$$f(v_0v_4) = |f(v_4) - f(v_0)| = 2$$

$$f(v_0v_5) = |f(v_5) - f(v_0)| = 3$$

Berdasarkan pelabelan tersebut, jika dilihat dari indeks titik, maka dapat dibedakan antara indeks titik ganjil dan indeks titik genap dengan v_0 sebagai titik pusat. Sehingga yang merupakan pola adalah pada pelabelan untuk:

Titik pusat

v_0, maka $f(v_0) = 0$

Titik dengan indeks ganjil

v_1, maka $f(v_1) = 5 = 5\ (1) - 0 = 5(n) - \frac{1-1}{2}$

v_3, maka $f(v_3) = 4 = 5\ (1) - 1 = 5(n) - \frac{3-1}{2}$

v_5, maka $f(v_5) = 3 = 5\ (1) - 2 = 5(n) - \frac{5-1}{2}$

jadi disimpulkan:

$$f(v_i) = 5n - \frac{i-1}{2} \qquad i = 1, 3, 5, \ldots, 5n$$

Titik dengan indeks genap

v_2, maka $f(v_2) = 1 = \frac{2}{2}$

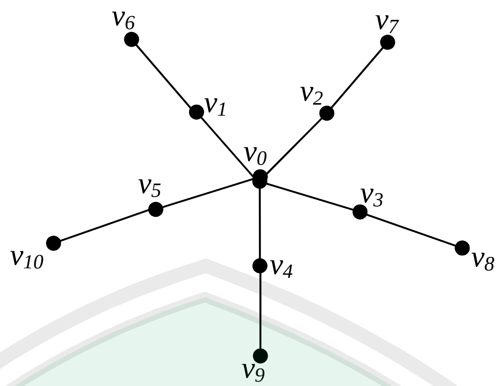
v_4, maka $f(v_4) = 2 = \frac{4}{2}$

jadi disimpulkan:

$$f(v_i) = \frac{i}{2} \qquad i = 2, 4, \ldots, 5n-1$$

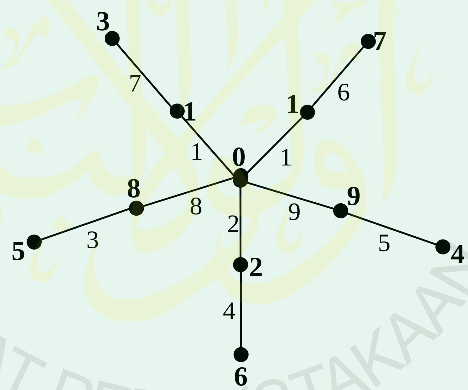
2. Graf Superstar $S_{5,n}$, dimana $n = 2$

Diberikan penotasian titik dari graf superstar $S_{5,2}$



Gambar 3.4 Penotasian Graf Superstar $S_{5,2}$

Beri label untuk titik-titik dari graf superstar $S_{5,2}$ sehingga memenuhi fungsi satu-satu dari himpunan titik ke himpunan bilangan bulat tak negatif $\{0,1,2,...,e\}$, sebagai berikut:



Gambar 3.5 Pelabelan Graf Superstar $S_{5,2}$

Jika pelabelan tersebut dijadikan suatu bentuk fungsi, maka diperoleh:

$f(v_0) = 0$

$f(v_1) = 10$

$f(v_2) = 1$

$f(v_3) = 9$

$f\left(v_4\right) = 2$

$f\left(v_5\right) = 8$

$f\left(v_6\right) = 3$

$f\left(v_7\right) = 7$

$f\left(v_8\right) = 4$

$f\left(v_9\right) = 6$

$f\left(v_{10}\right) = 5$

Sebagai akibat, maka diperoleh:

$f\left(v_0 v_1\right) = \left|f(v_1) - f(v_0)\right| = 10$

$f\left(v_0 v_2\right) = \left|f(v_2) - f(v_0)\right| = 1$

$f\left(v_0 v_3\right) = \left|f(v_3) - f(v_0)\right| = 9$

$f\left(v_0 v_4\right) = \left|f(v_4) - f(v_0)\right| = 2$

$f\left(v_0 v_5\right) = \left|f(v_5) - f(v_0)\right| = 8$

$f\left(v_1 v_6\right) = \left|f(v_1) - f(v_6)\right| = 7$

$f\left(v_2 v_7\right) = \left|f(v_7) - f(v_2)\right| = 6$

$f\left(v_3 v_8\right) = \left|f(v_3) - f(v_8)\right| = 5$

$f\left(v_4 v_9\right) = \left|f(v_9) - f(v_4)\right| = 4$

$f\left(v_5 v_{10}\right) = \left|f(v_5) - f(v_{10})\right| = 3$

Berdasarkan pelabelan tersebut, jika dilihat dari indeks titik, maka dapat dibedakan antara indeks titik ganjil dan indeks titik genap dengan v_0 merupakan titik pusat. Sehingga yang merupakan pola adalah pada pelabelan untuk:

Titik pusat

v_0, maka $f(v_0) = 0$

Titik dengan indeks ganjil

v_1, maka $f(v_1) = 10 = 5\ (2) - 0 = 5n - \frac{1-1}{2}$

v_3, maka $f(v_3) = 9 = 5\ (2) - 1 = 5n - \frac{3-1}{2}$

v_5, maka $f(v_5) = 8 = 5\ (2) - 2 = 5n - \frac{5-1}{2}$

v_7, maka $f(v_7) = 7 = 5\ (2) - 3 = 5n - \frac{7-1}{2}$

v_9, maka $f(v_9) = 6 = 5\ (2) - 4 = 5n - \frac{9-1}{2}$

jadi disimpulkan:

$$f(v_i) = 5n - \frac{i-1}{2} \qquad\qquad i = 1, 3, 5, \ldots, 5n-1$$

Titik dengan indeks genap

v_2, maka $f(v_2) = 1 = \frac{2}{2}$

v_4, , maka $f(v_4) = 2 = \frac{4}{2}$

v_6, maka $f(v_6) = 3 = \frac{6}{2}$

v_8, maka $f(v_8) = 4 = \frac{8}{2}$

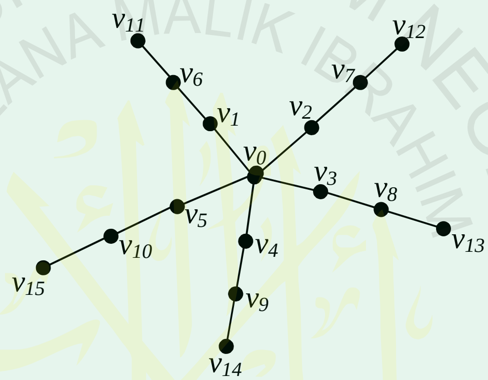
v_{10}, , maka $f\left(v_{10}\right) = 5 = \dfrac{10}{2}$

jadi disimpulkan:

$$f\left(v_i\right) = \frac{i}{2} \qquad\qquad i = 2, 4, \ldots, 5n$$

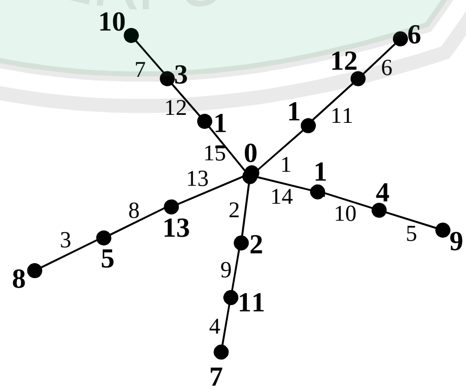
3. Graf superstar $S_{5,n}$, dimana n = 3

Diberikan penotasian titik dari graf superstar $S_{5,3}$



Gambar 3.6 Penotasian Graf Superstar $S_{5,3}$

Beri label untuk titik-titik dari graf superstar $S_{5,3}$ sehingga memenuhi fungsi satu-satu dari himpunan titik ke himpunan bilangan tak negatif $\{0,1,2,\ldots,e\}$,sebagai berikut:



Gambar 3.7 Pelabelan Graf Superstar $S_{5,3}$

Jika pelabelan tersebut dijadikan suatu bentuk fungsi, maka diperoleh:

$f(v_0) = 0$

$f(v_1) = 15$

$f(v_2) = 1$

$f(v_3) = 14$

$f(v_4) = 2$

$f(v_5) = 13$

$f(v_6) = 3$

$f(v_7) = 12$

$f(v_8) = 4$

$f(v_9) = 11$

$f(v_{10}) = 5$

$f(v_{11}) = 10$

$f(v_{12}) = 6$

$f(v_{13}) = 9$

$f(v_{14}) = 7$

$f(v_{15}) = 8$

Sebagai akibat, maka diperoleh:

$f(v_0v_1) = |f(v_1) - f(v_0)| = 15$

$f(v_0v_2) = |f(v_2) - f(v_0)| = 1$

$f\left(v_0v_3\right)$ = $\left|f(v_3)-f(v_0)\right|$ = 14

$f\left(v_0v_4\right)$ = $\left|f(v_4)-f(v_0)\right|$ = 2

$f\left(v_0v_5\right)$ = $\left|f(v_5)-f(v_0)\right|$ = 13

$f\left(v_1v_6\right)$ = $\left|f(v_1)-f(v_6)\right|$ = 12

$f\left(v_2v_7\right)$ = $\left|f(v_7)-f(v_2)\right|$ = 11

$f\left(v_3v_8\right)$ = $\left|f(v_3)-f(v_8)\right|$ = 10

$f\left(v_4v_9\right)$ = $\left|f(v_9)-f(v_4)\right|$ = 9

$f\left(v_5v_{10}\right)$ = $\left|f(v_5)-f(v_{10})\right|$ = 8

$f\left(v_6v_{11}\right)$ = $\left|f(v_{11})-f(v_6)\right|$ = 7

$f\left(v_7v_{12}\right)$ = $\left|f(v_7)-f(v_{12})\right|$ = 6

$f\left(v_8v_{13}\right)$ = $\left|f(v_{13})-f(v_8)\right|$ = 5

$f\left(v_9v_{14}\right)$ = $\left|f(v_9)-f(v_{14})\right|$ = 4

$f\left(v_{15}v_{10}\right)$ = $\left|f(v_{15})-f(v_{10})\right|$ = 3

Berdasarkan pelabelan tersebut, jika dilihat dari indeks titik, maka dapat dibedakan antara indeks titik ganjil dan indeks titik genap dengan v_0 sebagai titik pusat. Sehingga yang merupakan pola adalah pada pelabelan untuk:

Titik pusat

v_0, maka $f\left(v_0\right)$ = 0

Titik dengan indeks ganjil

v_1, maka $f\left(v_1\right)$ = 15 = 5 (3) – 0 $= 5n - \frac{1-1}{2}$

v_3, maka $f\left(v_3\right) = 14 = 5\ (3) - 1 = 5n - \frac{3-1}{2}$

v_5, maka $f\left(v_5\right) = 13 = 5\ (3) - 2 = 5n - \frac{5-1}{2}$

v_7, maka $f\left(v_7\right) = 12 = 5\ (3) - 3 = 5n - \frac{7-1}{2}$

v_9, maka $f\left(v_9\right) = 11 = 5\ (3) - 4 = 5n - \frac{9-1}{2}$

v_{11}, maka $f\left(v_{11}\right) = 10 = 5\ (3) - 5 = 5n - \frac{11-1}{2}$

v_{13}, maka $f\left(v_{13}\right) = 9 = 5\ (3) - 6 = 5n - \frac{13-1}{2}$

v_{15}, maka $f\left(v_{15}\right) = 8 = 5\ (3) - 7 = 5n - \frac{15-1}{2}$

jadi disimpulkan:

$$f\left(v_i\right) = 5n - \frac{i-1}{2} \qquad i = 1, 3, 5, \ldots, 5n$$

Titik dengan indeks genap

v_2, maka $f\left(v_2\right) = 1 = \frac{2}{2}$

v_4, maka $f\left(v_4\right) = 2 = \frac{4}{2}$

v_6, maka $f\left(v_6\right) = 3 = \frac{6}{2}$

v_8, maka $f\left(v_8\right) = 4 = \frac{8}{2}$

v_{10}, maka $f\left(v_{10}\right) = 5 = \frac{10}{2}$

v_{12}, maka $f\left(v_{12}\right) = 6 = \frac{12}{2}$

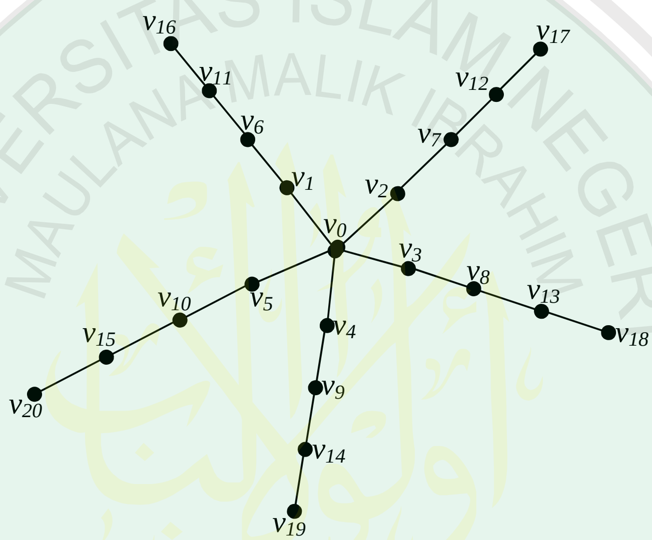
v_{14}, maka $f\left(v_{14}\right) = 7 = \dfrac{14}{2}$

jadi disimpulkan:

$$f\left(v_i\right) = \frac{i}{2} \qquad\qquad i = 2, 4, \ldots, 5n - 1$$

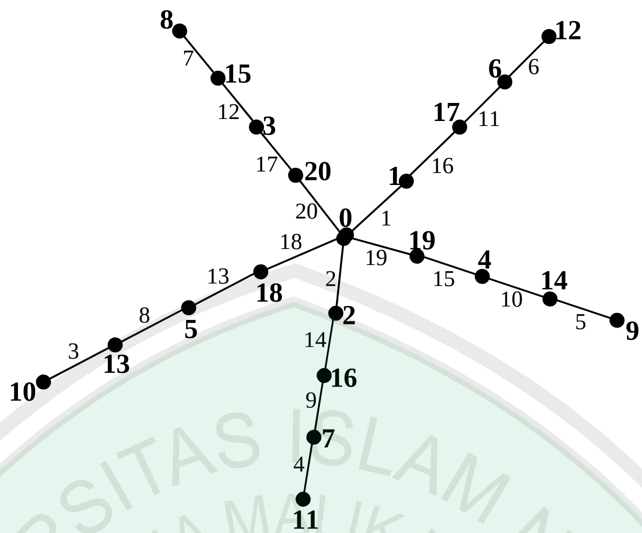
4. Graf superstar $S_{5,n}$, dimana $n = 4$

Diberikan penotasian titik dari graf superstar $S_{5,4}$



Gambar 3.8 Penotasian Graf Superstar $S_{5,4}$

Beri label untuk titik-titik dari graf superstar $S_{5,4}$ sehingga memenuhi fungsi satu-satu dari himpunan titik ke himpunan bilangan tak negatif $\{0,1,2,...e\}$, sebagai berikut:



Gambar 3.9 Pelabelan Graf Superstar $S_{5,4}$

Jika pelabelan tersebut dijadikan suatu bentuk fungsi, maka diperoleh:

$f(v_0) = 0$

$f(v_1) = 20$

$f(v_2) = 1$

$f(v_3) = 19$

$f(v_4) = 2$

$f(v_5) = 18$

$f(v_6) = 3$

$f(v_7) = 17$

$f(v_8) = 4$

$f(v_9) = 16$

$f(v_{10}) = 5$

$f\left(v_{11}\right) = 15$

$f\left(v_{12}\right) = 6$

$f\left(v_{13}\right) = 14$

$f\left(v_{14}\right) = 7$

$f\left(v_{15}\right) = 13$

$f\left(v_{16}\right) = 8$

$f\left(v_{17}\right) = 12$

$f\left(v_{18}\right) = 9$

$f\left(v_{19}\right) = 11$

$f\left(v_{20}\right) = 10$

Sebagai akibat, maka diperoleh:

$f\left(v_0v_1\right) = \left|f(v_1) - f(v_0)\right| = 20$

$f\left(v_0v_2\right) = \left|f(v_2) - f(v_0)\right| = 1$

$f\left(v_0v_3\right) = \left|f(v_3) - f(v_0)\right| = 19$

$f\left(v_0v_4\right) = \left|f(v_4) - f(v_0)\right| = 2$

$f\left(v_0v_5\right) = \left|f(v_5) - f(v_0)\right| = 18$

$f\left(v_1v_6\right) = \left|f(v_1) - f(v_6)\right| = 17$

$f\left(v_2v_7\right) = \left|f(v_7) - f(v_2)\right| = 16$

$f\left(v_3v_8\right) = \left|f(v_3) - f(v_8)\right| = 15$

$f\left(v_4v_9\right) = \left|f(v_9) - f(v_4)\right| = 14$

$f(v_5v_{10}) = |f(v_5) - f(v_{10})| = 13$

$f(v_6v_{11}) = |f(v_{11}) - f(v_6)| = 12$

$f(v_7v_{12}) = |f(v_7) - f(v_{12})| = 11$

$f(v_8v_{13}) = |f(v_{13}) - f(v_8)| = 10$

$f(v_9v_{14}) = |f(v_9) - f(v_{14})| = 9$

$f(v_{10}v_{15}) = |f(v_{15}) - f(v_{10})| = 8$

$f(v_{11}v_{16}) = |f(v_{11}) - f(v_{16})| = 7$

$f(v_{12}v_{17}) = |f(v_{17}) - f(v_{12})| = 6$

$f(v_{13}v_{18}) = |f(v_{13}) - f(v_{18})| = 5$

$f(v_{14}v_{19}) = |f(v_{19}) - f(v_{14})| = 4$

$f(v_{15}v_{20}) = |f(v_{15}) - f(v_{20})| = 3$

Berdasarkan pelabelan tersebut, jika dilihat dari indeks titik, maka dapat dibedakan antara indeks titik ganjil dan indeks titik genap dengan v_0 sebagai titik pusat. Sehingga yang merupakan pola adalah pada pelabelan untuk:

Titik pusat

v_0, maka $f(v_0) = 0$

Titik dengan indeks ganjil

v_1, maka $f(v_1) = 20 = 5\ (4) - 0 = 5n - \frac{1-1}{2}$

v_3, maka $f(v_3) = 19 = 5\ (4) - 1 = 5n - \frac{3-1}{2}$

v_5, maka $f(v_5) = 18 = 5\ (4) - 2 = 5n - \frac{5-1}{2}$

v_7, maka $f(v_7) = 17 = 5\ (4) - 3 = 5n - \frac{7-1}{2}$

v_9, maka $f(v_9) = 16 = 5\ (4) - 4 = 5n - \frac{9-1}{2}$

v_{11}, maka $f(v_{11}) = 15 = 5\ (4) - 5 = 5n - \frac{11-1}{2}$

v_{13}, maka $f(v_{13}) = 14 = 5\ (4) - 6 = 5n - \frac{13-1}{2}$

v_{15}, maka $f(v_{15}) = 13 = 5\ (4) - 7 = 5n - \frac{15-1}{2}$

v_{17}, maka $f(v_{17}) = 12 = 5\ (4) - 8 = 5n - \frac{17-1}{2}$

v_{19}, maka $f(v_{19}) = 11 = 5\ (4) - 9 = 5n - \frac{19-1}{2}$

jadi disimpulkan:

$$f(v_i) = 5n - \frac{i-1}{2} \qquad i = 1, 3, 5, \ldots, 5n-1$$

Titik dengan indeks genap

v_2, maka $f(v_2) = 1 = \frac{2}{2}$

v_4, maka $f(v_4) = 2 = \frac{4}{2}$

v_6, maka $f(v_6) = 3 = \frac{6}{2}$

v_8, maka $f(v_8) = 4 = \frac{8}{2}$

v_{10}, maka $f(v_{10}) = 5 = \frac{10}{2}$

v_{12}, maka $f(v_{12}) = 6 = \frac{12}{2}$

v_{14}, maka $f(v_{14}) = 7 = \frac{14}{2}$

v_{16}, maka $f(v_{16}) = 8 = \frac{16}{2}$

v_{18}, maka $f(v_{18}) = 9 = \frac{18}{2}$

v_{20}, maka $f(v_{20}) = 10 = \frac{20}{2}$

jadi disimpulkan:

$$f(v_i) = \frac{i}{2} \qquad\qquad i = 2, 4, \ldots, 5n$$

5. Graf superstar $S_{5,n}$, dimana $n = 5$

Berdasarkan uraian di atas tanpa merubah penotasian dan penempatan titik, maka untuk graf superstar $S_{5,5}$ diperoleh titik dan sisi sebanyak $5n$ yaitu 5(5) = 25 dan 1 titik pusat. Jika pelabelan titik tersebut dijadikan bentuk fungsi, maka diperoleh:

$f(v_0) = 0$

$f(v_1) = 25$

$f(v_2) = 1$

$f(v_3) = 24$

$f(v_4) = 2$

$f(v_5) = 23$

$f(v_6) = 3$

$f(v_7) = 22$

$f(v_8) = 4$

$f(v_9) = 21$

$f(v_{10}) = 5$

$f(v_{11}) = 20$

$f(v_{12}) = 6$

$f(v_{13}) = 19$

$f(v_{14}) = 7$

$f(v_{15}) = 18$

$f(v_{16}) = 8$

$f(v_{17}) = 17$

$f(v_{18}) = 9$

$f(v_{19}) = 16$

$f(v_{20}) = 10$

$f(v_{21}) = 15$

$f(v_{22}) = 11$

$f(v_{23}) = 14$

$f(v_{24}) = 12$

$f(v_{25}) = 13$

Sebagai akibat, maka diperoleh:

$f(v_0v_1) = |f(v_1) - f(v_0)| = 25$

$f(v_0v_2) = |f(v_2) - f(v_0)| = 1$

$f(v_0v_3) = |f(v_3) - f(v_0)| = 24$

$f(v_0v_4) = |f(v_4) - f(v_0)| = 2$

$f(v_0v_5) = |f(v_5) - f(v_0)| = 23$

$f(v_1v_6) = |f(v_1) - f(v_6)| = 22$

$f(v_2v_7) = |f(v_7) - f(v_2)| = 21$

$f(v_3v_8) = |f(v_3) - f(v_8)| = 20$

$f(v_4v_9) = |f(v_9) - f(v_4)| = 19$

$f(v_5v_{10}) = |f(v_5) - f(v_{10})| = 18$

$f(v_6v_{11}) = |f(v_{11}) - f(v_6)| = 17$

$f(v_7v_{12}) = |f(v_7) - f(v_{12})| = 16$

$f(v_8v_{13}) = |f(v_{13}) - f(v_8)| = 15$

$f(v_9v_{14}) = |f(v_9) - f(v_{14})| = 14$

$f(v_{10}v_{15}) = |f(v_{15}) - f(v_{10})| = 13$

$f(v_{11}v_{16}) = |f(v_{11}) - f(v_{16})| = 12$

$f(v_{12}v_{17}) = |f(v_{17}) - f(v_{12})| = 11$

$f(v_{13}v_{18}) = |f(v_{13}) - f(v_{18})| = 10$

$f(v_{14}v_{19}) = |f(v_{16}) - f(v_7)| = 9$

$f(v_{15}v_{20}) = |f(v_{15}) - f(v_{20})| = 8$

$f(v_{16}v_{21}) = |f(v_{21}) - f(v_{16})| = 7$

$f\left(v_{17}v_{22}\right) = \left|f(v_{17}) - f(v_{22})\right| = 6$

$f\left(v_{18}v_{23}\right) = \left|f(v_{23}) - f(v_{18})\right| = 5$

$f\left(v_{19}v_{24}\right) = \left|f(v_{19}) - f(v_{24})\right| = 4$

$f\left(v_{20}v_{25}\right) = \left|f(v_{25}) - f(v_{20})\right| = 3$

Berdasarkan pelabelan tersebut, jika dilihat dari indeks titik, maka dapat dibedakan antara indeks titik ganjil dan indeks titik genap dengan v_0 sebagai titik pusat. Sehingga yang merupakan pola adalah pada pelabelan untuk:

Titik pusat

v_0, maka $f\left(v_0\right) = 0$

Titik dengan indeks ganjil

v_1, maka $f\left(v_1\right) = 25 = 5\ (5) - 0 = 5n - \frac{1-1}{2}$

v_3, maka $f\left(v_3\right) = 24 = 5\ (5) - 1 = 5n - \frac{3-1}{2}$

v_5, maka $f\left(v_5\right) = 23 = 5\ (5) - 2 = 5n - \frac{5-1}{2}$

v_7, maka $f\left(v_7\right) = 22 = 5\ (5) - 3 = 5n - \frac{7-1}{2}$

v_9, maka $f\left(v_9\right) = 21 = 5\ (5) - 4 = 5n - \frac{9-1}{2}$

v_{11}, maka $f\left(v_{11}\right) = 20 = 5\ (5) - 5 = 5n - \frac{11-1}{2}$

v_{13}, maka $f\left(v_{13}\right) = 19 = 5\ (5) - 6 = 5n - \frac{13-1}{2}$

v_{15}, maka $f\left(v_{15}\right) = 18 = 5\ (5) - 7 = 5n - \frac{15-1}{2}$

v_{17}, maka $f\left(v_{17}\right) = 17 = 5\ (5) - 8 = 5n - \frac{17-1}{2}$

v_{19}, maka $f\left(v_{19}\right) = 16 = 5\ (5) - 9 = 5n - \frac{19-1}{2}$

v_{21}, maka $f\left(v_{21}\right) = 15 = 5\ (5) - 10 = 5n - \frac{21-1}{2}$

v_{23}, maka $f\left(v_{23}\right) = 14 = 5\ (5) - 11 = 5n - \frac{23-1}{2}$

v_{25}, maka $f\left(v_{25}\right) = 13 = 5\ (5) - 12 = 5n - \frac{25-1}{2}$

jadi disimpulkan:

$f\left(v_i\right) = 5n\frac{i-1}{2}$ $\qquad\qquad$ $i = 1, 3, 5, \ldots, 5n$

Titik dengan indeks genap

v_2, maka $f\left(v_2\right) = 1 = \frac{2}{2}$

v_4, maka $f\left(v_4\right) = 2 = \frac{4}{2}$

v_6, maka $f\left(v_6\right) = 3 = \frac{6}{2}$

v_8, maka $f\left(v_8\right) = 4 = \frac{8}{2}$

v_{10}, maka $f\left(v_{10}\right) = 5 = \frac{10}{2}$

v_{12}, maka $f\left(v_{12}\right) = 6 = \frac{12}{2}$

v_{14}, maka $f\left(v_{14}\right) = 7 = \frac{14}{2}$

v_{16}, maka $f\left(v_{16}\right) = 8 = \frac{16}{2}$

v_{18}, maka $f\left(v_{18}\right) = 9 = \dfrac{18}{2}$

v_{20}, maka $f\left(v_{20}\right) = 10 = \dfrac{20}{2}$

v_{22}, maka $f\left(v_{22}\right) = 11 = \dfrac{22}{2}$

v_{24}, maka $f\left(v_{24}\right) = 12 = \dfrac{24}{2}$

jadi disimpulkan:

$$f\left(v_i\right) = \frac{i}{2} \qquad\qquad i = 2, 4, \ldots, 5n - 1$$

Dari uraian di atas diperoleh:

Teorema 1:

Graf superstar $S_{5,n}$ adalah graf graceful untuk setiap *n* bilangan asli.

Bukti:

Definisikan fungsi *f* sebagai fungsi injektif dari $V\left(S_{5,n}\right)$ ke {0, 1, 2,…,*e*} sebagai berikut:

Untuk titik v_0, maka $f(v_0) = 0$ (selalu 0, karena menjadi pusat sampai titik ke *n*)

$$f\left(v_i\right) = 5n - \frac{i-1}{2} \qquad \begin{cases} i = 1, 3, 5, \ldots, 5n & \text{dimana } n \text{ ganjil} \\ i = 1, 3, 5, \ldots, 5n-1 & \text{dimana } n \text{ genap} \end{cases}$$

$$f\left(v_i\right) = \frac{i}{2} \qquad \begin{cases} i = 2, 4, 6, \ldots, 5n-1 & \text{dimana } n \text{ ganjil} \\ i = 2, 4, 6, \ldots, 5n & \text{dimana } n \text{ genap} \end{cases}$$

Misal:

$V\left(S_{5,n}\right)=\{v_0,v_1,v_2,v_3,...,v_{5n}\}$

$E\left(S_{5,n}\right)=\{v_0v_1,v_0v_2,v_0v_3,...,v_pv_{p+5}\}$ dimana $1\leq p\leq 5(n-1)$

Jadi banyak titik di $V\left(S_{5,n}\right)$ adalah $5n + 1$, dan banyak sisi di $E\left(S_{5,n}\right)$ adalah $5n$.

Akan ditunjukkan bahwa f memetakan $V\left(S_{5,n}\right)$ ke $\{0, 1, 2,\ldots,e\}$

a. Untuk v_0 berlaku $f\left(v_0\right)=0$

   Jadi v_0 dipetakan ke $\{0, 1, 2,\ldots,e\}$.

b. Untuk i ganjil:

   Akan ditunjukkan bahwa $f\left(v_i\right)\in\{0,1,2,...,5n\}$

   Diketahui $f\left(v_i\right)=5n-\frac{i-1}{2}\ \ni 0\leq f\left(v_i\right)\leq 5n$

   Karena i ganjil, maka $i-1$ genap

   Jadi $\frac{i-1}{2}$ adalah bilangan bulat positif dan $\frac{i-1}{2}\geq 0$

   Sehingga, $5n-\frac{i-1}{2}\leq 5n$

   $f\left(v_i\right)\leq 5n$

   Jadi $f\left(v_i\right)\in\{0,1,2,...,5n\}$

Jadi f memetakan $V\left(S_{5,n}\right)$ ke $\{0, 1, 2,\ldots,e\}$

Selanjutnya, untuk n ganjil akan ditunjukkan $0\leq f(v_i)$

Karena $i\leq 5n$

maka $i-1\leq 5n$

dan $\quad \frac{i-1}{2} \le 5n$

Sehingga $0 \le 5n - \frac{i-1}{2}$

Jadi $0 \le 5n - \frac{i-1}{2} \le 5n$

Jadi $0 \le f\left(v_i\right) \le 5n$, dimana n ganjil.

Untuk n genap akan ditunjukkan $0 \le f(v_i)$

Karena $i \le 5n-1$

maka $\quad i-1 \le 5n-1 \le 5n$

dan $\quad \frac{i-1}{2} \le 5n$

Sehingga $0 \le 5n - \frac{i-1}{2}$

Jadi $0 \le 5n - \frac{i-1}{2} \le 5n-1$

Jadi $0 \le f\left(v_i\right) \le 5n-1$, dimana n genap

c. Untuk i genap

Akan ditunjukkan bahwa $f\left(v_i\right) \in \{0,1,2,...,5n\}$

Diketahui $f\left(v_i\right) = \frac{i}{2}$

Karena i genap

maka $\frac{i}{2}$ adalah bilangan bulat positif dan $\frac{i}{2} \ge 0$

Selanjutnya, untuk n ganjil akan ditunjukkan $f(v_i) \le 5n-1$

Karena $i \le 5n-1$

maka $\frac{i}{2} \leq 5n-1$

Jadi $0 \leq \frac{i}{2} \leq 5n-1$

Jadi $0 \leq f\left(v_i\right) \leq 5n-1$, dimana n ganjil.

Untuk n genap akan ditunjukkan $f(v_i) \leq 5n$

Karena $i \leq 5n$

Maka $\frac{i}{2} \leq 5n$

Sehingga $0 \leq \frac{i}{2} \leq 5n$

Jadi $0 \leq f\left(v_i\right) \leq 5n$, dimana n genap.

Jadi f memetakan $V(S_{5,n})$ ke $\{0,1,2,...,5n\}$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa f adalah fungsi injektif dari himpunan titik ke {0, 1, 2, ..., e}.

Untuk i ganjil:

Ambil $f\left(v_i\right) = f\left(v_j\right)$

$$5n - \frac{i-1}{2} = 5n - \frac{j-1}{2}$$

$$-\frac{i-1}{2} = -\frac{j-1}{2}$$

$$-i-1 = -j-1$$

$$i = j$$

Jadi, $v_i = v_j$

Untuk i genap:

Ambil $f\left(v_i\right) = f\left(v_j\right)$

$$\frac{i}{2} = -\frac{j}{2}$$

$$i = j$$

Jadi, $v_i = v_j$

Jadi, f adalah fungsi injektif dari himpunan titik ke {0, 1, 2, ..., e} untuk setiap i ganjil dan i genap.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\left|f(v_i) - f(v_j)\right|$ adalah berbeda, $\forall(v_i, v_j)$ di G.

Untuk $\left(v_0 - v_i\right)$

Diketahui $f\left(v_0\right) = 0$

$$f\left(v_i\right) = 5n - \frac{i-1}{2} \quad \text{dimana } i \text{ ganjil}$$

$$f\left(v_i\right) = \frac{i}{2} \quad \text{dimana } i \text{ genap}$$

Maka, $\left|f(v_0) - f(v_i)\right| = \left|f\left(v_i\right)\right|$

$$= 5n - \frac{i-1}{2} \quad \text{dimana } i \text{ ganjil}$$

$$= \frac{i}{2} \quad \text{dimana } i \text{ genap}$$

Untuk $\left(v_i, v_{i+5}\right)$

Jika i ganjil:

diketahui $f\left(v_i\right) = 5n - \frac{i-1}{2}$, maka:

$$\left|f\left(v_i, v_{i+5}\right)\right| = \left|f(v_i) - f(v_{i+5})\right|$$

$$= \left|5n - \frac{(i-1)-(i+5)}{2}\right|$$

$$= \left|5n - i - 2\right|$$

Jika *i* genap:

diketahui $f\left(v_i\right) = \frac{i}{2}$, maka:

$$\left|f\left(v_i, v_{i+5}\right)\right| = \left|f(v_i) - f(v_{i+5})\right|$$

$$= \left|\frac{i}{2} - \left(5n - \frac{(i+5)-1}{2}\right)\right|$$

$$= \left|-5n - 2 + i\right|$$

$$= \left|5n - i + 2\right|$$

Dari uraian di atas $\left|f(v_i) - f(v_j)\right|$ akan berbeda sesuai nilai *i*

Jadi, $\left|f(v_i) - f(v_j)\right|$ adalah berbeda, $\forall(v_i, v_j)$ di *G*.

Dengan demikian, terbukti bahwa graf superstar $S_{5,n}$ adalah graf graceful untuk setiap *n* bilangan asli.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan, maka dapat disimpulkan bahwa graf Superstar $S_{5,n}$ adalah graf graceful untuk setiap n bilangan asli. Pelabelan graceful pada graf Superstar $S_{5,n}$, untuk n bilangan asli didefinisikan sebagai berikut:

Untuk titik v_0, maka $f(v_0) = 0$ (selalu 0, karena menjadi titik pusat sampai titik ke n)

Untuk pelabelan titik pada graf Superstar $S_{5,n}$ dimana n bilangan asli, maka:

$$f(v_i) = 5n - \frac{i-1}{2} \begin{cases} i = 1,3,5,\ldots,5n & \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ i = 1,3,5,\ldots,5n-1 & \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

$$f(v_i) = \frac{i}{2} \begin{cases} i = 2,4,6,\ldots,5n-1 & \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ i = 2,4,6,\ldots,5n & \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

4.2 Saran

Pembahasan mengenai pelabelan graceful ini masih terbuka bagi peneliti lain untuk melanjutkan penelitian ini pada aplikasinya dan bisa juga mengadakan penelitian yang sejenis dengan jenis-jenis graph yang berbeda, misalnya graf roda, graf kipas dan sebagainya.

DAFTAR PUSTAKA

Abdusysyakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press

Albertson, Michaelo and Hutchinson. 1988. *Discrete Mathematic with Algorithms*. Newyork: Jonhwiley & Sons; inc.

Alifah. 2005. *Pelabelan Edge Graceful pada Graf Lintasan, Graf Sikel, Graf Bintang, dan Graf Superstar*. *Skripsi* tidak diterbitkan. Jember: Jurusan Matematika Fakultas MIPA. Universitas Jember.

Balakrishnan, V. K. 1991. *Introdustory Discrete Mathematics*. New Jersey: Prentice- Hall International.

Chartrand, Gery and Lesniak, Linda. 1986. *Graphs and Digraphs Second Edition*. California: a division of wadsworth, inc.

Chartrand, Gery and Oellermann, Ortrud R. 1993. *Applied and Algorithmic Graph Theory*. Newyork: Megraw- Hill, inc.

Departemen Agama RI. 1988. *Ensiklopedia Islam di Indonesia*. Jakarta: Direktorat Jendral Pembinaan Kelembagaan Agama Islam.

Departemen Agama RI. 1989. *Al-Qur'an dan Terjemahnya*. Surabaya: CV Jaya Sakti.

Fuad Pasya, Ahmad. 2004. *Dimensi Sains Al-Qur'an Menggali Ilmu Pengetahuan Dari Al-Qur'an.* Solo: Tiga Serangkai.

Gallian, Joseph A. 2007. *A Dynamic Survey Of Graph Labeling*. (Online): (http:// www. Combinatorics. Com. Diakses tanggal 12 Agustus 2007)

Jonhsonbaugh, Richard. 1989. *Discrete Mathematic Revised Edition*. Newyork: Macmillan Publising Company.

Kamil Abdhushshamad, Muhammad. 2003. *Mukjizat Ilmiah dalam Al Qur'an*. Jakarta: Akbar media eka sarana.

Munir, Rinaldi. 2003. *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika Bandung.

Mulyono, Agus dan Abtokhi, Ahmad. 2006. *Fisika dan Al-Qur'an*. Malang: UIN Press

Quraish Shihab, M. 2000. *Tafsir Al-Misbah Pesan, Kesan & Keserasian Al Qur'an vol. 1*. Ciputat: Lentera Hati.

Quraish Shihab, M. 2003. *Tafsir Al-Misbah Pesan, Kesan & Keserasian Al Qur'an vol. 11*. Ciputat: Lentera Hati.

Quraish Shihab, M. 2003. *Tafsir Al-Misbah Pesan, Kesan & Keserasian Al Qur'an vol. 13*. Ciputat: Lentera Hati.

Roman, Steven. 1989. *An Introduction to Discrete Mathematics Second Edition*. Sandiego: Academic Press.

Rahman, Afzalur. 1992. *Al Qur'an Sumber Ilmu Pengetahuan*. Jakarta: Rineka Cipta.

Shiu, W. C dkk. 1998. *Some k-fold Edge Graceful Labelings of (p, p-1)-graphs*. (Online): (*http:// www. Combinatorics. Com*. Diakses tanggal 15 April 2008)

Wilson, Robin J dan Walkins, John J. 1990. *Graphs An Introductory Approach: A first Course in Discrete Mathematics*. New York: John Wiley & Sons, Inc

DEPARTEMEN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jalan gajayana 50 Malang 65144 Telepon/faksimile (0341)558933

BUKTI KONSULTASI

Nama : Zainiatul Muarrifah
NIM : 03510054
Fakultas/Jurusan : Saintek/Matematika
Judul Skripsi : Pelabelan Graceful *(Graceful labeling)* pada Graf Superstar $S_{5,\,n}$
Pembimbing I : Wahyu Henky Irawan, M. Pd
Pembimbing II : Achmad Barizi, M. A

No.	**Tanggal**	**Materi**	**Tanda Tangan**	
			I	**II**
1.	12 Agustus 2007	Pengajuan Proposal		
2.	24 September 2007	Bab I , Bab II		
3.	2 Oktober 2007	Revisi Bab I , Bab II		
4.	13 November 2007	Penetapan ayat Al Qur'an		
5.	10 Desember 2007	Keagamaan		
6.	15 Januari 2008	Bab III		
7.	1 Februari 2008	Bab IV & Abstrak		
8.	3 Februari 2008	Revisi Abstrak		
9.	6 Februari 2008	Revisi Keagamaan		
10.	6 Februari 2008	ACC Keseluruhan		

Mengetahui,
Ketua Jurusan

Sri Harini,M.Si
NIP. 150318321