INDEKS ZAGREB PERTAMA DAN KEDUA PADA GRAF *EQUAL SQUARE* DARI GRUP QUATERNION DIPERUMUM

SKRIPSI

OLEH
SHALSABILLA AZ ZAHRA
NIM. 18610106

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022

INDEKS ZAGREB PERTAMA DAN KEDUA PADA GRAF *EQUAL SQUARE* DARI GRUP QUATERNION DIPERUMUM

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S. Mat)

Oleh
Shalsabilla Az Zahra
NIM. 18610106

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022

INDEKS ZAGREB PERTAMA DAN KEDUA PADA GRAF *EQUAL SQUARE* DARI GRUP QUATERNION DIPERUMUM

SKRIPSI

Oleh
Shalsabilla Az Zahra
NIM. 18610106

Telah Disetujui untuk Diuji
Malang, 19 Desember 2022

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.	Erna Herawati, M.Pd.
NIDT. 19870218 20160801 1 056	NIDT. 19760723 20180201 2 222

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

INDEKS ZAGREB PERTAMA DAN KEDUA PADA GRAF *EQUAL SQUARE* DARI GRUP QUATERNION DIPERUMUM

SKRIPSI

Oleh
Shalsabilla Az Zahra
NIM. 18610106

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal, 27 Desember 2022

Ketua Penguji	: Prof. Dr. Turmudi, M.Si., Ph.D	....
Anggota Penguji I	: Dr. Wahyu Hengky Irawan, M.Pd.	....
Anggota Penguji II	: Mohammad Nafie Jauhari, M.Si	....
Anggota Penguji III	: Erna Herawati, M.Pd.	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Shalsabilla Az Zahra
NIM	: 18610106
Program studi	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Indeks Zagreb Pertama dan Kedua pada Graf *Equal Square* dari Grup Quaternion Diperumum

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai sumber cuplikan pada daftar pusaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perilaku tersebut.

Malang, 27 Desember 2022
Yang membuat pernyataan,

Shalsabilla Az Zahra
NIM. 18610106

MOTTO DAN PERSEMBAHAN

"Hasil yang besar dimulai dari perubahan-perubahan kecil"

Skripsi ini dipersembahkan untuk:

Ayahanda Nur Chamid dan Ibunda Siti Mukhayatin yang selalu mendoakan yang terbaik dan mendukung setiap keputusan yang penulis ambil.

Adik penulis Akmal yang turut memberikan doa dan dukungan.

Teman-teman penulis lia, bela, somel, dan farida yang turut memberikan support.

.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum waramatullahi wabarakatuh

Segala puji dan syukur kepada Allah SWT karena atas rahmatnya dapat menyelesaikan penelitian skripsi dengan judul "Indeks Zagreb pertama dan kedua pada graf *equal square* dari grup quaternion diperumum" sebagai syarat dalam mendapatkan gelar sarjana pada Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyelesaiannya penulis mendapat banyak pelajaran dan pengalaman baik secara langsung atau tidak dari berbagai pihak, untuk itu ucapan terima kasih sebesar-besarnya disampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Mohammad Nafie Jauhari, M.Si., selaku dosen pembimbing I yang senantiasa membimbing, menasihati, dan memberi arahan kepada penulis.
5. Erna Herawati, M.Pd, selaku dosen pembimbing II yang senantiasa membimbing, menasihati, dan memberi arahan kepada penulis.
6. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim yang sudah memberikan ilmu dan arahan kepada penulis.
7. Kepada kedua orang tua dan seluruh keluarga yang sudah mendoakan dan mendukung dalam setiap keputusan yang diambil penulis.
8. Seluruh teman-teman KSR-PMI Unit UIN Malang terima kasih sudah menjadi keluarga yang menemani dalam setiap prosesnya. Khususnya Eka, Rossy, dan Zaky yang sudah berproses bersama dalam satu tahun masa kepengurusan.
9. Seluruh teman jurusan matematika angkatan 2018 terima kasih atas seluruh perjuangannya selama masa kuliah.

10. Terakhir terima kasih sebesar-besarnya kepada semua pihak yang telah membantu, mendukung, dan turut memberi arahan dalam pengerjaan skripsi ini.

Akhir kata semoga skripsi ini bermanfaat baik bagi penulis maupun siapa saja yang sudah membaca dan mempelajarinya.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 27 Desember 2022

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL .... **i**
HALAMAN PENGAJUAN .... **ii**
HALAMAN PERSETUJUAN .... **iii**
MOTTO DAN PERSEMBAHAN .... **vi**
KATA PENGANTAR .... **vii**
DAFTAR ISI .... **ix**
DAFTAR TABEL .... **xi**
DAFTAR GAMBAR .... **xii**
ABSTRAK .... **xiii**
ABSTRACT .... **xiv**
مستخلص البحث .... **xv**
BAB I PENDAHULUAN **1**
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 4
1.3 Tujuan Penelitian 4
1.4 Manfaat Penelitian 4
1.5 Batasan masalah 4
BAB II KAJIAN TEORI **5**
2.1 Kajian Teori Pendukung 5
2.1.1 Grup 5
2.1.2 Grup Quaternion 6
2.1.3 Grup Quaternion Diperumum 9
2.1.4 Graf 10
2.1.5 Derajat Titik 11
2.1.6 Graf Lengkap 12
2.1.7 Graf *Equal Square* 13
2.1.8 Indeks Zagreb Pertama dan Kedua 15
2.2 Kajian Integritas Topik dengan Al-Qur'an 17
2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung 18
BAB III METODE PENELITIAN **20**
3.1 Jenis Penelitian 20
3.2 Pra Penelitian 20
3.3 Tahapan Penelitian 20
BAB IV PEMBAHASAN **22**
4.1 Indeks Zagreb Pertama dan Kedua pada Graf *Equal Square* dari Grup Quaternion Diperumum $Q_{4n}, n \in \{2,3,4,5\}$ 22
4.1.1 Indeks Zagreb Pertama dan Kedua pada Graf *Equal Square* dari Grup Quaternion Diperumum Q_8 22
4.1.2 Indeks Zagreb Pertama dan Kedua pada Graf *Equal Square* dari Grup Quaternion Diperumum Q_{12} 25
4.1.3 Indeks Zagreb Pertama dan Kedua pada Graf Equal Square dari Grup Quaternion Diperumum Q_{16} 28
4.1.4 Indeks Zagreb Pertama dan Kedua pada Graf *Equal Square* dari Grup Quaternion Diperumum Q_{20} 31

4.2 Indeks Zagreb Pertama dan Kedua pada Graf *Equal Square* dari Grup Quaternion $ES(Q_{4n})$ 39
4.3 Integrasi Hasil Penelitian dengan Kajian Keislaman 42
BAB V PENUTUP 45
5.1 Kesimpulan.. 45
5.2 Saran.. 45
DAFTAR PUSTAKA.. 46
DAFTAR RIWAYAT HIDUP 48

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Tabel Cayley dari Grup Q_8 9
Tabel 2.2 Tabel Cayley dari Grup Q_8 13
Tabel 4.1 Tabel Cayley dari Grup Q_8 22
Tabel 4.2 Tabel Cayley dari Grup Q_{12} 25
Tabel 4.3 Tabel Cayley dari Grup Q_{16} 28
Tabel 4.4 Tabel Cayley dari Grup Q_{20} 31
Tabel 4.5 Tabel pola $\mathrm{ES}(\mathrm{Q}_{4\mathrm{n}})$ 35
Tabel 4.6 Tabel Indeks M1 dan M2 pada $\mathrm{ES}(\mathrm{Q}_{4\mathrm{n}})$, n Genap 39
Tabel 4.7 Tabel Indeks M1 dan M2 pada Graf $\mathrm{ES}(\mathrm{Q}_{4\mathrm{n}})$, n Ganjil 39

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Gambar Graf G 10
Gambar 2.2 Gambar Graf Commuting dan Graf Identitas dari Grup Q 11
Gambar 2.3 Gambar Graf G 11
Gambar 2.4 Gambar Graf Lengkap $\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2, \mathrm{K}_3,$ dan K_4 12
Gambar 2.5 Gambar Gra $\mathrm{ES}(\mathrm{Q}_{12})$f 12
Gambar 2.6 Gambar Graf $\mathrm{ES}(\mathrm{Q}_8))$ 14
Gambar 2.7 Gambar Graf $\mathrm{ES}(\mathrm{Q}_{12})$ 14
Gambar 2.8 Gambar Graf $\mathrm{ES}(\mathrm{Q}_{16})$ 14
Gambar 2.9 Gambar Graf $\mathrm{ES}(\mathrm{Q}_{20})$ 15
Gambar 2.10 Gambar Graf G 15
Gambar 2.11 Gambar Graf $\mathrm{ES}(\mathrm{Q}_8)$ 18
Gambar 4.1 Gambar Graf $ES(Q_8)$ 23
Gambar 4.2 Gambar Graf $ES(Q_{12})$ 26
Gambar 4.3 Gambar Graf $ES(Q_{16})$ 29
Gambar 4.4 Gambar Graf $ES(Q_{20})$ 33

ABSTRAK

Zahra, Shalsabilla Az, 2022. **Indeks Zagreb pertama dan kedua pada Graf *Equal Square* dari Grup Quaternion Diperumum.** Skripsi. Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si. (II) Erna Herawati, M.Pd.

Kata kunci: Indeks Zagreb pertama dan kedua, Graf *Equal Square*, Grup Quaternion Diperumum

Grup Quaternion diperumum (Q_{4n}) adalah grup dengan order grup $4n$ yang dibangun oleh elemen $\langle a, b\rangle$ dapat didefinisikan sebagai $Q_{4n} = \left\langle a, b \middle| a^{2n} = e,\ b^2 = a^n,\ b \cdot a \cdot b^{-1} = a^{-1} \right\rangle$ untuk e identitas, $n \geq 2,\ n \in \mathbb{N}$. Graf *equal square* yang dibangun dari grup quaternion diperumum $(ES(Q_{4n}))$ adalah graf dengan himpunan simpulnya adalah semua elemen grup Q_{4n}, misal $x, y \in V(Q_{4n})$, x dan y saling terhubung langsung jika dan hanya jika $x^2 = y^2$. Penelitian ini difokuskan pada formula umum indeks Zagreb pertama dan kedua pada graf $(ES(Q_{4n}))$. Metode yang digunakan yaitu menunjukkan isomorfisma $(ES(Q_{4n}))$ pada $ES(Q_{4n}) \cong K_{2(n+1)} + (n-1)K_2, n$ genap dan $ES(Q_{4n}) \cong K_{2\mathrm{n}} + \mathrm{n}\ K_2, n$ ganjil sehingga terdapat dua formula umum pada M_1 dan M_2. Hasil dari penelitian ini adalah:

1. Indeks Zagreb pertama dan kedua pada graf $ES(Q_{4n})$, n genap
$$M_1(ES(Q_{4n})) = (2(n+1) \cdot (2n+1)^2) + ((n-1) \cdot 2)$$
$$M_2\big(ES(Q_{4n})\big) = \big((n+1) \cdot (2n+1)^3\big) + (n-1)$$
2. Indeks Zagreb pertama dan kedua pada graf $ES(Q_{4n})$, n ganjil
$$M_1\big(ES(Q_{4n})\big) = 2n(2n-1)^2 + (n \cdot 2)$$
$$M_2\big(ES(Q_{4n})\big) = n(2n-1)^3 + n$$

ABSTRACT

Zahra, Shalsabilla Az, 2022. **The First and The Second Zagreb Indices of the Equal Square Graph form a Generalized Quaternion Group**. Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisor: (I) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si. (II) Erna Herawati, M.Pd.

Keywords: First and second Zagreb Index, Equal Square Graph, Generalization Quaternion Group

A generalized Quaternion group Q_{4n} is a group with a $4n$ group order constructed by the elemen $\langle a, b \rangle$ And can be defined as Q_{4n}=$\left\langle a, b \middle| a^{2n} = e,\ b^2 = a^n,\ b \cdot a \cdot b^{-1} = a^{-1} \right\rangle$ where the e is identity, $n \geq 2$, and $n \in \mathbb{N}$. An equal square graph of the quaternion group $ES(Q_{4n})$ is a graph where the set of vertices is all elements of the Q_{4n} group, e.g. $x, y \in V(Q_{4n})$, x and y are adjacent iff $x^2 = y^2$. The study focused on the general formula of the first and second Zagreb indices on graphs ($ES(Q_{4n})$). The method is use to show isomorphism of ($ES(Q_{4n})$) There is $ES(Q_{4n}) \cong K_{2(n+1)} + (n-1)K_2, n$ even and $ES(Q_{4n}) \cong K_{2\text{n}} + \text{n}\, K_2, n$ odd so that there are two general formulas in M_1 and M_2. The results of this study are:

1. The first and second Zagreb indices on the $ES(Q_{4n})$ graph, n even
$$M_1(ES(Q_{4n})) = (2(n+1) \cdot (2n+1)^2) + ((n-1) \cdot 2)$$
$$M_2\big(ES(Q_{4n})\big) = \big((n+1) \cdot (2n+1)^3\big) + (n-1)$$

2. The first and second Zagreb indices on the $ES(Q_{4n})$ graph, n odd
$$M_1\big(ES(Q_{4n})\big) = 2n(2n-1)^2 + (n \cdot 2)$$
$$M_2\big(ES(Q_{4n})\big) = n(2n-1)^3 + n$$

مستخلص البحث

الز هري، سلسبيلا. ٢٠٢٢. ***Zagreb Indices* الأوّل و الثّاني في موضع *Equal Square* من المجموعة *Quartenion* المعممة**. البحث العلمي. قسم الرياضيات. كلية العلوم والتكنولوجيا. جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف: (١) محمد نافع جوهري الماجستير (٢) إيرنا هيراواتي الماجستير.

الكلمات الرئيسية : *Zagreb Indices* الأوّل و الثّاني، موضع *Equal Square*، لمجموعة *Quartenion* المعمّة.

لمجموعة *Quartenion* المعممة (Q_{4n}) هي مجموعة بنسق مجموعة $4n$ التي مكوّن بواسطة المقوّم $\langle a,b\rangle$ يمكن تعريفها علي $Q_{4n} = \langle a,b|a^{2n} = e,\ b^2 = a^n,\ b\cdot a\cdot b^{-1} = a^{-1}\rangle$ ل e شخصية، $n \geq 2,\ n \in \mathbb{N}$. موضع *Equal Square* التي مكوّن من المجموعة *Quartenion* المعمّة $(ES(Q_{4n}))$ هي موضع بمجمع عقدة هي كل مقوّم المجموعة Q_{4n}، مثل $x,y \in Q_{4n}$، x و y متصلة مباشرة إذا وفقط إذا $x^2 = y^2$. يركز هذا البحث على الصيغة العامة *Zagreb Indices* الأوّل و الثّاني في موضع $(ES(Q_{4n}))$. وطريقة البحث المستخدمة لهذا البحث هي الدراسة الكتابية. الطريقة المستخدمة هي إظهار تشاكل $(ES(Q_{4n}))$هناك $ES(Q_{4n}) \cong K_{2(n+1)} + (n-1)K_2$, n زوجي و $ES(Q_{4n}) \cong K_{2\mathrm{n}} + \mathrm{n}\,K_2, n$ فردي بحيث توجد صيغتان عامتان في .والنتيجة من هذا البحث هي:

1. *Zagreb Indices* الأوّل و الثّاني في موضع $ES(Q_{4n})$، n شفعيّ

$$M_1(ES(Q_{4n})) = (2(n+1)\cdot(2n+1)^2) + ((n-1)\cdot 2)$$
$$M_2\big(ES(Q_{4n})\big) = \big((n+1)\cdot(2n+1)^3\big) + (n-1)$$

2. *Zagreb Indices* الأوّل و الثّني في موضع $ES(Q_{4n})$، n وتر

$$M_1\big(ES(Q_{4n})\big) = 2n(2n-1)^2 + (n\cdot 2)$$
$$M_2\big(ES(Q_{4n})\big) = n(2n-1)^3 + n$$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf adalah salah satu cabang keilmuan matematika yang merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek tersebut (Munir, 2012). Pola keterhubungan antar manusia adalah salah satu contoh permasalahan yang dapat direpresentasikan menggunakan ilmu teori graf. Pola keterhubungan antar manusia juga disebutkan dalam Al-Qur'an surat An-nisa ayat 86:

"Dan apabila kamu dihormati dengan suatu (salam) penghormatan, maka balaslah penghormatan itu dengan yang lebih baik, atau balaslah (penghormatan itu, yang sepadan) dengannya. Sungguh, Allah memperhitungkan segala sesuatu."

Menurut tafsir At-Thabari (1994) arti ayat "*balaslah penghormatan itu dengan yang lebih baik atau yang sepadan dengannya*" memiliki arti tafsir "Doakanlah orang yang mendoakanmu dengan baik, dari apa yang ia doakan untuk kamu dan balaslah penghormatan dengan sepadan". Tafsir dari ayat tersebut dapat disimpulkan bahwa Allah memerintah untuk saling menjaga hubungan kepada sesama manusia. Hal tersebut dapat direpresentasikan dalam teori graf yaitu setiap manusia adalah objek diskrit kemudian diperintahkan saling menjaga hubungan baik agar terjadi keterhubungan antar objek tersebut.

Suatu graf G adalah pasangan himpunan $(V(G), E(G))$, dengan $V(G)$ adalah suatu himpunan tak kosong dari semua simpul pada graf G dinotasikan sebagai V dan $E(G)$ adalah suatu himpunan dari sisi pada graf G yang berisi pasangan tak berurutan dari simpul berbeda pada V (yang mungkin kosong).

Misalkan u dan v adalah dua simpul berbeda pada G kemudian u dan v saling terhubung langsung sehingga disebut sebagai sisi e (Abdussakir dkk, 2009).

Seiring majunya zaman dan banyaknya pengaplikasian teori graf dalam berbagai bidang membuat perkembangannya banyak menemukan rumusan-rumusan baru. Penelitian tentang teori graf sering dikaitkan dengan teori aljabar abstrak, salah satunya membahas graf yang dibangun dari grup. Beberapa contoh graf yang dibangun dari grup yaitu graf *non comuting* yang pertama kali dikenalkan pada penelitian (Abdollahi, 2006), dan graf konjugasi pada penelitian (Erfanian & Tolue, 2012). Penelitian tentang graf yang dibangun oleh suatu grup terus dikembangkan seperti (Bariyah, 2019) yang membahas tentang graf komutatif pada grup generalisasi quaternion, kemudian (Ulum, 2020) yang membahas graf konjugasi dan menghasilkan rumus umum dari indeks jumlah jarak eksentris dari komplemen graf konjugasi dari grup quaternion diperumum.

Penelitian ini membahas graf *equal square* hasil penelitian Rehman yang membahas graf *equal square* dari beberapa grup yaitu grup dihedral, grup siklik, dan grup berhingga. Rehman mendefinisikan graf *equal-suare* dari suatu grup G sebagai graf dengan himpunan titiknya adalah semua unsur dari grup G dan dua titik $a, b \in G$ saling terhubung langsung jika dan hanya jika $a^2 = b^2$. Graf *equal square* pada suatu grup berhingga G dapat dinotasikan sebagai $ES(G)$. (Rehman dkk, 2002)

Teori graf sudah dikenalkan sejak tahun 1736 sehingga sampai saat ini memiliki banyak aplikasi dalam berbagai bidang. Seperti pengaplikasian teori graf pada bidang ilmu biologi digunakan untuk pemetaan DNA, pada bidang ilmu komputer sebagai keamanan jaringan, kemudian pada bidang ilmu kimia digunakan untuk memberikan karakteristik sifat dari suatu molekul atau deskripsi molekul (Chaluvaraju dkk, 2020).

Aplikasi ilmu teori graf pada bidang kimia dilakukan dengan merepresentasikan simpul sebagai atom suatu molekul, sedangkan sisi atau simpul yang saling terhubung direpresentasikan sebagai ikatan kimia. Indeks topologi, sebagai bentuk variasi dari ilmu teori graf, digunakan sebagai parameter sterik yang berfungsi untuk mengevaluasi terhadap toksisitas dan memprediksi aktivitas biologi pada molekul tersebut (Saleh, 2015).

Penelitian ini membahas tentang Indeks Zagreb, indeks Zagreb terdiri dari indeks Zagreb pertama dan kedua. Keduanya dideskripsikan secara berturut-turut yaitu jumlah kuadrat dari derajat titik dan jumlah hasil kali dari dua titik yang terhubung langsung dalam suatu graf. Indeks Zagreb pertama kali dikenalkan lebih dari 40 tahun lalu, sehingga indeks ini disebut indeks yang paling banyak dipelajari dan memiliki aplikasi yang baik dalam teori graf molekuler (Sarkar dkk, 2017).

Penelitian indeks topologi sudah banyak dikaji sebelumnya, sama halnya penelitian mengenai indeks Zagreb pertama dan kedua. Beberapa penelitian yang membahas indeks Zagreb pertama dan kedua adalah (Wati, 2020) melakukan penelitian yang membahas indeks Zagreb pertama dan kedua pada graf pembagi nol total dari ring komutatif (Das & Nam, 2014) yang membahas indeks Zagreb pertama dan kedua mengenai hubungan antara indeks Zagreb pertama dan kedua pertama dan kedua.

Merujuk pada penelitian sebelumnya, pada penelitian ini mengkaji indeks Zagreb pertama dan kedua. Graf yang digunakan adalah graf *equal square* dari grup quaternion diperumum Q_{4n}, untuk suatu $n \in \mathbb{N}$. Hasil dari penelitian ini adalah formula umum dan indeks Zagreb pertama dan kedua pada graf *equal square* dari grup quaternion diperumum.

1.2 Rumusan Masalah

Bagaimana menentukan formula indeks Zagreb pertama dan kedua dari *equal square* dari grup quaternion diperumum?

1.3 Tujuan Penelitian

Mengetahui formula indeks Zagreb pertama dan kedua pada graf *equal-square* dari grup quaternion diperumum.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Manfaat bagi penulis adalah memperluas wawasan dalam struktur aljabar dan teori graf.
2. Manfaat bagi mahasiswa UIN Maulana Malik Ibrahim Malang sebagai tambahan pengetahuan dalam ilmu teori Graf.
3. Manfaat bagi lembaga untuk penelitian indeks Zagreb pertama dan kedua pada graf *equal-square* dari grup quaternion diperumum diharapkan dapat menjadi rujukan untuk penelitian selanjutnya.

1.5 Batasan masalah

Batasan masalah pada penelitian ini adalah grup Q_{4n}, dengan $n \geq 2$, dan $n \in \mathbb{N}$. Penelitian ini hanya mengamati $Q_8, Q_{12}, Q_{16}, Q_{20}$ dikarenakan sudah didapat pola dari graf *equal square* sehingga dapat dirumuskan formula umum dari indeks Zagreb pertama dan kedua.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Kajian Teori Pendukung

2.1.1 Grup

Misalkan G adalah himpunan dan $*$ dilambangkan sebagai operasi pada G. Sehingga G disebut grup jika memenuhi empat kondisi berikut:

1. Operasi * pada G tertutup. Misalkan $a, b \in G$ maka $a * b \in G$
2. Operasi * asosiatif, artinya

$$\forall a, b, c \in G, (\, a * b) * c = a * (b * c)$$

3. G memiliki elemen identitas yaitu e, artinya

$$(\exists e \in G)(\forall a \in G), e * a = a * e = a$$

4. G memiliki invers, artinya

$$\forall a \in G (\exists a^{-1} \in G), a * (a^{-1}) = (a^{-1}) * a = e$$

(Gilbert & Gilbert 1984)

Contoh:

Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dengan operasi $+$ disebut grup jika memenuhi empat syarat berikut:

1. $\mathbb{Z}$ tertutup pada operasi $+$, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$, maka $a + b \in \mathbb{Z}$.
2. Operasi + pada $\mathbb{Z}$ asosiatif, artinya untuk setiap $a,\, b,\, c \in \mathbb{Z}$ maka berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$.
3. $\mathbb{Z}$ mempunyai elemen identitas yaitu 0.
4. Setiap elemen $\mathbb{Z}$ mempunyai invers, misal $a \in \mathbb{Z}$ maka terdapat $a^{-1} \in \mathbb{Z}$ sedemikian hingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Sehingga $\mathbb{Z}$ adalah grup.

2.1.2 Grup Quaternion

Grup quaternion merupakan ekstensi dari bilangan-bilangan kompleks yang tidak komutatif, yang dapat diaplikasikan dalam mekanika tiga dimensi. Grup quaternion dapat dituliskan sebagai $x = x_0 + xe_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, untuk x_1, x_2, x_3 adalah bilangan asli dan e_1, e_2, e_3 adalah vektor-vektor satuan yang berturut turut searah dengan sumbu X^+, Y^+, Z^+. i, j, k tidak digunakan untuk melambangkan vektor pada grup quaternion pada penelitian ini, dikarenakan i, j, k akan digunakan untuk melambangkan bagian imajiner pada bilangan kompleks. Operasi pada grup quaternion diuraikan sebagai berikut

Perkalian skalar:

$$cx = cx_0 + cx_1e_1 + cx_2e_2 + cx_3e_3$$

Penjumlahan x, y :

$$\begin{aligned} x + y &= (x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) + (y_0 + y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3) \\ &= (x_0 + y_0) + (x_1 + y_1)e_1 + (x_2 + y_2)e_2 + (x_3 + y_3)e_3 \end{aligned}$$

Hasil kali x, y :

$${e_1}^2 = {e_2}^2 = {e_3}^2 = -1$$

(Sangadji, 2006)

Isomorfisma dari matriks Quaternion kompleks ke matriks kompleks akan ditunjukkan berikut (Tian, 2000):

Isomorfisma Quaternion Pemetaan $\Psi = Q \to \mathbb{C}^{2\times 2}$ dengan aturan pengawanan

$$\Psi(a) = \begin{bmatrix} a_0 + a_1i & -(a_2 + a_3i) \\ a_2 - a_3i & a_0 - a_1i \end{bmatrix}$$

Untuk setiap $a = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \in Q$ adalah isomorfisma

Diberikan $a, b \in Q$ dengan $a = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ dan $b = b_0 + b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$.

Maka $\Psi = Q \to \mathbb{C}^{2\times 2}$ memenuhi syarat berikut:

Dari definisi Ψ diperoleh $\Psi(a) = \begin{bmatrix} a_0 + a_1i & -(a_2 + a_3i) \\ a_2 - a_3i & a_0 - a_1i \end{bmatrix}$, $\Psi(b) = \begin{bmatrix} b_0 + b_1i & -(b_2 + b_3i) \\ b_2 - b_3i & b_0 - b_1i \end{bmatrix}$

a. Memenuhi syarat $\Psi(a + b) = \Psi(a) + \Psi(b)$

$$\Psi(a + b) = \begin{bmatrix} (a_0 + b_0) + (a_1i + b_1i) & -(a_2 + b_2) + (a_3i + b_3i) \\ (a_2 + b_2) - (a_3i + b_3i) & (a_0 + b_0) - (a_1i + b_1i) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_0 + a_1i & -(a_2 + a_3i) \\ a_2 - a_3i & a_0 - a_1i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 + b_1i & -(b_2 + b_3i) \\ b_2 - b_3i & b_0 - b_1i \end{bmatrix}$$

Jadi terbukti bahwa $\Psi(a + b) = \Psi(a) + \Psi(b)$

b. Memenuhi syarat $\Psi(ab) = \Psi(a)\Psi(b)$

Ruas kiri

$$\Psi(ab) = (a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3)(b_0 + b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3)$$

$$= \Psi\big((a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3) + (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2)e_1 + (a_0b_2 - a_1b_3 + a_2b_0 + a_3b_1)e_2 + (a_0b_3 + a_1b_2 - a_2b_1 + a_3b_0)e_3$$

$$= \begin{bmatrix} (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3) + (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2)i & (a_0b_2 - a_1b_3 + a_2b_0 + a_3b_1) - (a_0b_3 + a_1b_2 - a_2b_1 + a_3b_0)i \\ (a_0b_2 - a_1b_3 + a_2b_0 + a_3b_1) - (a_0b_3 + a_1b_2 - a_2b_1 + a_3b_0)i & (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3) - (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2)i \end{bmatrix}$$

Ruas kanan

$$\Psi(a)\Psi(b) = \begin{bmatrix} a_0 + a_1i & -(a_2 + a_3i) \\ a_2 - a_3i & a_0 - a_1i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 + b_1i & -(b_2 + b_3i) \\ b_2 - b_3i & b_0 - b_1i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3) + (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2)i & (a_0b_2 - a_1b_3 + a_2b_0 + a_3b_1) - (a_0b_3 + a_1b_2 - a_2b_1 + a_3b_0)i \\ (a_0b_2 - a_1b_3 + a_2b_0 + a_3b_1) - (a_0b_3 + a_1b_2 - a_2b_1 + a_3b_0)i & (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3) - (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2)i \end{bmatrix}$$

Terbukti bahwa $\Psi(ab) = \Psi(a)\Psi(b)$

c. Ψ pemetaan satu-satu, yaitu $\Psi(a) = \Psi(b)$ maka $a = b$

Misalkan $a = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$, $b = b_0 + b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$.

Maka $a = b$

Diketahui $\Psi(a) = \Psi(b)$

$$\begin{bmatrix} a_0 + a_1i & -(a_2 + a_3i) \\ a_2 - a_3i & a_0 - a_1i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 + b_1i & -(b_2 + b_3i) \\ b_2 - b_3i & b_0 - b_1i \end{bmatrix}$$

Sehingga didapatkan persamaan berikut

(I) $a_0 + a_1i = b_0 + b_1i$ (II) $-(a_2 + a_3i) = -(b_2 + b_3i)$

(III) $a_2 - a_3i = a_2 - a_3i$ (IV) $a_0 - a_1i = b_0 - b_1i$

Dengan melakukan eliminasi maka diperoleh

$$a = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 = b_0 + b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 = b$$

Jadi terbukti bahwa Ψ pemetaan satu-satu.

d. Ψ pemetaan pada, yaitu untuk setiap $b \in \mathbb{C}^{2\times2}$, terdapat $a \in Q$ sehingga $\Psi(a) = b$.

ambil $b \in \mathbb{C}^{2\times2}$, misal $b = \begin{bmatrix} w_0 + w_1i & -(x_0 + x_1i) \\ y_0 - y_1i & z_0 - z_1i \end{bmatrix}$

karena $\Psi(a) = b$ maka,

$$\begin{bmatrix} a_0 + a_1i & -(a_2 + a_3i) \\ a_2 - a_3i & a_0 - a_1i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_0 + w_1i & -(x_0 + x_1i) \\ y_0 - y_1i & z_0 - z_1i \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh persamaan di atas. Dengan melakukan eliminasi pada persamaan tersebut kemudian melakukan substitusi pada a maka diperoleh

$$a = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$$

$$= \frac{(w_0 + w_1i) + (z_0 - z_1i)}{2} + \frac{(w_0 + w_1i) + (z_0 - z_1i)}{2i}e_1$$

$$+ \frac{(x_0 + x_1i) + (y_0 - y_1i)}{2}e_2 + \frac{(x_0 + x_1i) - (y_0 - y_1i)}{2i}e_2$$

Jadi terbukti $\Psi(a) = b$

Sehingga Ψ merupakan isomorfisma atau $\Psi = Q \to \mathbb{C}^{2\times2}$

2.1.3 Grup Quaternion Diperumum

Grup quaternion diperumum dinotasikan dengan Q_{4n}, dengan $n \in \mathbb{N}$. Q_{4n} adalah suatu grup yang memiliki order $4n$ dan dibangun oleh elemen $\langle a, b\rangle$ yang melambangkan rotasi dan orientasi dari objek-objek dalam tiga dimensi (Sangadji, 2006). Notasi pada grup Q_{4n} didefinisikan sebagai berikut:

$$Q_{4n} = \langle a, b | a^{2n} = e,\ b^2 = a^n,\ b \cdot a \cdot b^{-1} = a^{-1}\rangle$$

$$\text{dengan } \langle a, b\rangle = \{a, a^1, a^2, \dots, a^{n-1}, b, ab, a^2b, \dots, a^{n-1}b\}$$

(Ma dkk, 2013)

sehingga pada $n = 2$ yaitu grup Q_8 dapat dideskripsikan:

$$Q_8 = \langle a, b | a^4 = 1,\ b^2 = a^2,\ b \cdot a \cdot b^{-1} = a^{-1}\rangle$$

Berikut adalah tabel cayley dari Q_8:

Tabel 2. 1 Tabel cayley dari Grup Q_8

$\cdot$	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
1	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
a	a	a^2	a^3	1	ab	a^2b	a^3b	b
a^2	a^2	a^3	1	a	a^2b	a^3b	b	ab
a^3	a^3	1	a	a^2	a^3b	b	ab	a^2b
b	b	a^3b	a^2b	ab	a^2	a	1	a^3
ab	ab	b	a^3b	a^2b	a^3	a^2	a	1
a^2b	a^2b	ab	b	a^3b	1	a^3	a^2	a
a^3b	a^3b	a^2b	ab	b	a	1	a^3	a^2

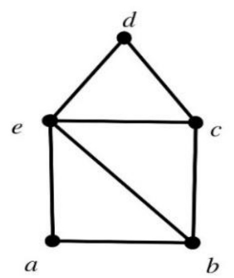
Dari tabel tersebut diperoleh perkalian untuk elemen-elemen pada Q_8 adalah sebagai berikut: $a^4 = 1$, sehingga $a^4 \cdot a^{-1} = 1 \cdot a^{-1} \Leftrightarrow a^3 = a^{-1}$; untuk $b \cdot a \cdot b^{-1} = a^3 \Leftrightarrow b \cdot a = a^3 \cdot b$.

2.1.4 Graf

Graf G adalah pasangan $\big(V(G), E(G)\big)$ dengan $V(G)$ adalah suatu himpunan berhingga dan tak kosong yang berisi objek yang disebut titik. Sedangkan $E(G)$ adalah suatu himpunan pasangan tak terurut dari titik-titik berbeda dari $V(G)$ yang disebut sisi, himpunan ini boleh kosong (Abdussakir dkk, 2009).

Pada graf G berikut:

G:



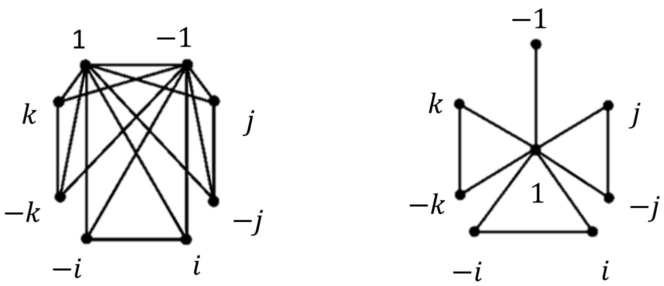
Gambar 2. 1 Gambar Graf G

Pada graf G memuat himpunan titik $V(G)$ dan sisi $E(G)$.

$V(G) = \{a, b, c, d, e\}$

$E(G) = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, e), (e, a\ c), (e, b), (e, c)\}$

Beberapa contoh graf yang dibangun oleh grup berhingga yaitu graf commuting dan graf identitas. Graf commuting dari grup Q adalah graf dengan himpunan simpulnya semua elemen grup Q, dua simpul pada graf Q saling terhubung jika dan hanya jika kedua elemen komutatif di Q. Graf identitas dari grup Q adalah graf dengan himpunan simpulnya semua elemen grup Q, dua simpul pada graf Q saling terhubung jika dan hanya jika $u \times v = v \times u = e$ dan setiap elemen terhubung langsung dengan elemen identitas. Berikut gambar graf commuting dari grup Q dan graf identitas dari grup Q (Syarifudin & Wardana, 2021):



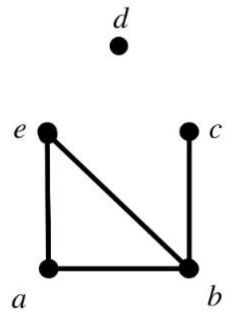
Gambar 2. 2 Gambar Graf Commuting dan Graf Identitas dari Grup Q

2.1.5 Derajat Titik

Pada graf G, untuk setiap $v \in V(G)$ semua simpul yang terhubung langsung dengan v disebut lingkungan v, dinotasikan dengan $N_G(v)$. Derajat dari simpul v dinotasikan dengan $\deg(v)$, adalah banyaknya sisi pada G yang terkait langsung pada v. Sehingga dapat dikaitkan derajat titik v di graf G adalah banyaknya anggota $N_G(v)$, maka $deg(v) = N_G(v)$ (Abdussakir dkk, 2009).

Perhatikan graf G berikut:

G:



Gambar 2. 3 Gambar Graf *G*

Sehingga derajat masing-masing titik pada graf G adalah

$deg(a) = 2$

$deg(b) = 3$

$deg(c) = 1$

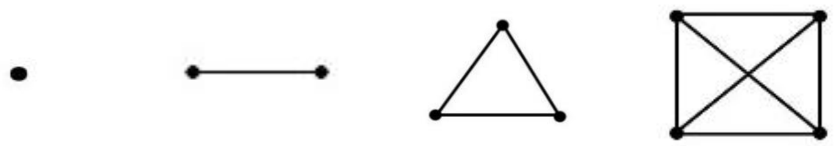
$deg(d) = 0$

$deg(e) = 2$

2.1.6 Graf Lengkap

Graf lengkap adalah suatu graf sederhana yang tak berarah. Setiap simpul pada graf lengkap saling terhubung satu sama lain. Graf lengkap dinotasikan dengan K_n, dengan n adalah jumlah simpul pada graf lengkap (Chartrand dkk, 1986: 9).

Contoh :



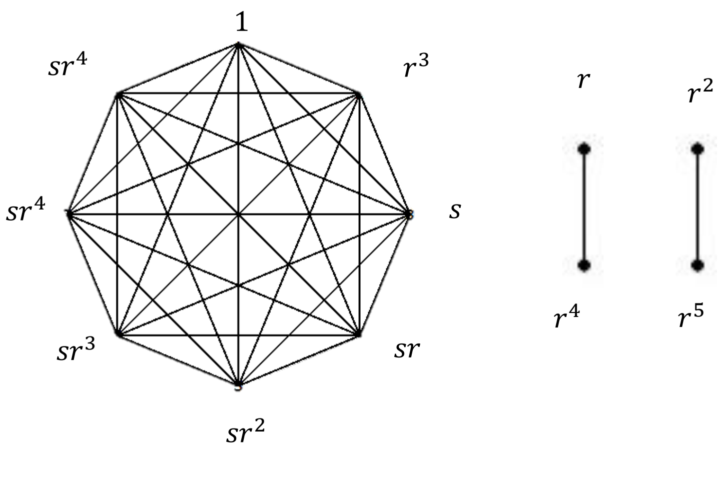
Gambar 2. 4 Gambar Graf Lengkap $K_1, K_2, K_3, dan\ K_4$

Kemudian berikut adalah graf $ES(D_{12})$ yang dituliskan oleh rehman sebagai berikut:

$$ES(D_{12}) \cong K_8 + 2K_2$$

(Rehman dkk, 2022).

$ES(D_{12})$:



Gambar 2. 5 Gambar Graf $ES(D_{12})$

2.1.7 Graf *Equal Square*

Graf *equal square* dari suatu grup berhingga $ES(G)$ adalah graf dengan himpunan simpulnya adalah semua unsur dari G, dengan dua simpul yang saling terhubung jika memiliki hasil kuadrat sama, dengan kata lain $\forall x, y \in V(G)\ (x, y) \in E\big(ES(G)\big) \Leftrightarrow x^2 = y^2$ (Rehman dkk, 2022).

Graf *equal-square* dari grup quaternion diperumum dinotasikan dengan $ES(Q_{4n})$. Grup Q_8 , dengan anggota Q_8 adalah $\{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\ \}$. Untuk menentukan simpul yang saling terhubung pada $ES(Q_{4n})$ dapat ditentukan melalui tabel cayley berikut:

Tabel 2.2 Tabel Cayley dari grup Q_8

$\cdot$	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
1	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
a	a	a^2	a^3	1	ab	a^2b	a^3b	b
a^2	a^2	a^3	1	a	a^2b	a^3b	b	ab
a^3	a^3	1	a	a^2	a^3b	b	ab	a^2b
b	b	a^3b	a^2b	ab	a^2	a	1	a^3
ab	ab	b	a^3b	a^2b	a^3	a^2	a	1
a^2b	a^2b	ab	b	a^3b	1	a^3	a^2	a
a^3b	a^3b	a^2b	ab	b	a	1	a^3	a^2

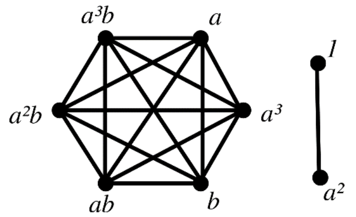
Berdasarkan tabel di atas, berikut adalah simpul-simpul yang saling terhubung langsung:

1. Simpul $a, a^3, b, ab, a^2b, a^3b$ saling terhubung langsung karena $(a)^2 = (a^3)^2 = (b)^2 = (ab)^2 = (a^2b)^2 = (a^3b)^2$.

2. Simpul 1 dan a^2 saling terhubung langsung karena $(1)^2 = (a^2)^2$.

Sehingga $ES(Q_8)$ adalah sebagai berikut:

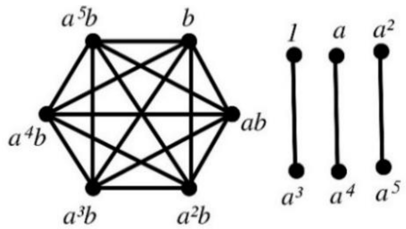
$ES(Q_8)$:



Gambar 2.6 Gambar Graf $ES(Q_8)$

Dari gambar tersebut dapat ditulis $ES(Q_8) \cong K_6 + K_2$. Kemudian berikut adalah $ES(Q_{12}), ES(Q_{16})$, dan $ES(Q_{20})$:

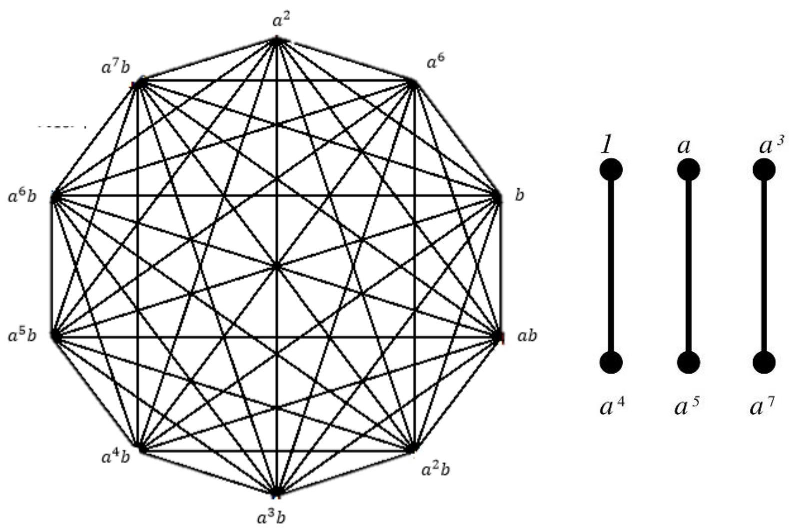
$ES(Q_{12})$



Gambar 2. 7 Gambar Graf $ES(Q_{12})$

Dapat ditulis $ES(Q_{12}) \cong K_6 + 3K_2$

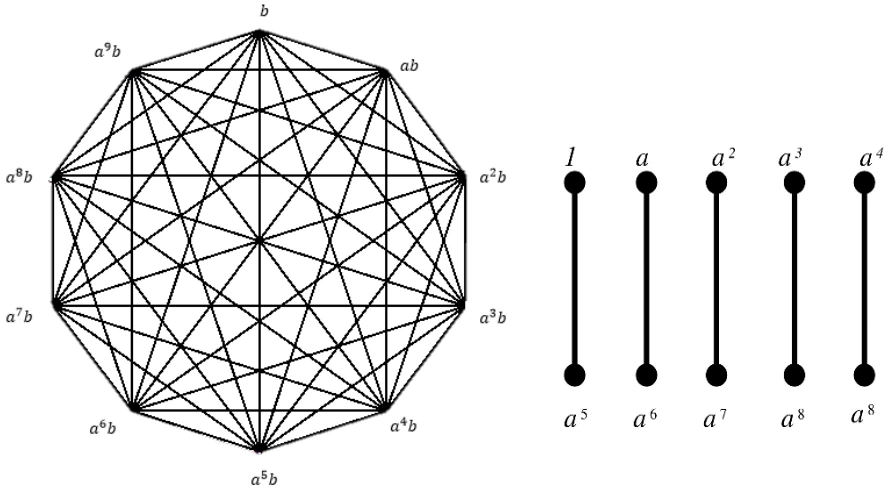
$ES(Q_{16})$:



Gambar 2. 8 Gambar Graf $ES(Q_{16})$

Dapat ditulis $ES(Q_{16}) \cong K_{10} + 3K_2$

$ES(Q_{20})$:



Gambar 2. 9 Gambar Graf $ES(Q_{20})$

Dari gambar tersebut dapat ditulis $ES(Q_{20}) \cong K_{10} + 5K_2$

2.1.8 Indeks Zagreb Pertama dan Kedua

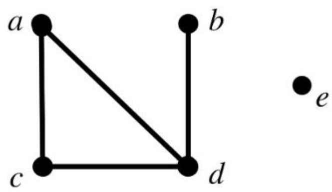
Indeks Zagreb terdiri dari indeks Zagreb pertama dan kedua, didefinisikan secara berturut-turut sebagai jumlah kuadrat dari derajat setiap simpul pada suatu graf dan sebagai jumlah hasil kali setiap simpul yang terhubung langsung pada suatu graf. Keduanya dinotasikan sebagai berikut (Gutman dkk, 2015):

$$M_1(G) = \sum_{v \in V(G)} deg(v)^2$$

$$M_2(G) = \sum_{v,u \in V(G)} \deg(u) \times deg\ (v)$$

Contoh pada suatu graf G berikut

G:



Gambar 2.10 Gambar Graf G

Sehingga dapat diketahui derajat setiap simpul pada graf G sebagai berikut:

$\deg(a) = 2$

$\deg(b) = 1$

$\deg(c) = 2$

$\deg(d) = 3$

$\deg(e) = 0$

Selanjutnya akan ditentukan indeks Zagreb pertama dan kedua pada graf $ES(G)$

$$M_1(G) = \sum_{v \in ES(G)} deg(v)^2$$

$$= \deg(a)^2 + \deg(b)^2 + \deg(c)^2 + \deg(d)^2 + \deg(e)^2$$

$$= (2)^2 + (1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + (0)^2$$

$$= 4 + 1 + 4 + 9 + 0$$

$$= 18$$

$$M_2(G) = \sum_{v,u \in ES(D_6)} \deg(u) \times deg\ (v)$$

$$= (\deg(a) \times \deg(c)) + (deg\ (a) + \deg(d)) + (deg\ (c) + \deg(d))$$

$$+ (deg\ (b) + \deg(d))$$

$$= (2 \times 2) + (2 \times 3) + (2 \times 3) + (1 \times 3)$$

$$= 4 + 6 + 6 + 3$$

$$= 19$$

Sehingga diketahui indeks Zagreb pertama dan kedua dari $ES(G)$ berturut-turut adalah 18 dan 19.

Teorema 2.1

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ indeks Zagreb pertama dan kedua pada graf lengkap berturut turut adalah

$$M_1(K_n) = n(n-1)^2$$

(Chaluvaraju dkk, 2021)

$$M_2(K_n) = \frac{1}{2}n(n-1)^3$$

(Das & Gutman, 2004)

2.2 Kajian Integritas Topik dengan Al-Qur'an

Kitab suci Al-Qur'an disebut sebagai kitab penyempurna dari kitab-kitab yang sudah diturunkan sebelumnya. Fungsinya tidak lain adalah sebagai petunjuk atau pedoman bagi umat manusia. Salah satu petunjuk disebut dalam Al-Qur'an tepatnya pada surat An-Nisa ayat 86 disebutkan.

Artinya:" Dan apabila kamu dihormati dengan suatu (salam) penghormatan, maka balaslah penghormatan itu dengan yang lebih baik, atau balaslah (penghormatan itu, yang sepadan) dengannya. Sungguh, Allah memperhitungkan segala sesuatu."(Qs. An-Nisa: 86)

Tafsir dari ayat tersebut menurut (At-Thabari, 1994) "Doakanlah orang yang mendoakanmu dengan baik, dari apa yang ia doakan untuk kamu perintah yaitu balaslah penghormatan itu dengan yang serupa". Dalam ayat tersebut terdapat perintah yaitu hendaknya membalas suatu penghormatan dengan yang lebih baik atau sepadan, sehingga terjadi momen memberi dan membalas suatu penghormatan. Dalam ayat tersebut terdapat perintah Allah agar manusia saling menjaga tali persaudaraan, saling menghargai dan saling mengingat sesama.

Suatu pemberian dan pembalasan tidak selalu tentang materi, seperti yang dijelaskan pada hadis At-Tirmidzi no. 2035,

مَنْ أُسَامَةَ بْنِ زَيْدٍ قَالَ قَالَ رَسُولُ اللَّهِ - صلى الله عليه وسلم -« مَنْ صُنِعَ إِلَيْهِ مَعْرُوفٌ فَقَالَ لِفَاعِلِهِ جَزَاكَ اللَّهُ خَيْرًا فَقَدْ أَبْلَغَ فِى الثَّنَاءِ » (رواه ا لترمذ ي)

"Dari Usman bin Zaid radhiyallahu'anhuma, ia berkata, Rosulullah shallallahu'alaihi wa salam bersabda, "Barang siapa yang mendapat kebaikan dari orang lain, hendaklah dia mengatakan jazakallah khaira,, dia telah

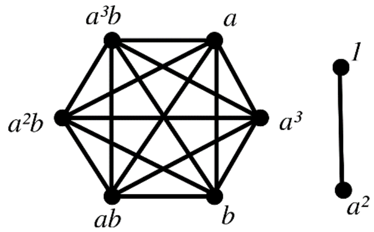
memaksimalkan memuji orang tersebut'"'. (*Shahih. HR. At-Tirmidzi no. 2035, An-Nasa'i no. 180, Ibnu Hibban no. 3404).*

Sehingga membalas suatu kebaikan orang lain dapat dilakukan dengan beberapa bentuk pertama dengan membalas kebaikan sejenis yang telah ia terima, kedua membalas lebih banyak dari kebaikan yang telah ia terima, dan ketiga dapat membalas dengan mendoakan orang yang telah memberikan kepadanya. Sehingga dalam peristiwa pemberian dan pembalasan tidak memaksa membalas suatu pemberian dengan hal yang sama dan serupa. Peristiwa saling memberi dan membalas dapat direpresentasikan dalam ilmu teori graf yaitu dengan graf *equal square* yang setiap elemennya terhubung jika $\mathrm{a}^2 = \mathrm{b}^2 = e$, dimana setiap manusia dapat direpresentasikan sebagai a dan b sedangkan keduanya saling terhubung jika hasil kuadrat keduanya e yang direpresentasikan sebagai tali silaturahim, rasa saling menghargai satu sama lain, dan lain-lain.

2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung

Langkah awal dalam mencari rumusan umum pada indeks Zagreb pertama dan kedua adalah dengan menggambar graf. Penelitian ini membahas graf $ES(Q_{4n})$ sehingga langkah awal dilakukan dengan menggambar graf $ES(Q_8)$.

$\boldsymbol{ES}(Q_8)$:



Gambar 2.11 Gambar Graf $(\boldsymbol{ES}(\boldsymbol{Q_8}))$

Selanjutnya adalah menentukan derajat pada setiap titik pada graf tersebut

$\deg(1) = 1 \qquad \deg(b) = 5$

$\deg(a) = 5 \quad \deg(ab) = 5$

$\deg(a^2) = 1 \quad \deg(a^2b) = 5$

$\deg(a^3) = 5 \quad \deg(a^3b) = 5$

Kemudian menentukan M_1 dan M_2 pada graf $ES(Q_8)$

$$M_1(ES(Q_8) = \sum_{v \in ES(Q_8)} deg(v)^2$$

$$= \deg(1)^2 + \deg(a)^2 + \deg(a^2)^2 + \deg(a^3)^2 + \deg(b)^2 + \deg(ab)^2 + \deg(a^2b)^2 + \deg(a^3b)^2$$

$$= (1)^2 + (5)^2 + (1)^2 + (5)^2 + (5)^2 + (5)^2 + (5)^2 + (5)^2$$

$$= 2(1) + 6(25)$$

$$= 152$$

$$M_2(ES(Q_8) = \sum_{v,u \in ES(Q_8)} \deg(u) \times deg\ (v)$$

$$= (\deg(a) \times \deg(a^3)) + (deg\ (a) \times \deg(b)) + (deg\ (a) \times \deg(a^2b)) + (deg\ (a) \times \deg(a^3b)) + (deg\ (a^3) \times \deg(b)) + (deg\ (a^3) \times \deg(ab)) + (\deg(a^3) \times \deg(a^2b)) + (\deg(a^3) \times \deg(a^3b)) + (\deg(b) \times \deg(ab)) + (\deg(b) \times \deg(a^2b)) + (\deg(b) \times \deg(a^3\mathrm{b})) + (\deg(ab) \times \deg(a^2\mathrm{b})) + (\deg(ab) \times \deg(a^3\mathrm{b})) + (\deg(a^2\mathrm{b}) \times \deg(a^3\mathrm{b})) + (\deg(1) \times \deg(a^2))$$

$$= (5 \times 5) + (5 \times 5) + (5 \times 5) + (5 \times 5) + (5 \times 5) + (5 \times 5) + (5 \times 5) + (5 \times 5) + (5 \times 5) + (5 \times 5) + (5 \times 5) + (5 \times 5) + (5 \times 5) + (5 \times 5) + (5 \times 5) + (1 \times 1)$$

$$= 15(5 \times 5) + 1(1 \times 1)$$

$$= 376$$

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini dilakukan pendekatan kualitatif, yaitu mendeskripsikan suatu rumus umum pada indeks Zagreb pertama dan kedua pada graf *equal square* dari grup quaternion diperumum. Jenis penelitian yang dilakukan berupa *library research* atau studi kepustakaan. Sehingga penelitian ini dilakukan dengan mengkaji beberapa buku dan jurnal terdahulu yang berhubungan dengan teori graf dan struktur aljabar agar dapat menjadi rujukan pada penelitian ini.

3.2 Pra Penelitian

Pra penelitian dilakukan dengan mengkaji beberapa referensi seperti jurnal, skripsi, dan buku yang terdahulu dan berhubungan dengan indeks dengan basis derajat dan graf *equal square* dari grup quaternion diperumum. Beberapa referensi tersebut digunakan sebagai rujukan, referensi dan pelajaran oleh peneliti pada skripsi ini.

3.3 Tahapan Penelitian

Adapun tahap pada penelitian ini adalah:

1. Menentukan anggota dari grup quaternion diperumum dengan $n \geq 2$ dengan $n = 2, 3, 4, 5$ yaitu $Q_8,\ Q_{12},\ Q_{16},\ Q_{20}$.
2. Menggambar graf *equal-square* dari grup quaternion diperumum Q_8.

3. Menentukan nilai *degree* pada setiap simpul di graf *equal-square* dari grup quaternion diperumum Q_8.
4. Menghitung nilai dan indeks Zagreb pertama dan kedua pada graf *equal-square* dari grup quaternion diperumum Q_8.
5. Mengulang langkah 1, 2, 3, dan 4 untuk grup quaternion diperumum Q_{12}, Q_{16}, Q_{20}.
6. Merumuskan pola dan indeks Zagreb pertama dan kedua pada graf *equal-square* dari grup quaternion diperumum Q_8, Q_{12}, Q_{16}, Q_{20}.
7. Menentukan pola dari indeks Zagreb pertama dan kedua pada graf *equal-square* dari grup quaternion diperumum Q_8, Q_{12}, Q_{16}, Q_{20}.
8. Membuat konjektur pada pola tersebut dan membuat teorema serta pembuktiannya.

BAB IV

PEMBAHASAN

Bab ini berisi pembahasan rumus indeks Zagreb pertama dan kedua pada graf *equal square* dari grup quaternion diperumum. Untuk mengetahui pola indeks Zagreb pertama dan kedua pada graf *equal square* diamati indeks dari Q_{4n} untuk $n \in \{2,3,4,5\}$.

4.1 Indeks Zagreb Pertama dan Kedua pada Graf *Equal Square* dari Grup Quaternion Diperumum Q_{4n}, $n \in \{2,3,4,5\}$

Subbab ini membahas beberapa percobaan pada indeks Zagreb pertama dan kedua dari $ES(Q_{4n})$ dengan $n = 2,3,4,5$ dikarenakan sudah didapatkan dugaan pola dan dibuktikan pada subbab berikutnya.

4.1.1 Indeks Zagreb Pertama dan Kedua pada Graf *Equal Square* dari Grup Quaternion Diperumum Q_8

Grup quaternion diperumum dengan $n = 2$ (Q_8) yang terdiri dari $Q_8 = \{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$. Selanjutnya menentukan elemen yang saling terhubung langsung dengan tabel cayley dari Q_8 berikut:

Tabel 4. 1 Tabel Cayley dari Grup Q_8

$\cdot$	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
1	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
a	a	a^2	a^3	1	ab	a^2b	a^3b	b
a^2	a^2	a^3	1	a	a^2b	a^3b	b	ab
a^3	a^3	1	a	a^2	a^3b	b	ab	a^2b

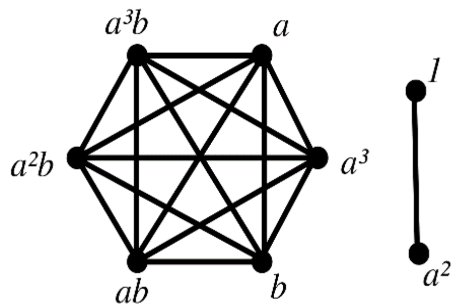
b	b	a^3b	a^2b	ab	a^2	a	1	a^3
ab	ab	b	a^3b	a^2b	a^3	a^2	a	1
a^2b	a^2b	ab	b	a^3b	1	a^3	a^2	a
a^3b	a^3b	a^2b	ab	b	a	1	a^3	a^2

Berdasarkan tabel di atas berikut adalah simpul-simpul yang saling terhubung langsung:

1. Simpul $a, a^3, b, ab, a^2b, a^3b$ saling terhubung langsung karena $(a)^2 = (a^3)^2 = (b)^2 = (ab)^2 = (a^2b)^2 = (a^3b)^2$
2. Simpul 1 dan a^2 saling terhubung langsung karena $(1)^2 = (a^2)^2$

sehingga membentuk suatu graf *equal square* dari Q_8

$ES(Q_8)$:



Gambar 4. 1 Gambar Graf $ES(Q_8)$

Berdasarkan gambar tersebut dicari derajat titik dari setiap simpul

$Deg\ (1) = 1$ $\quad$ $Deg\ (b) = 5$

$Deg\ (a) = 5$ $\quad$ $Deg\ (ab) = 5$

$Deg\ (a^2) = 1$ $\quad$ $Deg\ (a^2b) = 5$

$Deg\ (a^3) = 5$ $\quad$ $Deg\ (a^3b) = 5$

Kemudian menentukan nilai indeks Zagreb pertama dan kedua pada $ES(Q_8)$

$$M_1(ES(Q_8) = \sum_{v \in ES(Q_8)} deg(v)^2$$

$$= \deg(1)^2 + \deg(a)^2 + \deg(a^2)^2 + \deg(a^3)^2 + \deg(b)^2$$

$$+ \deg(ab)^2 + \deg(a^2b)^2 + \deg(a^3b)^2$$

$$= (1)^2 + (5)^2 + (1)^2 + (5)^2 + (5)^2 + (5)^2 + (5)^2 + (5)^2$$

$$= 2(1)^2 + 6(5)^2$$

$$= 152$$

$$M_2(ES(Q_8) = \sum_{v,u \in ES(Q_8)} \deg(u) \times deg\ (v)$$

$$= (\deg(a) \times \deg(a^3)) + (deg\ (a) \times \deg(b))$$

$$+ (deg\ (a) \times \deg(ab)) + (deg\ (a) \times \deg(a^2b))$$

$$+ (deg\ (a) \times \deg(a^3b)) + (deg\ (a^3) \times \deg(b))$$

$$+ (\deg(a^3) \times \deg(ab)) + (\deg(a^3) \times \deg(a^2b))$$

$$+ (\deg(a^3) \times \deg(a^3\mathrm{b})) + (\deg(b) \times \deg(ba))$$

$$+ (\deg(b) \times \deg(a^2\mathrm{b})) + (\deg(b) \times \deg(a^3\mathrm{b}))$$

$$+ (\deg(ab) \times \deg(a^2b)) + (\deg(ab) \times \deg(a^3\mathrm{b}))$$

$$+ (\deg(a^2b) \times \deg(a^3b)) + (\deg(1) \times \deg(a^2))$$

$$= (5 \times 5) + (5 \times 5) + (5 \times 5) + (5 \times 5) + (5 \times 5) + (5 \times 5)$$

$$+ (5 \times 5) + (5 \times 5) + (5 \times 5) + (5 \times 5) + (5 \times 5) + (5 \times 5) + (5 \times 5)$$

$$+ (5 \times 5) + (5 \times 5) + (5 \times 5) + (1 \times 1)$$

$$= 15(5 \times 5) + 1(1 \times 1)$$

$$= 375$$

4.1.2 Indeks Zagreb Pertama dan Kedua pada Graf *Equal Square* dari Grup Quaternion Diperumum Q_{12}

Grup quaternion diperumum dengan $n = 3$ (Q_{12}) yang terdiri dari $Q_{12} = \{1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, b, ab, a^2b, a^3b, a^4b, a^5b\}$. Selanjutnya menentukan elemen yang saling terhubung langsung dengan tabel cayley dari Q_{12} berikut:

Tabel 4. 2 Tabel Cayley dari Grup Q_{12}

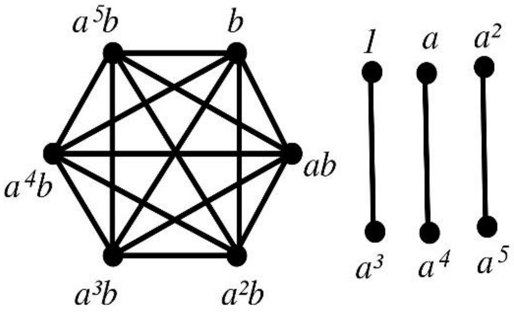
$\cdot$	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b
1	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b
a	a	a^2	a^3	a^4	a^5	1	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	b
a^2	a^2	a^3	a^4	a^5	1	a	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	b	ab
a^3	a^3	a^4	a^5	1	a	a^2	a^3b	a^4b	a^5b	b	ab	a^2b
a^4	a^4	a^5	1	a	a^2	a^3	a^4b	a^5b	b	ab	a^2b	a^3b
a^5	a^5	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5b	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b
b	b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	a^3	a^2	a	1	a^5	a^4
ab	ab	b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	a^4	a^3	a^2	a	1	a^5
a^2b	a^2b	ab	b	a^5b	a^4b	a^3b	a^5	a^4	a^3	a^2	a	1
a^3b	a^3b	a^2b	ab	b	a^5b	a^4b	1	a^5	a^4	a^3	a^2	a
a^4b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^5b	a	1	a^5	a^4	a^3	a^2
a^5b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^2	a	1	a^5	a^4	a^3

Berdasarkan tabel di atas berikut adalah simpul-simpul yang saling terhubung langsung:

1. Simpul $b, ab, a^2b, a^3b, a^4b,$ dan a^5b saling terhubung langsung karena $(b)^2 = (ab)^2 = (a^2b)^2 = (a^3b)^2 = (a^4b)^2 = (a^5b)^2$
2. Simpul 1 dan a^3 saling terhubung langsung karena $(1)^2 = (a^3)^2$
3. Simpul a dan a^4 saling terhubung langsung karena $(a)^2 = (a^4)^2$
4. Simpul a^3 dan a^5 saling terhubung langsung karena $(a^3)^2 = (a^5)^2$

sehingga membentuk suatu graf *equal square* dari Q_{12}

$ES(Q_{12})$:



Gambar 4. 2 Gambar Graf $ES(Q_{12})$

Berdasarkan gambar tersebut dicari derajat titik dari setiap simpul

$Deg\ (1) = 1$	$Deg\ (b) = 5$
$Deg\ (a) = 1$	$Deg\ (ab) = 5$
$Deg\ (a^2) = 1$	$Deg\ (a^2b) = 5$
$Deg\ (a^3) = 1$	$Deg\ (a^3b) = 5$
$Deg(a^4) = 1$	$Deg\ (a^4b) = 5$
$Deg(a^5) = 1$	$Deg\ (a^5b) = 5$

Kemudian menentukan nilai indeks Zagreb pertama dan kedua pada $ES(Q_{12})$

$$M_1(ES(Q_{12}) = \sum_{v \in ES(Q_{12})} deg(v)^2$$

$$= \deg(1)^2 + \deg(a)^2 + \deg(a^2)^2 + \deg(a^3)^2 + \deg(a^4)^2$$

$$+ \deg(a^5)^2 + \deg(b)^2 + \deg(ab)^2 + \deg(a^2b)^2 + \deg(a^3b)^2$$

$$+ \deg(a^4b)^2 + \deg(a^5b)^2$$

$$= (1)^2 + (1)^2 + (1)^2 + (1)^2 + (1)^2 + (1)^2 + (5)^2 + (5)^2$$

$$+ (5)^2 + (5)^2 + (5)^2 + (5)^2$$

$$= 6(1) + 6(5)^2$$

$$= 156$$

$$M_2(ES(Q_{12}) = \sum_{v,u \in ES(Q_{12})} \deg(u) \times deg\ (v)$$

$$= (\deg(b) \times \deg(ab)) + (\deg(b) \times \deg(a^2\mathrm{b}))$$

$$+ (\deg(b) \times \deg(a^3\mathrm{b})) + (\deg(b) \times \deg(a^4\mathrm{b}))$$

$$+ (\deg(b) \times \deg(a^5\mathrm{b})) + (\deg(ab) \times \deg(a^2b))$$

$$+ (\deg(ab) \times \deg(a^3\mathrm{b})) + (\deg(ab) \times \deg(a^4b))$$

$$+ (\deg(\mathrm{ab}) \times \deg(a^5\mathrm{b})) + (\deg(a^2\mathrm{b}) \times \deg(a^3\mathrm{b}))$$

$$+ (\deg(a^2\mathrm{b}) \times \deg(a^4\mathrm{b})) + (\deg(a^2\mathrm{b}) \times \deg(a^5\mathrm{b}))$$

$$+ (\deg(a^3\mathrm{b}) \times \deg(a^4\mathrm{b})) + (\deg(a^3\mathrm{b}) \times \deg(a^5\mathrm{b}))$$

$$+ (\deg(a^4\mathrm{b}) \times \deg(a^5\mathrm{b})) + (\deg(1) \times \deg(\mathrm{a}^3))$$

$$+ (\deg(a) \times \deg(a^4)) + (\deg(a^2) \times \deg(a^5))$$

$$= (5 \times 5) + (5 \times 5) + (5 \times 5) + (5 \times 5) + (5 \times 5) + (5 \times 5)$$

$$+ (5 \times 5) + (5 \times 5) + (5 \times 5) + (5 \times 5) + (5 \times 5) + (5 \times 5)$$

$$+ (5 \times 5) + (5 \times 5) + (5 \times 5) + (1 \times 1)$$

$$= 15(5 \times 5) + 3(1 \times 1)$$

$$= 378$$

4.1.3 Indeks Zagreb Pertama dan Kedua pada Graf Equal Square dari Grup Quaternion Diperumum Q_{16}

Grup quaternion diperumum dengan $\mathrm{n} = 4$ (Q_{16}) yang terdiri dari $\mathrm{Q}_{16} = \{1, \mathrm{a}, \mathrm{a}^2, \mathrm{a}^3, \mathrm{a}^4, \mathrm{a}^5, \mathrm{a}^6, \mathrm{a}^7, \mathrm{b}, \mathrm{ab}, \mathrm{a}^2\mathrm{b}, \mathrm{a}^3\mathrm{b}, \mathrm{a}^4\mathrm{b}, \mathrm{a}^5\mathrm{b}, \mathrm{a}^6\mathrm{b}, \mathrm{a}^7\mathrm{b}\}$. Selanjutnya menentukan elemen yang saling terhubung langsung dengan tabel cayley dari Q_{16} berikut:

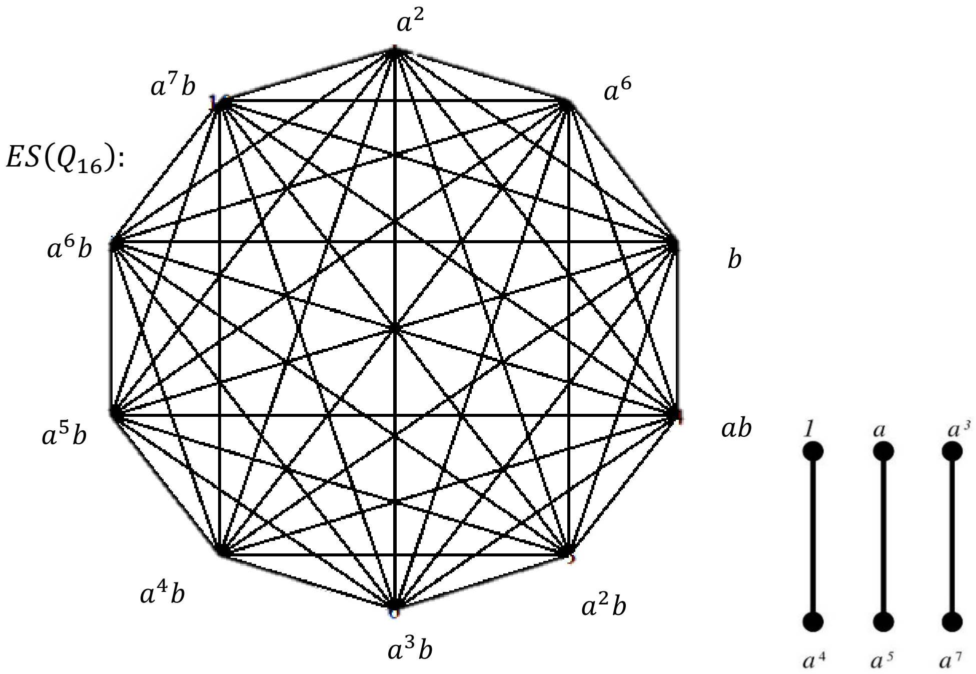
Tabel 4. 3 Tabel Cayley dari Grup Q_{16}

$\cdot$	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b
1	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b
a	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	1	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b	b
a^2	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	1	a	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b	b	ab
a^3	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	1	a	a^2	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b	b	ab	a^2b
a^4	a^4	a^5	a^6	a^7	1	a	a^2	a^3	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b	b	ab	a^2b	a^3b
a^5	a^5	a^6	a^7	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5b	a^6b	a^7b	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b
a^6	a^6	a^7	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6b	a^7b	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b
a^7	a^7	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7b	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b
b	b	a^7b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	a^4	a^3	a^2	a	1	a^7	a^6	a^5
ab	ab	b	a^7b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	a^5	a^4	a^3	a^2	a	1	a^7	a^6
a^2b	a^2b	ab	b	a^7b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^6	a^5	a^4	a^3	a^2	a	1	a^7
a^3b	a^3b	a^2b	ab	b	a^7b	a^6b	a^5b	a^4b	a^7	a^6	a^5	a^4	a^3	a^2	a	1
a^4b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^7b	a^6b	a^5b	1	a^7	a^6	a^5	a^4	a^3	a^2	a
a^5b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^7b	a^6b	a	1	a^7	a^6	a^5	a^4	a^3	a^2
a^6b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^7b	a^2	a	1	a^7	a^6	a^5	a^4	a^3
a^7b	a^7b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^3	a^2	a	1	a^7	a^6	a^5	a^4

Berdasarkan tabel di atas berikut adalah simpul-simpul yang saling terhubung langsung:

1. Simpul $a^2, a^6, b, ab, a^2b, a^3b, a^4b, a^5b, a^6b$ dan a^7b saling terhubung langsung karena $(a^2)^2 = (a^6)^2 = (b)^2 = (ab)^2 = (a^2b)^2 = (a^3b)^2 = (a^4b)^2 = (a^5b)^2$
2. Simpul 1 dan a^4 saling terhubung langsung karena $(1)^2 = (a^4)^2$
3. Simpul a dan a^5 saling terhubung langsung karena$(a)^2 = (a^5)^2$
4. Simpul a^3 dan a^7 saling terhubung langsung karena $(a^3)^2 = (a^7)^2$

Sehingga membentuk suatu graf *equal square* dari Q_{16}



Gambar 4. 3 Gambar Graf $ES(Q_{16})$

Berdasarkan gambar tersebut dicari derajat titik dari setiap simpul

$Deg\ (1) = 1$ $\quad$ $Deg\ (b) = 9$

$Deg\ (a) = 1$ $\quad$ $Deg\ (ab) = 9$

$Deg\ (a^2) = 9$ $\quad$ $Deg\ (a^2b) = 9$

$Deg\ (a^3) = 1$ $\quad$ $Deg\ (a^3b) = 9$

$Deg(a^4) = 1$ $\quad$ $Deg\ (a^4b) = 9$

$Deg(a^5) = 1$ $\quad$ $Deg\ (a^5b) = 9$

$Deg(a^6) = 9$ $\quad$ $Deg(a^6b) = 9$

$Deg(a^7) = 1$ $\quad$ $Deg(a^7b) = 9$

Kemudian menentukan nilai indeks Zagreb pertama dan kedua pada $ES(Q_{16})$

$$M_1(ES(Q_{16}) = \sum_{v \in ES(Q_{16})} deg(v)^2$$

$$= \deg(1)^2 + \deg(a)^2 + \deg(a^2)^2 + \deg(a^3)^2 + \deg(a^4)^2$$

$$+ \deg(a^5)^2 + \deg(a^6)^2 + \deg(a^7)^2 + \deg(b)^2 + \deg(ab)^2$$

$$+ \deg(a^2b)^2 + \deg(a^3b)^2 + \deg(a^4b)^2 + \deg(a^5b)^2$$

$$+ + \deg(a^6b)^2 + \deg(a^7b)^2$$

$$= (1)^2 + (1)^2 + (5)^2 + (1)^2 + (1)^2 + (5)^2 + (1)^2 + (1)^2 + (5)^2$$

$$+ (5)^2 + (5)^2 + (5)^2 + (5)^2 + (5)^2 + (5)^2 + (5)^2$$

$$= 6(1)^2 + 10(9)^2$$

$$= 816$$

$$M_2(ES(Q_{16}) = \sum_{v,u \in ES(Q_{16})} \deg(u) \times \deg(v)$$

$= (\deg(a^2) \times \deg(a^6)) + (\deg(a^2) \times \deg(b)) + (\deg(a^2) \times \deg(ab)) +$

$(\deg(a^2) \times \deg(a^2b)) + (\deg(a^2) \times \deg(a^3b)) + (\deg(a^2) \times \deg(a^4b)) +$

$(\deg(a^2) \times \deg(a^5b)) + (\deg(a^2) \times \deg(a^6b)) + (\deg(a^2) \times \deg(a^7b)) +$

$(\deg(a^6) \times \deg(b)) + (\deg(a^6) \times \deg(ab)) + (\deg(a^6) \times \deg(a^2b)) +$

$(\deg(a^6) \times \deg(a^3b)) + (\deg(a^6) \times \deg(a^4b)) + (\deg(a^6) \times \deg(a^5b)) +$

$(\deg(a^6) \times \deg(a^6b)) + (\deg(a^6) \times \deg(a^7b)) + (\deg(b) \times \deg(ab)) +$

$(\deg(b) \times \deg(a^2\mathrm{b})) + (\deg(b) \times \deg(a^3\mathrm{b})) + (\deg(b) \times \deg(a^4\mathrm{b})) +$

$(\deg(b) \times \deg(a^5\mathrm{b})) + (\deg(b) \times \deg(a^6\mathrm{b})) + (\deg(b) \times \deg(a^7\mathrm{b})) +$

$(\deg(ab) \times \deg(a^2b)) + (\deg(ab) \times \deg(a^3\mathrm{b})) + (\deg(ab) \times \deg(a^4b)) +$

$(\deg(\mathrm{ab}) \times \deg(a^5\mathrm{b})) + (\deg(ab) \times \deg(a^6b)) + (\deg(\mathrm{ab}) \times \deg(a^7\mathrm{b})) +$

$(\deg(a^2\mathrm{b}) \times \deg(a^3\mathrm{b})) + (\deg(a^2\mathrm{b}) \times \deg(a^4\mathrm{b})) + (\deg(a^2\mathrm{b}) \times \deg(a^5\mathrm{b})) +$

$(\deg(a^2b) \times \deg(a^6b)) + (\deg(\mathrm{a}^2\mathrm{b}) \times \deg(a^7\mathrm{b})) + (\deg(a^3\mathrm{b}) \times \deg(a^4\mathrm{b})) +$

$(\deg(a^3\mathrm{b}) \times \deg(a^5\mathrm{b})) + (\deg(a^3\mathrm{b}) \times \deg(a^6\mathrm{b})) + (\deg(a^3\mathrm{b}) \times \deg(a^7\mathrm{b})) +$

$(\deg(a^4\mathrm{b}) \times \deg(a^5\mathrm{b})) + (\deg(a^4\mathrm{b}) \times \deg(a^6\mathrm{b})) + (\deg(a^4\mathrm{b}) \times \deg(a^7\mathrm{b})) +$

$(\deg(a^5\mathrm{b}) \times \deg(a^6\mathrm{b})) + (\deg(a^5\mathrm{b}) \times \deg(a^7\mathrm{b})) + (\deg(a^6\mathrm{b}) \times \deg(a^7\mathrm{b})) +$

$(\deg(1) \times \deg(\mathrm{a}^4)) + (\deg(a) \times \deg(a^5)) + (\deg(a^3) \times \deg(a^7))$

$= 45(9 \times 9) + 3(1 \times 1)$

$= 3645$

4.1.4 Indeks Zagreb Pertama dan Kedua pada Graf *Equal Square* dari Grup Quaternion Diperumum Q_{20}

Grup quaternion diperumum dengan $n = 5$ (Q_{20}) yang terdiri dari $Q_{20} = \{1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, b, ab, a^2b, a^3b, a^4b, a^5b, a^6b, a^7b, a^8b, a^9b\}$. Selanjutnya menentukan elemen yang saling terhubung langsung akan ditunjukkan dengan tabel cayley dari Q_{20} berikut:

Tabel 4. 4 Tabel Cayley dari Grup Q_{20}

$\cdot$	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b	a^8b	a^9b
1	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b	a^8b	a^9b
a	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	1	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b	a^8b	a^9b	b
a^2	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	1	a	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b	a^8b	a^9b	b	ab
a^3	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	1	a	a^2	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b	a^8b	a^9b	b	ab	a^2b

a^4	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	1	a	a^2	a^3	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b	a^8b	a^9b	b	ab	a^2b	a^3b
a^5	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5b	a^6b	a^7b	a^8b	a^9b	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b
a^6	a^6	a^7	a^8	a^9	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6b	a^7b	a^8b	a^9b	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b
a^7	a^7	a^8	a^9	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7b	a^8b	a^9b	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b
a^8	a^8	a^9	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8b	a^9b	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b
a^9	a^9	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9b	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b	a^8b
b	b	a^9b	a^8b	a^7b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	a^5	a^4	a^3	a^2	a	1	a^9	a^8	a^7	a^6
ab	ab	b	a^9b	a^8b	a^7b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	a^6	a^5	a^4	a^3	a^2	a	1	a^9	a^8	a^7
a^2b	a^2b	ab	b	a^9b	a^8b	a^7b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^7	a^6	a^5	a^4	a^3	a^2	a	1	a^9	a^8
a^3b	a^3b	a^2b	ab	b	a^9b	a^8b	a^7b	a^6b	a^5b	a^4b	a^8	a^7	a^6	a^5	a^4	a^3	a^2	a	1	a^9
a^4b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^9b	a^8b	a^7b	a^6b	a^5b	a^9	a^8	a^7	a^6	a^5	a^4	a^3	a^2	a	1
a^5b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^9b	a^8b	a^7b	a^6b	1	a^9	a^8	a^7	a^6	a^5	a^4	a^3	a^2	a
a^6b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^9b	a^8b	a^7b	a	1	a^9	a^8	a^7	a^6	a^5	a^4	a^3	a^2
a^7b	a^7b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^9b	a^8b	a^2	a	1	a^9	a^8	a^7	a^6	a^5	a^4	a^3
a^8b	a^8b	a^7b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^9b	a^3	a^2	a	1	a^9	a^8	a^7	a^6	a^5	a^4
a^9b	a^9b	a^8b	a^7b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^4	a^3	a^2	a	1	a^9	a^8	a^7	a^6	a^5

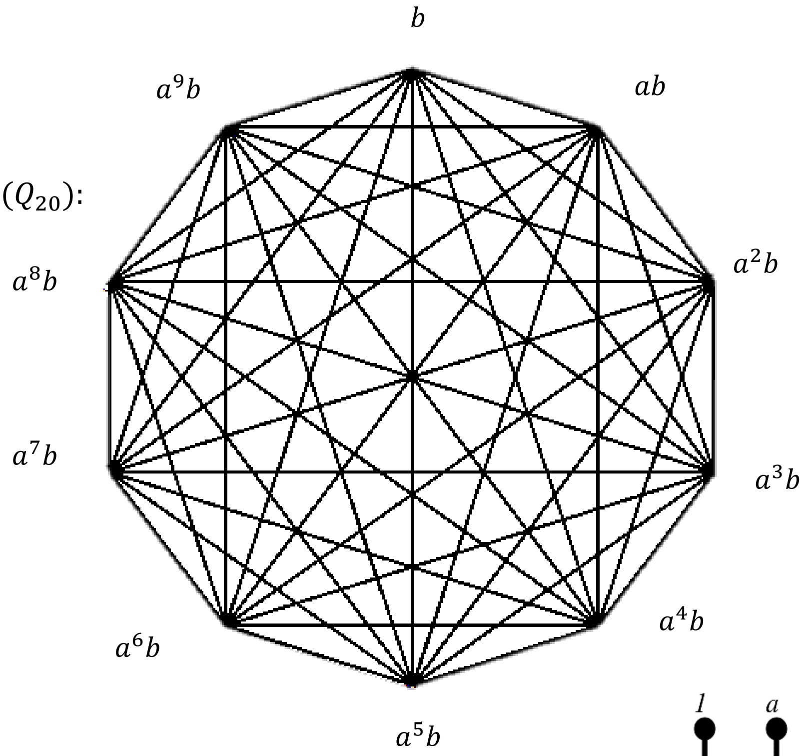
Berdasarkan tabel di atas berikut adalah simpul-simpul yang saling terhubung langsung:

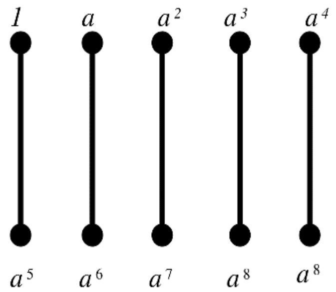
1. Simpul $b, ab, a^2b, a^3b, a^4b, a^5b, a^6b$ a^7b, a^8b dan a^9b saling terhubung langsung karena $(b)^2 = (ab)^2 = (a^2b)^2 = (a^3b)^2 = (a^4b)^2 = (a^5b)^2 = (a^6b)^2 = (a^7b)^2 = (a^8b)^2 = (a^9b)^2$
2. Simpul 1 dan a^5 saling terhubung langsung karena $(1)^2 = (a^5)^2$
3. Simpul a dan a^6 saling terhubung langsung karena $(a)^2 = (a^6)^2$
4. Simpul a^2 dan a^7 saling terhubung langsung karena $(a^2)^2 = (a^7)^2$
5. Simpul a^3 dan a^8 saling terhubung langsung karena $(a^3)^2 = (a^8)^2$

6. Simpul a^4 dan a^9 saling terhubung langsung karena $(a^4)^2 = (a^9)^2$

Sehingga membentuk suatu graf *equal square* dari Q_{20}

$ES(Q_{20})$:





Gambar 4. 4 Gambar Graf $ES(Q_{20})$

Berdasarkan gambar tersebut dicari derajat titik dari setiap simpul

$Deg\ (1) = 1$ $\qquad$ $Deg\ (b) = 9$

$Deg\ (a) = 1$ $\qquad$ $Deg\ (ab) = 9$

$Deg\ (a^2) = 1$ $\qquad$ $Deg\ (a^2b) = 9$

$Deg\ (a^3) = 1$ $\qquad$ $Deg\ (a^3b) = 9$

$Deg(a^4) = 1$ $\qquad$ $Deg\ (a^4b) = 9$

$Deg(a^5) = 1$ $\qquad$ $Deg\ (a^5b) = 9$

$Deg(a^6) = 1$ $\quad$ $Deg(a^6b) = 9$

$Deg(a^7) = 1$ $\quad$ $Deg(a^7b) = 9$

$Deg(a^8) = 1$ $\quad$ $Deg(a^8b) = 9$

$Deg(a^9) = 1$ $\quad$ $Deg(a^9b) = 9$

Kemudian menentukan nilai indeks Zagreb pertama dan kedua pada $ES(Q_{20})$

$$M_1(ES(Q_{20}) = \sum_{v \in ES(Q_{20})} deg(v)^2$$

$$= \deg(1)^2 + \deg(a)^2 + \deg(a^2)^2 + \deg(a^3)^2 + \deg(a^4)^2$$

$$+ \deg(a^5)^2 + \deg(a^6)^2 + \deg(a^7)^2 + \deg(a^8)^2 + \deg(a^9)^2$$

$$+ \deg(b)^2 + \deg(ab)^2 + \deg(a^2b)^2 + \deg(a^3b)^2 + \deg(a^4b)^2$$

$$+ \deg(a^5b)^2 + \deg(a^6b)^2 + \deg(a^7b)^2 + \deg(a^8b)^2$$

$$+ \deg(a^9b)^2$$

$$= (1)^2 + (1)^2 + (1)^2 + (1)^2 + (1)^2 + (1)^2 + (1)^2 + (1)^2 + (1)^2$$

$$+ (1)^2 + (9)^2 + (9)^2 + (9)^2 + (9)^2 + (9)^2 + (9)^2 + (9)^2 + (9)^2$$

$$+ (9)^2 + (9)^2$$

$$= 10(1)^2 + 10(9)^2$$

$$= 820$$

$$M_2(ES(Q_{20}) = \sum_{v,u \in ES(Q_{20})} \deg(u) \times \deg(v)$$

$= (\deg(b) \times \deg(ab)) + (\deg(b) \times \deg(a^2\mathrm{b})) + (\deg(b) \times \deg(a^3\mathrm{b})) +$

$(\deg(b) \times \deg(a^4\mathrm{b})) + (\deg(b) \times \deg(a^5\mathrm{b})) + (\deg(b) \times \deg(a^6\mathrm{b})) +$

$(\deg(b) \times \deg(a^7\mathrm{b})) + (\deg(b) \times \deg(a^8\mathrm{b})) + (\deg(b) \times \deg(a^9\mathrm{b})) +$

$(\deg(ab) \times \deg(a^2b)) + (\deg(ab) \times \deg(a^3\mathrm{b})) + (\deg(ab) \times \deg(a^4b)) +$

$(\deg(\mathrm{ab}) \times \deg(a^5\mathrm{b})) + (\deg(ab) \times \deg(a^6b)) + (\deg(\mathrm{ab}) \times \deg(a^7\mathrm{b})) +$

$(\deg(ab) \times \deg(a^8\mathrm{b})) + (\deg(ab) \times \deg(a^9\mathrm{b})) + (\deg(a^2\mathrm{b}) \times \deg(a^3\mathrm{b})) +$

$(\deg(a^2\mathrm{b}) \times \deg(a^4\mathrm{b})) + (\deg(a^2\mathrm{b}) \times \deg(a^5\mathrm{b})) + (\deg(a^2b) \times \deg(a^6b)) +$

$(\deg(\mathrm{a}^2\mathrm{b}) \times \deg(a^7\mathrm{b})) + (\deg(a^2b) \times \deg(a^8\mathrm{b})) + (\deg(a^2b) \times \deg(a^9\mathrm{b})) +$

$(\deg(a^3\mathrm{b}) \times \deg(a^4\mathrm{b})) + (\deg(a^3\mathrm{b}) \times \deg(a^5\mathrm{b})) + (\deg(a^3\mathrm{b}) \times \deg(a^6\mathrm{b})) +$

$(\deg(a^3\mathrm{b}) \times \deg(a^7\mathrm{b})) + (\deg(a^3b) \times \deg(a^8\mathrm{b})) + (\deg(a^3b) \times \deg(a^9\mathrm{b})) +$

$(\deg(a^4\mathrm{b}) \times \deg(a^5\mathrm{b})) + (\deg(a^4\mathrm{b}) \times \deg(a^6\mathrm{b})) + (\deg(a^4\mathrm{b}) \times \deg(a^7\mathrm{b})) +$

$(\deg(a^4b) \times \deg(a^8\mathrm{b})) + (\deg(a^4b) \times \deg(a^9\mathrm{b})) + (\deg(a^5\mathrm{b}) \times \deg(a^6\mathrm{b})) +$

$(\deg(a^5\mathrm{b}) \times \deg(a^7\mathrm{b})) + (\deg(a^5b) \times \deg(a^8\mathrm{b})) + (\deg(a^5b) \times \deg(a^9\mathrm{b})) +$

$(\deg(a^6\mathrm{b}) \times \deg(a^7\mathrm{b})) + (\deg(a^7b) \times \deg(a^8\mathrm{b})) + (\deg(a^7b) \times \deg(a^9\mathrm{b})) +$

$(\deg(a^8b) \times \deg(a^9\mathrm{b})) + (\deg(1) \times \deg(\mathrm{a}^5)) + (\deg(a) \times \deg(a^6)) +$

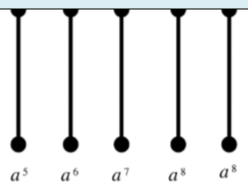
$(\deg(a^2) \times \deg(a^7)) + (\deg(a^3) \times \deg(a^8)) + (\deg(a^4) \times \deg(a^9))$

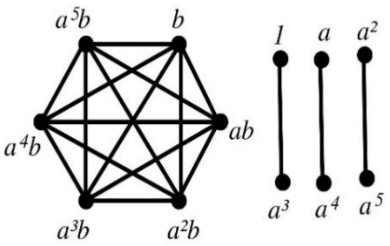
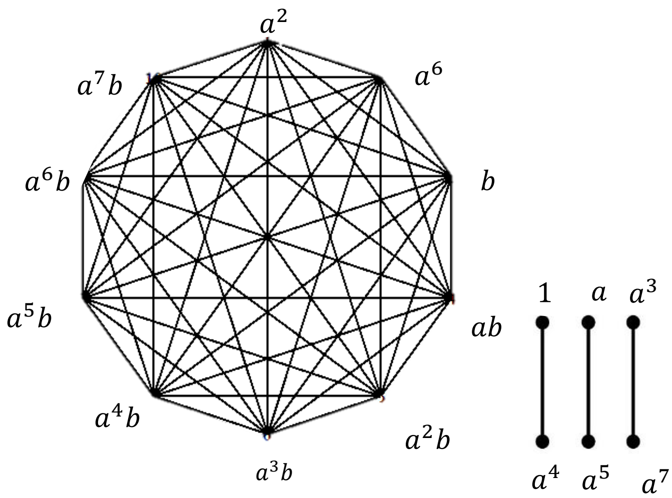
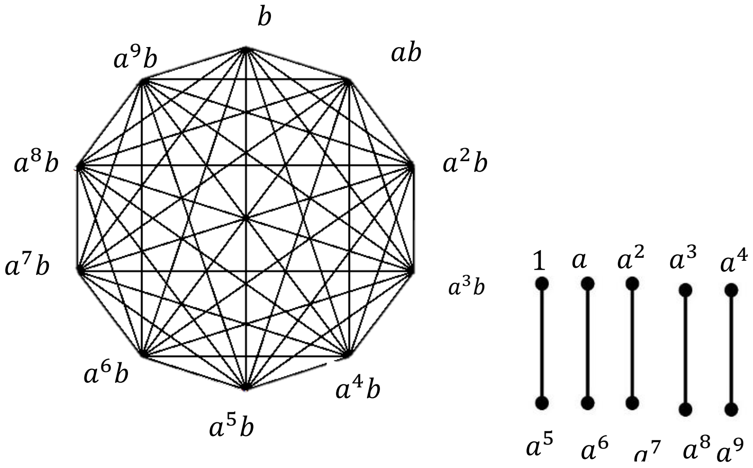
$= 45(5 \times 5) + 5(1 \times 1)$

$= 3650$

Berdasarkan percobaan graf $ES(Q_{4n})$ di atas terdapat dua pola berbeda pada graf *equal square* dari grup quaternion diperumum ($ES(Q_{4n})$), yaitu n genap dan n ganjil yang dirangkum dalam tabel berikut.

Tabel 4. 5 Tabel pola $ES(Q_{4n})$

n	$ES(Q_{4n})$	$ES(Q_{4n})$
Genap		
2		$ES(Q_8) \cong K_6 + K_2$.

<table>
<tr><td>4</td><td>
</td><td>$ES(Q_{16}) \cong K_{10} + 3K_2$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Ganjil</td></tr>
<tr><td>3</td><td>
</td><td>$ES(Q_{12}\ ) \cong K_6 + 3K_2$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>
</td><td>$ES(Q_{15}\,) \cong K_{10} + 5K_2$.</td></tr>
</table>

Sehingga didapatkan dugaan konjektur berikut

$$ES(Q_{4n}) \cong K_{2(n+1)} + (n-1)K_2, \text{ dengan } n \text{ genap}$$

$$ES(Q_{4n}) \cong K_{2n} + nK_2, \text{ dengan } n \text{ ganjil}$$

akan dibuktikan pada lemma dari graf $ES(Q_{4n})$ berikut:

Proposisi 4.1

Misal Q_{4n} dibangun oleh $\langle a,b\rangle$. Maka $b\cdot a\cdot b^{-1}=a^{-1}$.

Misal $P(i)$:" $b\cdot a^{i}\cdot b^{-1}=a^{-i}$"

Maka $P(1)$ benar, karena $b\cdot a\cdot b^{-1}=a^{-1}$.

Asumsikan $P(k)$ benar, artinya $b\cdot a^{k}\cdot b^{-1}=a^{-k}$.

Akan ditunjukkan benar bahwa $b\cdot a^{k+1}\cdot b^{-1}=a^{-(k+1)}$

Maka

$$(b\cdot a^{k}\cdot b^{-1})=a^{-k}$$

$$\Leftrightarrow (b\cdot a^{k}\cdot b^{-1}\cdot b\cdot a\cdot b^{-1})=a^{-k}(b\cdot a\cdot b^{-1})$$

$$\Leftrightarrow (b\cdot a^{k}\cdot b^{-1}\cdot b\cdot a\cdot b^{-1})=a^{-k}(b\cdot a\cdot b^{-1})$$

$$\Leftrightarrow b\cdot a^{k}\cdot a\cdot b^{-1}=a^{-k}\cdot a^{-1}$$

$$\Leftrightarrow b\cdot a^{k+1}\cdot b^{-1}=a^{-(k+1)}$$

Terbukti $P(k+1)$ benar, sehingga $P(i)$ benar untuk setiap $i\in\mathbb{N}$.

Proposisi 4.2

Misalkan $n\in\mathbb{N}$ dan $\boldsymbol{n}$ genap, maka

$ES(Q_{4n})\cong K_{2(n+1)}+(n-1)K_2$, sehingga:

Bukti :

a) Misalkan $X_1=\{a^{\frac{n}{2}},a^{\frac{n}{2}+n},a^{0}b,a^{1}b,\dots,a^{n-1}b\}$, akan ditunjukkan X_1 membangun $K_{2(n+1)}$.

   1. Akan dibuktikan $a^{i}b$ terhubung langsung dengan $a^{j}b$, $i\neq j$ dan $\forall i,j=1,2,3,\dots,n-1$. Maka $\left(a^{i}b\right)^{2}=a^{i}b\cdot a^{i}b=a^{i}\cdot b\cdot a^{i}\cdot(b^{-1}\cdot b^{2})=a^{i}\cdot\left(b\cdot a^{i}\cdot b^{-1}\right)\cdot b^{2}=a^{i}\cdot a^{-i}\cdot b^{2}=$

b^2 dengan demikian $a^i b$ terhubung langsung dengan $a^j b$ dengan $i \neq j$.

2. Akan dibuktikan $a^i b$ terhubung langsung dengan $a^{\frac{n}{2}}$ dan $a^{\frac{n}{2}+n}$ untuk setiap $= 0,1,2,\cdots,\mathrm{n}-1$. Pada bukti (1) $\left(a^i b\right)^2 = b^2 = a^n = \left(a^{\frac{n}{2}}\right)^2$ untuk $\left(a^i b\right)^2 = a^n = a^n \cdot a^{2n} = a^{n+2n} = \left(a^{\frac{n}{2}+n}\right)^2$. Sehingga $a^i b$ terhubung langsung dengan $a^{\frac{n}{2}}$ dan $a^{\frac{n}{2}+n}$ karena $\left(a^i b\right)^2 = \left(a^{\frac{n}{2}}\right)^2 = \left(a^{\frac{n}{2}+n}\right)^2 = a^n$.

Sehingga terbukti X_1 membangun $K_{2(n+1)}$.

b) Misalkan $X_2 = Q_{4n} \setminus X_1$, akan ditunjukkan X_2 membangun $(n-1)K_2$. Misalkan a^i terhubung langsung dengan a^j dengan $i \neq j$ dan $\forall i,j = 1,2,3,\dots,n-1$. Maka $\left(a^i\right)^2 = \left(a^j\right)^2 \Leftrightarrow a^{2i} = a^{2j} \Leftrightarrow 2i = 2j \Rightarrow 2i = 2n + 2j \Rightarrow i = n + j$. Sehingga dibuktikan a^i terhubung langsung dengan a^j hanya jika $i = n + j$

Sehingga terbukti graf $ES(Q_{4n})$ dengan $n \in \mathbb{N}$ dan $\boldsymbol{n}$ genap, dibangun oleh dua subgraf yaitu $K_{2(n+1)}$ dan $(n-1)K_2$.

Proposisi 4.3

Misalkan $n \in \mathbb{N}$ dan $\boldsymbol{n}$ ganjil, maka

$ES(Q_{4n}) \cong K_{2n} + nK_2$, sehingga:

Bukti:

a) Misalkan $y_1 = \{ a^0 b, a^1 b, \dots, a^{n-1} b\}$, akan ditunjukkan y_1 membangun K_{2n}. Maka $a^p b$ terhubung langsung dengan $a^q b$ untuk setiap $p \neq q$ dan $\forall p,q = 0,1,2,\cdots,n-1$. Maka $(a^p b)^2 = a^p b \cdot a^p b = a^p \cdot b \cdot a^p \cdot$

$(b^{-1} \cdot b^2) = a^p \cdot (b \cdot a^p \cdot b^{-1}) \cdot b^2 = a^p \cdot a^{-p} \cdot b^2 = b^2$. Sehingga setiap unsur pada y_1 membangun K_{2n} karena $(a^p b)^2 = b^2 = (a^q b)^2$ dengan $p \neq q$.

b) Misalkan $y_2 = \{1, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$, akan ditunjukkan y_2 membangun nK_2. Sedemikian hingga setiap unsur pada y_2 dapat dimisalkan a^p dan a^q. Andaikan a^p terhubung langsung dengan a^q $(a^p)^2 = (a^q)^2 \Leftrightarrow a^{2p} = a^{2q} \Leftrightarrow 2p = 2q \Rightarrow 2p = 2n + 2q \Rightarrow p = n + q$. Sehingga dibuktikan a^p terhubung langsung dengan q hanya jika $p = n + q$.

Sehingga terbukti graf $ES(Q_{4n})$ dengan $n \in \mathbb{N}$ dan $\boldsymbol{n}$ genap, dibangun oleh dua subgraf yaitu K_{2n} dan nK_2.

4.2 Indeks Zagreb Pertama dan Kedua pada Graf *Equal Square* dari Grup Quaternion $\boldsymbol{ES(Q_{4n})}$

Subbab 4.1 dilakukan beberapa percobaan pada grup $\boldsymbol{Q_{4n}}$, sehingga pada subbab ini akan membahas formula umum indeks Zagreb pertama dan kedua dari graf $ES(Q_{4n})$, untuk mempermudah dalam pencarian formula akan dibuat tabel perhitungan yang sudah diperoleh saat percobaan.

Tabel 4. 6 Tabel Indeks $\boldsymbol{M_1}$ dan $\boldsymbol{M_2}$ pada $\boldsymbol{ES(Q_{4n})}$, $\boldsymbol{n}$ Genap

n	$M_1(ES(Q_{4n}))$	M_1	$M_2(ES(Q_{4n}))$	M_2
2	$6(5)^2 + 2(1)^2$	152	$15(5 \times 5) + 1(1 \times 1)$	376
4	$10(9)^2 + 6(1)^2$	816	$45(9 \times 9) + 3(1 \times 1)$	3.648

Tabel 4. 7 Tabel Indeks $\boldsymbol{M_1}$ dan $\boldsymbol{M_2}$ pada Graf $\boldsymbol{ES(Q_{4n})}$, $\boldsymbol{n}$ Ganjil

n	$M_1(ES(Q_{4n}))$	M_1	$M_2(ES(Q_{4n}))$	M_2
3	$6(5)^2 + 6(1)^2$	156	$15(5 \times 5) + 3(1 \times 1)$	378

5	$10(9)^2 + 10(1)^2$	820	$45(9 \times 9) + 5(1 \times 1)$	3.650

Berdasarkan beberapa percobaan diatas, akan dibuat beberapa teorema berikut:

Proposisi 4.1

Misalkan $n \in \mathbb{N}$ dan n genap, rumus umum indeks Zagreb pertama dan kedua pada graf $ES(Q_{4n})$ adalah

$$M_1\big(ES(Q_{4n})\big) = (2(n+1) \cdot (2n+1)^2) + ((n-1) \cdot 2)$$

$$M_2(ES(Q_{4n})) = \big((n+1) \cdot (2n+1)^3\big) + (n-1)$$

Bukti:

a) Graf $ES(Q_{4n})$ yang terdiri dari dua subgraf lengkap sehingga indeks Zagreb pertama adalah $M_1(K_n) = n(n-1)^2$ (**Teorema 2. 1**), maka $M_1\big(ES(Q_{4n})\big)$ adalah

$$M_1\big(ES(Q_{4n})\big) = M_1\big(K_{2(n+1)}\big) + (n-1) \cdot M_1(K_2)$$

$$\begin{aligned} M_1(ES(Q_{4n})) &= (2(n+1) \cdot (2(n+1)-1)^2) + (n-1(2(2-1)^2)) \\ &= (2(n+1) \cdot (2n+2-1)^2) + \big((n-1) \cdot (2(1)^2)\big) \\ &= (2(n+1) \cdot (2n+1)^2) + \big((n-1) \cdot 2\big) \end{aligned}$$

Sehingga indeks Zagreb pertama adalah

$$M_1\big(ES(Q_{4n})\big) = (2(n+1) \cdot (2n+1)^2) + ((n-1)2)$$

b) Untuk indeks Zagreb kedua dari graf $ES(Q_{4n})$ yang terdiri dari dua subgraf lengkap sehingga indeks Zagreb kedua adalah $M_2(K_n) = \frac{1}{2}n(n-1)^3$ (**Teorema 2. 1**), maka $M_2\big(ES(Q_{4n})\big)$ adalah

$$M_2(ES(Q_{4n})) = M_2\big(K_{2(n+1)}\big) + (n-1) \cdot M_2(K_2)$$

$$M_2(ES(Q_{4n})) = \left(\frac{1}{2} \cdot 2(n+1) \cdot (2(n+1)-1)^3\right)$$

$$+ \left((n-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2(2-1)^3\right)$$

$$= \left((n+1) \cdot (2n+2-1)^3\right) + ((n-1) \cdot (1)^3)$$

$$= \left((n+1) \cdot (2n+1)^3\right) + (n-1)$$

Sehingga indeks Zagreb kedua adalah

$$M_2(ES(Q_{4n})) = \left((n+1) \cdot (2n+1)^3\right) + (n-1)$$

Proposisi 4.2

Misalkan $n \in \mathbb{N}$ dan n ganjil, rumus umum indeks Zagreb pertama dan kedua pertama dan kedua pada graf $ES(Q_{4n})$ adalah

$$M_1 ES(Q_{4n}) = 2n(2n-1)^2 + (n \cdot 2)$$

$$M_2 ES(Q_{4n}) = n(2n-1)^3 + n$$

Bukti:

a) Graf $ES(Q_{4n})$ yang terdiri dari dua subgraf lengkap sehingga indeks Zagreb pertama adalah $M_1(K_n) = n(n-1)^2$ (**Teorema 2. 1**), maka $M_1\left(ES(Q_{4n})\right)$ adalah

$$M_1\left(ES(Q_{4n})\right) = M_1(K_{2n}) + n \cdot M_1(K_2)$$

$$= (2n(2n-1)^2) + (n \cdot 2(2-1)^2)$$

$$= (2n(2n-1)^2) + (n \cdot 2)$$

sehingga indeks Zagreb pertama adalah

$$M_1 ES(Q_{4n}) = 2n(2n-1)^2 + (n \cdot 2)$$

b) Untuk indeks Zagreb kedua dari graf $ES(Q_{4n})$ yang terdiri dari dua subgraf lengkap sehingga indeks Zagreb kedua adalah $M_2(K_n) = \frac{1}{2}n(n-1)^3$ (**Teorema 2. 1**), maka $M_2\big(ES(Q_{4n})\big)$ adalah

$$\begin{aligned} M_2\big(ES(Q_{4n})\big) &= M_2(K_{2n}) + n \cdot M_2(K_2) \\ &= \left(\frac{1}{2}2n \cdot (2n-1)^3\right) + n.\left(\frac{1}{2}2(2-1)^3\right) \\ &= (n \cdot (2n-1)^3) + n.(1)^3 \\ &= (n \cdot (2n-1)^3) + n \end{aligned}$$

Sehingga indeks Zagreb kedua adalah $M_2ES(Q_{4n}) = n(2n-1)^3 + n$

4.3 Integrasi Hasil Penelitian dengan Kajian Keislaman

Sebagaimana yang sudah dijelaskan pada subbab 2.2 kajian teori graf dengan surat An- Nisa ayat 86 berikut:

Artinya:" Dan apabila kamu dihormati dengan suatu (salam) penghormatan, maka balaslah penghormatan itu dengan yang lebih baik, atau balaslah (penghormatan itu, yang sepadan) dengannya. Sungguh, Allah memperhitungkan segala sesuatu."(Qs. An-Nisa: 86)

Ayat tersebut berisi tentang apa tindakan kita ketika diberikan satu penghormatan oleh orang lain, yaitu dengan membalas suatu penghormatan itu sendiri dengan yang lebih baik atau sepadan.

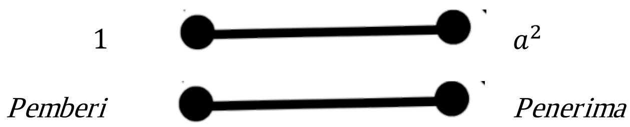
Kemudian cara membalas suatu penghormatan dijelaskan pada hadis At-tirmidzi no 2035 yaitu:

مَنْ أُسَامَةَ بْنِ زَيْدٍ قَالَ قَالَ رَسُولُ اللَّهِ - صلى الله عليه وسلم -« مَنْ صُنِعَ إِلَيْهِ مَعْرُوفٌ فَقَالَ لِفَاعِلِهِ جَزَاكَ اللَّهُ خَيْرًا فَقَدْ أَبْلَغَ فِى الثَّنَاءِ » (رواه ا لترمذ ي)

Dari Usman bin Zaid radhiyallahu'anhuma, ia berkata, Rosulullah shallallahu'alaihi wa salam bersabda, "Barang siapa yang mendapat kebaikan dari orang lain, hendaklah dia mengatakan jazakallah khaira,, dia telah *memaksimalkan memuji orang tersebut’*”. (*Shahih. HR. At-Tirmidzi no. 2035, An-Nasa’i no. 180, Ibnu Hibban no. 3404)*

Ada tiga bentuk dalam membalas suatu pemberian yang pertama yaitu jika memungkinkan membalas pemberian dengan sesuatu yang lebih baik, yang kedua yaitu membalas suatu pemberian dengan sesuatu yang sepadan atau bernilai sama, kemudian yang terakhir yaitu jika tidak memungkinkan membalas suatu pemberian maka doakanlah *jazakallah khaira*. Sehingga jika memang keadaanya tidak memungkinkan untuk membalas suatu pemberian kita sudah dianggap memaksimalkan membalas suatu pemberian dengan mengatakan *jazakallah khaira* yang berarti Semoga Allah membalasmu dengan kebaikan.

Dua titik saling terhubung pada graf *equal square* jika memiliki hasil kuadrat yang sama. Kemudian keterhubungan antara titik tersebut membentuk suatu graf *equal square,* seperti yang sudah ditunjukkan pada bab sebelumnya. Sehingga integrasi terhadap kajian keislaman yaitu setiap manusia akan saling terhubung dengan saling menghargai suatu pemberian. Sehingga dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 4. 5 Gambar Subgraf $ES(D_8)$ dan Kajian Integrasi

Gambar di atas adalah subgraf pada graf $ES(D_8)$ yaitu simpul 1 dan a^2 saling terhubung karena memiliki hasil kuadrat yang sama, seperti halnya dengan suatu pemberi dan penerima saling terhubung dikarenakan suatu salam penghormatan. Sehingga pada graf $ES(D_8)$ terdapat titik-titik saling terhubung satu sama lain, sama dengan setiap manusia akan saling memiliki titik keterhubungan satu sama lain.

Surat Al-Hujurat ayat 10 memiliki arti bahwa setiap orang-orang yang beriman itu bersaudara, sebagaimana berikut:

Artinya: "Orang-orang yang beriman itu sesungguhnya bersaudara. Sebab itu damaikanlah (perbaiki hubungan) antara kedua saudaramu itu dan takutlah terhadap Allah, Supaya kamu mendapatkan rahmat."

Dari ayat tersebut diketahui bahwa semua orang yang beriman itu bersaudara, karena setiap orang saling terhubung maka keterhubungan setiap orang tersebut dapat direpresentasikan sebagai himpunan simpul pada suatu graf.

Dalam menentukan indeks Zagreb pertama dan kedua perlu dicari derajat setiap simpul, yaitu berapa banyak sisi yang terhubung dengan simpul tersebut. Keterhubungan setiap orang jika direpresentasikan dalam ayat tersebut dapat dilihat melalui derajat titiknya. Sehingga dapat dilihat berapa banyak orang yang saling terhubung satu sama lain.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab IV didapat pola umum pada graf *equal square* dari grup quaternion diperumum ($ES(Q_{4n})$), yaitu pola untuk n ganjil dan n genap diuraikan sebagai berikut:

$$ES(Q_{4n}) \cong K_{2(n+1)} + (n-1)K_2, \text{ dengan } n \text{ genap}$$

$$ES(Q_{4n}) \cong K_{2n} + nK_2, \text{ dengan } n \text{ ganjil}$$

Sehingga diperoleh dua formula umum indeks zagreb pada $ES(Q_{4n})$, berikut:

1. Indeks Zagreb pertama dan kedua pada graf $ES(Q_{4n})$, n genap

$$M_1(ES(Q_{4n})) = \left(2(n+1)\cdot(2n+1)^2\right) + ((n-1)\cdot 2)$$

$$M_2\left(ES(Q_{4n})\right) = \left((n+1)\cdot(2n+1)^3\right) + (n-1)$$

2. Indeks Zagreb pertama dan kedua pada graf $ES(Q_{4n})$, n ganjil

$$M_1\left(ES(Q_{4n})\right) = 2n(2n-1)^2 + (n\cdot 2)$$

$$M_2\left(ES(Q_{4n})\right) = n(2n-1)^3 + n$$

5.2 Saran

Pembahasan pada penelitian ini berisi tentang indeks Zagreb pertama dan kedua pada graf *equal square* dari grup quaternion diperumum. Penelitian selanjutnya diharap membahas tentang indeks Zagreb pertama dan kedua pada graf *equal square* yang dibangun oleh grup lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Abdollahi, A., Akbar, S., & Maimani, H. (2006). Non-commuting Graph of a Group. *Journal of Algebra*.

Abdussakir, Azizah, N. N., & Nofandika, F. F. (2009). *Teori Graf.* Malang: UIN Maliki Press.

Al-Albani, M. (2007). *Shahih sunan at-Tirmidzi* . Jakarta Selatan: Pusaka Azzam.

Al-Qahthani, S. B. (2010). *Kumpulan Doa dalam Al-Qur'an dan Hadist.* Hisnul Muslimin.

At-Thabari. (1994). *Tafsir Ath-Thabari.* Lebanon: Mu'assasah Al-Risalah.

Bariyah, K. (2020). *Graf Commuting dari Grup Generalisasi Quarternion.* Malang: Undergraduated thesis, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Chaluvaraju, B., Boregowda, H., & Cangul, I. (2021). Some inequalities for the first general Zagreb index of graphs and line graphs. *Proceedings of the National Academy of Sciences, India Section A: Physical Sciences*, 79-88.

Chartrand, G., & Lesiniak, L. (1986). *Graph and Digraph 2nd Edition.* California: Wadsworth, Inc.

Das, K., & Gutman , I. (2004). Some properties of the second Zagreb index. . *MATCH Commun. Math. Comput. Chem*, 52(1), 3-1.

Das, K., XU., K., & Nam, J. (2014). Zagreb Indices of Graphs. *Research Artikel*.

Departemen Agama RI. (2011). *Mushaf Al- Qur'an dan Terjemahnya.* Jakarta: CV. Pustaka Al-Kautsari.

Departemen RI Al-Hikmah. (2011). *Al-Qur'an dan terjemahnya.* Bandung: Diponegoro.

Dummit, D., & Foote, R. (1991). *Abstract algebra.* New Jersey: A Division of Simon & Schuster, Inc.

Erfanian, A., & Tolue, B. (2012). Conjugate Graphs of Finite Groups. *Discrete of Mathematics, Algorithms and Applications*.

Gilbert, L., & Gilbert, J. (1984). *Element Modern of Algebra 8th Edition.* Boston: Louisiana.

Gutman , I., Futula, G., Vukicevic, Z. K., & Popivoda, J. (2015). On Zagreb indices and coindices. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem*.

Ma, X., Wei, H., & Zhong , G. (2013). The Cyclic Graph of a Finite Group.

Munir, R. (2012). *Matematika Diskrit.* Bandung: Informatika Bandung.

Rehman, S. U., Farid, G., Thariq, T., & Bonyah, E. (2022). Equal-Square Graphs Associated with Finite Groups. *Journal of Mathematics*, 2.

Rohmad. (2016). *Graf Identitas dari Grip Dihedral.* Malang: Universitas Islam Negeri Mualana Malik ibrahim Malang.

Sakar, P., De., N., & Pal, A. (2017). The Zagreb Indices of Graphs Based on New operations related to the join of the graphs. *J. Int. Math. Virtual Inst, 7, 181-209.*

Saleh, W. (2015). *Studi Hubungan Kuantitatif Struktur-Aktivitas Anti-Tuberkulosis Senyawa Amidasi Etil P-Metoksisinamat Dengan Pendekatan Hansch dan Penambatan Molekuler pada Enzim Inh A.* Jakarta: UIN Jakarta.

Sangadji. (2006). Quaternion dan Aplikasinya. *Risalah Lokakarya Komputasi dalam Sains dan Teknologi Nuklir XVII*.

Syarifudin, G. A. (2021). Beberapa Graf Khusus dari Grup Quaternion. *Eigen Mathematics Journal*, 5.

Tian, Y. (2000). *Matrix Theory Over the Complex Quaternion Algebra.* Canada: Departement of Mathematics and Statistic Queen University .

Ulum, S. (2020). *Indeks Jumlah Jarak Eksentris dari Graf Konjugasi dari Grup Dehidral*. Malang: Undergraduate thesis, Universitas Islam Negeri Maulana Malik ibrahim Malang.

Wati, D. H. (2020). *Indeks Zagreb pertama dan kedua pada graf pembagi nol total dari ring bilangan bulat modulo 4p.* (Doctoral dissertation, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim).

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Shalsabilla Az Zahra, lahir di Tuban pada tanggal 4 Mei 2002, biasa dipanggil Bella. Penulis tinggal pada Kabupaten Lamongan, Jawa Timur. Penulis merupakan anak pertama dari dua bersaudara.

Pendidikan dasar ditempuh di SDN Plabuhanrejo, Lamongan, kemudian melanjutkan sekolah menengah pertama pada MTS Unggulan Amanatul Ummah Pacet, kemudian melanjutkan sekolah menengah atas pada MA Unggulan Amanatul Ummah Pacet. Selanjutnya penulis melanjutkan pendidikan sarjana pada jurusan matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Selama menjadi mahasiswa penulis juga berperan aktif pada organisasi KSR-PMI Unit Uin Malang yaitu menjadi koordinator bidang kesehatan pada periode kepengurusan 2020 dan menjadi bendahara umum pada periode 2021.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama	: Shalsabilla Az Zahra
NIM	: 18610106
Fakultas / Program Studi	: Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi	: Indeks Zagreb Pertama dan Kedua pada Graf *Equal Square* dari Grup Quaternion Diperumum
Pembimbing I	: Mohammad Nafie Juhari, M.Si.
Pembimbing II	: Erna Herawati, M.Pd.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	23 Maret 2022	Konsultasi Judul dan Bab I	1.
2.	6 April 2022	Konsultasi Revisi Bab I	2.
3.	14 April 2022	Konsultasi Bab II dan III	3.
4.	13 Mei 2022	Konsultasi Revisi Bab II dan III	4.
5.	7 Juni 2022	Konsultasi Kajian Agama	5.
6.	13 Juni 2022	Konsultasi Revisi Kajian Agama	6.
7.	25 Juni 2022	ACC Seminar Proposal	7.
8.	30 Agustus 2022	Konsultasi Bab IV dan V	8.
9.	6 September 2022	Konsultasi Revisi Bab IV dan V	9.
10.	20 Oktober 2022	ACC Seminar Hasil	10.
11.	26 Oktober 2022	Konsultasi Kajian Agama	11.
12.	28 Oktober 2022	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	12.
13.	8 November 2022	ACC Matriks Revisi Seminar Hasil	13.
14.	15 November 2022	ACC Sidang Skripsi	14.
15.	29 November 2022	Konsultasi Kajian Agama	15.
16.	27 Desember 2022	ACC Keseluruhan	16.

Malang, 27 Desember 2022
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005