MENENTUKAN NILAI LIMIT BARISAN KONTRAKTIF DENGAN MENGGUNAKAN RELASI REKURSIF

SKRIPSI

Oleh :
Muhamad Nur Huda
NIM : 01510020

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2008

MENENTUKAN NILAI LIMIT BARISAN KONTRAKTIF DENGAN MENGGUNAKAN RELASI REKURSIF

SKRIPSI

Diajukan Kepada :
Universitas Islam Negeri Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh :
Muhamad Nur Huda
NIM : 01510020

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2008

MENENTUKAN NILAI LIMIT BARISAN KONTRAKTIF DENGAN MENGGUNAKAN RELASI REKURSIF

SKRIPSI

Oleh :
Muhamad Nur Huda
NIM : 01510020

Telah disetujui oleh :

Dosen Pembimbing

<u>Usman Pagalay, M. Si.</u>
NIP. 150 327 240

Tanggal 31 Maret 2008

Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

<u>Sri Harini, M. Si</u>
NIP. 105 318 321

MENENTUKAN NILAI LIMIT BARISAN KONTRAKTIF DENGAN MENGGUNAKAN RELASI REKURSIF

SKRIPSI

Oleh:
Muhamad Nur Huda
NIM. 01510020

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal : 11 April 2008

Susunan Dewan Penguji			**Tanda Tangan**
1. Penguji Utama	:	Abdussakir, M.Pd NIP. 150 327 247	( )
2. Ketua	:	Sri Harini, M.Si NIP. 150 318 321	( )
3. Sekretaris	:	Usman Pagalay, M.Si NIP. 150 327 240	( )

Mengetahui dan Mengesahkan
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321

MOTTO

HIDUP adalah

PERJUANGAN yang harus dimenangkan

RINTANGAN yang harus dihadapi

RAHASIA yang harus digali

ANUGRAH yang harus dipergunakan

HIKMAH yang harus ditemukan

Persembahan

Karya ini
Ku persembahkan kepada
Nenek, Kakek, Ibu dan Ayahanda tercinta
Yang telah menyayangi dan mengasihiku setulus hati
Sebening cinta dan sesuci do'a.

Kupersembahkan kepada
Om dan tanteku (Fathul Qorib, Qurotul Aini)
Serta adik-adikku tersayang (Siti Muarifah, Zul Bahar)
dan keluarga besarku yang terus mendorongku untuk terus maju

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Segala puji bagi Allah SWT karena atas rahmat, taufik dan hidayah-Nya, penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si). Sholawat dan salam senantiasa terlimpahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah membawa umat manusia dari dunia kegelapan dan kebodohan menuju dunia yang penuh cahaya dan kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan skripsi ini. Untuk itu, iringan do'a dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, utamanya kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman B.S., SU, DSc. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Malang.
3. Sri Harini, M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Malang.
4. Usman Pagalay, M.Si. selaku dosen pembimbing, karena atas bimbingan, bantuan dan kesabarannya penulisan skripsi ini dapat terselesaikan.
5. Ayah dan ibunda tercinta yang telah memberiku kasih sayang, do'a yang tulus serta dukungan moral maupun material.

6. Adik-adikku tersayang (Siti Muarifah, Zul Bahar) dan keluarga besarku yang terus mendorongku untuk terus maju.
7. Guruku, Dosenku, tanpamu aku takkan bisa apa-apa dan takkan ada artinya. Sungguh engkau pahlawan tanpa tanda jasa.
8. Saudaraku (Heri, Lela, Emi) yang selalu baik hati, terimakasih atas kebersamaanya, Sahabatku (Wahid, Muslih, Fita, Evi, Aris, Diana, Irul, Royan, Mubin, Lia) terima kasih telah memberiku warna dalam hidupku, sehingga aku tahu arti persahabatan dan persaudaraan, Teman-teman seperjuangan angkatan 2001 yang telah memberikan dukungan dan pengalaman
9. Sahabat-sahabat PMII (Pergerakan Mahasiswa Islam Indonesia) khususnya sahabat-sahabat Rayon Galileo, yang telah banyak memberikan pengalaman dan ilmunya untukku.
10. Semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat dan menambah ilmu pengetahuan bagi penulis khususnya dan pembaca umumnya serta dapat menjadi inspirasi bagi pembaca yang ingin mengembangkan ilmu pengetahuan.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

31 Maret 2008

Penulis

DFTAR ISI

ABSTRAK

Huda, Muhamad Nur, 2008. **Menentukan Nilai Limit Barisan Kontraktif Menggunakan Relasi Rekursif**.

Pembimbing : Usman Pagalay, M.Si.

Kata kunci : Limit, Barisan kontraktif, Relasi rekursif

Konsep dasar tentang limit barisan merupakan hal yang mendasar dalam analisis matematika. Fenomena yang sering terjadi di dalam menentukan nilai limit suatu barisan adalah bentuk umum barisan tersebut sulit untuk diuraikan, misalnya dalam menentukan nilai limit barisan kontraktif yang memiliki bentuk umum $|x_{n+2} - x_{n+1}| \le C|x_{n+1} - x_n|$, untuk semua $n \in N$, dengan $0 < C < 1$, $C \in R$.

Pendekatan penelitian yang digunakan adalah penilitian kepustakaan atau studi leteratur. Penelitian dilakukan dengan cara mengumpulkan data dan informasi dengan bantuan bermacam-macam materiil yang terdapat di perpustakaan. Pendekatan kualitatif, digunakan karena dalam skripsi ini memfokuskan pada prosedur atau metode yang digunakan dalam menentukan nilai limit barisan kontraktif.

Data dan informasi yang sudah didapat akan digunakan untuk memahami dan mengkaji lebih dalam tentang pengertian barisan kontraktif serta prosedur atau metode yang memudahkan untuk menentukan nilai limit suatu barisan kontraktif, yaitu dengan menggunakan relasi rekursif. Adapun prosedur didalam menentukan limit barisan kontraktif dengan menggunakan relasi rekursif adalah :

1. Mensubtitusikan barisan $x_n = r^n$ untuk memperoleh persamaan karakteristik.
2. Mencari akar-akar karakteristik dari prsamaan karakteristik.
3. Menentukan solusi umum dilihat dari akar-akar karakteristik yang diperoleh.
4. Melimitkan bentuk solusi umumnya.

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Dalam kehidupan sehari-hari sering dijumpai permasalahan yang berkaitan dengan matematika. Hal ini dapat dilihat dari banyaknya permasalahan yang dapat dimodelkan atau dianalisis menggunakan matematika. Oleh karena itu diperlukan pemahaman khusus pada matematika.

Konsep matematika tentang limit merupakan dasar dalam memahami kalkulus differensial, konsep kekonvergenan sebagai dasar analisis, diperkenalkan melalui limit dan barisan. Barisan bilangan real adalah suatu fungsi dari himpunan bilangan asli *N* ke himpunan bilngan real. (Bartle dan Sherbert, 1994: 67).

Misal $X = (x_n)$ adalah barisan bilangan real. Suatu bilangan real x dikatakan limit dari *X*, jika untuk masing-masing lingkungan dari *V* dari *x* terdapat suatu bilangan asli *K* sehingga untuk semua $n \geq K$, maka x_n adalah anggota *V*. (Bartle dan Sherbert, 1994: 70). Di bidang bisnis dan ekonomi, teori atau prisip-prinsip barisan dapat di terapkan untuk menganalisis dalam kasus-kasus yang menyangkut perkembangan dan pertumbuhan suatu aktivitas baik itu aktivitas di bidang industri, keuangan, biaya, harga ataupun perhitungan pertumbuhan penduduk.

Di dalam analisis real dikenal macam-macam barisan salah satu di antaranya adalah barisan kontraktif yang berbentuk :

$$\left|x_{n+2} - x_{n+1}\right| \leq C\left|x_{n+1} - x_n\right|, \forall n \in N$$

Dengan $0 < C < 0$, bilangan C disebut konstanta dari barisan kontraktif $\left(x_n\right)$. (Bartle dan Sherbert, 1994: 104).

Untuk menentukan nilai limit barisan kontraktif biasanya sama dengan menentukan nilai limit secara umum yaitu dengan mensubstitusikan nilai yang sudah ditentukan ke bentuk umum barisan. Disini permasalahan yang sering terjadi di dalam menentukan limit sebuah barisan adalah jika bentuk umum barisan tersebut sulit diuraikan atau ditemukan nilai limit yang berbentuk tak tentu seperti nilai limitnya yang berbentuk $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$. Jika ditemukan nilai limit tertentu maka dapat menggunakan metode yang menghubungkan dengan turunan (aturan L'Hopital). Andaikan $\lim\limits_{x \to \infty}\left|f(x)\right| = \lim\limits_{x \to \infty}\left|f(x)\right| = \infty$ maka $\lim\limits_{x \to \infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to \infty}\frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}$ (Purcell, 2003:7). Meskipun demikian tidak semua kasus dapat diselesaikan dengan aturan L'Hopital, di antara contohnya yang memiliki bentuk

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + x_{n-2}\right), \forall n \geq 2.$$

Untuk menyelesaikannya perlu digunakan suatu metode yang khusus yaitu dengan memodelkannya ke dalam bentuk relasi rekursif, sehingga nilai limit dari barisan tersebut dapat diketahui dengan lebih mudah.

Berangkat dari latar belakang masalah di atas penulis tertarik untuk melakukan penelitian dengan judul " Menentukan Nilai Limit Barisan Kontraktif Menggunakan Relasi Rekursif".

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas ada beberapa macam konsep dan bentuk barisan, dan metode untuk menyelesaikan permasalahan tentang barisan. Maka yang pokok dalam pembahasan ini adalah “bagaimana prosedur untuk menentukan nilai limit suatu barisan kontraktif menggunakan relasi rekursif “?

C. Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan ini adalah mengetahui prosedur untuk menentukan nilai limit barisan kontraktif menggunakan relasi rekursif.

D. Manfaat Penulisan

Adapun manfaat dari penulisan ini adalah:

1. **Bagi Penulis**
   a. Memperluas pengetahuan tentang kajian matematika khususnya pada barisan.
2. **Bagi Pembaca**
   a. Menambah wawasan serta meningkatkan pengetahuan tentang matematika khususnya mengenai materi barisan.
   b. Memperluas cakrawala berfikir
3. **Lembaga**
   a. Hasil penulisan skripsi ini diharapkan dapat menambah bahan kepustakaan di lembaga khususnya di Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Malang sehingga dijadikan sebagai sarana pengembangan wawasan keilmuan terutama bidang matematika

E. Batasan masalah

Untuk mempermudah dalam pembahasan ini, penulis membatasi pada:

1. Barisan bilangan real
2. Relasi rekursif linear homogen dengan koefisien konstanta.

F. **Metode Penulisan**

Dalam hal ini penulis menggunakan metode penelitian kepustakaan atau penelitian literatur, yaitu penelitian yang dilakukan dengan cara mengumpulkan data dan informasi dengan bantuan bermacam-macam matereal yang terdapat di dalam ruang perpustakaan, seperti buku-buku, majalah, dokomen-dokumen, catatan, dan kisah-kisah sejarah (Mardalis, 1995: 28). Dari masing-masing literatur dipilah menurut kategori tertentu dan dipilih yang sesuai dengan permasalahan yang diangkat.

Adapun langkah-langkah yang dilakukan penulis di dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengumpulkan materi dan informasi dengan cara membaca dan memahami literatur yang berkaitan dengan permasalahan yang diangkat yaitu menentukan nilai limit barisan kontraktif dengan relasi rekursif.
2. Dengan adanya jaringan informasi berupa internet, maka penulis juga mengambil dan mempelajari materi yang berkaitan dengan barisan.

3. Memilah atau memilih materi yang diperoleh sehingga dapat digunakan untuk menganalisis dan menjawab rumusan masalah.

G. Sistematika Penulisan

Skripsi ini ditulis dengan 4 bab yang saling mendukung, yaitu bab I pendahuluan, bab II kajian teori, bab III pembahasan, dan bab IV penutup.

Bab I	:	Pendahuluan. Difokuskan pada latar belakang, rumusan masalah yang terdiri dari pokok permasalahan, tujuan penulisan, manfaat penelitian bagi penulis, bagi pembaca, dan bagi lembaga, batasan masalah, metode penulisan serta sistematika penulisan guna mempermudah dalam penulisan ini.
Bab II	:	Kajian Teori. Berisi tentang seputar barisan bilangan real, Barisan Chauchy, barisan kontraktif, dan relasi rekursif.
Bab III	:	Pembahasan. Berisikan uraian tentang contoh-contoh yang merupakan barisan kontraktif dan menentukan nilai limitnya dengan menggunakan relasi rekursif.
Bab IV	:	Penutup. Berisi tentang kesimpulan dari keseluruhan hasil pembahasan yang telah dilakukan sesuai dengan rumusan masalah dan juga berisi tentang saran terkait dengan topik pembahasan yang ada.

BAB II

KAJIAN TEORI

A. Barisan

1. Barisan Bilangan Real

Definisi 1

Barisan bilangan real (barisan di *R*) adalah suatu fungsi dengan domain himpunan bilangan asli N ke himpunan bilangan real R dan dapat dinotasikan dengan $f : N \to R$. (Bartle dan Sherbert, 1994: 67)

Contoh 1

Diberikan fungsi $X : N \to R$ yang didefinisikan dengan

$$X(n) = n, \forall n \in N$$

maka *X* adalah barisan di *R*.

Demikian juga, fungsi $Y : N \to R$ yang didefinisikan dengan

$$Y(n) = 2n + 3, \forall n \in N$$

Maka Y juga merupakan barisan di *R*.

Dengan kata lain dari definisi di atas bahwa barisan di *R* adalah barisan yang diperoleh dengan memetakan atau memasangkan tepat satu bilangan asli $n \in N$ ke bilangan real $n \in R$. Bilangan real yang diperoleh disebut anggota atau elemen barisan, atau nilai barisan, atau suku barisan. Biasanya untuk menunjukkan elemen *R* yang dipasangkan pada $n \in N$ digunakan simbol sebagai berikut x_n , a_n , atau z_n .

Jika $X : N \rightarrow R$, adalah barisan, maka unsur dari X pada n dinotasikan dengan x_n , tidak dinotasikan dengan $X(n)$. Sedangkan barisan itu sendiri dinotasikan dengan X, (x_n), atau $(x_n | n \in N)$. Dengan demikian barisan X dan Y pada contoh (1), masing-masing dapat dinotasikan $X = (n | n \in N)$ dan $Y = (2n + 3 | n \in N)$. Penggunaan tanda kurung ini membedakan antara notasi barisan $X = (n | n \in N)$ dengan himpunan $\{x_n | n \in N\}$. Sebagai contoh jika $X = ((-1)^n | n \in N)$ adalah barisan yang unsurnya selang-seling antara -1 dan 1, yaitu $X = (-1,1,-1,1,...)$, sedangkan jika $X = \{(-1)^n | n \in N\}$ adalah himpunan yang unsur-unsurnya adalah -1 dan 1, yaitu $X = \{-1,1\}$.

Untuk mendefinisikan barisan, kadang unsur-unsur dalam barisan ditulis secara berurutan, sampai rumus untuk barisan tersebut tampak. Perhatikan contoh berikut :

Contoh 2

Jika diketahui barisan $X = (2,4,6,8,...)$ yang menyatakan barisan barisan bilangan asli genap, dimana salah satu rumus umumnya adalah :

$$X = (2n : n \in N)$$

Demikian juga dengan barisan $X = (1, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, ...)$ yang menyatakan barisan bilangan rasional dengan salah satu rumus umumnya

$$X = \left(\frac{n}{2n-1} : n \in N \right).$$

Kadang kala, rumus umum dari suatu barisan dapat dinyatakan secara rekursif artinya unsur atau suku pertama misalnya x_1 ditetapkan terlebih dahulu kemudian diberikan suatu rumus untuk $x_{n+1} (n \geq 1)$ dengan x_n telah diketahui.

Contoh 3

Barisan bilangan asli genap dapat dinyatakan dengan rumus:

$$x_1 = 2, \qquad x_{n+1} = x_n + 2 \qquad (n \geq 1);$$

atau dengan :

$$x_1 = 2, \qquad x_{n+1} = x_1 + x_n \qquad (n \geq 1);$$

Berikut ini akan dipekenalkan suatu cara yang penting dalam membuat barisan baru dari barisan yang telah diketahui.

Definisi 2

Misalkan $X = (x_n)$ dan $Y = (y_n)$ adalah barisan bilangan real. Jumlah dari barisan *X* dan *Y*, yang dinotasikan dengan $X + Y$, adalah barisan yang didefinisikan dengan:

$$X + Y = (x_n + y_n : n \in N)$$

(Bartle dan Sherbert, 1994: 69)

Contoh 4

Misalkan $X = (3n - 2 : n \in N) = (1,4,7,10,...)$

dan $Y = (2n : n \in N) = (2,4,6,8,...)$

maka $X + Y = (3,8,13,18,...) = (5n - 2 : n \in N)$.

Definisi 3

Misalkan $X = (x_n)$ dan $Y = (y_n)$ adalah barisan bilangan real. Selisih dari barisan *X* dan *Y*, yang dinotasikan dengan $X - Y$, adalah barisan yang didefinisikan dengan:

$$X - Y = (x_n - y_n : n \in N)$$

(Bartle dan Sherbert, 1994: 69)

Contoh 5

Misalkan $X = (n + 2 : n \in N) = (3,4,5,6,\ldots)$

dan $Y = (2n : n \in N) = (2,4,6,8,\ldots)$

maka $X - Y = (-1,0,-1,-2,\ldots) = (-n + 2 : n \in N)$.

Definisi 4

Misalkan $X = (x_n)$ dan $Y = (y_n)$ adalah barisan bilangan real. Perkalian dari barisan *X* dan *Y*, yang dinotasikan dengan $X \bullet Y$, adalah barisan yang didefinisikan dengan:

$$X \bullet Y = (x_n y_n : n \in N)$$

(Bartle dan Sherbert, 1994: 69)

Contoh 6

Misalkan $X = (3n : n \in N) = (3,6,9,12,\ldots)$

dan $Y = (n + 1 : n \in N) = (2,3,4,5,\ldots)$

maka $X \bullet Y = (6,18,36,60,\ldots) = (3n^2 + 3n : n \in N)$.

Definisi 5

Misalkan $X = (x_n)$ adalah barisan bilangan real dan $c \in R$. Kelipatan dari barisan X dan c, yang dinotasikan dengan cX , adalah barisan yang didefinisikan dengan:

$$cX = (cx_n : n \in N)$$

(Bartle dan Sherbert, 1994: 69)

Contoh 7

Misalkan $X = (3n - 2 : n \in N) = (1,4,7,10,...)$ dan $c = 2$

maka $cX = (2,8,14,20,...) = (6n - 4 : n \in N)$.

Definisi 6

Misalkan $X = (x_n)$ dan $Y = (y_n)$ adalah barisan bilangan real, dengan $Y_n \neq 0$. Pembagian dari barisan X dan Y, yang dinotasikan dengan $\frac{X}{Y}$, adalah barisan yang didefinisikan dengan:

$$\frac{X}{Y} = \left(\frac{X_n}{Y_n} : n \in N \right)$$

(Bartle dan Sherbert, 1994: 69)

Contoh 8

Misalkan $X = (3n - 2 : n \in N) = (1,4,7,10,...)$

dan $Y = (2n : n \in N) = (2,4,6,8,...)$

maka $\frac{X}{Y} = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{7}{6}, \frac{10}{8}, ... \right) = \left(\frac{3n-2}{2n} : n \in N \right)$.

2. Limit Barisan

Definisi 7

Misalkan R bilangan real, jika $a \in R$ dan $\varepsilon > 0$ maka lingkungan ε dari a adalah $V_\varepsilon(a) = \{x \in R \,|\, |x - a| < \varepsilon\}$.

(Bartle dan Sherbert, 1994: 41)

Contoh 9

Jika a = 4 dan $\varepsilon = 1$, tentukan lingkungan 1 dari 4.

Jawab :

$$V_1(4) = \{x \in R \,|\, |x - 4| < 1\}$$

$$= \{x \in R \,|\, -1 < x - 4 < 1\}$$

$$= \{x \in R \,|\, 3 < x < 5\}$$

Definisi 8

Misal $X = (x_n)$ adalah barisan bilangan real. Suatu bilangan real x dikatakan limit dari *X*, jika untuk masing-masing lingkungan dari *V* dari *x* terdapat suatu bilangan asli *K* sehingga untuk semua $n \geq K$, maka x_n adalah anggota *V*. (Bartle dan Sherbert, 1994: 70)

Jika x adalah limit dari barisan *X*, maka dikatakan bahwa $X = (x_n)$ konvergen ke *x* (mempunyai limit *x*). Jika barisan mempunyai limit maka barisan tersebut dikatakan konvergen, begitu juga sebaliknya jika barisan tidak mempunyai limit maka barisan tersebut dikatakan divergen. Ketika barisan $X = (x_n)$ mempunyai limit *x* di *R* maka dinotasikan sebagai berikut :

$\lim X = x$ atau $\lim(x_n) = x$ yang kadang-kadang disimbolkan dengan $x_n \to x$, dimana x_n mendekati bilangan x untuk $n \to \infty$.

Teorema 1

Limit suatu barisan bilangan real adalah tunggal.

Bukti :

Misalkan $X = (x_n)$ barisan bilangan real.

Andaikan *X* mempunyai lebih dari satu limit.

Misalkan x_1 dan x_2 adalah limit dari *X*, dengan $x_1 \neq x_2$.

Misalkan $V^{'}$ adalah lingkungan dari x_1 dan $V^{"}$ adalah lingkungan dari x_2.

Pilih $\varepsilon = \frac{1}{2}\left|x_1 - x_2\right|$, maka $V^{'} \cap V^{"} = \phi$

Karena x_1 limit dari X maka ada bilangan asli $K^{'}$ sehingga jika $n \geq K^{'}$ maka: $x_n \in V^{'}$

Karena x_2 limit dari X maka ada bilangan asli $K^{"}$ sehingga jika $n \geq K^{"}$ maka: $x_n \in V^{"}$

Ambil $K = maks\left\{K^{'}, K^{"}\right\}$

Maka $K \geq K^{'}$ sehingga $x_K \in V^{'}$ dan $K \geq K^{"}$ sehingga $x_K \in V^{"}$

Berarti $x_k \in V^{'} \cap V^{"}$

Jadi $V^{'} \cap V^{"} \neq \phi$

Hal ini kontradiksi dengan $V^{'} \cap V^{"} = \phi$

Berarti pengandaian salah

Terbukti bahwa X mempunyai limit tidak lebih dari satu.

Pada pendefinisian limit suatu barisan bilangan real, masih digunakan istilah lingkungan. Dengan demikian, masih dirasa sulit untuk menunjukkan bahwa suatu barisan bilangan real adalah konvergen. Berikut akan diberikan suatu teorema yang ekuivalen dengan definisi limit barisan. Teorema ini akan mempermudah untuk menunjukkan bahwa suatu barisan bilangan real adalah konvergen atau divergen.

Teorema 2

Misal $X = (x_n)$ adalah barisan bilangan real dan $x \in R$. Pernyataan berikut ekuivalen .

a. X konvergen ke x.

b. Untuk setiap V lingkungan dari x terdapat bilangan asli K sehingga untuk semua $\mathrm{n} \geq \mathrm{K}$, maka x_n adalah anggota V.

c. Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli K sehingga untuk semua $\mathrm{n} \geq \mathrm{K}$,maka $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$.

d. Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli K sehingga untuk semua $\mathrm{n} \geq \mathrm{K}$, maka $|x_n - x| < \varepsilon$.

(Bartle dan Sherbert, 1994: 71)

Bukti :

1. $(a \Rightarrow b)$

Diketahui X konvergen ke x

Ambil sebarang V lingkungan dari x

Karena V lingkungan dari x, sesuai dengan definisi 3, maka terdapat bilangan asli K sehingga untuk semua $n \geq K$, maka x_n anggota V.

Karena V diambil sebarang, maka untuk setiap V lingkungan dari x terdapat bilangan asli K sehingga untuk semua $n \geq K$ maka x_n adalah anggota V.

2. $(b \Rightarrow c)$

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$

Misalkan V adalah lingkungan dari x

Berarti ada bilangan asli K sehingga untuk semua $n \geq K$, maka $x_n \in V$ berarti $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$

Karena $\varepsilon > 0$ diambil sebarang berarti untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli K sehingga untuk semua $n \geq K$, maka $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$.

3. $(c \Rightarrow d)$

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$

Berarti ada bilangan asli K sehingga untuk semua $n \geq K$, maka $x_n \in V$ Karena $x_n \in V$ berarti $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$.

Karena $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$ maka $|x_n - x| < \varepsilon$

Karena $\varepsilon > 0$ diambil sebarang berarti untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli K sehingga untuk semua $n \geq K$, maka $|x_n - x| < \varepsilon$.

4. $(d \Rightarrow a)$

Misalkan V sebarang Lingkungan dari x

Karena $\varepsilon > 0$, berarti ada bilangan asli K sehingga untuk semua $n \geq K$, maka $|x_n - x| < \varepsilon$

$|x_n - x| < \varepsilon$ berarti $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$

Berarti bahwa untuk semua $n \geq K$, maka $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$

Jadi $x_n \in V$. Sesuai dari definisi berarti X konvergen ke x.

Contoh 10

Tunjukkan bahwa $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3 + \frac{1}{2n}\right) = 3$

Jawab :

Untuk menunjukkan $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3 + \frac{1}{2n}\right) = 3$,

Misal untuk sebarang $\varepsilon > 0$, maka $\frac{1}{2\varepsilon} > 0$

Karena $\frac{1}{2\varepsilon} > 0$, maka terdapat bilangan asli K dengan $K > \frac{1}{2\varepsilon}$.

$\forall\ n \geq K$ maka diperoleh $n > \frac{1}{2\varepsilon}$

Jika $n \geq K$, maka

$$n > \frac{1}{2\varepsilon}$$

$$\frac{1}{2n} < \varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{2n} + 3 - 3\right| < \varepsilon$$

$$\left|3 - \frac{1}{2n} - 3\right| < \varepsilon$$

Karena $\varepsilon > 0$, maka terdapat bilangan asli K sehingga untuk semua $n \geq K$ maka

$$\left|\left(3 + \frac{1}{2n}\right) - 3\right| = \frac{1}{2n} < \varepsilon$$

Sesuai dengan teorema 2 (d), terbukti bahwa $\lim_{n \to \infty}\left(3 + \frac{1}{2n}\right) = 3$

3. Barisan Terbatas

Definisi 9

Misal $X = (x_n)$ adalah barisan bilangan real, X dikatakan terbatas jika ada bilangan real $M > 0$ sedemikian hingga $|x_n| \leq M$ untuk semua $n \in N$.

(Bartle dan Sherbert, 1994: 78)

Berdasarkan definisi, maka barisan $X = (x_n)$ terbatas jika dan hanya jika himpunan $\{x_n : n \in N\}$ dari barisan X terbatas di R.

Contoh 6

Misalkan $X = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ..., \frac{n}{n+1}, ...\right)$.

X terbatas karena ada bilangan real 1 sehingga $\left|\frac{n}{n+1}\right| \leq 1$, untuk semua $n \in N$.

Teorema 3

Barisan bilangan real yang konvergen adalah terbatas.

(Bartle dan Sherbert, 1994: 78)

Bukti

Misal $X = (x_n : n \in N)$ adalah barisan bilangan real dan $\lim(x_n) = x$

Pilih $\varepsilon = 1$

Maka ada $K \in N$ sehingga untuk semua $n \geq K$ berlaku $|x_n - x| < 1$.

Dengan ketaksamaan segitiga diperoleh $|x_n| < |x| + 1$, untuk semua $n \geq K$

Pilih $M = maks\{|x_1|, |x_2|, |x_3|, ..., |x_{k-1}|, |x| + 1\}$

Maka diperoleh bahwa $|x_n| \leq M$ untuk semua $n \in N$.

Terbukti, jika X konvergen maka X terbatas.

Teorema 4

Misal $X = (x_n)$ dan $Y = (y_n)$ adalah barisan bilangan real yang masing-masing konvergen ke x dan y. Maka penjumlahan dari barisan X dan Y yang dinotasikan dengan $X+Y$ konvergen ke $x+y$.

(Bartle dan Sherbert, 1994: 78)

Bukti:

Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang

Maka ada $K_1, K_2 \in N$ sehingga untuk semua $n \geq K_1$ berlaku

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dan untuk semua $n \geq K_2$ berlaku

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pilih $K = maks\{K_1, K_2\}$

maka untuk $n \geq K$ diperoleh

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (x + y)| &\leq |x_n - x| + |y_n - y| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Karena $\varepsilon > 0$ diambil sebarang maka disimpulkan bahwa *X*+*Y* konvergen ke *x*+*y*.

Teorema 5

Misal $X = (x_n)$ dan $Y = (y_n)$ adalah barisan bilangan real yang masing-masing konvergen ke *x* dan *y*. Maka selisih dari barisan *X* dan *Y* yang dinotasikan dengan *X*-*Y* konvergen ke *x*-*y*.

(Bartle dan Sherbert, 1994: 78)

Bukti:

Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang

Maka ada $K_1, K_2 \in N$ sehingga untuk semua $n \geq K_1$ berlaku

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dan untuk semua $n \geq K_2$ berlaku

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Pilih $K = maks\{K_1, K_2\}$

Maka untuk $n \geq K$ diperoleh

$$\begin{aligned}
|(x_n - y_n) - (x - y)| &\leq |x_n - x| + |y - y_n| \\
&= |x_n - x| + |y_n - y| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

Karena $\varepsilon > 0$ diambil sebarang, maka disimpulkan bahwa *X*-*Y* konvergen ke *x*-*y*.

Teorema 6

Misal $X = (x_n)$ dan $Y = (y_n)$ adalah barisan bilangan real yang masing-masing konvergen ke *x* dan *y*. Maka perkalian dari barisan *X* dan *Y* yang dinotasikan dengan *XY* konvergen ke *xy*.

(Bartle dan Sherbert, 1994: 78)

Bukti:

$$\begin{aligned}
|x_n y_n - xy| &= |(x_n y_n - x_n y) + (x_n y - xy)| \\
&\leq |x_n(y_n - y)| + |y(x_n - x)|
\end{aligned}$$

$$= |x_n||y_n - y| + |y||x_n - x|$$

Karena X konvergen maka X terbatas. Jadi ada bilangan real $M_1 > 0$ sehingga $|x_n| \leq M_1$, untuk semua $n \in N$.

Pilih $M = maks\{M_1, |y|\}$

Diperoleh

$$|x_n y_n - xy| = M|y_n - y| + M|x_n - x|$$

Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang

Maka ada $K_1, K_2 \in N$ sehingga untuk semua $n \geq K_1$ berlaku

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

dan untuk semua $n \geq K_2$ berlaku

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

Pilih $K = maks\{K_1, K_2\}$

Maka untuk $n \geq K$ diperoleh

$$|x_n y_n - xy| = M|y_n - y| + M|x_n - x|$$

$$< M\frac{\varepsilon}{2M} + M\frac{\varepsilon}{2M}$$

$$= \varepsilon$$

Karena $\varepsilon > 0$ diambil sebarang, maka disimpulkan bahwa *XY* konvergen ke *xy*.

Teorema 7

Misal $X = (x_n)$ adalah barisan bilangan real yang konvergen ke *x*. Dengan $c \in R$. Maka perkalian skalar c dengan barisan X yang dinotasikan dengan *cX* konvergen ke *cx*.

(Bartle dan Sherbert, 1994: 78)

Bukti :

Misal $Y = (c : n \in N) = (c, c, c, ...)$

Maka *Y* merupakan barisan konstan *c* yang konvergen ke *y=c*

Sesuai dengan teorema (6), maka barisan *YX* konvergen ke *yx*.

Jadi barisan *cX* konvergen ke *cx*.

Teorema 8

Misal $X = (x_n)$ adalah barisan bilangan real yang konvergen ke *x*. Jika $Z = (z_n)$ barisan bilangan real tak nol yang konvergen ke $z \neq 0$, maka pembagian dari barisan X dan Z yang dinotasikan dengan $\frac{X}{Z}$ konvergen ke $\frac{x}{z}$. (Bartle dan Sherbert, 1994: 78)

Bukti :

Akan ditunjukkan bahwa barisan $\frac{1}{(z_n)}$ konvergen ke $\frac{1}{z}$

Karena $\lim(z_n) = z$, maka ada bilangan asli K_1 sehingga untuk semua $n \geq K_1$ berlaku

$$|z_n - z| < a$$

$$-a < \left\| z_n \right| - |z\| \le |z_n - z| < a, n \ge K_1$$

Maka $-a < -|z_n - z| \le |z_n - z| < a$, untuk semua $n \ge K_1$

Sehingga diperoleh $\frac{1}{2}|z| = |z| - a \le |z_n|$, untuk semua $n \ge K_1$.

Jadi $\frac{1}{|z_n|} < \frac{2}{|z|}$, untuk semua $n \ge K_1$.

Dengan demikian

$$\left| \frac{1}{z_n} - \frac{1}{z} \right| = \left| \frac{z - z_n}{z_n z} \right|$$

$$= \frac{1}{|z_n z|} |z - z_n|$$

$$< \frac{2}{|z|^2} |z_n - z|$$

ambil $\varepsilon > 0$ sebarang

Maka ada $K_2 \in N$ sehingga untuk semua $n \ge K_2$ berlaku

$$|z_n - z| < \frac{1}{2} \varepsilon |z|^2$$

Pilih $K = maks\{K_1, K_2\}$, maka untuk semua $n \ge K$ berlaku

$$\left| \frac{1}{z_n} - \frac{1}{z} \right| < \varepsilon$$

Karena $\varepsilon > 0$ maka dapat disimpulkan bahwa $\frac{1}{Z}$ konvergen ke $\frac{1}{z}$

Dengan demikian, sesuai dengan teorema (7) maka $\frac{X}{Z} = X\frac{1}{Z}$ konvergen ke

$x\frac{1}{z} = \frac{x}{z}$

4. Barisan Monoton

Definisi 10

Misal (x_n) adalah barisan bilangan real.

Barisan (x_n) dikatakan barisan monoton naik, jika

$$x_n \leq x_{n+1},\ \forall n \in N$$

(Bartle dan Sherbert, 1994: 87)

Contoh 12

Misalkan $(x_n) = \frac{3n+1}{2n+2}, \forall n \in N$

Sehingga $(x_n) = 1, \frac{7}{6}, \frac{10}{8}, \ldots, \frac{3n+1}{2n+2}, \ldots \forall n \in N$

Karena $x_1 = 1 < x_2 = \frac{7}{6} < x_3 = \frac{10}{8} < \ldots < x_n = \frac{3n+1}{2n+2} < \ldots$ maka (x_n) merupakan barisan monoton naik.

Definisi 11

Misal (x_n) adalah barisan bilangan real.

Barisan (x_n) dikatakan barisan monoton turun, jika

$$x_n \geq x_{n+1},\ \forall n \in N$$

(Bartle dan Sherbert, 1994: 87)

Contoh 13

Misalkan $(x_n) = \frac{1}{n^2+1}, \forall n \in N$

Sehingga $(x_n) = \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, ..., \frac{1}{n^2+1}, ..., \forall n \in N$

Karena $x_1 = \frac{1}{2} > x_2 = \frac{1}{5} > x_3 = \frac{1}{10} > ... > x_n = \frac{1}{n^2+1} > ...$ maka (x_n) merupakan barisan monoton turun.

5. Subbarisan

Berikut ini akan dikenalkan definisi suatu subbarisan dari barisan bilangan real. Definisi dari subbarisan ini sering digunakan untuk menentukan kekonvergenan dan kedivergenan dari suatu barisan.

Definisi 12

Misal $X = (x_n)$ adalah barisan bilangan real, dan $r_1 < r_2 < ... r_n < ...$ barisan bilangan asli monoton naik. Maka $X' = (x_{r_n})$ disebut subbarisan dari *X*.

(Bartle dan Sherbert, 1994: 94)

Contoh 14

Jika $(x_n) = \frac{1}{n}, \forall n \in N$

$R = 3,4,5,6, ..., n+2, ..., \forall n \in N$

Tentukan subbarisan dari (x_n)

Jawab:

$(x_n) = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$

$R = 3,4,5,6, \ldots..$

Misalkan Y adalah subbarisan dari (x_n) maka:

$Y = x_{r_1}, x_{r_2}, x_{r_3}, ... = x_3, x_4, x_5, x_6 ...$

$= \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ..., \frac{1}{n+2}, ...$

adalah subbarisan dari (x_n).

Teorema 9

Misal (x_n) barisan bilangan real dan $x \in R$. Jika (x_n) konvergen ke bilangan real *x*, maka sebarang subbarisan dari (x_n) juga konvergen ke *x*.

(Bartle dan Sherbert, 1994: 94)

Bukti :

Misal (x_{r_n}) sebarang subbarisan dari (x_n)

Akan dibuktikan bahwa:

$\lim(x_{r_n}) = x$ yaitu $\forall \varepsilon > 0 \exists K \in N \ni |x_{r_n} - x| < \varepsilon, n \geq K$

Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang maka $\exists K \in N \ni |x_n - x| < \varepsilon, n \geq K$

Diketahui $r_n \geq n, \forall n \in N$

Jika $n \geq K$ maka $r_n \geq K$ sehingga berlaku $|x_{r_n} - x| < \varepsilon$, $n \geq K$

Jadi (x_{r_n}) konvergen ke *x*.

B. Barisan Cauchy

Definisi 13

Misalkan (x_n) barisan bilangan real. (x_n) disebut barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $K \in N$ sehingga jika $m, n \in N$ dan $m, n \geq K$ maka $|x_m - x_n| < \varepsilon$

(Bartle dan sherbert,1994: 100)

Secara simbolik definisi tersebut dapat ditulis dengan:

(x_n) barisan Cauchy $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists K \in N \ni |x_m - x_n| < \varepsilon$, $m, n \geq K$.

Teorema 10

Jika (x_n) barisan bilangan real yang konvergen maka (x_n) adalah barisan Cauchy.

(Bartle dan sherbert,1994: 100)

Bukti :

Misalkan (x_n) konvergen ke x maka

Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang, karena $\varepsilon > 0$ maka $\frac{\varepsilon}{2} > 0$

Sehingga $\exists K \in N \ni |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$, $n \geq K$

Jika $m, n \geq K$ maka $|x_m - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ dan $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$

$|x_m - x_n| = |x_m - x + x - x_n|$

$$\leq |x_m - x| + |x - x_n|$$

$$= |x_m - x| + |x_n - x|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \varepsilon$$

Jadi $\forall \varepsilon > 0 \exists K \in N \ni |x_m - x_n| < \varepsilon$, $m, n \geq K$

Teorema 11

Setiap barisan Cauchy pada bilangan real adalah terbatas

(Bartle dan sherbert,1994: 101)

Bukti :

Misalkan (x_n) sebarang barisan Cauchy.

Ambil $\varepsilon = 1$ maka $\exists K \in N \ni |x_m - x_n| < 1$, $m, n \geq K$

$$\left||x_m| - |x_n|\right| \leq |x_m - x_n| < 1,\ m, n \geq K$$

$$-|x_m - x_n| \leq |x_n| - |x_m| \leq |x_m - x_n| < 1,\ m, n \geq K$$

$$|x_n| - |x_m| \leq 1,\ m, n \geq K$$

$$|x_n| \leq |x_m| + 1,\ m, n \geq K$$

Pilih $m = K$ maka diperoleh

$$|x_n| \leq |x_K| + 1,\ n \geq K$$

Pilih $L = maks\{|x_1|, |x_2|, |x_3|, ..., |x_{K-1}|, |x_K| + 1\}$ maka berlaku

$$|x_n| \leq L, \forall n \in N$$

Sehingga terbukti bahwa setiap barisan Cauchy adalah terbatas

Teorema 12

Setiap barisan Cauchy pada bilangan real adalah konvergen

(Bartle dan sherbert,1994: 101)

Bukti :

Ambil (x_n) sebarang barisan Cauchy

Menurut teorema (11) bahwa setiap barisan Cauchy adalah terbatas maka (x_n) mempunyai sub barisan misalkan (x_{r_n}) yang konvergen sebut ke x

Akan dibuktikan bahwa (x_n) konvergen ke x

Ambil $\varepsilon > 0$

Karena $\varepsilon > 0$ Cauchy maka $\exists K_1 \in N \ni |x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2},\ m, n \geq K_1$

Karena (x_{r_n}) konvergen ke x maka $\exists K_2 \in N \ni |x_{r_n} - x| < \frac{\varepsilon}{2},\ r_n \geq K$

Pilih $K = maks\{K_1, K_2\}$ maka:

Jika $n, r_n \geq K$ maka $|x_n - x_{r_n}| < \frac{\varepsilon}{2}$ dan $|x_{r_n} - x| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$|x_n - x| = |x_n - x_{r_n} + x_{r_n} - x|$$

$$\leq |x_n - x_{r_n}| + |x_{r_n} - x|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \varepsilon$$

Jadi $\forall \varepsilon > 0 \exists K \in N \ni |x_n - x| < \varepsilon$, $n \geq K$

Dengan demikian terbukti bahwa setiap barisan Cauchy adalah konvergen.

Contoh 15

Misalkan $(x_n) = \left(3 + \frac{1}{2n}\right)$, tunjukkan bahwa x_n barisan Cauchy.

Jawab :

Karena telah dibuktikan bahwa (x_n) konvergen, maka sesuai dengan teorema (10), $x_n = 3 + \frac{1}{2n}$ adalah barisan Cauchy.

C. Barisan Kontraktif

Definisi 14

Barisan (x_n) dikatakan berisan kontraktif jika terdapat konstanta C dengan 0 < C < 0, sehingga berlaku, $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq C|x_{n+1} - x_n| \forall n \in N$.

(Bartle dan Sherbert, 1994: 104)

Contoh 16

Misal barisan $x_{n+1} = \frac{1}{7}\left(x_n^3 + 2\right)$ dan $0 < x_n < 1, \forall n \in N$. Tunjukkan bahwa x_{n+1} adalah barisan kontraktif.

Jawab:

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = \left|\frac{1}{7}\left(x_{n+1}^3 + 2\right) - \frac{1}{7}\left(x_n^3 + 2\right)\right|$$

$$= \frac{1}{7}\left|x_{n+1}^3 + 2 - x_n^3 - 2\right|$$

$$= \frac{1}{7}\left|x_{n+1}^3 - x_n^3\right|$$

$$= \frac{1}{7}\left|x_{n+1}^2 + x_{n+1}x_n + x_n^2\right|\left|x_{n+1} - x_n\right|$$

Karena $0 < x_n < 1$, maka $x_{n+1} < 1$

sehingga

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| < \frac{1}{7}|1+1+1||x_{n+1} - x_n|$$

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| < \frac{3}{7}|x_{n+1} - x_n|.$$

Jadi x_n adalah barisan kontraktif dengan $C = \frac{3}{7}$.

Teorema 13

Setiap barisan kontraktif (x_n) merupakan barisan Cauchy dan konvergen.

(Bartle dan Sherbert, 1994: 104)

Bukti :

Misal barisan (x_n) adalah barisan kontraktif maka untuk suatu C, 0<C<1 berlaku

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq C|x_{n+1} - x_n| \leq C^2|x_n - x_{n-1}|$$

$$\leq C^3 |x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \ldots \leq C^n |x_2 - x_1|$$

$$\leq C^n |x_n - x_1|$$

Selanjutnya akan dibuktikan barisan kontraktif adalah barisan Cauchy. Untuk m>n maka :

$$|x_m - x_n| = |x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} + \ldots + x_{n+1} - x_n|$$

Dengan ketaksamaan segitiga diperoleh

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \ldots. + |x_{n+1} - x_n|$$

Dari barisan kontraktif didapatkan

$$|x_m - x_{m-1}| \leq C^{m-2} |x_2 - x_1|$$

$$|x_{m-1} - x_{m-2}| \leq C^{m-3} |x_2 - x_1|$$

$$|x_{n+1} - x_n| \leq C^{n-1} |x_2 - x_1|$$

Maka

$$|x_m - x_n| \leq \left(C^{m-2} + C^{m-3} + \ldots + C^{n-1}\right)|x_2 - x_1|$$

$$= C^{n-1}\left(C^{m-n-1} + C^{m-n-2} + \ldots + 1\right)|x_2 - x_1|$$

Dengan menggunakan rumus jumlah deret geometri dimana $a = C^{m-n-1}$ dan $r = C^{-1}$ maka diperoleh:

$$|x_m - x_n| = C^{n-1}\left(\frac{1 - C^{m-n}}{1 - C}\right)|x_2 - x_1|$$

Karena $0 < C < 1$ dan $m > n$ maka,

$$|x_m - x_n| \leq C^{n-1}\left(\frac{1}{1 - C}\right)|x_2 - x_1|$$

Karena $0 < C < 1$ dan bahwa lim $\left(C^n\right) = 0$, maka $C^n < \delta$.

Misalkan diambil $\varepsilon > 0$ maka

$\forall n, m \geq N$ berlaku $\left|x_m - x_n\right| \leq C^{n-1}\left(\frac{1}{1-C}\right)\left|x_2 - x_1\right| < \varepsilon$

berarti bahwa $\left(x_n\right)$ merupakan barisan Cauchy.

Karena barisan kontraktif merupakan barisan Cauchy, sedangkan setiap barisan Cauchy adalah konvergen, maka barisan kontraktif pasti konvergen.

D. Relasi Rekursif

Relasi rekursif adalah suatu topik penting dan menarik dalam kombinatorik. Banyak permasalahan dalam matematika, khususnya kombinatorik dapat dimodelkan ke dalam bentuk relasi rekursif. Suatu barisan didefinisikan secara rekursif jika kondisi awal barisan ditentukan, dan suku-suku barisan selanjutnya dinyatakan dalam hubungannya dengan sejumlah suku-suku yang sudah dinyatakan sebelumnya.

Definisi 15

Misal $k \in N$, relasi rekursif linear dengan koefisien konstanta order k dapat ditulis dalam bentuk

$$c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \ldots + c_k x_{n-k} = f(n)$$

dimana $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_k$ konstanta dan $f(n)$ suatu fungsi dalam n, $c_k \neq 0$. Jika persamaan $f(n) = 0$, maka disebut relasi rekursif linear homogen order k dan jika $f(n) \neq 0$ disebut relasi rekursif tak homogen order k.

(Sutarno, 2005: 50)

Contoh 17

$2x_n + 3x_{n-1} = 2^n$ adalah sebuah relasi rekursif linier order 1 dengan koefisien konstanta.

$3x_n - 5x_{n-1} + 2x_{n-2} = n^2 + 5$ adalah sebuah relasi rekursif linier tak homogen order 2 dengan koefisien kontanta.

Solusi dari relasi rekursif adalah sebuah barisan $p_n, p_n \in R$. Sebuah (P_n) disebut solusi eksplisit persamaan

$$c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + ... + c_k x_{n-k} = 0 ,$$

pada interval I, jika (P_n) terdefinisi pada I dan bila disubtitusikan untuk x_n ke dalam $c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + ... + c_k x_{n-k} = 0$ memenuhi persamaan tersebut untuk setiap n dalam interval I..

Teorema 14

Misal $c_1, c_2 \in R$ dan jika diberikan (p_n) dan (q_n) dua solusi dari persamaan $c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + ... + c_k x_{n-k} = 0 \quad \forall A, B \in R$ maka S_n , dimana

$$s_n = A(p_n + p_{n-1} + p_{n-2} + ... + p_{n-k}) + B(q_n + q_{n-1} + q_{n-2} + ... + q_{n-k}), \forall n \in N$$

juga solusi $c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + ... + c_k x_{n-k} = 0$

(Sutarno, 2005: 52)

Bukti :

Misal jika (p_n)dan (q_n)barisan bilangan real, dua solusi dari persamaan $c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + ... + c_k x_{n-k} = 0$ maka

$c_0 p_n + c_1 p_{n-1} + c_2 p_{n-2} + ... + c_k p_{n-k}$

$c_0 q_n + c_1 q_{n-1} + c_2 q_{n-2} + ... + c_k q_{n-k}$

persamaan $c_0 p_n + c_1 p_{n-1} + c_2 p_{n-2} + ... + c_k p_{n-k}$ dikali dengan A dan persamaan $c_0 q_n + c_1 q_{n-1} + c_2 q_{n-2} + ... + c_k q_{n-k}$ dikali dengan B sehingga di dapat

$$Ac_0 p_n + Ac_1 p_{n-1} + Ac_2 p_{n-2} + ... + Ac_k p_{n-k} = 0$$

$$Bc_0 q_n + Bc_1 q_{n-1} + Bc_2 q_{n-2} + ... + Bc_k q_{n-k} = 0$$

maka

$$\begin{aligned} S_n &= A(p_n + p_{n-1} + p_{n-2} + ... + p_{n-k}) + B(q_n + q_{n-1} + q_{n-2} + ... + q_{n-k}) \\ &= (Ac_0 p_n + Ac_1 p_{n-1} + ... + Ac_k p_{n-k}) + (Bc_0 q_n + Bc_1 q_{n-1} + ... + Bc_k q_{n-k}) \\ &= c_0 (Ap_n + Bq_n) + c_1 (Ap_{n-1} + Bq_{n-1}) + ... + c_k (Ap_{n-k} + Bq_{n-k}) \\ &= c_0 S_n + c_1 S_{n-1} + c_2 S_{n-2} + ... + c_k S_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k S_{n-k} \end{aligned}$$

Jadi $\{s_n\}$ adalah solusi dari relasi rekursif.

Selanjutnya akan dibahas permasalahan mencari (p_n) dengan persamaan karakteristik.

misal $x_i, c_i \in R$ untuk $i = 1,2,3,...,k$ dan r adalah sebarang bilangan, $\forall n \in N$, $x_n = r^n, r \neq 0$, maka persamaan

$$c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + ... + c_k x_{n-k} = 0$$

menjadi

$$c_o r^n + c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + ... + c_k r^{n-k} = 0$$

apabila dibagi dengan r^{n-k} diperoleh

$$c_0 r^k + c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + ... + c_k = 0$$

disebut persamaan karakteristik dari $c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + ... + c_k x_{n-k} = 0$ dan dari persamaan $c_0 r^k + c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + ... + c_k = 0$ diperileh nilai $r_1, r_2, r_{3,} ..., r_k$ yang disebut akar-akar persamaan karakteristik.

Teorema 15

i. Jika persamaan $c_0 r^k + c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + ... + c_k = 0$ memiliki akar-akar persamaan karakteristik yang berbeda $r_1, r_2, r_3, ..., r_k$, maka $\{p_n\}$ adalah solusi untuk sembarang konstanta $A_1, A_2, A_3, ..., A_k \in R$ sedemikian sehingga solusi umumnya adalah $p_n = A_1(r_1)^n + A_2(r_2)^n + A_3(r_3)^n + ... + A_k(r_k)^n, \forall n = 1,2,3,...$

ii. Jika persamaan $c_0 r^k + c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + ... + c_k = 0$ memiliki akar-akar karakteristik yang sama $r_1 = r_2 = r_3 =, ..., = r_k = r$ maka $\{p_n\}$ adalah solusi untuk sembarang konstanta $A_1, A_2, A_3, ..., A_k \in R$ sedemikian hingga solusi umumnya $p_n = A_1(r_1)^n + A_2 n(r_2)^n + A_3 n^2 (r_3)^n + ... + A_k n^{k-1}(r_k)^n, \forall n = 1,2,3,...$

iii. Jika persamaan $c_0 r^k + c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + ... + c_k = 0$ memiliki akar-akar persamaan yang kompleks, misal $r_1 = \alpha + \beta i$ dan $r_2 = \alpha - \beta$

$p_n = A(\alpha + \beta i)^n + B(\alpha - \beta i)^n$

$$= A(r\cos\theta + ri\sin\theta)^n + B(r\cos\theta - ai\sin\theta)^n$$

$$= Ar^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) + Br^n(\cos n\theta - i\sin n\theta)$$

$$= r^n(A\cos n\theta + Ai\sin n\theta) + r^n(B\cos n\theta - Bi\sin n\theta)$$

$$= r^n((A+B)\cos n\theta + i(A-B)\sin n\theta)$$

maka solusi umumnya adalah $p_n = r^n(C_1\cos n\theta + iC_2\sin n\theta)$ dimana $C_1 = A+B$, $C_2 = i(A-B)$. (Sutarno, 2005: 53)

BAB III

PEMBAHASAN

A. Menentukan Nilai Limit Barisan Kontraktif Menggunakan Relasi Rekursif

Adapun langkah-langkah untuk menentukan nilai limit barisan dengan menggunakan relasi rekursif adalah:

1. Subtitusikan $x_n = r^n$ untuk memperoleh persamaan karakteristik $c_0 r^k + c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + ... + c_k = 0$.
2. Menentukan akar-akar karakteristik dari persamaan karakteristik $c_0 r^k + c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + ... + c_k = 0$.
3. Menentukan bentuk solusi umumnya dilihat dari akar-akar karakteristik yang diperoleh yaitu :

   Jika memiliki akar-akar persamaan karakteristik yang berbeda $r_1, r_2, r_3, ..., r_k$, $k = 1,2,3,...$ maka (P_n) adalah solusi untuk sembarang konstanta $A_1, A_2, A_3, ..., A_k \in R$ sedemikian sehingga solusi umumnya adalah $p_n = A_1(r_1)^n + A_2(r_2)^n + A_3(r_3)^n + ... + A_k(r_k)^n, \forall n = 1,2,3,...$

   Jika memiliki akar-akar karakteristik yang sama $r_1 = r_2 = r_3 = ... = r_k$, $k = 1,2,3,...$ maka (P_n) adalah solusi untuk sembarang konstanta $A_1, A_2, A_3, ..., A_k \in R$ sedemikian hingga solusi umumnya

   $$p_n = A_1(r_1)^n + A_2 n(r_2)^n + A_3 n^2 (r_3)^n + ... + A_k n^{k-1}(r_k)^n, \forall n = 1,2,3,...$$

4. Menentukan nilai kekonvergenannya dengan melimitkan bentuk solusi umumnya.

Selanjutnya akan diberikan contoh-contoh barisan, kemudian akan ditunjukkan bahwa barisan tersebut adalah barisan kontraktif dan mencari nilai limit barisan kontraktif menggunakan relasi rekursif.

Contoh 1

Misal $0 < \alpha < 1$, barisan (x_n) dengan $x_{n+1} = \alpha x_n + (1-\alpha)x_{n-1}$, $\forall n \geq 2$,

tunjukkan bahwa (x_n) adalah barisan kontraktif ?

tentukan limitnya jika diketahui x_0, x_1, dan $x_0 < x_1$?

Jawab :

$$\begin{aligned}|x_{n+1} - x_n| &= |(\alpha x_n + (1-\alpha)x_{n-1}) - (\alpha x_{n-1} + (1-\alpha)x_{n-2})| \\ &= |\alpha x_n - \alpha x_{n-1} + (1-\alpha)x_{n-1} - (1-\alpha)x_{n-2}| \\ &\leq \alpha|x_n - x_{n-1}| + (1-\alpha)|x_{n-1} - x_{n-2}|\end{aligned}$$

karena $1 \leq x_n \leq 2$, $\forall n \geq 2$ dan $x_0 < x_1$

maka

$$|x_{n+1} - x_n| \leq (\alpha - 1)|x_n - x_{n-1}|$$

Jadi (x_n) adalah barisan kontraktif dengan $C = (\alpha - 1)$.

Kemudian (x_n) bisa ditampilkan dalam bentuk relasi rekursif dengan langkah-langkah :

1. Substitusikan $x_n = r^n$ sehingga diperoleh persamaan karakteristik $x_{n+1} = \alpha x_n + (1-\alpha)x_{n-1}$ adalah $r^{n+1} = \alpha r^n + (1-\alpha)r^{n-1}$ apabila dibagi dengan r^{n-1} maka diperoleh $r^2 = \alpha r + (1-\alpha)$ atau $r^2 - \alpha r - (1-\alpha) = 0$

2. Dari persamaan $r^2 - \alpha r - (1-\alpha) = 0$ diperoleh akar-akar persamaan karakteristiknya yaitu :

$$r_{1,2} = \frac{\alpha \pm \sqrt{(\alpha)^2 + 4(1-\alpha)}}{2}$$

$$= \frac{\alpha \pm (\alpha - 2)}{2}$$

Jadi akar-akar karakteristiknya adalah $r_1 = 1$ dan $r_2 = (\alpha - 1)$

3. Karena $r_1 \neq r_2$ maka bentuk solusi umumnya adalah $p_n = c_1 + c_2(\alpha - 1)^n, \forall n = 0,1,2,...$ untuk mencari c_1 dan c_2, misal $p_0 = x_0$ dan $p_1 = x_1$ maka diperoleh sistem persamaan yang berbentuk

$$c_1 + c_2 = x_0$$

$$c_1 + (\alpha - 1)c_2 = x_1$$

sehingga diperoleh :

$$c_1 = \frac{(1-\alpha)x_0 + x_1}{2-\alpha}$$

$$c_1 = \frac{x_0 - x_1}{2-\alpha}$$

kemudian di substitusikan ke solusi umumnya, maka diperoleh

$$. \ p_n = \left(\frac{(1-\alpha)x_0 + x_1}{2-\alpha}\right) + \left(\frac{x_0 - x_1}{2-\alpha}\right)(\alpha - 1)^n$$

4. Selanjutnya akan ditentukan nilai konvergensinya dengan melimitkan solusi umum di atas yaitu :

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(1-\alpha)x_0 + x_1}{2-\alpha}\right) + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_0 - x_1}{2-\alpha}\right)(\alpha - 1)^n$$

$$= \left(\frac{(1-\alpha)x_0 + x_1}{2-\alpha}\right) + \left(\frac{x_0 - x_1}{2-\alpha}\right)\lim_{n\to\infty}(\alpha - 1)^n$$

karena $|\alpha - 1| < 1$ maka $\lim_{n\to\infty}(\alpha - 1)^n = 0$

sehingga

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \left(\frac{(1-\alpha)x_0 + x_1}{2-\alpha}\right) + \left(\frac{x_0 - x_1}{2-\alpha}\right)(0)$$

$$= \left(\frac{(1-\alpha)x_0 + x_1}{2-\alpha}\right)$$

Jadi nilai limit dari $x_{n+1} = \alpha x_n + (1-\alpha)x_{n-1}$, $\forall n \geq 2$ adalah $\frac{(1-\alpha)x_0 + x_1}{2-\alpha}$.`

Contoh 2

Misal bilangan Fibonacci $f_1, f_2, f_3, \ldots$ didefinisikan secara rekursif dengan : $f_1 = 1$, $f_2 = 2$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, $\forall n \geq 2$. Tunjukkan $\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n}$ ada, dan tentukan nilainya ?

Jawab :

$$\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}-\frac{f_n}{f_{n-1}}\right| = \left|\frac{f_n\ + f_{n-1}}{f_n}-\frac{f_{n-1}+f_{n-2}}{f_{n-1}}\right|$$

$$= \left|\frac{f_{n-1}^{\,2}-f_n\,f_{n-2}}{f_{n-1}^{\,2}+f_{n-1}\,f_{n-2}}\right|$$

karena f_n barisan naik maka

$$f_{n-1}\left(f_{n-1}-f_{n-2}\right)\geq 0$$

atau

$$f_{n-1}^{\,2}\,f_{n-1}\,f_{n-2}\ \geq 2\,f_{n-1}\,f_{n-2}$$

dengan disubstitusikan ke

$$\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}-\frac{f_n}{f_{n-1}}\right| = \left|\frac{f_{n-1}^{\,2}-f_n\,f_{n-2}}{f_{n-1}^{\,2}+f_{n-1}\,f_{n-2}}\right|$$

di dapat

$$\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}-\frac{f_n}{f_{n-1}}\right| \leq \frac{1}{2}\left|\frac{f_n}{f_{n-1}}-\frac{f_{n-1}}{f_{n-2}}\right|$$

dengan induksi matematik di dapat

$$\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}-\frac{f_n}{f_{n-1}}\right| \leq \frac{1}{2^{n-1}}\left|\frac{f_3}{f_2}-\frac{f_2}{f_1}\right|$$

barisan $\dfrac{f_{n+1}}{f_n}$, $\forall n\geq 2$ merupakan barisan kontraktif dengan $C=\dfrac{1}{2}$,

jadi $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_{n+1}}{f_n}$ ada (konvergen).

Nilai limit $\frac{f_{n+1}}{f_n}$, $\forall n \geq 2$ dapat di tentukan menggunakan relasi rekursif dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Substitusikan $f_n = r^n$ sehingga diperoleh persamaan karakteristik $\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{f_n + f_{n-1}}{f_n}$ adalah $\frac{r^{n+1}}{r^n} = \frac{r^n + r^{n-1}}{r^n}$ apabila dibagi dengan r^{n-1} maka diperoleh $r^2 = r + 1$ atau $r^2 - r - 1 = 0$
2. Dari persamaan $r^2 - r - 1 = 0$ diperoleh akar-akar persamaan karakteristiknya yaitu :

$$r_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(1)^2 + 4(1)}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Jadi akar-akar karakteristiknya adalah $r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dan $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

3. Karena $r_1 \neq r_2$ maka bentuk solusi umumnya adalah $p_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \forall n = 1,2,...$ untuk mencari c_1 dan c_2, misal $p_1 = 2$ dan $p_1 = \frac{3}{2}$ maka diperoleh sistem persamaan yang berbentuk

$$c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 2$$

$$c_1\left(\frac{6+\sqrt{5}}{4}\right)-c_2\left(\frac{6-\sqrt{5}}{4}\right)=\frac{3}{2}$$

diperoleh $c_1=\dfrac{28+52\sqrt{5}}{32+8\sqrt{5}}$ dan $c_2=\dfrac{3-9\sqrt{5}}{7-\sqrt{5}}$.

Kemudian c_1, c_2 disubstitusikan ke persamaan umumnya sehingga diperoleh :

$$p_n=\frac{28+52\sqrt{5}}{32+8\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{3-9\sqrt{5}}{7-\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

4. Selanjutnya akan ditentukan nilai konvergensinya dengan melimitkan solusi umum di atas yaitu :

$$\lim_{n\to\infty}p_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{28+52\sqrt{5}}{32+8\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3-9\sqrt{5}}{7-\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

$$=\frac{28+52\sqrt{5}}{32+8\sqrt{5}}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{3-9\sqrt{5}}{7-\sqrt{5}}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

karena

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right|^n=0 \text{ dan } \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|^n=0$$

maka

$$\lim_{n\to\infty}p_n=0$$

jadi nilai limit $\dfrac{f_{n+1}}{f_n}$, $\forall n\geq 2$ adalah 0.

Contoh 3

Misal $x_0 = 1$ dan $x_{n+1} = \dfrac{3+2x_n}{3+x_n}, \forall n \geq 0$, buktikan bahwa (x_n) konvergen, dan tentukan nilai limitnya ?

Jawab :

Untuk membuktikan bahwa (x_n) memiliki limit, digunakan relasi rekursif sehingga di dapat

$$|x_{n+1} - x_n| = \left| \frac{3+2x_n}{3+x_n} - \frac{3+2x_{n-1}}{3+x_{n-1}} \right|$$

$$= \left| \frac{3(x_n - x_{n-1})}{(3+x_n)(3+x_{n-1})} \right|$$

$$\leq \frac{1}{3}|x_n - x_{n-1}|$$

Barisan (x_n) merupakan barisan kontraktif dengan $c = \dfrac{1}{3}$.

Kemudian di iterasikan dan di dapat

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{3^n}|x_1 - x_0|$$

$$= \frac{1}{3^n.4}$$

diketahui $x_n \geq 1$ untuk $n = 0,1,2,3,...$, jika (x_n) memiliki limit, misal $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $x \geq 1$, sehingga dapat ditentukan nilai limit $x_{n+1} = \dfrac{3+2x_n}{3+x_n}, \forall n \geq 0$ dengan relasi rekurensi didapat persamaan

$$x = \frac{3+2x}{3+x}$$

$$x^2 + x - 3 = 0$$

jadi x adalah solusi positif dari persamaan kuadrat sehingga diperoleh

$$x = \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{13}\right)$$

Jadi nilai limit $x_{n+1} = \dfrac{3+2x_n}{3+x_n}, \forall n \geq 0$ adalah $\dfrac{1}{2}\left(-1+\sqrt{13}\right)$.

Contoh 4

Misal barisan (x_n) dengan $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2})$ yang konvergen ke x, $\forall n \geq 2$, tunjukkan bahwa (x_n) adalah barisan kontraktif dan tentukan limitnya jika diketahui $x_0 = 1, x_1 = 2$ dan $x_0 < x_1$?

Jawab :

$$|x_{n+1} - x_n| = \left|\frac{1}{2}(x_n + x_{n-1}) - \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2})\right|$$

$$= \frac{1}{2}|x_n + x_{n-1} - x_{n-1} - x_{n-2}|$$

$$\leq \frac{1}{2}|x_n - x_{n-1}| + \frac{1}{2}|x_{n-1} - x_{n-2}|$$

Karena $0 \leq x_n \leq 2$, dan $x_0 < x_1$

Sehingga $\quad |x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{2}|x_n - x_{n-1}|$

Jadi (x_n) adalah barisan kontraktif dengan $C = \frac{1}{2}$.

Karena (x_n) bisa ditampilkan dalam bentuk relasi rekursif maka :

1. Subsitusikan $x_n = r^n$ sehingga diperoleh persamaan karakteristik $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2})$ adalah $r^n = \frac{1}{2}r^{n-1} + \frac{1}{2}r^{n-2}$ apabila dibagi dengan r^{n-2} maka diperoleh $r^2 = \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}$ atau $r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0$.

2. Dari persamaan $r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0$ diperoleh akar-akar persamaan karakteristiknya yaitu :

   $$r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0$$

   $$(r-1)\left(r + \frac{1}{2}\right) = 0$$

   Jadi akar-akar karakteristiknya adalah $r_1 = 1$ dan $r_2 = -\frac{1}{2}$.

3. Karena $r_1 \neq r_2$ maka bentuk solusi umumnya adalah $P_n = c_1 + c_2\left(-\frac{1}{2}\right)^n, \forall n = 1,2,3,...$ Untuk mencari c_1 dan c_2 , misal $p_0 = 1$ dan $p_1 = 2$ maka diperoleh sistem persamaan yang berbentuk

   $$c_1 + c_2 = 1$$

   $$c_1 + \left(-\frac{1}{2}\right)c_2 = 2$$

yang mempunyai solusi $c_2 = -\frac{2}{3}$ dan $c_1 = \frac{5}{3}$ kemudian di subsitusikan ke solusi umumnya, maka diperoleh $p_n = \frac{5}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

4. Selanjutnya akan ditentukan nilai konvergensinya dengan melimitkan solusi umum di atas yaitu :

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{5}{3} + \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \frac{5}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right)\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \frac{5}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right)(0)$$

$$= \frac{5}{3}$$

Jadi nilai limit dari (x_n), $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2})$, $\forall n \in N$ adalah $\frac{5}{3}$

Contoh 5

Misal (x_n)sebuah barisan bilangan real dengan

$$x_0 = 1 \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2 + x_n}, \forall n \geq 0$$

buktikan (x_n) menmpunyai limit dan tentukan nilainya ?

Jawab :

Ambil $f(x)=\dfrac{1}{(2+x)}$, persamaan $f(x)=x$ mempunyai solusi pada interval $0<x<\dfrac{1}{2}$, diberikan dengan $p=\sqrt{2}-1$. $f'(x)=\dfrac{1}{(2+x)^2}<\dfrac{1}{4}$ untuk $0<x<\dfrac{1}{2}$, akan ditunjukkan untuk $n\geq 1$,

$$|x_{n+1}-p| = |f(x_n)-f(p)|$$

$$\leq \frac{1}{4}|x_n-p|$$

Dengan iterasi diperoleh

$$|x_{n+1}-p| = \left(\frac{1}{4}\right)^2 |x_{n-1}-p|$$

$$\leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |x_n-p|$$

Jadi barisan (x_n) mempunyai nilai limit $\sqrt{2}-1$

BAB IV

PENUTUP

A. Kesimpulan

Suatu barisan real (x_n) dikatakan barisan kontraktif jika terdapat konstanta *C*, dengan $0 < C < 1$ sehingga berlaku,

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq C|x_{n+1} - x_n|,\ \forall n \in N.$$

Untuk menentukan nilai limit suatu barisan kontraktif dapat menggunakan relasi rekursif.

Relasi rekursif linier dengan koefisien konstanta order k dapat ditulis dalam bentuk $c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + ... + c_k x_{n-k} = f(n)$, dimana $c_0, c_1, c_2, ..., c_k$ konstanta dan $c_k \neq 0$, x_n fungsi diskret dan $f(n)$ suatu fungsi terhadap n, $\forall n \geq 0$. Jika $f(n) = 0$ maka disebut *relasi rekursif homogen order k* dan jika $f(n) \neq 0$ disebut *relasi rekursif tak homogen order k*

Nilai limit barisan kontraktif dapat ditetukan dengan metode relasi rekursif yang mana solusi umum dari relasi rekursif merupakan rumus umum suku ke-n barisan kontraktif. Adapun langkah-langkah untuk menentukan nilai limit barisan kontrktif dengan menggunakan relasi rekursif adalah :

1. Subsitusiksn $x_n = r^n$ kedalam bentuk relasi rekursif homogen untuk memperoleh persamaan karakteristik .
2. Mencari akar-akar karakteristik dari persamaan karakteristiknya .

3. Menentukan bentuk solusi umumnya dilihat dari akar-akar karasteristik yang diperoleh .
4. Menentukan nilai konvergensinya dengan melimitkan bentuk solusi umumnya.

B. Saran

Penulis sarankan kepada pembaca khususnya bagi mahasiswa jurusan mahasiswa jurusan matematika agar mengembangkan kajian tentang kekonvergenan pada barisan, khususnya dalam menentukan nilai limit barisan kontrakti menggunakan relasi rekursif tak homogen karena skripsi ini hanya terbatas pada relasi rekursif linier homogen koofisien konstanta.

DAFTAR PUSTAKA

Bartle, R.G and Sherbet, D.R. 1982. *Introduction to Real Analysis, 2nd* ed. New York: John Wiley and sons.

Fletcher P. Hoyle H, Wayne, C. P. 1991. *Fundation of Discrete Mathematic.* Boston: Pws Kent Publishing Company.

Hutahaean, Efendi. 1989. *Analisis Real II.* Jakarta: Penerbit Karunika Universitas Terbuka.

Hutahaean, Efendi. 1994. *Seri Matematika Fungsi Riil.* Bandung: Penerbit ITB

Liu, G. L. *Dasar-dasar matematika diskret,* edisi kedua. Jakarta: Gramedia.

Mardalis. 1995. *Metode Penelitian Suatu Pendekatan Proposal*. Jakarta: PT Aksara.

Purcell, Edwin J. 2003. *Kalkulus Jilid 2.* Jakarta: Penerbit Erlangga.

Siang, Jong Jek. 2002. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya Pada Ilmu Komputer*. Yogyakarta: Andi.

Soemantri, R. 1993. *Materi Pokok Analisis Real I.* Jakarta: Penerbit Karunika Universitas Terbuka.

Sutarno, Heri, dkk. 2005. *Matematika Diskrit.* Malang: UM Press.