

**MODEL PERUBAHAN JUMLAH AIR DAN NUTRISI
PADA MAKHLUK HIDUP DENGAN MENGGUNAKAN
PERSAMAAN DIFERENSIAL**

SKRIPSI

OLEH

SAICHUL ACHIYAT

NIM. 01510013



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG**

2008

**MODEL PERUBAHAN JUMLAH AIR DAN NUTRISI
PADA MAKHLUK HIDUP DENGAN MENGGUNAKAN
PERSAMAAN DIFERENSIAL**

SKRIPSI

**Diajukan kepada
Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri (UIN) Malang
untuk memenuhi salah satu persyaratan
dalam menyelesaikan program Sarjana
Matematika**

OLEH

**SAICHUL ACHIYAT
NIM. 01510013**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG**

2008

HALAMAN PERSETUJUAN

**MODEL PERUBAHAN JUMLAH AIR DAN NUTRISI
PADA MAKHLUK HIDUP DENGAN MENGGUNAKAN
PERSAMAAN DIFERENSIAL**

SKRIPSI

**Diajukan kepada
Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri (UIN) Malang
untuk memenuhi salah satu persyaratan
dalam menyelesaikan program Sarjana
Matematika**

**OLEH
SAICHUL ACHIYAT
NIM. 01510013**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diujikan
Pada Tanggal, 29 Juli 2008

Oleh Dosen Pembimbing

**Usman Pagalay, M.Si.
NIP. 150 327 240**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

**Sri Harini, M.Si.
NIP. 150 318 321**

HALAMAN PENGESAHAN

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Diterima untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal, 31 Juli 2008

SUSUNAN DEWAN PENGUJI

TANDA TANGAN

1. Penguji Utama : **Sri Harini, M.Si.** ()
NIP. 150 318 321
2. Ketua Penguji : **Abdussakir, M.Pd.** ()
NIP. 150 327 247
3. SekretarisPenguji : **Usman Pagalay, M.Si.** ()
NIP. 150 327 240

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si.
NIP. 150 318 321

KATA PENGANTAR



Puji syukur Alhamdulillah, penulis panjatkan kehadiran Allah SWT. yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan Skripsi ini dengan judul “*Model Perubahan Jumlah Air dan Nutrisi Pada Makhluk Hidup Dengan Menggunakan Persamaan Diferensial*” tepat waktu.

Shalawat dan salam, barokah yang seindah-indahnya, mudah-mudahan tetap terlimpahkan kepada Rasulullah SAW. yang telah membawa kita dari alam kegelapan dan kebodohan menuju alam ilmiah yaitu *Dinul Islam*.

Penulisan Skripsi ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu persyaratan dalam menyelesaikan program Sarjana Matematika Universitas Islam Negeri (UIN) Malang dan sebagai wujud serta partisipasi penulis dalam mengembangkan dan mengaktualisasikan ilmu-ilmu yang telah penulis peroleh selama di bangku kuliah.

Penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan penulisan Skripsi ini, baik secara langsung maupun tidak langsung. Oleh karena itu, perkenankan penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Malang
2. Bapak Prof. Drs. Sutiman B. Sumitro, SU., D.Sc. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang

3. Ibu Sri Harini, M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri (UIN) Malang
4. Bapak Usman Pagalay, M.Si. selaku Dosen Pembimbing, yang telah membimbing dan mengarahkan penulis dalam menyusun Skripsi ini.
5. Bapak/Ibu dosen Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, yang telah banyak memberikan ilmu kepada penulis sejak berada di bangku kuliah
6. Semua pihak yang telah membantu terselesainya Skripsi ini, yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu

Semoga Allah SWT. melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Penulis menyadari sepenuhnya bahwa di dunia ini tidak ada yang sempurna. Begitu juga dalam penulisan Skripsi ini, yang tidak luput dari kekurangan dan kesalahan. Oleh karena itu, dengan segala ketulusan dan kerendahan hati penulis sangat mengharapkan saran dan kritik yang bersifat konstruktif demi penyempurnaan Skripsi ini.

Akhirnya dengan segala bentuk kekurangan dan kesalahan, penulis berharap semoga dengan rahmat dan izin-Nya mudah-mudahan Skripsi ini bermanfaat bagi penulis khususnya dan bagi pihak-pihak yang bersangkutan.

Malang, Juli 2008

Penulis,

ABSTRAK

Achayat, Saichul. 2008. *Model Perubahan Jumlah Air dan Nutrisi Pada Makhluk Hidup Dengan Menggunakan Persamaan Diferensial*. Skripsi, Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.

Pembimbing: Usman Pagalay, M.Si.

Kata kunci: Model, Air dan Nutrisi Pada Makhluk Hidup, Persamaan Diferensial

Matematika merupakan alat yang dapat dan menyajikan permasalahan dalam bentuk bahasa matematika, dapat menjadi lebih sederhana untuk disajikan, dipahami, dianalisis dan dipecahkan. Salah satu materi dari ilmu matematika yang populer adalah persamaan diferensial.

Semua yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitung-hitungannya, ada rumusnya atau ada persamaannya. Pada dasarnya manusia bisa membuat rumus yang dapat diinterpretasikan sehingga menjadi model. Penulis akan membahas persamaan diferensial biasa yang berkaitan dengan nutrisi dan air pada makhluk hidup.

Dari hasil pembahasan, diperoleh: 1) Model jumlah air dan nutrisi pada makhluk hidup, yaitu:

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1} - \alpha_{12} \frac{N_2}{K_1}\right) \\ \frac{dN_2}{dt} &= r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2}{K_2} - \alpha_{21} \frac{N_1}{K_2}\right)\end{aligned}$$

di mana $N_1(t)$ yang menunjukkan jumlah air pada saat t , $N_2(t)$ menunjukkan jumlah nutrisi pada saat t , r_1 menunjukkan laju peningkatan pada Air, r_2 menunjukkan laju peningkatan pada Nutrisi, t menunjukkan waktu, α_{21} menunjukkan proporsional ukuran air dan nutrisi, α_{12} menunjukkan proporsional ukuran nutrisi dan air, K_1 , menunjukkan Carrying Capacity atau kapasitas untuk air, K_2 , menunjukkan Carrying Capacity atau kapasitas untuk Nutrisi. 2) Kesetimbangan jumlah air dan nutrisi pada makhluk hidup diperoleh

pada saat: a) Untuk Air; Jika $r_1 = 0,2$ $K_1 = \frac{0,2}{0,005} = \frac{200}{5} = 40$ maka $\frac{r_1}{K_1} = 0,005$,

Jika $\alpha_{12} = \frac{0,0075}{0,005} = \frac{7,5}{5} = \frac{75}{50} = \frac{3}{2} = 1,5$ maka $\frac{r_1 \alpha_{12}}{K_1} = 0,0075$; b) Untuk Nutrisi;

Jika $r_2 = 0,42$ $K_2 = \frac{0,42}{0,0075} = \frac{4200}{75} = 56$ maka $\frac{r_2}{K_2} = 0,0075$, Jika

$\alpha_{21} = \frac{0,0045}{0,0075} = \frac{45}{75} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 0,6$ maka $\frac{r_2 \alpha_{21}}{K_2} = 0,0045$.

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGANTAR	ii
HALAMAN PERSETUJUAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
KATA PENGANTAR	v
ABSTRAK	vii
DAFTAR ISI	viii
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Tujuan Pembahasan	2
1.4 Batasan Masalah	3
1.5 Manfaat Penulisan.....	3
1.6 Metode Pembahasan.....	3
1.7 Sistematika Pembahasan	4
BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Kajian Tentang Nutrisi.....	5
2.1.1 Pengertian Nutrisi	5
2.1.2 Pengaruh Nutrisi Terhadap Faktor Pertahanan Tubuh	8
2.2 Kajian Tentang Air.....	9
2.2.1 Pengertian Air	9
2.2.2 Keseimbangan Air	10
2.3 Persamaan Diferensial.....	10
2.4 Selesaian Persamaan Diferensial Biasa.....	13
2.5 Masalah Nilai Awal.....	14
2.6 Persamaan Diferensial Orde Satu.....	15
2.7 Aplikasi atau Penerapan Persamaan Diferensial.....	17
2.8 Model Matematika	17
BAB III PEMBAHASAN	
3.1 Model Perubahan Jumlah Air dan Nutrisi Pada Makhluk Hidup ..	19
3.2 Zero Isoclines (Keseimbangan)	20
3.3 Nilai Eigen (<i>Eigen Values</i>)	26
BAB IV PENUTUP	
4.1 Kesimpulan	30
4.2 Saran	31
DAFTAR PUSTAKA	32
LAMPIRAN	33

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Nutrisi adalah proses pengambilan zat-zat makanan penting (Nancy Nuwer Kontantinides), dalam pengertian yang lain nutrisi adalah jumlah dari seluruh interaksi antara organisme dan makanan yang dikonsumsinya (Cristian dan Gregar: 1985), dalam pengertian yang lain pula nutrisi adalah apa yang manusia makan dan bagaimana tubuh menggunakannya.

Masyarakat memperoleh makanan atau nutrisi esensial untuk pertumbuhan dan pertahanan dari seluruh jaringan tubuh dan menormalkan fungsi dari semua proses tubuh. Nutrisi adalah zat kimia organik dan anorganik yang ditemukan dalam makanan dan diperoleh untuk penggunaan fungsi tubuh. Jenis-jenis nutrisi di antaranya karbohidrat, lemak, protein, vitamin, mineral dan air.

Matematika merupakan alat untuk menyederhanakan penyajian dan pemahaman masalah. dengan menggunakan bahasa matematika suatu permasalahan dapat menjadi lebih sederhana untuk disajikan, dipahami, dianalisis dan dipecahkan. Salah satu cabang dari ilmu matematika yang populer adalah persamaan diferensial.

Semua yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitung-hitungannya, ada rumusnya atau ada persamaannya (Abdussakir, 2007: 80). Pada dasarnya manusia tidak bisa membuat rumus sedikitpun mereka hanya menemukan rumus atau persamaan. Penulis akan mengambil salah satu persamaan diferensial yang berkaitan dengan nutrisi yang salah satu persamaan itu adalah:

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1} - \alpha_{12} \frac{N_2}{K_1}\right)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2}{K_2} - \alpha_{21} \frac{N_1}{K_2}\right)$$

Variabel dan parameter di atas saling berkaitan atau saling berhubungan. Baik r , N , K , t , maupun α . Berdasarkan dari latar belakang di atas penulis mempunyai gagasan dalam penulisan skripsi yang berjudul **”Model Perubahan Jumlah Air dan Nutrisi Pada Makhluk Hidup Dengan Menggunakan Persamaan Diferensial”**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas terdapat beberapa masalah yang akan dibahas, meliputi:

1. Bagaimanakah model perubahan jumlah air dan nutrisi pada makhluk hidup dengan menggunakan persamaan diferensial?
2. Bagaimanakah kesetimbangan dan nilai eigen (*eigen values*) dari model perubahan jumlah air dan nutrisi pada makhluk hidup tersebut?

1.3 Tujuan Pembahasan

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan dari pembahasan ini adalah:

1. Mengetahui model perubahan jumlah air dan nutrisi pada makhluk hidup dengan menggunakan persamaan diferensial.
2. Mengetahui kesetimbangan dan nilai eigen (*eigen values*) dari model perubahan jumlah air dan nutrisi pada makhluk hidup tersebut.

1.4 Batasan Masalah

Berdasarkan tujuan masalah di atas, maka penulis perlu membatasi pada penulisan skripsi ini, yaitu penulis mengkaji lebih dalam tentang persamaan diferensial yang berkaitan dengan nutrisi dan air yang hanya mencakup dua persamaan. Dimana variabel-variabel dan parameternya yaitu N_1 untuk jumlah air pada saat t , N_2 untuk jumlah nutrisi pada saat t , t adalah waktu, r_1 adalah laju peningkatan air, r_2 adalah laju peningkatan nutrisi, α_{21} adalah proporsional ukuran air dan nutrisi, α_{12} adalah proporsional ukuran nutrisi dan air, K_1 adalah Carrying Capacity atau kapasitas untuk air, dan K_2 adalah Carrying Capacity atau kapasitas untuk nutrisi. Semua parameter diatas ditetapkan.

1.5 Manfaat Penulisan

1. Bagi Penulis

Merupakan sarana untuk memperdalam pengetahuan dan belajar dalam mengkaji permasalahan matematika yang berkaitan dengan ilmu yang lain.

2. Bagi Pembaca

Sebagai wacana dan menambah pengetahuan tentang persamaan diferensial pada salah satu bidang khususnya nutrisi.

1.6 Metode Pembahasan

Dalam penulisan skripsi ini penulis menggunakan metode kajian pustaka, yaitu mengkaji model perubahan jumlah air dan nutrisi pada makhluk hidup dengan menggunakan buku-buku yang meliputi tentang persamaan diferensial, air dan nutrisi.

1.7 Sistematika Pembahasan

Dalam penulisan skripsi ini terdiri dari empat bab, adapun sistematikanya adalah sebagai berikut:

Bab pertama, berisi tentang pendahuluan yang terdiri dari latar belakang, rumusan masalah, tujuan pembahasan, batasan masalah, manfaat pembahasan, metode pembahasan, dan sistematika pembahasan.

Bab kedua, berisi kajian tentang nutrisi, kajian tentang air, persamaan diferensial, penyelesaian persamaan diferensial, masalah nilai awal, persamaan diferensial orde satu, aplikasi atau penerapan persamaan diferensial, dan model matematika.

Bab ketiga, berisi tentang model perubahan jumlah air dan nutrisi pada makhluk hidup, zero isoclines, dan nilai eigen (*eigen values*).

Bab keempat, berisi tentang penutup yang terdiri dari kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Kajian Tentang Nutrisi

2.1.1 Pengertian Nutrisi

Nutrisi adalah substansi organik yang dibutuhkan organisme untuk fungsi normal dari sistem tubuh, pertumbuhan dan pemeliharaan kesehatan. Nutrisi didapatkan dari makanan dan cairan yang selanjutnya diasimilasi oleh tubuh. Penelitian dibidang nutrisi mempelajari hubungan antara makanan dan minuman terhadap kesehatan dan penyakit, khususnya dalam menentukan diet yang optimal. Pada masa lalu, penelitian mengenai nutrisi hanya terbatas pada pencegahan penyakit kurang gizi dan menentukan kebutuhan standar kebutuhan dasar nutrisi pada makhluk hidup. Angka kebutuhan nutrisi (zat gizi) dasar ini dikenal di dunia internasional dengan istilah Recommended Daily Allowance (RDA). Seiring dengan perkembangan ilmiah dibidang medis dan biologi molekuler, bukti-bukti menunjukkan bahwa RDA belum mencukupi untuk menjaga fungsi optimal tubuh dan mencegah atau membantu penanganan penyakit kronis. Bukti-bukti medis menunjukkan bahwa akar dari penyakit kronis adalah stres oksidatif yang disebabkan oleh kelebihan radikal bebas didalam tubuh. penggunaan nutrisi dalam level yang optimal, dikenal dengan *Optimal Daily Allowance (ODA)*, terbukti dapat mencegah dan menangani stress oksidatif sehingga dapat membantu pencegahan penyakit kronis. Level optimal ini dapat dicapai bila jumlah dan komposisi nutrisi yang digunakan tepat. Dalam penanganan penyakit, penggunaan nutrisi sebagai pengobatan komplementer dapat membantu efektifitas dari pengobatan dan pada saat yang bersamaan mengatasi efek samping dari

pengobatan. Karena itu, nutrisi / gizi sangat erat kaitannya dengan kesehatan yang optimal dan peningkatan kualitas hidup. Hasil ukur bisa dilakukan dengan metode antropometri. (Wikipedia Indonesia, 2008)

Jenis-jenis Nutrisi:

1. Karbohidrat

Karbohidrat adalah komposisi yang terdiri dari elemen karbon, hidrogen dan oksigen.

Karbohidrat dibagi atas :

- Karbohidrat sederhana (gula); bisa berupa monosakarida (molekul tunggal yang terdiri dari glukosa, fruktosa, dan galaktosa). Juga bisa berupa disakarida (molekul ganda), contoh sukrosa (glukosa + fruktosa), maltosa (glukosa + glukosa), laktosa (glukosa + galaktosa)
- Karbohidrat kompleks (amilum) adalah polisakarida karena disusun banyak molekul glukosa.
- Serat adalah jenis karbohidrat yang diperoleh dari tumbuh-tumbuhan, tidak dapat dicerna oleh tubuh dengan sedikit atau tidak menghasilkan kalori tetapi dapat meningkatkan volume feces.

2. Lemak

Lemak merupakan sumber energi yang dipadatkan. Lemak dan minyak terdiri atas gabungan gliserol dengan asam-asam lemak.

Fungsi lemak :

- Sebagai sumber energi yang dipadatkan dengan memberikan 9 kal/gr
- Ikut serta membangun jaringan tubuh.
- Perlindungan

- Penyekatan/isolasi, lemak akan mencegah kehilangan panas dari tubuh.
- Perasaan kenyang, lemak dapat menunda waktu pengosongan lambung dan mencegah timbul rasa lapar kembali segera setelah makan.
- Vitamin larut dalam lemak.

3. Protein

Protein merupakan konstituen penting pada semua sel, jenis nutrisi ini berupa struktur nutrisi kompleks yang terdiri dari asam-asam amino. Protein akan dihidrolisis oleh enzim-enzim proteolitik. Untuk melepaskan asam-asam amino yang kemudian akan diserap oleh usus.

Fungsi protein :

- Protein menggantikan protein yang hilang selama proses metabolisme yang normal dan proses pengausan yang normal.
- Protein menghasilkan jaringan baru.
- Protein diperlukan dalam pembuangan protein-protein yang baru dengan fungsi khusus dalam tubuh yaitu, enzim, hormon dan hemoglobin.
- Protein sebagai sumber energi.

4. Vitamin

Vitamin adalah bahan organik yang tidak dapat dibentuk oleh tubuh dan berfungsi sebagai katalisator proses metabolisme tubuh.

Ada 2 jenis vitamin :

- Vitamin larut lemak yaitu vitamin A, D, E, K.
- Vitamin larut air yaitu vitamin B dan C (tidak disimpan dalam tubuh jadi harus ada didalam diet setiap harinya).

5. Mineral dan Air

Mineral merupakan unsur esensial bagi fungsi normal sebagian enzim, dan sangat penting dalam pengendalian system cairan tubuh. Mineral merupakan konstituen esensial pada jaringan lunak, cairan dan rangka. Rangka mengandung sebagian besar mineral. Tubuh tidak dapat mensintesis sehingga harus disediakan lewat makanan.

Dua fungsi mineral :

1. Konstituen tulang dan gigi; contoh: calcium, magnesium, fosfor.
2. Pembentukan garam-garam yang larut dan mengendalikan komposisi cairan tubuh; contoh: Na, Cl (ekstraseluler), K, Mg, P (intraseluler).

Di sini penulis mengasumsikan atau mengambil sebuah variabel yang berkaitan dengan nutrisi termasuk di dalamnya adalah yang berhubungan dengan air dan nutrisi. Variabel yang penulis ambil di antaranya adalah N_1 jumlah air saat t , N_2 jumlah nutrisi saat t , t tingkat pertumbuhan, r_1 untuk pertumbuhan spesies 1, r_2 untuk pertumbuhan spesies 2, α_{21} untuk besaran ukuran air dan nutrisi, α_{12} untuk besaran ukuran air dan nutrisi.

2.1.2 Pengaruh Nutrisi Terhadap Faktor Pertahanan Tubuh

Kesanggupan tubuh untuk menghasilkan respons demam tergantung pada ketersediaan energi yang dibutuhkan untuk meningkatkan metabolisme seluler dan mekanisme yang dibutuhkan untuk menurunkan kehilangan panas. Kedua faktor akan terganggu oleh malnutrisi umum tersebut. Kelaparan menyebabkan pengurangan massa tubuh, yang akan terjadi tanpa banyak mengurangi luas permukaan tubuh. Hal ini menyebabkan lebih sukar untuk mengurangi kehilangan panas secara langsung melalui kulit. Gangguan kehilangan panas yang sama

menyebabkan problem walaupun pasien yang lapar tidak panas. Seperti yang digambarkan selama penyekapan yang lama dikampung Yahudi di Waesaw oleh Nazi; vitkim yang lapar terus mengeluh karena merasa dingin dan memakai pakaian berat dan tebal pada waktu musim panas maupun musim dingin (Winick, 1979). Pada yang tidak ada kekurangan dan kelaparan, penghambatan demam oleh faktor nutrisi terjadi sangat sering pada bayi yang sangat muda dan prematur, pada yang sudah tua, dan pada pasien yang sangat lemah karena penyakit yang melemahkan. (Maria C Linter Phd, 1992:701).

2.2 Kajian Tentang Air

2.2.1 Pengertian Air

Air merupakan suatu kebutuhan yang tak dapat ditinggalkan untuk kehidupan manusia, karena air diperlukan untuk bermacam-macam kegiatan seperti minum, pertanian, industri, perikanan dan rekreasi. Air meliputi 70% dari permukaan bumi, tetapi dibanyak negara persediaan air terdapat dalam jumlah yang terbatas. Bukan hanya jumlahnya yang penting, tetapi juga mutu air diperlukan untuk penggunaan tertentu, seperti air yang cocok untuk kegunaan industri atau untuk diminum. Oleh karena itu penanganan air tertentu biasanya diperlukan untuk persediaan air yang didapat dari sumber dibawah tanah atau sumber-sumber di permukaan. (K.A. Buckle and R.A. Edwards, 1985:193).

Air juga penting untuk kehidupan. Semua organisme hidup mengandung air; tubuh manusia mengandung air kira-kira sebanyak 60%. Tubuh laki-laki dewasa mengandung air kira-kira 40 liter. Kurang lebih sebanyak 15 liter terdapat dalam cairan ekstraseluler atau diluar sel (dalam plasma darah 3 liter dan dalam cairan jaringan 12 liter). Tinggal yang 25 liter menyusun cairan intraseluler atau

cairan dalam sel yaitu cairan yang ditemukan dalam sel-sel.(P.M. Gnulam and K.B. Sherrington, 1981:142)

2.2.2 Keseimbangan Air

Selama beberapa minggu tanpa makanan memungkinkan tubuh tetap dapat hidup. Akan tetapi tanpa air, tubuh hanya dapat bertahan hidup selama beberapa hari saja. Tubuh yang berfungsi normal, akan mengalami kehilangan air yang terus-menerus. Air tidak dapat disimpan didalam tubuh dan oleh karena itu perlu asupan yang teratur. Air dibawah kedalam tubuh melalui makanan dan minuman. Banyak makanan yang mengandung air dengan persentase yang tinggi. Beberapa makanan yang karena struktur selnya nampak agak padat ternyata mengandung sejumlah besar air, sebagai contoh sayuran dan buah-buahan.(P.M. Gnulam and K.B. Sherrington, 1981: 143)

2.3 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial banyak muncul sebagai persamaan yang sangat penting dalam matematika terapan, karena banyak hukum dan hubungan fisis secara matematis muncul dalam bentuk persamaan ini. Sebagai contoh dalam fisika, persamaan diferensial dari hukum Newton II timbul karena gejala alam, yang menerangkan bahwa massa kali percepatan dari suatu benda sama dengan gaya luar yang bekerja pada benda tersebut. Jika kita asumsikan bahwa benda bermassa m yang bergerak sepanjang sumbu y dari sistem koordinat kartesius, maka ekspresi matematika dari hukum Newton II matematika adalah persamaan

$$\text{diferensial } m \frac{d^2 y}{dt^2} = F$$

dimana f melambangkan gaya luar yang bekerja pada bendanya. Persamaan ini dinamakan sebagai persamaan diferensial karena memuat turunan dari fungsi yang tak diketahui $y(t)$. Secara umum kita definisikan persamaan diferensial sebagai berikut:

Definisi 2.3.1

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang memuat satu atau lebih turunan dari suatu fungsi yang tak diketahui.

Contoh: Berikut ini adalah beberapa contoh dari persamaan diferensial

$$b. \frac{dy}{dx} + 2y = 2x^3$$

$$c. \frac{d^2y}{dx^2} = -k^2y + 2x$$

$$d. \frac{d^4y}{dx^4} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \sin y = 0$$

$$e. \cos\left(\frac{dy}{dx}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = 1$$

$$f. \phi_{xx} + \phi_{yy} - \phi_x = e^y + y \cos x$$

persamaan diferensial a hingga d dinamakan persamaan diferensial biasa karena fungsi yang tak diketahui $y(x)$ bergantung hanya pada satu peubah x . Pada e fungsi yang tak diketahui $\phi(x,y)$ bergantung lebih dari satu peubah, oleh karena itu persamaan tersebut memuat turunan parsial.

Definisi 2.3.2

Jenis turunan tertinggi yang terjadi dalam persamaan diferensial dinamakan orde dari persamaan diferensial.

Pada contoh-contoh yang lalu, a mempunyai orde satu, b mempunyai orde dua, c mempunyai orde empat dan d mempunyai orde satu.

Suatu persamaan diferensial yang berorde n dapat ditulis dalam bentuk

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.3.2.1)$$

Dimana $y^{(n)}$ melambangkan turunan ke n dari y terhadap x (bukan y berpangkat n).

Penulisan ini merupakan kasus khusus dari (2.3.2.1) apabila F suatu fungsi linier dari $y, y', \dots, y^{(n)}$. bentuk standart suatu persamaan diferensial diberikan pada definisi berikut ini:

Definisi 2.3.3

Persamaan diferensial yang dapat ditulis dalam bentuk

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = F(x)$$

Dimana a_0, a_1, \dots, a_n dan F fungsi-fungsi dari x saja, dinamakan **persamaan diferensial linier orde n**. Persamaan tersebut linier dalam $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$

Suatu persamaan diferensial yang tidak memenuhi definisi tersebut dikatakan persamaan diferensial **non linier**.

Contoh:

$$y + 2x y + (\cos x) y = xe \text{ dan } xy + 5x + y' - = 0$$

masing-masing adalah persamaan persamaan diferensial linier orde 2 dan orde 3, padahal persamaan diferensial-persamaan diferensial

$$y + x \cos y' - xy = x \text{ dan } y'' - 4x y' = 0$$

bukan linier.

Contoh:

Secara umum persamaan diferensial orde satu dan dua masing-masing berbentuk

$$a_0(x) \frac{dy}{dx} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_2(x)y = F(x)$$

dan

$$a_0(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_2(x)y = F(x)$$

2.4 Selesaian Persamaan Diferensial Biasa

Sebelum kita bahas teknik selesaian persamaan diferensial biasa, kita definisikan terlebih dahulu apakah selesaian dari suatu persamaan diferensial itu.

Definisi 2.4.1

Selesaian dari persamaan diferensial orde n pada suatu interval I adalah suatu fungsi $y = y(x)$ yang paling sedikit memiliki n kali turunan pada I dan memenuhi persamaan diferensial yang diberikan untuk semua x di I

Contoh:

Tunjukkan bahwa $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$, dimana c_1, c_2 konstanta, adalah selesaian dari persamaan diferensial linier $y'' + y = 0$ untuk x pada interval $(-\infty, \infty)$

Selesaian

Karena persamaan diferensial tersebut linier orde dua maka turunan pertama dan kedua dari fungsi $y(x)$ ada untuk semua x real. Oleh karena itu,

$$y' = c_1 \cos x - c_2 \sin x$$

dan

$$y'' = -(c_1 \sin x + c_2 \cos x)$$

konsekuensi $y'' = -y$, jadi $y'' + y = 0$. berdasarkan definisi 2.4.1 fungsi y tersebut merupakan selesaian persamaan diferensial $y'' + y = 0$ pada $(-\infty, \infty)$.

Pada contoh tersebut x diasumsikan berlaku untuk semua yang bernilai real. Akan tetapi, tidak semuanya demikian, variabel bebasnya akan dibatasi daerahnya. Sebagai contoh, persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}(y-1)$$

akan tidak terdefinisi apabila $x < 0$, dan juga selesaiannya terdefinisi hanya untuk $x > 0$. kenyataannya persamaan diferensial ini mempunyai penyelesaian

$$y = ce^{\sqrt{x}} + 1, \quad x > 0,$$

dimana c adalah suatu konstanta. (anda dapat memeriksa hal ini dengan "memasukkan langsung" ke persamaan diferensial yang diberikan).

Ada dua macam bentuk ekspresi dari selesaian persamaan diferensial, yaitu eksplisit dan implisit. Sebagaimana dalam contoh di atas, kita mudah memperoleh selesaian dari persamaan diferensial dalam bentuk **eksplisit**.

$$y = \phi(x)$$

untuk suatu fungsi ϕ tetapi, kadang-kadang kita memperoleh selesaian dalam bentuk implisit yaitu,

$$\phi(x, y) = 0$$

dimana fungsi ϕ mendefinisikan selesaian persamaan diferensialnya, $y(x)$ secara implisit sebagai fungsi dari x .

2.5 Masalah Nilai Awal

Keunikan khusus dari beberapa situasi fisis dapat dimodelkan sebagai persamaan diferensial. Kita harus secara spesifik memodelkan karakteristik dari

masalah yang akan dimodelkan. Sebagai contoh gerak dari suatu benda bermassa m yang bergerak sepanjang sumbu y dari sumbu koordinat cartesius, maka ekspresi matematika dari hukum Newton II adalah persamaan diferensial $F = mg$, dengan g melambangkan percepatan gravitasi. Jika kita misalkan $y(t)$ melambangkan posisi benda disaat t dan gerak kebawah sepanjang sumbu y bernilai positif, maka berdasarkan hukum Newton II, gerak benda ditentukan dengan persamaan diferensial

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = mg,$$

jadi

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = g$$

selesaian umum dari persamaan ini adalah

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + c_1t + c_2$$

2.6 Persamaan Diferensial Orde Satu

2.6.1 Masalah Nilai Awal dan Interpretasi Geometri

Perhatikan persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{2.6.1.1}$$

dimana $f(x,y)$ suatu fungsi yang diberikan. Secara analitis untuk menentukan selesaian 3.4.1 kadang-kadang tidak mudah. Pada pembahasan ini akan dipelajari teknik khusus yang akan memudahkan kita untuk menyelesaikan 2.6.1.1 apabila f mempunyai bentuk-bentuk tertentu. Idanya adalah menulis kembali 2.6.1.1 dalam bentuk terintegralkan

$$\frac{d}{dx}[g(x, y) - F(x)] = 0$$

untuk suatu fungsi g dan F yang sesuai. Apabila bentuk tersebut dapat diperoleh, maka langkah selanjutnya adalah mengintegrasikan terhadap x sehingga dapat diperoleh penyelesaian umum yang berkaitan dengan persamaan diferensial tersebut, yaitu:

$$g(x, y) = F(x) + c$$

Contoh: perhatikan persamaan diferensial

$$x \frac{dy}{dx} + y = 2x \quad x > 0$$

dengan menggunakan hukum perkalian dari turunan ruas kiri dari persamaan diferensial tersebut merupakan ekspansi dari $(d/dx)(xy)$, jadi persamaan diferensial itu dapat ditulis dengan

$$\frac{d}{dx}(xy) - 2x = 0$$

selanjutnya dapat ditulis dalam bentuk,

$$\frac{d}{dx}(xy - x^2) = 0$$

dengan mengintegrasikan terhadap x , diperoleh penyelesaian umum yang berbentuk

$$xy - x^2 = c,$$

jadi,

$$y = x^{-1}(c + x^2)$$

umumnya persamaan (3.4.1) ditulis dalam bentuk ''turunan'' dengan

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (2.6.1.2)$$

persamaan 2.6.1.1 selalu dapat ditulis dalam bentuk (2.6.1.2) walaupun tidak tunggal. Sebaliknya persamaan (2.6.1.2) dapat ditulis secara tunggal dalam bentuk (2.6.1.1), karena dari (2.6.1.2) dapat diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

2.7 Aplikasi atau Penerapan Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial seringkali muncul dalam model matematika yang mencoba menggambarkan keadaan kehidupan nyata. Banyak hukum-hukum alam dan hipotesa-hipotesa dapat diterjemahkan kedalam persamaan yang mengandung turunan melalui bahasa matematik. Sebagai contoh, turunan-turunan dalam fisika muncul sebagai kecepatan dan percepatan, dalam geometri sebagai kemiringan (tanjakan), dalam biologi sebagai laju, penambahan populasi, dalam psikologi sebagai laju belajar, dalam kimia sebagai laju reduksi, dalam ekonomi sebagai laju perubahan biaya hidup, dan dalam keuangan sebagai laju pertumbuhan investasi.

2.8 Model Matematika

Banyak masalah lain diluar matematika dapat diselesaikan dengan menggunakan matematika. Kebanyakan kejadian, fenomena atau pengetahuan manusia dinyatakan dalam besaran kuantitatif, disimbolkan melalui kosakata matematika. Bentuk pengetahuan dengan simbol matematika tentunya lebih mudah diselesaikan dengan sistem penyelesaian matematika pula, sehingga diperlukan pembuatan model matematika dari kejadian atau fenomena yang terjadi. Model yang diharapkan menghasilkan solusi masalah.

Model adalah suatu konsep atau obyek yang digunakan untuk menggambarkan suatu kenyataan untuk mendapatkan suatu bentuk yang dapat

dipahami (Meyer, 1981: 2), sedangkan pemodelan matematika adalah suatu proses yang menjalani tiga tahap, yaitu: perumusan model matematika, penyelesaian dan analisis model matematika dan penginterpretasian hasil ke situasi nyata (R.J. Pamuntjak Santoso, 1990: 2)



BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Model Perubahan Jumlah Air dan Nutrisi Pada Makhluk Hidup

Dalam pembentukan model ini kita misalkan dua spesies untuk N_1 jumlah air saat t dan N_2 jumlah nutrisi saat t . Diberikan system persamaan diferensial yaitu :

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1} - \alpha_{12} \frac{N_2}{K_1}\right) \\ \frac{dN_2}{dt} &= r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2}{K_2} - \alpha_{21} \frac{N_1}{K_2}\right)\end{aligned}\tag{3.1.1}$$

Keterangan:

$N_1(t)$ = Jumlah Air Pada Saat t .

$N_2(t)$ = Jumlah Nutrisi Pada Saat t .

t = Waktu

r_1 = Laju Peningkatan Pada Air

r_2 = Laju Peningkatan Pada Nutrisi

α_{21} = Proporsional Ukuran Air dan Nutrisi

α_{12} = Proporsional ukuran Nutrisi dan Air

K_1 = Carrying Capacity atau Kapasitas untuk air

K_2 = Carrying Capacity atau Kapasitas untuk Nutrisi

di asumsikan k_1 , k_2 , r_1 dan r_2 adalah positif maka penjumlahan air dan nutrisi akan saling mempengaruhi. Pada persamaan pertama jika $N_2 = 0$ maka persamaan pertama menjadi:

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1}\right)$$

3.2 Zero Isoclines (Keseimbangan)

Jika pada persamaan/equilibrium pertama dititik nol untuk air maka:

$$r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1} - \alpha_{12} \frac{N_2}{K_1}\right) = 0$$

solusi jika $N_1 = 0$, maka : $N_2 = \left(\frac{K_1}{\alpha_{12}} - \frac{1}{\alpha_{12}} N_1\right)$

untuk nutrisi

$$r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2}{K_2} - \alpha_{21} \frac{N_1}{K_2}\right) = 0$$

solusi untuk $N_2 = 0$ adalah: $N_2 = K_2 - \alpha_{21} N_1$

dari sistem persamaan 3.1.1 Dengan nilai parameter

$$r_1 = 0,2, \quad \frac{r_1}{K_1} = 0,005, \quad K_1 = \frac{0,2}{0,005} = \frac{200}{5} = 40, \quad \frac{r_1 \alpha_{12}}{K_1} = 0,0075$$

$$\alpha_{12} = \frac{0,0075}{0,005} = \frac{7,5}{5} = \frac{75}{50} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$r_2 = 0,42$$

$$\frac{r_2}{K_2} = 0,0075$$

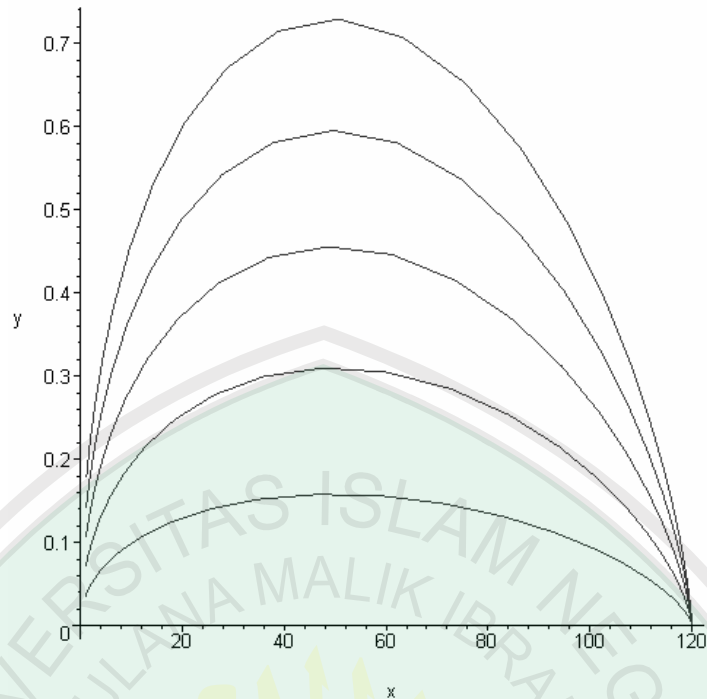
$$K_2 = \frac{0,42}{0,0075} = \frac{4200}{75} = 56$$

$$\frac{r_2}{K_2} \alpha_{21} = 0,0045$$

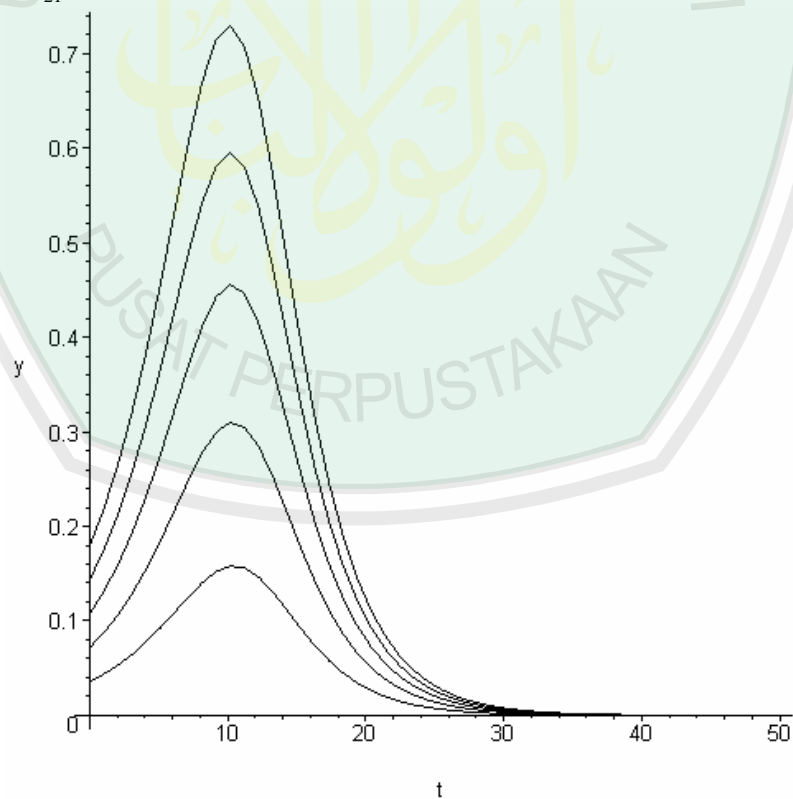
$$\alpha_{21} = \frac{0,0045}{0,0075} = \frac{45}{75} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 0,6$$

dengan menggunakan program yang ada dalam komputer yaitu program maple

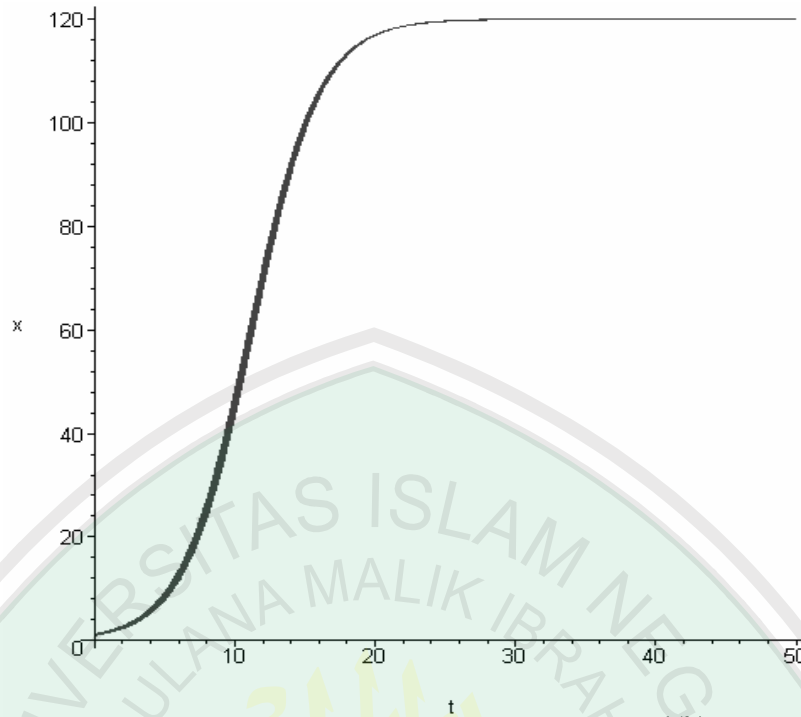
dapat digambarkan sebagai berikut:



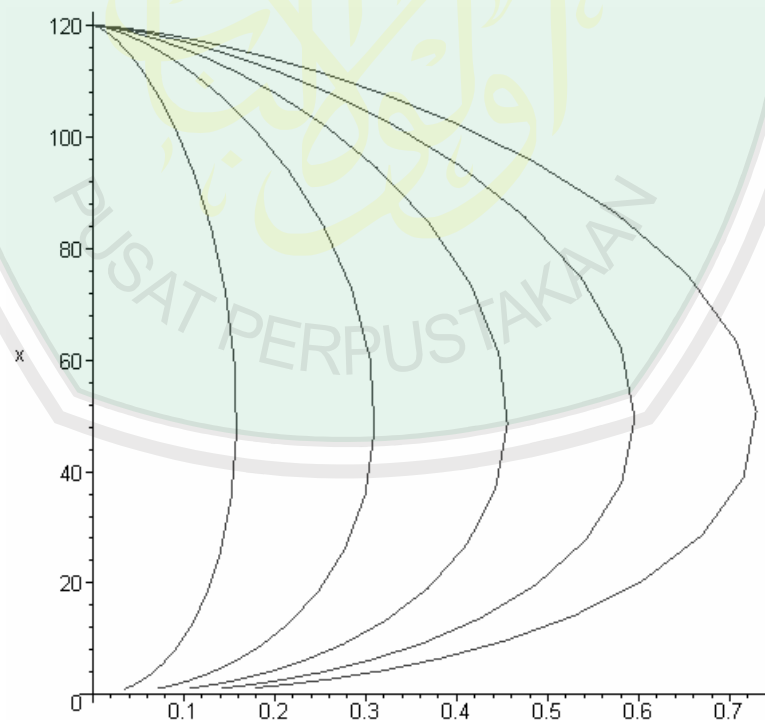
Gambar 1. Grafik $y(t)$ terhadap $x(t)$ dengan nilai awal $x(0)=e^{k/24}$ dan $y(0)=k/28$ di mana $k = 0, 1, 2, 3, 4$. $K_1 = 40$, $r_1 = 0,2$, $\alpha_{12} = 1,5$. $K_2 = 56$, $r_2 = 0,42$, $\alpha_{21} = 0,6$



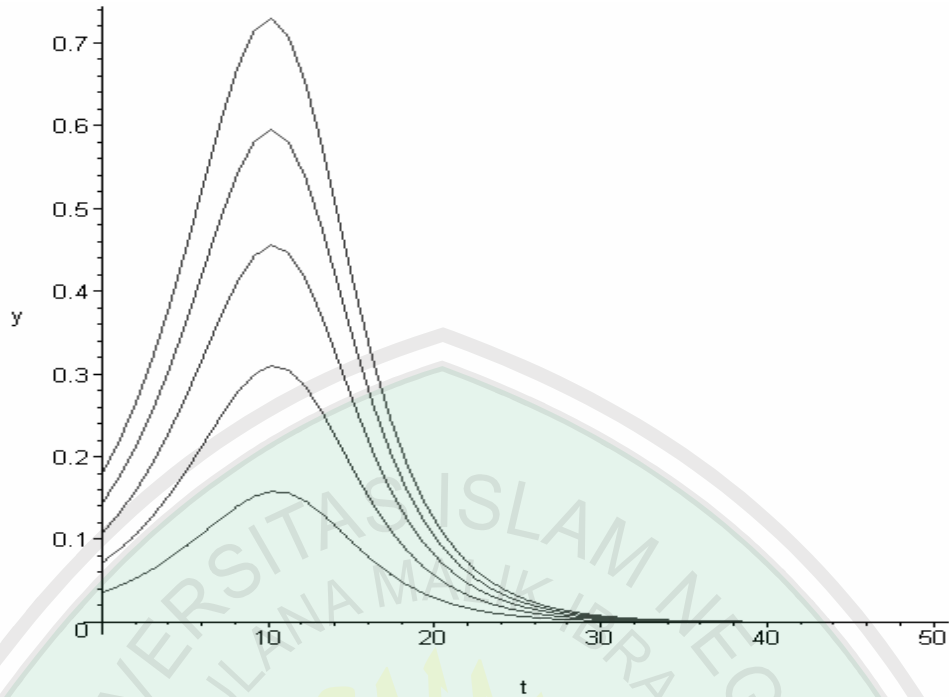
Gambar 2. Grafik $y(t)$ terhadap t dengan nilai awal $x(0)=e^{k/24}$ dan $y(0)=k/28$ di mana $k = 0, 1, 2, 3, 4$. $K_1 = 40$, $r_1 = 0,2$, $\alpha_{12} = 1,5$. $K_2 = 56$, $r_2 = 0,42$, $\alpha_{21} = 0,6$



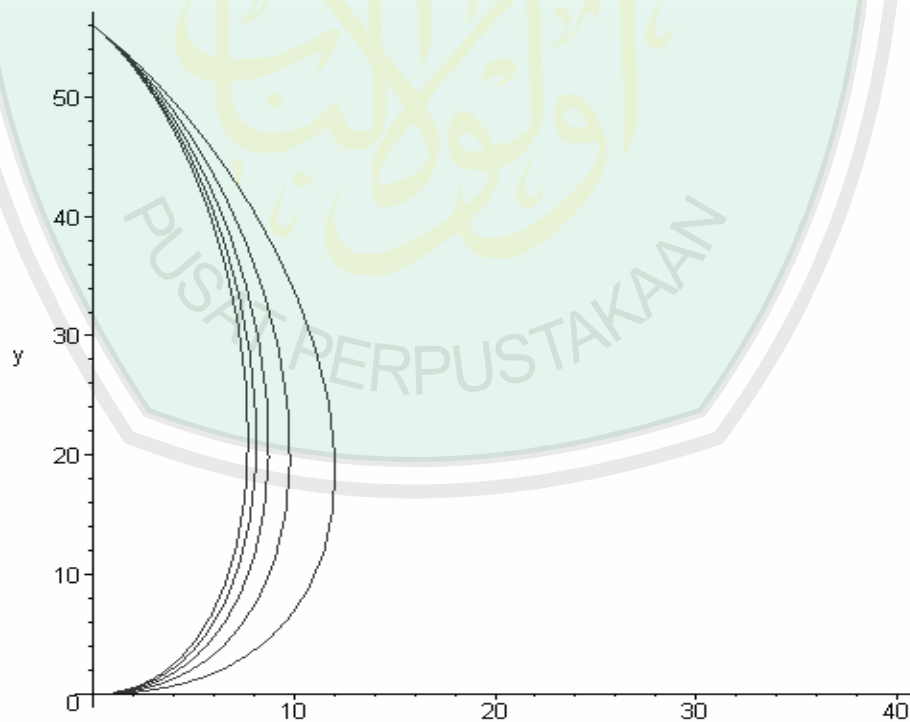
Gambar 3. Grafik $x(t)$ terhadap t dengan nilai awal $x(0)=e^{k/24}$ dan $y(0)=k/28$ di mana $k = 0, 1, 2, 3, 4$. $K_1 = 40$, $r_1 = 0,2$, $\alpha_{12} = 1,5$. $K_2 = 56$, $r_2 = 0,42$, $\alpha_{21} = 0,6$



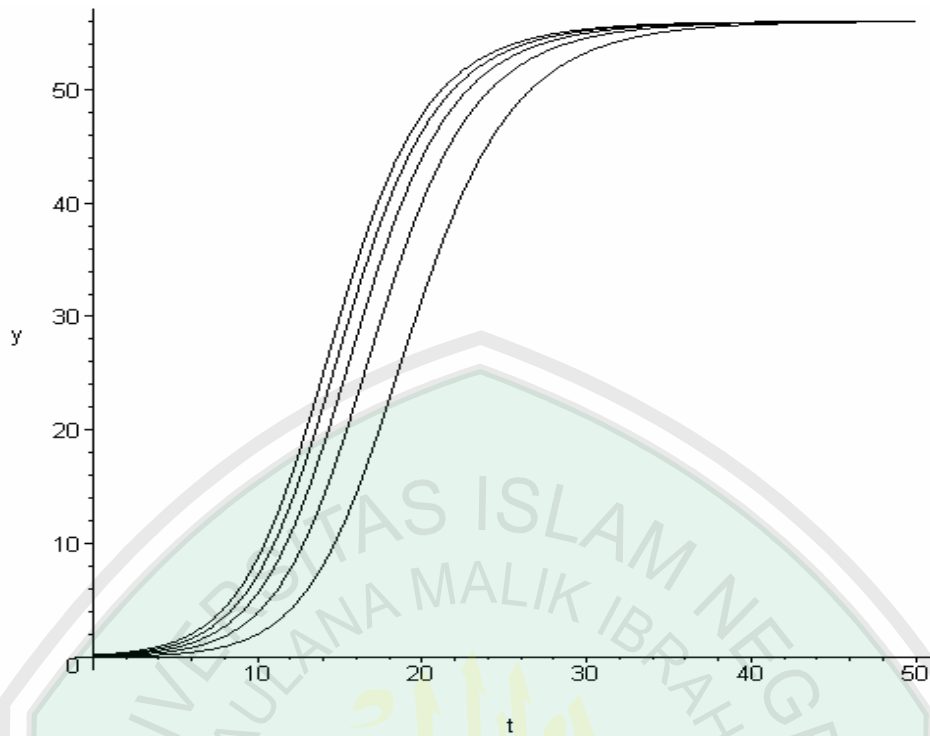
Gambar 4. Grafik $x(t)$ terhadap $y(t)$ dengan nilai awal $x(0)=e^{k/24}$ dan $y(0)=k/28$ di mana $k = 0, 1, 2, 3, 4$. $K_1 = 40$, $r_1 = 0,2$, $\alpha_{12} = 1,5$. $K_2 = 56$, $r_2 = 0,42$, $\alpha_{21} = 0,6$



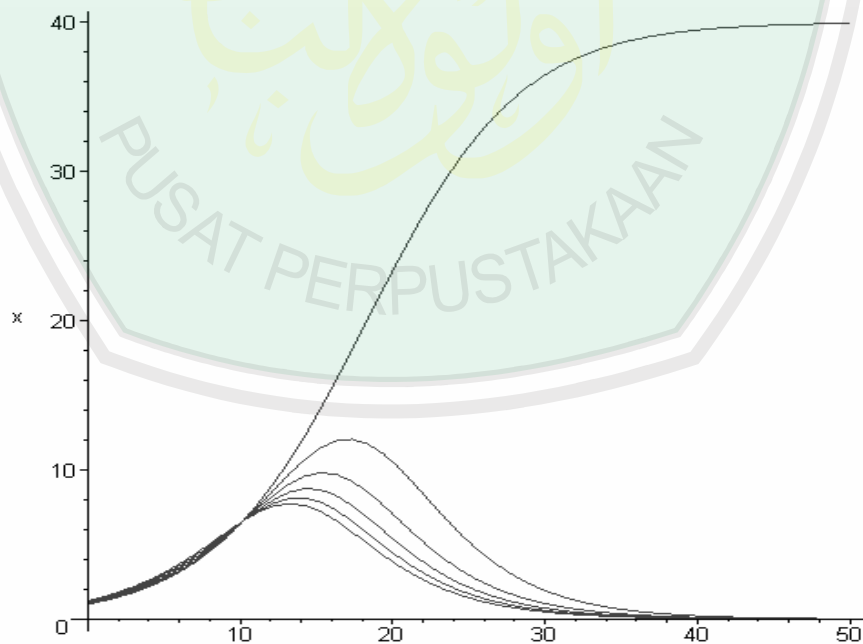
Gambar 5. Grafik $y(t)$ terhadap t dengan nilai awal $x(0)=e^{k/24}$ dan $y(0)=k/28$ di mana $k = 0, 1, 2, 3, 4$. $K_1 = 40$, $r_1 = 0,2$, $\alpha_{12} = 1,5$. $K_2 = 56$, $r_2 = 0,42$, $\alpha_{21} = 0,6$



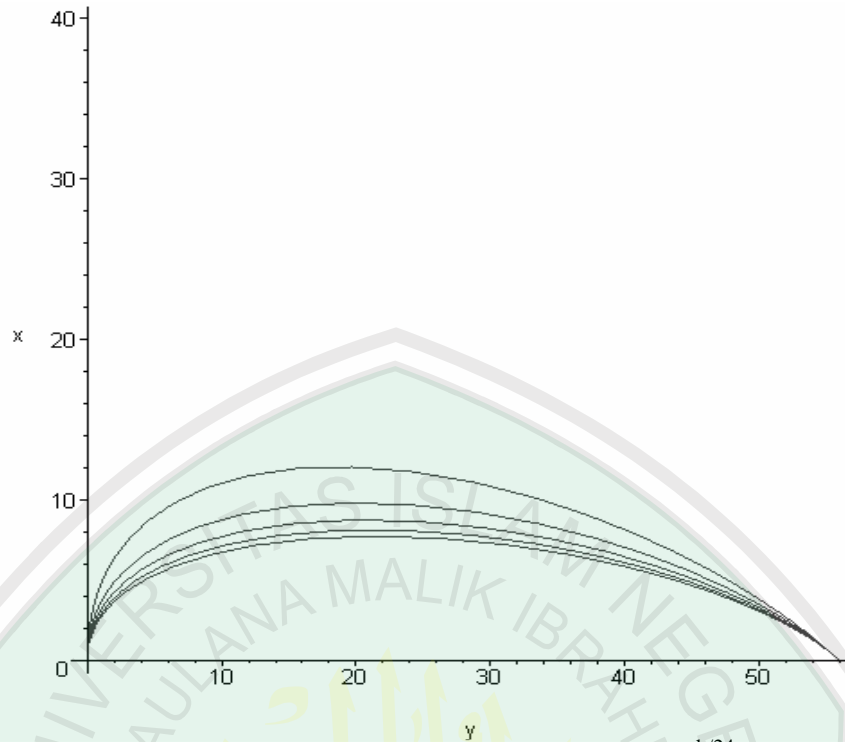
Gambar 6. Grafik $y(t)$ terhadap $x(t)$ dengan nilai awal $x(0)=e^{k/24}$ dan $y(0)=k/28$ di mana $k = 0, 1, 2, 3, 4$. $K_1 = 40$, $r_1 = 0,2$, $\alpha_{12} = 1,5$. $K_2 = 56$, $r_2 = 0,42$, $\alpha_{21} = 0,6$



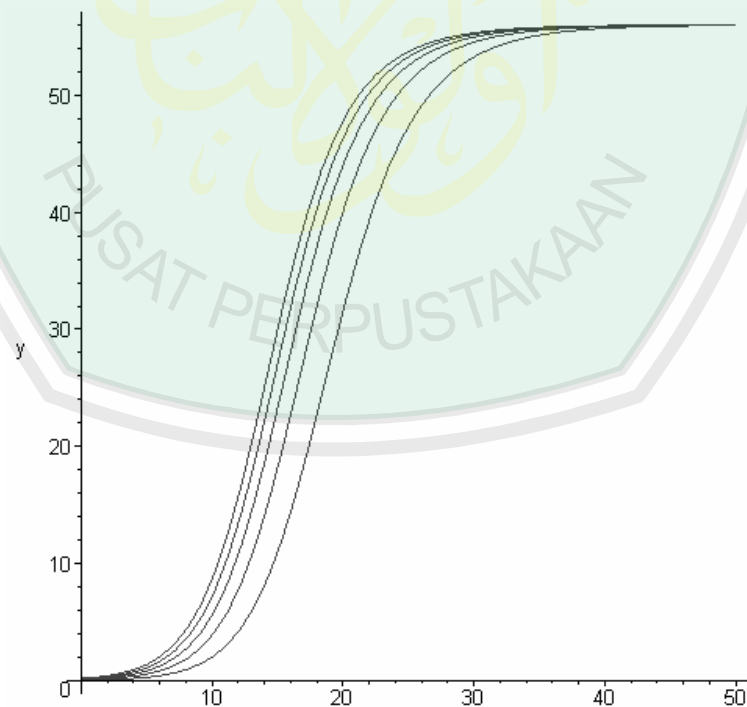
Gambar 7. Grafik $y(t)$ terhadap t dengan nilai awal $x(0)=e^{k/24}$ dan $y(0)=k/28$ di mana $k = 0, 1, 2, 3, 4$. $K_1 = 40$, $r_1 = 0,2$, $\alpha_{12} = 1,5$. $K_2 = 56$, $r_2 = 0,42$, $\alpha_{21} = 0,6$



Gambar 8. Grafik $x(t)$ terhadap t dengan nilai awal $x(0)=e^{k/24}$ dan $y(0)=k/28$ di mana $k = 0, 1, 2, 3, 4$. $K_1 = 40$, $r_1 = 0,2$, $\alpha_{12} = 1,5$. $K_2 = 56$, $r_2 = 0,42$, $\alpha_{21} = 0,6$



Gambar 9. Grafik $x(t)$ terhadap $y(t)$ dengan nilai awal $x(0)=e^{k/24}$ dan $y(0)=k/28$ di mana $k = 0, 1, 2, 3, 4$. $K_1 = 40$, $r_1 = 0,2$, $\alpha_{12} = 1,5$. $K_2 = 56$, $r_2 = 0,42$, $\alpha_{21} = 0,6$



Gambar 10. Grafik $y(t)$ terhadap t dengan nilai awal $x(0)=e^{k/24}$ dan $y(0)=k/28$ di mana $k = 0, 1, 2, 3, 4$. $K_1 = 40$, $r_1 = 0,2$, $\alpha_{12} = 1,5$. $K_2 = 56$, $r_2 = 0,42$, $\alpha_{21} = 0,6$

3.3 Nilai Eigen (*Eigen Values*)

Kita mengambil determinan yang pertama, maka diperoleh kesetimbangan

yang mungkin adalah: $\frac{dN_1}{dt} = 0$ dengan menghasilkan:

$$N_1 = 0 \text{ atau } N_1 + \alpha_{12}N_2 = K_1$$

$$\text{Untuk } \frac{dN_2}{dt} = 0 \text{ maka } N_2 = 0 \text{ atau } \alpha_{21}N_1 + N_2 = K_2$$

Dari uraian di atas maka dapat disimpulkan bahwa:

1. Keseimbangan $(N_1, N_2) = (0, 0)$ menghubungkan antara air dan nutrisi
2. Keseimbangan $(N_1, N_2) = (k_1, 0)$ menghubungkan antara air dan nutrisi pada kapasitas k_1
3. Keseimbangan $(N_1, N_2) = (0, k_2)$ menghubungkan antara air dan spesies pada kapasitas k_2
4. Keseimbangan dapat dipecahkan menjadi:

$$N_1 + \alpha_{12}N_2 = K_1$$

$$\alpha_{21}N_1 + N_2 = K_2$$

Analisis dari persamaan yang stabil tersebut dapat ditentukan dengan komputer menggunakan matrik jakobi. Pada persamaan (3.1.1) yaitu:

$$Df(N_1, N_2) = \begin{bmatrix} r_1 - 2\frac{r_1}{K_1}N_1 - \frac{r_1\alpha_{12}}{K_1}N_2 & -\frac{r_1\alpha_{12}}{K_1}N_1 \\ -\frac{r_2\alpha_{21}}{K_2}N_2 & r_2 - 2\frac{r_2}{K_2}N_2 - \frac{r_2\alpha_{21}}{K_2}N_1 \end{bmatrix}$$

Dapat kita lihat persamaan yang terpisah, dan dapat disimpulkan bahwa:

1. Hasil dari matriks jakobi untuk persamaan trivial yaitu $(N_1, N_2) = (0, 0)$ dengan hasil:

$$Df(0,0) = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}$$

di mana matriks diagonal, nilai eigennya adalah $\lambda_1 = r_1$ dan $\lambda_2 = r_2$

2. Hasil matriks jakobi pada persamaan $(N_1, N_2) = (K_1, 0)$, adalah dengan hasil:

$$Df(K_1, 0) = \begin{bmatrix} -r_1 & -r_1\alpha_{12} \\ 0 & r_2(1 - \alpha_{21}\frac{K_1}{K_2}) \end{bmatrix}$$

di mana matriks triangular dapat diketahui nilai eigennya dengan hasil :

$$\lambda_1 = -r_1 \text{ dan } \lambda_2 = r_2(1 - \alpha_{21}\frac{K_1}{K_2})$$

di mana $r_1 > 0$ dan $r_2 > 0$ dan $\lambda_1 < 0$, nilai eigennya adalah $\lambda_2 < 0$ di mana

$K_2 < \alpha_{21}$ menghasilkan persamaan:

$(K_1, 0)$ adalah locally stable jika $K_2 < \alpha_{21}K_1$

adalah unstable jika $K_2 > \alpha_{21}K_1$

3. Hasil dari matriks jakobi pada persamaan $(N_1, N_2) = (0, K_2)$ menghasilkan:

$$Df(0, K_2) = \begin{bmatrix} r_1(1 - \alpha_{12}\frac{K_2}{K_1}) & 0 \\ -r_2\alpha_{21} & -r_2 \end{bmatrix}$$

di mana $Df(0, K_2)$ matrik triangular, maka dapat kita ketahui hasil nilai

eigennya: menghasilkan persamaan: $\lambda_1 = r_1(1 - \alpha_{12}\frac{K_2}{K_1})$ dan $\lambda_2 = -r_2$

Jika: $r_2 > 0$ maka $\lambda_2 < 0$ dengan nilai eigen $\lambda_1 < 0$ dimana $K_1 < \alpha_{12}K_2$ dengan

nilai kesetimbangan:

$(0, K_2)$ adalah locally stable jika $K_1 < \alpha_{12}K_2$

adalah unstable jika $K_1 > \alpha_{12}K_2$

4. Pada empat persamaan menghasilkan:

$$N_1 + \alpha_{12} N_2 = K_1$$

$$\alpha_{21} N_1 + N_2 = K_2$$

Dengan menggunakan metode eliminasi menghasilkan:

$$N_1 + \alpha_{12} N_2 = K_1$$

$$(\alpha_{21} \alpha_{12} - 1) N_2 = \alpha_{21} K_1 - K_2$$

Di mana:

$$N_2 = \frac{\alpha_{21} K_1 - K_2}{\alpha_{21} \alpha_{12} - 1}$$

$$\text{dan } N_1 = K_1 - \alpha_{12} \frac{\alpha_{21} K_1 - K_2}{\alpha_{21} \alpha_{12} - 1} = \frac{\alpha_{12} K_2 - K_1}{\alpha_{21} \alpha_{12} - 1}$$

$$\text{Jika } N_1 \text{ dan } N_2 \text{ positif maka } \frac{\alpha_{21} K_1 - K_2}{\alpha_{21} \alpha_{12} - 1} > 0 \text{ dan } \frac{\alpha_{12} K_2 - K_1}{\alpha_{21} \alpha_{12} - 1} > 0 \quad (3.3.1)$$

Jika $\alpha_{21} \alpha_{12} > 1$, maka persamaan 3.3.1 dapat direduksi menjadi:

$$K_2 < \alpha_{21} K_1 \text{ dan } K_1 < \alpha_{12} K_2 \quad (3.3.2)$$

Jika $\alpha_{21} \alpha_{12} < 1$, maka persamaan 3.3.1 dapat direduksi menjadi:

$$K_2 > \alpha_{21} K_1 \text{ dan } K_1 > \alpha_{12} K_2 \quad (3.3.3)$$

Pada system persamaan diferensial 3.1.1 dengan nilai:

$$Z_1 = N_1 - N_1 \text{ dan } Z_2 = N_2 - N_2$$

Di mana (Z_1, Z_2) representasi untuk persamaan pertama, yang menghasilkan:

$$\frac{dZ_1}{dt} = \frac{dN_1}{dt} \text{ dan } \frac{dZ_2}{dt} = \frac{dN_2}{dt}$$

Dengan mensubstitusikan maka menghasilkan:

$$Z_1 + N_1 \text{ untuk } N_1 \text{ dan } Z_2 + N_2$$

$$\begin{aligned} \text{Menghasilkan: } \frac{dZ_1}{dt} &= r_1(Z_1 + N_1) \left(1 - \frac{Z_1 + N_1}{K_1} - \alpha_{12} \frac{Z_2 + N_2}{K_1}\right) \\ &= r_1(Z_2 + N_2) \left(1 - \frac{N_2}{K_2} - \alpha_{21} \frac{N_1}{K_2} - \frac{Z_2}{K_2} - \alpha_{21} \frac{Z_1}{K_2}\right) \end{aligned}$$

Analisis matrik jakobi pada system persamaan diferensial 3.1.1 di atas pada persamaan non trivial (N_1, N_2) kita meneliti pada system:

$$\begin{aligned} \frac{dZ_1}{dt} &= -\frac{r_1}{K_1} (Z_1 + N_1)(Z_1 + \alpha_{12}Z_2) \\ \frac{dZ_2}{dt} &= -\frac{r_2}{K_2} (Z_2 + N_2)(Z_2 + \alpha_{21}Z_1) \end{aligned}$$

Hasil dari matriks jakobi $J(Z_1, Z_2)$ dapat kita simpulkan:

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} -\frac{r_1}{K_1} N_1 & -\frac{r_1 \alpha_{12}}{K_1} N_1 \\ -\frac{r_2 \alpha_{21}}{K_2} N_2 & -\frac{r_2}{K_2} N_2 \end{bmatrix}$$

Hasil yang sekarang:

$$\text{tr}(J(0,0)) = -\frac{r_1 N_1}{K_1} - \frac{r_2 N_2}{K_2}$$

$$\det(J(0,0)) = \frac{r_1 r_2}{K_1 K_2} N_1 N_2 (1 - \alpha_{12} \alpha_{21})$$

untuk persamaan non trivial (N_1, N_2) , di mana $N_1 > 0$ dan $N_2 > 0$, maka

$\det(J(0,0)) > 0$ di mana $1 - \alpha_{12} \alpha_{21} > 0$

maka (N_1, N_2) unstable jika diperoleh persamaan 3.3.2 dan (N_1, N_2) stable

jika diperoleh persamaan 3.3.3

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan sebelumnya, dapat disimpulkan:

1. Model jumlah air dan nutrisi pada makhluk hidup dirumuskan sebagai berikut:

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1} - \alpha_{12} \frac{N_2}{K_1}\right)$$
$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2}{K_2} - \alpha_{21} \frac{N_1}{K_2}\right)$$

di mana $N_1(t)$ yang menunjukkan jumlah air pada saat t , $N_2(t)$ menunjukkan jumlah nutrisi pada saat t , r_1 menunjukkan laju peningkatan pada Air, r_2 menunjukkan laju peningkatan pada Nutrisi, t menunjukkan waktu, α_{21} menunjukkan proporsional ukuran air dan nutrisi, α_{12} menunjukkan proporsional ukuran nutrisi dan air, K_1 , menunjukkan Carrying Capacity atau kapasitas untuk air, K_2 , menunjukkan Carrying Capacity atau kapasitas untuk Nutrisi.

2. Keseimbangan jumlah air dan nutrisi pada makhluk hidup diperoleh pada saat:

- a. Untuk Air

$$\text{Jika } r_1 = 0,2 \quad K_1 = \frac{0,2}{0,005} = \frac{200}{5} = 40 \quad \text{maka } \frac{r_1}{K_1} = 0,005$$

$$\text{Jika } \alpha_{12} = \frac{0,0075}{0,005} = \frac{7,5}{5} = \frac{75}{50} = \frac{3}{2} = 1,5 \quad \text{maka } \frac{r_1 \alpha_{12}}{K_1} = 0,0075$$

- b. Untuk Nutrisi

$$\text{Jika } r_2 = 0,42 \quad K_2 = \frac{0,42}{0,0075} = \frac{4200}{75} = 56 \quad \text{maka } \frac{r_2}{K_2} = 0,0075$$

$$\text{Jika } \alpha_{21} = \frac{0,0045}{0,0075} = \frac{45}{75} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 0,6 \quad \text{maka } \frac{r_2 \alpha_{21}}{K_2} = 0,0045$$

4.2 Saran

Untuk saran bagi pembaca atau siapapun yang mempelajari mungkin di dalamnya banyak kesalahan pembaca memberi saran untuk memperbaiki dan membenarkan yang salah atau membahas lagi yang belum terlengkapi dan melanjutkan ke sistem persamaan yang lebih tinggi.



DAFTAR PUSTAKA

- Buckle, KA dan Edwards, GH. 1985. *Ilmu Pangan*. Jakarta. Universitas Indonesia
- Carol Taylor Et All. 1997. *Fundamental of Nursing*. Lippincott Raven Washington.
- Finizio, M B. 1988. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Terjemahan oleh Widiarsih Santoso. Jakarta: Erlangga.
- Gnulam, P M. 1981. *Ilmu Pangan, Nutrisi dan Mikrobiologi*. Yogyakarta: Gajah Mada University.
- Maria, C Linter. 1992. *Biokimia, Nutrisi dan Metabolisme*. Terjemahan oleh Aninda Pareksi. 1995. Jakarta: Universitas Indonesia.
- Purcell, Edwin J. dan Varberg, Dale. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid I*. Terjemahan oleh I Nyoman Susila, Bana Kartasmita, dan Rawuh. 1999. Jakarta: Erlangga.

Lampiran Program Maple

```

> restart;
> dx:=0.2*x-0.005*x^2-0.0075*y*x;
      dx := 0.2 x - 0.005 x2 - 0.0075 y x

> dy:=0.42*y-0.0075*y^2-0.0045*y*x;
      dy := 0.42 y - 0.0075 y2 - 0.0045 y x

> fixedpoint:=solve({dx,dy},{x,y});
fixedpoint := { x = 0., y = 0. }, { x = 0., y = 56. }, { y = 0., x = 40. }, { y = 320., x = -440. }

> fix1:=fixedpoint[1];fix2:=fixedpoint[2];
      fix1 := { x = 0., y = 0. }
      fix2 := { x = 0., y = 56. }

> with (plots):with (linalg):

> jac:=jacobian([dx,dy],[x,y]);
      jac :=  $\begin{bmatrix} 0.2 - 0.010 x - 0.0075 y & -0.0075 x \\ -0.0045 y & 0.42 - 0.0150 y - 0.0045 x \end{bmatrix}$ 

>
jac1:=subs(fix1,evalm(jac));eigenvals(jac1);jac2:=subs(
fix2,evalm(jac));eigenvals(jac2);
      jac1 :=  $\begin{bmatrix} 0.2 & -0. \\ -0. & 0.42 \end{bmatrix}$ 
      0.2000000000, 0.4200000000
      jac2 :=  $\begin{bmatrix} -0.2200 & -0. \\ -0.2520 & -0.4200 \end{bmatrix}$ 
      -0.4200000000, -0.2200000000

> restart;
> dx:=0.3*x-0.0035*x^2-0.005*y*x;
      dx := 0.3 x - 0.0035 x2 - 0.005 y x

> dy:=0.2*y-0.0025*y^2-0.004*y*x;
      dy := 0.2 y - 0.0025 y2 - 0.004 y x

> fixedpoint:=solve({dx,dy},{x,y});
fixedpoint := { y = 0., x = 0. }, { x = 0., y = 80. }, { y = 0., x = 85.71428571 },
      { x = 22.22222222, y = 44.44444444 }

> fix1:=fixedpoint[1];fix2:=fixedpoint[2];
      fix1 := { y = 0., x = 0. }
      fix2 := { x = 0., y = 80. }

> with (plots):with (linalg):

```

```

> jac:=jacobian([dx,dy],[x,y]);
      jac :=  $\begin{bmatrix} 0.3 - 0.0070 x - 0.005 y & -0.005 x \\ -0.004 y & 0.2 - 0.0050 y - 0.004 x \end{bmatrix}$ 

>
jac1:=subs(fix1,evalm(jac));eigenvals(jac1);jac2:=subs(
fix2,evalm(jac));eigenvals(jac2);
      jac1 :=  $\begin{bmatrix} 0.3 & -0. \\ -0. & 0.2 \end{bmatrix}$ 
      0.2000000000, 0.3000000000
      jac2 :=  $\begin{bmatrix} -0.100 & -0. \\ -0.320 & -0.2000 \end{bmatrix}$ 
      -0.2000000000, -0.1000000000

>
> restart;
> dx:=0.2*x-0.005*x^2-0.0075*y*x;
      dx :=  $0.2 x - 0.005 x^2 - 0.0075 y x$ 
> dy:=0.42*y-0.0075*y^2-0.0045*y*x;
      dy :=  $0.42 y - 0.0075 y^2 - 0.0045 y x$ 
> fixedpoint:=solve({dx,dy},{x,y});
fixedpoint := { x = 0., y = 0. }, { x = 0., y = 56. }, { y = 0., x = 40. }, { y = 320., x = -440. }
> fix1:=fixedpoint[1];fix2:=fixedpoint[2];
      fix1 := { x = 0., y = 0. }
      fix2 := { x = 0., y = 56. }

> with (plots):with (linalg):
> jac:=jacobian([dx,dy],[x,y]);
      jac :=  $\begin{bmatrix} 0.2 - 0.010 x - 0.0075 y & -0.0075 x \\ -0.0045 y & 0.42 - 0.0150 y - 0.0045 x \end{bmatrix}$ 

>
jac1:=subs(fix1,evalm(jac));eigenvals(jac1);jac2:=subs(
fix2,evalm(jac));eigenvals(jac2);
      jac1 :=  $\begin{bmatrix} 0.2 & -0. \\ -0. & 0.42 \end{bmatrix}$ 
      0.2000000000, 0.4200000000
      jac2 :=  $\begin{bmatrix} -0.2200 & -0. \\ -0.2520 & -0.4200 \end{bmatrix}$ 
      -0.4200000000, -0.2200000000

```

```

> restart;
> dx:=0.3*x-0.0035*x^2-0.005*y*x;
      dx := 0.3 x - 0.0035 x2 - 0.005 y x
> dy:=0.2*y-0.0025*y^2-0.004*y*x;
      dy := 0.2 y - 0.0025 y2 - 0.004 y x
> fixedpoint:=solve({dx,dy},{x,y});
      fixedpoint := { x = 0., y = 0. }, { x = 0., y = 80. }, { y = 0., x = 85.71428571 },
      { y = 44.44444444, x = 22.22222222 }
> fix1:=fixedpoint[1];fix2:=fixedpoint[2];
      fix1 := { x = 0., y = 0. }
      fix2 := { x = 0., y = 80. }
> with (plots):with (linalg):
Warning, the name changecoords has been redefined

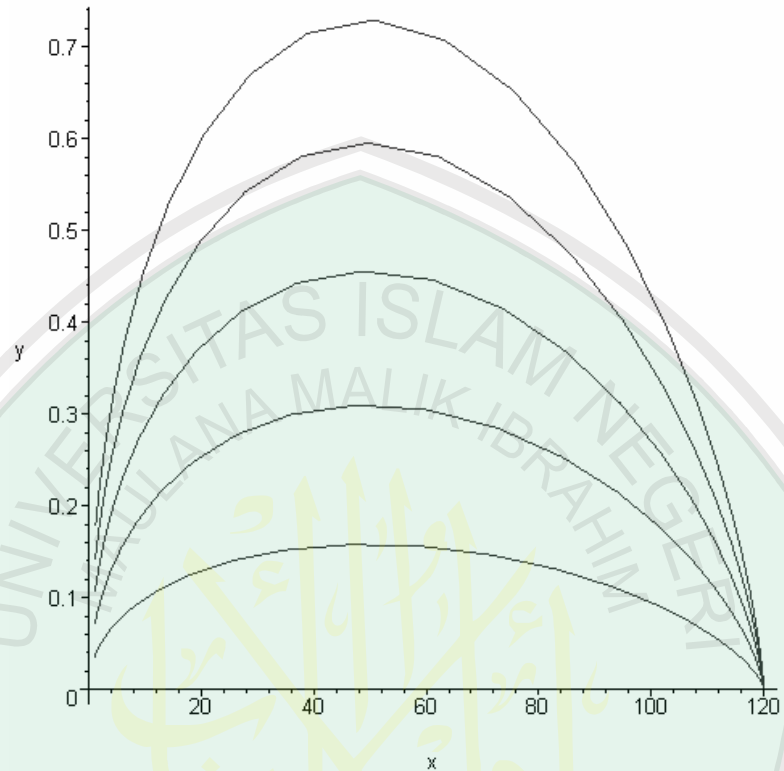
Warning, the protected names norm and trace have been redefined
and unprotected
> jac:=jacobian([dx,dy],[x,y]);
      jac :=  $\begin{bmatrix} 0.3 - 0.0070 x - 0.005 y & -0.005 x \\ -0.004 y & 0.2 - 0.0050 y - 0.004 x \end{bmatrix}$ 
>
jac1:=subs(fix1,evalm(jac));eigenvals(jac1);jac2:=subs(
fix2,evalm(jac));eigenvals(jac2);
      jac1 :=  $\begin{bmatrix} 0.3 & -0. \\ -0. & 0.2 \end{bmatrix}$ 
      0.2000000000, 0.3000000000
      jac2 :=  $\begin{bmatrix} -0.100 & -0. \\ -0.320 & -0.2000 \end{bmatrix}$ 
      -0.2000000000, -0.1000000000
> with(plots):
> PredatorPrey := {diff(x(t),t) = 0.42*x(t)-
0.0035*x(t)*x(t)-0.005*x(t)*y(t),diff(y(t),t) =
0.2*y(t)-0.0025*y(t)*y(t)-0.004*x(t)*y(t)};
      PredatorPrey := {  $\frac{d}{dt} x(t) = 0.42 x(t) - 0.0035 x(t)^2 - 0.005 x(t) y(t)$ ,
 $\frac{d}{dt} y(t) = 0.2 y(t) - 0.0025 y(t)^2 - 0.004 x(t) y(t)$  }
> ics := [seq({x(0)=exp(k/24),y(0)=(k/28)},k=0..5)]:
> sols := {seq( dsolve( PredatorPrey union ics[i],
{x(t),y(t)}, numeric,
range=0..50 ),

```

```

i=1..nops(ics)) }:
> plts := {seq(
odeplot(sols[i],[x(t),y(t)],colour=red),
i=1..nops(sols)) }:
> display( plts );

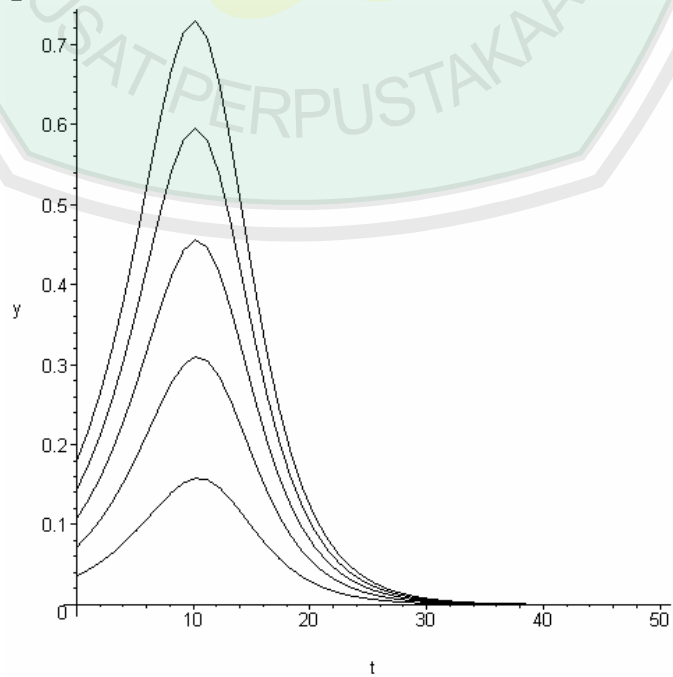
```



```

> plts1 := {seq(
odeplot(sols[i],[t,y(t)],colour=black),
i=1..nops(sols)) }:
> display( plts1 );

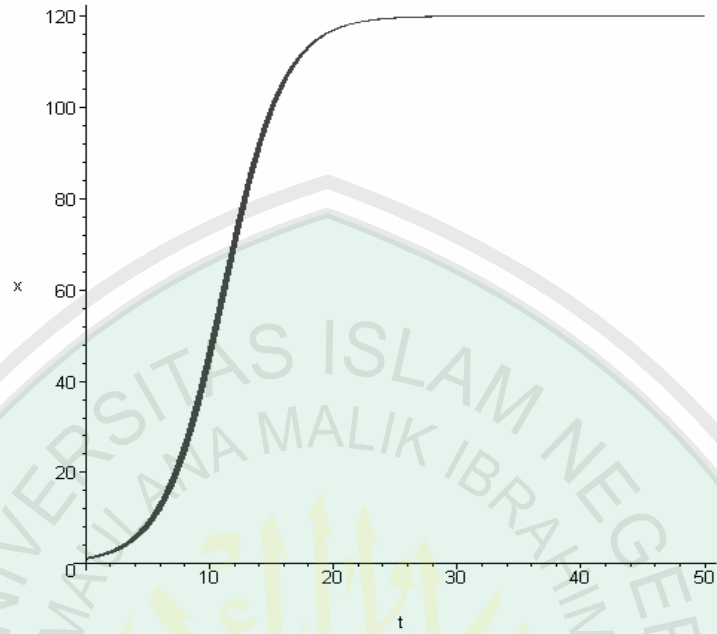
```



```

> plts2 := {seq(
odeplot(sols[i],[t,x(t)],colour=brown),
i=1..nops(sols)) }:
> display( plts2 );

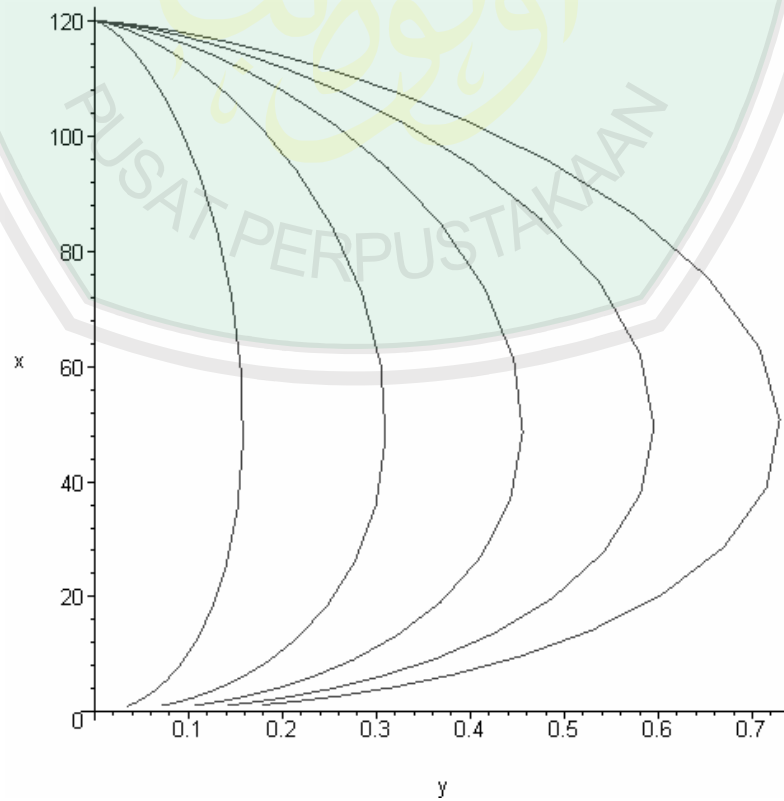
```



```

> plts3 := {seq(
odeplot(sols[i],[y(t),x(t)],colour=brown),
i=1..nops(sols)) }:
> display( plts3 );

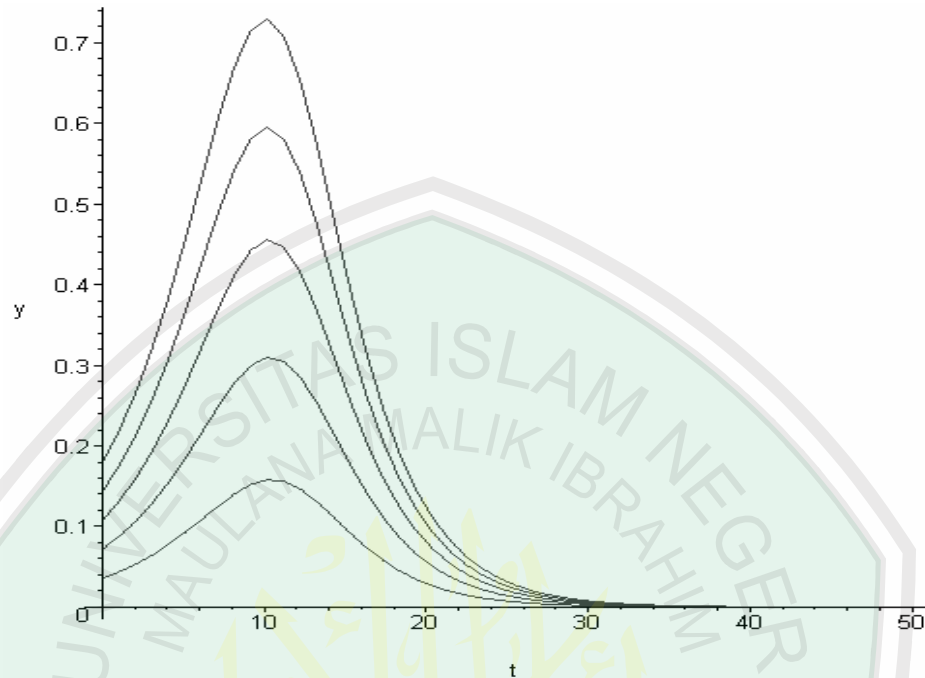
```



```

> plts4 := {seq(
odeplot(sols[i],[t,y(t)],colour=brown),
i=1..nops(sols)) }:
> display( plts4 );

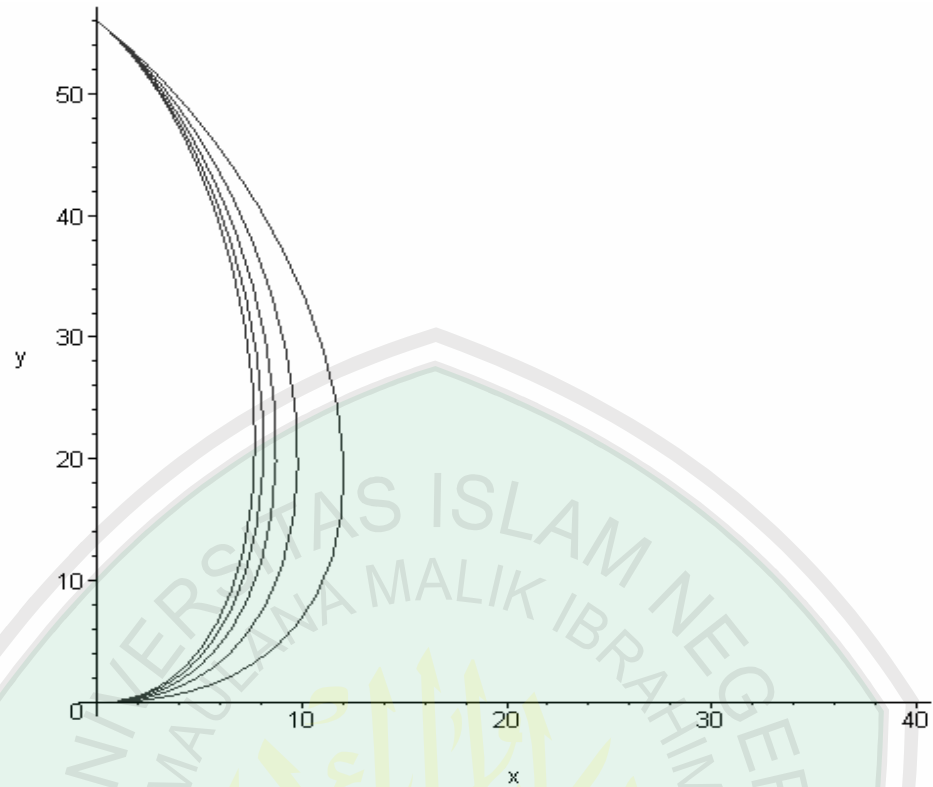
```



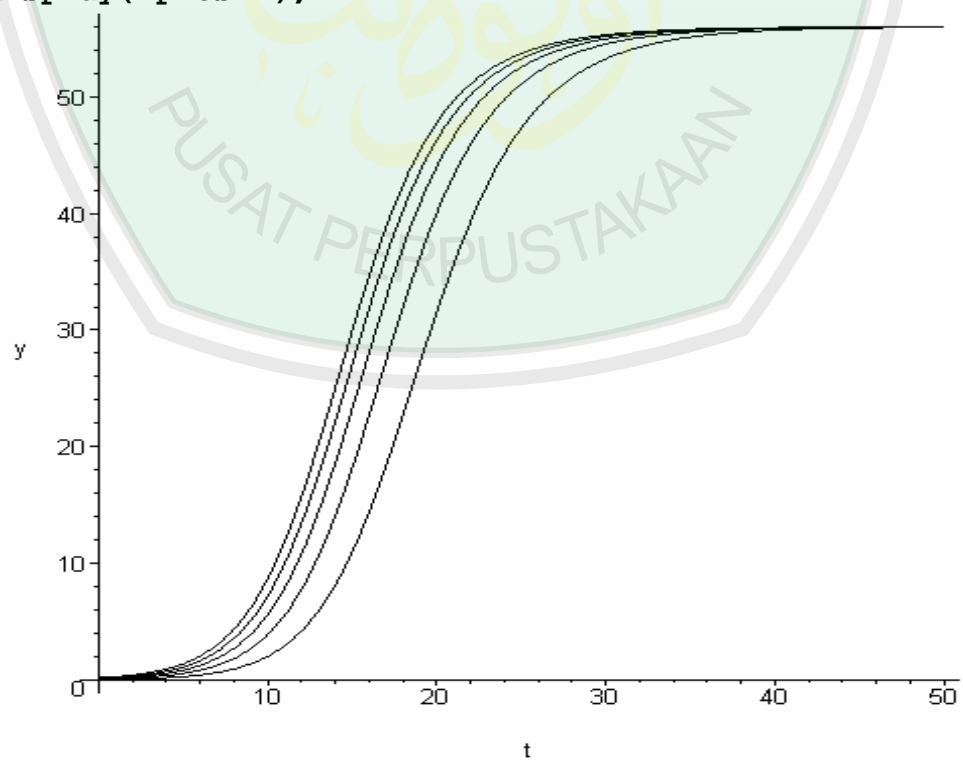
```

> with(plots):
> PredatorPrey := {diff(x(t),t) = 0.2*x(t)-
0.005*x(t)*x(t)-0.0075*x(t)*y(t),diff(y(t),t) =
0.42*y(t)-0.0075*y(t)*y(t)-0.0045*x(t)*y(t)};
    PredatorPrey := {  $\frac{d}{dt}x(t) = 0.2x(t) - 0.005x(t)^2 - 0.0075x(t)y(t),$ 
 $\frac{d}{dt}y(t) = 0.42y(t) - 0.0075y(t)^2 - 0.0045x(t)y(t)$  }
> ics := [seq({x(0)=exp(k/24),y(0)=(k/28)},k=0..5)]:
> sols := {seq( dsolve( PredatorPrey union ics[i],
{x(t),y(t)}, numeric,
range=0..50 ),
i=1..nops(ics)) }:
> plts := {seq(odeplot(sols[i],[x(t),y(t)],colour=red),
i=1..nops(sols)) }:
> display( plots );

```



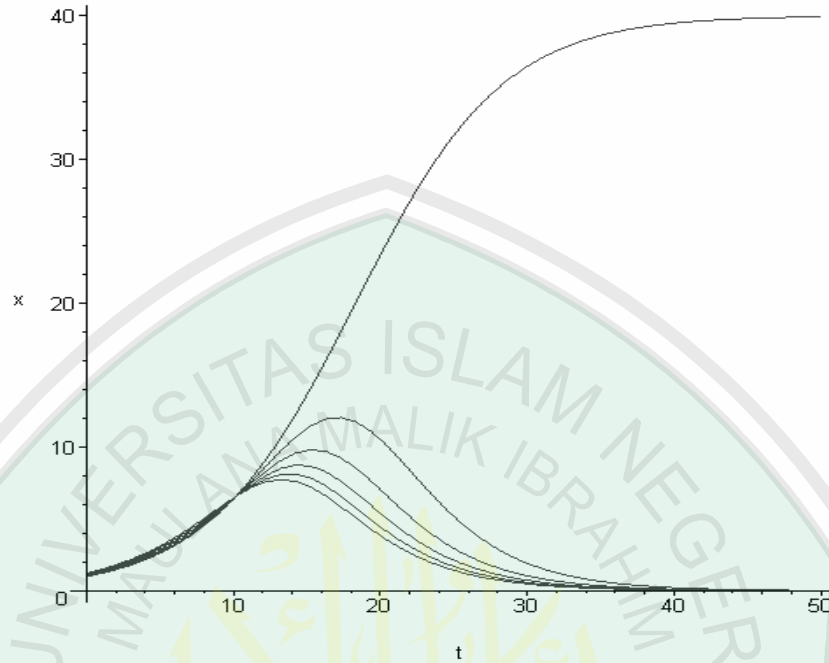
```
> plts1 := {seq(
odeplot(sols[i],[t,y(t)],colour=black),
i=1..nops(sols)) };
> display( plts1 );
```



```

> plts2 := {seq(
odeplot(sols[i],[t,x(t)],colour=brown),
i=1..nops(sols)) }:
> display( plts2 );

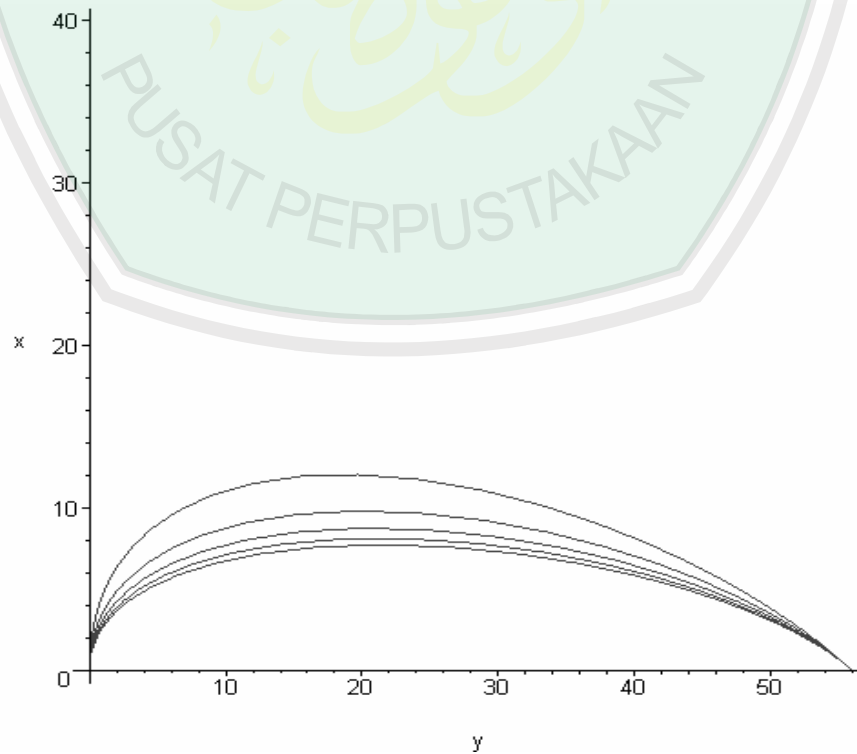
```



```

> plts3 := {seq(
odeplot(sols[i],[y(t),x(t)],colour=brown),
i=1..nops(sols)) }:
> display( plts3 );

```



```
> plts4 := {seq(
odeplot(sols[i],[t,y(t)],colour=brown),
i=1..nops(sols)) }:
> display( plts4 );
```

