

**STUDI GERAK PARTIKEL PADA SIMPUL TORUS MENGGUNAKAN
PENDEKATAN MATHIEU DAN HILL-WHITTAKER DALAM
TINJAUAN KUANTUM**

SKRIPSI

Oleh:
RIZKA MAULIDIYAH
NIM. 17640005



**PROGRAM STUDI FISIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022**

**STUDI GERAK PARTIKEL PADA SIMPUL TORUS MENGGUNAKAN
PENDEKATAN MATHIEU DAN HILL-WHITTAKER DALAM
TINJAUAN KUANTUM**

SKRIPSI

**Diajukan kepada :
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh :
RIZKA MAULIDIYAH
NIM. 17640005**

**PROGRAM STUDI FISIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022**

HALAMAN PERSETUJUAN

STUDI GERAK PARTIKEL PADA SIMPUL TORUS MENGGUNAKAN
PENDEKATAN MATHIEU DAN HILL-WHITTAKER DALAM TINJAUAN
KUANTUM

SKRIPSI

Oleh:
RIZKA MAULIDIYAH
NIM. 17640005

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Pada tanggal, 21 Desember 2022

Pembimbing I



Arista Romadani, M.Sc
NIP. 19900905 201903 1 018

Pembimbing II



Drs. Abdul Basid, M.Si.
NIP. 19650504 199003 1 003

Mengetahui,
Ketua Program Studi



Dr. Imam Tazi, M.Si
NIP. 19740730 200312 1 002

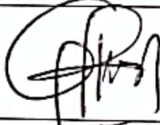


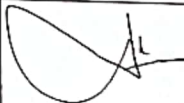
HALAMAN PENGESAHAN

STUDI GERAK PARTIKEL PADA SIMPUL TORUS MENGGUNAKAN
PENDEKATAN MATHIEU DAN HILL-WHITTAKER DALAM TINJAUAN
KUANTUM

SKRIPSI

Oleh:
RIZKA MAULIDIYAH
NIM. 17640005

Telah Diperiksa di Depan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Pada tanggal, 21 Desember 2022

Ketua Penguji	:	<u>Dr. Erna Hastuti, M.Si</u> NIP. 19811119 200801 2 009	
Anggota Penguji 1	:	<u>Muhammad Taufiqi, M.Si</u> NIP. LB. 64021	
Anggota Penguji 2	:	<u>Arista Romadani, M.Sc</u> NIP. 19900905 201903 1 018	
Anggota Penguji 3	:	<u>Drs. Abdul Basid, M.Si</u> NIP. 19650504 199003 1 003	

Mengesahkan,
Ketua Program Studi

Dr. Imam Tazi, M.Si
NIP. 19740730 200312 1 002



PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Rizka Maulidiyah
NIM : 17640005
Program Studi : Fisika
Fakultas : Sains dan Teknologi
Judul Penelitian : Studi Gerak Partikel pada Simpul Torus Menggunakan Pendekatan Mathieu Dan Hill-Whittaker dalam Tinjauan Kuantum

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa hasil penelitian saya ini tidak terdapat unsur-unsur penjiplakan karya penelitian atau karya ilmiah yang telah dilakukan atau dibuat oleh orang lain, kecuali yang dikutip dalam naskah dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka.

Apabila ternyata hasil penelitian ini terbukti terdapat unsur-unsur penjiplakan, maka saya bersedia untuk mempertanggungjawabkan serta menerima sanksi yang telah ditetapkan.

Malang, 21 Desember 2022

Yang Membuat Pernyataan



Rizka Maulidiyah
NIM. 17640005

MOTTO

... لَا يُكَلِّفُ اللَّهُ نَفْسًا إِلَّا مَا آتَاهَا سَيَجْعَلُ اللَّهُ بَعْدَ عُسْرٍ يُسْرًا

“... Allah tidak membebani kepada seseorang melainkan [sesuai] dengan apa yang diberikan Allah kepadanya. Allah kelak akan memberikan kelapangan setelah kesempitan”
(QS. At-Thalaq:7)

لِكَيْلَا تَأْسَوْا عَلَىٰ مَا فَاتَكُمْ وَلَا تَفْرَحُوا بِمَا آتَاكُمْ وَاللَّهُ لَا يُحِبُّ كُلَّ مُخْتَالٍ فَخُورٍ

“Agar kamu tidak bersedih hati terhadap apa yang luput dari kamu, dan jangan pula terlalu gembira terhadap apa yang diberikan-Nya kepadamu. Dan Allah tidak menyukai setiap orang yang sombong dan membanggakan diri”
(QS. Al-Hadid:23)

قُلْ كَفَىٰ بِاللَّهِ شَهِيدًا بَيْنِي وَبَيْنَكُمْ إِنَّهُ كَانَ بِعِبَادِهِ خَبِيرًا بَصِيرًا

“Katakanlah (Muhammad), “Cukuplah Allah menjadi saksi antara aku dan kamu sekalian. Sungguh, Dia Maha Mengetahui, Maha Melihat akan hamba-hambanya.”
(QS. Al-Isro:96)

HALAMAN PERSEMBAHAN

Alhamdulillah Puji Syukur atas Karunia, Nikmat, dan Ridho Allah SWT, yang telah memberikan penuh Rahmat, Kasih, dan Keberkahan sehingga dapat diberikan kesempatan untuk merasakan manisnya pendidikan hingga jenjang sarjana. Semoga tetap terus mendapatkan pertolongan dan keridhoan-Nya untuk segala angan, tujuan, dan impian untuk bisa mendapatkan kesempatan dalam belajar di mana pun dan berkembang. Sholawat serta salam tetap tercurahkan kepada Nabi besar, agung nan mulia Nabi Muhammad SAW. Semoga bisa mendapatkan barokah dan menjadi pemimpin muslim bagi diri sendiridan sesama.

Salam hormat dan ta'dhim saya persembahkan karya ini kepada orang tua saya **Bapak Moh.Afiful Ihsan dan Ibu Nur Ifatul Lailah** tercinta, dan **adik saya Rohmatur Robiatus Sania** serta keluarga besar saya yang terus memberikan dorongan, kasih sayang serta doa yang tiada henti. Semoga bisa memberikan kebanggaan terhadap pencapaian yang telah diberikan.

Untuk segala kerja keras, air mata, kebahagiaan yang telah berjuang dalam menempuh jalan dan rintangan hingga sejauh ini. Semoga bisa menjadi amanah, manfaat, keberkahan, dan cerita dihari tua nanti. Terima kasih untuk masa mudaku yang memberikan banyak pengalaman untuk mencoba banyak hal, semoga buah yang telah ditanam dapat dipanen suatu hari nanti.

Untuk seluruh dosen Fisika UIN Malang, para sahabat, teman khususnya teman-teman Fisika angkatan 2017, dan keluarga besar Fisika Teori UIN Malang yang terus memberikan motivasi dan semangat untuk bisa menyelesaikan jenjang studi sarjana sains ini dengan baik dan berkesan serta semangat untuk terus bisa melanjutkan studi agar diperolehnya wawasan yang luas.

Untuk Pengasuh saya di PPTQ Nurul Furqon 2 Abah Yai Chusaini, Umik Nyai wardah, Umma Rovita, Buya nafis, untuk semua Guru-guru saya, Ustadz Ustadzah saya yang telah mendidik dan menyirami batiniyah ini, teman-teman seperjuangan penghafal Alquran di PPTQ Nurul Furqon 2, sahabat LALIKA atas doa, semangat, dukungan yang tak perna berhenti.

Untuk imamku nanti, yang entah siapa dan dimana percayalah hanya engkau yang selama ini kusebut-sebut dalam setiap benih doaku. Semoga keyakinan dan takdir ini terwujud atas izin dan Ridho-Nya.

Semoga ilmu yang telah diberikan oleh Allah SWT selama ini menjadi ilmu yang bermanfaat, barokah untuk orang-orang disekitar saya.

Aamiin Aamiin Aamiin Yaa Robbal Alamin...

KATA PENGANTAR

Assalamualaikum Wr. Wb.

Alhamdulillah, puji syukur kehadiran Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik dan hidayah-Nya. Sholawat dan salam semoga selalu tercurahkan kepada Nabi Besar Muhammad SAW serta para keluarga, sahabat, dan pengikut - pengikutnya sampai hari kiamat kelak. Atas ridho dan kehendak Allah SWT, setelah melalui proses panjang, baik suka maupun duka, deru maupun debu, akhirnya penulis dapat menyelesaikan proposal skripsi ini. Penulis merasa bersyukur diberi kesempatan oleh Allah SWT dapat menempuh program strata-1 Fisika di UIN Maliki Malang.

Maha Besar Allah dengan segala keagungannya, yang telah menciptakan semesta raya dengan begitu elegan. Mulai dari hamparan kosmik yang megah, sampai pada tarian kuantum yang mempesonakan, berpadu dalam pola-pola keharmonisan yang sangat indah. Sungguh tidaklah Allah SWT menciptakan alam semesta dengan sia-sia, begitu pula dengan mempelajari tanda-tanda kebesaran Allah SWT melalui ciptaanNya, juga bukanlah hal yang sia-sia. Hal inilah mendasari penulis untuk menulis proposal skripsi ini. Proposal Skripsi yang berjudul **“Studi Gerak Partikel Pada Simpul Torus Menggunakan Pendekatan Mathieu Dan Hill-Whittaker Dalam Tinjauan Kuantum”** merupakan karya kecil penulis, yang diharapkan sedikit menambah khazanah dalam perenungan alam semesta ciptaan Allah SWT.

Dalam penulisan skripsi ini, banyak sekali pihak yang telah membantu, baik secara langsung maupun tidak langsung. Penulis ingin mengucapkan terima kasih sebesar-besarnya kepada semua pihak tersebut:

1. Prof. Dr. H. Muhammad Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Imam Tazi, M.Si., selaku Ketua Jurusan Fisika, Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Arista Romadani, M.Sc., selaku Dosen Pembimbing Skripsi dan Dosen Fisika Teori yang telah banyak meluangkan waktu dan pikirannya dan memberikan bimbingan, bantuan serta pengarahan kepada penulis sehingga proposal skripsi ini dapat terselesaikan.
5. Drs. Abdul Basid, M.Si selaku dosen pembimbing integrasi dan bapak wali dosen saya yang memberikan bimbingan serta motivasi dalam menyelesaikan skripsi ini.
6. Erika rani, M.Si., selaku Dosen Fisika Teori yang telah banyak memberikan ilmu dan membantu dalam proses pembelajaran mengenai fisika teori.
7. Muhammad Taufiqi, M.Si, selaku Dosen Fisika Teori yang telah banyak memberikan ilmu dan membantu dalam proses pembelajaran mengenai fisika teori.
8. Segenap Dosen, Laboran dan Admin Jurusan Fisika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah bersedia mengamalkan ilmunya, membimbing dan mengarahkan serta membantu selama proses perkuliahan.
9. Kedua orang tua Bapak Moh. Afiful Ihsan dan Ibu Nur Ifatul Lailah, adik saya Rohmatur Robiatus Saniyah, dan semua keluarga yang telah memberikan dukungan, restu, serta selalu mendoakan disetiap langkah penulis.

10. Abah Yai Chusaini Alhafidz dan Umik Nyai Wardah selaku pengasuh yayasan Al-Chusainiyah serta Buya Nafis Muhajir S,S dan Umma Rovita Agustin Z, M.Ag selaku pengasuh PPTQ Nurul Furqon II yang mana adalah tempat tinggal saya di malang.
11. Teman – teman Jurusan Fisika angkatan 2017 atas semangat, doa, dukungan, motivasi, bantuan selama ini, khususnya pendengar keluh kesah penulis Alfu, Risma, Nia, Lisa, Muhim, Mega, Aulia dan teman-teman fisika teori yang banyak memberikan bantuan MbK Nia, MbK Husna, Nuril, Eko, Galih, dan Amin.
12. Teman-teman seperjuangan pecandu Kalam Allah SWT PPTQ Nurul Furqon II, dan sahabat – sahabat saya di Gresik Laila, Lidia, Wati, Wilda, terima kasih untuk setiap waktu selalu ada dalam perjalanan ini.
13. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, yang telah banyak membantu dan memberikan support dalam menyelesaikan proposal skripsi ini.

Semoga skripsi ini bisa memberikan manfaat, tambahan ilmu dan dapat menjadikan inspirasi kepada para pembaca Amin Ya Rabbal Alamin

Wassalamualaikum Wr.Wb.

Malang, 21 Desember 2022

Penulis

DAFTAR ISI

COVER	i
HALAMAN JUDUL	ii
HALAMAN PERSETUJUAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	v
MOTTO	vi
HALAMAN PERSEMBAHAN	vii
KATA PENGANTAR	ix
DAFTAR ISI	xii
DAFTAR GAMBAR	xiv
DAFTAR LAMPIRAN	xv
ABSTRAK	xvi
ABSTRACT	xvii
المخلص	xviii
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	7
1.3 Tujuan Penelitian	7
1.4 Batasan Masalah	8
1.5 Manfaat Penelitian	8
BAB II DASAR TEORI	
2.1 Sistem Koordinat Toroidal	9
2.2 Kelengkungan Simpul Torus	13
2.3 Persamaan Schrödinger Tak Bergantung Waktu	15
2.4 Al-Quran dengan partikel dalam keadaan kuantum	18
2.5 Persamaan Schrodinger dengan Potensial Kelengkungan	19
2.6 Persamaan Mathieu	23
2.7 Solusi Periodik Persamaan Mathieu	29
2.8 Persamaan Hill-Wittaker	31
2.9 Solusi Umum Persamaan Hill-Whittaker	33
2.10 Probabilitas Kuantum	33
BAB III PERSAMAAN GERAK PARTIKEL DALAM SIMPUL TORUS DENGAN PENDEKATAN MATHIEU	
3.1 Persamaan Schrodinger dengan Koordinat Toroidal pada Partikel Simpul Torus	37
3.2 Persamaan Gelombang dengan Pendekatan Mathieu	39
3.3 Solusi Periodik Persamaan Gelombang dengan Pendekatan Mathieu	43
3.4 Nilai Probabilitas Partikel yang Bergerak Dipermukaan Torus dengan Pendekatan Mathieu	45

BAB IV PERSAMAAN GERAK PARTIKEL DALAM SIMPUL TORUS DENGAN PENDEKATAN HILL-WHITTAKER	
4.1	Persamaan Schrodinger dengan Koordinat Toroidal pada Partikel Simpul Torus 51
4.2	Persamaan Gelombang dengan Pendekatan Hill-Whittaker..... 53
4.3	Solusi Persamaan Gelombang dengan Pendekatan Hill-Whittaker 55
4.4	Nilai Probabilitas Fungsi Gelombang Partikel yang Bergerak Disimpul Torus dengan Pendekatan Hill-Whittaker..... 57
4.5	Pembahasan Gerak Partikel dan Probabilitas Fungsi Gelombang pada Simpul Torus dengan Pendekatan Mathieu dan Hill-Whittaker 89
4.6	Fungsi Gelombang dan Probabilitas dalam Al-Quran 92
BAB V PENUTUP	
5.1	Kesimpulan 96
5.2	Saran..... 97
DAFTAR PUSTAKA 98	
LAMPIRAN 100	

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Sistem Koordinat Toroidal	9
Gambar 2.2	Torus dengan Sumbu x-y.....	11
Gambar 2.3.1	Metode Washer	12
Gambar 2.3.2	Metode Washer	12
Gambar 2.4	Sistem Koordinat Lengkung	21
Gambar 2.5	Sistem Koordinat Elips.....	25
Gambar 3.1	Torus dengan Jari-jari Mayor dan Minor	42
Gambar 4.1	Gambaran Gerak Partikel dalam Simpul Torus.....	89

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran A	Persamaan Schrodinger tak Bergantung Waktu	101
Lampiran B	Persamaan Schrodinger tak Bergantung Waktu Modifikasi Potensial Kelengkungan	107
Lampiran C	Persamaan Schrodinger tak Bergantung Waktu Modifikasi Potensial Kelengkungan dan Koordinat Toroidal	119
Lampiran D	Persamaan Mathieu	124
Lampiran E	Persamaan Hill-Whittaker	133
Lampiran F	Fungsi Gelombang dengan Pendekatan Mathieu	135
Lampiran G	Probabilitas Fungsi Gelombang Pendekatan Mathieu	144
Lampiran H	Fungsi Gelombang dengan Pendekatan Hill-Whittaker	149
Lampiran I	Probabilitas Fungsi Gelombang Pendekatan Hill-Whittaker	160

ABSTRAK

Maulidiyah, Rizka. 2022. **Studi Gerak Partikel Pada Simpul Torus Menggunakan Pendekatan Mathieu Dan Hill-Whittaker Dalam Tinjauan Kuantum**. Skripsi. Program Studi Fisika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim, Malang. Pembimbing: (I) Arista Romadani, M.Sc. (II) Dr. Abdul Basid, M.Si.

Kata Kunci : Torus, Koordinat Toroidal, Persamaan Schrodinger, Persamaan Mathieu, Persamaan Hill-Whittaker

Torus adalah sebuah permukaan yang memiliki gerak revolusi dari suatu lingkaran yang berputar dalam ruang tiga dimensi (dengan sumbu putar yang berada secara koplanar atau se-bidang dengan lingkaran itu sendiri). Sistem koordinat yang digunakan torus adalah sistem koordinat toroidal $(\eta, \alpha\phi, \phi)$. Berdasarkan latar belakang penelitian ini bertujuan untuk mengetahui persamaan gerak dan probabilitas partikel non relativistik yang bergerak terbatas pada simpul torus dengan dua pendekatan. Pendekatan yang pertama dengan pendekatan Mathieu diperoleh persamaan gelombang dengan solusi identik sinus dan cosinus dengan periodik $0 - 2\pi$, serta energi pada setiap keadaan fungsi gelombangnya, dan nilai probabilitas pada batas v, z , dan η . Pendekatan kedua dengan pendekatan Hill-Whittaker dengan solusi eksponen dengan periodik $0 - 2\pi$. Karena solusinya adalah periodik mana gerak partikel akan melingkar ditorusnya begitupun dengan pendekatan Mathieu, serta energi pada setiap keadaan fungsi gelombangnya yang mana partikel dengan solusi Hill-Whittaker energinya lebih besar dari pada partikel dengan solusi pendekatan Mathieu dan diperoleh juga probabilitas yang lebih kompleks dengan batas v, z, σ dan η .

ABSTRACT

Maulidiyah, Rizka. 2022. **Study of Particle Motion at Torus Vertices Using Mathieu and Hill-Whittaker Approach in Quantum Review**. Essay. Department of Physics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University, Malang. Supervisor: (I) Arista Romadani, M.Sc. (II) Dr. Abdul Basid, M.Si.

Keywords : Torus, Toroidal Coordinate, Schrodinger Equation, Mathieu Equation, Hill-Whittaker Equation

A torus is a surface that has the revolutionary motion of a circle rotating in three-dimensional space (with the axis of rotation being coplanar or plane with the circle itself). The coordinate system used by the torus is the toroidal coordinate system (η, α, ϕ) . Based on this background, this study aims to determine the reduction of goods and the possibility of non-relativistic particles that move limited to the afterlife with two approaches. The first approach with Mathieu's approximation obtains a wave agreement with identical sine and sine solutions with a periodic $0-2\pi$, as well as the energy in each state of the wave function, and probability values at the limits of v , z , and η . The second approach is the Hill-Whittaker approach with an exponential solution with a periodic $0-2\pi$. Because the solution is periodic where the motion of the particles will circle the ditorus as well as with Mathieu's approximation, as well as the energy in each state of the wave function which particles with the Hill-Whittaker solution have greater energy than the particles with the Mathieu approach solution and also obtain a more complex problem with the limit v, z, σ and η

مولدية ، رزق. 2022. دراسة حركة الجسيمات عند عقدة الحلقة باستخدام نهج (Hill- و Mathieu Whittaker) في المشاهدات الكمية. البحث الجامعي. قسم الفيزياء، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك ابراهيم مالانج. المشرفة (1): أريستا رمضاني،المجستير. المشرف (2): عبد الباسط، الماجستير. لمشرف.

الكلمات المفتاحية: Torus ، تنسيق حلقي ، معادلة شرودينجر ، معادلة ماثيو ، معادلة هيل-ويتاكر

الطارة هي سطح له حركة ثورية لدائرة تدور في فضاء ثلاثي الأبعاد (مع محور دوران متحد المستوى أو في مستوى الدائرة نفسها). نظام الإحداثيات المستخدم بواسطة الحلقة هو نظام الإحداثيات الحلقي $(\phi, \alpha\phi, \eta)$. بناءً على هذه الخلفية ، تهدف هذه الدراسة إلى تحديد معادلات الحركة واحتمال تحرك جسيم غير نسبي محصورًا في عقدة الحلقة باستخدام طريقتين. النهج الأول باستخدام نهج (Mathieu) هو الحصول على معادلة موجية مع حلول متطابقة للجيب وجيب التمام بفترة $\pi-0$ ، وكذلك الطاقة في كل حالة من الدالة الموجية ، وقيم الاحتمالية عند حدود $(v$ و z و $\eta)$. النهج الثاني هو نهج (Hill-Whittaker) مع حل أسي مع $\pi-0$ دوري. لأن الحل دوري حيث تكون حركة الجسيم دائرية في اتجاهها وكذلك مع نهج (Mathieu) ، وكذلك الطاقة في كل حالة من الدالة الموجية حيث يكون للجسيم مع حلول Hill-Whittaker طاقة أكبر من الجسيم. مع حل نهج (Mathieu) ويحصل أيضًا على احتمال أكثر تعقيدًا مع الحد $(\sigma$ و z و $v)$.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Mekanika kuantum lahir pada tahun 1900-an, diawali oleh postulat Max Plank dan konsep spekulatif de Broglie, kedua ilmuwan ini mengisyaratkan perlu adanya konsep baru tentang dunia mikroskopik yaitu mekanika kuantum (Purwanto, 2002). Ilmuwan Ervin Schrödinger melakukan pengembangan mekanika kuantum, hingga pada tahun 1925 merumuskan persamaan yang diberi nama Persamaan Schrödinger. Persamaan ini merupakan persamaan pokok dari mekanika kuantum pada rana atom, molekul dan partikel. Hingga sampai saat ini penelitian fisika kuantum tidak ada henti-hentinya dari berbagai aspek permasalahan kuantum, para fisikawan berlomba-lomba untuk menemukan sifat-sifat partikel terbaru. Salah satunya yang mencuri banyak perhatian saat ini yaitu partikel bergerak pada geometri ruang melengkung, contohnya seperti partikel dalam permukaan bola, partikel dalam permukaan pejal, atau partikel dalam simpul torus.

Salah satu konsep yang menarik tersebut yang akan dibahas dalam skripsi ini yaitu keadaan partikel yang bergerak pada permukaan melengkung seperti simpul torus. Torus sendiri memiliki bentuk seperti donat, bola pelampung, atau cicin vortex yang mana itu semua memiliki permukaan yang melengkung. S. DeWitt (1957) menggap terbaikannya aspek standar fisika kuantum yaitu, konfigurasi ruang pada permukaan geometri yang mana mempertimbangkan gerak partikel pada ruang lengkung berdimensi-e. Teori ini selanjutnya dikembangkan oleh Jensen dan Koppe (1970) melakukan perbandingan dari partikel bergerak diantara dua permukaan sejajar dengan partikel pada permukaan melengkung. Kajian ini

menjadi sangat signifikan karena menginisiasi lahirnya bidang kajian baru dalam fisika yakni geometri lengkung pada sebuah permukaan.

Setelah itu, banyak fisikawan yang mencoba meneliti lebih lanjut mengenai keadaan partikel yang bergerak pada permukaan melengkung hingga sekarang. Bukan hanya penerapannya yang luas, namun teorinya sendiri masih menarik untuk ditelaah lebih lanjut. Pada tahun 1981 Da Costa memperluas mengenai gerak partikel yang terbatas dipermukaan dengan mempertimbangkan persamaan Schrödinger oleh potensial menghasilkan persamaan Schrödinger berisi potensial linier yang merupakan fungsi dari kelengkungan.

Yong-Long Wang, dkk (2018) mendiskusikan persegi dan lingkaran sebagai ruang kurva untuk membatasi partikel. Ortix (2015) menemukan operator Schrödinger-Pauli satu dimensi yang Hermitan dari electron yang dibatasi ruang lengkung. Bertambah banyaknya ilmuwan fisika yang mempelajari struktur nano artinya menambah banyak pemodelan-pemodelan baru dalam mekanika kuantum. Dan beberapa dekade ini Luiz dan Silvia menemukan penyelesaian potensial induksi geometri (GIP) pada ruang kurva dan permukaan dalam ruang Euclidean \mathbb{R}^3 , ruang 3 dimensi.

Teknik eksperimental struktur nano dengan adanya kurva pembatas saat ini telah berkembang dengan pesat mulai dari partikel non-relativistik sampai relativistik, terlebih mengubah dinamika partikel yang berhubungan dengan geometri menjadi topik penelitian yang realistis dan banyak peminatnya. Teori simpul menjadi inspirasi nyata untuk topologi aljabar dan geometri, sehingga teori simpul telah memiliki banyak peminat dalam dunia penelitian kuantum. Hubungan antara teori simpul pada matematika dan fisika berawal pada tahun 1984

karya Profesor V.F.R. Jones dari University of California di Berkeley selama beberapa tahun telah mempelajari aljabar operator dan fungsi aljabar, akhirnya Prof. Jones mendefinisikan polynomial untuk simpul (Lickorish dan Millett, 2007).

Struktur simpul muncul pertama kali pada tahun 1867 oleh seorang fisikawan matematika Lord Kelvin yaitu mengamati cairan luminiferous ether, yang mana jika cairan itu ditembakkan pada ruang hampa akan membentuk sebuah cincin tanpa ujung yang stabil, dari bentuk cincin tanpa ujung ini terlihat memiliki simpul. Lord Kelvin menyatakan setiap jenis simpul mewakili atom dari unsur kimia yang berbeda. Hingga akhirnya pengamatan ini disebut dengan teori pusat atom. Teori simpul telah memasuki dunia biologi dan matematika melalui struktur simpul molekul DNA. Indikasi konkret pertama dari struktur simpul muncul dalam karya Faddeev dan Niemi (1997) yang mengidentifikasi struktur simpul dengan soliton stabil berdimensi $3 + 1$.

Salah satu contoh simpul yang paling sederhana dan paling relevan adalah simpul torus. Torus adalah sebuah permukaan yang memiliki gerak revolusi dari suatu lingkaran yang berputar dalam ruang tiga dimensi (dengan sumbu putar yang berada secara koplanar atau se-bidang dengan lingkaran itu sendiri). Jika sumbu revolusi tidak menyentuh lingkaran, maka permukaannya berbentuk cincin dan disebut torus revolusi. Selain torus revolusi ada juga torus tanduk, torus poros, dan bola berlapis ganda. Torus juga memiliki sistem koordinat yang merupakan salah satu hal penting yang biasanya digunakan untuk menyederhanakan permasalahan yang sedang dihadapi, dalam masalah simpul torus menggunakan koordinat toroidal. Sistem koordinat toroidal merupakan bagian dari koordinat lengkung untuk ruang euclidean.

Di dalam Al-quran Allah SWT telah menyebutkan suatu keadaan tata surya yaitu matahari dan bulan yang bergerak terbatas berjalan pada lintasan yang sudah ditetapkan Allah. Berikut ayat al Quran menjelaskan kejadian tersebut dalam surah Yunus [10]:5-6,

هُوَ الَّذِي جَعَلَ الشَّمْسُ ضِيَاءً وَالْقَمَرَ نُورًا وَقَدَرَهُ مَنَازِلَ لِتَعْلَمُوا عَدَدَ السِّنِينَ وَالْحِسَابَ ۗ مَا خَلَقَ اللَّهُ ذَلِكَ إِلَّا بِالْحَقِّ ۗ يُفَصِّلُ الْآيَاتِ لِقَوْمٍ يَعْلَمُونَ ۝ إِنَّ فِي اخْتِلَافِ اللَّيْلِ وَالنَّهَارِ وَمَا خَلَقَ اللَّهُ فِي السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضِ لآيَاتٍ لِّقَوْمٍ يَتَّقُونَ ۝

“Dia-lah yang menjadikan matahari bersinar dan bulan bercahaya dan Dialah yang menetapkan tempat-tempat orbitnya, agar kamu mengetahui bilangan tahun dan perhitungan (waktu). Allah tidak menciptakan demikian itu melainkan dengan benar. Dia menjelaskan tanda-tanda (kebesaran-Nya) kepada orang-orang yang mengetahui. Sesungguhnya pada pergantian malam dan siang dan pada apa yang diciptakan Allah SWT di langit dan dibumi, benar-benar terdapat tanda-tanda (kebesaran-Nya) bagi orang yang bertaqwa”. (QS.Yunus:5-6)

Dalam kitab *Tafsir Al-Wasith* (Az-Zuhaili, 2013) Allah menjelaskan ayat ini mengungkap tanda-tanda kekuasaan Allah dan memaparkan ciptaan-Nya yang menunjukkan pada pembuat yang sangat cemat, yaitu melalui penjelasan tentang keadaan-keadaan matahari dan bulan yang menunjukkan pada keesaan dari segi penciptaan dan pengadaan. Allah SWT menjadikan matahari menyinari alam disiang hari dan segala sumber kehidupan serta sebagai pemancar panas yang sangat dibutuhkan pada tanaman dan hewan. Dan, menjadikan bulan bersinar dimalam hari yang membuyarkan kegelapan, serta menetapkan tempat-tempat peredaran yang dilaluninya, setiap malam berada disatu orbit darinya, yaitu dua puluh delapan orbit yang sudah lazim diketahui diantara orang-orang Arab. Diorbit itulah bulan dapat terlihat dengan pandangan mata, “dan telah kami tetapkan tempat peredaran bagi bulan.” [Yaasiin:39] yaitu tempat-tempat orbitnya.

Dalam skala makro matahari dan bulan bergerak melintasi orbit-orbit yang telah ditetapkan Allah SWT dalam tata surya, tetapi jika dibahas dalam skala mikro partikel juga bergerak pada orbit suatu permukaan. Salah satu contohnya partikel yang bergerak dalam simpul torus, dan ini juga tak lepas dari penglihatan-Nya. Artinya partikel dalam simpul torus juga memiliki lintasan (orbit) gerak yang berbentuk melengkung sesuai dengan permukaan torus.

Disini menunjukkan bahwa Allah mempunyai sifat Al'Adl (Maha Adil) diantara yang besar (matahari dan bulan bergerak pada orbit-orbitnya) dan yang kecil (partikel yang bergerak melengkung pada permukaan torus). Karena seperti pada surah [As-Saff:1] Allah mengatakan "Apa yang ada di langit dan apa yang ada di bumi (termasuk matahari, bulan, dan partikel) bertasbih kepada Allah dan Dialah Yang Mahaperkasa, Bijaksana". Tidak ada sesuatu pun yang dapat dimengerti dengan akal atau dapat ditangkap oleh indra, atau yang dapat diraba, atau yang dapat disaksikan atau tidak, melainkan semuanya menunjukkan secara tegas pada kekuasaan Allah SWT yang luar biasa dan jauh melampaui kekuasaan apapun. Karena kuasa Allah SWT memiliki keistimewaan pada pengadaan wujud-wujud serta berbagai keterkaitan dan ukuran padanya yang merupakan implikasi dari adanya kesamaan, susunan, dan kecermatan dalam segala sesuatu, adapun kekuatan manusia hanyalah terbatas.

Karya-karya penelitian mengenai torus telah banyak dikerjakan oleh fisikawan, karena sangat menarik bilamana dikaji secara matematis. Antara lain Elektrodinamika kuantum ruang-waktu lima dimensi pada torus (F.C. Khanna dkk, 2014), sudut Hannay dan fase Berry pada partikel dalam dua torus (Subir Ghosh 2019), dinamika dan simetri partikel yang dibatasi bergerak dalam simpul torus

(Praloy Das dan Subir Ghosh 2016), muatan bergerak dalam simpul torus dengan adanya medan magnet di sepanjang sumbu torus (Das, Pramanik, Ghosh, 2016), partikel pada permukaan torus menghasilkan Spektrum energi berdasarkan persamaan Mathieu dan Hill-Whittaker (V.V. Sreedhar, 2015), peran kelengkungan dan torsi pada partikel dalam simpul torus dengan mengeksploitasi "Pendekatan Potensi Induksi Geometri (GIP)" (Dripto Biswas dan Dripto Biswas, 2019).

Akan tetapi masih ada permasalahan – permasalahan yang dihadapi fisikawan dalam penelitiannya, sehingga ada keadaan yang tidak bisa diselesaikan oleh mereka. Seperti pada V.V. Sreedhar (2015) tidak dapat menyelesaikan partikel dalam simpul torus dengan pengaruh kelengkungan, hanya bisa menyelesaikan dengan pendekatan Mathieu dan Hill-Whittaker. Begitupun dengan Dripto Biswas dan Dripto Biswas (2019) tidak dapat menyelesaikan keadaan partikel dalam simpul torus dengan pendekatan Hill-Whittaker, hanya berfokus pada pendekatan Mathieu. Dari sinilah lahir pula keinginan tahuan peneliti lebih lanjut mengenai partikel dalam simpul torus dengan berbagai pendekatan dalam tinjauan kuantum, sehingga ingin memadukan dua karya penelitian diatas.

Penelitian merupakan sesuatu yang fundamental (sesuatu yang dasar) yang perlu untuk terus dikembangkan. Segala sesuatu yang ada dialam semesta ini terbentuk material apaun terbentuk dari suatu yang dasar yakni partikel. Banyak penelitian yang mengkaji hal ini bahkan sampai saat ini, yang mana diharapkan dapat memperoleh sifat-sifat baru, yang akan berguna untuk penelitian-penelitian yang akan datang seperti gerak brown disekitar lubang hitam pada simpul torus (Romadani, 2020), gerak difusi dengan 4 dimensi pada simpul torus, dan gerak difusi dalam tinjauan relativitas khusus pada simpul torus melalui suatu persamaan

langevin dan fokker-planck (Romadani, dan Muhammad, 2021).

Hal inilah yang memotivasi penulis untuk melakukan kajian dasar atau studi yang bersifat komprehensif. Penulis tertarik untuk mengkaji formula keadaan partikel yang bergerak terbatas pada suatu permukaan melengkung seperti torus. Merupakan sesuatu yang sangat mendasar pada partikel yang bergerak terbatas pada simpul torus, sebelum dilakukannya penelitian yang lebih lanjut mengenai partikel pada simpul torus maka perlu dikaji terlebih dahulu secara kuantum. Menerapkan sistem koordinat pada torus dan potensialnya. Dan dilakukannya pendekatan Mathieu dan Hill-Whittaker diharapkan dapat mengkaji fungsi gelombang dan probabilitas fungsi gelombang pada partikel yang bergerak dalam simpul torus.

1.2 Rumusan Masalah

Dari latar belakang diatas, rumusan masalah untuk penelitian ini adalah

1. Bagaimana solusi persamaan gerak partikel yang terbatas pada simpul torus dengan menggunakan pendekatan Mathieu dan Hill-Whittaker dalam tinjauan kuantum?
2. Bagaimana perolehan probabilitas partikel yang terbatas pada simpul torus dengan menggunakan pendekatan Mathieu dan Hill-Whittaker?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini yaitu

1. Untuk menemukan solusi persamaan gerak partikel yang terbatas pada simpul torus dengan menggunakan pendekatan Mathieu dan Hill-Whittaker dalam tinjauan kuantum.
2. Untuk mengetahui probabilitas partikel yang terbatas pada simpul torus dengan menggunakan pendekatan Mathieu dan Hill-Whittaker.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari dilakukannya penelitian ini adalah untuk memperluas pengetahuan dan pemahaman lebih lanjut mengenai fisika kuantum khususnya partikel yang memperoleh pengaruh potensial dan koordinat dalam torus dan untuk memberikan dasar ataupun rujukan bagi kajian lebih lanjut pada fenomena-fenomena mikroskopik dengan adanya batasan gerak.

1.5 Batasan Masalah

Batasan dalam Penelitian ini adalah :

1. Mengkaji secara teoritik partikel yang bergerak pada simpul torus.
2. Permukaan torus ditinjau dengan koordinat Toroidal.
3. Partikel bergerak ditinjau dari potensial dan permukaan torus.
4. Partikel bergerak pada simpul torus dalam kuantum ditinjau dari persamaan Schrodinger tak bergantung waktu.
5. Partikel bergerak pada simpul torus yang ditinjau adalah pendekatan Mathieu dan Hill-Whittaker

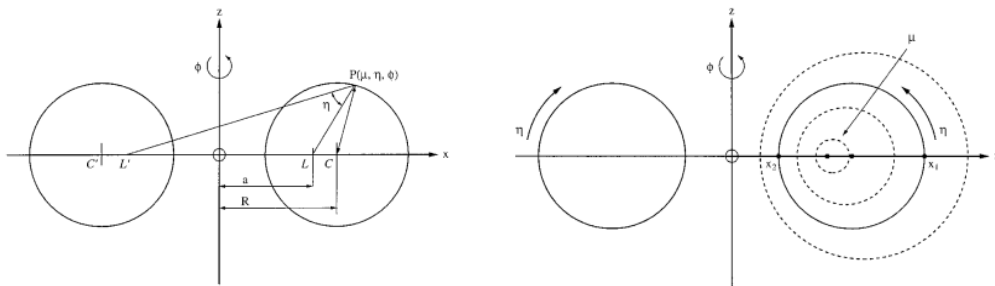
BAB II

DASAR TEORI

2.1 Sistem Koordinat Toroidal

Sistem koordinat adalah alat untuk menemukan suatu titik secara khusus (D’haeseleer et al.,1991). Koordinat toroidal adalah sistem koordinat ortogonal tiga dimensi yang memiliki permukaan dengan gerak secara rotasi atau revolusi dari suatu lingkaran yang berputar dengan sumbu putar secara koplanar atau sebidang dengan lingkaran itu sendiri, dengan kata lain biasanya disebut torus.

Ketika masalah berhubungan dengan sistem simetris toroidal, sering kali menggunakan sistem koordinat. Yakni dengan cara melalui rotasi sistem koordinat bipolar $(\eta, \alpha\phi)$ (Dini, dkk, 2009). Pada cara yang kedua ini biasanya dinamakan sistem koordinat toroidal baku (D’haeseleer et al.,1991).



Gambar 2.1 Sistem Koordinat Toroidal (Biswas, dan Ghosh,2019)

Sistem koordinat toroidal menjadi $(\eta, \alpha\phi, \phi)$ diilustrasikan padagambar (2.1) yang mana η pada gambar adalah simbol μ yang mendefinisikan permukaan torus. Sedangkan $\alpha\phi$ pada gambar (2.1) adalah simbol η yang mendefinisikan lingkaran yang berbentuk vertikal. Untuk ϕ adalah sudut azimuth dengan sumbu simetri z dengan kisaran $[0, 2\pi]$ Koordiant didefinisikan sebagai $\log(PL'/PL)$, dimana L dan L' titik batas dari himpunan koaksial. Saat sebuah lingkaran berputar disekitar

sumbu z sebesar 360° berlawanan arah jarum jam sehingga didapatkannya bentuk toroidal. Parameterisasi simpul torus dalam koordinat toroidal terkait dengan koordinat Cartesian biasa diberikan oleh (V.V. Sreedhar, 2015):

$$\begin{aligned}x &= \frac{a \sinh \eta_0}{\cosh \eta_0 - \cos(\alpha\phi)} \cos(\alpha\phi) \\y &= \frac{a \sinh \eta_0}{\cosh \eta_0 - \cos(\alpha\phi)} \sin(\alpha\phi) \\z &= \frac{-a \sin(\alpha\phi)}{\cosh \eta_0 - \cos(\alpha\phi)}\end{aligned}\tag{2.1}$$

Koordinat toroidal dinyatakan dengan $\eta \geq 0$; $-\pi < \alpha\phi \leq \pi$; dan $0 \leq \phi < 2\pi$. Didefinisikan parameter $a^2 = R^2 + d^2$ yang mana $\eta = \cosh^{-1}(R/d)$ atau $\eta = R/d$, persamaan η adalah konstan. Dikatakan η mendefinisikan permukaan toroidal, kombinasi R/d disebut aspek rasio, torus bergenerasi kedalam lingkaran batas, untuk torus tipis $a \gg 0$ rasio aspeknya sangat besar.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$\frac{ds^2}{d\phi^2} = \frac{dx^2}{d\phi^2} + \frac{dy^2}{d\phi^2} + \frac{dz^2}{d\phi^2}\tag{2.2}$$

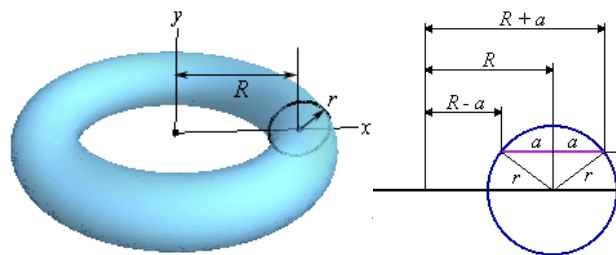
$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{a\beta\sigma^2}\tag{2.3}$$

dimana $\sigma = \frac{1}{\sqrt{(b - \cos(\alpha\phi))}}$, $\lambda^2 = a^2 + c^2$, $c = \sinh(\eta)$, $b = \cosh(\eta)$ dan $\beta^2 = \lambda^2 -$

1, dari σ, c, b memiliki hubungan dengan koordinat toroidal.

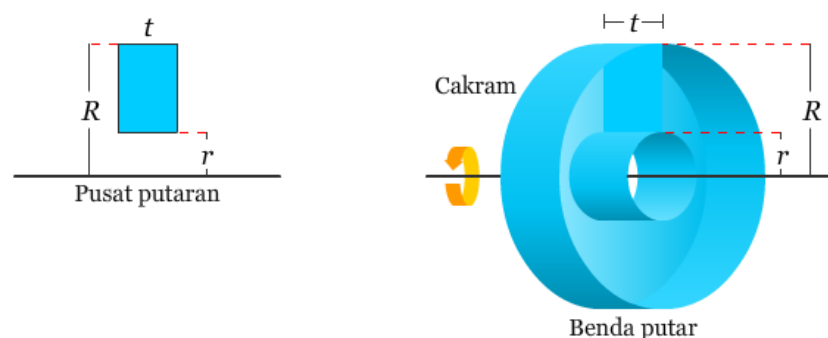
Volume atau bisa juga disebut kapasitas adalah penghitungan seberapa banyak ruang yang bisa ditempati dalam suatu objek. Objek itu bisa berupa benda yang

beraturan ataupun benda yang tidak beraturan. Benda yang beraturan misalnya kubus, balok, silinder, limas, kerucut, bola dan torus.



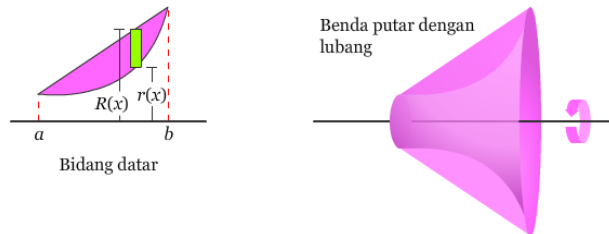
Gambar 2.2 Torus dengan Sumbu x,y (V.V. Sreedhar, 2015)

Saat jari-jari penampang lingkarannya adalah r , dan jari-jari lingkaran yang ditelusuri oleh pusat penampang adalah R . Katakanlah torus diperoleh dengan memutar daerah lingkaran $y^2 + (x - R)^2 = r^2$ terhadap sumbu- y . dapat dilihat bahwa daerah lingkaran adalah daerah antara kurva $x = \sqrt{r^2 - y^2} + R$ dan $x = -\sqrt{r^2 - y^2} + R$ dengan $a = \sqrt{r^2 - y^2}$. Digunakannya metode Washer, yakni suatu metode yang menggunakan integral dalam menentukan volume benda putar yang memiliki lubang. Cincin dalam metode ini dibentuk oleh hasil putaran persegi panjang terhadap sumbu putaran tertentu (sumbu putaran tidak berimpit dengan sisi persegi panjang), seperti terlihat pada gambar berikut:



Gambar 2.3.1 Metode Washer (V.V. Sreedhar, 2015)

untuk mengetahui bagaimana konsep ini dapat digunakan untuk menentukan volume benda putar, dengan melihat daerah yang dibatasi oleh jari-jari luar $R(x)$ dan jari-jari dalam $r(x)$, seperti yang ditunjukkan gambar di bawah ini:



Gambar 2.3.2 Metode Washer (V.V. Sreedhar, 2015)

jika daerah tersebut diputar menurut sumbu putar yang diberikan, volume benda putar yang dihasilkan adalah

$$V = \pi \int_{-r}^r \left[\left(\sqrt{r^2 - y^2} + R \right)^2 - \left(-\sqrt{r^2 - y^2} + R \right)^2 \right] dx$$

$$V = \pi \int_{-r}^r \left[\left(\left(\sqrt{r^2 - y^2} \right)^2 + 2R\sqrt{r^2 - y^2} + R^2 \right) - \left(\left(\sqrt{r^2 - y^2} \right)^2 - 2R\sqrt{r^2 - y^2} + R^2 \right) \right] dx$$

$$V = 4\pi R \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - y^2} dx$$

Dari sini dapat diasumsikan bahwa ada sumbu 2 dimensi dengan x sumbu horizontal dan $u = \sqrt{r^2 - y^2}$ sumbu vertical. Yang mana ini dapat dikatakan bahwa $r^2 = x^2 + y^2$ artinya ini merupakan lingkaran dengan jari-jari $-r$ sampai r yang memiliki setengah lingkaran karena hanya ada akar kuadrat positif. Seperti yang diketahui bahwa luass setengah lingkaran adalah $1/2\pi r^2$ sehingga persamaan volume torus adalah :

$$V = 2\pi^2 Rr^2$$

2.2 Kelengkungan Simpul Torus

Ketika menggambar garis lurus maka kelengkungan nol (tidak melengkung sama sekali), tetapi dalam differensial geometri tidak cukup mengukur kelengkungan hanya dengan melihat kurva atau fungsinya saja, perlu adanya pendefinisian kelengkungan. Kelengkungan γ dapat diartikan semakin besar kurva γ menyimpang dari garis lurus semakin besar kelengkungan dari kurva tersebut. Untuk menemukan kelengkungannya yaitu dengan menggambar garis singgung. Titik pada kurva sama dengan titik singgung akan menjadi garis lurus yang akan memungkinkan untuk menghitung kelengkungan.

Jika bergerak dengan meningkatkan parameter yang sangat kecil δs sehingga menjadi $\gamma(s + \delta s)$, $\gamma(s)$ akan diperoleh dengan menghitung deviasi dari titik pada garis lurus. Sebelumnya akan didefinisikan \hat{n} yang merupakan vector normal satuan sejajar dengan arah dimana kurva γ menjauh dari garis singgung dan tegak lurus dengan garis itu sendiri. Deviasi $\gamma(s + \delta s)$ bias dinyatakan dengan perkalian dot product karena memiliki lintasan lurus diantara dua titik, dengan mengisolasi komponen tegak lurus terhadap garis singgung :

$$[\gamma(s + \delta s) - \gamma(s)] \cdot \hat{n} \quad (2.4)$$

untuk menemukan ekspansi yang bagus dari kelengkungan digunakan deret Tylor untuk menghilangkan $\gamma(s + \delta s)$, yakni :

$$= \gamma(s) + \frac{d\gamma}{ds} \delta s + \frac{d^2\gamma}{ds^2} \frac{\delta s^2}{2!} + \dots$$

$$\left[\gamma(s) + \frac{d\gamma}{ds} \delta s + \frac{d^2\gamma}{ds^2} \frac{\delta s^2}{2!} + \dots - \gamma(s) \right] \cdot \hat{n} \quad (2.5)$$

Orde kesatu karena ds searah dengan \hat{t} , mengabaikan suku yang lebih tinggi dengan mengasumsikan δs sangat kecil. Jadi dot product dengan arah normal

adalah nol karena tegak lurus dengan normal, sehingga hanya ada persamaan orde kedua:

$$\frac{d^2\gamma}{ds^2} \frac{\delta s}{2!}, k(s) \equiv \left\| \frac{d^2\gamma}{ds^2} \right\| \quad (2.6)$$

γ adalah vektor yang diturunkan terhadap skalar (panjang busur) akan menjadi vektor, kappa adalah besaran dari vektor turunan diatas yang merupakan ukuran seberapa banyak terjadi penyimpangan dari garis lurus. Mengubah $\gamma(t)$ dengan parameter kecepatan satuan s yang sesuai dengan panjang busur. Menghitung kelengkungan harus menemukan formula untuk persamaan (2.6), saat menggunakan aturan rantai dan menggunakan (t) diperoleh:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{ds} \frac{ds}{dt} \Rightarrow \frac{d\gamma}{ds} = \frac{d\gamma}{dt} \frac{dt}{ds} \quad (2.7)$$

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} = \frac{d}{dt} \frac{d\gamma}{ds} \frac{ds}{dt} + \frac{d\gamma}{ds} \frac{d^2s}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\gamma}{ds^2} = \frac{\frac{d^2\gamma}{dt^2} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - \frac{d\gamma}{dt} \frac{d^2s}{dt^2} \frac{ds}{dt}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^4} \quad (2.8)$$

salah satu aturan mengambil besaran dengan memisahkan besaran dengan cross productnya

$$k = \frac{\left| \frac{d^2\gamma}{dt^2} \times \frac{d\gamma}{dt} \right|}{\left| \frac{d\gamma}{dt} \right|^3}$$

Persamaan untuk kelengkungan kurva beraturan jika ada titik singular maka penyebut akan menjadi nol dan kelengkungan tidak terdefinisi, besaran turunan kurva regular tidak akan pernah menjadi nol. Kappa adalah sebuah lingkaran dengan jari-jari kecil memiliki kelengkungan yang lebih besar dari pada lingkaran dengan

jari-jari yang lebih besar. Dari persamaan diatas dimisalkan $\frac{d\gamma}{dt} = \alpha'$; $\frac{d^2\gamma}{dt^2} = \alpha''$, menjadi :

$$k = \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}$$

$$k = \frac{\sqrt{(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'z'')^2}}{(x' + y' + z')^{\frac{3}{2}}} \quad (2.9)$$

Kelengkungan simpul torus dimulai dengan kurva C dari bagian sebelumnya sebagai $\vec{\gamma}(\phi) = x(\phi)\hat{i} + y(\phi)\hat{j} + z(\phi)\hat{k}$, kelengkungan kurva umum $\vec{\gamma}(s)$, dalam ruang Euclidean.

$$\frac{k^2}{4} = \frac{[2 - 2\alpha^2 + 4\alpha^4 + 2\cos(2\alpha\phi) - 2\alpha^2\cos(2\alpha\phi) + 8(\alpha^2 - 1)b\cos(\alpha\phi) + 4b^2]c^2}{4\alpha^2[2b^2 + 2\alpha^2 - 2]^2} \quad (2.10)$$

dengan kappa adalah variabel tak berdimensi.

2.3 Persamaan Schrödinger Tak Bergantung Waktu

Persamaan schrödinger sudah sering kita dengar pada era kuantum, bahkan yang menjadi tongkat dari dunia kuantum adalah persamaan schrödinger ini, yang mana berawal dari fungsi gelombang. Persamaan ini kuantum, hingga munculah dunia kuantum dunia yang bisa menjelaskan sifat-sifat dari sebuah partikel. Ada beberapa cara yang dapat dilakukan untuk menyelesaikan permasalahan mekanika klasik ke mekanika kuantum. Disini digunakan pendekatan gelombang cahaya dan gelombang partikel, suatu gelombang cahaya bidang dirumuskan:

$$\Psi(x, t) = E_0 \sin(kx - \omega t) \quad (2.11)$$

dengan :

E_0 adalah nilai faktor medan listrik,

$\omega = 2\pi\nu$ adalah frekuensi sudut, dan

$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ adalah kostanta gelombang, dengan $\lambda = \frac{v}{c}$

Persamaan diatas dapat dianalogikan gelombang partikel dapat dituliskan sebagai:

$$\Psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t) \quad (2.12)$$

jika k dinyatakan dalam momentum $\lambda = h/p_x$, di mana $\hbar = h/2\pi$. Sedangkan frekuensi ω jika dihubungkan dengan energi kinetik partikel E , jadi fungsi gelombang persamaan (2.12), menjadi :

$$\Psi(x, t) = A \sin\left(\frac{p_x x}{\hbar} - \frac{p_x^2 t}{2m\hbar}\right) \quad (2.13)$$

fungsi gelombang ini merupakan penyelesaian dari persamaan differensial

gelombang salah satunya :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial \Psi}{\partial x^2} \quad (2.14)$$

Persamaan ini adalah persamaan gelombang datar atau bidang bunyi dalam gas laju bunyi adalah α . Persamaan (2.13) didistribusikan kepersamaan (2.14) dengan menganggap $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$ yaitu gaya yang tak bekerja pada partikel. Persamaan (2.14) dapat ditulis lagi menjadi :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \left(\frac{p_x^2}{4m^2}\right) \frac{\partial \Psi}{\partial x^2}$$

Persamaan ini tidaklah cocok karena fungsi gelombang keterangfannya hanya satu kali, maka p_x kanan dan kiri akan saling menghapus, sehingga dicoba persamaan baru yaitu :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \gamma \frac{\partial \Psi}{\partial x^2} \quad (2.15)$$

persamaan gelombangnya menjadi :

$$\Psi(x, t) = A \sin\left[i\left(\frac{p_x x}{\hbar} - \frac{p_x^2 t}{2m\hbar}\right)\right] \quad (2.16)$$

Ini adalah persamaan gelombang fungsi kompleks. Cara yang sama dengan persamaan diatas akan didapatkan turunan pertama terhadap t dan x , dan turunan kedua terhadap x . jadi persamaan (2.15) menjadi :

$$-\frac{ip_x^2}{2m\hbar}\psi = \gamma\left(\frac{p_x}{\hbar}\right)^2\psi$$

sehingga persamaann differensial (2.15) diperoleh :

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\hbar}{2im}\frac{\partial\psi}{\partial x^2} \quad (2.17)$$

Ini merupakan persamaan gelombang satu dimensi pada ruang x . Agar persamaan menjadi tiga dimensi maka ditambahkan nabla (∇), sehingga menjadi:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\hbar}{2im}\nabla^2\psi \quad (2.18)$$

Persamaan schrödinger dirumuskan (J. Griffiths, david. 2005) :

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{(i\hbar\nabla)^2}{2m}\psi \quad (2.19)$$

karena $E_t = E_k + E_p$ maka persamaan (2.19) menjadi :

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi \quad (2.20)$$

untuk potensial V yang ditentukan (x, t). Dalam hal ini persamaan Schrödinger dapat diselesaikan dengan metode pemisahan variabel pada persamaan diferensial parsial (J. Griffiths, david. 2005):

$$i\hbar\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\Psi}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + V\Psi \quad (2.21)$$

Cara ini mungkin benar karena kedua belah pihak merupakan konstan jika tidak, dengan varing t , kita dapat merubah sisi kiri tanpa menyentuh sisi kanan, dan keduanya tidak lagi sama, kita dapat menyebutnya pemisahan konstan E . Sehingga diperoleh persamaan Schroodinger tak bergantung waktu yaitu (J. Griffiths, david. 2005) :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi = E\Psi \quad (2.22)$$

2.4 Al-Quran dengan partikel dalam keadaan kuantum

Di dunia tidak ada yang luput dalam pengawasan Allah SWT. Ilmu Allah SWT sangat luas meliputi segala sesuatu yang ada dilangit dan bumi. Dalam al-Quran, Allah swt berfirman dalam surah yunus (10:61) (manzu, 2009):

وَمَا تَكُونُ فِي شَأْنٍ وَمَا تَتْلُوا مِنْهُ مِنْ قُرْآنٍ وَلَا تَعْمَلُونَ مِنْ عَمَلٍ إِلَّا كُنَّا عَلَيْكُمْ شُهُودًا إِذْ تُفِيضُونَ فِيهِ وَمَا يَعْزُبُ عَنْ رَبِّكَ مِنْ مِثْقَالِ ذَرَّةٍ فِي الْأَرْضِ وَلَا فِي السَّمَاءِ وَلَا أَصْغَرَ مِنْ ذَلِكَ وَلَا أَكْبَرَ إِلَّا فِي كِتَابٍ مُبِينٍ

“kamu tidak berada dalam suatu keadaan dan tidak membaca suatu ayat dari al-Quran dan kamu tidak mengerjakan suatu pekerjaan, melainkan Kami menjadi saksi atasmu diwaktu kamu melakukannya. Tidak luput dari pengetahuan Tuhanmu biarpun sebesar zarah (atom) di bumi ataupun di langit. Tidak ada yang lebih kecil dan tidak (pula) yang lebih besar dari itu, melainkan (semua tercatat) dalam kitab yang nyata (Lauh Mahfuzh).” (QS. Yunus [10]:61).

قُلْ ادْعُوا الَّذِينَ زَعَمْتُمْ مِنْ دُونِ اللَّهِ لَا يَمْلِكُونَ مِثْقَالَ ذَرَّةٍ فِي السَّمَوَاتِ وَلَا فِي الْأَرْضِ وَمَا لَهُمْ فِيهَا مِنْ شِرْكٍَ وَمَا لَهُ مِنْهُمْ مِنْ ظَهِيرٍ

“Katakanlah : “serulah mereka yang kamu anggap (sebagai tuhan) selain Allah SWT, mereka tidak memiliki (kekuasaan) seberat dzarahpun di langit dan di bumi, dan mereka tidak mempunyai suatu sahampun dalam (penciptaan) langit dan bumi dan sekali-kali tidak ada diantara mereka yang menjadi pembantu bagi-Nya. (QS. Saba [34]:22)

Al-Quran menggunakan kata zarah untuk sesuatu yang paling kecil, dan makna lazim dari kata ini adalah semut kecil atau partikel debu kecil. Kata zarah dikaitkan dengan dengan objek kecil dan paling kecil. Sedangkan pengertian umum tentang objek terkecil merujuk pada atom zarah sering diartikan sebagai atom, yang mana atom tersusun dari partikel-partikel elementer, sesuatu yang

fundamental (Purwanto, 2018). Makhluk kecil sebesar zarah, tidak luput dari pengawasan Allah SWT. Bahkan, pengetahuan Allah SWT juga mencakup benda-benda kecil lainnya seperti partikel elementer. Keberadaan partikel elementer seperti electron hanya Allah SWT yang tahu (Manzu, 2009).

Mitsqaala berasal dari kata *tsaqaalun* yang artinya menjadikan “berat”. Selanjutnya, *mitsqaala dzarratun* yang artinya zarah. Dalam konteks ayat tersebut Allah SWT. Menjelaskan bahwa partikel kecil (zarah) itu memiliki berat atau menunjukkan massa. Dzarah bisa berarti partikel elementer yang mempunyai berat. Berkaitan dengan ayat tersebut, beberapa eksperimen membuktikan bahwa jenis partikelnya, contohnya massa electron adalah $9,1 \times 10^{-31} kg$ dan massa proton adalah $1,672 \times 10^{-27}$. Kata *fissamawati* dan *fil ardi* menunjukkan dzarah tersebut berada diantara langit dan bumi. Hal ini menunjukkan bahwa terdapat suatu partikel yang sangat kecil (dzarah) dan berbentuk materi (manzu, 2009).

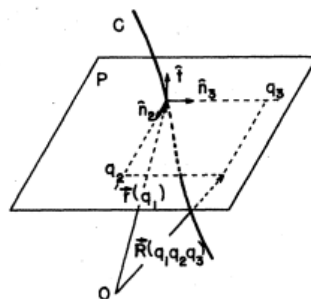
Zarah yang disebut partikel berarti sedang dibahasnya keadaan kuantum, lahirnya teori kuantum dipicu oleh munculnya distribusi radiasi benda hitam yang tidak dapat dijelaskan oleh mekanika Newtonian. partikel terkurung dengan gerak terbatas, artinya batas antara materi dan ruang sekitarnya sangat jelas.

2.5 Persamaan Schrodinger dengan Potensial Kelengkungan

Mempertimbangkan pendekatan potensial pembatas, dimana gerakan partikel dibatasi dalam kelengkungan permukaan. Jensen dan koppe (1971) telah berhasil memecahkan persamaan dinamika partikel yang dibatasi untuk bergerak pada permukaan. Adapun peneliti lain yakni Da costa juga memperoleh persamaan yang sama dengan mempertimbangkan potensial pembatas sesuai dengan permukaan atau kurva yang digunakan.

Pada bagian ini akan menguraikan secara singkat definisi da costa bersama modifikasi oleh wang, gerak terbatas sebuah partikel sepanjang kurva C dengan garis singgung vector satuan dan vector satuan normal dan binormal sehingga memiliki kelengkungan dan torsi. Untuk membatasi gerak partikel disepanjang C dengan menyatakan potensial pembatas yang dilambangkan sebagai V_c . Berdasarkan pemisahan analisis dari gerakan dibidang normal C , dan potensial pembatas adalah dapat langsung memberikan bidang normal C sebagai komponen normal dan binormal, setelah dilakukan perhitungan pada bidang normal C diperoleh fungsi gelombang dalam keadaan dasar dalam arah normal dan binormal.

Kuantum Hamiltonian dan persamaan Schrodinger yang sesuai untuk kurva sudah dikaji oleh da Costa (1981) perhatikan partikel mirip titik bermassa m , yang dibatasi secara kaku berukuran C dari besar q_1 , persamaan parametrik $\vec{r} = \vec{r}(q_1)$ dan garis singgung normal dan binormal yang masing-masing dilambangkan $\hat{t}(q_1), \hat{n}(q_1)$ dan $\hat{b}(q_1)$. Mengikuti alasan yang sama, sekarang memperkenalkan a_1 sistem koordinat lengkung berdasarkan kurva C :



Gambar 2.4 sistem koordinat lengkung berdasarkan kurva C dari persamaan parametrik $\vec{r} = \vec{r}(q_1)$. Koordinat q_2 dan q_3 digunakan untuk bidang normal P (Long, Yong dkk, 2018):

$$\begin{aligned}\vec{R}(q_1, q_2, q_3) &= \vec{r}(q_1) + q_2 \hat{n}_2(q_1) + q_3 \hat{n}_3(q_1) \\ \hat{n}_2 &= \cos \theta(q_1) \hat{n}(q_1) - \sin \theta(q_1) \hat{b}(q_1)\end{aligned}$$

$$\hat{n}_3 = \sin \theta(q_1)\hat{n}(q_1) + \cos \theta(q_1)\hat{b}(q_1) \quad (2.23)$$

$$\frac{d\theta}{dq_1} = \tau(q_1)$$

dimana $\vec{r}(q_1)$ adalah torsi C , untuk mempermudah perhitungan telah dikenalkan koordinat kartesian untuk setiap bidang normal C dari 3 persamaan diatas didapatkan:

$$\frac{d\vec{R}}{dq_1} = [1 - k(q_1)f(q_1, q_2, q_3)]\hat{t}(q_1) \quad (2.24)$$

dimana :

$$f(q_1, q_2, q_3) = \cos \theta(q_1)q_2 + \sin \theta(q_2)q_3 \quad (2.25)$$

dan $k(q_1) = |d\hat{t}/dq_1|$ adalah kelengkungan C pada titik busur (q_1) karena sistem koordinat orthogonal, $\left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial q_i}\right)\left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial q_j}\right) = \hbar_i^2 \delta_{ij}$, dapat menulis gaya klasik F akibat potensial $V(q_1, q_2, q_3)$ sebagai :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -grad V \\ &= -\sum_{j=1}^3 \left(\frac{1}{h_j} \frac{\partial V}{\partial q_j} \right) \frac{\partial \vec{R}}{\partial q_j} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Melanjutkan seperti dalam kasus tegangan permukaan, potensial pembatas $V(q_2, q_3)$ independen dari q_1 selalu mempertahankan gaya $-grad V$, dalam keadaan normal bidang C . Persamaan Schrodinger kemudian ditulis :

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{(1-kf)} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{1-kf} \frac{\partial \Psi}{\partial q_1} \right) + \sum_{j=2}^3 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial q_j^2} + \frac{\partial}{\partial q_j} \ln(1-kf) \frac{\partial \Psi}{\partial q_j} \right) \right] \\ + V_\lambda(q_2, q_3)\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.27)$$

dimana $dV = (1 - kf)x dq_1 dq_2 dq_3$ dan menyarankan pengenalan fungsi gelombang baru :

$$\chi(q_1, q_2, q_3) = (1 - kf)^{\frac{1}{2}} \Psi$$

$$\Psi = \frac{\chi}{\sqrt{1 - kf}} \quad (2.28)$$

Persamaan Schrodinger diatas menganti Ψ seperti persamaan diatas dan dikalikan $\sqrt{1 - kf}$ untuk kanan dan kiri selanjutnya langsung mengambil $f \rightarrow 0$ dalam persamaan diatas, mendapatkan :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q_1^2} \chi - \frac{\hbar^2}{8m} k^2 \chi - \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial q_2^2} \chi + \frac{\partial^2}{\partial q_3^2} \chi \right) + V(q_2, q_3) \chi = i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (2.29)$$

persamaan diatas dipisahkan dengan menetapkan $\chi = \chi_t(q_1, t) \times (q_2, q_3, t)$, untuk $\chi_n(q_2, q_3, t)$ memperoleh :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial q_2^2} \chi + \frac{\partial^2}{\partial q_3^2} \chi \right) + V(q_2, q_3) \chi = i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (2.30)$$

dan untuk $\chi_t(q_1, t)$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q_1^2} \chi_t - \frac{\hbar^2}{8m} k^2 \chi_t = i\hbar \frac{\partial \chi_t}{\partial t} \quad (2.31)$$

Persamaan diatas tidak bergantung dari potensialnya $V(q_2, q_3)$ ekuipotensialnya disekitar kurva C dapat berupa lingkaran, elips, persegi panjang, dll. Asalkan memberiksn potensial yang sama untuk semua kurva “parallel” dengan nilai q yang sama. Untuk mengikat partikel kekurva dapat menggunakan kendala permukaan setelah itu diasumsikan potensial permukaan untuk mengurangi gerakan yang terjadi dikurva.. Potensial untuk permukaan pembatas dapat menimbulkan gaya dan kompone tangensial yang tidak hilang sekitar r kurva, bertentangan dengan devinisi $V_\lambda(q_2, q_3)$.

Persamaan Schrodinger dimodifikasi bentuk kurva diperoleh :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\Delta_s + \frac{k^2}{4} \right) \Psi \quad (2.32)$$

dimana $\Delta_s = \frac{d^2}{ds^2}$ Laplace-Beltrami, yang berhubungan dengan koordinat panjang busur s , dan kelengkungan dari kurva C , yang mana $\Psi = \chi_1$ adalah fungsi gelombang, sedangkan $\frac{k^2}{4}$ adalah kelengkungan permukaan torus.

2.6 Persamaan Mathieu

Fungsi Mathieu pertama kali dibahas oleh Mathieu sendiri pada tahun 1868. Fungsi-fungsi ini diikuti oleh sejumlah peneliti yang dikumpulkan lebih dari 60 tahun yang lalu oleh Mc Lachlan. Persamaan Mathieu terjadi dalam dua masalah fisika. Pertama, aplikasi yang melibatkan geometri elips, persamaan Mathieu muncul setelah memisahkan persamaan gelombang dengan menggunakan koordinat elips. Kedua, persamaan Mathieu pada saat melibatkan gerak periodik seperti lintasan elektron dalam deretan atom periodik (Gutierrez dan Rodriguez, 2002).

Selama bertahun-tahun visualisasi fungsi Mathieu telah dibatasi pada kurva sederhana untuk beberapa nilai parameternya telah dilakukan. Pada tahun 1945 Jahnke dan Emde beliau ilmuwan yang merupakan penulis pertama yang memasukkan representasi permukaan tiga dimensi dari fungsi Mathieu. Sedangkan Abramowitz dan Stegun menyediakan banyak plot dua dimensi. Dengan perkembangan zaman fungsi Mathieu dikaji menjadi lebih rumit, dapat dieksploitasi dalam plot dua dan tiga dimensi. Misalkan persamaan Helmholtz dua dimensi (Gutierrez dan Rodriguez, 2002) :

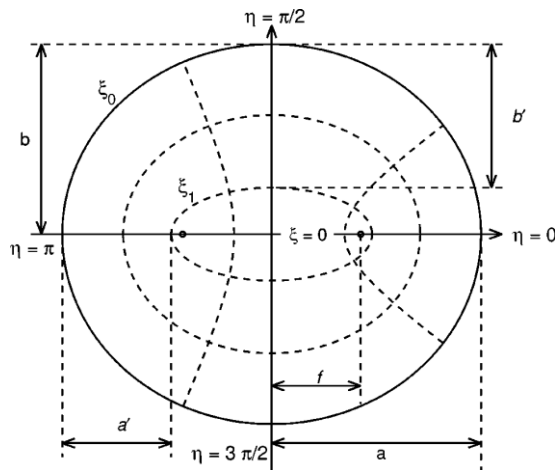
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + k^2 U = 0 \quad (2.33)$$

transformasi dari koordinat persegi panjang (x, y) menjadi koordinat elips (ξ, η) dengan persamaan (Gutierrez dan Rodriguez, 2002) :

$$x = c \cosh \xi \cos \eta, \quad y = c \sinh \xi \sin \eta, \quad z = z \quad (2.34)$$

$$0 \leq \xi < \infty, \quad 0 \leq \eta < 2\pi$$

dengan $c > 0$ parameter yang menjadi titik fokus koordinat elips. Karakteristik esensial dari sistem koordinat ini diilustrasikan oleh garis konstanta ξ dan konstanta η pada bidang yang sesuai, dengan nilai sembarang z . Seperti pada gambar (2.4) Gambar tersebut menunjukkan garis ξ adalah konstanta elips confocal dan garis η adalah konstanta seperempat hiperbola. Setengah dari satu cabang hiperbolik adalah seperempat hiperbola.



Gambar 2.5 sistem koordinat elips (Gutierrez dan Rodriguez, 2002).

Untuk membuktikan bahwa garis konstanta ξ dengan z memiliki keadaan tetap adalah elips confocal, maka dilakukan pengabungan persamaan (2.33) x dan y dengan $z = 0$, dan diperoleh :

$$\frac{x^2}{c^2 \cosh^2 \xi} + \frac{y^2}{c^2 \sinh^2 \xi} = -1 \quad (2.35)$$

untuk setiap nilai ξ , persamaan (2) menjelaskan elips dengan fokus $(\pm c, 0)$ dan parameter c didefinisikan setengah jarak antara titik fokus elips. Sekarang melihat rasio b/a dari sumbu elips adalah :

$$\equiv \sqrt{1 - e^2} \quad (2.36)$$

dimana $e = 1/\cosh \xi$ berjarak $0 \leq e \leq 1$ disebut sebagai eksensrisitas elips.

Pembatas dari koordinat elips sebagai $c \rightarrow 0$ adalah bukan nol (x, y) sesuai dengan ξ , garis konstanta ξ menjadi lingkaran dalam batas $e = 0$. Membuat pembatas eksplisit dapat menganti $c \cosh \xi \approx c \sinh \xi$ oleh ρ . Bergerak disebelah garis konstanta η kembali kepersamaan (2.35) menghilangkan ξ dari persamaan x dan y , diperoleh :

$$\frac{x^2}{c^2 \cos^2 \eta} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \eta} = 1 \quad (2.37)$$

turunan persamaan untuk konstanta ξ elips, dari persamaan (2.37) didapatkan :

$$\frac{x dx}{\cosh^2 \xi} + \frac{y dy}{\sinh^2 \xi} = 0 \quad (2.38)$$

bisa ditulis :

$$(dx, dy) = (-y \cosh^2 \xi, x \sinh^2 \xi) \quad (2.39)$$

rumus diatas adalah vektor yang bersinggungan dengan elips pada titik (x, y) .

Persamaan differensial untuk konstanta η bisa didapatkan dengan cara yang sama pada konstanta ξ , dari persamaan (2.10) yaitu :

$$\frac{x dx}{\cos^2 \eta} - \frac{y dy}{\sin^2 \eta} = 0 \quad (2.40)$$

bisa ditulis :

$$(dx, dy) = (y \cos^2 \eta, x \sin^2 \eta) \quad (2.41)$$

sekarang mengambil produk skalar dari vektor-vektor ini pada titik mana pun x, y .

Persamaan (2.13) dan (2.16) jika digabungkan menjadi :

$$-y^2 \cosh^2 \xi \cos^2 \eta + x^2 \sinh^2 \xi \sin^2 \eta \quad (2.42)$$

kembali pada persamaan (1) persamaan (2.17) menjadi :

$$-\frac{y^2 x^2}{c^2} + \frac{x^2 y^2}{c^2} = 0 \quad (2.43)$$

hasil nol menunjukkan elips dan hiperbola confocal mempunyai garis singgung yang orthogonal pada titik perpotongannya, sehingga disini mempunyai koordinat orthogonal.

Untuk mengestrak faktor skala h_ξ, h_η dari turunan koordinat elips lalu menjumlahkannya dx dan dy , memperoleh :

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 &= c^2 \sinh^2 \xi \cos^2 \eta d\xi^2 - c^2 \cosh^2 \xi \sin^2 \eta d\eta^2 \\ &+ c^2 \cosh^2 \xi \sin^2 \eta d\xi^2 + c^2 \sinh^2 \xi \cos^2 \eta d\eta^2 \\ &\equiv h_\xi^2 d\xi^2 + h_\eta^2 d\eta^2 \end{aligned} \quad (2.44)$$

menghasilkan :

$$h_\xi = h_\eta = c (\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta)^{\frac{1}{2}} \quad (2.45)$$

tidak ada persilangan melibatkan $d\xi, d\eta$ yang berhubungan dengan koordinat orthogonal.

Menganti q_1, q_2, q_3 dengan ξ, η, z , mempunyai $h_1 = h_2 = c (\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta)^{\frac{1}{2}}$ dan $h_3 = 1$, h_3 bernilai 1 karena perlu melihat $h_3 = h_1/h_2$, h_1 dan h_2 bergantung pada q_3 , sehingga menemukan Laplacian dalam koordinat lengkung menjadi :

$$\nabla^2 = \frac{1}{c^2 (\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta)} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.46)$$

Bagian kepala drum berbentuk elips sumbu $z = z(x, y, t)$ mempunyai osilasi persamaan gelombang :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (2.47)$$

dengan kecepatan $v^2 = T/d$, dimana bagian kepala drum dibawah tegangan T dan d massa persatuan luas. Dilakukan pemisalahan variabel ketergantungan waktu harmonik :

$$z(x, y, t) = u(x, t)w(t) \quad (2.48)$$

dimana $w(t) = \cos(\omega t + \delta)$, dengan ω adalah frekuensi dan δ adalah fase konstan. Substitusi bentuk fungsional dari $z(x, y, t)$ dalam persamaan (2.47) :

$$\frac{u}{u} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \frac{w}{w}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0 \quad (2.49)$$

Ini merupakan persamaan Helmholtz dua dimensi untuk perpindahan u . Elips mempunyai bentuk seperti kepala drum sehingga nilai batas sama dengan koordinat elips $\xi = \xi_0$. Perpindahan vertikan memiliki nilai 0, oleh karena itu digunakan persamaan (2.49) untuk mengubah Laplacian ∇^2 menjadi koordinat elips :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (2.50)$$

menganti dimensi $\partial^2 u / \partial z^2 = k^2 u$, menjadi :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u \quad (2.51)$$

kemudian menggabungkan persamaan (2.46) dan (2.51) yang menjadikan dimensi z pada persamaan (2.51) sama kedudukannya dipersamaan (2.46) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = \frac{1}{c^2 (\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta)} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) + k^2 u \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + k^2 c^2 (\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta) u = 0 \quad (2.53)$$

dipisahkan variabel ξ dan η dalam persamaan Helmholtz, ditulis $u(\xi, \eta) = R(\xi)\Phi(\eta)$, diperoleh :

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{d\xi^2} + c^2 k^2 \cosh^2 \xi = \lambda + \frac{1}{2} c^2 k^2$$

$$c^2 k^2 \cos^2 \eta - \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\eta^2} = \lambda + \frac{1}{2} c^2 k^2$$

$\lambda + \frac{1}{2} c^2 k^2$ dipilih sebagai pemisah konstanta yang memindahkan suku kedua persamaan ini, didapatkan :

$$c^2 k^2 \left(\cosh^2 \xi - \frac{1}{2} \right) \text{ dan } c^2 k^2 \left(\cos^2 \eta - \frac{1}{2} \right) \quad (2.54)$$

$$\frac{1}{2} \cosh 2\xi \text{ dan } \frac{1}{2} \cos 2\eta$$

didefinisikan kuantitas q , menjadi :

$$q = \frac{1}{4} c^2 k^2 = \frac{c^2 \omega^2}{4v^2}$$

dimana $k^2 = \omega^2/v^2$, dalam hal ini persamaan Φ menggunakan :

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\eta^2} + (\lambda - 2q \cos 2\eta)(\eta) = 0$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\eta^2} + (\lambda - 2q \cos 2\eta)\Phi(\eta) = 0 \quad (2.55)$$

atau bisa ditulis dengan lambang $\gamma = \alpha, \eta = z$ dan $\Phi = y$, sehingga :

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + (\alpha - 2q \cos 2z)y = 0 \quad (2.56)$$

persamaan ini dikenal dengan persamaan Mathieu.

Sudah dijelaskan diatas bahwa ini adalah sebuah kanoik dengan penggunaan persamaan umum, α akan menjadi terbatas pada bilangan real kecuali dinyatakan lain, tetapi z biasanya tidak dibatasi. Persamaan tersebut adalah kasus-kasus dari tipe linear orde kedua dengan koefisien priodik, solusinya mengambil yang berbeda sesuai dengan α, q . Saai ini hanya membatasi pada bagian periode π sampai 2π

dalam permasalahan ellips. Perpindahan dari posisi kesetimbangan adalah fungsi periodic dari salah satu koordinat v , jadi jika q yang ditetapkan y akan memiliki periode π sampai 2π , asalkan α memiliki salah satu dari urutan tidak terbatas dari angka-angka tertentu.

2.7 Solusi Periodik Persamaan Mathieu

Ketergantungan α dan q untuk solusi periodik, ketika $q \neq 0$, α, q harus saling berhubungan agar persamaan Mathieu memiliki periode π sampai 2π , maka α adalah fungsi dari q , dapat ditulis :

$$\alpha = m^2 + \alpha_1 q^1 + \alpha_2 q^2 + \alpha_3 q^3 + \dots \quad (2.57)$$

Bentuk yang diinginkan $\alpha = m^2$, pada persamaan (2.56) ketika $q = 0$, dan persamaan direduksi menjadi :

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + m^2 y = 0 \quad (2.58)$$

Agar lebih mudah mereduksi persamaan (Mathieu) menjadi $\cos mz$ dan $\sin mz$. akan mendapatkan $\alpha = m^2$, $m = 1, 2, 3, \dots$, sehingga memperoleh pasangan yang berbeda. Ketika $m = 0$ mengambil solusi masing-masing menjadi $+1, 0$, memberi konvensi bahwa koefisien $\cos mz$ dan $\sin mz$ adalah kesatuan untuk q . Persamaan diatas (2.58) yang solusinya adalah $\pm \cos mz$ dan $\pm \sin mz$, secara konvensional mendapatkan tanda positif. Untuk mengilustrasikan satu metode harus menemukan solusi periodik dari persamaan Mathieu diambil kasus dimana $\alpha = m^2 = 1$

$$\alpha = 1 + \alpha_1 q + \alpha_2 q^2 + \alpha_3 q^3 + \dots + \dots \quad (2.59)$$

karena solusinya untuk mengurangi, katakanlah $\cos z$ ketika q maka diasumsikan :

$$y = \cos z + q c_1 + q^2 c_2 + q^3 c_3 + \dots \quad (2.60)$$

dipersamaan (2.60) memberikan solusi dari persamaan Mathieu, periodic dalam z dengan 2π dilambangkan dengan $Ce_1(z, q)$ didapatkan :

$$Ce_1(z, q) = \cos z - \frac{1}{8}q \cos 3z + \dots \quad (2.61)$$

nilai q diperlukan untuk menghasilkan solusi ini, dengan mensubstitusikan (2.59) a menjadi :

$$a = 1 + q - \frac{1}{8}q^2 + \dots \quad (2.62)$$

Untuk q tertentu, nilai a ditemukan dari persamaan diatas disebut bilangan karakteristik dari fungsi Mathieu $Ce_1(z, q)$. Karena m dapat berupa bilangan bulat positif, apapun itu ada banyak sekali solusi dari tipe (2.61), fungsi ini genap dalam z , tidak berubah jika $-z$ atau z .

Solusi periodik lain adalah dilakukan hal yang sama seperti yang diatas untuk mendapatkan $Ce_1(z, q)$ agar diperoleh solusi lain dalam bentuk $\sin z$ ketika $q = 0$ yakni :

$$y = \sin z + qS_1(z) + q^2S_2(z) + \dots \quad (2.63)$$

dipersamaan (2.62) memberikan solusi dari persamaan mathieu, periodic dalam z dengan 2π dilambangkan dengan $Se_1(z, q)$ didapatkan :

$$Se_1(z, q) = \sin z - \frac{1}{8}q \sin 3z + \dots \quad (2.64)$$

nilai q diperlukan untuk menghasilkan solusi ini, dengan mensubstitusikan (2.59) a menjadi :

$$a = 1 + q - \frac{1}{8}q^2 + \dots \quad (2.65)$$

Untuk q tertentu, nilai a ditemukan dari (2.65) disebut bilangan karakteristik dari fungsi Mathieu $Se_1(z, q)$. Periode dalam z dengan 2π , yang direduksi menjadi $\sin z$, $Se_1(z, q) = -Se_1(-z, q)$ adalah fungsi ganji.

2.8 Persamaan Hill-Wittaker

Tiga kasus penurunan persamaan Hill-Whittaker yang menarik, yaitu :

- (i). Misalkan $\omega \rightarrow 0, \rho \rightarrow \infty$ dan $\omega\rho \rightarrow -2q$, q terbatas, persamaan Ince direduksi menjadi persamaan Mathieu :

$$\frac{d^2\Phi}{d\eta^2} + (\lambda - 2q \cos 2\eta)\Phi(\eta) = 0 \quad (2.66)$$

- (ii). Misalkan $\rho \rightarrow 0$ dalam persamaan (2.66) :

$$\frac{d^2\Phi}{d\theta^2} + \left(\eta + \frac{1}{8}\omega^2 - \frac{1}{8}\omega^2 \cos 4\theta\right)\Phi = 0 \quad (2.67)$$

dalam persamaan (2.60) diambil $2\theta = s, \omega^2 = 64q \rightarrow q = \frac{\omega^2}{64}, a = \frac{1}{4}\eta + 2q$,

menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \frac{d^2\Phi}{ds^2} + \frac{1}{4} \left(\eta + \frac{1}{8}\omega^2 - \frac{1}{8}\omega^2 \cos 4\theta\right)\Phi &= 0 \\ \frac{d^2\Phi}{ds^2} + \left(\frac{1}{4}\eta + 2q - 2q \cos 2s\right)\Phi &= 0 \end{aligned} \quad (2.68)$$

degenerasi ini menghasilkan fungsi Mathieu dari orde pecahan atau integral, konstanta λ menjadikan :

$$\Phi_2(\theta, \omega, \rho) = \lambda\Phi_1(\theta, \omega, \rho)$$

$\rho \rightarrow 0$ ketika memiliki priode π , tetapi bukan nol ketika anti priode π .

Deret geometri Φ_1 dan Φ_2 menunjukkan $\rho \rightarrow 0$. $\Phi_1(s)$ dan $\Phi_2(s)$ tidak memiliki priode yang sama. satu memiliki priode π dan yang lain memiliki anti priode π , sehingga salah satu harus identik nol :

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{4}\eta + 2q \\ &= \frac{1}{4}\eta + \frac{2\omega^2}{64} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}\eta + \frac{\omega^2}{32} \quad (2.69)$$

karena $\omega \rightarrow 0$ menunjukkan $\Phi_2(s)$ identik dengan nol, sehingga $\omega \rightarrow 0$, sebagai $\rho \rightarrow 0$. Untuk ω kecil, ρ bentuk eksplisit dari Φ_1 dan Φ_2 dapat ditemukan dan nilai λ dihitung sebagai $\rho \rightarrow 0$. Contoh yang dimiliki :

a). Untuk $g c_0(\theta, \omega, \rho)$, benar untuk $O(\omega^4)$:

$$\lambda = \rho\omega^2 \left[-\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^{13}}(7\rho^2 + 3)\omega^2 \right] \quad (2.70)$$

b). Untuk $g c_1(\theta, \omega, \rho)$, benar untuk $O(\omega^3)$:

$$\lambda = \frac{1}{4}\omega \left[1 - \frac{1}{2^4}\rho\omega + \frac{1}{2^8}\rho^2\omega^2 \right] \quad (2.71)$$

c). Untuk $g c_2(\theta, \omega, \rho)$, benar untuk $O(\omega^2)$:

$$\lambda = \frac{5\rho\omega^2}{3 \cdot 2^6} \quad (2.72)$$

(iii). Sistem koordinat paraboloidal umum a, β, γ bisa direduksi menjadi sistem rotasi paraboloid, diletakkan :

$$u^2 = \frac{1}{2}ce^{2x}, \quad v^2 = \frac{1}{2}ce^{2y}$$

dimisalkan $c \rightarrow 0, a \rightarrow \infty, \gamma \rightarrow \infty$, sehingga u^2v^2 tetap terbatas, kemudian :

$$x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2), \quad y = uv \cos \beta, \quad z = uv \sin \beta$$

untuk $k^2 > 0$, sama dengan membiarkan $\omega \rightarrow 0$ dan $\theta \rightarrow i\infty$, sehingga $u^2 = \frac{e^{-2i\theta}}{4k}$ tetap konstan, kemudian $\eta \rightarrow m^2$, m merupakan bilangan bulat tidak

negatif dan persamaan Hill-Whittaker menjadi :

$$\frac{d^2\Phi}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{d\Phi}{du} + [k^2u^2 - m^2u^2 - 2k\rho]\Phi = 0$$

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \theta_0 + 2\theta_1 \cos 2z + 2\theta_2 \cos 4z \right] \Phi = 0 \quad (2.72)$$

Ini merupakan persamaan Hill-Whittaker yang pernah juga diperoleh oleh Erdelyi 1953 persamaan yang dipenuhi fungsi revolusi paraboloid.

2.9 Solusi Umum Persamaan Hill-Whittaker

Buku “ general solution of Hill Equation” karya Ince, M.A (1915) yang menerangkan sebuah solusi persamaan Hill-Whittaker (2.72) diatas yakni :

$$\Phi = e^{ivz} u \quad (2.73)$$

dimana u adalah :

$$u = \sin(2 - \sigma) + a_3 \cos(3z - \sigma) + b_3 \sin(3z - \sigma) \quad (2.74)$$

$$+ a_5 \cos(5z - \sigma) + b_3 \sin(5z - \sigma) + \dots$$

dan apabila θ_r maka memiliki :

$$a_r = \frac{1}{4r(r+1)} \sin\{(2r+1)z - \sigma\} \quad (2.75)$$

$$- \frac{1}{4r(r+1)} \sin\{(2r-1)z + \sigma\}$$

$$b_r = \frac{1}{32r^2(r+1)(2r+1)} \sin\{(4r+1)z - \sigma\} \quad (2.76)$$

$$- \frac{1}{32r^2(r-1)(2r-1)} \sin\{(4r-1)z + \sigma\}$$

2.10 Probabilitas Kuantum

Dalam persoalan yang sebenarnya Hamiltonian dari suatu sistem diketahui mengacu pada persamaan Schrodinger yang merupakan persamaan differensial parsial, jelas persoalannya sekarang adalah mencari solusi Ψ dari persamaan tersebut. Jadi, fungsi gelombang Ψ adalah kuantitas teoritis fundamental didalam mekanika kuantum. Apa sebenarnya fisis dari nilai $\Psi(\vec{r}, t)$ disetiap posisi \vec{r} pada

saat t ? Jawaban dari pertanyaan ini diberikan oleh Max Born pada tahun 1926 yang menyatakan bahwa $\Psi(\vec{r}, t)$ menyatakan (Purwanto,) :

$$\Psi^*(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t) = |\Psi(\vec{r}, t)|^2 = P(\vec{r}, t) \quad (2.77)$$

yang merupakan interpretasi sebagai kerapatan probabilitas, secara lebih spesifik yaitu :

$$P(\vec{r}, t)dv = |\Psi(\vec{r}, t)|^2 dv \quad (2.78)$$

menyatakan kemungkinan untuk mendapatkan partikel yang dideskripsikan oleh $\Psi(\vec{r}, t)$ berada dalam elemen volume dv disekitar posisi \vec{r} pada saat t . Didalam kasus dimensi dapat dinyatakan sebagai :

$$P(x, t) = |\Psi(x, t)|^2 dx$$

Menyatakan besar kemungkinan partikel yang dideskripsikan oleh $\Psi(x, t)$ berada diantara x dan $x + dx$ pada saat t . Jika partikel memang ada didalam ruang. Interpretasi diatas mensyaratkan :

$$\int_V P(\vec{r}, t)dv = 1 \quad (2.79)$$

dengan integrasi dilakukan seluruh ruang V . Fungsi gelombang yang memenuhi syarat dikatakan fungsi gelombang ternormalisasi.

Fungsi – fungsi gelombang dikatakan bersifat square integrable (SI) yaitu jika kuadrat fungsi gelombang sama dengan satu, cara sederhana untuk mengenali apakah suatu fungsi tersebut termasuk SI atau tidak adalah dengan mengamati nilainya. Jika fungsi tersebut menyebar keseluruhan ruang artinya nilainya tidak nol dari $-\infty$ sampai $+\infty$ maka termasuk fungsi SI.

Uraian tersebut menambah satu lagi sifat yang harus dipenuhi oleh gelombang materi yang dibicarakan dan $\Psi(\vec{r}, t)$ ternormalisasikan, maka :

- Rapat ruang posisi partikel

$$P(x, t) = |\Psi(x, t)|^2 = \Psi^*(x, t)\Psi(x, t) \quad (2.79)$$

- Peluang pada saat t partikel dalam interfal x dan $x = dx$

$$P(x, t)dx = |\Psi(x, t)|^2 dx = \Psi^*(x, t)\Psi(x, t)dx \quad (2.80)$$

- Peluang pada saat t partikel antara x_1 dan x_2

$$\int_{x_1}^{x_2} P(x, t)dx = \int_{x_1}^{x_2} \Psi^*(x, t)\Psi(x, t)dx \quad (2.81)$$

- Peluang pada saat t berada disembarang titik dari $-\infty$ sampai $+\infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x, t)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, t)\Psi(x, t)dx = \quad (2.81)$$

Rumus – rumus tadi didasarkan atas asumsi bahwa $\Psi(x, t)$ ternormalisasikan, jika $\Psi(x, t)$ belum ternormalisasikan, maka rumus tersebut harus dibagi $\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x, t)dx$. Tanda * menyatakan konjugat kompleks fungsi gelombang. Sehingga dapat dikatakan probabilitas adalah reprensi dari kuadrat fungsi gelombang yang menunjukkan peluang kerapatan suatu partikel dalam suatu daerah tertentu. Probabilitas akan menyangkut peluang dimana syarat probabilitas ada beberapa macam diantaranya bernilai tunggal dan fungsi gelombang ternormalisasi.

BAB III

PERSAMAAN GERAK PARTIKEL DALAM SIMPUL TORUS DENGAN PENDEKATAN MATHIEU

3.1 Persamaan Schrodinger dengan Koordinat Toroidal pada Partikel Simpul Torus

Persamaan Schrodinger merupakan postulat tentang gerak partikel pada tingkat atom, yang digunakan disini adalah persamaan Schrodinger tak bergantung waktu yang mana berfokus pada ruang atau batasan-batasan partikel untuk bergerak, yang dalam hal ini disebut dengan potensial (Nurdina dan Bancong, 2020). Setiap pembatasan yang membatasi gerak partikel dapat mempengaruhi fungsi energi potensial, karena dalam hal ini partikel bergerak terbatas hanya pada simpul torus atau hanya pada permukaan torus yang mana permukaan torus sendiri bukan garis lurus tapi kurva yang melengkung, sehingga mengenai nilai potensial partikel yang bergerak pada simpul torus menggunakan nilai potensial dari kelengkungan torus sendiri yang didefinisikan dengan kappa (2.10). Dari sinilah diperoleh persamaan Schrodinger tak bergantung waktu yang dimodifikasi potensial kelengkungan torus dapat dilihat dipersamaan (2.32), dalam bab ini akan dituliskan ulang yakni :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\Delta_s + \frac{k^2}{4} \right] \Psi \quad (3.1)$$

Torus sendiri memiliki koordinat toroidal yang merupakan sistem koordinat ortogonal tiga dimensi yang memiliki permukaan dengan gerak secara rotasi atau revolusi dari suatu lingkaran yang berputar dengan sumbu putar secara koplantar atau sebidang dengan lingkaran itu sendiri, dengan kata lain biasanya disebut torus. Dengan sistem koordinat kartesian (x,y,z) menjadi sistem koordinat toroidal yakni

$(\eta, \alpha\phi, \phi)$, yang mana parametrisasinya koordinat toroidal terhadap Cartesian ditunjukkan pada persamaan (2.1). η mendefinisikan permukaan torus yang digambarkan lingkaran berbentuk horizontal, sedangkan $\alpha\phi$ mendefinisikan lingkaran berbentuk vertikal dan ϕ adalah sudut azimuth dengan sumbu simetri z. Dari persamaan diatas akan dimasukkan koordinat toroidal sebagaimana merupakan koordinat dari bidang torus, sehingga diperoleh persamaan gelombang berikut ini :

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\frac{\sigma''\sigma - 2\sigma'^2}{\sigma^2} \right) + (a\beta)^2\sigma^4 \left(\frac{k^2}{4} + \epsilon \right) \right] G(\phi) = 0$$

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\frac{\sigma''\sigma - 2\sigma'^2}{\sigma^2} \right) + (a\beta)^2\sigma^4 \frac{k^2}{4} + (a\beta)^2\sigma^4\epsilon \right] G(\phi) = 0 \quad (3.2)$$

dimana :

$$f(\phi) = \sigma(\phi) = 1/\sqrt{b - \cos(\alpha\phi)} \quad (3.3)$$

Persamaan (3.2) merupakan persamaan gelombang partikel dalam simpul torus dengan potensial kelengkungan dan koordinat toroidal torus. Selanjutnya pada bagian kedua persamaan (3.2) dilakukan perhitungan dengan ekspresi untuk σ pada persamaan (3.3), didapatkan:

$$\left(\frac{\sigma\sigma'' - 2\sigma'}{\sigma^2} \right) = \frac{\alpha^2[3 - 4b \cos(\alpha\phi) + \cos(2\alpha\phi)]}{8(b - \cos(\alpha\phi))^2} \quad (3.4)$$

Dengan menambahkan bagian ketiga dari persamaan (3.2) $\left(\alpha^2\beta^2\sigma^4 \frac{k^2}{4} \right)$ terhadap persamaan (3.4) diperoleh :

$$\left(\frac{\sigma\sigma'' - 2\sigma'}{\sigma^2} \right) + \alpha^2\beta^2\sigma^4 \frac{k^2}{4} = \frac{b^2 + \alpha^4 - 1}{4(b^2 + \alpha^2 - 1)} \quad (3.5)$$

menganggap :

$$\Gamma = \frac{b^2 + \alpha^4 - 1}{4(b^2 + \alpha^2 - 1)} \quad (3.6)$$

Ini merupakan struktur menarik, karena menggabungkan sifat utama simpul sepanjang parameter $\alpha\phi$, serta sifat dari torus melalui parameter $b = \cosh(\eta)$. Ini adalah salah satu hasil menarik yang diperoleh. Substitusi persamaan (3.6) kembali kepersamaan (3.2), sehingga diperoleh :

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + \frac{b^2 + \alpha^4 - 1}{4(b^2 + \alpha^2 - 1)} + (a\beta)^2 \sigma^4 \epsilon \right] G(\phi) = 0 \quad (3.7)$$

Dengan demikian, persamaan diatas adalah persamaan gelombang dengan potensial kelengkungan dan koordinat toroidal torus, yang mana akan diselesaikan (3.7) untuk $G(\phi)$. Dapat dilihat persamaan diatas adalah persamaan differensial orde 2 yang merupakan sebuah persamaan matematis yang dapat menjelaskan mengenai perubahan sifat atau perilaku dari suatu fenomena alam. Dari persamaan diatas akan dicari fungsi gelombangnya suatu partikel yang bergerak dalam simpul torus untuk pendekatan Mathieu.

3.2 Persamaan Gelombang dengan Pendekatan Mathieu

Karena permasalahan kali ini adalah untuk menemukan persamaan gerak dari partikel yang geraknya dibatasi oleh kelengkungan dari permukaan torus, dalam hal ini dilakukan pendekatan kesuatu persamaan. Dilakukannya pendekatan-pendekatan ini untuk mempermudah perhitungan dalam menemukan solusi dari persamaan gelombang tersebut. Sebenarnya banyak sekali pendekatan-pendekatan untuk menyelesaikan permasalahan yang ada dan pendekatan-pendekatan ini hanya suatu model matematis saja agar didapatkan solusi yang lebih mudah dari sebelumnya. Disini penulis memilih 2 pendekatan yang berbeda tetapi masih dalam lingkup kronologi yang sama yakni yang pertama persamaan gelombang partikel yang bergerak terbatas pada simpul torus dengan pendekatan Mathieu artinya persamaan gelombang ini dibuat mirip dengan persamaan Mathieu.

Dipilihnya pendekatan Mathieu karena persamaan Mathieu sendiri ada atau muncul karena seorang fisikawan meneliti metode getaran dari suatu membran yang digetarkan dengan batas elips. Yang memiliki solusi periodik π sampai 2π dan dijelaskan juga bahwa dari solusi Mathieu ini bisa digunakan dalam bentuk hiperbolik, serta banyak peneliti-peneliti dari awal kemunculan fungsi Mathieu ini melakukan pembelajaran-pembelajaran yang lebih untuk menemukan dan mengembangkan tentang fungsi Mathieu ini. Seperti halnya sekitar lima puluh tahun yang lalu, transmisi gelombang elektromagnetik di dalam silinder logam berongga direnungkan oleh J. J. Thomson dan tiga tahun kemudian, Lord Rayleigh menunjukkan bahwa ada sejumlah gelombang elektromagnetik dapat ditransmisikan dalam tabung melingkar yang seragam dengan panjang tak terbatas (N.W. McLachlan).

Dari sini membuat yakin penulis untuk menggunakan penyelesaian dari persamaan gelombang partikel yang bergerak dipermukaan torus dengan pendekatan Mathieu. Sebelum persamaan gelombang kependekatan Mathieu untuk lebih memahami (3.7), memperluas suku ketiga dalam persamaan tersebut dengan deret binomial, Deret binomial merupakan deret pangkat di ruas kanan yang dinyatakan dalam koefisien binomial (digeneralisasikan). Dalam matematika, deret binomial adalah deret Taylor untuk fungsi f yang diberikan oleh $f(x) = 1/(1+x)^\beta$, dimana $\beta \in \mathbb{C}$ bilangan kompleks arbitrer dan $|x| < 1$. Varian berikut berlaku untuk kompleks arbitrer, tetapi khususnya berguna untuk menangani eksponen bilangan bulat negative pada :

$$\frac{1}{(1-z)^\beta} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\beta}{k} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+\beta-1}{k} z^k \quad (3.8)$$

dalam hal koefisien multiset atau koefisien binomial. Mengambil bagian ketiga $(a\beta)^2\sigma^4\epsilon$ pada persamaan (3.7) dengan mensubstitusikan σ (3.3) kepersamaannya menjadi :

$$\begin{aligned} &= \frac{a^2\beta^2\epsilon}{b^2 \left(1 - \frac{\cos(\alpha\phi)}{b}\right)^2} \\ &= \frac{a^2\beta^2\epsilon}{b^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{\cos(\alpha\phi)}{b}\right)^2} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Persamaan diatas disubstitusikan kepersamaan (3.8), dengan diperluas keteret binomial menjadi :

$$\frac{a^2\beta^2\epsilon}{b^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{\cos(\alpha\phi)}{b}\right)^2} = \frac{a^2\beta^2\epsilon}{b^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{k+1}{k} \left(\frac{\cos(\alpha\phi)}{b}\right)^k \quad (3.9)$$

persamaan (3.7) menjadi ;

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\Gamma + \frac{a^2\beta^2\epsilon}{b^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{k+1}{k} \left(\frac{\cos(\alpha\phi)}{b}\right)^k \right) \right] G(\phi) = 0 \quad (3.10)$$

Perhatikan bahwa, ekspansi ini bermakna, karena $b = \cosh(\eta_0) > 1 \geq \cos(\alpha\phi)$, $\forall \eta_0 \in (0, \infty)$. Untuk torus tipis menganggap b besar yang suku ordenya tinggi dapat diabaikan, dan dapat dikatakan juga untuk torus tipis $a \gg 0$ rasio perbandinganya cukup besar, serta mengganti $2z = (\alpha\phi)$ yang mana $(\alpha\phi)$ adalah permukaan torus dengan bagian lingkaran yang vertikal sehingga $2z$ ini masih ada hubungan dengan permukaan torus, diperoleh (biswas, Ghosh, 2019):

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\Gamma + \frac{a^2\beta^2\epsilon}{b^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{k+1}{k} \left(\frac{\cos(2z)}{b}\right)^k \right) \right] G(\phi) = 0 \quad (3.11)$$

dalam persamaan binomial series $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ mengubah $\binom{k+1}{k}$ pada persamaan

(3.11) sebagai $\binom{n}{k}$, jadi $n = (k+1)$ dan $k = k_1$, diperoleh :

$$\binom{k+1}{k} = (k+1)$$

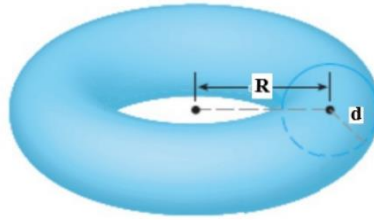
sehingga persamaan (3.11) menjadi :

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\Gamma + \frac{a^2 \beta^2 \epsilon}{b^2} \sum_{k=0}^2 (-1)^k (k+1) \left(\frac{\cos(2z)}{b} \right)^k \right) \right] G(\phi) = 0 \quad (3.12)$$

saat $k = 0$ dan $k = 1$, didapatkan :

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\frac{4\Gamma}{\alpha^2} + \frac{4a^2 \beta^2 \epsilon}{\alpha^2 b^2} \right) - \frac{2a^2 \beta^2 \epsilon}{b^3} \cos(2z) \right] G(\phi) = 0 \quad (3.13)$$

Persamaan diatas (3.13) adalah persamaan gelombang dengan pendekatan Mathieu yang merupakan persamaan differensial parsial orde dua. Dengan z yang menjelaskan permukaan torus pada lingkaran vertikal, $b = \cosh(\eta)$, η permukaan torus secara horizontal dan ϵ variable yang didalamnya mengandung nilai energy dari partikel yang bergerak terbatas dalam simpul torus. Atau bisa dikatakan



Gambar 3.1 Torus dengan Jari-jari Mayor dan Minor (Biswas,Ghosh , 2018)

persamaan dengan pendekatan differensial Mathieu yang diperoleh dengan batas torus tipis, dinamakan torus tipis karena $a \gg 0$ (a jauh lebih besar dari nol) dengan a sendiri adalah $a^2 = R^2 - d^2$, dari gambar dibawah ini yang mana R adalah jari-jari mayor dari pusat sumbu z ke pusat lingkaran vertikal, dan untuk d adalah jari-jari minor.

disini dari persamaan Mathieu juga memiliki :

$$\theta_0 = \left(\frac{4\Gamma}{\alpha^2} + \frac{4a^2 \beta^2 \epsilon}{\alpha^2 b^2} \right) \quad (3.14)$$

Partikel yang bergerak terbatas pada torus tipis, p menjadi ciri dominan simpul (setidaknya sejauh menyangkut energi) karena p menggambarkan rotasi dalam arah toroidal yang lebih panjang untuk batas torus tipis. Untuk torus tipis efek rotasi dalam arah poloidal yang memiliki radius lebih pendek relatif kecil (sekali lagi untuk energi paling kecil). Cukup menarik untuk yang cukup besar sehingga dalam penyebut $F(\eta, \alpha)$, $(\alpha^2 + \sinh^2(\eta_0) - 1) \approx \alpha^2$, nilai energy berkurang dari persamaan (3.18) menjadi :

$$E_n = \frac{n^2 \hbar^2 \cosh^2(\eta_0)}{2m\alpha^2 q^2} \quad (3.15)$$

Ini adalah energi dari partikel pada torus tipis dengan pendekatan Mathieu, $b^2 = \cosh^2(\eta_0)$, m adalah massa partikel dan n adalah bilangan bulat yang memberikan spesifikasi tingkatan energi pada partikel yang bergerak terbatas pada simpul torus dengan pendekatan Mathieu. Sebuah partikel yang terperangkap tidak dapat memiliki energi yang sembarangan seperti energi yang dimiliki partikel bebas, kenyataan terperangkapnya menyebabkan pembatas pada gerak partikelnya.

3.3 Solusi Periodik Persamaan Gelombang dengan Pendekatan Mathieu

Fungsi Mathieu diperkenalkan oleh pencetusnya pada tahun 1868, ketika ia menentukan getaran dari membran yang diregangkan yang memiliki batas, yang mana memiliki periodik dalam permukaan torus dengan periode π sampai 2π . Heine (1878) mendefinisikan solusi pertama dengan deret cosinus dan sinus, seperti yang mungkin dia antisipasi dari persamaan ini, perhitungan vortisitas dalam cairan kental yang mengalir melewati silinder elips yang sangat panjang di jalurnya memerlukan penggunaan fungsi Mathieu (Mc.Lachlan, 1946).

Solusi dari persamaan gelombang diatas (3.13) adalah solusi periodik persamaan mathieu. Pada persamaan (2.61) Karena solusinya untuk mengurangi,

katakanlah $\cos z$ ketika q periodic dalam z dilambangkan dengan $Ce_1(z, q)$ Untuk q tertentu, nilai a ditemukan dari (2.61) disebut bilangan karakteristik dari fungsi Mathieu $Ce_1(z, q)$. Karena m dapat berupa bilangan bulet positif, fungsi ini genap dalam z , tidak berubah jika $-z$ atau z . Mengubah persamaan Mathieu (2.61) dalam bentuk persamaan pendekatan Mathieu torus tipis didapatkan :

$$q = \frac{\hbar^2}{2mbp^2} \quad (3.16)$$

$$Ce_v(z, q) = \cos vz - \frac{1}{8}q \cos 3vz + \dots$$

sehingga menjadi :

$$Ce_v(z, q) = \cos vz - \frac{\hbar^2}{16mbp^2} \cos 3vz + \dots \quad (3.17)$$

Solusi periodic lain direduksi menjadi persamaan (2.63) yang menjadi persamaan (2.64) sehingga memeberikan solusi dari pendekatan mathieu, periodic dalam z dilambangkan dengan $Se_1(z, q)$ didapatkan :

$$Se_v(z, q) = \sin vz - \frac{1}{8}q \sin 3vz + \dots$$

dengan:

$$q = \frac{\hbar^2}{2mbp^2}$$

didapatkan solusi kedua yakni :

$$Se_v(z, q) = \sin(vz) - \frac{\hbar^2}{16mbp^2} \sin(3vz) + \dots \quad (3.18)$$

dari dua solusi (3.17) dan (3.18) diperoleh solusi dari persamaan gelombang dengan pendekatan Mathieu yaitu:

$$G_v(z, q) = Ase_v(z, q) + Bce_v(z, q) \quad (3.19)$$

dimana, A dan B dapat ditentukan dari kondisi normalisasi, sehingga kalo diperluas persamaan menjadi:

$$G_v(z, q) = A \left[\sin(vz) + \frac{\hbar^2}{16mbp^2} \sin(3vz) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{b^2}\right) \right] \\ + B \left[\cos(vz) + \frac{\hbar^2}{16mbp^2} \cos(3vz) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{b^2}\right) \right] \quad (3.20)$$

Persamaan (3.20) adalah hasil dari solusi periodik persamaan gelombang dengan pendekatan Mathieu yang merupakan fungsi gelombang partikel yang bergerak pada permukaan torus dengan pendekatan Mathieu. Fungsi gelombang diatas (3.20) merupakan persamaan matematis yang menggambarkan keadaan kuantum dari suatu sistem kuantum yang terisolasi terkait partikel yang bergerak terbatas pada simpul torus dengan pendekatan Mathieu. Karena fungsi gelombang adalah berupa sinus cosinus dengan periodik 0 sampai 2π , semisal dalam 2 dimensi didapatkan gerak partikel dengan gambaran adanya bukit dan lembah dari rambatan gelombang tersebut. Tetapi jika pada 3 dimensi khususnya torus maka rambatan gelombang memiliki gerak melingkar mengelilingi torus.

3.4 Nilai Probabilitas Partikel yang Bergerak pada Permukaan Torus dengan Pendekatan Mathieu

Sebuah partikel yang benar benar bebas kecuali pada bagian permukaan torus dimana partikel tidak bisa lepas, diluar bagian torus fungsi gelombang $G(z, q) = 0$ (probabilitas menemukan partikel disana adalah nol), amplitude juga nol dan memiliki potensial $V = \infty$, batas batas yang diberikan oleh z dan b berhubungan dengan permukaan torus dibuat untuk menjamin partikel tidak dapat keluar dari permukaan torusnya, artinya tidak mungkin partikel berada diluar permukaan torus, sehingga menyaratkan :

$$G(0) = 0 \quad (3.21)$$

$$G(0) = A \left[\sin(vz) + \frac{\hbar^2}{16mbp^2} \sin(3vz) \right] + B \left[\cos(vz) + \frac{\hbar^2}{16mbp^2} \cos(3vz) \right] \quad (3.22)$$

$$G(0) = A \left[\sin(0) + \frac{\hbar^2}{16mbp^2} \sin(0) \right] + B \left[\cos(0) + \frac{\hbar^2}{16mbp^2} \cos(0) \right]$$

$$G(0) = A[0] + B \left[\cos(0) + \frac{\hbar^2}{16mbp^2} \cos(0) \right]$$

$$G(0) = A[0] + B \left[1 + \frac{\hbar^2}{16mbp^2} \right]$$

karena partikel berada diluar permukaan torus maka $G(0) = 0$ jadi B harus sama dengan nol ($B = 0$), sehingga diperoleh :

$$G(0) = 0 \quad (3.23)$$

selanjutnya ($B = 0$) dimasukkan pada fungsi gelombang partikel yang bergerak pada permukaan tipis :

$$\begin{aligned} G(z, b) &= A \left[\sin(vz) + \frac{\hbar^2}{16mbp^2} \sin(3vz) \right] \\ &\quad + 0 \left[\cos(vz) + \frac{\hbar^2}{16mbp^2} \cos(3vz) \right] \\ G(z, b) &= A \left[\sin(vz) + \frac{\hbar^2}{16mbp^2} \sin(3vz) \right] \end{aligned} \quad (3.24)$$

Sehingga fungsi gelombang tersisa seperti diatas (3.28) fungsi gelombang perlu dinormalisasikan terlebih dahulu, yang mana persamaan normalisasi fungsi gelombang merupakan pernyataan matematis bahwa partikel itu ada disuatu tempat pada permukaan torus yang hanya bernilai tunggal pada keadaan yang kontinu, dan diperoleh hasil normalisasi yakni :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dx = 1 \quad (3.25)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left| A \left[\sin(vz) + \frac{\hbar^2}{16mbp^2} \sin(3vz) \right] \right|^2 dv dz d\eta = 1$$

sebelumnya sudah dikatakan bahwa $b = \cosh \eta$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left| A^2 \left[\sin^2(vz) + \frac{\hbar^2}{8m \cosh \eta \alpha^2 / q^2} \sin(vz) \sin(3vz) + \frac{\hbar^4}{256m^2 \cosh^2 \eta \alpha^4 / q^4} \sin^2(3vz) \right] \right| dv dz d\eta = 1 \quad (3.26)$$

dengan $\alpha = 2$ integral terhadap v diperoleh hasil :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} A^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{\sin(2z)}{4z} \right) + \frac{q^2 \hbar^2}{32m \cosh \eta} \left(-\frac{\sin(4z)}{8z} + \frac{\sin(2z)}{4z} \right) + \frac{q^4 \hbar^4}{(256)^2 m^2 \cosh^2 \eta} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sin(6z)}{12z} \right) \right] dz d\eta = 1 \quad (3.27)$$

Integral terhadap z diperoleh hasil :

$$\int_0^{2\pi} A^2 \left[\frac{8\pi^3}{9} + \frac{q^2 \hbar^2}{32m \cosh \eta} \left(\frac{4(8\pi^3)}{9} - \frac{8\pi^3}{9} \right) + \frac{q^4 \hbar^4}{(256)^2 m^2 \cosh^2 \eta} \left(\frac{9(8\pi^3)}{9} \right) \right] d\eta = 1 \quad (3.28)$$

Integral terhadap η diperoleh hasil :

$$A^2 \left[\frac{8\pi^3}{9} \eta \Big|_0^{2\pi} + \frac{q^2 \hbar^2}{32m} \left(\frac{24\pi^3}{9} \right) 2 \tan^{-1}(\sinh(\eta)) \Big|_0^{2\pi} + \frac{q^4 \hbar^4 \pi^3}{8192m^2} \tanh(\eta) \Big|_0^{2\pi} \right] = 1$$

$$A^2 \left[\frac{16\pi^4}{9} + \frac{89q^2 \hbar^2}{16m} \left(\frac{24\pi^3}{9} \right) + \frac{0.99q^4 \hbar^4 \pi^3}{8192m^2} \right] = 1$$

$$A = \sqrt{\frac{1}{\left[\frac{16\pi^4}{9} + \frac{89q^2 \hbar^2}{16m} \left(\frac{24\pi^3}{9} \right) + \frac{q^4 \hbar^4 \pi^3}{8192m^2} \right]}} \quad (3.29)$$

Normalisasi diatas diperoleh nilai dari variabel A dengan nilai B adalah nol. Setelah didapatkan hasil normalisasi disemua sistem ruang untuk variable A dan B selanjutnya untuk mencari nilai probabilitas partikel yang bergerak dipermukaan torus tipis dengan pendekatan dari persamaan Mathieu, dengan rumus probabilitas seperti pada (2.81) :

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} P(x, t) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, t) \Psi(x, t) dx = \\
 P &= \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{z_1}^{z_2} \int_{v_1}^{v_2} \left| A \left[\sin(vz) + \frac{\hbar^2}{16mbp^2} \sin(3vz) \right] \right. \\
 &\quad \left. + B \left[\cos(vz) + \frac{\hbar^2}{16mbp^2} \cos(3vz) \right] \right|^2 dv dz d\eta \quad (3.30)
 \end{aligned}$$

dengan nilai A dan B seperti diatas, sehingga menjadi :

$$\begin{aligned}
 P &= \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{z_1}^{z_2} \int_{v_1}^{v_2} \left| \sqrt{\frac{1}{\left[\frac{16\pi^4}{9} + \frac{89q^2\hbar^2}{16m} \left(\frac{24\pi^3}{9} \right) + \frac{q^4\hbar^4\pi^3}{8192m^2} \right]}} \left[\sin(vz) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\hbar^2}{16mbp^2} \sin(3vz) \right] \right. \\
 &\quad \left. + 0 \left[\cos(vz) + \frac{\hbar^2}{16mbp^2} \cos(3vz) \right] \right|^2 dv dz d\eta \quad (3.31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P = & \frac{1}{\left[\frac{16\pi^4}{9} + \frac{89q^2\hbar^2}{16m} \left(\frac{24\pi^3}{9}\right) + \frac{q^4\hbar^4\pi^3}{8192m^2}\right]} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{z_1}^{z_2} \left[\left(\frac{v}{2} - \frac{\sin(2vz)}{4z} \right) \Big|_{v_1}^{v_2} \right. \\
& + \frac{\hbar^2}{8mbp^2} \left(\frac{\sin(2vz)}{4z} - \frac{\sin(4vz)}{8z} \right) \Big|_{v_1}^{v_2} \\
& \left. + \frac{\hbar^4}{256m^2b^2p^4} \left(\frac{v}{2} - \frac{\sin(6vz)}{12z} \right) \Big|_{v_1}^{v_2} \right] dz d\eta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P = & \frac{1}{\left[\frac{16\pi^4}{9} + \frac{89q^2\hbar^2}{16m} \left(\frac{24\pi^3}{9}\right) + \frac{q^4\hbar^4\pi^3}{8192m^2}\right]} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{z_1}^{z_2} \left[\left(\left(\frac{v_2}{2} - \frac{\sin(2v_2z)}{4z} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \left(\frac{v_1}{2} - \frac{\sin(2v_1z)}{4z} \right) \right) \right. \\
& + \frac{\hbar^2}{8mbp^2} \left(\left(\frac{\sin(2v_2z)}{4z} - \frac{\sin(4v_2z)}{8z} \right) \right. \\
& \left. \left. - \left(\frac{\sin(2v_1z)}{4z} - \frac{\sin(4v_1z)}{8z} \right) \right) \right. \\
& \left. + \frac{\hbar^4}{256m^2b^2p^4} \left(\left(\frac{v_2}{2} - \frac{\sin(6v_2z)}{12z} \right) - \left(\frac{v_1}{2} - \frac{\sin(6v_1z)}{12z} \right) \right) \right] dz d\eta \quad (3.32)
\end{aligned}$$

Persamaan diatas adalah hasil dari integral terhadap v , selanjutnya akan dilakukannya perhitungan terhadap dz yakni:

$$\begin{aligned}
P = & \frac{1}{\left[\frac{16\pi^4}{9} + \frac{89q^2\hbar^2}{16m} \left(\frac{24\pi^3}{9}\right) + \frac{q^4\hbar^4\pi^3}{8192m^2}\right]} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \left[+ \frac{v_2^3 z_2^3}{9} - \frac{v_2^3 z_1^3}{9} - \frac{v_1^3 z_2^3}{9} + \frac{v_1^3 z_1^3}{9} \right. \\
& + \frac{\hbar^2}{8mbp^2} \left(\frac{3v_2^3 z_2^3}{9} - \frac{3v_2^3 z_1^3}{9} - \frac{3v_1^3 z_2^3}{9} + \frac{3v_1^3 z_1^3}{9} \right) \\
& + \frac{\hbar^4}{256m^2b^2p^4} \left(\frac{v_2 z_2}{2} - \frac{v_2 z_1}{2} - \frac{v_2 z_2}{2} + v_2^3 z_2^3 + \frac{v_2 z_1}{2} - v_2^3 z_1^3 - \frac{v_1 z_2}{2} \right. \\
& \left. \left. + \frac{v_1 z_1}{2} + \frac{v_1 z_2}{2} - v_1^3 z_2^3 - \frac{v_1 z_1}{2} + v_1^3 z_1^3 \right) \right] d\eta \quad (3.33)
\end{aligned}$$

Dilakukan perhitungan terakhir yakni integral terhadap dq , hingga akhirnya diperoleh hasil akhir nilai probabilitas fungsi gelombang pada partikel yang bergerak pada simpul torus dengan pendekatan Mathieu, yaitu:

$$\begin{aligned}
P = \frac{1}{\left[\frac{16\pi^4}{9} + \frac{89q^2\hbar^2}{16m} \left(\frac{24\pi^3}{9} \right) + \frac{q^4\hbar^4\pi^3}{8192m^2} \right]} & \left[\frac{v_2^3 z_2^3 \eta_2}{9} - \frac{v_2^3 z_2^3 \eta_1}{9} - \frac{v_2^3 z_1^3 \eta_2}{9} \right. \\
& + \frac{v_2^3 z_1^3 \eta_1}{9} - \frac{v_1^3 z_2^3 \eta_2}{9} + \frac{v_1^3 z_2^3 \eta_1}{9} + \frac{v_1^3 z_1^3 \eta_2}{9} - \frac{v_1^3 z_1^3 \eta_1}{9} \\
& + \frac{\hbar^2}{8mbp^2} \left(\frac{3v_2^3 z_2^3 \eta_2}{9} - \frac{3v_2^3 z_2^3 \eta_1}{9} - \frac{3v_2^3 z_1^3 \eta_2}{9} + \frac{3v_2^3 z_1^3 \eta_1}{9} \right. \\
& \left. - \frac{3v_1^3 z_2^3 \eta_2}{9} + \frac{3v_1^3 z_2^3 \eta_1}{9} + \frac{3v_1^3 z_1^3 \eta_2}{9} - \frac{3v_1^3 z_1^3 \eta_1}{9} \right) \\
& + \frac{\hbar^4}{256m^2 b^2 p^4} (v_2^3 z_2^3 \eta_2 - v_2^3 z_2^3 \eta_1 - v_2^3 z_1^3 \eta_2 + v_2^3 z_1^3 \eta_1 \\
& \left. - v_1^3 z_2^3 \eta_2 + v_1^3 z_2^3 \eta_1 + v_1^3 z_1^3 \eta_2 - v_1^3 z_1^3 \eta_1) \right] \quad (3.34)
\end{aligned}$$

Persamaan (3.34) adalah nilai probabilitas dari fungsi gelombang partikel pada permukaan torus yang tipis yakni dari pendekatan persamaan Mathieu. Probabilitas dikenal juga sebagai kerapatan peluang, peluang secara eksperimen memungkinkan adanya partikel yang bergerak terbatas pada permukaan torus yang memiliki jari-jari R lebih besar dari jari-jari d pada suatu daerah yang dinyatakan dalam batas-batas $v_1 - v_2$; $z_1 - z_2$ dan $\eta_1 - \eta_2$ pada persamaan diatas (3.34). Dari sini dapat dilihat bahwa probabilitas partikel bukan untuk mengetahui posisinya secara pasti tetapi untuk membuktikan bahwa adanya kemungkinan partikel berada pada suatu daerah yang telah ditentukan dengan gerak yang terbatas hanya pada simpul torus. Partikel hanya memiliki kemungkinan adanya pada simpul torusnya bukan didalam atau diluar torus.

BAB IV

PERSAMAAN GERAK PARTIKEL DALAM SIMPUL TORUS DENGAN PENDEKATAN HILL – WHITTAKER

4.1 Persamaan Gelombang Partikel yang Bergerak pada Simpul Torus dengan Pendekatan Hill-Whittaker.

Persamaan Schrodinger merupakan postulat tentang gerak partikel pada tingkat atom, yang digunakan disini adalah persamaan Schrodinger tak bergantung waktu yang mana berfokus pada ruang atau batasan-batasan partikel untuk bergerak, yang dalam hal ini disebut dengan potensial (Nurdina dan Bancong, 2020). Setiap pembatasan yang membatasi gerak partikel dapat mempengaruhi fungsi energi potensial, karena dalam hal ini partikel bergerak terbatas hanya pada simpul torus atau hanya pada permukaan torus yang mana permukaan torus sendiri bukan garis lurus tapi kurva yang melengkung, sehingga mengenai nilai potensial partikel yang bergerak pada simpul torus menggunakan nilai potensial dari kelengkungan torus sendiri yang didefinisikan dengan kappa (2.10). Dari sinilah diperoleh persamaan Schrodinger tak bergantung waktu yang dimodifikasi potensial kelengkungan torus dapat dilihat dipersamaan (2.32), dalam bab ini akan dituliskan ulang yakni :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\Delta_s + \frac{k^2}{4} \right] \Psi \quad (4.1)$$

Torus sendiri memiliki koordinat toroidal yang merupakan sistem koordinat ortogonal tiga dimensi yang memiliki permukaan dengan gerak secara rotasi atau revolusi dari suatu lingkaran yang berputar dengan sumbu putar secara koplantar atau sebidang dengan lingkaran itu sendiri, dengan kata lain biasanya disebut torus. Dengan sistem koordinat kartesian (x,y,z) menjadi sistem koordinat toroidal yakni

$(\eta, \alpha\phi, \phi)$, yang mana parametrisasinya koordinat toroidal terhadap Cartesian ditunjukkan pada persamaan (2.1). η mendefinisikan permukaan torus yang digambarkan lingkaran berbentuk horizontal, sedangkan $\alpha\phi$ mendefinisikan lingkaran berbentuk vertikal dan ϕ adalah sudut azimuth dengan sumbu simetri z. Dari persamaan diatas akan dimasukkan koordinat toroidal sebagaimana merupakan koordinat dari bidang torus, sehingga diperoleh persamaan gelombang berikut ini :

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\frac{\sigma''\sigma - 2\sigma'^2}{\sigma^2} \right) + (a\beta)^2\sigma^4 \left(\frac{k^2}{4} + \epsilon \right) \right] G(\phi) = 0$$

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\frac{\sigma''\sigma - 2\sigma'^2}{\sigma^2} \right) + (a\beta)^2\sigma^4 \frac{k^2}{4} + (a\beta)^2\sigma^4\epsilon \right] G(\phi) = 0 \quad (4.2)$$

dimana

$$f(\phi) = \sigma(\phi) = 1/\sqrt{b - \cos(\alpha\phi)}$$

Persamaan (4.2) merupakan persamaan gelombang partikel dalam simpul torus dengan potensial kelengkungan dan koordinat toroidal torus. Selanjutnya pada bagian kedua persamaan (4.2) dilakukan perhitungan dengan ekspresi untuk σ pada persamaan diatas, didapatkan:

$$\left(\frac{\sigma\sigma'' - 2\sigma'}{\sigma^2} \right) = \frac{\alpha^2[3 - 4b \cos(\alpha\phi) + \cos(2\alpha\phi)]}{8(b - \cos(\alpha\phi))^2} \quad (4.3)$$

dengan menambahkan bagian ketiga dari persamaan (4.2) $\left(\alpha^2\beta^2\sigma^4 \frac{k^2}{4} \right)$ terhadap persamaan (4.3) diperoleh :

$$\left(\frac{\sigma\sigma'' - 2\sigma'}{\sigma^2} \right) + \alpha^2\beta^2\sigma^4 \frac{k^2}{4} = \frac{b^2 + \alpha^4 - 1}{4(b^2 + \alpha^2 - 1)} \quad (4.4)$$

menganggap :

$$\Gamma = \frac{b^2 + \alpha^4 - 1}{4(b^2 + \alpha^2 - 1)} \quad (4.5)$$

Persamaan (4.5) merupakan struktur menarik, karena menggabungkan sifat utama simpul sepanjang parameter $\alpha\phi$, serta sifat dari torus melalui parameter $b = \cosh(\eta)$. Ini adalah salah satu hasil menarik yang diperoleh. Substitusi persamaan (4.5) kembali ke persamaan (4.2), sehingga diperoleh :

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + \frac{b^2 + \alpha^4 - 1}{4(b^2 + \alpha^2 - 1)} + (a\beta)^2 \sigma^4 \epsilon \right] G(\phi) = 0 \quad (4.6)$$

Persamaan (4.6) diatas adalah persamaan gelombang dengan potensial kelengkungan dan koordinat toroidal torus, yang mana akan diselesaikan (4.6) untuk $G(\phi)$. Dapat dilihat persamaan diatas adalah persamaan differensial orde 2 yang merupakan sebuah persamaan matematis yang dapat menjelaskan mengenai perubahan sifat atau perilaku dari suatu fenomena alam. Dari persamaan diatas akan dicari fungsi gelombangnya suatu partikel yang bergerak dalam simpul torus untuk pendekatan Hill-Whittaker.

4.2 Persamaan Gelombang dengan Pendekatan Hill-Whittaker

Pendekatan kedua yang digunakan oleh penulis yakni pendekatan Hill-Whittaker. Persamaan Hill-Whittaker diberikan oleh Whittaker sendiri pada tahun 1877 dengan mendegeneralisasi dari fungsi Mathieu, yang juga memiliki solusi periodik 0 sampai 2π . dari sini dapat dilihat bahwa dipilihnya pendekatan Hill-Whittaker karena persamaan Hill-Whittaker merupakan degeneralisasi dari fungsi Mathieu. Pendekatan ini dikatakan batas torus tebal yakni nilai R jari-jari mayor torus harus lebih kecil dari d jari-jari minor torus. Untuk lebih memahami (4.6), memperluas suku ketiga dalam persamaan, sebagai deret binomial, Deret binomial merupakan deret pangkat di ruas kanan yang dinyatakan dalam koefisien binomial (digeneralisasikan). Dalam matematika, deret binomial adalah deret Taylor untuk fungsi f yang diberikan oleh $f(x) = 1/(1+x)^\beta$, dimana $\beta \in \mathbb{C}$ bilangan

kompleks arbitrer dan $|x| < 1$. Varian berikut berlaku untuk kompleks arbitrer, tetapi khususnya berguna untuk menangani eksponen bilangan bulat negative pada:

$$\frac{1}{(1-z)^\beta} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\beta}{k} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+\beta-1}{k} z^k \quad (4.6)$$

dalam hal koefisien multiset atau koefisien binomial. Menggunakan identitas koefisien binominal. Mengambil bagian $(a\beta)^2 \sigma^4 \epsilon$ pada persamaan (4.2) dijadikan:

$$= \frac{a^2 \beta^2 \epsilon}{b^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{b \cos(\alpha\phi)}{b^2}\right)^2} \quad (4.7)$$

deret binomial menjadi :

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\Gamma + \frac{a^2 \beta^2 \epsilon}{b^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{k+1}{k} \left(\frac{b \cos(\alpha\phi)}{b^2} \right)^k \right) \right] G(\phi) = 0$$

perhitungan pada $k=1$, $k=2$ dan $k=3$, idapatkan:

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\frac{4\Gamma}{a^2} + \frac{a^2 \beta^2 \epsilon}{b^2} + \frac{2a^2 \beta^2 \epsilon}{b^4} - \frac{a^2 \beta^2 \epsilon \sin^2(2z)}{b^4} \right) - \frac{2a^2 \beta^2 \epsilon \cos(2z)}{b^3} \right. \\ \left. + \frac{2a^2 \beta^2 \epsilon \cos(4z)}{2b^4} \right] G(\phi) = 0 \quad (4.8)$$

Persamaan diatas adalah persamaan gelombang partikel yang bergerak terbatas pada simpul torus dengan bentuk persamaan differensial orde dua, yang mana sudah menjadi pendekatan persamaan Hill-Whittaker. Dengan z yang menjelaskan permukaan torus pada lingkaran vertikal, $b = \cosh(\eta)$, η permukaan torus secera horizontal dan ϵ variable yang didalamnya mengandung nilai energi dari partikel yang bergerak terbatas dalam simpul torus. Atau bisa dikatakan persamaan dengan pendekatan differensial Hill-Whittaker ini yang diperoleh dengan batas torus tebal, dinamakan torus tebal karena a mendekati 0 dengan a sendiri adalah $a^2 = R^2 - d^2$, disini dari persaman Hill-Whittaker juag memiliki :

$$\theta_0 = \frac{4\Gamma}{\alpha^2} + \frac{a^2\beta^2\epsilon}{b^2} + \frac{2a^2\beta^2\epsilon}{b^4} - \frac{a^2\beta^2\epsilon \sin^2(2z)}{b^4} \quad (4.9)$$

$$\theta_1 = -\frac{a^2\beta^2\epsilon}{b^3} \quad (4.10)$$

$$\theta_2 = \frac{2a^2\beta^2\epsilon}{2b^4} \quad (4.11)$$

Mengikuti Ince (1915), solusi paling umum dari persamaan Hill-Whittaker dapat diperoleh sepanjang garis yang sama yang diadopsi untuk menyelesaikan persamaan Mathieu dan menghasilkan nilai energi berikut :

$$E_n = \frac{n^2 b^2 \hbar^2}{2mp^2 a^2 \beta^2 \left(1 + \frac{2}{b^2} - \frac{\sin^2(2z)}{b^2}\right)} \quad (4.12)$$

Persamaan (4.12) adalah energi dari partikel yang bergerak disimpul torus dengan menggunakan pendekatan Hill-Whittaker, $b^2 = \cosh^2(\eta_0)$, m adalah massa partikel dan n adalah bilangan bulat yang memberikan spesifikasi tingkatan energi pada partikel yang bergerak terbatas pada simpul torus dengan pendekatan Mathieu. Sebuah partikel yang terperangkap tidak dapat memiliki energi yang sembarangan seperti energi yang dimiliki partikel bebas, kenyataan terperangkapnya menyebabkan pembatas pada gerak partikelnya.

4.3 Solusi Persamaan Gelombang dengan Pendekatan Hill-Whittaker

GW Hill meneliti suatu kasus pada tahun 1877 yakni menyelidiki gerak rata-rata titik terdekat bulan terhadap bumi melalui bentuk persamaan Mathieu yang diperluas atau digeneralisasikan, hingga diperoleh persamaan Hill-Whittaker. Persamaan Hill-Whittaker (2.72) merupakan persamaan differensial yang memecahkan masalah dengan menggunakan subjek determinan tak terbatas. Persamaan ini ditulis dalam buku yang berjudul “On General Solution Hill’s Equation” persamaan (4.8) bisa diselesaikan dengan solusi berikut :

$$\Phi = e^{ivz} u \quad (4.13)$$

persamaan menjadi :

$$\begin{aligned} u = \sin(z - \sigma) - \frac{a^2 \beta^2 \epsilon}{8b^3} \sin(3z - \sigma) \\ + \frac{a^4 \beta^4 \epsilon^2}{b^6} \left[\frac{1}{64} \cos 2\sigma \sin(3z - \sigma) \right. \\ \left. + \frac{3}{64} \sin 2\sigma \cos(3z - \sigma) + \frac{1}{192} \sin(5z - \sigma) \right] \end{aligned} \quad (4.14)$$

persamaan diatas (4.15) dimasukkan kedalam persamaan (4.15) :

$$\begin{aligned} \Phi = e^{ivz} \left[\sin(z - \sigma) - \frac{a^2 \beta^2 \epsilon}{8b^3} \sin(3z - \sigma) \right. \\ \left. + \frac{a^4 \beta^4 \epsilon^2}{b^6} \left[\frac{1}{64} \cos 2\sigma \sin(3z - \sigma) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3}{64} \sin 2\sigma \cos(3z - \sigma) + \frac{1}{192} \sin(5z - \sigma) \right] \right] \end{aligned} \quad (4.15)$$

dengan memasukkan faktor $X = N\sqrt{F}$ Sehingga diperoleh persamaan gelombang partikel yang bergerak disimpul torus dengan pendekatan Hill-Whittaker :

$$\begin{aligned} \Psi = Ne^{ivz} \left[\sin(z - \sigma) - \frac{a^2 \beta^2 \epsilon}{8b^3} \sin(3z - \sigma) \right. \\ \left. + \frac{a^4 \beta^4 \epsilon^2}{b^6} \left[\frac{1}{64} \cos 2\sigma \sin(3z - \sigma) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3}{64} \sin 2\sigma \cos(3z - \sigma) + \frac{1}{192} \sin(5z - \sigma) \right] \right] \end{aligned} \quad (4.16)$$

Persamaan (4.16) adalah hasil dari solusi periodik persamaan gelombang dengan pendekatan Hill-Whittaker yang merupakan fungsi gelombang partikel yang bergerak pada permukaan torus dengan pendekatan Hill-Whittaker, dengan kata lain persamaan gerak dari partikel tersebut. Fungsi gelombang diatas (3.16) merupakan persamaan matematis yang menggambarkan keadaan kuantum dari

suatu sistem kuantum yang terisolasi terkait partikel yang bergerak terbatas pada simpul torus dengan pendekatan Hill-Whittaker. Fungsi gelombang mengandung berbagai macam informasi diantaranya momentum partikel, posisi, energi, lintasan, panjang gelombang, kerapatan atau adanya peluang partikel tersebut, dll.

4.4 Nilai Probabilitas Fungsi Gelombang Partikel yang Bergerak pada

Simpul Torus dengan Pendekatan Hill-Whittaker.

Fungsi gelombang perlu dinormalisasikan terlebih dahulu, yang mana persamaan normalisasi fungsi gelombang merupakan pernyataan matematis bahwa partikel itu ada disuatu tempat pada permukaan torus yang hanya bernilai tunggal pada keadaan yang kontinu, dan diperoleh hasil normalisasi dengan batas $0 \leq v \leq 1, 0 \leq \sigma \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq z \leq 2\pi, 0 \leq \eta \leq 2\pi$, persamaan normalisasi diperoleh:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dx = 1 \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \left| N e^{ivz} \left[\sin(z - \sigma) - \frac{a^2 \beta^2 \epsilon}{8b^3} \sin(3z - \sigma) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{a^4 \beta^4 \epsilon^2}{b^6} \left[\frac{1}{64} \cos 2\sigma \sin(3z - \sigma) \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. + \frac{3}{64} \sin 2\sigma \cos(3z - \sigma) + \frac{1}{192} \sin(5z - \sigma) \right] \right] \right|^2 dv d\sigma dz d\eta \\ & = 1 \end{aligned} \quad (4.18)$$

dilakukannya perhitungan dengan mengintegrasikan terhadap dv , didapatkan hasil:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} N^2 \left(\frac{i \sin^2(z) + \cos(z) \sin(z)}{z} \right) \left[\sin(z - \sigma) - \frac{\alpha^2 \beta^2 \epsilon}{8b^3} \sin(3z - \sigma) \right. \\
& \quad + \frac{\alpha^4 \beta^4 \epsilon^2}{b^6} \left[\frac{1}{64} \cos 2\sigma \sin(3z - \sigma) \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{3}{64} \sin 2\sigma \cos(3z - \sigma) + \frac{1}{192} \sin(5z - \sigma) \right] \right]^2 d\sigma dz d\eta = 1 \quad (4.19)
\end{aligned}$$

dan selanjutnya akan dilakukannya perhitungan terhadap $d\sigma$, dengan hasil :

$$\begin{aligned}
& N^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{i \sin^2(z) + \cos(z) \sin(z)}{z} \right) \left[\frac{-2 \sin(2z) + \pi}{4} \right. \\
& \quad - \frac{\alpha^2 \beta^2 \epsilon - 2 \sin(4z) + \pi \cos(2z)}{4b^3} + \frac{\alpha^4 \beta^4 \epsilon^2}{32b^6} \left(\frac{-2\pi \cos(4z)}{16} \right) \\
& \quad - \frac{3\alpha^4 \beta^4 \epsilon^2}{32b^6} \left(\frac{8 \sin(2z) + 2\pi \cos(4z)}{16} \right) \\
& \quad + \frac{\alpha^4 \beta^4 \epsilon^2}{96b^6} \left(\frac{-2 \sin(6z) + \pi \cos(4z)}{4} \right) \\
& \quad + \frac{\alpha^4 \beta^4 \epsilon^2}{64b^6} \left(\frac{-2 \sin(6z) + \pi}{4} \right) - \frac{\alpha^6 \beta^6 \epsilon^3}{256b^9} \left(\frac{-2\pi \cos(6z)}{16} \right) \\
& \quad + \frac{3\alpha^6 \beta^6 \epsilon^3}{256b^9} \left(\frac{2\pi \cos(6z)}{16} \right) \\
& \quad + \frac{\alpha^6 \beta^6 \epsilon^3}{768b^9} \left(\frac{-2 \sin(8z) + \pi \cos(2z)}{4} \right) \\
& \quad - \frac{\alpha^8 \beta^8 \epsilon^4}{4096b^{12}} \left(\frac{8 \sin(6z) - 6\pi}{48} \right) - \frac{3\alpha^8 \beta^8 \epsilon^4}{2048b^{12}} \left(\frac{-8 \sin(6z)}{48} \right) \\
& \quad + \frac{\alpha^8 \beta^8 \epsilon^4}{6144b^{12}} \left(\frac{-2\pi \cos(8z)}{16} \right) - \frac{9\alpha^8 \beta^8 \epsilon^4}{4096b^{12}} \left(\frac{-16 \sin(6z) - 6\pi}{48} \right) \\
& \quad - \frac{3\alpha^8 \beta^8 \epsilon^4}{6144b^{12}} \left(\frac{-8 \sin(2z) + 2\pi \cos(8z)}{16} \right) \\
& \quad \left. + \frac{\alpha^8 \beta^8 \epsilon^4}{36864b^{12}} \left(\frac{-2 \sin(10z) + \pi}{4} \right) \right] dz d\eta = 1 \quad (4.20)
\end{aligned}$$

Persamaan (4.20) merupakan hasil dari integral terhadap $d\sigma$, berikutnya adalah perhitungan terhadap dz untuk mendapatkan nilai dari N, yakni :

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \left[-\frac{i}{2} \left(\frac{48\pi^3}{9} \right) + \frac{ia^2\beta^2\epsilon}{8b^3} \left(\frac{96\pi^3}{9} \right) - \frac{ia^4\beta^4\epsilon^2}{8b^6} \left(\frac{33\pi^3}{9} \right) - \frac{ia^6\beta^6\epsilon^3}{1536b^9} \left(\frac{192\pi^3}{9} \right) \right. \\
& + \frac{5ia^8\beta^8\epsilon^4}{384b^{12}} \left(\frac{11\pi^3}{9} \right) + \frac{\pi}{4} \left(2\pi - \frac{16\pi^3}{9} \right) - \frac{\pi a^2\beta^2\epsilon}{16b^3} \left(2\pi - \frac{64\pi^3}{9} \right) \\
& - \frac{5\pi a^4\beta^4\epsilon^2}{384b^6} \left(2\pi - \frac{60\pi^3}{9} \right) + \frac{\pi a^4\beta^4\epsilon^2}{256b^6} \left(2\pi - \frac{16\pi^3}{9} \right) \\
& + \frac{\pi a^6\beta^6\epsilon^3}{512b^9} \left(2\pi - \frac{448\pi^3}{9} \right) + \frac{\pi a^6\beta^6\epsilon^3}{768b^9} \left(2\pi - \frac{64\pi^3}{9} \right) \\
& - \frac{\pi a^8\beta^8\epsilon^4}{12288b^{12}} \left(2\pi - \frac{784\pi^3}{9} \right) + \frac{23\pi a^8\beta^8\epsilon^4}{73728b^{12}} \left(2\pi - \frac{16\pi^3}{9} \right) \\
& + \frac{i\pi}{4} \left(-\frac{1}{2} \ln(4\pi) + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& + \frac{i\pi a^4\beta^4\epsilon^2}{256b^6} \left(-\frac{1}{2} \ln(4\pi) + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} \ln(8\pi) + \frac{1}{4} \ln(2\pi) + 4\pi^2 \right) \\
& + \frac{a^2\beta^2\epsilon}{8b^3} \left(-\frac{1}{4} \ln(12\pi) + \frac{1}{4} \ln(4\pi) + 8\pi^2 \right) \\
& + \frac{23i\pi a^8\beta^8\epsilon^4}{73728b^{12}} \left(-\frac{1}{2} \ln(4\pi) + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& - \frac{3a^4\beta^4\epsilon^2}{64b^6} \left(-\frac{1}{4} \ln(8\pi) + \frac{1}{4} \ln(2\pi) + 4\pi^2 \right) \\
& - \frac{a^4\beta^4\epsilon^2}{192b^6} \left(-\frac{1}{4} \ln(16\pi) + \frac{1}{4} \ln(8\pi) + 12\pi^2 \right) \\
& - \frac{a^4\beta^4\epsilon^2}{128b^6} \left(-\frac{1}{4} \ln(16\pi) + \frac{1}{4} \ln(8\pi) + 12\pi^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{a^6 \beta^6 \epsilon^3}{1536b^9} \left(-\frac{1}{4} \ln(20\pi) + \frac{1}{4} \ln(12\pi) + 16\pi^2 \right) \\
& + \frac{a^8 \beta^8 \epsilon^4}{4096b^{12}} \left(-\frac{1}{4} \ln(8\pi) + \frac{1}{4} \ln(2\pi) + 4\pi^2 \right) \\
& + \frac{23a^8 \beta^8 \epsilon^4}{24576b^{12}} \left(-\frac{1}{4} \ln(16\pi) + \frac{1}{4} \ln(8\pi) + 12\pi^2 \right) \\
& - \frac{a^8 \beta^8 \epsilon^4}{73728b^{12}} \left(-\frac{1}{4} \ln(24\pi) + \frac{1}{4} \ln(16\pi) + 20\pi^2 \right) \\
& - \frac{i\pi a^2 \beta^2 \epsilon}{16b^3} \left(-\frac{1}{4} \ln(8\pi) + \frac{1}{2} \ln(4\pi) - \frac{1}{4} \ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& - \frac{5i\pi a^4 \beta^4 \epsilon^2}{384b^6} \left(-\frac{1}{4} \ln(12\pi) + \frac{1}{2} \ln(8\pi) - \frac{1}{4} \ln(4\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& + \frac{5i\pi a^6 \beta^6 \epsilon^3}{1536b^9} \left(-\frac{1}{4} \ln(16\pi) + \frac{1}{2} \ln(12\pi) - \frac{1}{4} \ln(8\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& - \frac{i\pi a^8 \beta^8 \epsilon^4}{12288b^{12}} \left(-\frac{1}{4} \ln(20\pi) + \frac{1}{2} \ln(16\pi) - \frac{1}{4} \ln(12\pi) + 2\pi^2 \right) \Big] d\eta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N = srtq1/ & \left[-i\pi \left(\frac{48\pi^3}{9} \right) + \left[\frac{0.79ia^2\epsilon}{2} + \frac{0.78ia^2\epsilon}{8} \right] \left(\frac{96\pi^3}{9} \right) \right. \\
& - \left[1.1ia^4\epsilon^2 - \frac{0.199ia^4\epsilon^2}{8} \right] \left(\frac{33\pi^3}{9} \right) - \left[\frac{0.42ia^6\epsilon^3}{24} + \frac{0.06ia^6\epsilon^3}{1536} \right] \left(\frac{192\pi^3}{9} \right) \\
& + \left[0.74ia^8\epsilon^4 + \frac{0.1ia^8\epsilon^4}{384} \right] \left(\frac{11\pi^3}{9} \right) + \frac{\pi^2}{2} \left(2\pi - \frac{16\pi^3}{9} \right) \\
& - \left[\frac{0.79\pi a^2\epsilon}{4} + \frac{0.78\pi a^2\epsilon}{16} \right] \left(2\pi - \frac{64\pi^3}{9} \right) \\
& - \left[\frac{5.5\pi a^4\beta^4\epsilon^2}{24} + \frac{0.995\pi a^4\beta^4\epsilon^2}{384} \right] \left(2\pi - \frac{60\pi^3}{9} \right) \\
& + \left[\frac{0.53\pi a^4\epsilon^2}{16} + \frac{0.199\pi a^4\epsilon^2}{256} \right] \left(2\pi - \frac{16\pi^3}{9} \right) \\
& + \left[\frac{0.42\pi a^6\epsilon^3}{8} + \frac{0.06\pi a^6\epsilon^3}{512} \right] \left(2\pi - \frac{448\pi^3}{9} \right) \\
& + \left[\frac{0.42\pi a^6\beta^6\epsilon^3}{12} + \frac{0.06\pi a^6\beta^6\epsilon^3}{768} \right] \left(2\pi - \frac{64\pi^3}{9} \right) \\
& - \left[\frac{0.36\pi a^8\epsilon^4}{48} - \frac{0.02\pi a^8\epsilon^4}{12288} \right] \left(2\pi - \frac{784\pi^3}{9} \right) \\
& + \left[\frac{8.28\pi a^8\beta^8\epsilon^4}{288} + \frac{0.46\pi a^8\beta^8\epsilon^4}{73728} \right] \left(2\pi - \frac{16\pi^3}{9} \right) \\
& + \frac{i\pi^2}{2} \left(-\frac{1}{2} \ln(4\pi) + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& + \left[\frac{0.53i\pi a^4\epsilon^2}{16} + \frac{0.19i\pi a^4\epsilon^2}{256} \right] \left(-\frac{1}{2} \ln(4\pi) + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& - \pi \left(-\frac{1}{4} \ln(8\pi) + \frac{1}{4} \ln(2\pi) + 4\pi^2 \right) \\
& + \left[\frac{0.78a^2\epsilon}{2} + \frac{0.78a^2\epsilon}{8} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(12\pi) + \frac{1}{4} \ln(4\pi) + 8\pi^2 \right) \\
& + \left[\frac{8.51i\pi a^8\epsilon^4}{73728} + \frac{0.46i\pi a^8\epsilon^4}{73728} \right] \left(-\frac{1}{2} \ln(4\pi) + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{1.59a^4\epsilon^2}{4} + \frac{0.57a^4\epsilon^2}{64} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(8\pi) + \frac{1}{4} \ln(2\pi) + 4\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{a^4\epsilon^2}{12} + \frac{0.19a^4\epsilon^2}{192} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(16\pi) + \frac{1}{4} \ln(8\pi) + 12\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{0.53a^4\epsilon^2}{8b^6} + \frac{0.19a^4\epsilon^2}{128} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(16\pi) + \frac{1}{4} \ln(8\pi) + 12\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{0.43a^6\epsilon^3}{24} + \frac{0.06a^6\epsilon^3}{1536} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(20\pi) + \frac{1}{4} \ln(12\pi) + 16\pi^2 \right) \\
& + \left[\frac{0.36a^8\epsilon^4}{16} + \frac{0.02a^8\epsilon^4}{4096} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(8\pi) + \frac{1}{4} \ln(2\pi) + 4\pi^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{8.28a^8\epsilon^4}{96} + \frac{0.46a^8\epsilon^4}{24576} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(16\pi) + \frac{1}{4}\ln(8\pi) + 12\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{0.36a^8\epsilon^4}{288} - \frac{0.02a^8\epsilon^4}{73728} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(24\pi) + \frac{1}{4}\ln(16\pi) + 20\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{0.79i\pi a^2\epsilon}{8} + \frac{0.78i\pi a^2\epsilon}{16} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(8\pi) + \frac{1}{2}\ln(4\pi) - \frac{1}{4}\ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{2.65i\pi a^4\epsilon^2}{24} + \frac{0.95i\pi a^4\epsilon^2}{384} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(12\pi) + \frac{1}{2}\ln(8\pi) - \frac{1}{4}\ln(4\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& + \left[\frac{2.15i\pi a^6\epsilon^3}{24} + \frac{0.3i\pi a^6\epsilon^3}{1536} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(16\pi) + \frac{1}{2}\ln(12\pi) - \frac{1}{4}\ln(8\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{0.36i\pi a^8\epsilon^4}{48} + \frac{0.02i\pi a^8\epsilon^4}{12288} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(20\pi) + \frac{1}{2}\ln(16\pi) - \frac{1}{4}\ln(12\pi) \right. \\
& \left. + 2\pi^2 \right) \Big] \tag{4.21}
\end{aligned}$$

Persamaan (4.21) adalah normalisasi fungsi gelombang, sehingga diperoleh nilai dari N . setelah mendapatkan nilai N ini selanjutnya akan dilakukan perhitungan untuk memperoleh nilai probabilitas fungsi gelombang partikel pada simpul torus dengan pendekatan Hill-Whittaker. Dengan persamaan probabilitas seperti pada (2.81):

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, t) \Psi(x, t) dx =$$

dengan integral terhadap v, σ , dan z , masing-masing memiliki batas $v_1 - v_2, \sigma_1 - \sigma_2$ dan $z_1 - z_2, \eta_2 - \eta_1$ sehingga persamaan probabilitas diatas menjadi :

$$\begin{aligned}
P = & \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{z_1}^{z_2} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \int_{v_1}^{v_2} \left(\text{Srtq } 1 \right. \\
& / \left[-i\pi \left(\frac{48\pi^3}{9} \right) + \left[\frac{0.79ia^2\epsilon}{2} + \frac{0.78ia^2\epsilon}{8} \right] \left(\frac{96\pi^3}{9} \right) \right. \\
& - \left[1.1ia^4\epsilon^2 - \frac{0.199ia^4\epsilon^2}{8} \right] \left(\frac{33\pi^3}{9} \right) - \left[\frac{0.42ia^6\epsilon^3}{24} + \frac{0.06ia^6\epsilon^3}{1536} \right] \left(\frac{192\pi^3}{9} \right) \\
& + \left[0.74ia^8\epsilon^4 + \frac{0.1ia^8\epsilon^4}{384} \right] \left(\frac{11\pi^3}{9} \right) + \frac{\pi^2}{2} \left(2\pi - \frac{16\pi^3}{9} \right) \\
& - \left[\frac{0.79\pi a^2\epsilon}{4} + \frac{0.78\pi a^2\epsilon}{16} \right] \left(2\pi - \frac{64\pi^3}{9} \right) \\
& - \left[\frac{5.5\pi a^4\beta^4\epsilon^2}{24} + \frac{0.995\pi a^4\beta^4\epsilon^2}{384} \right] \left(2\pi - \frac{60\pi^3}{9} \right) \\
& + \left[\frac{0.53\pi a^4\epsilon^2}{16} + \frac{0.199\pi a^4\epsilon^2}{256} \right] \left(2\pi - \frac{16\pi^3}{9} \right) \\
& + \left[\frac{0.42\pi a^6\epsilon^3}{8} + \frac{0.06\pi a^6\epsilon^3}{512} \right] \left(2\pi - \frac{448\pi^3}{9} \right) \\
& + \left[\frac{0.42\pi a^6\beta^6\epsilon^3}{12} + \frac{0.06\pi a^6\beta^6\epsilon^3}{768} \right] \left(2\pi - \frac{64\pi^3}{9} \right) \\
& - \left[\frac{0.36\pi a^8\epsilon^4}{48} - \frac{0.02\pi a^8\epsilon^4}{12288} \right] \left(2\pi - \frac{784\pi^3}{9} \right) \\
& + \left[\frac{8,28\pi a^8\beta^8\epsilon^4}{288} + \frac{0.46\pi a^8\epsilon^4}{73728} \right] \left(2\pi - \frac{16\pi^3}{9} \right) \\
& + \frac{i\pi^2}{2} \left(-\frac{1}{2} \ln(4\pi) + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& + \left[\frac{0.53i\pi a^4\epsilon^2}{16} + \frac{0.19i\pi a^4\epsilon^2}{256} \right] \left(-\frac{1}{2} \ln(4\pi) + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& - \pi \left(-\frac{1}{4} \ln(8\pi) + \frac{1}{4} \ln(2\pi) + 4\pi^2 \right) \\
& + \left[\frac{0.78a^2\epsilon}{2} + \frac{0.78a^2\epsilon}{8} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(12\pi) + \frac{1}{4} \ln(4\pi) + 8\pi^2 \right) \\
& + \left[\frac{8.51i\pi a^8\epsilon^4}{73728} + \frac{0.46i\pi a^8\epsilon^4}{73728} \right] \left(-\frac{1}{2} \ln(4\pi) + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{1.59a^4\epsilon^2}{4} + \frac{0.57a^4\epsilon^2}{64} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(8\pi) + \frac{1}{4} \ln(2\pi) + 4\pi^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{a^4 \epsilon^2}{12} + \frac{0.19a^4 \epsilon^2}{192} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(16\pi) + \frac{1}{4} \ln(8\pi) + 12\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{0.53a^4 \epsilon^2}{8b^6} + \frac{0.19a^4 \epsilon^2}{128} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(16\pi) + \frac{1}{4} \ln(8\pi) + 12\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{0.43a^6 \epsilon^3}{24} + \frac{0.06a^6 \epsilon^3}{1536} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(20\pi) + \frac{1}{4} \ln(12\pi) + 16\pi^2 \right) \\
& + \left[\frac{0.36a^8 \epsilon^4}{16} + \frac{0.02a^8 \epsilon^4}{4096} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(8\pi) + \frac{1}{4} \ln(2\pi) + 4\pi^2 \right) \\
& + \left[\frac{8.28a^8 \epsilon^4}{96} + \frac{0.46a^8 \epsilon^4}{24576} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(16\pi) + \frac{1}{4} \ln(8\pi) + 12\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{0.36a^8 \epsilon^4}{288} - \frac{0.02a^8 \epsilon^4}{73728} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(24\pi) + \frac{1}{4} \ln(16\pi) + 20\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{0.79i\pi a^2 \epsilon}{8} + \frac{0.78i\pi a^2 \epsilon}{16} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(8\pi) + \frac{1}{2} \ln(4\pi) - \frac{1}{4} \ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{2.65i\pi a^4 \epsilon^2}{24} + \frac{0.95i\pi a^4 \epsilon^2}{384} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(12\pi) + \frac{1}{2} \ln(8\pi) - \frac{1}{4} \ln(4\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& + \left[\frac{2.15i\pi a^6 \epsilon^3}{24} + \frac{0.3i\pi a^6 \epsilon^3}{1536} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(16\pi) + \frac{1}{2} \ln(12\pi) - \frac{1}{4} \ln(8\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{0.36i\pi a^8 \epsilon^4}{48} + \frac{0.02i\pi a^8 \epsilon^4}{12288} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(20\pi) + \frac{1}{2} \ln(16\pi) - \frac{1}{4} \ln(12\pi) \right. \\
& \left. + 2\pi^2 \right) \Big] e^{ivz} \left[\sin(z - \sigma) - \frac{a^2 \beta^2 \epsilon}{8b^3} \sin(3z - \sigma) \right. \\
& \left. + \frac{a^4 \beta^4 \epsilon^2}{b^6} \left[\frac{1}{64} \cos 2\sigma \sin(3z - \sigma) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{3}{64} \sin 2\sigma \cos(3z - \sigma) + \frac{1}{192} \sin(5z - \sigma) \right] \right] \Big] dv d\sigma dz d\eta \tag{4.22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P = & \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{z_1}^{z_2} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \left(Srtq \ 1 \right. \\
& / \left[-i\pi \left(\frac{48\pi^3}{9} \right) + \left[\frac{0.79ia^2\epsilon}{2} + \frac{0.78ia^2\epsilon}{8} \right] \left(\frac{96\pi^3}{9} \right) \right. \\
& - \left[1.1ia^4\epsilon^2 - \frac{0.199ia^4\epsilon^2}{8} \right] \left(\frac{33\pi^3}{9} \right) - \left[\frac{0.42ia^6\epsilon^3}{24} + \frac{0.06ia^6\epsilon^3}{1536} \right] \left(\frac{192\pi^3}{9} \right) \\
& + \left[0.74ia^8\epsilon^4 + \frac{0.1ia^8\epsilon^4}{384} \right] \left(\frac{11\pi^3}{9} \right) + \frac{\pi^2}{2} \left(2\pi - \frac{16\pi^3}{9} \right) \\
& - \left[\frac{0.79\pi a^2\epsilon}{4} + \frac{0.78\pi a^2\epsilon}{16} \right] \left(2\pi - \frac{64\pi^3}{9} \right) \\
& - \left[\frac{5.5\pi a^4\beta^4\epsilon^2}{24} + \frac{0.995\pi a^4\beta^4\epsilon^2}{384} \right] \left(2\pi - \frac{60\pi^3}{9} \right) \\
& + \left[\frac{0.53\pi a^4\epsilon^2}{16} + \frac{0.199\pi a^4\epsilon^2}{256} \right] \left(2\pi - \frac{16\pi^3}{9} \right) \\
& + \left[\frac{0.42\pi a^6\epsilon^3}{8} + \frac{0.06\pi a^6\epsilon^3}{512} \right] \left(2\pi - \frac{448\pi^3}{9} \right) \\
& + \left[\frac{0.42\pi a^6\beta^6\epsilon^3}{12} + \frac{0.06\pi a^6\beta^6\epsilon^3}{768} \right] \left(2\pi - \frac{64\pi^3}{9} \right) \\
& - \left[\frac{0.36\pi a^8\epsilon^4}{48} - \frac{0.02\pi a^8\epsilon^4}{12288} \right] \left(2\pi - \frac{784\pi^3}{9} \right) \\
& + \left[\frac{8,28\pi a^8\beta^8\epsilon^4}{288} + \frac{0.46\pi a^8\epsilon^4}{73728} \right] \left(2\pi - \frac{16\pi^3}{9} \right) \\
& + \frac{i\pi^2}{2} \left(-\frac{1}{2} \ln(4\pi) + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& + \left[\frac{0.53i\pi a^4\epsilon^2}{16} + \frac{0.19i\pi a^4\epsilon^2}{256} \right] \left(-\frac{1}{2} \ln(4\pi) + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& - \pi \left(-\frac{1}{4} \ln(8\pi) + \frac{1}{4} \ln(2\pi) + 4\pi^2 \right) \\
& + \left[\frac{0.78a^2\epsilon}{2} + \frac{0.78a^2\epsilon}{8} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(12\pi) + \frac{1}{4} \ln(4\pi) + 8\pi^2 \right) \\
& + \left[\frac{8.51i\pi a^8\epsilon^4}{73728} + \frac{0.46i\pi a^8\epsilon^4}{73728} \right] \left(-\frac{1}{2} \ln(4\pi) + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{1.59a^4\epsilon^2}{4} + \frac{0.57a^4\epsilon^2}{64} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(8\pi) + \frac{1}{4} \ln(2\pi) + 4\pi^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{a^4 \epsilon^2}{12} + \frac{0.19a^4 \epsilon^2}{192} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(16\pi) + \frac{1}{4} \ln(8\pi) + 12\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{0.53a^4 \epsilon^2}{8b^6} + \frac{0.19a^4 \epsilon^2}{128} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(16\pi) + \frac{1}{4} \ln(8\pi) + 12\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{0.43a^6 \epsilon^3}{24} + \frac{0.06a^6 \epsilon^3}{1536} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(20\pi) + \frac{1}{4} \ln(12\pi) + 16\pi^2 \right) \\
& + \left[\frac{0.36a^8 \epsilon^4}{16} + \frac{0.02a^8 \epsilon^4}{4096} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(8\pi) + \frac{1}{4} \ln(2\pi) + 4\pi^2 \right) \\
& + \left[\frac{8.28a^8 \epsilon^4}{96} + \frac{0.46a^8 \epsilon^4}{24576} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(16\pi) + \frac{1}{4} \ln(8\pi) + 12\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{0.36a^8 \epsilon^4}{288} - \frac{0.02a^8 \epsilon^4}{73728} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(24\pi) + \frac{1}{4} \ln(16\pi) + 20\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{0.79i\pi a^2 \epsilon}{8} + \frac{0.78i\pi a^2 \epsilon}{16} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(8\pi) + \frac{1}{2} \ln(4\pi) - \frac{1}{4} \ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{2.65i\pi a^4 \epsilon^2}{24} + \frac{0.95i\pi a^4 \epsilon^2}{384} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(12\pi) + \frac{1}{2} \ln(8\pi) - \frac{1}{4} \ln(4\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& + \left[\frac{2.15i\pi a^6 \epsilon^3}{24} + \frac{0.3i\pi a^6 \epsilon^3}{1536} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(16\pi) + \frac{1}{2} \ln(12\pi) - \frac{1}{4} \ln(8\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{0.36i\pi a^8 \epsilon^4}{48} + \frac{0.02i\pi a^8 \epsilon^4}{12288} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(20\pi) + \frac{1}{2} \ln(16\pi) - \frac{1}{4} \ln(12\pi) \right. \\
& \left. + 2\pi^2 \right) \left] \frac{\sin(v_2 z) - i \cos(v_2 z) - \sin(v_1 z) + i \cos(v_1 z)}{z} \left[\sin(z - \sigma) \right. \right. \\
& - \frac{a^2 \beta^2 \epsilon}{8b^3} \sin(3z - \sigma) \\
& + \frac{a^4 \beta^4 \epsilon^2}{b^6} \left[\frac{1}{64} \cos 2\sigma \sin(3z - \sigma) \right. \\
& + \frac{3}{64} \sin 2\sigma \cos(3z - \sigma) \\
& \left. \left. + \frac{1}{192} \sin(5z - \sigma) \right] \right]^2 d\sigma dz d\eta \tag{4.23}
\end{aligned}$$

P

$$\begin{aligned}
&= \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{z_1}^{z_2} \left(Srtq 1 \right. \\
&/ \left[-i\pi \left(\frac{48\pi^3}{9} \right) + \left[\frac{0.79ia^2\epsilon}{2} + \frac{0.78ia^2\epsilon}{8} \right] \left(\frac{96\pi^3}{9} \right) - \left[1.1ia^4\epsilon^2 - \frac{0.199ia^4\epsilon^2}{8} \right] \left(\frac{33\pi^3}{9} \right) \right. \\
&- \left[\frac{0.42ia^6\epsilon^3}{24} + \frac{0.06ia^6\epsilon^3}{1536} \right] \left(\frac{192\pi^3}{9} \right) + \left[0.74ia^8\epsilon^4 + \frac{0.1ia^8\epsilon^4}{384} \right] \left(\frac{11\pi^3}{9} \right) + \frac{\pi^2}{2} \left(2\pi - \frac{16\pi^3}{9} \right) \\
&- \left[\frac{0.79\pi a^2\epsilon}{4} + \frac{0.78\pi a^2\epsilon}{16} \right] \left(2\pi - \frac{64\pi^3}{9} \right) - \left[\frac{5.5\pi a^4\beta^4\epsilon^2}{24} + \frac{0.995\pi a^4\beta^4\epsilon^2}{384} \right] \left(2\pi - \frac{60\pi^3}{9} \right) \\
&+ \left[\frac{0.53\pi a^4\epsilon^2}{16} + \frac{0.199\pi a^4\epsilon^2}{256} \right] \left(2\pi - \frac{16\pi^3}{9} \right) + \left[\frac{0.42\pi a^6\epsilon^3}{8} + \frac{0.06\pi a^6\epsilon^3}{512} \right] \left(2\pi - \frac{448\pi^3}{9} \right) \\
&+ \left[\frac{0.42\pi a^6\beta^6\epsilon^3}{12} + \frac{0.06\pi a^6\epsilon^3}{768} \right] \left(2\pi - \frac{64\pi^3}{9} \right) - \left[\frac{0.36\pi a^8\epsilon^4}{48} - \frac{0.02\pi a^8\epsilon^4}{12288} \right] \left(2\pi - \frac{784\pi^3}{9} \right) \\
&+ \left[\frac{8.28\pi a^8\beta^8\epsilon^4}{288} + \frac{0.46\pi a^8\epsilon^4}{73728} \right] \left(2\pi - \frac{16\pi^3}{9} \right) + \frac{i\pi^2}{2} \left(-\frac{1}{2}\ln(4\pi) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) \\
&+ \left[\frac{0.53i\pi a^4\epsilon^2}{16} + \frac{0.19i\pi a^4\epsilon^2}{256} \right] \left(-\frac{1}{2}\ln(4\pi) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) - \pi \left(-\frac{1}{4}\ln(8\pi) + \frac{1}{4}\ln(2\pi) + 4\pi^2 \right) \\
&+ \left[\frac{0.78a^2\epsilon}{2} + \frac{0.78a^2\epsilon}{8} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(12\pi) + \frac{1}{4}\ln(4\pi) + 8\pi^2 \right) \\
&+ \left[\frac{8.51i\pi a^8\epsilon^4}{73728} + \frac{0.46i\pi a^8\epsilon^4}{73728} \right] \left(-\frac{1}{2}\ln(4\pi) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) \\
&- \left[\frac{1.59a^4\epsilon^2}{4} + \frac{0.57a^4\epsilon^2}{64} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(8\pi) + \frac{1}{4}\ln(2\pi) + 4\pi^2 \right) \\
&- \left[\frac{a^4\epsilon^2}{12} + \frac{0.19a^4\epsilon^2}{192} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(16\pi) + \frac{1}{4}\ln(8\pi) + 12\pi^2 \right) \\
&- \left[\frac{0.53a^4\epsilon^2}{8b^6} + \frac{0.19a^4\epsilon^2}{128} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(16\pi) + \frac{1}{4}\ln(8\pi) + 12\pi^2 \right) \\
&- \left[\frac{0.43a^6\epsilon^3}{24} + \frac{0.06a^6\epsilon^3}{1536} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(20\pi) + \frac{1}{4}\ln(12\pi) + 16\pi^2 \right) \\
&+ \left[\frac{0.36a^8\epsilon^4}{16} + \frac{0.02a^8\epsilon^4}{4096} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(8\pi) + \frac{1}{4}\ln(2\pi) + 4\pi^2 \right) \\
&+ \left[\frac{8.28a^8\epsilon^4}{96} + \frac{0.46a^8\epsilon^4}{24576} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(16\pi) + \frac{1}{4}\ln(8\pi) + 12\pi^2 \right) \\
&- \left[\frac{0.36a^8\epsilon^4}{288} - \frac{0.02a^8\epsilon^4}{73728} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(24\pi) + \frac{1}{4}\ln(16\pi) + 20\pi^2 \right) \\
&- \left[\frac{0.79i\pi a^2\epsilon}{8} + \frac{0.78i\pi a^2\epsilon}{16} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(8\pi) + \frac{1}{2}\ln(4\pi) - \frac{1}{4}\ln(2\pi) + 2\pi^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{2.65i\pi a^4 \epsilon^2}{24} + \frac{0.95i\pi a^4 \epsilon^2}{384} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(12\pi) + \frac{1}{2} \ln(8\pi) - \frac{1}{4} \ln(4\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& + \left[\frac{2.15i\pi a^6 \epsilon^3}{24} + \frac{0.3i\pi a^6 \epsilon^3}{1536} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(16\pi) + \frac{1}{2} \ln(12\pi) - \frac{1}{4} \ln(8\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{0.36i\pi a^8 \epsilon^4}{48} + \frac{0.02i\pi a^8 \epsilon^4}{12288} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(20\pi) + \frac{1}{2} \ln(16\pi) - \frac{1}{4} \ln(12\pi) \right. \\
& \left. + 2\pi^2 \right) \left] \frac{\sin(v_2 z) - i \cos(v_2 z) - \sin(v_1 z) + i \cos(v_1 z)}{z} \left[\frac{\sin(2z - 2\sigma_2) - \sin(2z - 2\sigma_1) + (2\sigma_2 - 2\sigma_1)}{4} \right. \\
& \left. - \frac{a^2 \beta^2 \epsilon \sin(4z - 2\sigma_2) - \sin(4z - 2\sigma_1) + (2\sigma_2 - 2\sigma_1) \cos(2z)}{4b^3} \right. \\
& \left. + \frac{a^4 \beta^4 \epsilon^2}{32b^6} \left(\frac{\sin(4z - 4\sigma_2) - \sin(4z - 4\sigma_1) + 2 \sin(2z + 2\sigma_2) - 2 \sin(2z - 2\sigma_2) - 2 \sin(2z + 2\sigma_1)}{16} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{2 \sin(2z - 2\sigma_1) + (4\sigma_1 - 4\sigma_2) \cos(4z)}{16} \right) \right. \\
& \left. - \frac{3a^4 \beta^4 \epsilon^2}{32b^6} \left(\frac{\sin(4z - 4\sigma_2) - \sin(4z - 4\sigma_1) - 2 \sin(2z + 2\sigma_2) - 2 \sin(2z - 2\sigma_2) + 2 \sin(2z + 2\sigma_1)}{16} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{2 \sin(2z - 2\sigma_1) + (4\sigma_2 - 4\sigma_1) \cos(4z)}{16} \right) \right. \\
& \left. + \frac{a^4 \beta^4 \epsilon^2}{96b^6} \left(\frac{\sin(6z - 2\sigma_2) - \sin(6z - 2\sigma_1) + (2\sigma_2 - 2\sigma_1) \cos(4z)}{4} \right) \right. \\
& \left. + \frac{a^4 \beta^4 \epsilon^2}{64b^6} \left(\frac{\sin(6z - 2\sigma_2) - \sin(6z - 2\sigma_1) + (2\sigma_2 - 2\sigma_1)}{4} \right) \right. \\
& \left. - \frac{a^6 \beta^6 \epsilon^3}{256b^9} \left(\frac{\sin(6z - 2\sigma_2) - \sin(6z - 2\sigma_1) + (4\sigma_2 - 4\sigma_1) \cos(6z) + 4 \sin(2\sigma_2) - 4 \sin(2\sigma_1)}{16} \right) \right. \\
& \left. + \frac{3a^6 \beta^6 \epsilon^3}{256b^9} \left(\frac{\sin(6z - 4\sigma_2) - \sin(6z - 4\sigma_1) + (4\sigma_2 - 4\sigma_1) \cos(6z)}{16} \right) \right. \\
& \left. + \frac{a^6 \beta^6 \epsilon^3}{768b^9} \left(\frac{\sin(8z - 2\sigma_2) - \sin(8z - 2\sigma_1) + (2\sigma_2 - 2\sigma_1) \cos(2z)}{4} \right) \right. \\
& \left. - \frac{3a^8 \beta^8 \epsilon^4}{2048b^{12}} \left(\frac{3 \sin(6z + 2\sigma_2) + \sin(6z - 6\sigma_2) - 3 \sin(6z + 2\sigma_2) - \sin(6z - 6\sigma_2)}{48} \right) \right. \\
& \left. - \frac{a^8 \beta^8 \epsilon^4}{4096b^{12}} \left(\frac{3 \sin(6z + 2\sigma_2) - 6 \sin(6z - 2\sigma_2) - \sin(6z - 6\sigma_2) - 3 \sin(6z + 2\sigma_1) + 6 \sin(6z - 2\sigma_1)}{48} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\sin(6z - 6\sigma_1) - 3 \sin(4\sigma_2) - 12\sigma_2 + 3 \sin(4\sigma_1) + 12\sigma_1}{48} \right) \right. \\
& \left. + \frac{a^8 \beta^8 \epsilon^4}{6144b^{12}} \left(\frac{\sin(8z - 4\sigma_2) - \sin(8z - 4\sigma_1) + 2 \sin(2z + 2\sigma_2) - 2 \sin(2z - 2\sigma_2) - 2 \sin(2z + 2\sigma_1)}{16} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{2 \sin(2z - 2\sigma_1) + (4\sigma_1 - 4\sigma_2) \cos(8z)}{16} \right) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{9a^8 \beta^8 \epsilon^4}{4096b^{12}} \left(\frac{3 \sin(6z + 2\sigma_2) + 6 \sin(6z - 2\sigma_2) - \sin(6z - 6\sigma_2) - 3 \sin(6z + 2\sigma_1) - 6 \sin(6z - 2\sigma_1)}{48} \right. \\
& + \left. \frac{\sin(6z - 6\sigma_1) + 3 \sin(4\sigma_2) - 12\sigma_2 - 3 \sin(4\sigma_1) + 12\sigma_1}{48} \right) \\
& - \frac{3a^8 \beta^8 \epsilon^4}{6144b^{12}} \left(\frac{\sin(8z - 4\sigma_2) - \sin(8z - 4\sigma_1) + 2 \sin(2z + 2\sigma_2) + 2 \sin(2z - 2\sigma_2) - 2 \sin(2z + 2\sigma_1)}{16} \right. \\
& + \left. \frac{-2 \sin(2z - 2\sigma_1) + (4\sigma_1 - 4\sigma_2) \cos(8z)}{16} \right) \\
& + \left. \frac{a^8 \beta^8 \epsilon^4}{36864b^{12}} \left(\frac{\sin(10z - 2\sigma_2) - \sin(10z - 2\sigma_1) + (2\sigma_2 - 2\sigma_1)}{4} \right) \right] dz d\eta \tag{2.24}
\end{aligned}$$

Perhitungan ini diperoleh persamaan yang panjang juga yang mana persamaan ini menunjukkan nilai probabilitas fungsi gelombang partikel yang bergerak pada permukaan torus tebdengan pedekatan Hill-Whittaker atau bisa dinyatakan juga dengan nilai peluang partikel atau banyaknya partikel yang berada pada permukaan v dengan $v_2 - v_1$, σ dengan $\sigma_2 - \sigma_1$ dan z dengan $z_2 - z_1$, dan $\eta, \eta_2 - \eta_1$ yakni :

P

$$\begin{aligned}
&= \left(Srtq 1 \right. \\
&/ \left[-i\pi \left(\frac{48\pi^3}{9} \right) + \left[\frac{0.79ia^2\epsilon}{2} + \frac{0.78ia^2\epsilon}{8} \right] \left(\frac{96\pi^3}{9} \right) - \left[1.1ia^4\epsilon^2 - \frac{0.199ia^4\epsilon^2}{8} \right] \left(\frac{33\pi^3}{9} \right) \right. \\
&- \left[\frac{0.42ia^6\epsilon^3}{24} + \frac{0.06ia^6\epsilon^3}{1536} \right] \left(\frac{192\pi^3}{9} \right) + \left[0.74ia^8\epsilon^4 + \frac{0.1ia^8\epsilon^4}{384} \right] \left(\frac{11\pi^3}{9} \right) + \frac{\pi^2}{2} \left(2\pi - \frac{16\pi^3}{9} \right) \\
&- \left[\frac{0.79\pi a^2\epsilon}{4} + \frac{0.78\pi a^2\epsilon}{16} \right] \left(2\pi - \frac{64\pi^3}{9} \right) - \left[\frac{5.5\pi a^4\beta^4\epsilon^2}{24} + \frac{0.995\pi a^4\beta^4\epsilon^2}{384} \right] \left(2\pi - \frac{60\pi^3}{9} \right) \\
&+ \left[\frac{0.53\pi a^4\epsilon^2}{16} + \frac{0.199\pi a^4\epsilon^2}{256} \right] \left(2\pi - \frac{16\pi^3}{9} \right) + \left[\frac{0.42\pi a^6\epsilon^3}{8} + \frac{0.06\pi a^6\epsilon^3}{512} \right] \left(2\pi - \frac{448\pi^3}{9} \right) \\
&+ \left[\frac{0.42\pi a^6\beta^6\epsilon^3}{12} + \frac{0.06\pi a^6\beta^6\epsilon^3}{768} \right] \left(2\pi - \frac{64\pi^3}{9} \right) - \left[\frac{0.36\pi a^8\epsilon^4}{48} - \frac{0.02\pi a^8\epsilon^4}{12288} \right] \left(2\pi - \frac{784\pi^3}{9} \right) \\
&+ \left[\frac{8.28\pi a^8\beta^8\epsilon^4}{288} + \frac{0.46\pi a^8\beta^8\epsilon^4}{73728} \right] \left(2\pi - \frac{16\pi^3}{9} \right) + \frac{i\pi^2}{2} \left(-\frac{1}{2}\ln(4\pi) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) \\
&+ \left[\frac{0.53i\pi a^4\epsilon^2}{16} + \frac{0.19i\pi a^4\epsilon^2}{256} \right] \left(-\frac{1}{2}\ln(4\pi) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) - \pi \left(-\frac{1}{4}\ln(8\pi) + \frac{1}{4}\ln(2\pi) + 4\pi^2 \right) \\
&+ \left[\frac{0.78a^2\epsilon}{2} + \frac{0.78a^2\epsilon}{8} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(12\pi) + \frac{1}{4}\ln(4\pi) + 8\pi^2 \right) \\
&+ \left[\frac{8.51i\pi a^8\epsilon^4}{73728} + \frac{0.46i\pi a^8\epsilon^4}{73728} \right] \left(-\frac{1}{2}\ln(4\pi) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) \\
&- \left[\frac{1.59a^4\epsilon^2}{4} + \frac{0.57a^4\epsilon^2}{64} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(8\pi) + \frac{1}{4}\ln(2\pi) + 4\pi^2 \right) \\
&- \left[\frac{a^4\epsilon^2}{12} + \frac{0.19a^4\epsilon^2}{192} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(16\pi) + \frac{1}{4}\ln(8\pi) + 12\pi^2 \right) \\
&- \left[\frac{0.53a^4\epsilon^2}{8b^6} + \frac{0.19a^4\epsilon^2}{128} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(16\pi) + \frac{1}{4}\ln(8\pi) + 12\pi^2 \right) \\
&- \left[\frac{0.43a^6\epsilon^3}{24} + \frac{0.06a^6\epsilon^3}{1536} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(20\pi) + \frac{1}{4}\ln(12\pi) + 16\pi^2 \right) \\
&+ \left[\frac{0.36a^8\epsilon^4}{16} + \frac{0.02a^8\epsilon^4}{4096} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(8\pi) + \frac{1}{4}\ln(2\pi) + 4\pi^2 \right) \\
&+ \left[\frac{8.28a^8\epsilon^4}{96} + \frac{0.46a^8\epsilon^4}{24576} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(16\pi) + \frac{1}{4}\ln(8\pi) + 12\pi^2 \right) \\
&- \left[\frac{0.36a^8\epsilon^4}{288} - \frac{0.02a^8\epsilon^4}{73728} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(24\pi) + \frac{1}{4}\ln(16\pi) + 20\pi^2 \right) \\
&- \left[\frac{0.79i\pi a^2\epsilon}{8} + \frac{0.78i\pi a^2\epsilon}{16} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(8\pi) + \frac{1}{2}\ln(4\pi) - \frac{1}{4}\ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) \\
&- \left[\frac{2.65i\pi a^4\epsilon^2}{24} + \frac{0.95i\pi a^4\epsilon^2}{384} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(12\pi) + \frac{1}{2}\ln(8\pi) - \frac{1}{4}\ln(4\pi) + 2\pi^2 \right) \\
&+ \left[\frac{2.15i\pi a^6\epsilon^3}{24} + \frac{0.3i\pi a^6\epsilon^3}{1536} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(16\pi) + \frac{1}{2}\ln(12\pi) - \frac{1}{4}\ln(8\pi) + 2\pi^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{0.36i\pi a^8 \epsilon^4}{48} + \frac{0.02i\pi a^8 \epsilon^4}{12288} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(20\pi) + \frac{1}{2} \ln(16\pi) - \frac{1}{4} \ln(12\pi) + 2\pi^2 \right) \Bigg] \\
& - \left[\frac{(\sin(2\sigma_2) + i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) - \sin(2\sigma_1)) \left((v_2 + 2)z_2 - (v_2 + 2)z_1 - \frac{((v_2 + 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 2)z_1)^3}{18} \right)}{8} \right. \\
& + \frac{(-i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) + \cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_2 + 2)z_2) - \ln((v_2 + 2)z_1) - \frac{((v_2 + 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 2)z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& + \frac{-4(\sigma_2 - 2\sigma_1) \left((v_2 z_2) - (v_2 z_1) - \frac{(v_2 z_2)^3}{18} + \frac{(v_2 z_1)^3}{18} \right) + 4i(\sigma_2 - 2\sigma_1) \left(\ln(v_2 z_2) - \ln(v_2 z_1) - \frac{(v_2 z_2)^2}{4} + \frac{(v_2 z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& + \frac{(\sin(2\sigma_2) - i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1) - \sin(2\sigma_1)) \left((v_2 + 2)z_2 - (v_2 + 2)z_1 - \frac{((v_2 + 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 2)z_1)^3}{18} \right)}{8} \\
& + \frac{(-i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) - \cos(2\sigma_2) + \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_2 + 2)z_2) - \ln((v_2 + 2)z_1) - \frac{((v_2 + 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 2)z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& + \frac{(-\sin(2\sigma_2) - i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) + \sin(2\sigma_1)) \left((v_1 + 2)z_2 - (v_1 + 2)z_1 - \frac{((v_1 + 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 2)z_1)^3}{18} \right)}{8} \\
& + \frac{(i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) - \cos(2\sigma_2) + \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_1 + 2)z_2) - \ln((v_1 + 2)z_1) - \frac{((v_1 + 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 2)z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& + \frac{4(\sigma_2 - 2\sigma_1) \left((v_1 z_2) - (v_1 z_1) - \frac{(v_1 z_2)^3}{18} + \frac{(v_1 z_1)^3}{18} \right) - 4i(\sigma_2 - 2\sigma_1) \left(\ln(v_1 z_2) - \ln(v_1 z_1) - \frac{(v_1 z_2)^2}{4} + \frac{(v_1 z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& + \frac{(-\sin(2\sigma_2) + i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1) + \sin(2\sigma_1)) \left((v_1 + 2)z_2 - (v_1 + 2)z_1 - \frac{((v_1 + 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 2)z_1)^3}{18} \right)}{8} \\
& + \left. \frac{(i(\sin(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1) + \cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_1 + 2)z_2) - \ln((v_1 + 2)z_1) - \frac{((v_1 + 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 2)z_1)^2}{4} \right)}{8} \right] \\
& + \frac{a^2 \beta^2 \epsilon}{4b^3} \left[\frac{(\sin(2\sigma_2) + i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) - \sin(2\sigma_1)) \left((v_2 + 4)z_2 - (v_2 + 4)z_1 - \frac{((v_2 + 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 4)z_1)^3}{18} \right)}{8} \right. \\
& + \left. \frac{(-i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) + \cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_2 + 4)z_2) - \ln((v_2 + 4)z_1) - \frac{((v_2 + 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 4)z_1)^2}{4} \right)}{8} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(\sin(2\sigma_2) - i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) - \sin(2\sigma_1)) \left((v_2 - 4)z_2 - (v_2 - 4)z_1 - \frac{((v_2 - 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 4)z_1)^3}{18} \right)}{8} \\
& + \frac{(-i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) - \cos(2\sigma_2) + \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_2 - 4)z_2) - \ln((v_2 - 4)z_1) - \frac{((v_2 - 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 4)z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& + \frac{(-\sin(2\sigma_2) - i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) + \sin(2\sigma_1)) \left((v_1 + 4)z_2 - (v_1 + 4)z_1 - \frac{((v_1 + 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 4)z_1)^3}{18} \right)}{8} \\
& + \frac{(i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) - \cos(2\sigma_2) + \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_1 + 4)z_2) - \ln((v_1 + 4)z_1) - \frac{((v_1 + 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 4)z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& + \frac{(\sin(2\sigma_2) - i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) - \sin(2\sigma_1)) \left((v_1 - 4)z_2 - (v_1 - 4)z_1 - \frac{((v_1 - 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 4)z_1)^3}{18} \right)}{8} \\
& + \frac{(i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) - \cos(2\sigma_2) + \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_1 - 4)z_2) - \ln((v_1 - 4)z_1) - \frac{((v_1 - 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 4)z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& - \frac{(x_2 - x_1) \left((v_2 + 2)z_2 - (v_2 + 2)z_1 - \frac{((v_2 + 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 2)z_1)^3}{18} \right)}{4} \\
& - \frac{(x_2 - x_1) \left((v_2 - 2)z_2 - (v_2 - 2)z_1 - \frac{((v_2 - 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 2)z_1)^3}{18} \right)}{4} \\
& + \frac{i(x_2 - x_1) \left(\ln((v_2 + 2)z_2) - \ln((v_2 + 2)z_1) - \frac{((v_2 + 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 2)z_1)^2}{4} \right)}{4} \\
& + \frac{i(x_2 - x_1) \left(\ln((v_2 - 2)z_2) - \ln((v_2 - 2)z_1) - \frac{((v_2 - 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 2)z_1)^2}{4} \right)}{4} \\
& + \frac{(x_2 - x_1) \left((v_1 + 2)z_2 - (v_1 + 2)z_1 - \frac{((v_1 + 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 2)z_1)^3}{18} \right)}{4} \\
& + \frac{(x_2 - x_1) \left((v_1 - 2)z_2 - (v_1 - 2)z_1 - \frac{((v_1 - 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 2)z_1)^3}{18} \right)}{4} \\
& - \frac{i(x_2 - x_1) \left(\ln((v_1 + 2)z_2) - \ln((v_1 + 2)z_1) - \frac{((v_1 + 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 2)z_1)^2}{4} \right)}{4} \\
& - \frac{i(x_2 - x_1) \left(\ln((v_1 - 2)z_2) - \ln((v_1 - 2)z_1) - \frac{((v_1 - 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 2)z_1)^2}{4} \right)}{4} \Bigg]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{a^4 \beta^4 \epsilon^2}{32b^6} \left[\frac{(\sin(4\sigma_2) + i(\cos(4\sigma_2) - \cos(4\sigma_1)) - \sin(4\sigma_1)) \left((v_2 + 4)z_2 - (v_2 + 4)z_1 - \frac{((v_2 + 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 4)z_1)^3}{18} \right)}{32} \right. \\
& + \frac{(-i(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1)) + \cos(4\sigma_2) - \cos(4\sigma_1)) \left(\ln((v_2 + 4)z_2) - \ln((v_2 + 4)z_1) - \frac{((v_2 + 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 4)z_1)^2}{4} \right)}{32} \\
& + \frac{(\sin(4\sigma_2) - i(\cos(4\sigma_2) - \cos(4\sigma_1)) - \sin(4\sigma_1)) \left((v_2 - 4)z_2 - (v_2 - 4)z_1 - \frac{((v_2 - 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 4)z_1)^3}{18} \right)}{32} \\
& + \frac{(-i(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1)) - \cos(4\sigma_2) + \cos(4\sigma_1)) \left(\ln((v_2 - 4)z_2) - \ln((v_2 - 4)z_1) - \frac{((v_2 - 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 4)z_1)^2}{4} \right)}{32} \\
& + \frac{(-\sin(4\sigma_2) - i(\cos(4\sigma_2) - \cos(4\sigma_1)) + \sin(4\sigma_1)) \left((v_1 + 4)z_2 - (v_1 + 4)z_1 - \frac{((v_1 + 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 4)z_1)^3}{18} \right)}{32} \\
& + \frac{(i(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1)) - \cos(4\sigma_2) + \cos(4\sigma_1)) \left(\ln((v_1 + 4)z_2) - \ln((v_1 + 4)z_1) - \frac{((v_1 + 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 4)z_1)^2}{4} \right)}{32} \\
& + \frac{(-\sin(4\sigma_2) - i(\cos(4\sigma_2) - \cos(4\sigma_1)) - \sin(4\sigma_1)) \left((v_1 - 4)z_2 - (v_1 - 4)z_1 - \frac{((v_1 - 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 4)z_1)^3}{18} \right)}{32} \\
& + \frac{(i(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1)) + \cos(4\sigma_2) - \cos(4\sigma_1)) \left(\ln((v_1 - 4)z_2) - \ln((v_1 - 4)z_1) - \frac{((v_1 - 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 4)z_1)^2}{4} \right)}{32} \\
& - \frac{(2 \sin(2\sigma_2) + i \cos(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) \left((v_2 + 2)z_2 - (v_2 + 2)z_1 - \frac{((v_2 + 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 2)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& - \frac{(-2i \sin(2\sigma_2) + i \sin(2\sigma_1) + \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_2 + 2)z_2) - \ln((v_2 + 2)z_1) - \frac{((v_2 + 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 2)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& - \frac{(2 \sin(2\sigma_2) - i \cos(2\sigma_1) - \sin(2\sigma_1)) \left((v_2 - 2)z_2 - (v_2 - 2)z_1 - \frac{((v_2 - 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 2)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& - \frac{(-2i \sin(2\sigma_2) + i \sin(2\sigma_1) - \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_2 - 2)z_2) - \ln((v_2 - 2)z_1) - \frac{((v_2 - 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 2)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& - \frac{(-2 \sin(2\sigma_2) - i \cos(2\sigma_1) + \sin(2\sigma_1)) \left((v_1 + 2)z_2 - (v_1 + 2)z_1 - \frac{((v_1 + 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 2)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& - \frac{(i(2 \sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) - \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_1 + 2)z_2) - \ln((v_1 + 2)z_1) - \frac{((v_1 + 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 2)z_1)^2}{4} \right)}{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(-2 \sin(2\sigma_2) + i \cos(2\sigma_1) + \sin(2\sigma_1)) \left((v_1 - 2)z_2 - (v_1 - 2)z_1 - \frac{((v_1 - 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 2)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& \frac{(i(2 \sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) + \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_1 - 2)z_2) - \ln((v_1 - 2)z_1) - \frac{((v_1 - 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 2)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& \frac{(-2 \sin(2\sigma_1) - i \cos(2\sigma_2)) \left((v_2 + 2)z_2 - (v_2 + 2)z_1 - \frac{((v_2 + 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 2)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& \frac{(i \sin(2\sigma_1) - \cos(2\sigma_2)) \left(\ln((v_2 + 2)z_2) - \ln((v_2 + 2)z_1) - \frac{((v_2 + 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 2)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& \frac{(-\sin(2\sigma_1) + i \cos(2\sigma_2)) \left((v_2 - 2)z_2 - (v_2 - 2)z_1 - \frac{((v_2 - 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 2)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& \frac{(i \sin(2\sigma_1) + \cos(2\sigma_2)) \left(\ln((v_2 - 2)z_2) - \ln((v_2 - 2)z_1) - \frac{((v_2 - 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 2)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& \frac{(\sin(2\sigma_1) + i \cos(2\sigma_2)) \left((v_1 + 2)z_2 - (v_1 + 2)z_1 - \frac{((v_1 + 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 2)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& \frac{(-i \sin(2\sigma_1) + \cos(2\sigma_2)) \left(\ln((v_1 + 2)z_2) - \ln((v_1 + 2)z_1) - \frac{((v_1 + 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 2)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& \frac{(\sin(2\sigma_1) - i \cos(2\sigma_2)) \left((v_1 - 2)z_2 - (v_1 - 2)z_1 - \frac{((v_1 - 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 2)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& \frac{(-i \sin(2\sigma_1) - \cos(2\sigma_2)) \left(\ln((v_1 - 2)z_2) - \ln((v_1 - 2)z_1) - \frac{((v_1 - 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 2)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& + \frac{(2x_1 - 2x_2) \left((v_2 + 4)z_2 - (v_2 + 4)z_1 - \frac{((v_2 + 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 4)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& \frac{(2x_1 - 2x_2) \left((v_2 - 4)z_2 - (v_2 - 4)z_1 - \frac{((v_2 - 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 4)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& + \frac{(2ix_2 - 2ix_1) \left(\ln((v_2 + 4)z_2) - \ln((v_2 + 4)z_1) - \frac{((v_2 + 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 4)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& \frac{(2ix_2 - 2ix_1) \left(\ln((v_2 - 4)z_2) - \ln((v_2 - 4)z_1) - \frac{((v_2 - 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 4)z_1)^2}{4} \right)}{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(2x_2 - 2x_1) \left((v_1 + 4)z_2 - (v_1 + 4)z_1 - \frac{((v_1 + 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 4)z_1)^3}{18} \right)}{4} \\
& + \frac{(2x_2 - 2x_1) \left((v_1 - 4)z_2 - (v_1 - 4)z_1 - \frac{((v_1 - 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 4)z_1)^3}{18} \right)}{4} \\
& + \frac{(2ix_2 - 2ix_1) \left(\ln((v_1 + 4)z_2) - \ln((v_1 + 4)z_1) - \frac{((v_1 + 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 4)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& + \frac{(2ix_2 - 2ix_1) \left(\ln((v_1 - 4)z_2) - \ln((v_1 - 4)z_1) - \frac{((v_1 - 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 4)z_1)^2}{4} \right)}{16} \Bigg] \\
& + \frac{3a^4\beta^4\epsilon^2}{32b^6} \left[\frac{(\sin(4\sigma_2) + i(\cos(4\sigma_2) - \cos(4\sigma_1)) - \sin(4\sigma_1)) \left((v_2 + 4)z_2 - (v_2 + 4)z_1 - \frac{((v_2 + 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 4)z_1)^3}{18} \right)}{32} \right. \\
& + \frac{(-i(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1)) + \cos(4\sigma_2) - \cos(4\sigma_1)) \left(\ln((v_2 + 4)z_2) - \ln((v_2 + 4)z_1) - \frac{((v_2 + 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 4)z_1)^2}{4} \right)}{32} \\
& + \frac{(\sin(4\sigma_2) - i(\cos(4\sigma_2) - \cos(4\sigma_1)) - \sin(4\sigma_1)) \left((v_2 - 4)z_2 - (v_2 - 4)z_1 - \frac{((v_2 - 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 4)z_1)^3}{18} \right)}{32} \\
& + \frac{(-i(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1)) - \cos(4\sigma_2) + \cos(4\sigma_1)) \left(\ln((v_2 - 4)z_2) - \ln((v_2 - 4)z_1) - \frac{((v_2 - 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 4)z_1)^2}{4} \right)}{32} \\
& + \frac{(-\sin(4\sigma_2) - i(\cos(4\sigma_2) - \cos(4\sigma_1)) + \sin(4\sigma_1)) \left((v_1 + 4)z_2 - (v_1 + 4)z_1 - \frac{((v_1 + 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 4)z_1)^3}{18} \right)}{32} \\
& + \frac{(i(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1)) - \cos(4\sigma_2) + \cos(4\sigma_1)) \left(\ln((v_1 + 4)z_2) - \ln((v_1 + 4)z_1) - \frac{((v_1 + 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 4)z_1)^2}{4} \right)}{32} \\
& + \frac{(-\sin(4\sigma_2) + i(\cos(4\sigma_2) + \cos(4\sigma_1)) - \sin(4\sigma_1)) \left((v_1 - 4)z_2 - (v_1 - 4)z_1 - \frac{((v_1 - 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 4)z_1)^3}{18} \right)}{32} \\
& + \frac{(i(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1)) + \cos(4\sigma_2) - \cos(4\sigma_1)) \left(\ln((v_1 - 4)z_2) - \ln((v_1 - 4)z_1) - \frac{((v_1 - 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 4)z_1)^2}{4} \right)}{32} \\
& - \frac{(-\sin(2\sigma_2) + i \cos(2\sigma_2) + 2 \sin(2\sigma_1)) \left((v_2 + 2)z_2 - (v_2 + 2)z_1 - \frac{((v_2 + 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 2)z_1)^3}{18} \right)}{16}
\end{aligned}$$

$$\frac{(i \sin(2\sigma_2) - 2i \sin(2\sigma_1) + \cos(2\sigma_2)) \left(\ln((v_2 + 2)z_2) - \ln((v_2 + 2)z_1) - \frac{((v_2 + 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 2)z_1)^2}{4} \right)}{16}$$

$$\frac{(-\sin(2\sigma_2) - i \cos(2\sigma_2) + 2 \sin(2\sigma_1)) \left((v_2 - 2)z_2 - (v_2 - 2)z_1 - \frac{((v_2 - 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 2)z_1)^3}{18} \right)}{16}$$

$$\frac{(i \sin(2\sigma_2) - 2i \sin(2\sigma_1) - \cos(2\sigma_2)) \left(\ln((v_2 - 2)z_2) - \ln((v_2 - 2)z_1) - \frac{((v_2 - 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 2)z_1)^2}{4} \right)}{16}$$

$$\frac{(\sin(2\sigma_2) - i \cos(2\sigma_2) - 2 \sin(2\sigma_1)) \left((v_1 + 2)z_2 - (v_1 + 2)z_1 - \frac{((v_1 + 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 2)z_1)^3}{18} \right)}{16}$$

$$\frac{(i(2 \sin(2\sigma_1) - \sin(2\sigma_2)) - \cos(2\sigma_2)) \left(\ln((v_1 + 2)z_2) - \ln((v_1 + 2)z_1) - \frac{((v_1 + 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 2)z_1)^2}{4} \right)}{16}$$

$$\frac{(\sin(2\sigma_2) + i \cos(2\sigma_2) - 2 \sin(2\sigma_1)) \left((v_1 - 2)z_2 - (v_1 - 2)z_1 - \frac{((v_1 - 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 2)z_1)^3}{18} \right)}{16}$$

$$\frac{(i(-\sin(2\sigma_2) + 2 \sin(2\sigma_1)) + \cos(2\sigma_2)) \left(\ln((v_1 - 2)z_2) - \ln((v_1 - 2)z_1) - \frac{((v_1 - 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 2)z_1)^2}{4} \right)}{16}$$

$$\frac{(-2 \sin(2\sigma_1) - i \cos(2\sigma_1)) \left((v_2 + 2)z_2 - (v_2 + 2)z_1 - \frac{((v_2 + 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 2)z_1)^3}{18} \right)}{16}$$

$$\frac{(i \sin(2\sigma_1) - \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_2 + 2)z_2) - \ln((v_2 + 2)z_1) - \frac{((v_2 + 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 2)z_1)^2}{4} \right)}{16}$$

$$\frac{(-\sin(2\sigma_1) + i \cos(2\sigma_1)) \left((v_2 - 2)z_2 - (v_2 - 2)z_1 - \frac{((v_2 - 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 2)z_1)^3}{18} \right)}{16}$$

$$\frac{(i \sin(2\sigma_1) + \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_2 - 2)z_2) - \ln((v_2 - 2)z_1) - \frac{((v_2 - 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 2)z_1)^2}{4} \right)}{16}$$

$$\frac{(\sin(2\sigma_1) + i \cos(2\sigma_1)) \left((v_1 + 2)z_2 - (v_1 + 2)z_1 - \frac{((v_1 + 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 2)z_1)^3}{18} \right)}{16}$$

$$\frac{(-i \sin(2\sigma_1) + \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_1 + 2)z_2) - \ln((v_1 + 2)z_1) - \frac{((v_1 + 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 2)z_1)^2}{4} \right)}{16}$$

$$\frac{(\sin(2\sigma_1) - i \cos(2\sigma_1)) \left((v_1 - 2)z_2 - (v_1 - 2)z_1 - \frac{((v_1 - 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 2)z_1)^3}{18} \right)}{16}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(-i \sin(2\sigma_1) - \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_1 - 2)z_2) - \ln((v_1 - 2)z_1) - \frac{((v_1 - 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 2)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& - \frac{(2x_2 - 2x_1) \left((v_2 + 4)z_2 - (v_2 + 4)z_1 - \frac{((v_2 + 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 4)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& - \frac{(2x_2 - 2x_1) + \left((v_2 - 4)z_2 - (v_2 - 4)z_1 - \frac{((v_2 - 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 4)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& + \frac{(2ix_2 - 2ix_1) \left(\ln((v_2 + 4)z_2) - \ln((v_2 + 4)z_1) - \frac{((v_2 + 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 4)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& + \frac{(2ix_2 - 2ix_1) \left(\ln((v_2 - 4)z_2) - \ln((v_2 - 4)z_1) - \frac{((v_2 - 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 4)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& + \frac{(2x_2 - 2x_1) \left((v_1 + 4)z_2 - (v_1 + 4)z_1 - \frac{((v_1 + 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 4)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& + \frac{(2x_2 - 2x_1) \left((v_1 - 4)z_2 - (v_1 - 4)z_1 - \frac{((v_1 - 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 4)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& - \frac{(2ix_2 - 2ix_1) \left(\ln((v_1 + 4)z_2) - \ln((v_1 + 4)z_1) - \frac{((v_1 + 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 4)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& - \frac{(2ix_2 - 2ix_1) \left(\ln((v_1 - 4)z_2) - \ln((v_1 - 4)z_1) - \frac{((v_1 - 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 4)z_1)^2}{4} \right)}{16} \Bigg] \\
& + \frac{a^4 \beta^4 \epsilon^2}{96b^6} \left[\frac{(-\sin(2\sigma_2) - i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) + \sin(2\sigma_1)) \left((v_2 + 6)z_2 - (v_2 + 6)z_1 - \frac{((v_2 + 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 6)z_1)^3}{18} \right)}{8} \right. \\
& + \frac{(i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) - \cos(2\sigma_2) + \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_2 + 6)z_2) - \ln((v_2 + 6)z_1) - \frac{((v_2 + 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 6)z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& + \frac{(-\sin(2\sigma_2) + i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) + \sin(2\sigma_1)) \left((v_2 - 6)z_2 - (v_2 - 6)z_1 - \frac{((v_2 - 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 6)z_1)^3}{18} \right)}{8} \\
& \left. + \frac{(i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) + \cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_2 - 6)z_2) - \ln((v_2 - 6)z_1) - \frac{((v_2 - 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 6)z_1)^2}{4} \right)}{8} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(-\sin(2\sigma_2) + i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1) + \sin(2\sigma_1))) \left((v_1 + 6)z_2 - (v_1 + 6)z_1 - \frac{((v_1 + 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 6)z_1)^3}{18} \right)}{8} \\
& + \frac{(-i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) - \cos(2\sigma_2) + \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_1 + 6)z_2) - \ln((v_1 + 6)z_1) - \frac{((v_1 + 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 6)z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& + \frac{(-\sin(2\sigma_2) - i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1) + \sin(2\sigma_1))) \left((v_1 - 6)z_2 - (v_1 - 6)z_1 - \frac{((v_1 - 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 6)z_1)^3}{18} \right)}{8} \\
& + \frac{(-i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) - \cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_1 - 6)z_2) - \ln((v_1 - 6)z_1) - \frac{((v_1 - 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 6)z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& + \frac{(x_2 - x_1) \left((v_2 + 4)z_2 - (v_2 + 4)z_1 - \frac{((v_2 + 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 4)z_1)^3}{18} \right)}{8} \\
& + \frac{(x_2 - x_1) \left((v_2 - 4)z_2 - (v_2 - 4)z_1 - \frac{((v_2 - 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 4)z_1)^3}{18} \right)}{8} \\
& - \frac{i(x_2 - x_1) \left(\ln((v_2 + 4)z_2) - \ln((v_2 + 4)z_1) - \frac{((v_2 + 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 4)z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& - \frac{i(x_2 - x_1) \left(\ln((v_2 - 4)z_2) - \ln((v_2 - 4)z_1) - \frac{((v_2 - 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 4)z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& + \frac{(x_2 - x_1) \left((v_1 + 4)z_2 - (v_1 + 4)z_1 - \frac{((v_1 + 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 4)z_1)^3}{18} \right)}{8} \\
& + \frac{(x_2 - x_1) \left((v_1 - 4)z_2 - (v_1 - 4)z_1 - \frac{((v_1 - 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 4)z_1)^3}{18} \right)}{8} \\
& + \frac{i(x_2 - x_1) \left(\ln((v_1 + 4)z_2) - \ln((v_1 + 4)z_1) - \frac{((v_1 + 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 4)z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& - \frac{i(x_2 - x_1) \left(\ln((v_1 - 4)z_2) - \ln((v_1 - 4)z_1) - \frac{((v_1 - 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 4)z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& - \frac{\alpha^4 \beta^4 \epsilon^2}{64b^6} \left[\frac{(\sin(2\sigma_2) + i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) - \sin(2\sigma_1)) \left((v_2 + 6)z_2 - (v_2 + 6)z_1 - \frac{((v_2 + 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 6)z_1)^3}{18} \right)}{8} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(-i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) + \cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_2 + 6)z_2) - \ln((v_2 + 6)z_1) - \frac{((v_2 + 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 6)z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& + \frac{-4(\sigma_2 - \sigma_1) \left((v_2 z_2) - (v_2 z_1) - \frac{(v_2 z_2)^3}{18} + \frac{(v_2 z_1)^3}{18} \right) + 4i(\sigma_2 - \sigma_1) \left(\ln(v_2 z_2) - \ln(v_2 z_1) - \frac{(v_2 z_2)^2}{4} + \frac{(v_2 z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& + \frac{(\sin(2\sigma_2) - i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1) - \sin(2\sigma_1))) \left((v_2 - 6)z_2 - (v_2 - 6)z_1 - \frac{((v_2 - 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 6)z_1)^3}{18} \right)}{8} \\
& + \frac{(-i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) - \cos(2\sigma_2) + \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_2 - 6)z_2) - \ln((v_2 - 6)z_1) - \frac{((v_2 - 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 6)z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& + \frac{(\sin(2\sigma_2) - i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) - \sin(2\sigma_1)) \left((v_1 + 6)z_2 - (v_1 + 6)z_1 - \frac{((v_1 + 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 6)z_1)^3}{18} \right)}{8} \\
& + \frac{(i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) + \cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_1 + 6)z_2) - \ln((v_1 + 6)z_1) - \frac{((v_1 + 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 6)z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& + \frac{-4(\sigma_2 - \sigma_1) \left((v_1 z_2) - (v_1 z_1) - \frac{(v_1 z_2)^3}{18} + \frac{(v_1 z_1)^3}{18} \right) - 4i(\sigma_2 - 2\sigma_1) \left(\ln(v_1 z_2) - \ln(v_1 z_1) - \frac{(v_1 z_2)^2}{4} + \frac{(v_1 z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& + \frac{(\sin(2\sigma_2) + i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1) - \sin(2\sigma_1))) \left((v_1 - 6)z_2 - (v_1 - 6)z_1 - \frac{((v_1 - 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 6)z_1)^3}{18} \right)}{8} \\
& + \frac{(i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1) - \cos(2\sigma_2) + \cos(2\sigma_1))) \left(\ln((v_1 - 6)z_2) - \ln((v_1 - 6)z_1) - \frac{((v_1 - 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 6)z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& + \frac{a^6 \beta^6 \epsilon^3}{256b^9} \left[\frac{(\sin(2\sigma_2) + i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) - \sin(2\sigma_1)) \left((v_2 + 6)z_2 - (v_2 + 6)z_1 - \frac{((v_2 + 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 6)z_1)^3}{18} \right)}{32} \right. \\
& + \frac{(-i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) + \cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_2 + 6)z_2) - \ln((v_2 + 6)z_1) - \frac{((v_2 + 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 6)z_1)^2}{4} \right)}{32} \\
& + \frac{(\sin(2\sigma_2) - i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) - \sin(2\sigma_1)) \left((v_2 - 6)z_2 - (v_2 - 6)z_1 - \frac{((v_2 - 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 6)z_1)^3}{18} \right)}{32} \\
& \left. + \frac{(-i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) - \cos(2\sigma_2) + \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_2 - 6)z_2) - \ln((v_2 - 6)z_1) - \frac{((v_2 - 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 6)z_1)^2}{4} \right)}{32} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(-\sin(2\sigma_2) - i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1) + \sin(2\sigma_1))) \left((v_1 + 6)z_2 - (v_1 + 6)z_1 - \frac{((v_1 + 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 6)z_1)^3}{18} \right)}{32} \\
& + \frac{(i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) - \cos(2\sigma_2) + \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_1 + 6)z_2) - \ln((v_1 + 6)z_1) - \frac{((v_1 + 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 6)z_1)^2}{4} \right)}{32} \\
& + \frac{(-\sin(2\sigma_2) + i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1) + \sin(2\sigma_1))) \left((v_1 - 6)z_2 - (v_1 - 6)z_1 - \frac{((v_1 - 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 6)z_1)^3}{18} \right)}{32} \\
& + \frac{(i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) + \cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_1 - 6)z_2) - \ln((v_1 - 6)z_1) - \frac{((v_1 - 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 6)z_1)^2}{4} \right)}{32} \\
& - \frac{2(x_2 - x_1) \left((v_2 + 6)z_2 - (v_2 + 6)z_1 - \frac{((v_2 + 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 6)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& + \frac{2i(x_2 - x_1) \left(\ln((v_2 + 6)z_2) - \ln((v_2 + 6)z_1) - \frac{((v_2 + 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 6)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& - \frac{2(x_2 - x_1) \left(\ln((v_2 - 6)z_2) - \ln((v_2 - 6)z_1) - \frac{((v_2 - 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 6)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& + \frac{2(x_2 - x_1) \left(\ln((v_1 + 6)z_2) - \ln((v_1 + 6)z_1) - \frac{((v_1 + 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 6)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& + \frac{2(x_2 - x_1) \left(\ln((v_1 - 6)z_2) - \ln((v_1 - 6)z_1) - \frac{((v_1 - 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 6)z_1)^2}{4} \right)}{4} \\
& - \frac{2(x_2 - x_1) \left((v_2 - 6)z_2 - (v_2 - 6)z_1 - \frac{((v_2 - 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 6)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& + \frac{2i(x_2 - x_1) \left((v_1 + 6)z_2 - (v_1 + 6)z_1 - \frac{((v_1 + 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 6)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& + \frac{2i(x_2 - x_1) \left((v_1 - 6)z_2 - (v_1 - 6)z_1 - \frac{((v_1 - 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 6)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& - \frac{4(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) \left((v_2z_2) - (v_2z_1) - \frac{(v_2z_2)^3}{18} + \frac{(v_2z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& + \frac{4i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) \left(\ln(v_2z_2) - \ln(v_2z_1) - \frac{(v_2z_2)^2}{4} + \frac{(v_2z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& + \frac{4(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) \left((v_1z_2) - (v_1z_1) - \frac{(v_1z_2)^3}{18} + \frac{(v_1z_1)^3}{18} \right)}{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{4i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) \left(\ln(v_1 z_2) - \ln(v_1 z_1) - \frac{(v_1 z_2)^2}{4} + \frac{(v_1 z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& + \frac{a^8 \beta^8 \epsilon^4}{4096 b^{12}} \left[\frac{(\sin(6\sigma_2) + i(\cos(6\sigma_2) + 3\cos(2\sigma_2)) + 9\sin(2\sigma_2)) \left((v_2 + 6)z_2 - (v_2 + 6)z_1 - \frac{((v_2 + 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 6)z_1)^3}{18} \right)}{96} \right. \\
& - \frac{(-i(\sin(6\sigma_2) + 9\sin(2\sigma_2)) + \cos(6\sigma_2) + 3\cos(2\sigma_2)) \left(\ln((v_2 + 6)z_2) - \ln((v_2 + 6)z_1) - \frac{((v_2 + 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 6)z_1)^2}{4} \right)}{96} \\
& - \frac{(\sin(6\sigma_2) - i(\cos(6\sigma_2) + 3\cos(2\sigma_2) + 9\sin(2\sigma_2))) \left((v_2 - 6)z_2 - (v_2 - 6)z_1 - \frac{((v_2 - 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 6)z_1)^3}{18} \right)}{96} \\
& - \frac{(-i(\sin(6\sigma_2) + 9\sin(2\sigma_2)) - \cos(6\sigma_2) - 3\cos(2\sigma_2)) \left(\ln((v_2 - 6)z_2) - \ln((v_2 - 6)z_1) - \frac{((v_2 - 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 6)z_1)^2}{4} \right)}{96} \\
& - \frac{(-\sin(6\sigma_2) - i(\cos(6\sigma_2) + 3\cos(2\sigma_2)) - 9\sin(2\sigma_2)) \left((v_1 + 6)z_2 - (v_1 + 6)z_1 - \frac{((v_1 + 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 6)z_1)^3}{18} \right)}{96} \\
& - \frac{(i(\sin(6\sigma_2) + 9\sin(2\sigma_2)) - \cos(6\sigma_2) - 3\cos(2\sigma_2)) \left(\ln((v_1 + 6)z_2) - \ln((v_1 + 6)z_1) - \frac{((v_1 + 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 6)z_1)^2}{4} \right)}{96} \\
& - \frac{(-\sin(6\sigma_2) + i(\cos(6\sigma_2) + 3\cos(2\sigma_2) - 9\sin(2\sigma_2))) \left((v_1 - 6)z_2 - (v_1 - 6)z_1 - \frac{((v_1 - 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 6)z_1)^3}{18} \right)}{96} \\
& - \frac{(i(\sin(6\sigma_2) + 9\sin(2\sigma_2) + \cos(6\sigma_2) + 3\cos(2\sigma_2))) \left(\ln((v_1 - 6)z_2) - \ln((v_1 - 6)z_1) - \frac{((v_1 - 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 6)z_1)^2}{4} \right)}{96} \\
& + \frac{(\sin(6\sigma_1) + i(\cos(6\sigma_1) + 3\cos(2\sigma_1)) + 9\sin(2\sigma_1)) \left((v_2 + 6)z_2 - (v_2 + 6)z_1 - \frac{((v_2 + 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 6)z_1)^3}{18} \right)}{96} \\
& + \frac{(-i(\sin(6\sigma_1) + 9\sin(2\sigma_1)) + \cos(6\sigma_1) + 3\cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_2 + 6)z_2) - \ln((v_2 + 6)z_1) - \frac{((v_2 + 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 6)z_1)^2}{4} \right)}{96} \\
& + \frac{(\sin(6\sigma_1) - i(\cos(6\sigma_1) + 3\cos(2\sigma_1) + 9\sin(2\sigma_1))) \left((v_2 - 6)z_2 - (v_2 - 6)z_1 - \frac{((v_2 - 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 6)z_1)^3}{18} \right)}{96} \\
& + \frac{(-i(\sin(6\sigma_1) + 9\sin(2\sigma_1)) - \cos(6\sigma_1) - 3\cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_2 - 6)z_2) - \ln((v_2 - 6)z_1) - \frac{((v_2 - 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 6)z_1)^2}{4} \right)}{96}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(-\sin(6\sigma_1) - i(\cos(6\sigma_1) + 3\cos(2\sigma_1)) - 9\sin(2\sigma_1)) \left((v_1 + 6)z_2 - (v_1 + 6)z_1 - \frac{((v_1 + 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 6)z_1)^3}{18} \right)}{96} \\
& + \frac{(i(\sin(6\sigma_1) + 9\sin(2\sigma_1)) - \cos(6\sigma_1) - 3\cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_1 + 6)z_2) - \ln((v_1 + 6)z_1) - \frac{((v_1 + 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 6)z_1)^2}{4} \right)}{96} \\
& + \frac{(-\sin(6\sigma_1) + i(\cos(6\sigma_1) + 3\cos(2\sigma_1)) - 9\sin(2\sigma_1)) \left((v_1 - 6)z_2 - (v_1 - 6)z_1 - \frac{((v_1 - 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 6)z_1)^3}{18} \right)}{96} \\
& + \frac{(i(\sin(6\sigma_1) + 9\sin(2\sigma_1)) + \cos(6\sigma_1) + 3\cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_1 - 6)z_2) - \ln((v_1 - 6)z_1) - \frac{((v_1 - 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 6)z_1)^2}{4} \right)}{96} \\
& + \frac{3(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1) + 4\sigma_2 - 4\sigma_1) \left((v_2z_2) - (v_2z_1) - \frac{(v_2z_2)^3}{18} + \frac{(v_2z_1)^3}{18} \right)}{48} \\
& - \frac{3i(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1) + 4\sigma_2 - 4\sigma_1) \left(\ln(v_2z_2) - \ln(v_2z_1) - \frac{(v_2z_2)^2}{4} + \frac{(v_2z_1)^2}{4} \right)}{48} \\
& + \frac{3(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1) + 4\sigma_2 - 4\sigma_1) \left((v_1z_2) - (v_1z_1) - \frac{(v_1z_2)^3}{18} + \frac{(v_1z_1)^3}{18} \right)}{48} \\
& - \frac{3i(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1) + 4\sigma_2 - 4\sigma_1) \left(\ln(v_1z_2) - \ln(v_1z_1) - \frac{(v_1z_2)^2}{4} + \frac{(v_1z_1)^2}{4} \right)}{48} \Bigg| \\
& - \frac{a^8 \beta^8 \epsilon^4}{6144b^{12}} \left[\frac{(\sin(4\sigma_2) + i(\cos(4\sigma_2) - \cos(4\sigma_1)) - \sin(4\sigma_1)) \left((v_2 + 8)z_2 - (v_2 + 8)z_1 - \frac{((v_2 + 8)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 8)z_1)^3}{18} \right)}{32} \right. \\
& + \frac{(-i(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1)) + \cos(4\sigma_2) - \cos(4\sigma_1)) \left(\ln((v_2 + 8)z_2) - \ln((v_2 + 8)z_1) - \frac{((v_2 + 8)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 8)z_1)^2}{4} \right)}{32} \\
& + \frac{(\sin(4\sigma_2) - i(\cos(4\sigma_2) - \cos(4\sigma_1)) - \sin(4\sigma_1)) \left((v_2 - 8)z_2 - (v_2 - 8)z_1 - \frac{((v_2 - 8)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 8)z_1)^3}{18} \right)}{32} \\
& + \frac{(-i(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1)) - \cos(4\sigma_2) + \cos(4\sigma_1)) \left(\ln((v_2 - 8)z_2) - \ln((v_2 - 8)z_1) - \frac{((v_2 - 8)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 8)z_1)^2}{4} \right)}{32} \\
& + \frac{(-\sin(4\sigma_2) - i(\cos(4\sigma_2) - \cos(4\sigma_1)) + \sin(4\sigma_1)) \left((v_1 + 8)z_2 - (v_1 + 8)z_1 - \frac{((v_1 + 8)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 8)z_1)^3}{18} \right)}{32} \\
& + \frac{(i(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1)) - \cos(4\sigma_2) + \cos(4\sigma_1)) \left(\ln((v_1 + 8)z_2) - \ln((v_1 + 8)z_1) - \frac{((v_1 + 8)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 8)z_1)^2}{4} \right)}{32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(-\sin(4\sigma_2) + i(\cos(4\sigma_2) - \cos(4\sigma_1) + \sin(4\sigma_1))) \left((v_1 - 8)z_2 - (v_1 - 8)z_1 - \frac{((v_1 - 8)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 8)z_1)^3}{18} \right)}{32} \\
& + \frac{(i(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1)) + \cos(4\sigma_2) - \cos(4\sigma_1)) \left(\ln((v_1 - 8)z_2) - \ln((v_1 - 8)z_1) - \frac{((v_1 - 8)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 8)z_1)^2}{4} \right)}{32} \\
& - \frac{(2 \sin(2\sigma_2)) \left((v_2 + 2)z_2 - (v_2 + 2)z_1 - \frac{((v_2 + 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 2)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& + \frac{(2 i \sin(2\sigma_2)) \left(\ln((v_2 + 2)z_2) - \ln((v_2 + 2)z_1) - \frac{((v_2 + 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 2)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& - \frac{(2 \sin(2\sigma_2)) \left((v_2 - 2)z_2 - (v_2 - 2)z_1 - \frac{((v_2 - 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 2)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& + \frac{(2i \sin(2\sigma_2)) \left(\ln((v_2 - 2)z_2) - \ln((v_2 - 2)z_1) - \frac{((v_2 - 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 2)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& + \frac{(2 \sin(2\sigma_2)) \left((v_1 + 2)z_2 - (v_1 + 2)z_1 - \frac{((v_1 + 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 2)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& - \frac{(2i \sin(2\sigma_2)) \left(\ln((v_1 + 2)z_2) - \ln((v_1 + 2)z_1) - \frac{((v_1 + 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 2)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& + \frac{(2 \sin(2\sigma_2)) \left((v_1 - 2)z_2 - (v_1 - 2)z_1 - \frac{((v_1 - 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 2)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& - \frac{(2i \sin(2\sigma_2)) \left(\ln((v_1 - 2)z_2) - \ln((v_1 - 2)z_1) - \frac{((v_1 - 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 2)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& - \frac{(2 \sin(2\sigma_1)) \left((v_2 + 2)z_2 - (v_2 + 2)z_1 - \frac{((v_2 + 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 2)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& + \frac{(2 i \sin(2\sigma_1)) \left(\ln((v_2 + 2)z_2) - \ln((v_2 + 2)z_1) - \frac{((v_2 + 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 2)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& - \frac{(2 \sin(2\sigma_1)) \left((v_2 - 2)z_2 - (v_2 - 2)z_1 - \frac{((v_2 - 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 2)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& + \frac{(2 \sin(2\sigma_1)) \left(\ln((v_2 - 2)z_2) - \ln((v_2 - 2)z_1) - \frac{((v_2 - 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 2)z_1)^2}{4} \right)}{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(2 \sin(2\sigma_1)) \left((v_1 + 2)z_2 - (v_1 + 2)z_1 - \frac{((v_1 + 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 2)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& - \frac{(2i \sin(2\sigma_1)) \left(\ln((v_1 + 2)z_2) - \ln((v_1 + 2)z_1) - \frac{((v_1 + 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 2)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& + \frac{(2 \sin(2\sigma_1)) \left((v_1 - 2)z_2 - (v_1 - 2)z_1 - \frac{((v_1 - 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 2)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& - \frac{(i \sin(2\sigma_1)) \left(\ln((v_1 - 2)z_2) - \ln((v_1 - 2)z_1) - \frac{((v_1 - 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 2)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& + \frac{(2x_2 - 2x_1) \left((v_2 + 8)z_2 - (v_2 + 8)z_1 - \frac{((v_2 + 8)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 8)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& + \frac{(2x_2 - 2x_1) \left((v_2 - 8)z_2 - (v_2 - 8)z_1 - \frac{((v_2 - 8)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 8)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& - \frac{(2ix_2 - 2ix_1) \left(\ln((v_2 + 8)z_2) - \ln((v_2 + 8)z_1) - \frac{((v_2 + 8)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 8)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& - \frac{(2ix_2 - 2ix_1) \left(\ln((v_2 - 8)z_2) - \ln((v_2 - 8)z_1) - \frac{((v_2 - 8)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 8)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& - \frac{(2x_2 - 2x_1) \left((v_1 + 8)z_2 - (v_1 + 8)z_1 - \frac{((v_1 + 8)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 8)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& - \frac{(2x_2 - 2x_1) \left((v_1 - 8)z_2 - (v_1 - 8)z_1 - \frac{((v_1 - 8)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 8)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& + \frac{(2ix_2 - 2ix_1) \left(\ln((v_1 + 8)z_2) - \ln((v_1 + 8)z_1) - \frac{((v_1 + 8)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 8)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& + \frac{(2ix_2 - 2ix_1) \left(\ln((v_1 - 8)z_2) - \ln((v_1 - 8)z_1) - \frac{((v_1 - 8)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 8)z_1)^2}{4} \right)}{16} \Bigg] \\
& + \frac{9a^8 \beta^8 \epsilon^4}{4096b^{12}} \left[- \frac{(\sin(6\sigma_2) + i(\cos(6\sigma_2) - 9\cos(2\sigma_2)) - 3\sin(2\sigma_2)) \left((v_2 + 6)z_2 - (v_2 + 6)z_1 - \frac{((v_2 + 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 6)z_1)^3}{18} \right)}{96} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{-i(\sin(6\sigma_2) - 3\sin(2\sigma_2)) + \cos(6\sigma_2) - 9\cos(2\sigma_2)}{96} \left(\ln((v_2 + 6)z_2) - \ln((v_2 + 6)z_1) - \frac{((v_2 + 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 6)z_1)^2}{4} \right) \\
& - \frac{(\sin(6\sigma_2) - i(\cos(6\sigma_2) - 9\cos(2\sigma_2) - 3\sin(2\sigma_2)))}{96} \left((v_2 - 6)z_2 - (v_2 - 6)z_1 - \frac{((v_2 - 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 6)z_1)^3}{18} \right) \\
& - \frac{(-i(\sin(6\sigma_2) - 3\sin(2\sigma_2)) - \cos(6\sigma_2) + 9\cos(2\sigma_2))}{96} \left(\ln((v_2 - 6)z_2) - \ln((v_2 - 6)z_1) - \frac{((v_2 - 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 6)z_1)^2}{4} \right) \\
& - \frac{(-\sin(6\sigma_2) - i(\cos(6\sigma_2) - 9\cos(2\sigma_2)) + 3\sin(2\sigma_2))}{96} \left((v_1 + 6)z_2 - (v_1 + 6)z_1 - \frac{((v_1 + 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 6)z_1)^3}{18} \right) \\
& - \frac{(i(\sin(6\sigma_2) - 3\sin(2\sigma_2)) - \cos(6\sigma_2) + 9\cos(2\sigma_2))}{96} \left(\ln((v_1 + 6)z_2) - \ln((v_1 + 6)z_1) - \frac{((v_1 + 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 6)z_1)^2}{4} \right) \\
& - \frac{(-\sin(6\sigma_2) + i(\cos(6\sigma_2) - 9\cos(2\sigma_2) + 3\sin(2\sigma_2)))}{96} \left((v_1 - 6)z_2 - (v_1 - 6)z_1 - \frac{((v_1 - 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 6)z_1)^3}{18} \right) \\
& - \frac{(i(\sin(6\sigma_2) - 3\sin(2\sigma_2)) + \cos(6\sigma_2) - 9\cos(2\sigma_2))}{96} \left(\ln((v_1 - 6)z_2) - \ln((v_1 - 6)z_1) - \frac{((v_1 - 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 6)z_1)^2}{4} \right) \\
& + \frac{(\sin(6\sigma_1) + i(\cos(6\sigma_1) - 9\cos(2\sigma_1)) - 3\sin(2\sigma_1))}{96} \left((v_2 + 6)z_2 - (v_2 + 6)z_1 - \frac{((v_2 + 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 6)z_1)^3}{18} \right) \\
& + \frac{(-i(\sin(6\sigma_1) - 3\sin(2\sigma_1)) + \cos(6\sigma_1) - 9\cos(2\sigma_1))}{96} \left(\ln((v_2 + 6)z_2) - \ln((v_2 + 6)z_1) - \frac{((v_2 + 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 6)z_1)^2}{4} \right) \\
& + \frac{(\sin(6\sigma_1) - i(\cos(6\sigma_1) - 9\cos(2\sigma_1) - 3\sin(2\sigma_1)))}{96} \left((v_2 - 6)z_2 - (v_2 - 6)z_1 - \frac{((v_2 - 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 6)z_1)^3}{18} \right) \\
& + \frac{(-i(\sin(6\sigma_1) - 3\sin(2\sigma_1)) - \cos(6\sigma_1) + 9\cos(2\sigma_1))}{96} \left(\ln((v_2 - 6)z_2) - \ln((v_2 - 6)z_1) - \frac{((v_2 - 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 6)z_1)^2}{4} \right) \\
& + \frac{(-\sin(6\sigma_1) - i(\cos(6\sigma_1) - 9\cos(2\sigma_1)) + 3\sin(2\sigma_1))}{96} \left((v_1 + 6)z_2 - (v_1 + 6)z_1 - \frac{((v_1 + 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 6)z_1)^3}{18} \right) \\
& + \frac{(i(\sin(6\sigma_1) - 3\sin(2\sigma_1)) - \cos(6\sigma_1) + 9\cos(2\sigma_1))}{96} \left(\ln((v_1 + 6)z_2) - \ln((v_1 + 6)z_1) - \frac{((v_1 + 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 6)z_1)^2}{4} \right) \\
& + \frac{(-\sin(6\sigma_1) + i(\cos(6\sigma_1) - 9\cos(2\sigma_1) + 3\sin(2\sigma_1)))}{96} \left((v_1 - 6)z_2 - (v_1 - 6)z_1 - \frac{((v_1 - 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 6)z_1)^3}{18} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(i(\sin(6\sigma_1) - 3\sin(2\sigma_1) + \cos(6\sigma_1) - 9\cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_1 - 6)z_2) - \ln((v_1 - 6)z_1) - \frac{((v_1 - 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 6)z_1)^2}{4} \right))}{96} \\
& - \frac{3(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1) - 4\sigma_2 + 4\sigma_1) \left((v_2z_2) - (v_2z_1) - \frac{(v_2z_2)^3}{18} + \frac{(v_2z_1)^3}{18} \right)}{48} \\
& + \frac{3i(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1) - 4\sigma_2 + 4\sigma_1) \left(\ln(v_2z_2) - \ln(v_2z_1) - \frac{(v_2z_2)^2}{4} + \frac{(v_2z_1)^2}{4} \right)}{48} \\
& + \frac{3(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1) - 4\sigma_2 + 4\sigma_1) \left((v_1z_2) - (v_1z_1) - \frac{(v_1z_2)^3}{18} + \frac{(v_1z_1)^3}{18} \right)}{48} \\
& - \frac{3i(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1) - 4\sigma_2 + 4\sigma_1) \left(\ln(v_1z_2) - \ln(v_1z_1) - \frac{(v_1z_2)^2}{4} + \frac{(v_1z_1)^2}{4} \right)}{48} \Bigg] \\
& + \frac{3a^8\beta^8\epsilon^4}{6144b^{12}} \left[\frac{(\sin(4\sigma_2) + i(\cos(4\sigma_2) - \cos(4\sigma_1)) - \sin(4\sigma_1)) \left((v_2 + 8)z_2 - (v_2 + 8)z_1 - \frac{((v_2 + 8)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 8)z_1)^3}{18} \right)}{32} \right. \\
& + \frac{(-i(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1)) + \cos(4\sigma_2) - \cos(4\sigma_1)) \left(\ln((v_2 + 8)z_2) - \ln((v_2 + 8)z_1) - \frac{((v_2 + 8)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 8)z_1)^2}{4} \right)}{32} \\
& + \frac{(\sin(4\sigma_2) - i(\cos(4\sigma_2) - \cos(4\sigma_1)) - \sin(4\sigma_1)) \left((v_2 - 8)z_2 - (v_2 - 8)z_1 - \frac{((v_2 - 8)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 8)z_1)^3}{18} \right)}{32} \\
& + \frac{(-i(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1)) - \cos(4\sigma_2) + \cos(4\sigma_1)) \left(\ln((v_2 - 8)z_2) - \ln((v_2 - 8)z_1) - \frac{((v_2 - 8)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 8)z_1)^2}{4} \right)}{32} \\
& + \frac{(-\sin(4\sigma_2) - i(\cos(4\sigma_2) - \cos(4\sigma_1)) + \sin(4\sigma_1)) \left((v_1 + 8)z_2 - (v_1 + 8)z_1 - \frac{((v_1 + 8)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 8)z_1)^3}{18} \right)}{32} \\
& + \frac{(i(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1)) - \cos(4\sigma_2) + \cos(4\sigma_1)) \left(\ln((v_1 + 8)z_2) - \ln((v_1 + 8)z_1) - \frac{((v_1 + 8)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 8)z_1)^2}{4} \right)}{32} \\
& + \frac{(-\sin(4\sigma_2) + i(\cos(4\sigma_2) - \cos(4\sigma_1)) + \sin(4\sigma_1)) \left((v_1 - 8)z_2 - (v_1 - 8)z_1 - \frac{((v_1 - 8)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 8)z_1)^3}{18} \right)}{32} \\
& + \frac{(i(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1)) + \cos(4\sigma_2) - \cos(4\sigma_1)) \left(\ln((v_1 - 8)z_2) - \ln((v_1 - 8)z_1) - \frac{((v_1 - 8)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 8)z_1)^2}{4} \right)}{32} \\
& + \frac{(2i \cos(2\sigma_2)) \left((v_2 + 2)z_2 - (v_2 + 2)z_1 - \frac{((v_2 + 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 2)z_1)^3}{18} \right)}{16}
\end{aligned}$$

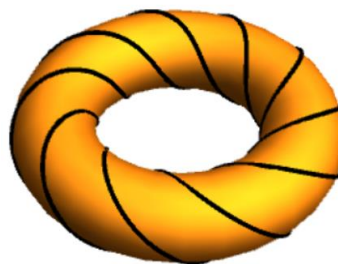
$$\begin{aligned}
& + \frac{(2 \cos(2\sigma_2)) \left(\ln((v_2 + 2)z_2) - \ln((v_2 + 2)z_1) - \frac{((v_2 + 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 2)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& - \frac{(2i \cos(2\sigma_2)) \left((v_2 - 2)z_2 - (v_2 - 2)z_1 - \frac{((v_2 - 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 2)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& - \frac{(2 \cos(2\sigma_2)) \left(\ln((v_2 - 2)z_2) - \ln((v_2 - 2)z_1) - \frac{((v_2 - 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 2)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& - \frac{(2i \cos(2\sigma_2)) \left((v_1 + 2)z_2 - (v_1 + 2)z_1 - \frac{((v_1 + 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 2)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& - \frac{(2 \cos(2\sigma_2)) \left(\ln((v_1 + 2)z_2) - \ln((v_1 + 2)z_1) - \frac{((v_1 + 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 2)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& + \frac{(2i \cos(2\sigma_2)) \left((v_1 - 2)z_2 - (v_1 - 2)z_1 - \frac{((v_1 - 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 2)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& + \frac{(2 \cos(2\sigma_2)) \left(\ln((v_1 - 2)z_2) - \ln((v_1 - 2)z_1) - \frac{((v_1 - 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 2)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& - \frac{(2i \cos(2\sigma_1)) \left((v_2 + 2)z_2 - (v_2 + 2)z_1 - \frac{((v_2 + 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 2)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& - \frac{(2 \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_2 + 2)z_2) - \ln((v_2 + 2)z_1) - \frac{((v_2 + 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 2)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& + \frac{(2i \cos(2\sigma_1)) \left((v_2 - 2)z_2 - (v_2 - 2)z_1 - \frac{((v_2 - 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 2)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& + \frac{(2 \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_2 - 2)z_2) - \ln((v_2 - 2)z_1) - \frac{((v_2 - 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 2)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& + \frac{(2 \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_1 + 2)z_2) - \ln((v_1 + 2)z_1) - \frac{((v_1 + 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 2)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& + \frac{(2i \cos(2\sigma_1)) \left((v_1 + 2)z_2 - (v_1 + 2)z_1 - \frac{((v_1 + 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 2)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& - \frac{(2i \cos(2\sigma_1)) \left((v_1 - 2)z_2 - (v_1 - 2)z_1 - \frac{((v_1 - 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 2)z_1)^3}{18} \right)}{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(2 \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_1 - 2)z_2) - \ln((v_1 - 2)z_1) - \frac{((v_1 - 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 2)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& + \frac{(2x_2 - 2x_1) \left((v_2 + 8)z_2 - (v_2 + 8)z_1 - \frac{((v_2 + 8)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 8)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& + \frac{(2x_2 - 2x_1) \left((v_2 - 8)z_2 - (v_2 - 8)z_1 - \frac{((v_2 - 8)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 8)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& - \frac{(2ix_2 - 2ix_1) \left(\ln((v_2 + 8)z_2) - \ln((v_2 + 8)z_1) - \frac{((v_2 + 8)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 8)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& - \frac{(2ix_2 - 2ix_1) \left(\ln((v_2 - 8)z_2) - \ln((v_2 - 8)z_1) - \frac{((v_2 - 8)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 8)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& - \frac{(2x_2 - 2x_1) \left((v_1 + 8)z_2 - (v_1 + 8)z_1 - \frac{((v_1 + 8)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 8)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& - \frac{(2x_2 - 2x_1) \left((v_1 - 8)z_2 - (v_1 - 8)z_1 - \frac{((v_1 - 8)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 8)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& + \frac{(2ix_2 - 2ix_1) \left(\ln((v_1 + 8)z_2) - \ln((v_1 + 8)z_1) - \frac{((v_1 + 8)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 8)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& + \frac{(2ix_2 - 2ix_1) \left(\ln((v_1 - 8)z_2) - \ln((v_1 - 8)z_1) - \frac{((v_1 - 8)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 8)z_1)^2}{4} \right)}{16} \Bigg] \\
& - \frac{a^8 \beta^8 \epsilon^4}{36864b^{12}} \left[\frac{(\sin(2\sigma_2) + i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) - \sin(2\sigma_1)) \left((v_2 + 10)z_2 - (v_2 + 10)z_1 - \frac{((v_2 + 10)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 10)z_1)^3}{18} \right)}{8} \right. \\
& + \frac{(-i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) + \cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_2 + 10)z_2) - \ln((v_2 + 10)z_1) - \frac{((v_2 + 10)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 10)z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& + \frac{-4(\sigma_2 - \sigma_1) \left((v_2 z_2) - (v_2 z_1) - \frac{(v_2 z_2)^3}{18} + \frac{(v_2 z_1)^3}{18} \right) + 4i(\sigma_2 - \sigma_1) \left(\ln(v_2 z_2) - \ln(v_2 z_1) - \frac{(v_2 z_2)^2}{4} + \frac{(v_2 z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& \left. + \frac{(\sin(2\sigma_2) - i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) - \sin(2\sigma_1)) \left((v_2 - 10)z_2 - (v_2 - 10)z_1 - \frac{((v_2 - 10)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 10)z_1)^3}{18} \right)}{8} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(-i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) - \cos(2\sigma_2) + \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_2 - 10)z_2) - \ln((v_2 - 10)z_1) - \frac{((v_2 - 10)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 10)z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& + \frac{(-\sin(2\sigma_2) - i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1) + \sin(2\sigma_1))) \left((v_1 + 10)z_2 - (v_1 + 10)z_1 - \frac{((v_1 + 10)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 10)z_1)^3}{18} \right)}{8} \\
& + \frac{(i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) - \cos(2\sigma_2) + \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_1 + 10)z_2) - \ln((v_1 + 10)z_1) - \frac{((v_1 + 10)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 10)z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& + \frac{4(\sigma_2 - \sigma_1) \left((v_1 z_2) - (v_1 z_1) - \frac{(v_1 z_2)^3}{18} + \frac{(v_1 z_1)^3}{18} \right) - 4i(\sigma_2 - \sigma_1) \left(\ln(v_1 z_2) - \ln(v_1 z_1) - \frac{(v_1 z_2)^2}{4} + \frac{(v_1 z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& + \frac{(-\sin(2\sigma_2) + i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1) + \sin(2\sigma_1))) \left((v_1 - 10)z_2 - (v_1 - 10)z_1 - \frac{((v_1 - 10)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 10)z_1)^3}{18} \right)}{8} \\
& + \left. \frac{(i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) + \cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_1 - 10)z_2) - \ln((v_1 - 10)z_1) - \frac{((v_1 - 10)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 10)z_1)^2}{4} \right)}{8} \right]
\end{aligned}$$

4.5 Analisis Pembahasan Gerak Partikel dan Probabilitas Fungsi Gelombang pada Simpul Torus dengan Pendekatan Mathieu dan Hill-Whittaker

Hasil dari analisis yang sudah diperoleh penulis, pertama dengan pendekatan Mathieu solusi sinus dan cosinus merupakan solusi dari persamaan gelombang partikel yang bergerak terbatas dari simpul torus dengan pendekatan Mathieu (3.20) memuat informasi menggambarkan keadaan kuantum dari suatu sistem kuantum yang terisolasi terkait partikel tersebut. Fungsi gelombang mengandung berbagai macam informasi diantaranya momentum partikel, posisi, energi, lintasan, panjang gelombang, amplitude probabilitas atau adanya peluang partikel tersebut yang bernilai kompleks, dll (Griffiths, david. 2005). Karena fungsi gelombang adalah berupa sinus cosinus periodik 0 sampai 2π , semisal dalam 2 dimensi didapatkan gerak partikel dengan gambaran adanya bukit dan lembah dari rambatan gelombang tersebut. Tetapi jika pada 3 dimensi khususnya torus maka rambatan gelombang memiliki gerak melingkar mengelilingi torus, bentuk seperti gambar dibawah ini dengan periodik 0 sampai 2π .



Gambar 4.1 Gambaran Gerak Partikel dalam Simpul Torus (Biswas dan Ghosh, 2018)

$G_\nu(z, q)$ merupakan fungsi gelombang dengan bilangan bulat ν yang memberikan spesifikasi tingkat fungsi gelombang, artinya fungsi gelombang memiliki tingkatan-tingkatan tertentu dengan ν bilangan bulat, jika yang dihitung adalah 2 tingkatan $G_1(z, q)$ dan $G_2(z, q)$ maka diperoleh 2 rambatan partikel yang

bergerak pada simpul dengan periodik 0 sampai 2π , dan seterusnya. Begitupun dengan energi E_n partikel tersebut (3.15) dengan n adalah tingkat energi dari partikel yang bergerak pada simpul torus dengan pendekatan Mathieu. Tingkat energi yang terendah E_1 disebut keadaan dasar (status dasar) dari partikel itu dan tingkat energy lebih tinggi E_2, E_3, E_4, \dots disebut keadaan eksitasi.

Fungsi gelombang perlu dinormalisasikan terlebih dahulu, yang mana persamaan normalisasi fungsi gelombang merupakan pernyataan matematis bahwa partikel itu ada disuatu tempat pada permukaan torus yang hanya bernilai tunggal pada keadaan yang kontinu. Persamaan (3.34) menyatakan kerapatan peluang (probabilitas) secara eksperimen memungkinkan adanya partikel yang bergerak terbatas pada permukaan torus dengan pendekatan Mathieu. dinyatakan dalam batas-batas $\nu_1 - \nu_2; z_1 - z_2$ dan $\eta_1 - \eta_2$, ν merupakan bilangan bulat atau bisa dinyatakan sebagai tingkatan diskrit pada fungsi gelombang, z adalah lingkaran vertical pada torus, sedangkan η adalah permukaan torusnya dengan lingkaran horizontal. Saat $|\Psi|^2$ besar menyatakan peluang yang besar untuk mendapatkan partikel tersebut, sedangkan saat $|\Psi|^2$ kecil menyatakan peluang yang kecil untuk mendapatkan partikel tersebut, selama $|\Psi|^2$ tidak nol, terdapat peluang adanya partikel yang bergerak pada simpul torus dengan pendekatan Mathieu didaerah yang telah ditentukan.

Pendekatan kedua yang digunakan oleh penulis yakni pendekatan Hill-Whittaker. Persamaan Hill-Whittaker diberikan oleh Whittaker sendiri pada tahun 1877 dengan mendegeneralisasi dari fungsi Mathieu, yang juga memiliki solusi periodik 0 sampai 2π . dari sini dapat dilihat bahwa dipilihnya pendekatan Hill-Whittaker karena persamaan Hill-Whittaker merupakan degeneralisasi dari fungsi

Mathieu. Pendekatan ini dikatakan batas torus tebal yakni nilai R jari-jari mayor torus harus lebih kecil dari d jari-jari minor torus. Persamaan (4.8) yang merupakan persamaan gelombang partikel yang bergerak pada simpul torus dengan pendekatan Hill-Whittaker, dari sinilah akan didapatkan energi partikel (4.12) dengan n adalah bilangan bulat yang menunjukkan tingkatan energi dalam keadaan kuantum. Seperti yang sudah dijelaskan di atas tingkat energi yang terendah E_1 disebut keadaan dasar (status dasar) dari partikel itu dan tingkat energy lebih tinggi E_2, E_3, \dots disebut keadaan eksitasi. Deretan tingkat energi merupakan suatu karakteristik partikel yang bergerak terbatas pada permukaan torus, partikel dengan gerak terbatas ini yang membuat energi terbatas pula. Terdapatnya tingkat energi merupakan contoh kuantisasi fisis dalam skala mikroskopik.

Dari pendekatan Hill-Whittaker ini karena d jari-jari lingkaran vertikal hampir sama dengan R , artinya partikel memiliki energi yang lebih besar dari pada partikel pada simpul torus dengan pendekatan Mathieu. Dalam kehidupan sehari-hari segala materi, muatan listrik, energi dan sebagainya kelihatan kontinu. Dalam dunia mikroskopik partikel adalah sesuatu yang fundamental (dasar) memiliki massa tertentu, kecepatan tertentu dengan energi masing-masing. Seperti dalam alam semesta ini, alam juga terkuantisasi seperti halnya segala apa itu elektron, proton, neutron berinteraksi membentuk materi yang ada disekeliling kita (dan yang membentuk kita) dengan sifat-sifat yang kita kenal.

Selain itu didupatkannya pula fungsi gelombang disinilah didupatkannya banyak informasi mengenai keadaan kuantum partikel yang geraknya terbatas pada simpul torus dengan pendekatan Hill-Whittaker, seperti halnya momentum partikel, posisi, energy, lintasan, panjang gelombang, kerapatan atau adanya

peluang partikel tersebut, dll. Karena memiliki solusi yang sama yaitu periodik mana bisa digambarkan bahwa dalam 2 dimensi didapatkan gerak partikel dengan gambaran adanya bukit dan lembah dari rambatan gelombang tersebut. Tetapi jika pada 3 dimensi khususnya torus maka rambatan gelombang memiliki bentuk seperti gambar dibawah ini dengan periodik 0 sampai 2π seperti gambar (4.1) diatas

Probabilitas fungsi gelombang partikel yang bergerak disimpul torus dengan pendekatan Hill-Whittaker diperoleh pada persamaan (4.25) yang sebelumnya fungsi gelombang dinormalisasikan terlebih dahulu. Atau dinyatakan adalah reprints dari kuadrat fungsi gelombang yang menunjukkan peluang kerapatan suatu partikel dalam suatu daerah tertentu. Dengan integral terhadap v, σ, η dan z , masing-masing memiliki batas $v_1 - v_2, \sigma_1 - \sigma_2, \eta_1 - \eta_2$ dan $z_1 - z_2$.

4.6 Fungsi Gelombang dan Probabilitas dalam Al-Quran

Fungsi gelombang dalam Al-Quran terdapat pada surah Saba [43] ayat 3 yang berbunyi:

وَقَالَ الَّذِينَ كَفَرُوا لَا تَأْتِينَا السَّاعَةُ قُلْ بَلَىٰ وَرَبِّي لَتَأْتِيَنَّكُمْ عِلْمُ الْغَيْبِ لَا يَعْزُبُ عَنْهُ مِثْقَالُ ذَرَّةٍ فِي السَّمَوَاتِ وَلَا فِي الْأَرْضِ وَلَا أَصْغَرُ مِنْ ذَلِكَ وَلَا أَكْبَرُ إِلَّا فِي كِتَابٍ مُّبِينٍ

“Dan oaring-orang yang kafir berkata: “Hari berbangkit itu tidak akan datang kenapa kepada kami”. Katakanlah: “Pasti dating, demi Rabb-ku yang mengetahui yang ghaib, sesungguhnya kiamat itu pasti akan dating kepadamu. Tidak ada tersembunyi dari pada-Nya seberat zarah pun yang ada dilangit dan yang ada dibumi dan tidak ada (pula) yang lebih kecil dari itu dan yang lebih besar, melainkan tersebut dalam kitab yang nyata (Lauh Mahfuzh)”. ” (QS. Saba [34]:3).

Dalam integrasi di BAB II sudah disinggung yang namanya dzarrah dalam ayat juga termasuk golongan alam semesta yang mikroskopik begitun dzarrah diayat ini

menjelaskan hal yang sama pula yakni partikel. Partikel tidak lepas dengan dunianya dalam fisika dunia partikel dinamakan dunia kuantum. Kelahiran teori kuantum bisa dinamakan kelahiran “caesar” yang dipicu oleh munculnya distribusi radiasi benda hitam yang tidak dapat dijelaskan oleh materinya mekanika Newtonian (Purwanto, 2018). Kita ulang dulu pengertian atau sifat dasar materi dan gelombang. Materi terdapat pada tepi ruang, masih dapat kita amati batasnya dengan sangat jelas. Sedangkan gelombang yang bergerak terbatas tidak bisa kita amati, Gelombang mengalami interferensi dan difraksi.

Max Planck ahli jerman memperkenalkan paket kuantum energi fungsi gelombang, seperti hasil yang sudah diperoleh diatas. Hingga lahirlah gagasan de Broglie, menghasilkan konsep dualisme materi-gelombang, materi dapat bersifat materi sekaligus gelombang, sebaliknya gelombang juga dapat bersifat gelombang dan materi. Paket gelombang merupakan gelombang yang terkonsentrasi di area tertentu dan secara matematis merupakan jumlah dari banyak gelombang individual. Paket gelombang merupakan jumlah dari banyak gelombang dengan aneka bilangan.

Probabilitas dalam Al-Quran terdapat pada surah- surah dibawah ini yang berbunyi:

يَوْمَ نَطْوِي السَّمَاءَ كَطَيِّ السِّجِلِّ لِلْكُتُبِ كَمَا بَدَأْنَا أَوَّلَ خَلْقٍ نُعِيدُهُ وَعَدَّا عَلَيْهَا إِنَّا كُنَّا
فَاعِلِينَ

“(Ingatlah) ada hari Kami gulung langit seperti menggulung lembaran-lembaran kertas. Sebagaimana Kami telah memulai penciptaan pertama, begitulah Kami akan mengulanginya lagi. Itulah janji yang pasti Kami tepati; sesungguhnya Kami akan melaksanakannya.” (QS. Al-Anbiya[21]:104).

Selain ayat diatas yakni :

اللَّهُ يَبْدُؤُا الْخَلْقَ ثُمَّ يُعِيدُهُ ثُمَّ إِلَيْهِ تُرْجَعُونَ

“Allah yang memulai penciptaan (makhluk), kemudian mengembalikan (mengulangi)nya, kemudian kepada-Nya kamu dikembalikan.” (QS Al-Rum [30]:11).

Dan yang terakhir pada surah Yunus ayat 34 :

قُلْ هَلْ مِنْ شُرَكَائِكُمْ مَنْ يَبْدُؤُا الْخَلْقَ ثُمَّ يُعِيدُهُ قُلِ اللَّهُ يَبْدُؤُا الْخَلْقَ ثُمَّ يُعِيدُهُ فَأَنَّى تُؤْفَكُونَ

“Katakanlah, “Adakah di antara sekutumu yang dapat memulai penciptaan (makhluk), kemudian mengulanginya (menghidupkannya) kembali?” Katakanlah, “Allah memulai (penciptaan) makhluk, kemudian mengulanginya. Maka bagaimana kamu dipalingkan (menyembah selain Allah)?” (QS. Yunus [10]:34).

Dalam Al-Quran terdapat delapan ayat dengan kandungan permulaan penciptaan dan pengulangannya. Jika memperhatikan redaksi ayat pertama (QS AFAnbiya 21]: 104), penciptaan yang dimaksud adalah penciptaan langit, ayat kedua (QS A-Rüm [30]:11) merujuk pada penciptaan manusia (turja ün, kamu dikembalikan), sedangkan ayat ketiga (QS Yünus [10]:34) tidak menyebut secara eksplisit penciptaan makhluk tertentu (Purwanto, 2018).

Mari kita fokus pada surah Yunus (10): 34, kira-kira Makhluk apa? Untuk menjawab pertanyaan ini ada baiknya meninjau zarah, atom, atau partikel elemen terkecil dari materi. Informasi pendukung yang telah dimiliki adalah mekanika kuantum sebagai kerangka pikir untuk mendeskripsikan makhluk atau benda mikro. Perumusan formal mekanika kuantum menghasilkan persamaan utama yang dikenal sebagai persamaan Schrodinger. Yang diketahui untuk menemukan energy

dan fungsi gelombang partikel. Mengilustrasikan seperti yang sudah dikerjakan suatu partikel yang bergerak terbatas pada simpul torus dengan koordinat toroidal dan energi potensial kelengkungan torus. Partikel yang hanya dapat bergerak pada permukaan torusnya saja, yang memiliki energi sesuai dengan tingkat energinya, yang mana juga memiliki fungsi gelombang dari sini dapat diperoleh probabilitasnya dengan konjugat dari fungsi gelombang tersebut $|\Psi(x)|^2$. Artinya partikel pasti adanya pada posisi sesuai titik pada batas yang telah ditentukan diprobabilitasnya.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil yang diperoleh dari penelitian, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut :

1. Persamaan gerak partikel yang bergerak terbatas pada simpul torus adalah fungsi gelombang dari partikel tersebut. Karena fungsi gelombang adalah solusi periodik maka dapat digambarkan bahwa gerakan partikelnya memutar torus, dengan energi pada partikel tersebut. Fungsi gelombang partikel yang bergerak terbatas disimpul torus dengan koordinat toroidal dan potensial kelengkungan dengan pendekatan Mathieu diperoleh pada persamaan (3.20) dan untuk pendekatan Hill-Whittaker ditunjukkan pada persamaan (4.16). Fungsi gelombang dan energinya terbukti mempunyai tingkatan-tingkatan pada masing-masing keadaan partikel, ditunjukkan dengan variabel ν yang merupakan bilangan bulat pada fungsi gelombang dan energinya.
2. Probabilitas partikel yang bergerak terbatas pada simpul torus dengan koordinat toroidal dan potensial kelengkungan dengan pendekatan Mathieu diperoleh pada persamaan (3.34) dan untuk pendekatan Hill-Whittaker ditunjukkan pada persamaan (4.25). Probabilitas partikel adalah konjugat dari fungsi gelombang bukan untuk mengetahui posisinya secara pasti tetapi untuk membuktikan bahwa adanya kemungkinan partikel berada pada suatu daerah yang telah ditentukan dengan gerak yang terbatas hanya pada simpul torus. Sehingga dapat dinyatakan bahwa partikel itu mempunyai probabilitas berada

dimana-mana dengan jumlah total probabilitas keberadaannya diseluruh torus adalah satu, yang berarti partikel pasti ada pada simpul torus.

5.2 Saran

Untuk selanjutnya, penelitian ini dapat dikembangkan dengan menggunakan pendekatan-pendekatan yang lain seperti pendekatan Hill, atau dalam rana gerak brown disekitar lubang hitam pada simpul torus (Romadani, 2020), gerak difusi dengan 4 dimensi pada simpul torus, dan gerak difusi dalam tinjauan relativitas khusus pada simpul torus melalui suatu persamaan langevin dan fokker-planck (Romadani, dan Muhammad, 2021), dan bisa juga ditetapkan untuk mendapatkan besaran-besaran yang lain terkait sifat-sifat partikel yang bergerak terbatas pada simpul torus, seperti sifat medan magnetnya atau medan listriknya.

DAFTAR PUSTAKA

- Biswas & Ghosh. Quantum Mechanics Of Particle On A Torus Knot: Curvature And Torsion Effects. *Arxiv*(2019): 1908.06423v3 [hep-th] 18 December.
- Da Costa. Quantum mechanics of a constrained particle. *Physical Review A* (1981): Vol.23, No.4. April.
- Da silvia, Luiz, dkk. Quantum mechanics of a constrained particle and the problem of prescribed geometry-induced potential. *Arxiv*(2018): 1602.00528v3 [quant-ph] 3 September.
- D'Ambrose, Kevrekidis, & Schmelcher. Bright Solitary Waves on a Torus: Existence, Stability and Dynamics for the Nonlinear Schrödinger Model. *Arxiv*(2019): 1906.06001v1
- Das, Praloy & Ghosh, Subir. Particle on a Torus Knot: A Hamiltonian Analysis. *Found Phys*(2016): s10701-016-0035-6. 7 July.
- Das, Pramanik, & Ghosh. Particle on a Torus Knot: Constrained Dynamics and Semi-Classical Quantization in a Magnetic Field. *Arxiv*(2016) : 1511.09035v2 [hep-th] 2 Augustus.
- D'haeseleer, dkk. 1991. *Flux Coordinates and Magnetic Field Structure A Guide to a Fundamental Tool of Plasma Theory*. Berlin : Springer.
- Dini, F., Baghdadi, R., Amrollahi, R., dan Khorasani. An Overview of Plasma confinement in Toroidal Systems. *arXiv*(2009):0909.0660.
- E. Jahnke & F. Emde. 1945. *Tables of Functions Dover*. New York: Springer.
- Faddeev, & Niemi. Knot And Particle. *Arxiv*(1996): 99610193v1[hep-th]. 24 october.
- Ghosh, Subir. Geometric Phases for Classical and Quantum Dynamics: Hannay Angle and Berry Phase for Loops on a Torus. *International Journal of Theoretical Physics* (2019): 10773-019-04169 07 June.
- Jensen, & Koppe. Quantum Mechanics with Constraints. *Annals Of Physics*(1971): 63, 586591.
- J. Griffiths, david. 2005. *Introduction To Quatum Mechanics Secound Edition*. New Jersey: Pearson Prentice Hall.
- Kedia, Hridesh, dkk. Tying Knots in Light Field. *Physical Review Letters*(2013): PRL 111, 150404. 11 October.

- Khanna, dkk. Quantum field theory on toroidal topology: algebraic structure and application. *Arxiv*(2014): 1409.1245v1 [hep-th] 2 September.
- Lickorish, & Millett. The New Polynomial Invariants of Knots and Links. *Mathematics Magazine*(1988): Vol. 61, No.1. February.
- Long, Yong Wang, dkk. Geometric effects resulting from square and circular confinements for a particle constrained to a space curve. *Physical Review A*(2018): 97,042108. 12 April.
- M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions - Dover*, New York, 1964, Chap. 20.
- Nurdiana, dan Bacong. 2020. *Fisika Kuantum untuk Pemula: Panduan Muda untuk Memahami Teori Fisika Kuantum*. Makassar. CV. CAHAYA TIMUR.
- Ortiz, Carmine. Quantum mechanics of a spin-orbit coupled electron constrained to a space curve. *Physical Review B* (2015): 91, 245412. 11 June.
- Purwanto, Agus. 2015. *Ayat-ayat Semesta*. Bandung: Mizan.
- Purwanto, Agus. 2016. *Fisika Kuantum*. Yogyakarta : Gava Media.
- Romadani, Arista. Brownian Motion Around Black Hole. *Advances In Social Sains, Education and Humanities Reseach*. 2020. Vol. 529
- Romadani, Muhammad. Proses Difusi Relativistik Melalui Persamaan Langevin dan Fokker-Planck. *Jurnal Tekno Sains*. 2021. Vol.11
- S. Dewrrr, Bryce. Dynamcal Theory in Curved Spaces. I. A Review of the Classical and Quantum Action Principles. *Reviews of Modern PhysicsL*(1957): Vol.29,No.3. July.
- Urwin, Kathleen, & Arscott. Theory of the Whittaker-Hill Equation. *Columbia University Libraries*(1970): 4 May.
- Vega, Gutierrez, dkk. Mathieu functions, a visual approach. *American Association of Physics Teachers*(2002): 1.1522698. 26 September.
- V.V. Sreedhar. The classical and quantum mechanics of a particle on a knot. *Elsevier*(2015): 359 20-30. 4 April.

LAMPIRAN

Lampiran A Persamaan Schrodinger Tak Bergantung Waktu

Suatu gelombang cahaya bidang dirumuskan :

$$\Psi(x, t) = E_0 \sin(kx - \omega t) \quad (\text{A.1})$$

dengan :

E_0 adalah nilai faktor medan listrik,

$\omega = 2\pi\nu$ adalah frekuensi sudut, dan

$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ adalah kostanta gelombang, dengan $\lambda = \frac{v}{c}$

persamaan diatas dapat dianalogikan gelombang partikel dapat dituliskan sebagai:

$$\Psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t) \quad (\text{A.2})$$

jika k dinyatakan dalam momentum $\lambda = h/p_x$, maka menjadi :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\frac{h}{p_x}} = \frac{p_x 2\pi}{h} = \frac{p_x}{\frac{h}{2\pi}} = \frac{p_x}{\hbar}$$

di mana $\hbar = h/2\pi$. Sedangkan frekuensi ω jika dihubungkan dengan energi kinetik partikel E , sebagai berikut :

$$E = h\nu \frac{2\pi}{2\pi} = \frac{h}{2\pi} 2\pi\nu = \hbar\omega$$

$$E_k = \hbar\omega$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \hbar\omega$$

$$\frac{1}{2}vp = \hbar\omega$$

$$\frac{1}{2}vp \frac{m}{m} = \hbar\omega$$

$$\frac{p^2}{2m} = \hbar\omega$$

$$\omega = \frac{p_x^2}{2m\hbar}$$

jadi fungsi gelombang persamaan (A.2), menjadi :

$$\Psi(x, t) = A \sin\left(\frac{p_x x}{\hbar} - \frac{p_x^2 t}{2m\hbar}\right) \quad (\text{A.3})$$

fungsi gelombang ini merupakan penyelesaian dari persamaan differensial gelombang salah satunya :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial \Psi}{\partial x^2} \quad (\text{A.4})$$

persamaan ini adalah persamaan gelombang datar atau bidang bunyi dalam gas laju bunyi adalah α . Persamaan (A.2) didistribusikan ke persamaan (A.3) dengan menganggap $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$ yaitu gaya yang tak bekerja pada partikel. Turunan pertama Ψ terhadap t , menjadi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} A \sin\left(\frac{p_x x}{\hbar} - \frac{p_x^2 t}{2m\hbar}\right) \\ &= -\frac{p_x^2 t}{2m\hbar} A \cos\left(\frac{p_x x}{\hbar} - \frac{p_x^2 t}{2m\hbar}\right) \end{aligned}$$

turunan kedua Ψ terhadap t , menjadi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} &= \frac{\partial \Psi}{\partial t} \left[-\frac{p_x^2 t}{2m\hbar} A \cos\left(\frac{p_x x}{\hbar} - \frac{p_x^2 t}{2m\hbar}\right) \right] \\ &= \left(-\frac{p_x^2 t}{2m\hbar}\right) \left(-\frac{p_x^2 t}{2m\hbar}\right) \left(-A \sin\left(\frac{p_x x}{\hbar} - \frac{p_x^2 t}{2m\hbar}\right)\right) \\ &= \left(-\frac{p_x^2 t}{2m\hbar}\right)^2 A \sin\left(\frac{p_x x}{\hbar} - \frac{p_x^2 t}{2m\hbar}\right) \\ &= \left(-\frac{p_x^2 t}{2m\hbar}\right)^2 \Psi \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

turunan pertama Ψ terhadap x , yaitu :

$$\frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} A \sin\left(\frac{p_x x}{\hbar} - \frac{p_x^2 t}{2m\hbar}\right)$$

$$= \frac{p_x}{\hbar} A \cos\left(\frac{p_x x}{\hbar} - \frac{p_x^2 t}{2m\hbar}\right)$$

turunan kedua Ψ terhadap x , diperoleh :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} &= \frac{\partial \Psi}{\partial t} \left[-\frac{p_x^2 t}{2m\hbar} A \cos\left(\frac{p_x x}{\hbar} - \frac{p_x^2 t}{2m\hbar}\right) \right] \\ &= \left(\frac{p_x}{\hbar}\right) \left(\frac{p_x}{\hbar}\right) \left(-A \sin\left(\frac{p_x x}{\hbar} - \frac{p_x^2 t}{2m\hbar}\right)\right) \\ &= -\left(\frac{p_x}{\hbar}\right)^2 A \sin\left(\frac{p_x x}{\hbar} - \frac{p_x^2 t}{2m\hbar}\right) \\ &= -\left(\frac{p_x}{\hbar}\right)^2 \Psi \end{aligned} \tag{A.6}$$

sehingga persamaan (A.4) mendapatkan hasil :

$$\begin{aligned} \left(-\frac{p_x^2 t}{2m\hbar}\right)^2 \Psi &= \alpha - \left(\frac{p_x}{\hbar}\right)^2 \Psi \\ -\left(\frac{p_x^2 t}{2m\hbar} \frac{p_x^2 t}{2m\hbar}\right) \Psi &= \alpha - \left(\frac{p_x}{\hbar}\right)^2 \Psi \\ \left(\frac{p_x^2}{4m^2}\right) \left(-\frac{p_x}{\hbar}\right)^2 \Psi &= \alpha - \left(\frac{p_x}{\hbar}\right)^2 \Psi \\ \left(\frac{p_x^2}{4m^2}\right) &= \alpha \end{aligned} \tag{A.7}$$

persamaan (A.4) dapat ditulis lagi menjadi :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \left(\frac{p_x^2}{4m^2}\right) \frac{\partial \Psi}{\partial x^2} \tag{A.8}$$

persamaan ini tidaklah cocok karena fungsi gelombang keterangannya hanya satu kali, maka p_x kanan dan kiri akan saling menghapus, sehingga dicoba persamaan baru yaitu :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \gamma \frac{\partial \Psi}{\partial x^2} \tag{A.9}$$

persamaan gelombangnya menjadi :

$$\Psi(x, t) = A \sin \left[i \left(\frac{p_x x}{\hbar} - \frac{p_x^2 t}{2m\hbar} \right) \right] \quad (\text{A.10})$$

ini adalah persamaan gelombang fungsi kompleks. Cara yang sama dengan persamaan diatas akan didapatkan turunan pertama terhadap t dan x , dan turuan

kedua terhadap x . Turunan pertama Ψ terhadap t , yaitu :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[A \sin \left[i \left(\frac{p_x x}{\hbar} - \frac{p_x^2 t}{2m\hbar} \right) \right] \right] \\ &= -\frac{ip_x^2}{2m\hbar} A \cos \left[i \left(\frac{p_x x}{\hbar} - \frac{p_x^2 t}{2m\hbar} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

turunan pertama Ψ terhadap x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[A \sin \left[i \left(\frac{p_x x}{\hbar} - \frac{p_x^2 t}{2m\hbar} \right) \right] \right] \\ &= \frac{ip_x}{\hbar} A \cos \left[i \left(\frac{p_x x}{\hbar} - \frac{p_x^2 t}{2m\hbar} \right) \right] \end{aligned}$$

turunan kedua Ψ terhadap x , diperoleh :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{ip_x}{\hbar} A \cos \left[i \left(\frac{p_x x}{\hbar} - \frac{p_x^2 t}{2m\hbar} \right) \right] \right] \\ &= \frac{ip_x}{\hbar} \frac{ip_x}{\hbar} \left(-A \sin \left[i \left(\frac{p_x x}{\hbar} - \frac{p_x^2 t}{2m\hbar} \right) \right] \right) \\ &= \left(\frac{p_x}{\hbar} \right)^2 A \sin \left[i \left(\frac{p_x x}{\hbar} - \frac{p_x^2 t}{2m\hbar} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

jadi persamaan (A.9) menjadi :

$$\begin{aligned} -\frac{ip_x^2}{2m\hbar} \Psi &= \gamma \left(\frac{p_x}{\hbar} \right)^2 \Psi \\ -\frac{i}{2m} &= \frac{\gamma}{\hbar} \\ \gamma &= -\frac{i\hbar}{2m} \end{aligned}$$

dikalikan dengan i/i , didapatkan :

$$\begin{aligned}\gamma &= -\frac{i\hbar}{2m}\left(\frac{i}{i}\right) \\ \gamma &= \frac{\hbar}{2im}\end{aligned}\tag{A.13}$$

sehingga persamaan differensial (A.4) diperoleh :

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{\hbar}{2im}\frac{\partial\Psi}{\partial x^2}\tag{A.14}$$

ini merupakan persamaan gelombang satu dimensi pada ruang x . Agar persamaan menjadi tiga dimensi maka ditambahkan nabla (∇), sehingga menjadi :

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{\hbar}{2im}\nabla^2\Psi\tag{A.15}$$

Persamaan schrödinger dirumuskan (J. Griffiths, david. 2005) :

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{(i\hbar\nabla)^2}{2m}\Psi\tag{A.16}$$

karena $E_t = E_k + E_p$ maka persamaan (A.16) menjadi :

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi\tag{A.17}$$

untuk potensial V yang ditentukan (x, t). Dalam hal ini persamaan Schrödinger dapat diselesaikan dengan metode pemisahan variabel pada persamaan diferensial parsial (J. Griffiths, david. 2005):

$$i\hbar\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\Psi}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + V\tag{A.18}$$

Cara ini mungkin benar karena kedua belah pihak merupakan konstan - jika tidak, dengan varing t , kita dapat meruba χ h sisi kiri tanpa menyentuh sisi kanan, dan keduanya tidak lagi sama, kita dapat menyebutnya pemisahan konstan E . Misal (J. Griffiths, david. 2005) :

$$\Psi(r, t) = U(r)T(t) \quad (\text{A.19})$$

dimasukkan $\Psi(r, t)$ kepersamaan Schödinger, menjadi :

$$i\hbar \frac{\partial U(r)T(t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} U(r)T(t) + VU(r)T(t) \quad (\text{A.20})$$

misal :

$$E = \frac{i\hbar}{T(t)} \frac{\partial T(t)}{\partial t}$$

$$\frac{E}{i\hbar} = \frac{\partial T(t)}{\partial t}$$

$$\int \frac{\partial T}{\partial t} \frac{E}{i\hbar} = \int \frac{\partial T(t)}{T(t)}$$

$$e^{-iEt/\hbar} = T(t)$$

diperoleh persamaan Schrodinger tak bergantung waktu yaitu:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi = E \quad (\text{A.21})$$

**Lampiran B Persamaan Schrodinger Tak Bergantung Waktu dengan
Modifikasi Kelengkungan**

$$V_c = \lim_{\varepsilon_{2,3} \rightarrow 0} \begin{cases} 0, & |q_2| \leq \varepsilon_2, |q_3| \leq \varepsilon_3 \\ \infty, & |q_2| > \varepsilon_2, |q_3| > \varepsilon_3 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_n &= -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_2^2 + \frac{1}{2} m \omega q_2^2 \\ &= \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{1}{2m} m^2 \omega^2 q_2^2 \\ &= \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{1}{2m} (m \omega q_2)^2 \\ &= \frac{1}{2m} [\hat{p}^2 + (m \omega q_2)^2] \end{aligned}$$

dimana $\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$

$$\hat{p}^2 = -(i^2) \hbar^2 \frac{d^2}{dx^2}$$

$$\hat{p}^2 = -(-1) \hbar^2 \frac{d^2}{dx^2}$$

$$\hat{p}^2 = \hbar^2 \frac{d^2}{dx^2}$$

misal $u^2 = p^2$ dan $v^2 = m^2 \omega^2 q_2^2$

jika $u^2 + v^2 = (iu + v)(-iu + v)$

maka $\hat{p}^2 + (m \omega q_2)^2 = (ip + m \omega q_2)(-ip + m \omega q_2)$

sehingga :

$$\hat{H}_n \Psi = \frac{1}{2m} (ip + m \omega q_2)(-ip + m \omega q_2) \Psi \quad (\text{B.2})$$

karena p dan x adalah operator, dan operator tidak boleh bolak balik urutannya harus tetap (xp tidak sama dengan px), tetapi jika $m\omega$ bukan operator jadi boleh dibolak-balik, sehingga harus dilakukan permsalan :

$$a_+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(-i\hat{p} + m\omega\hat{q}_2) \text{ dan } a_- = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(i\hat{p} + m\omega\hat{q}_2) \quad (\text{B.3})$$

dan vektor ini akan membuat hasil yang lebih bagus. Selanjutnya akan menganalisis

a_-a_+ :

$$\begin{aligned} a_-a_+ &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(i\hat{p} + m\omega\hat{q}_2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(-i\hat{p} + m\omega\hat{q}_2) \\ &= \frac{1}{2\hbar m\omega}(i\hat{p} + m\omega\hat{q}_2)(-i\hat{p} + m\omega\hat{q}_2) \\ &= \frac{1}{2\hbar m\omega}(\hat{p}^2 + i\hat{p}m\omega\hat{q}_2 - m\omega\hat{q}_2i\hat{p} + m^2\omega^2\hat{q}_2^2) \\ &= \frac{1}{2\hbar m\omega}(\hat{p}^2 + (m\omega\hat{q}_2)^2 + im\omega(\hat{p}\hat{q}_2 - \hat{q}_2\hat{p})) \\ &= \frac{1}{2\hbar m\omega}(\hat{p}^2 + (m\omega\hat{q}_2)^2 - im\omega(\hat{q}_2\hat{p} - \hat{p}\hat{q}_2)) \\ &= \frac{1}{2\hbar m\omega}[\hat{p}^2 + (m\omega\hat{q}_2)^2] - \frac{i}{2\hbar}[q, p] \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned} a_+a_- &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(-i\hat{p} + m\omega\hat{q}_2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(i\hat{p} + m\omega\hat{q}_2) \\ &= \frac{1}{2\hbar m\omega}(-i\hat{p} + m\omega\hat{q}_2)(i\hat{p} + m\omega\hat{q}_2) \\ &= \frac{1}{2\hbar m\omega}(\hat{p}^2 - i\hat{p}m\omega\hat{q}_2 + m\omega\hat{q}_2i\hat{p} + m^2\omega^2\hat{q}_2^2) \\ &= \frac{1}{2\hbar m\omega}(\hat{p}^2 + (m\omega\hat{q}_2)^2 - im\omega(\hat{p}\hat{q}_2 - \hat{q}_2\hat{p})) \\ &= \frac{1}{2\hbar m\omega}[\hat{p}^2 + (m\omega\hat{q}_2)^2] - \frac{i}{2\hbar}[p, q] \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Istilah tambahan yang melibatkan $(qp - pq)$ menyebutkan commutator dari q dan p itu adalah ukuran seberapa gagal dalam perhitungan ini, komutator dari operator A dan B (menuliskan dengan tanda kurung siku) adalah :

$$\{A, B\} = AB - BA$$

perlu mencari tahu komutator x dan p , operator tidak bisa sembarang diperhitungkan jika asal-asalan akan membuat kesalahan dalam perhitungan dengan memberi “fungsi uji” $f(x)$ untuk ditindak lanjuti. Pada akhirnya bisa membuang fungsi uji dan membiarkan persamaan yang melibatkan operator saja :

$$\begin{aligned}
[q_2, p]\Psi(q_2) &= (\hat{q}_2\hat{p} - \hat{p}\hat{q}_2)\Psi(q_2) \\
&= \hat{q}_2\hat{p}\Psi(q_2) - \hat{p}\hat{q}_2\Psi(q_2) \\
&= \hat{q}_2\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial q_2}\right)\Psi(q_2) - \hat{p}\hat{q}_2\Psi(q_2) \\
&= \hat{q}_2\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial q_2}\right)\Psi(q_2) + i\hbar\left(\frac{\partial q_2}{\partial q_2}\Psi(q_2) + q_2\frac{\partial}{\partial q_2}\Psi(q_2)\right) \\
[q_2, p] &= i\hbar\Psi(q_2) \\
[p, q_2] &= -i\hbar\Psi(q_2)
\end{aligned}$$

persamaan diatas tidak sama dengan nol jadi tidak komut. hubungannya adalah :

$$\begin{aligned}
a_-a_+ &= \frac{1}{2\hbar m\omega}(p^2 + (m\omega z)^2 - im\omega[\hat{q}_2, \hat{p}]) \\
a_-a_+ &= \frac{1}{\hbar\omega}\left[\frac{1}{2m}(p^2 + (m\omega z)^2) - \frac{im\omega}{2m}i\hbar\right] \\
a_-a_+ &= \frac{1}{\hbar\omega}\left[H_n + \frac{\omega\hbar}{2}\right] \\
a_-a_+ &= \frac{H_n}{\hbar\omega} + \frac{\omega\hbar}{2\omega\hbar} \\
a_-a_+ &= \frac{H_n}{\hbar\omega} + \frac{1}{2} \\
a_-a_+ - \frac{1}{2} &= \frac{H_n}{\hbar\omega} \\
H_n &= (a_-a_+ - 1/2)\hbar\omega \tag{B.6}
\end{aligned}$$

Ternyata Hamiltonian bukan factor sempurna, ada tambahan $-1/2$ disebelah kanan, perhatikan bahwa urutan a_+ dan a_- sangat penting disini. Selanjutnya a_+ disebelah kiri menghasilkan :

$$\begin{aligned}
 a_+a_- &= \frac{1}{2\hbar m\omega} (p^2 + (m\omega z)^2) - im\omega[\hat{p}, \hat{q}_2] \\
 a_+a_- &= \frac{1}{\hbar\omega} \left[\frac{1}{2m} (p^2 + (m\omega z)^2) - \frac{im\omega}{2m} \cdot -i\hbar \right] \\
 a_+a_- &= \frac{1}{\hbar\omega} \left[H_n - \frac{\omega\hbar}{2} \right] \\
 a_+a_- &= \left[H_n - \frac{\omega\hbar}{2} \right] \\
 a_+a_- &= \frac{H_n}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \\
 H_n &= \left(a_+a_- + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \tag{B.7}
 \end{aligned}$$

dalam a_{\pm} , persamaan Schrodinger untuk osilator harmonic diambil dari :

$$\hbar\omega \left(a_{\pm}a_{\mp} \pm \frac{1}{2} \right) \Psi = H_n \Psi \tag{B.8}$$

(dalam persamaan seperti ini ada membaca dengan tanda bagian atas semua dan tanda bagian bawah semua). Sekarang inilah langkah pentingnya jika Ψ memenuhi persamaan Shrodinger dengan energi $(E + \hbar\omega) \Rightarrow H(a_+\Psi) = (E + \hbar\omega)(a_+\Psi)$, dan sebelumnya diketahui :

$$\begin{aligned}
 [a_+a_-] &= a_+a_- - a_-a_+ \\
 &= \left(\frac{H_n}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{H_n}{\hbar\omega} + \frac{1}{2} \right) \\
 &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\
 &= -1 \\
 a_-a_+ &= 1 \\
 a_-a_+ - a_+a_- &= 1
 \end{aligned}$$

$$a_- a_+ = a_+ a_- + 1$$

- $H\Psi_1 = E\Psi_1$

$$H\Psi_2 = E\Psi_2 \rightarrow \Psi_2 = a_+ \Psi_1$$

$$H(a_+ \Psi_1) = \hbar\omega \left(a_+ a_- + \frac{1}{2} \right) (a_+ \Psi_1)$$

$$= \hbar\omega \left(a_+ a_- a_+ + \frac{1}{2} a_+ \right) \Psi_1$$

$$= \hbar\omega a_+ \left(a_+ a_- + 1 + \frac{1}{2} \right) \Psi_1$$

$$= a_+ \left[\hbar\omega \left(a_+ a_- + 1 + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega \right] \Psi_1$$

$$= a_+ (H_n + \hbar\omega) \Psi_1$$

$$= a_+ (E_n + \hbar\omega) \Psi_1$$

- $a\Psi_0 = 0$

$$\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} (i\hat{p} + m\omega\hat{q}_2) \Psi_0 = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \left(-i^2 \hbar \frac{\partial}{\partial q_2} + m\omega\hat{q}_2 \right) \Psi_0 = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \left(\hbar \frac{\partial}{\partial q_2} + m\omega\hat{q}_2 \right) \Psi_0 = 0$$

$$\hbar \frac{\partial}{\partial q_2} \Psi_0 + m\omega\hat{q}_2 \Psi_0 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial q_2} \Psi_0 = \frac{-m\omega\hat{q}_2 \Psi_0}{\hbar}$$

$$\int \frac{\partial \Psi_0}{\Psi_0} = \int \frac{-m\omega\hat{q}_2}{\hbar} \partial q_2$$

$$\ln \Psi_0 = -\frac{1}{2} \frac{m\omega\hat{q}_2^2}{\hbar} + A$$

$$\Psi_0 = A e^{-\frac{1}{2} \frac{m\omega\hat{q}_2^2}{\hbar}}$$

Normalisasi fungsi gelombang adalah untuk membuktikan fungsi gelombang itu layak digunakan atau tidak sedangkan probabilitas adalah untuk membuktikan lebih akurat dimanakah letak partikel tersebut :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \Psi dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} A^2 e^{2(-\frac{1m\omega\hat{q}_2^2}{2\hbar})} dq_2 = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} A^2 e^{-\frac{m\omega\hat{q}_2^2}{\hbar}} dq_2 = 1$$

$$A^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m\omega\hat{q}_2^2}{\hbar}} dq_2 = 1$$

$$A^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m\omega\hat{q}_2^2}{\hbar}} dq_2 = 1$$

$$A^2 2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{m\omega\hat{q}_2^2}{\hbar}} dq_2 = 1$$

$$\frac{A^2 2}{2} \sqrt{\frac{\hbar\pi}{m\omega}} = 1$$

$$A^2 \sqrt{\frac{\hbar\pi}{m\omega}} = 1$$

$$\frac{1}{A^2} = \sqrt{\frac{\hbar\pi}{m\omega}}$$

$$A^2 = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar\pi}}$$

$$\bullet = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{m^{\frac{1}{4}} \omega^{\frac{1}{4}}}{\pi^{\frac{1}{4}} \hbar^{\frac{1}{4}}}$$

$$= \frac{m^{\frac{1}{4}} \omega^{\frac{1}{4}}}{\hbar^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{m^{\frac{1}{4}} \omega^{\frac{1}{4}}}{\hbar^{\frac{1}{4}}} \cdot \pi^{-\frac{1}{4}} \\
&= \left(\left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \pi^{-\frac{1}{4}} \\
&= a^{\frac{1}{2}} \cdot \pi^{-\frac{1}{4}} \cdot e^{-\frac{m\omega \hat{q}_2^2}{2\hbar}} \\
\langle H_n \rangle &= a^{\frac{1}{2}} \cdot \pi^{-\frac{1}{4}} \cdot e^{+(a^2 \hat{q}_2^2)/2}
\end{aligned}$$

Karena $H_n = E_n$, maka :

$$\langle E_n \rangle = a^{\frac{1}{2}} \cdot \pi^{-\frac{1}{4}} \cdot e^{+(a^2 \hat{q}_2^2)/2} \quad (\text{B.9})$$

Atau bias ditulis juga dengan $v = a$:

$$|\chi_{0n}\rangle = v^{\frac{1}{2}} \cdot \pi^{-\frac{1}{4}} \cdot e^{\frac{(vq_2)^2}{2}} \quad \text{dan} \quad |\chi_{0b}\rangle = v^{\frac{1}{2}} \cdot \pi^{-\frac{1}{4}} \cdot e^{-\frac{(vq_3)^2}{2}} \quad (\text{B.10})$$

Dimana $|\chi_{0n}\rangle$ dan $|\chi_{0b}\rangle$ adalah fungsi gelombang keadaan dasar dalam arah normal dan binormal dan $v = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ untuk ω adalah gerak pada bidang normal sepanjang kurva.

Kuantum Hamiltonian dan persamaan Schroodinger yang sesuai untuk kurva sudah dikaji oleh da Costa perhatikan partikel mirip titik bermassa m , yang dibatasi secara kaku berukuran C dari besar q_1 , persamaan parametrik $\vec{r} = \vec{r}(q_1)$ dan garis singgung normal dan binormal yang masing-masing dilambangkan $\hat{t}(q_1)$, $\hat{n}(q_1)$ dan $\hat{b}(q_1)$.

$$\vec{R}(q_1, q_2, q_3) = \vec{r}(q_1) + q_2 \hat{n}_2(q_1) + q_3 \hat{n}_3(q_1)$$

$$\hat{n}_2 = \cos \theta(q_1) \hat{n}(q_1) - \sin \theta(q_1) \hat{b}(q_1)$$

$$\hat{n}_3 = \sin \theta(q_1) \hat{n}(q_1) + \cos \theta(q_1) \hat{b}(q_1)$$

$$\frac{d\theta}{dq_1} = \tau(q_1)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{R}}{dq_1} &= \frac{d}{dq_1} [\vec{r}(q_1) + q_2(\cos \theta(q_1)\hat{n}(q_1) - \sin \theta(q_1)\hat{b}(q_1))(q_1) \\
&\quad + q_3(\sin \theta(q_1)\hat{n}(q_1) + \cos \theta(q_1)\hat{b}(q_1))(q_1)] \\
&= \frac{d}{dq_1} \vec{r}(q_1) + \frac{d}{dq_1} q_2 \cos \theta(q_1)\hat{n}(q_1) - \frac{d}{dq_1} q_2 \sin \theta(q_1)\hat{b}(q_1) \\
&\quad + \frac{d}{dq_1} q_3 \sin \theta(q_1)\hat{n}(q_1) + \frac{d}{dq_1} q_3 \cos \theta(q_1)\hat{b}(q_1) \\
&= \hat{t}(q_1) - q_2 \sin \theta(q_1)\hat{n}(q_1) - q_2 \cos \theta(q_1)\hat{b}(q_1) \\
&\quad + q_3 \cos \theta(q_1)\hat{n}(q_1) - q_3 \sin \theta(q_1)\hat{b}(q_1) \\
&= \hat{t}(q_1) - q_2 \sin \theta(q_1) \frac{d\hat{t}}{dq_1}(q_1) - q_2 \cos \theta(q_1)\hat{t} \times \hat{n}(q_1) \\
&\quad + q_3 \cos \theta(q_1) \frac{d\hat{t}}{dq_1}(q_1) - q_3 \sin \theta(q_1)\hat{t} \times \hat{n}(q_1) \\
&= \hat{t}(q_1) - q_2 \sin \theta(q_1) \frac{d\hat{t}}{dq_1} \frac{d\vec{r}}{d\vec{r}} \frac{dq_1}{dq_1}(q_1) - q_2 \cos \theta(q_1)\hat{t} \times \hat{n}(q_1) \\
&\quad + q_3 \cos \theta(q_1) \frac{d\hat{t}}{dq_1} \frac{d\vec{r}}{d\vec{r}} \frac{dq_1}{dq_1}(q_1) - q_3 \sin \theta(q_1)\hat{t} \times \hat{n}(q_1) \\
&= \hat{t}(q_1) - q_2 \sin \theta(q_1) \frac{d\hat{t}}{dq_1} \frac{d\vec{r}}{dq_1} \frac{dq_1}{d\vec{r}}(q_1) - q_2 \cos \theta(q_1)\hat{t} \times \hat{n}(q_1) \\
&\quad + q_3 \cos \theta(q_1) \frac{d\hat{t}}{dq_1} \frac{d\vec{r}}{dq_1} \frac{dq_1}{d\vec{r}}(q_1) - q_3 \sin \theta(q_1)\hat{t} \times \hat{n}(q_1) \\
&= \hat{t}(q_1) - q_2 \sin \theta(q_1) TN \frac{dq_1}{d\vec{r}}(q_1) - q_2 \cos \theta(q_1)\hat{t} \times \hat{n}(q_1) \\
&\quad + q_3 \cos \theta(q_1) TN \frac{dq_1}{d\vec{r}}(q_1) - q_3 \sin \theta(q_1)\hat{t} \times \hat{n}(q_1)
\end{aligned}$$

TN=0, maka :

$$\begin{aligned}
&= \hat{t}(q_1) - q_2 \cos \theta(q_1)\hat{t} \times \hat{n}(q_1) - q_3 \sin \theta(q_1)\hat{t} \times \hat{n}(q_1) \\
&= \hat{t}(q_1) - q_2 \cos \theta(q_1) \left| \frac{d\hat{t}}{dq_1} \right| \hat{t}(q_1) - q_3 \sin \theta(q_1) \left| \frac{d\hat{t}}{dq_1} \right| \hat{t}(q_1)
\end{aligned}$$

$k = \left| \frac{d\hat{t}}{dq_1} \right|$, maka :

$$\begin{aligned}
&= [1 - q_2 \cos \theta(q_1)k - q_3 \sin \theta(q_1)k] \hat{t}(q_1) \\
&= [1 - k(q_1)(q_2 \cos \theta(q_1) - q_3 \sin \theta(q_1))] \hat{t}(q_1) \\
&= [1 - k(q_1)f(q_1, q_2, q_3)] \hat{t}(q_1) \tag{B.11}
\end{aligned}$$

di mana :

$$f(q_1, q_2, q_3) = \cos \theta(q_1)q_2 + \sin \theta(q_1)q_3$$

dan $k(q_1) = |d\hat{t}/dq_1|$ adalah kelengkungan C pada titik busur (q_1) karena sistem koordinat orthogonal, $\left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial q_i}\right) \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial q_j}\right) = \hbar_i^2 \delta_{ij}$, dapat menulis gaya klasik F akibat potensial $V(q_1, q_2, q_3)$ sebagai :

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= -grad V \\
&= - \sum_{j=1}^3 \left(\frac{1}{\hbar_j} \frac{\partial V}{\partial q_j} \right) \frac{\partial \vec{R}}{\partial q_j}
\end{aligned}$$

Melanjutkan seperti dalam kasus tegangan permukaan, potensial pembatas $V(q_2, q_3)$ independen dari q_1 selalu mempertahankan gaya $-grad V$, dalam keadaan normal bidang C . Persamaan Schrodinger kemudian ditulis :

$$\begin{aligned}
&-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{(1-kf)} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{1-kf} \frac{\partial \Psi}{\partial q_1} \right) + \sum_{j=2}^3 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial q_j^2} + \frac{\partial}{\partial q_j} \ln(1-kf) \frac{\partial \Psi}{\partial q_j} \right) \right] + V_\lambda(q_2, q_3) \Psi \\
&= i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}
\end{aligned}$$

dimana $dV = (1 - kf)x dq_1 dq_2 dq_3$ dan menyarankan pengenalan fungsi gelombang baru :

$$\begin{aligned}
\chi(q_1, q_2, q_3) &= (1 - kf)^{\frac{1}{2}} \Psi \\
\Psi &= \frac{\chi}{\sqrt{1 - kf}}
\end{aligned}$$

Persamaan Schrodinger diatas mengganti Ψ seperti persamaan diatas dan dikalikan $\sqrt{1 - kf}$ untuk kanan dan kiri :

$$\begin{aligned}
& -\frac{\hbar^2}{2m}\sqrt{1-kf}\left[\frac{1}{(1-kf)}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{(1-kf)}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\chi}{\sqrt{1-kf}}\right)\right)\right. \\
& \quad + \left.\left(\frac{\partial^2}{\partial q_2^2}\left(\frac{\chi}{\sqrt{1-kf}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial q_3^2}\left(\frac{\chi}{\sqrt{1-kf}}\right)\right)\right. \\
& \quad \left. + \sum_{j=2}^3\left(\frac{\partial}{\partial q_j}\ln(1-kf)\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\chi}{\sqrt{1-kf}}\right)\right)\right] \\
& \quad + \sqrt{1-kf}\cdot V_\lambda(q_2, q_3)\left(\frac{\chi}{\sqrt{1-kf}}\right) = \sqrt{1-kf}\cdot i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\chi}{\sqrt{1-kf}}\right) \\
& -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\sqrt{1-kf}}{\sqrt{1-kf}\sqrt{1-kf}}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{(1-kf)}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\chi}{\sqrt{1-kf}}\right)\right) + \frac{\sqrt{1-kf}}{\sqrt{1-kf}}\left(\frac{\partial^2}{\partial q_2^2}\chi + \frac{\partial^2}{\partial q_3^2}\chi\right)\right. \\
& \quad + \sqrt{1-kf}\sum_{j=2}^3\left(\frac{\partial}{\partial q_j}\ln(1-kf)\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\chi}{\sqrt{1-kf}}\right)\right) \\
& \quad \left. + \frac{\sqrt{1-kf}}{\sqrt{1-kf}}V_\lambda(q_2, q_3)\chi\right] = \frac{\sqrt{1-kf}}{\sqrt{1-kf}}i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\chi \\
& -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\sqrt{1-kf}}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{(1-kf)}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\chi}{\sqrt{1-kf}}\right)\right) - \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial q_2^2}\chi + \frac{\partial^2}{\partial q_3^2}\chi\right) \\
& \quad - \frac{\hbar^2}{2m}\sqrt{1-kf}\sum_{j=2}^3\left(\frac{\partial}{\partial q_j}\ln(1-kf)\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\chi}{\sqrt{1-kf}}\right)\right) + V_\lambda(q_2, q_3)\chi \\
& \quad = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\chi \\
& = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{(1-kf)^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial}{\partial q_1}\frac{1}{(1-kf)}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\chi}{\sqrt{1-kf}}\right) - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{k^2}{(1-kf)^2}\chi \\
& \quad - \frac{\hbar^2}{8m}\left(\frac{\partial^2}{\partial q_2^2}\chi + \frac{\partial^2}{\partial q_3^2}\chi\right) + V(q_2, q_3)\chi = i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t} \\
& -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{(1-kf)^2}\frac{\partial^2}{\partial q_1^2}\chi - \frac{\hbar^2}{8m}\frac{k^2}{(1-kf)^2}\chi - \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial q_2^2}\chi + \frac{\partial^2}{\partial q_3^2}\chi\right) + V(q_2, q_3)\chi = i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t}
\end{aligned}$$

Asumsikan untuk V , sifat-sifat yang diharapkan dari potensial regangan :

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} V_\lambda \begin{cases} 0, q_2^2 + q_3^2 = 0 \\ \infty, q_2^2 + q_3^2 \neq 0 \end{cases}$$

Langsung mengambil $f \rightarrow 0$ dalam persamaan diatas, mendapatkan :

$$\begin{aligned} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{(1-k.0)^2} \frac{\partial^2}{\partial q_1^2} \chi - \frac{\hbar^2}{8m} \frac{k^2}{(1-k.0)^2} \chi - \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial q_2^2} \chi + \frac{\partial^2}{\partial q_3^2} \chi \right) + V(q_2, q_3) \chi \\ &= i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} \\ &-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q_1^2} \chi - \frac{\hbar^2}{8m} k^2 \chi - \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial q_2^2} \chi + \frac{\partial^2}{\partial q_3^2} \chi \right) + V(q_2, q_3) \chi = i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} \end{aligned}$$

persamaan diatas dipisahkan dengan menetapkan $\chi = \chi_t(q_1, t) \times (q_2, q_3, t)$, untuk $\chi_n(q_2, q_3, t)$ memperoleh :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial q_2^2} \chi + \frac{\partial^2}{\partial q_3^2} \chi \right) + V(q_2, q_3) \chi = i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

dan untuk $\chi_t(q_1, t)$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q_1^2} \chi_t - \frac{\hbar^2}{8m} k^2 \chi_t = i\hbar \frac{\partial \chi_t}{\partial t}$$

persamaan diatas tidak bergantung dari potensialnya $V(q_2, q_3)$ ekuipotensialnya disekitar kurva C dapat berupa lingkaran, elips, persegi panjang, dll. Persamaan Schrodinger dimodifikasi bentuk kurva diperoleh :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\Delta_s + \frac{k^2}{4} \right) \Psi \quad (\text{B.12})$$

di mana $\Delta_s = \frac{d^2}{ds^2}$ Laplace-Beltrami, yang berhubungan dengan koordinat panjang busur s , dan kelengkungan dari kurva C , yang mana $\Psi = \chi_1$ adalah fungsi gelombang.

Lampiran C Persamaan Schrodinger Tak Bergantung Waktu dengan Modifikasi Kelengkungan dan Koordinat Toroidal

Persamaan gelombang Schrodinger dengan potesial kelengkungan dilanjutkan perhitungan dengan adanya koordinat toroidal yakni :

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{d}{d\phi} \frac{d\phi}{ds} \right) + \frac{k^2}{4} \right] \Psi &= -\epsilon \Psi \\ \left[\frac{d\phi}{ds} \frac{d}{ds} \left(\frac{d}{d\phi} \right) + \left(\frac{d\phi}{ds} \frac{d}{ds} \right) \frac{d}{d\phi} + \frac{k^2}{4} \right] \Psi &= -\epsilon \Psi \\ \left[\frac{d\phi}{ds} \frac{d}{d\phi} \frac{d\phi}{ds} \frac{d}{d\phi} + \left(\frac{d^2\phi}{ds^2} \right) \frac{d}{d\phi} + \frac{k^2}{4} \right] \Psi &= -\epsilon \Psi \\ \left[\left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2 \frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\frac{d^2\phi}{ds^2} \right) \frac{d}{d\phi} + \frac{k^2}{4} \right] \Psi &= -\epsilon \Psi \end{aligned} \quad (C.1)$$

menganti $\Psi = f(\phi)G(\phi)$ pada persamaan (B.12), menempatkan koefisien dr G menjadi nol, menjadi :

$$\left[\left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2 \frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\frac{d^2\phi}{ds^2} \right) \frac{d}{d\phi} + \frac{k^2}{4} \right] f(\phi)G(\phi) = -\epsilon f(\phi)G(\phi)$$

dinyatakan $f(\phi) = \sigma(\phi)$

$$\left[\left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2 \frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\frac{d^2\phi}{ds^2} \right) \frac{d}{d\phi} + \frac{k^2}{4} \right] \sigma(\phi)G(\phi) = -\epsilon \sigma(\phi)G(\phi)$$

$$\left[\left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2 \frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\frac{d^2\phi}{ds^2} \right) \frac{d}{d\phi} + \frac{k^2}{4} \right] G(\phi) = -\epsilon G(\phi)$$

dijadikan sama dengan nol :

$$\left[\left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2 \frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\frac{d^2\phi}{ds^2} \right) \frac{d}{d\phi} + \frac{k^2}{4} + \epsilon \right] G(\phi) = 0$$

$$\left[\left(\frac{1}{a^2\beta^2\sigma^4} \right) \frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\frac{d\phi}{ds} \frac{d}{ds} \right) \frac{d}{d\phi} + \frac{k^2}{4} + \epsilon \right] G(\phi) = 0$$

$$\left[\left(\frac{1}{a^2\beta^2\sigma^4} \right) \frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\frac{1}{a\beta\sigma^2} \frac{d}{ds} \right) \frac{d}{d\phi} + \frac{k^2}{4} + \epsilon \right] G(\phi) = 0$$

dikali $a^2\beta^2\sigma^4$, menjadi :

$$\left[a^2\beta^2\sigma^4 \left(\frac{1}{a^2\beta^2\sigma^4} \right) \frac{d^2}{d\phi^2} + a^2\beta^2\sigma^4 \left(\frac{1}{a\beta\sigma^2} \frac{d}{ds} \right) \frac{d}{d\phi} + a^2\beta^2\sigma^4 \left(\frac{k^2}{4} + \epsilon \right) \right] G(\phi) = 0$$

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + a^2\beta^2\sigma^4 \left(\frac{1}{a\beta\sigma^2} \frac{d}{ds} \right) \frac{d}{d\phi} + a^2\beta^2\sigma^4 \left(\frac{k^2}{4} + \epsilon \right) \right] G(\phi) = 0$$

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + a^2\beta^2\sigma^4 \left(\frac{d\phi}{ds} \frac{d}{ds} \right) \frac{d}{d\phi} + a^2\beta^2\sigma^4 \left(\frac{k^2}{4} + \epsilon \right) \right] G(\phi) = 0$$

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + a^2\beta^2\sigma^4 \left(\frac{d}{ds} \left(\frac{d}{d\phi} \frac{d\phi}{ds} \right) + \frac{d\phi}{ds} \left(\frac{d}{d\phi} \frac{d}{ds} \right) \right) + a^2\beta^2\sigma^4 \left(\frac{k^2}{4} + \epsilon \right) \right] G(\phi) = 0$$

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + a^2\beta^2\sigma^4 \left(\frac{d}{ds} \left(\frac{d}{d\phi} \frac{1}{a\beta\sigma^2} \right) + \frac{1}{a\beta\sigma^2} \left(\frac{d}{d\phi} \frac{d}{ds} \frac{d\phi}{ds} \right) \right) + a^2\beta^2\sigma^4 \left(\frac{k^2}{4} + \epsilon \right) \right] G(\phi) = 0$$

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + a^2\beta^2\sigma^4 \left(\frac{d}{ds} \left(-\frac{a\beta\sigma'^2}{a^2\beta^2\sigma^4} \right) + \frac{1}{a\beta\sigma^2} \left(\frac{d}{d\phi} \frac{d}{ds} \frac{d\phi}{ds} \right) \right) + a^2\beta^2\sigma^4 \left(\frac{k^2}{4} + \epsilon \right) \right] G(\phi) = 0$$

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + a^2\beta^2\sigma^4 \left(\frac{d}{d\phi} \frac{d\phi}{ds} \left(-\frac{a\beta\sigma'^2}{a^2\beta^2\sigma^4} \right) + \frac{1}{a\beta\sigma^2} \left(\frac{d}{d\phi} - \frac{a\beta\sigma'^2}{a^2\beta^2\sigma^4} \right) \right) + a^2\beta^2\sigma^4 \left(\frac{k^2}{4} + \epsilon \right) \right] G(\phi) = 0$$

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + a^2\beta^2\sigma^4 \left(\frac{a^2\beta^2\sigma'^4}{a^4\beta^4\sigma^8} + \frac{1}{a\beta\sigma^2} \left(\frac{-a^3\beta^3\sigma''^2\sigma^4 + a^3\beta^3\sigma'^2\sigma'^4}{a^4\beta^4\sigma^8} \right) \right) + a^2\beta^2\sigma^4 \left(\frac{k^2}{4} + \epsilon \right) \right] G(\phi) = 0$$

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + a^2\beta^2\sigma^4 \left(\frac{a^2\beta^2\sigma'^4}{a^4\beta^4\sigma^8} + \frac{1}{a\beta\sigma^2} \left(\frac{-\sigma''^2\sigma^4 + \sigma'^2\sigma'^4}{a\beta\sigma^8} \right) \right) + a^2\beta^2\sigma^4 \left(\frac{k^2}{4} + \epsilon \right) \right] G(\phi) = 0$$

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + a^2\beta^2\sigma^4 \left(\frac{a^2\beta^2\sigma'^4}{a^4\beta^4\sigma^8} + \left(\frac{-\sigma''^2\sigma^4 + \sigma'^2\sigma'^4}{a^2\beta^2\sigma^{10}} \right) \right) + a^2\beta^2\sigma^4 \left(\frac{k^2}{4} + \epsilon \right) \right] G(\phi) = 0$$

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + \left(a^2\beta^2\sigma^4 \frac{a^2\beta^2\sigma'^4}{a^4\beta^4\sigma^8} + a^2\beta^2\sigma^4 \left(\frac{-\sigma''^2\sigma^4 + \sigma'^2\sigma'^4}{a^2\beta^2\sigma^{10}} \right) \right) + a^2\beta^2\sigma^4 \left(\frac{k^2}{4} + \epsilon \right) \right] G(\phi) = 0$$

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\frac{\sigma'^4}{\sigma^4} + \left(-\frac{\sigma''^2 \sigma^4 + \sigma'^6}{\sigma^6} \right) \right) + a^2 \beta^2 \sigma^4 \left(\frac{k^2}{4} + \epsilon \right) \right] G(\phi) = 0$$

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\frac{\sigma'^4}{\sigma^4} + \left(-\frac{\sigma''^2 \sigma^4 + \sigma'^6}{\sigma^6} \right) \right) + a^2 \beta^2 \sigma^4 \left(\frac{k^2}{4} + \epsilon \right) \right] G(\phi) = 0$$

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\frac{\sigma'^4}{\sigma^4} + \left(-\frac{\sigma''^2}{\sigma^2} + \frac{\sigma'^6}{\sigma^6} \right) \right) + a^2 \beta^2 \sigma^4 \left(\frac{k^2}{4} + \epsilon \right) \right] G(\phi) = 0$$

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + \left(-\frac{\sigma''^2}{\sigma^2} + \frac{\sigma'^4}{\sigma^4} + \frac{\sigma'^6}{\sigma^6} \right) + a^2 \beta^2 \sigma^4 \left(\frac{k^2}{4} + \epsilon \right) \right] G(\phi) = 0$$

dikalikan (-) tetapi untuk yang pangkatnya 2 hasilnya akan tetap, menjadi :

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + \left(+\frac{\sigma''}{\sigma} - \frac{\sigma'^2}{\sigma^2} - \frac{\sigma'^2}{\sigma^2} \right) + a^2 \beta^2 \sigma^4 \left(\frac{k^2}{4} + \epsilon \right) \right] G(\phi) = 0$$

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + \left(+\frac{\sigma''}{\sigma} - \frac{2\sigma'^2}{\sigma^2} \right) + a^2 \beta^2 \sigma^4 \left(\frac{k^2}{4} + \epsilon \right) \right] G(\phi) = 0$$

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\frac{\sigma''\sigma - 2\sigma'^2}{\sigma^2} \right) + (a\beta)^2 \sigma^4 \left(\frac{k^2}{4} + \epsilon \right) \right] G(\phi) = 0$$

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\frac{\sigma''\sigma - 2\sigma'^2}{\sigma^2} \right) + (a\beta)^2 \sigma^4 \frac{k^2}{4} + (a\beta)^2 \sigma^4 \epsilon \right] G(\phi) = 0 \quad (C.2)$$

Sehingga diperoleh persamaan gelombang seperti diatas, ekspresi untuk σ , dalam persamaan diatas, kita dapatkan :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma\sigma'' - 2\sigma'}{\sigma^2} \right) &= \frac{\frac{1}{\sqrt{b - \cos(\alpha\phi)}} \left(\frac{1}{\sqrt{b - \cos(\alpha\phi)}} \right)'' - 2 \left(\frac{1}{\sqrt{b - \cos(\alpha\phi)}} \right)'2}{\left(\frac{1}{\sqrt{b - \cos(\alpha\phi)}} \right)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{b - \cos(\alpha\phi)}} \left(\frac{d}{d\phi} \frac{d}{d\phi} \frac{1}{\sqrt{b - \cos(\alpha\phi)}} \right) - 2 \left(\frac{d}{d\phi} \frac{1}{\sqrt{b - \cos(\alpha\phi)}} \right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{b - \cos(\alpha\phi)}} \right)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{b - \cos(\alpha\phi)}} \left(\frac{d}{d\phi} \frac{-\alpha \sin(\alpha\phi)}{2(b - \cos(\alpha\phi))^{3/2}} \right) - 2 \left(\frac{-\alpha \sin(\alpha\phi)}{2(b - \cos(\alpha\phi))^{3/2}} \right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{b - \cos(\alpha\phi)}} \right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{b - \cos(\alpha\phi)}} \left(\frac{-\alpha^2 \cos(\alpha\phi) (b - \cos(\alpha\phi))^{\frac{3}{2}} + 3\alpha^2 \sin^2(\alpha\phi) (b - \cos(\alpha\phi))^{1/2}}{4(b - \cos(\alpha\phi))^3} \right) \\
&= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{b - \cos(\alpha\phi)}} \right)^2}{2 \left(\frac{\alpha^2 \sin^2(\alpha\phi)}{4(b - \cos(\alpha\phi))^3} \right)} \\
&= \frac{-\alpha^2 \cos(\alpha\phi) (b - \cos(\alpha\phi)) + 3\alpha^2 \sin^2(\alpha\phi)}{4(b - \cos(\alpha\phi))^3} - \frac{\alpha^2 \sin^2(\alpha\phi)}{2(b - \cos(\alpha\phi))^3} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{b - \cos(\alpha\phi)}} \right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{b - \cos(\alpha\phi)}} \right)^2} - \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{b - \cos(\alpha\phi)}} \right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{b - \cos(\alpha\phi)}} \right)^2} \\
&= \frac{-4\alpha^2 \cos(\alpha\phi) (b - \cos(\alpha\phi)) + 6\alpha^2 \sin^2(\alpha\phi)}{8(b - \cos(\alpha\phi))^3} - \frac{4\alpha^2 \sin^2(\alpha\phi)}{8(b - \cos(\alpha\phi))^3} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{b - \cos(\alpha\phi)}} \right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{b - \cos(\alpha\phi)}} \right)^2} - \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{b - \cos(\alpha\phi)}} \right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{b - \cos(\alpha\phi)}} \right)^2} \\
&= \left(\frac{-4\alpha^2 \cos(\alpha\phi) (b - \cos(\alpha\phi)) + 6\alpha^2 \sin^2(\alpha\phi) - 4\alpha^2 \sin^2(\alpha\phi)}{8(b - \cos(\alpha\phi))^3} \right) (b - \cos(\alpha\phi)) \\
&= \left(\frac{-4\alpha^2 \cos(\alpha\phi) (b - \cos(\alpha\phi)) + 2\alpha^2 \sin^2(\alpha\phi)}{8(b - \cos(\alpha\phi))^3} \right) (b - \cos(\alpha\phi)) \\
&= \frac{-4\alpha^2 \cos(\alpha\phi) (b - \cos(\alpha\phi)) + 2\alpha^2 \sin^2(\alpha\phi)}{8(b - \cos(\alpha\phi))^2} \\
&= \frac{-4b\alpha^2 \cos(\alpha\phi) + 4\alpha^2 \cos^2(\alpha\phi) + 2\alpha^2 \sin^2(\alpha\phi)}{8(b - \cos(\alpha\phi))^2} \\
&= \frac{-4b\alpha^2 \cos(\alpha\phi) + 2\alpha^2[1] + 2\alpha^2 \cos^2(\alpha\phi)}{8(b - \cos(\alpha\phi))^2} \\
&= \frac{\alpha^2[-4b \cos(\alpha\phi) + 2 + 2 \cos^2(\alpha\phi)]}{8(b - \cos(\alpha\phi))^2} \\
&= \frac{\alpha^2[-4b \cos(\alpha\phi) + 2 + 2(1 - \sin^2(\alpha\phi))]}{8(b - \cos(\alpha\phi))^2} \\
&= \frac{\alpha^2[-4b \cos(\alpha\phi) + 2 + 2 - 2 \sin^2(\alpha\phi)]}{8(b - \cos(\alpha\phi))^2}
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{\sigma\sigma'' - 2\sigma'}{\sigma^2}\right) = \frac{\alpha^2[-4b \cos(\alpha\phi) + 3 + (1 - 2 \sin^2(\alpha\phi))]}{8(b - \cos(\alpha\phi))^2} \quad (\text{C.3})$$

selanjutnya akan dilakukan perhitungan $\left(\frac{\sigma\sigma'' - 2\sigma'}{\sigma^2}\right)$ dijumlahkan dengan $(a\beta)^2\sigma^4\frac{k^2}{4}$

yakni :

$$\left(\frac{\sigma\sigma'' - 2\sigma'}{\sigma^2}\right) + \alpha^2\beta^2\sigma^4\frac{k^2}{4} = \frac{b^2 + \alpha^4 - 1}{4(b^2 + \alpha^2 - 1)} \quad (\text{C.4})$$

sehingga :

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\frac{\sigma''\sigma - 2\sigma'^2}{\sigma^2}\right) + (a\beta)^2\sigma^4\frac{k^2}{4} + (a\beta)^2\sigma^4\epsilon\right] G(\phi) = 0 \quad (\text{C.5})$$

Lampiran D Persamaan Mathieu

Persamaan Mathieu dengan koordinat Elips :

$$\begin{aligned} x &= c \cosh \xi \cos \eta, & y &= c \sinh \xi \sin \eta, & z &= z \\ 0 \leq \xi < \infty, & & 0 \leq \eta < 2\pi \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

a). Untuk x

$$\begin{aligned} x &= c \cosh \xi \cos \eta \\ x^2 &= c^2 \cosh^2 \xi \cos^2 \eta \\ \cos^2 \eta &= \frac{x^2}{c^2 \cosh^2 \xi} \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

b). Untuk y

$$\begin{aligned} y &= c \sinh \xi \sin \eta \\ y^2 &= c^2 \sinh^2 \xi \sin^2 \eta \\ \sin^2 \eta &= \frac{y^2}{c^2 \sinh^2 \xi} \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

karena pada trigonometri $\sin^2 x + \cos^2 y = 1$, maka x dan y persamaan diatas menjadi:

$$\begin{aligned} \cos^2 \eta + \sin^2 \eta &= 1 \\ \frac{x^2}{c^2 \cosh^2 \xi} + \frac{y^2}{c^2 \sinh^2 \xi} &= 1 \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

untuk setiap nilai ξ , persamaan (D.2) menjelaskan elips dengan fokus $(\pm c, 0)$ dan dengan sumbu setengah besar dan kecil masing-masing :

$$a = c \cosh \xi, \quad b = c \sinh \xi$$

parameter c didefinisikan setengah jarak antara titik fokus elips. Sekarang melihat rasio b/a dari sumbu elips :

$$\begin{aligned}\frac{b}{a} &= \frac{c \sinh \xi}{c \cosh \xi} \\ &= \tanh \xi\end{aligned}$$

dalam trigonometri dinyatakan :

$$\operatorname{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x$$

$$\tanh^2 x = 1 - \operatorname{sech}^2 x$$

$$\tanh x = \sqrt{1 - \operatorname{sech}^2 x}$$

$$\tanh x = \sqrt{1 - 1/\cosh^2 x}$$

pada persamaan diatas menjadi :

$$\begin{aligned}\frac{b}{a} &= \sqrt{1 - 1/\cosh^2 \xi} \\ &\equiv \sqrt{1 - e^2}\end{aligned}\tag{D.5}$$

di mana $e = 1/\cosh \xi$ berjarak $0 \leq e \leq 1$ disebut sebagai eksensrisitas elips.

Pembatas dari koordinat elips sebagai $c \rightarrow 0$ adalah bukan nol (x, y) sesuai dengan ξ , garis konstanta ξ menjadi lingkaran dalam batas $e = 0$. Membuat pembatas eksplisit dapat mengganti $c \cosh \xi \approx c \sinh \xi$ oleh ρ . Bergerak disebelah garis konstanta η kembali kepersamaan (1) menghilangkan ξ dari persamaan x dan y , diperoleh :

a). untuk x

$$x = c \cosh \xi \cos \eta$$

$$\cosh \xi = \frac{x}{c \cos \eta}$$

$$\cosh^2 \xi = \frac{x^2}{c \cos^2 \eta}$$

b). untuk y

$$y = c \sinh \xi \sin \eta$$

$$\sinh \xi = \frac{y}{c \sin \eta}$$

$$\sinh^2 \xi = \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \eta}$$

dalam trigonometri :

$$\sinh^2 \xi + \cosh^2 \xi = 1$$

menjadi :

$$\frac{x^2}{c^2 \cos^2 \eta} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \eta} = 1 \quad (\text{D.6})$$

turunan persamaan untuk konstanta ξ elips, dari persamaan (D.6) didapatkan :

$$\frac{x^2}{c^2 \cosh^2 \xi} - \frac{y^2}{c^2 \sinh^2 \xi} = 1$$

$$\frac{x^2}{c^2 \cosh^2 \xi} = 1 - \frac{y^2}{c^2 \sinh^2 \xi}$$

$$\frac{x^2}{c^2 \cosh^2 \xi} = \frac{du}{dx} \frac{du}{dy} \frac{dx}{du} \frac{dy}{du} \left(1 - \frac{y^2}{c^2 \sinh^2 \xi} \right)$$

$$\frac{du}{dx} \frac{x^2}{c^2 \cosh^2 \xi} = \frac{du}{dx} \frac{dy}{du} \frac{du}{dy} \left(1 - \frac{y^2}{c^2 \sinh^2 \xi} \right)$$

$$\frac{2x}{c^2 \cosh^2 \xi} = \frac{du}{dx} \frac{dy}{du} \left(0 - \frac{2y}{c^2 \sinh^2 \xi} \right)$$

$$\frac{2x}{c^2 \cosh^2 \xi} = \frac{dy}{dx} \left(-\frac{2y}{c^2 \sinh^2 \xi} \right)$$

$$\frac{2x}{c^2 \cosh^2 \xi} dx = dy \left(-\frac{2y}{c^2 \sinh^2 \xi} \right)$$

$$\frac{2x dx}{c^2 \cosh^2 \xi} = -\frac{2y dy}{c^2 \sinh^2 \xi}$$

$$\frac{x dx}{\cosh^2 \xi} + \frac{y dy}{\sinh^2 \xi} = 0$$

(D.7)

bisa dikatakan setara dengan :

$$\frac{x dx}{\cosh^2 \xi} = -\frac{y dy}{\sinh^2 \xi}$$

$$x dx = -\frac{y dy (\cosh^2 \xi)}{\sinh^2 \xi}$$

$$\frac{x dx}{dy} = -\frac{y \cosh^2 \xi}{\sinh^2 \xi}$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y \cosh^2 \xi}{x \sinh^2 \xi}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x \sinh^2 \xi}{y \cosh^2 \xi}$$

bisa ditulis :

$$(dx, dy) = (-y \cosh^2 \xi, x \sinh^2 \xi) \quad (\text{D.8})$$

Rumus diatas adalah vektor yang bersinggungan dengan elips pada titik (x, y) . Persamaan differensial untuk konstanta η bisa didapatkan dengan cara yang sama pada konstanta ξ , dari persamaan (D.6) yaitu :

$$\frac{x^2}{c^2 \cos^2 \eta} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \eta} = 1$$

$$\frac{x^2}{c^2 \cos^2 \eta} = 1 + \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \eta}$$

$$\frac{x^2}{c^2 \cos^2 \eta} = \frac{du}{dx} \frac{du}{dy} \frac{dx}{du} \frac{dy}{du} \left(1 + \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \eta} \right)$$

$$\frac{du}{dx} \frac{x^2}{c^2 \cos^2 \eta} = \frac{du}{dx} \frac{dy}{du} \frac{du}{dy} \left(1 + \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \eta} \right)$$

$$\frac{2x}{c^2 \cos^2 \eta} = \frac{du}{dx} \frac{dy}{du} \left(0 + \frac{2y}{c^2 \sin^2 \eta} \right)$$

$$\frac{2x}{c^2 \cos^2 \eta} = \frac{dy}{dx} \left(\frac{2y}{c^2 \sin^2 \eta} \right)$$

$$\frac{2x dx}{c^2 \cos^2 \eta} = \frac{2y dy}{c^2 \sin^2 \eta}$$

$$\frac{x dx}{\cos^2 \eta} = \frac{y dy}{\sin^2 \eta}$$

$$\frac{x dx}{\cos^2 \eta} - \frac{y dy}{\sin^2 \eta} = 0 \quad (\text{D.10})$$

bisa dikatakan setara dengan :

$$\frac{x dx}{\cos^2 \eta} = \frac{y dy}{\sin^2 \eta}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y \cos^2 \eta}{x \sin^2 \eta}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x \sin^2 \eta}{y \cos^2 \eta}$$

bisa ditulis :

$$(dx, dy) = (y \cos^2 \eta, x \sin^2 \eta) \quad (\text{D.9})$$

Sekarang mengambil produk skalar dari vektor-vektor ini pada titik mana pun x, y . Persamaan (D.8) dan (D.10) jika digabungkan menjadi :

$$-y^2 \cosh^2 \xi \cos^2 \eta + x^2 \sinh^2 \xi \sin^2 \eta$$

kembali pada persamaan (1) :

$$x^2 = c^2 \cosh^2 \xi \cos^2 \eta$$

$$\frac{x^2}{c^2} = \cosh^2 \xi \cos^2 \eta$$

$$y^2 = c^2 \sinh^2 \xi \sin^2 \eta$$

$$\frac{y^2}{c^2} = \sinh^2 \xi \sin^2 \eta$$

persamaan (2.17) menjadi :

$$-\frac{y^2 x^2}{c^2} + \frac{x^2 y^2}{c^2} = 0 \quad (\text{D.10})$$

hasil nol menunjukkan elips dan hiperbola confocal mempunyai garis singgung yang orthogonal pada titik perpotongannya, sehingga disini mempunyai koordinat orthogonal.

Untuk mengestrak faktor skala h_ξ, h_η dari turunan koordinat elips, diperoleh :

a). pada x :

$$x = c \cosh \xi \cos \eta$$

$$dx = d(c \cosh \xi \cos \eta)$$

turunan $uv = u'v + uv'$, dimana $u = \cosh \xi$; $v = \cos \eta$, maka :

$$dx = c d(\cosh \xi) \frac{d\xi}{d\xi} \cos \eta + c \cosh \xi d(\cos \eta) \frac{d\eta}{d\eta}$$

$$dx = c \frac{d}{d\xi} (\cosh \xi) d\xi \cos \eta + c \cosh \xi \frac{d}{d\eta} (\cos \eta) d\eta$$

$$dx = c \sinh \xi \cos \eta d\xi + c \cosh \xi (-\sin \eta) d\eta$$

$$dx = c \sinh \xi \cos \eta d\xi - c \cosh \xi \sin \eta d\eta$$

$$dx^2 = c^2 \sinh^2 \xi \cos^2 \eta d\xi^2 - c^2 \cosh^2 \xi \sin^2 \eta d\eta^2$$

b). Pada y :

$$y = c \sinh \xi \sin \eta$$

$$dy = d(c \sinh \xi \sin \eta)$$

turunan $uv = u'v + uv'$, dimana $u = \sinh \xi$; $v = \sin \eta$, maka :

$$dy = c d(\sinh \xi) \frac{d\xi}{d\xi} \sin \eta + c \sinh \xi d(\sin \eta) \frac{d\eta}{d\eta}$$

$$dy = c \frac{d}{d\xi} (\sinh \xi) d\xi \sin \eta + c \sinh \xi \frac{d}{d\eta} (\sin \eta) d\eta$$

$$dy = c \cosh \xi \sin \eta d\xi + c \sinh \xi \cos \eta d\eta$$

$$dy^2 = c^2 \cosh^2 \xi \sin^2 \eta d\xi^2 + c^2 \sinh^2 \xi \cos^2 \eta d\eta^2$$

menjumlahkan dx dan dy , memperoleh :

$$\begin{aligned}
dx^2 + dy^2 &= c^2 \sinh^2 \xi \cos^2 \eta d\xi^2 - c^2 \cosh^2 \xi \sin^2 \eta d\eta^2 + c^2 \cosh^2 \xi \sin^2 \eta d\xi^2 \\
&\quad + c^2 \sinh^2 \xi \cos^2 \eta d\eta^2 \\
&= c^2 (\sinh^2 \xi \cos^2 \eta + \cosh^2 \xi \sin^2 \eta) (d\xi^2 + d\eta^2) \\
&= c^2 (\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta) (d\xi^2 + d\eta^2) \\
&\equiv h_\xi^2 d\xi^2 + h_\eta^2 d\eta^2
\end{aligned}$$

menghasilkan :

$$h_\xi = h_\eta = c (\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta)^{\frac{1}{2}}$$

tidak ada persilangan melibatkan $d\xi, d\eta$ yang berhubungan dengan koordinat orthogonal.

Menganti q_1, q_2, q_3 dengan ξ, η, z , mempunyai $h_1 = h_2 = c (\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta)^{\frac{1}{2}}$ dan $h_3 = 1$, h_3 bernilai 1 karena perlu melihat $h_3 = h_1/h_2$, h_1 dan h_2 bergantung pada q_3 , sehingga menemukan Laplacian dalam koordinat lengkung menjadi :

$$\nabla^2 = \frac{1}{c^2 (\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta)} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{D.11})$$

Bagian kepala drum berbentuk elips sumbu $z = z(x, y, t)$ mempunyai osilasi persamaan gelombang :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

dengan kecepatan $v^2 = T/d$, dimana bagian kepala drum dibawah tegangan T dan d massa persatuan luas. Dilakukan pemisalahan variabel ketergantungan waktu harmonik :

$$z(x, y, t) = u(x, t)w(t)$$

dimana $w(t) = \cos(\omega t + \delta)$, dengan ω adalah frekuensi dan δ adalah fase konstan. Substitusi bentuk fungsional dari $z(x, y, t)$ dalam persamaan differensial yang sudah disebutkan diatas, didapatkan :

$$\frac{u}{u} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\frac{1}{u} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{v^2 w} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\frac{1}{u} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{v^2 \cos(\omega t + \delta)} \frac{\partial^2 \cos(\omega t + \delta)}{\partial t^2}$$

$$\frac{1}{u} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{v^2 \cos(\omega t + \delta)} \frac{\partial -\sin(\omega t + \delta)\omega}{\partial t}$$

$$\frac{1}{u} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{v^2 \cos(\omega t + \delta)} (-\cos(\omega t + \delta)\omega^2)$$

$$\frac{1}{u} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{-\omega^2}{v^2}$$

misal ω^2/v^2 adalah k^2 , maka :

$$\frac{1}{u} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = -k^2$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = -k^2 \Rightarrow u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0 \quad (\text{D.12})$$

Persamaan (D.12) merupakan persamaan Helmholtz dua dimensi untuk perpindahan u. Elips mempunyai bentuk seperti kepala drum sehingga nilai batas sama dengan koordinat elips $\xi = \xi_0$. Perpindahan vertikan memiliki nilai 0, oleh karena itu digunakan persamaan (D.12) untuk mengubah Laplacian ∇^2 menjadi koordinat elips :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

menganti dimensi $\partial^2 u / \partial z^2 = k^2 u$, menjadi :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = \frac{1}{c^2(\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta)} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) + k^2 u$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + k^2 c^2 (\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta) u = 0$$

dipisahkan variabel ξ dan η dalam persamaan Helmholtz, ditulis $u(\xi, \eta) =$

$R(\xi)\Phi(\eta)$, diperoleh :

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{d\xi^2} + c^2 k^2 \cosh^2 \xi = \lambda + \frac{1}{2} c^2 k^2$$

$$c^2 k^2 \cos^2 \eta - \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\eta^2} = \lambda + \frac{1}{2} c^2 k^2$$

$\lambda + \frac{1}{2} c^2 k^2$ dipilih sebagai pemisah konstanta yang memindahkan suku kedua

persamaan ini, didapatkan :

$$c^2 k^2 \left(\cosh^2 \xi - \frac{1}{2} \right) \text{ dan } c^2 k^2 \left(\cos^2 \eta - \frac{1}{2} \right)$$

$$\frac{1}{2} \cosh 2\xi \text{ dan } \frac{1}{2} \cos 2\eta$$

didefinisikan kuantitas q , menjadi :

$$q = \frac{1}{4} c^2 k^2 = \frac{c^2 \omega^2}{4v^2}$$

dimana $k^2 = \omega^2 / v^2$, dalam hal ini persamaan Φ menggunakan :

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\eta^2} + (\lambda - 2q \cos 2\eta) \Phi = 0$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\eta^2} + (\lambda - 2q \cos 2\eta) \Phi = 0$$

Atau bisa ditulis dengan lambang $\gamma = \alpha, \eta = z$ dan $\Phi = y$, sehingga :

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + (\alpha - 2q \cos 2z) y = 0$$

(D.13)

Lampiran E Persamaan Hill-Whittaker

Tiga kasus penurunan persamaan Hill-Whittaker yang menarik, yaitu :

(i). Misalkan $\omega \rightarrow 0, \rho \rightarrow \infty$ dan $\omega\rho \rightarrow -2q$, q terbatas, persamaan Ince direduksi menjadi persamaan Mathieu :

$$\frac{d^2\Phi}{d\eta^2} + (\lambda - 2q \cos 2\eta)\Phi(\eta) = 0 \quad (\text{E.1})$$

(ii). Misalkan $\rho \rightarrow 0$ dalam persamaan (E.1):

$$\frac{d^2\Phi}{d\theta^2} + \left(\eta + \frac{1}{8}\omega^2 - \frac{1}{8}\omega^2 \cos 4\theta \right) \Phi = 0 \quad (\text{E.2})$$

dalam persamaan (E.2) diambil $2\theta = s, \omega^2 = 64q \rightarrow q = \frac{\omega^2}{64}, a = \frac{1}{4}\eta + 2q$, menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \frac{d^2\Phi}{d\theta^2} + \frac{1}{4} \left(\eta + \frac{1}{8}\omega^2 - \frac{1}{8}\omega^2 \cos 4\theta \right) \Phi &= 0 \\ \frac{d^2\Phi}{d2\theta2\theta} + \left(\frac{1}{4}\eta + \frac{2}{2} \frac{1}{32}\omega^2 - \frac{2}{2} \frac{1}{32}\omega^2 \cos 22\theta \right) \Phi &= 0 \\ \frac{d^2\Phi}{ds^2} + \left(\frac{1}{4}\eta + 2q - 2q \cos 2s \right) \Phi &= 0 \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

degenerasi ini menghasilkan fungsi Mathieu dari orde pecahan atau integral, konstanta λ menjadikan :

$$\Phi_2(\theta, \omega, \rho) = \lambda \Phi_1(\theta, \omega, \rho)$$

$\rho \rightarrow 0$ ketika memiliki priode π , tetapi bukan nol ketika anti priode π . Deret geometri Φ_1 dan Φ_2 m memiliki priode π dan yang lain memiliki anti priode π , sehingga salah satu harus identik nol :

$$a = \frac{1}{4}\eta + \frac{\omega^2}{32}$$

karena $\omega \rightarrow 0$ menunjukkan $\Phi_2(s)$ identik dengan nol, Contoh yang dimiliki :

a). Untuk $gc_0(\theta, \omega, \rho)$, benar untuk $O(\omega^4)$:

$$\lambda = \rho\omega^2 \left[-\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^{13}}(7\rho^2 + 3)\omega^2 \right]$$

b). Untuk $gc_1(\theta, \omega, \rho)$, benar untuk $O(\omega^3)$

$$\lambda = \frac{1}{4}\omega \left[1 - \frac{1}{2^4}\rho\omega + \frac{1}{2^8}\rho^2\omega^2 \right]$$

c). Untuk $gc_2(\theta, \omega, \rho)$, benar untuk $O(\omega^2)$

$$\lambda = \frac{5\rho\omega^2}{3 \cdot 2^6}$$

(iii). Sistem koordinat paraboloidal umum a, β, γ bisa direduksi menjadi sistem rotasi paraboloid, diletakkan :

$$u^2 = \frac{1}{2}ce^{2x}, \quad v^2 = \frac{1}{2}ce^{2y}$$

dimisalkan $c \rightarrow 0, a \rightarrow \infty, \gamma \rightarrow \infty$, sehingga u^2v^2 tetap terbatas, kemudian :

$$x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2), \quad y = uv \cos \beta, \quad z = uv \sin \beta$$

untuk $k^2 > 0$, sama dengan membiarkan $\omega \rightarrow 0$ dan $\theta \rightarrow i\infty$, sehingga $u^2 = \frac{e^{-2i\theta}}{4k}$

tetap konstan, kemudian $\eta \rightarrow m^2$, m merupakan bilangan bulat tidak negatif dan persamaan Hill-Whittaker menjadi :

$$\frac{d^2\Phi}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{d\Phi}{du} + [k^2u^2 - m^2u^2 - 2k\rho]\Phi = 0$$

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \theta_0 + 2\theta_1 \cos 2z + 2\theta_2 \cos 4z \right] \Phi = 0 \quad (\text{E.3})$$

Ini merupakan persamaan Hill-Whittaker yang pernah juga diperoleh oleh Erdélyi 1953 persamaan yang dipenuhi fungsi revolusi paraboloid.

Lampiran F Fungsi Gelombang Partikel pada Pendekatan Mathieu

Agar lebih memahami (C.5) memperluas suku ketiga dalam persamaan, sebagai deret binomial, Dalam matematika, deret binomial adalah deret Taylor untuk fungsi f yang diberikan oleh $f(x) = (1+x)^\alpha$, dimana $\alpha \in \mathbb{C}$ bilangan kompleks arbitrer dan $|x| < 1$ secara eksplisit :

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} + \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-1)}{3!} + \dots \quad (\text{F.1})$$

Deret binomial merupakan deret pangkat di ruas kanan yang dinyatakan dalam koefisien binomial (digeneralisasikan). Kasus special, jika α adalah bilangan bulat negatif n , maka suku ke $(n-2)$ jadi dalam hal ini deret tersebut berhingga dan memberikan rumus aljabar binomial. Varian berikut berlaku untuk kompleks arbitrer , tetapi khususnya berguna untuk menangani eksponen bilangan bulat negative pada :

$$\frac{1}{(1-z)^\beta} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\beta}{k} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+\beta-1}{k} z^k$$

dalam hal koefisien multiset atau koefisien binomial. Untuk membuktikan substitusikan $z = x$ pada persamaan (F.1) dan gunakan identitas koefisien binominal:

$$\binom{-\beta}{k} = (-1)^k \binom{k+\beta-1}{k}$$

mengambil bagian $(a\beta)^2 \sigma^4 \epsilon$ pada persamaan (C.5) dijadikan :

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha^2 \beta^2 \epsilon}{(b - \cos(\alpha\phi))^2} \\ &= \frac{\alpha^2 \beta^2 \epsilon}{b^2 \left(1 - \frac{\cos(\alpha\phi)}{b}\right)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{\alpha^2 \beta^2 \epsilon}{b^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{\cos(\alpha\phi)}{b}\right)^2} \quad (\text{F.2})$$

persamaan diatas disubstitusikan kepersamaan (2), dengan diperluas keteret binomial menjadi :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2 \beta^2 \epsilon}{b^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{\cos(\alpha\phi)}{b}\right)^2} &= \frac{\alpha^2 \beta^2 \epsilon}{b^2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2-1}{k} \left(\frac{-\cos(\alpha\phi)}{b}\right)^k \\ &= \frac{\alpha^2 \beta^2 \epsilon}{b^2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+1}{k} \left(\frac{-\cos(\alpha\phi)}{b}\right)^k \\ &= \frac{\alpha^2 \beta^2 \epsilon}{b^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{k+1}{k} \left(\frac{\cos(\alpha\phi)}{b}\right)^k \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa, ekspansi ini bermakna, karena $b = \cosh(\eta_0) > 1 \geq \cos(\alpha\phi)$, $\forall \eta_0 \in (0, \infty)$. Untuk pendekatan torus tipis, kami menganggap b besar, yang suku ordenya lebih tinggi. Untuk torus tipis kita dapat mengasumsikan $b^2 \approx c^2$ dan mengabaikan persyaratan dalam (29) memiliki orde keseluruhan $\mathcal{O}\left(\frac{1}{b^2}\right)$, dan diatasnya, pada $\frac{1}{b}$ dengan pendekatan serta mengganti $2z = (\alpha\phi)$ diperoleh :

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\Gamma + \frac{\alpha^2 \beta^2 \epsilon}{b^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{k+1}{k} \left(\frac{\cos(2z)}{b}\right)^k \right) \right] G(\phi) = 0 \quad (\text{F.3})$$

dalam persamaan binomial series $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, mengubah $\binom{k+1}{k}$ pada persamaan (F.3) sebagai $\binom{n}{k}$, jadi $n = (k+1)$ dan $k = k_1$, diperoleh :

$$\begin{aligned} \binom{k+1}{k} &= \frac{(k+1)!}{k!((k+1)-k)!} \\ &= \frac{(k+1)k!}{k!} \\ &= (k+1) \end{aligned}$$

sehingga persamaan (F.3) menjadi :

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\Gamma + \frac{\alpha^2 \beta^2 \epsilon}{b^2} \sum_{k=0}^2 (-1)^k (k+1) \left(\frac{\cos(2z)}{b} \right)^k \right) \right] G(\phi) = 0$$

Saat $k = 0$ dan $k = 1$, didapatkan :

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\Gamma + \frac{\alpha^2 \beta^2 \epsilon}{b^2} \left(1 - 2 \left(\frac{\cos(2z)}{b} \right) \right) \right) \right] G(\phi) &= 0 \\ \left[\frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\Gamma + \frac{\alpha^2 \beta^2 \epsilon}{b^2} - \frac{2\alpha^2 \beta^2 \epsilon}{b^2} \left(\frac{\cos(2z)}{b} \right) \right) \right] G(\phi) &= 0 \\ \left[\frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\frac{4\Gamma}{\alpha^2} + \frac{4\alpha^2 \beta^2 \epsilon}{\alpha^2 b^2} \right) - \frac{2\alpha^2 \beta^2 \epsilon}{b^3} \cos(2z) \right] G(\phi) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

Ini adalah persamaan differensial Mathieu diperoleh untuk batas torus tipis, Dipertimbangkan hanya sampai urutan keseluruhan $\mathcal{O}\left(\frac{1}{b}\right)$, kondisi untuk fungsi priodik gelombang menyiratkan bahwa :

$$\theta_0 = v^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{b^2}\right) = \frac{4n^2}{q^2}$$

disini dari persamaan Mathieu juga memiliki :

$$\theta_0 = \left(\frac{4\Gamma}{\alpha^2} + \frac{4\alpha^2 \beta^2 \epsilon}{\alpha^2 b^2} \right) \quad (\text{F.5})$$

menyelesaikan energi E_n dari persamaan (F.5), diperoleh :

$$\frac{4n^2}{q^2} = \frac{4\Gamma}{\alpha^2} + \frac{4\alpha^2 \beta^2 \epsilon}{\alpha^2 b^2}$$

ϵ disini pada persamaan (F.5) adalah $\epsilon = 2mE/\hbar^2$, sehingga didapatkan Energi :

$$\begin{aligned} \frac{4n^2}{q^2} &= \frac{4\Gamma}{\alpha^2} + \frac{4\alpha^2 \beta^2 2mE}{\alpha^2 b^2 \hbar^2} \\ \frac{8\alpha^2 \beta^2 mE}{\alpha^2 b^2 \hbar^2} &= \frac{4n^2}{q^2} - \frac{4\Gamma}{\alpha^2} \end{aligned}$$

$$E_n = \frac{4n^2\alpha^2 b^2 \hbar^2}{8\alpha^2\beta^2 q^2 m} - \frac{4\Gamma\alpha^2 b^2 \hbar^2}{8\alpha^2\beta^2 \alpha^2 m}$$

$$E_n = \left(\frac{n^2\alpha^2 b^2}{\alpha^2\beta^2 q^2} - \frac{\Gamma b^2}{\alpha^2\beta^2} \right) \frac{\hbar^2}{2m}$$

$$E_n = \frac{n^2\alpha^2 b^2 \hbar^2}{\alpha^2\beta^2 q^2 2m} - \frac{\Gamma b^2 \hbar^2}{\alpha^2\beta^2 2m}$$

Suku kedua diatas dapat diabaikan, karena itu hanya konstanta dan dapat mengeser referensi nol untuk mengukur sistem energi untuk mendapatkan nilai secara eksplisit, sehingga didapatkan :

$$E_n = \frac{n^2\alpha^2 b^2 \hbar^2}{2\alpha^2\beta^2 q^2 m}$$

menganggap $p^2 = q^2/\alpha^2$, $\beta^2 = (\lambda^2 - 1) = (\alpha^2 + c^2 - 1)$, $b^2 = \cosh^2(\eta_0)$ dan $c^2 = \sinh^2(\eta_0)$ maka energy menjadi :

$$E_n = \frac{n^2 b^2 \hbar^2}{2m\alpha^2 p^2 (\alpha^2 + c^2 - 1)} = \frac{n^2 \hbar^2 \cosh^2(\eta_0)}{2m\alpha^2 p^2 (\alpha^2 + \sinh^2(\eta_0) - 1)}$$

Ini adalah energi dari partikel pada torus tipis dengan pendekatan Mathieu, penting untuk dicatat hasil diatas berbeda dari energy nilai-eigen yang diperoleh di penelitian. Dengan cara non-trivial mari menyatakan hasil sebagai :

$$E_n = E_{0,n} F(\eta, \alpha)$$

di mana :

$$E_{0,n} = \frac{n^2 \hbar^2}{2m\alpha^2 p^2}, F(\eta, \alpha) = \frac{\cosh^2(\eta_0)}{(\alpha^2 + \sinh^2(\eta_0) - 1)}$$

Disini $E_{0,n}$ mengacu pada nilai eigen energi yang diperoleh pada $F(\eta, \alpha)$ adalah faktor koreksi yang diungkapkan dalam masalah ini. Dalam penyebut $F(\eta, \alpha)$, $(\alpha^2 + \sinh^2(\eta_0) - 1) \approx \alpha^2$, nilai energi menjadi :

$$E_n = \frac{n^2 \hbar^2 \alpha^2 \cosh^2(\eta_0)}{2m\alpha^2 q^2 \alpha^2}$$

$$E_n = \frac{n^2 \hbar^2 \cosh^2(\eta_0)}{2m\alpha^2 q^2} \quad (\text{F.6})$$

solusi umum untuk (31), diberikan oleh fungsi Mathieu dari orde pecahan ν [51] yang menghasilkan :

$$G = Ase_\nu(z, b) + Bce_\nu(z, b) \quad (\text{F.7})$$

dimana, A dan B dapat ditentukan dari kondisi normalisasi. Untuk mengilustrasikan satu metode harus menemukan solusi periodik dari persamaan Mathieu diambil kasus dimana $a = m^2 = 1$:

$$a = 1 + \alpha_1 q + \alpha_2 q^2 + \alpha_3 q^3 + \dots + \dots \quad (\text{F.8})$$

karena solusinya untuk mengurangi, katakanlah $\cos z$ ketika q maka diasumsikan :

$$y = \cos z + qc_1 + q^2 c_2 + q^3 c_3 + \dots \quad (\text{F.9})$$

c_1, c_2, \dots menjadi fungsi dr z yang akan ditentukan, substitusikan (F.8) ke (F.9) gunakan nilai a diatas diperoleh :

$$y' = -\sin z + qc'_1 + q^2 c'_2 + q^3 c'_3 + \dots$$

$$y'' = -\cos z + qc''_1 + q^2 c''_2 + q^3 c''_3 + \dots$$

$$\begin{aligned} ay &= \cos z + \alpha_1 q \cos z + \alpha_2 q^2 \cos z + \alpha_3 q^3 \cos z + qc_1 + \alpha q^2 c_1 + \alpha_2 q^3 c_1 \\ &+ \alpha_3 q^4 c_1 + q^2 c_2 + q^3 c_2 \alpha_1 + q^4 c_2 \alpha_2 + q^5 c_2 \alpha_3 + q^3 c_3 + q^4 c_3 \alpha_1 \\ &+ q^5 c_3 \alpha_2 + q^6 c_3 \alpha_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \cos z + q(c_1 + \alpha_1 \cos z) + q^2(c_2 + \alpha_1 c_1 + \alpha_2 \cos z) \\ &+ q^3(c_3 + c_1 \alpha_2 + \alpha_1 c_1 + \alpha_3 \cos z) + \dots \end{aligned} \quad (\text{F.10})$$

$$-(2q \cos 2z)y$$

$$= -2q \cos 2z \cos z - 2q \cos 2z qc_1 - 2q \cos 2z q^2 c_2$$

$$- 2q \cos 2z q^3 c_3$$

$$= -q(\cos z + \cos 3z) - 2q^2 c_1 \cos 2z - 2q^3 c_3 \cos 2z + \dots \quad (\text{F.11})$$

Dari persamaan $y'' + ay - (2q \cos 2z)$ Menyamakan koefisien pangkat serupa dari q ke nol, memberikan :

$$\text{Pada } q^0 \Rightarrow \cos z - \cos z = 0$$

$$\text{Pada } q^1 \Rightarrow c_1'' + c_1 - \cos 3z + (\alpha_1 - 1) \cos z = 0$$

Integral tertentu yang sesuai dengan $(\alpha_1 - 1) \cos z$ adalah fungsi periodik $\frac{1}{2}(1 - \alpha_1) \sin z$, karena ini bersifat periodic maka beberapa suku-suku harus hilang, karena ini bersifat periodic maka beberapa suku-suku harus hilang, saat $\alpha_1 = 1$ persamaan akan menjadi :

$$c_1'' + c_1 - \cos 3z + (1 - 1) \cos z = 0$$

$$c_1'' + c_1 - \cos 3z = 0$$

$$c_1'' + c_1 = \cos 3z$$

Pada suatu keadaan $v'' + v' = A \cos mz$ adalah $A \cos mz / (m^2 - 1)$ yang mana ($m^2 \neq 1$), jadi dengan $v'' = 0, A = 1$ dan $m=3$, diperoleh :

$$c_1 = \frac{-A \cos mz}{m^2 - 1}$$

$$c_1 = \frac{-\cos mz}{3^2 - 1}$$

$$c_1 = \frac{-\cos mz}{8}$$

$$c_1 = \frac{-1}{8} \cos mz$$

Dan seterusnya $c_2, c_3 \dots$ menggantikan f untuk $c_2, c_3 \dots$ dipersamaan memeberikan solusi dari persamaan amthieu, periodic dalam z dengan 2π dilambangkan dengan $Ce_1(z, q)$ didapatkan :

$$C e_1(z, q) = \cos z - \frac{1}{8} q \cos 3z + \dots \quad (\text{F.12})$$

solusi periodic lain adalah sesuai dengan koefisien jika $m=1$, solusi kedua direduksi menjadi $\sin z$ ketika $q = 0$ asumsikan solusi

$$y = \sin z + q s_1(z) + q^2 s_2(z) + \dots$$

s_1, s_2, \dots menjadi fungsi dr z yang akan ditentukan, substitusikan (F.8) ke (F.9)

gunaakan nilai a diatas diperoleh :

$$y' = \cos z + q s_1' + q^2 s_2' + q^3 s_3' + \dots$$

$$y'' = -\sin z + q s_1'' + q^2 s_2'' + q^3 s_3'' + \dots$$

$$\begin{aligned} a y &= \sin z + \alpha_1 q \sin z + \alpha_2 q^2 \sin z + \alpha_3 q^3 \sin z + q s_1 + \alpha q^2 s_1 + \alpha_2 q^3 s_1 \\ &+ \alpha_3 q^4 s_1 + q^2 s_2 + q^3 s_2 \alpha_1 + q^4 s_2 \alpha_2 + q^5 s_2 \alpha_3 + q^3 s_3 + q^4 s_3 \alpha_1 \\ &+ q^5 s_3 \alpha_2 + q^6 s_3 \alpha_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sin z + q(s_1 + \alpha_1 \sin z) + q^2(s_2 + \alpha_1 s_1 + \alpha_2 \sin z) \\ &+ q^3(s_3 + s_1 \alpha_2 + \alpha_1 s_1 + \alpha_3 \sin z) + \dots \end{aligned} \quad (\text{F.13})$$

$$-(2q \sin 2z) y$$

$$= -2q \sin 2 \cos z - 2 \sin 2z q c_1 - 2q \sin 2z q^2 c_2$$

$$- 2q \sin 2z q^3 c_3$$

$$= -q(\sin z + \sin 3z) - 2q^2 c_1 \sin 2z - 2q^3 c_3 \sin 2z + \dots \quad (\text{F.14})$$

Dari persamaan $y'' + ay - (2q \sin 2z)$ Menyamakan koefisien pangkat serupa dari q ke nol, memberikan :

$$\text{Pada } q^0 \Rightarrow \sin z - \sin z = 0$$

$$\text{Pada } q^1 \Rightarrow s_1'' + s_1 - \sin 3z + (\alpha_1 - 1) \sin z = 0$$

Integral tertentu yang sesuai dengan $(\alpha_1 - 1) \sin z$ adalah fungsi periodik $\frac{1}{2}(1 - \alpha_1) \sin z$, karena ini bersifat periodic maka beberapa suku-suku harus hilang, saat $\alpha_1 = 1$ persamaan akan menjadi :

$$s_1'' + s_1 - \sin 3z + (1 - 1) \sin z = 0$$

$$s_1'' + s_1 - \sin 3z = 0$$

$$s_1'' + s_1 = \sin 3z$$

pada suatu keadaan $v'' + v' = A \sin mz$ adalah $A \sin mz / (m^2 - 1)$ yang mana ($m^2 \neq 1$), jadi dengan $v'' = 0, A = 1$ dan $m=3$, diperoleh :

$$s_1 = \frac{-A \sin mz}{m^2 - 1}$$

$$s_1 = \frac{-\sin mz}{3^2 - 1}$$

$$s_1 = \frac{-\sin mz}{8}$$

$$s_1 = \frac{-1}{8} \sin mz$$

dan seterusnya $s_2, s_3 \dots$ menggantikan f untuk $s_2, s_3 \dots$ dipersamaan (2) memeberikan solusi dari persamaan amthieu, periodic dalam z dengan 2π dilambangkan dengan $Se_1(z, q)$ didapatkan :

$$Se_1(z, q) = \sin z - \frac{1}{8}q \sin 3z + \dots \quad (\text{F.15})$$

nilai q diperlukan untuk menghasilkan solusi ini, dengan mensibstitusikan (F.8) a menjadi :

$$a = 1 + q - \frac{1}{8}q^2 + \dots$$

untuk q tertentu, nilai a ditemukan dari (17) disebut bilangan karakteristik dari fungsi Mathieu $Se_1(z, q)$. Periode dalam z dengan 2π , yang direduksi menjadi

$\sin z, Se_1(z, q) = -Se_1(-z, q)$ adalah fungsi ganjil. Mengubah juga persamaan Mathieu () dalam bentuk persamaan pendekatan Mathieu torus tipis sehingga mengganti $q = b$ sama dengan persamaan yang diatas. Dan mengganti $Se_1(z, q)$ dalam keadaan $Se_v(z, b)$ sehingga persamaan menjadi :

$$Se_v(z, b) = \cos vz - \frac{1}{16mbp^2} q \sin 3vz + \dots \quad (\text{F.16})$$

mensubstitusikan dua persamaan identic diatas kepersamaan G (F.7) (diperoleh :

$$G = A \left[\sin(vz) + \frac{\hbar^2}{16mbp^2} \sin(3vz) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{b^2}\right) \right] \quad (\text{F.17})$$

$$+ B \left[\cos(vz) + \frac{\hbar^2}{16mbp^2} \cos(3vz) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{b^2}\right) \right]$$

G merupakan fungsi gelombang partikel yang bergerak pada permukaan torus dengan pendekatan Mathieu.

Lampiran G Probabilitas Fungsi Gelombang Partikel pada Torus dengan Pendekatan Mathieu

Sebuah partikel yang benar benar bebas kecuali pada bagian permukaan torus dimana partikel tidak bisa lepas, diluar bagian torus fungsi gelombang $G(z, q) = 0$ (probabilitas menemukan partikel disana adalah nol), amplitude juga nol dan memiliki potensial $V = \infty$, batas batas yang diberikan oleh z dan b berhubungan dengan permukaan torus dibuat untuk menjamin partikel tidak dapat keluar dari permukaan torusnya, artinya tidak mungkin partikel berada diluar permukaan torus, sehingga menyaratkan :

$$G(0) = 0 \quad (G.1)$$

$$G(0) = A \left[\sin(vz) + \frac{\hbar^2}{16mbp^2} \sin(3vz) \right] + B \left[\cos(vz) + \frac{\hbar^2}{16mbp^2} \cos(3vz) \right] \quad (G.2)$$

$$G(0) = A \left[\sin(0) + \frac{\hbar^2}{16mbp^2} \sin(0) \right] + B \left[\cos(0) + \frac{\hbar^2}{16mbp^2} \cos(0) \right]$$

$$G(0) = A[0] + B \left[\cos(0) + \frac{\hbar^2}{16mbp^2} \cos(0) \right]$$

$$G(0) = A[0] + B \left[1 + \frac{\hbar^2}{16mbp^2} \right]$$

karena partikel berada diluar permukaan torus maka $G(0) = 0$ jadi B harus sama dengan nol ($B = 0$), sehingga diperoleh :

$$G(0) = 0 \quad (G.3)$$

selanjutnya ($B = 0$) dimasukkan pada fungsi gelombang partikel yang bergerak pada permukaan tipis :

$$\begin{aligned}
G(z, b) &= A \left[\sin(vz) + \frac{\hbar^2}{16mbp^2} \sin(3vz) \right] \\
&\quad + 0 \left[\cos(vz) + \frac{\hbar^2}{16mbp^2} \cos(3vz) \right] \\
G(z, b) &= A \left[\sin(vz) + \frac{\hbar^2}{16mbp^2} \sin(3vz) \right] \tag{G.4}
\end{aligned}$$

Sehingga fungsi gelombang tersisa seperti diatas (3.28) fungsi gelombang perlu dinormalisasikan terlebih dahulu, yang mana persamaan normalisasi fungsi gelombang merupakan pernyataan matematis bahwa partikel itu ada disuatu tempat pada permukaan torus yang hanya bernilai tunggal pada keadaan yang kontinu, dan diperoleh hasil normalisasi yakni :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dx = 1 \tag{G.5}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left| A \left[\sin(vz) + \frac{\hbar^2}{16mbp^2} \sin(3vz) \right] \right|^2 dv dz d\eta = 1$$

sebelumnya sudah dikatakan bahwa $b = \cosh \eta$

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left| A^2 \left[\sin^2(vz) + \frac{\hbar^2}{8m \cosh \eta \alpha^2 / q^2} \sin(vz) \sin(3vz) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\hbar^4}{256m^2 \cosh^2 \eta \alpha^4 / q^4} \sin^2(3vz) \right] \right|^2 dv dz d\eta = 1 \tag{G.6}
\end{aligned}$$

dengan $\alpha = 2$ integral terhadap v diperoleh hasil :

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} A^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{\sin(2z)}{4z} \right) + \frac{q^2 \hbar^2}{32m \cosh \eta} \left(-\frac{\sin(4z)}{8z} + \frac{\sin(2z)}{4z} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{q^4 \hbar^4}{(256)^2 m^2 \cosh^2 \eta} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sin(6z)}{12z} \right) \right] dz d\eta = 1 \tag{G.7}
\end{aligned}$$

Integral terhadap z diperoleh hasil :

$$\int_0^{2\pi} A^2 \left[\frac{8\pi^3}{9} + \frac{q^2 \hbar^2}{32m \cosh \eta} \left(\frac{4(8\pi^3)}{9} - \frac{8\pi^3}{9} \right) + \frac{q^4 \hbar^4}{(256)^2 m^2 \cosh^2 \eta} \left(\frac{9(8\pi^3)}{9} \right) \right] d\eta = 1 \quad (\text{G.8})$$

Integral terhadap η diperoleh hasil :

$$A^2 \left[\frac{8\pi^3}{9} \eta \Big|_0^{2\pi} + \frac{q^2 \hbar^2}{32m} \left(\frac{24\pi^3}{9} \right) 2 \tan^{-1}(\sinh(\eta)) \Big|_0^{2\pi} + \frac{q^4 \hbar^4 \pi^3}{8192m^2} \tanh(\eta) \Big|_0^{2\pi} \right] = 1$$

$$A^2 \left[\frac{16\pi^4}{9} + \frac{89q^2 \hbar^2}{16m} \left(\frac{24\pi^3}{9} \right) + \frac{0.99q^4 \hbar^4 \pi^3}{8192m^2} \right] = 1$$

$$A = \sqrt{\frac{1}{\left[\frac{16\pi^4}{9} + \frac{89q^2 \hbar^2}{16m} \left(\frac{24\pi^3}{9} \right) + \frac{q^4 \hbar^4 \pi^3}{8192m^2} \right]}} \quad (\text{G.9})$$

Normalisasi diatas diperoleh nilai dari variabel A dengan nilai B adalah nol, selanjutnya untuk mencari nilai probabilitas partikel yang bergerak dipermukaan torus tipis dengan pendekatan dari persamaan Mathieu, dengan rumus probabilitas seperti pada (2.81) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, t) \Psi(x, t) dx =$$

$$P = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{z_1}^{z_2} \int_{v_1}^{v_2} \left| A \left[\sin(vz) + \frac{\hbar^2}{16mbp^2} \sin(3vz) \right] + B \left[\cos(vz) + \frac{\hbar^2}{16mbp^2} \cos(3vz) \right] \right|^2 dv dz d\eta \quad (\text{G.10})$$

dengan nilai A dan B seperti diatas, sehingga menjadi :

$$\begin{aligned}
P = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{z_1}^{z_2} \int_{v_1}^{v_2} & \left| \sqrt{\frac{1}{\left[\frac{16\pi^4}{9} + \frac{89q^2\hbar^2}{16m} \left(\frac{24\pi^3}{9} \right) + \frac{q^4\hbar^4\pi^3}{8192m^2} \right]}} \left[\sin(vz) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\hbar^2}{16mbp^2} \sin(3vz) \right] \right. \\
& \left. + 0 \left[\cos(vz) + \frac{\hbar^2}{16mbp^2} \cos(3vz) \right] \right|^2 dv dz d\eta
\end{aligned} \tag{G.11}$$

$$\begin{aligned}
P = \frac{1}{\left[\frac{16\pi^4}{9} + \frac{89q^2\hbar^2}{16m} \left(\frac{24\pi^3}{9} \right) + \frac{q^4\hbar^4\pi^3}{8192m^2} \right]} & \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{z_1}^{z_2} \left[\left(\frac{v}{2} - \frac{\sin(2vz)}{4z} \right) \right]_{v_1}^{v_2} \\
& + \frac{\hbar^2}{8mbp^2} \left(\frac{\sin(2vz)}{4z} - \frac{\sin(4vz)}{8z} \right) \Big|_{v_1}^{v_2} \\
& + \frac{\hbar^4}{256m^2b^2p^4} \left(\frac{v}{2} - \frac{\sin(6vz)}{12z} \right) \Big|_{v_1}^{v_2} dz d\eta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P = \frac{1}{\left[\frac{16\pi^4}{9} + \frac{89q^2\hbar^2}{16m} \left(\frac{24\pi^3}{9} \right) + \frac{q^4\hbar^4\pi^3}{8192m^2} \right]} & \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{z_1}^{z_2} \left[\left(\frac{v_2}{2} - \frac{\sin(2v_2z)}{4z} \right) \right. \\
& \left. - \left(\frac{v_1}{2} - \frac{\sin(2v_1z)}{4z} \right) \right] \\
& + \frac{\hbar^2}{8mbp^2} \left[\left(\frac{\sin(2v_2z)}{4z} - \frac{\sin(4v_2z)}{8z} \right) \right. \\
& \left. - \left(\frac{\sin(2v_1z)}{4z} - \frac{\sin(4v_1z)}{8z} \right) \right] \\
& + \frac{\hbar^4}{256m^2b^2p^4} \left[\left(\frac{v_2}{2} - \frac{\sin(6v_2z)}{12z} \right) - \left(\frac{v_1}{2} - \frac{\sin(6v_1z)}{12z} \right) \right] dz d\eta \tag{G.12}
\end{aligned}$$

Persamaan diatas adalah hasil dari integral terhadap v , selanjutnya akan dilakukannya perhitungan terhadap dz yakni:

$$\begin{aligned}
P = & \frac{1}{\left[\frac{16\pi^4}{9} + \frac{89q^2\hbar^2}{16m} \left(\frac{24\pi^3}{9} \right) + \frac{q^4\hbar^4\pi^3}{8192m^2} \right]} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \left[+ \frac{v_2^3 z_2^3}{9} - \frac{v_2^3 z_1^3}{9} - \frac{v_1^3 z_2^3}{9} + \frac{v_1^3 z_1^3}{9} \right. \\
& + \frac{\hbar^2}{8mbp^2} \left(\frac{3v_2^3 z_2^3}{9} - \frac{3v_2^3 z_1^3}{9} - \frac{3v_1^3 z_2^3}{9} + \frac{3v_1^3 z_1^3}{9} \right) \\
& + \frac{\hbar^4}{256m^2 b^2 p^4} \left(\frac{v_2 z_2}{2} - \frac{v_2 z_1}{2} - \frac{v_2 z_2}{2} + v_2^3 z_2^3 + \frac{v_2 z_1}{2} - v_2^3 z_1^3 - \frac{v_1 z_2}{2} \right. \\
& \left. \left. + \frac{v_1 z_1}{2} + \frac{v_1 z_2}{2} - v_1^3 z_2^3 - \frac{v_1 z_1}{2} + v_1^3 z_1^3 \right) \right] d\eta \quad (3.33)
\end{aligned}$$

Dilakukan perhitungan terakhir yakni integral terhadap dq , yaitu:

$$\begin{aligned}
P = & \frac{1}{\left[\frac{16\pi^4}{9} + \frac{89q^2\hbar^2}{16m} \left(\frac{24\pi^3}{9} \right) + \frac{q^4\hbar^4\pi^3}{8192m^2} \right]} \left[\frac{v_2^3 z_2^3 \eta_2}{9} - \frac{v_2^3 z_2^3 \eta_1}{9} - \frac{v_2^3 z_1^3 \eta_2}{9} \right. \\
& + \frac{v_2^3 z_1^3 \eta_1}{9} - \frac{v_1^3 z_2^3 \eta_2}{9} + \frac{v_1^3 z_2^3 \eta_1}{9} + \frac{v_1^3 z_1^3 \eta_2}{9} - \frac{v_1^3 z_1^3 \eta_1}{9} \\
& + \frac{\hbar^2}{8mbp^2} \left(\frac{3v_2^3 z_2^3 \eta_2}{9} - \frac{3v_2^3 z_2^3 \eta_1}{9} - \frac{3v_2^3 z_1^3 \eta_2}{9} + \frac{3v_2^3 z_1^3 \eta_1}{9} \right. \\
& \left. - \frac{3v_1^3 z_2^3 \eta_2}{9} + \frac{3v_1^3 z_2^3 \eta_1}{9} + \frac{3v_1^3 z_1^3 \eta_2}{9} - \frac{3v_1^3 z_1^3 \eta_1}{9} \right) \\
& + \frac{\hbar^4}{256m^2 b^2 p^4} (v_2^3 z_2^3 \eta_2 - v_2^3 z_2^3 \eta_1 - v_2^3 z_1^3 \eta_2 + v_2^3 z_1^3 \eta_1 \\
& \left. - v_1^3 z_2^3 \eta_2 + v_1^3 z_2^3 \eta_1 + v_1^3 z_1^3 \eta_2 - v_1^3 z_1^3 \eta_1) \right] \quad (G.14)
\end{aligned}$$

Persamaan (G.14) adalah nilai probabilitas dari fungsi gelombang partikel pada permukaan torus yang tipis yakni dari pendekatan persamaan Mathieu.

Lampiran H Solusi Gerak Partikel Terbatas pada Simpol Torus dengan Menggunakan Pendekatan Hill-Whittaker

Agar lebih memahami (C.5), memperluas suku ketiga dalam persamaan, sebagai deret binomial, Dalam matematika, deret binomial adalah deret Taylor untuk fungsi f yang diberikan oleh $f(x) = (1+x)^\alpha$, dimana $\alpha \in \mathbb{C}$ bilangan kompleks arbitrer dan $|x| < 1$ secara eksplisit :

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} + \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-1)}{3!} + \dots$$

Deret binomial merupakan deret pangkat di ruas kanan yang dinyatakan dalam koefisien binomial (digeneralisasikan). Kasus special, jika α adalah bilangan bulat negatif n , maka suku ke $(n-2)$ jadi dalam hal ini deret tersebut berhingga dan memberikan rumus aljabar binomial. Varian berikut berlaku untuk kompleks arbitrer, tetapi khususnya berguna untuk menangani eksponen bilangan bulat negative pada :

$$\frac{1}{(1-z)^\beta} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\beta}{k} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+\beta-1}{k} z^k \quad (\text{H.1})$$

dalam hal koefisien multiset atau koefisien binomial. Untuk membuktikan substitusikan $z = x$ pada persamaan (1) dan gunakan identitas koefisien binomial:

$$\binom{-\beta}{k} = (-1)^k \binom{k+\beta-1}{k}$$

mengambil bagian $(a\beta)^2 \sigma^4 \epsilon$ pada persamaan (24) dijadikan :

$$\begin{aligned} \frac{a^2 \beta^2 \epsilon}{(b - \cos(\alpha\phi))^2} &= \frac{a^2 \beta^2 \epsilon}{b^2 \left(1 - \frac{\cos(\alpha\phi)}{b}\right)^2} \\ &= \frac{a^2 \beta^2 \epsilon}{b^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{\cos(\alpha\phi)}{b}\right)^2} \end{aligned}$$

dikali b/b pada $\cos(\alpha\phi)/b$, menjadi :

$$= \frac{a^2\beta^2\epsilon}{b^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{b \cos(\alpha\phi)}{b^2}\right)^2} \quad (\text{H.2})$$

deret binomial menjadi :

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\Gamma + \frac{a^2\beta^2\epsilon}{b^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{k+1}{k} \left(\frac{b \cos(\alpha\phi)}{b^2} \right)^k \right) \right] G(\phi) = 0$$

mengubah $\alpha\phi = 2z$

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\Gamma + \frac{a^2\beta^2\epsilon}{b^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{k+1}{k} \left(\frac{b \cos(2z)}{b^2} \right)^k \right) \right] G(\phi) = 0 \quad (\text{H.3})$$

saat $k=0$, $k=1$, dan $k=2$, persamaan menjadi :

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\Gamma + \frac{a^2\beta^2\epsilon}{b^2} \left(1 - 2 \left(\frac{b \cos(2z)}{b^2} \right) + 3 \left(\frac{b \cos(2z)}{b^2} \right)^2 \right) \right) \right] G(\phi) = 0$$

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\Gamma + \left(\frac{a^2\beta^2\epsilon}{b^2} - 2 \frac{a^2\beta^2\epsilon}{b^2} \left(\frac{b \cos(2z)}{b^2} \right) + 3 \frac{a^2\beta^2\epsilon}{b^2} \left(\frac{b \cos(2z)}{b^2} \right)^2 \right) \right) \right] G(\phi) = 0$$

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\Gamma + \left(\frac{a^2\beta^2\epsilon}{b^2} - 2 \frac{a^2\beta^2\epsilon b \cos(2z)}{b^4} + 3 \frac{a^2\beta^2\epsilon b^2 \cos^2(2z)}{b^6} \right) \right) \right] G(\phi) = 0$$

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\frac{4\Gamma}{\alpha^2} + \frac{a^2\beta^2\epsilon}{b^2} - 2 \frac{a^2\beta^2\epsilon \cos(2z)}{b^3} + 3 \frac{a^2\beta^2\epsilon \cos^2(2z)}{b^4} \right) \right] G(\phi) = 0$$

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\frac{4\Gamma}{\alpha^2} + \frac{a^2\beta^2\epsilon}{b^2} \right) - 2 \frac{a^2\beta^2\epsilon \cos(2z)}{b^3} + 3 \frac{a^2\beta^2\epsilon \cos^2(2z)}{b^4} \right] G(\phi) = 0$$

dengan trigonometri $\cos^2(2z) = 1 - \sin^2(2z)$, diperoleh :

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\frac{4\Gamma}{\alpha^2} + \frac{a^2\beta^2\epsilon}{b^2} \right) - 2 \frac{a^2\beta^2\epsilon \cos(2z)}{b^3} + 3 \frac{a^2\beta^2\epsilon(1 - \sin^2(2z))}{b^4} \right] G(\phi) = 0$$

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\frac{4\Gamma}{\alpha^2} + \frac{a^2\beta^2\epsilon}{b^2} \right) - 2 \frac{a^2\beta^2\epsilon \cos(2z)}{b^3} + \left(\frac{3a^2\beta^2\epsilon}{b^4} - \frac{3a^2\beta^2\epsilon \sin^2(2z)}{b^4} \right) \right] G(\phi)$$

$$= 0$$

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\frac{4\Gamma}{\alpha^2} + \frac{a^2\beta^2\epsilon}{b^2} \right) - 2 \frac{a^2\beta^2\epsilon \cos(2z)}{b^3} \right. \\ \left. + \left(\frac{2a^2\beta^2\epsilon}{b^4} + \frac{a^2\beta^2\epsilon}{b^4} - \frac{a^2\beta^2\epsilon \sin^2(2z)}{b^4} - \frac{2a^2\beta^2\epsilon \sin^2(2z)}{b^4} \right) \right] G(\phi) \\ = 0$$

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\frac{4\Gamma}{\alpha^2} + \frac{a^2\beta^2\epsilon}{b^2} \right) - 2 \frac{a^2\beta^2\epsilon \cos(2z)}{b^3} \right. \\ \left. + \left(\frac{2a^2\beta^2\epsilon}{b^4} - \frac{a^2\beta^2\epsilon \sin^2(2z)}{b^4} + \frac{a^2\beta^2\epsilon (1 - 2 \sin^2(2z))}{b^4} \right) \right] G(\phi) = 0$$

pada trigometri ($1 - 2 \sin^2(2z) = \cos(4z)$), sehingga :

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\frac{4\Gamma}{\alpha^2} + \frac{a^2\beta^2\epsilon}{b^2} \right) - 2 \frac{a^2\beta^2\epsilon \cos(2z)}{b^3} \right. \\ \left. + \left(\frac{2a^2\beta^2\epsilon}{b^4} - \frac{a^2\beta^2\epsilon \sin^2(2z)}{b^4} + \frac{a^2\beta^2\epsilon \cos(4z)}{b^4} \right) \right] G(\phi) = 0$$

penganti $2 = \alpha$, persamaan diatas menjadi :

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\frac{4\Gamma}{\alpha^2} + \frac{a^2\beta^2\epsilon}{b^2} \right) - 2 \frac{a^2\beta^2\epsilon \cos(2z)}{b^3} \right. \\ \left. + \left(\frac{2a^2\beta^2\epsilon}{b^4} - \frac{a^2\beta^2\epsilon \sin^2(2z)}{b^4} + \frac{a^2\beta^2\epsilon \cos(4z)}{b^4} \right) \right] G(\phi) = 0$$

pengalikan 2/2 pada bagian $\frac{a^2\beta^2\epsilon \cos(4z)}{b^4}$, :

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\frac{4\Gamma}{\alpha^2} + \frac{a^2\beta^2\epsilon}{b^2} + \frac{2a^2\beta^2\epsilon}{b^4} - \frac{a^2\beta^2\epsilon \sin^2(2z)}{b^4} \right) \right. \\ \left. - \frac{2a^2\beta^2\epsilon \cos(2z)}{b^3} + \frac{2a^2\beta^2\epsilon \cos(4z)}{2b^4} \right] G(\phi) = 0 \quad (\text{H.4})$$

persamaan diatas sudah menjadi pendekatan persamaan Hill-Whittaker dengan :

$$\theta_0 = \frac{4\Gamma}{\alpha^2} + \frac{a^2\beta^2\epsilon}{b^2} + \frac{2a^2\beta^2\epsilon}{b^4} - \frac{a^2\beta^2\epsilon \sin^2(2z)}{b^4} \quad (\text{H.5})$$

$$\theta_1 = - \frac{a^2\beta^2\epsilon}{b^3} \quad (\text{H.6})$$

$$\theta_2 = \frac{2a^2\beta^2\epsilon}{2b^4} \quad (\text{H.7})$$

Mengikuti Ince, solusi paling umum dari persamaan Hill-Whittaker dapat diperoleh sepanjang garis yang sama yang diadopsi untuk menyelesaikan persamaan Mathieu dan menghasilkan nilai eigen energi berikut :

$$\theta_0 = \frac{4\Gamma}{\alpha^2} + \frac{a^2\beta^2\epsilon}{b^2} + \frac{2a^2\beta^2\epsilon}{b^4} - \frac{a^2\beta^2\epsilon \sin^2(2z)}{b^4}$$

seperti pada pendekatan mathieu $\theta_0 = 4n^2/q^2$, sehingga :

$$\begin{aligned} \frac{4n^2}{q^2} &= \frac{4\Gamma}{\alpha^2} + \frac{a^2\beta^2\epsilon}{b^2} + \frac{2a^2\beta^2\epsilon}{b^4} - \frac{a^2\beta^2\epsilon \sin^2(2z)}{b^4} \\ \frac{4n^2}{q^2} &= \frac{4\Gamma}{\alpha^2} + \frac{4a^2\beta^2\epsilon}{\alpha^2 b^2} \left(1 + \frac{2}{b^2} - \frac{\sin^2(2z)}{b^2} \right) \\ \frac{4a^2\beta^2\epsilon}{\alpha^2 b^2} \left(1 + \frac{2}{b^2} - \frac{\sin^2(2z)}{b^2} \right) &= -\frac{4\Gamma}{\alpha^2} + \frac{4n^2}{q^2} \\ \frac{4a^2\beta^2 2mE}{\alpha^2 b^2 \hbar^2} \left(1 + \frac{2}{b^2} - \frac{\sin^2(2z)}{b^2} \right) &= -\frac{4\Gamma}{\alpha^2} + \frac{4n^2}{q^2} \\ E \left(1 + \frac{2}{b^2} - \frac{\sin^2(2z)}{b^2} \right) &= \frac{4n^2 \alpha^2 b^2 \hbar^2}{q^2 4a^2 \beta^2 2m} - \frac{4\Gamma \alpha^2 b^2 \hbar^2}{\alpha^2 4a^2 \beta^2 2m} \\ E \left(1 + \frac{2}{b^2} - \frac{\sin^2(2z)}{b^2} \right) &= \left(\frac{n^2 \alpha^2 b^2}{q^2 a^2 \beta^2} - \frac{\Gamma \alpha^2 b^2}{a^2 \beta^2} \right) \frac{\hbar^2}{2m} \end{aligned}$$

mengabaikan sisi kanan :

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{n^2 \alpha^2 b^2}{q^2 a^2 \beta^2} \right) \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{b^2} - \frac{\sin^2(2z)}{b^2} \right)} \\ E_n &= \frac{n^2 b^2 \hbar^2}{2mp^2 a^2 \beta^2 \left(1 + \frac{2}{b^2} - \frac{\sin^2(2z)}{b^2} \right)} \quad (\text{H.8}) \end{aligned}$$

Dalam buku karangan EL ince yang berjudul “On General Solution Hill’s Equation” menuliskan untuk solusi persamaan Hill-Whittaker adalah

$$y = e^{ivz}u$$

di mana u adalah

$$u = \sin(z - \sigma) + a_3 \cos(3z - \sigma) + b_3 \sin(3z - \sigma) + a_5 \cos(5z - \sigma) \\ + b_5 \sin(5z - \sigma) + \dots$$

u diperoleh dari

$$u = \sin(z - \sigma) + A_1(z, \sigma)\theta_1 + A_2(z, \sigma)\theta_2 + \dots + B_1(z, \sigma)\theta_1^2 + B_2(z, \sigma)\theta_2^2 + \dots \\ + B_{12}(z, \sigma)\theta_1\theta_2 + \dots + C_1(z, \sigma)\theta_1^3 + \dots$$

$$A_r = \frac{1}{4r(r+1)} \sin\{(2r+1)z - \sigma\} - \frac{1}{4r(r-1)} \sin\{(2r-1)z + \sigma\}$$

$$B_r = \frac{1}{32r^2(r+1)(2r+1)} \sin\{(4r+1)z - \sigma\} \\ - \frac{1}{32r^2(r-1)(2r-1)} \sin\{(4r-1)z + \sigma\}$$

$$A_1 = \frac{1}{8} \sin(3z - \sigma)$$

$$A_2 = \frac{1}{24} \sin(6z - \sigma) - \frac{1}{8} \sin(3z + \sigma)$$

$$B_1 = \frac{1}{192} \sin(5z - \sigma) + \frac{3}{64} \sin 2\sigma \cos(3z - \sigma) + \frac{1}{64} \cos 2\sigma \sin(3z - \sigma)$$

$$B_2 = \frac{1}{540} \sin(9z - \sigma) - \frac{1}{108} \sin(7z + \sigma)$$

$$B_{12} = \frac{1}{288} \sin(7z - \sigma) + \frac{1}{288} \sin 2\sigma \cos(5z - \sigma) - \frac{1}{288} \cos 2\sigma \sin(5z - \sigma) \\ - \frac{1}{32} \sin 4\sigma \cos(3z - \sigma) + \left(\frac{1}{48} - \frac{1}{32} \cos 4\sigma \right) \sin(3z - \sigma)$$

$$C_1 = \frac{1}{9216} \sin(7z - \sigma) + \frac{7}{2304} \sin 2\sigma \cos(5z - \sigma) + \frac{1}{1152} \cos 2\sigma \sin(5z - \sigma) \\ + \frac{3}{512} \sin 4\sigma \cos(3z - \sigma) + \left(\frac{5}{512} \cos 4\sigma - \frac{7}{768} \right) \sin(3z - \sigma)$$

$$\begin{aligned}
u = & \sin(z - \sigma) + \frac{1}{8} \sin(3z - \sigma) \theta_1 + \frac{1}{24} \sin(6z - \sigma) \theta_2 - \frac{1}{8} \sin(3z + \sigma) \theta_2 \\
& + \frac{1}{192} \sin(5z - \sigma) \theta_1^2 + \frac{3}{64} \sin^2 \sigma \cos(3z - \sigma) \theta_1^2 \\
& + \frac{1}{64} \cos 2\sigma \sin(3z - \sigma) \theta_1^2 + \frac{1}{540} \sin(9z - \sigma) \theta_2^2 \\
& - \frac{1}{108} \sin(7z + \sigma) \theta_2^2 + \frac{1}{288} \sin(7z - \sigma) \theta_1 \theta_2 \\
& + \frac{1}{288} \sin 2\sigma \cos(5z - \sigma) \theta_1 \theta_2 - \frac{1}{288} \cos 2\sigma \sin(5z - \sigma) \theta_1 \theta_2 \\
& - \frac{1}{32} \sin 4\sigma \cos(3z - \sigma) \theta_1 \theta_2 \\
& + \left(\frac{1}{48} - \frac{1}{32} \cos 4\sigma \right) \sin(3z - \sigma) \theta_1 \theta_2 + \frac{1}{9216} \sin(7z - \sigma) \theta_1^3 \\
& + \frac{7}{2304} \sin 2\sigma \cos(5z - \sigma) \theta_1^3 + \frac{1}{1152} \cos 2\sigma \sin(5z - \sigma) \theta_1^3 \\
& + \frac{3}{512} \sin 4\sigma \cos(3z - \sigma) \theta_1^3 \\
& + \left(\frac{5}{512} \cos 4\sigma - \frac{7}{768} \right) \sin(3z - \sigma) \theta_1^3
\end{aligned}$$

$$u = \sin(z - \sigma)$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{1}{8} \sin(3z - \sigma) \theta_1 + \frac{1}{64} \cos 2\sigma \sin(3z - \sigma) \theta_1^2 \right. \\
& + \left(\frac{1}{48} - \frac{1}{32} \cos 4\sigma \right) \sin(3z - \sigma) \theta_1 \theta_2 \\
& + \left. \left(\frac{5}{512} \cos 4\sigma - \frac{7}{768} \right) \sin(3z - \sigma) \theta_1^3 \right] \\
& + \left[\frac{3}{64} \sin^2 \sigma \cos(3z - \sigma) \theta_1^2 - \frac{1}{32} \sin 4\sigma \cos(3z - \sigma) \theta_1 \theta_2 \right. \\
& + \left. \frac{3}{512} \sin 4\sigma \cos(3z - \sigma) \theta_1^3 \right] \\
& + \left[\frac{1}{192} \sin(5z - \sigma) \theta_1^2 - \frac{1}{288} \cos 2\sigma \sin(5z - \sigma) \theta_1 \theta_2 \right. \\
& + \left. \frac{1}{1152} \cos 2\sigma \sin(5z - \sigma) \theta_1^3 \right] \\
& + \left[\frac{1}{288} \sin 2\sigma \cos(5z - \sigma) \theta_1 \theta_2 + \frac{7}{2304} \sin 2\sigma \cos(5z - \sigma) \theta_1^3 \right] \\
& + \left[\frac{1}{24} \sin(6z - \sigma) \theta_2 - \frac{1}{8} \sin(3z + \sigma) \theta_2 + \frac{1}{540} \sin(9z - \sigma) \theta_2^2 \right. \\
& - \frac{1}{108} \sin(7z + \sigma) \theta_2^2 + \frac{1}{288} \sin(7z - \sigma) \theta_1 \theta_2 \\
& + \left. \frac{1}{9216} \sin(7z - \sigma) \theta_1^3 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u = & \sin(z - \sigma) + \left[\frac{3}{64} \sin^2 \sigma \theta_1^2 - \frac{1}{32} \sin 4\sigma \theta_1 \theta_2 + \frac{3}{512} \sin 4\sigma \theta_1^3 \right] \cos(3z - \sigma) \\
& + \left[\frac{1}{8} \theta_1 + \frac{1}{64} \cos 2\sigma \theta_1^2 + \left(\frac{1}{48} - \frac{1}{32} \cos 4\sigma \right) \theta_1 \theta_2 \right. \\
& \left. + \left(\frac{5}{512} \cos 4\sigma - \frac{7}{768} \right) \theta_1^3 \right] \sin(3z - \sigma) \\
& + \left[\frac{1}{288} \sin 2\sigma \theta_1 \theta_2 + \frac{7}{2304} \sin 2\sigma \theta_1^3 \right] \cos(5z - \sigma) \\
& + \left[\frac{1}{192} \theta_1^2 - \frac{1}{288} \cos 2\sigma \theta_1 \theta_2 + \frac{1}{1152} \cos 2\sigma \theta_1^3 \right] \sin(5z - \sigma) \\
& + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u = & \sin(z - \sigma) + \frac{1}{8} \theta_1 \sin(3z - \sigma) \\
& + \theta_1^2 \left[+ \frac{1}{64} \cos 2\sigma \sin(3z - \sigma) \right. \\
& \left. + \frac{3}{64} \sin 2\sigma \cos(3z - \sigma) + \frac{1}{192} \sin(5z - \sigma) \right] \\
& + \theta_1 \theta_2 \left[- \frac{1}{32} \sin 4\sigma \cos(3z - \sigma) \right. \\
& \left. + \left(\frac{1}{48} - \frac{1}{32} \cos 4\sigma \right) \sin(3z - \sigma) + \frac{1}{288} \sin 2\sigma \cos(5z - \sigma) \right. \\
& \left. - \frac{1}{288} \cos 2\sigma \sin(5z - \sigma) \right] \\
& + \theta_1^3 \left[\frac{3}{512} \sin 4\sigma \cos(3z - \sigma) \right. \\
& \left. + \left(\frac{5}{512} \cos 4\sigma - \frac{7}{768} \right) \sin(3z - \sigma) + \frac{7}{2304} \sin 2\sigma \cos(5z - \sigma) \right. \\
& \left. + \frac{1}{1152} \cos 2\sigma \sin(5z - \sigma) \right]
\end{aligned}$$

di mana $\theta_1, \theta_1^2, \theta_1^3, \theta_2$ dan $\theta_1 \theta_2$ adalah

$$\theta_1 = \frac{-a^2\beta^2\epsilon}{b^3}$$

$$\theta_1^2 = \frac{a^4\beta^4\epsilon^2}{b^6}$$

$$\theta_1^3 = \frac{-a^6\beta^6\epsilon^3}{b^9}$$

$$\theta_2 = \frac{a^2\beta^2\epsilon}{2b^4}$$

$$\theta_1\theta_2 = \frac{-a^4\beta^4\epsilon^2}{2b^7}$$

persamaan menjadi :

$$\begin{aligned} u = & \sin(z - \sigma) - \frac{a^2\beta^2\epsilon}{8b^3} \sin(3z - \sigma) \\ & + \frac{a^4\beta^4\epsilon^2}{b^6} \left[+ \frac{1}{64} \cos 2\sigma \sin(3z - \sigma) \right. \\ & + \frac{3}{64} \sin 2\sigma \cos(3z - \sigma) + \frac{1}{192} \sin(5z - \sigma) \left. \right] \\ & - \frac{a^4\beta^4\epsilon^2}{2b^7} \left[- \frac{1}{32} \sin 4\sigma \cos(3z - \sigma) \right. \\ & + \left(\frac{1}{48} - \frac{1}{32} \cos 4\sigma \right) \sin(3z - \sigma) + \frac{1}{288} \sin 2\sigma \cos(5z - \sigma) \\ & \left. - \frac{1}{288} \cos 2\sigma \sin(5z - \sigma) \right] \\ & - \frac{a^6\beta^6\epsilon^3}{b^9} \left[\frac{3}{512} \sin 4\sigma \cos(3z - \sigma) \right. \\ & + \left(\frac{5}{512} \cos 4\sigma - \frac{7}{768} \right) \sin(3z - \sigma) + \frac{7}{2304} \sin 2\sigma \cos(5z - \sigma) \\ & \left. + \frac{1}{1152} \cos 2\sigma \sin(5z - \sigma) \right] \end{aligned}$$

Persamaan diatas dimasukkan kedalam persamaan () :

$$\begin{aligned}
 y = e^{ivz} & \left[\sin(z - \sigma) - \frac{a^2 \beta^2 \epsilon}{8b^3} \sin(3z - \sigma) \right. \\
 & + \frac{a^4 \beta^4 \epsilon^2}{b^6} \left[+ \frac{1}{64} \cos 2\sigma \sin(3z - \sigma) \right. \\
 & + \frac{3}{64} \sin 2\sigma \cos(3z - \sigma) + \frac{1}{192} \sin(5z - \sigma) \left. \right] \\
 & - \frac{a^4 \beta^4 \epsilon^2}{2b^7} \left[- \frac{1}{32} \sin 4\sigma \cos(3z - \sigma) + \left(\frac{1}{48} - \frac{1}{32} \cos 4\sigma \right) \sin(3z - \sigma) \right. \\
 & + \frac{1}{288} \sin 2\sigma \cos(5z - \sigma) - \frac{1}{288} \cos 2\sigma \sin(5z - \sigma) \left. \right] \\
 & - \frac{a^6 \beta^6 \epsilon^3}{b^9} \left[\frac{3}{512} \sin 4\sigma \cos(3z - \sigma) + \left(\frac{5}{512} \cos 4\sigma - \frac{7}{768} \right) \sin(3z - \sigma) \right. \\
 & + \frac{7}{2304} \sin 2\sigma \cos(5z - \sigma) + \frac{1}{1152} \cos 2\sigma \sin(5z - \sigma) \left. \right] \left. \right]
 \end{aligned}$$

Dengan memasukkan faktor $X = N\sqrt{F}$ Sehingga diperoleh persamaan gelombang partikel yang bergerak disimpul torus dengan pendekatan Hill-Whittaker :

$$\begin{aligned}
X = \Psi = Ne^{ivz} & \left[\sin(z - \sigma) - \frac{a^2 \beta^2 \epsilon}{8b^3} \sin(3z - \sigma) \right. \\
& + \frac{a^4 \beta^4 \epsilon^2}{b^6} \left[+ \frac{1}{64} \cos 2\sigma \sin(3z - \sigma) \right. \\
& + \frac{3}{64} \sin 2\sigma \cos(3z - \sigma) + \frac{1}{192} \sin(5z - \sigma) \left. \right] \\
& - \frac{a^4 \beta^4 \epsilon^2}{2b^7} \left[- \frac{1}{32} \sin 4\sigma \cos(3z - \sigma) \right. \\
& + \left(\frac{1}{48} - \frac{1}{32} \cos 4\sigma \right) \sin(3z - \sigma) + \frac{1}{288} \sin 2\sigma \cos(5z - \sigma) \\
& \left. - \frac{1}{288} \cos 2\sigma \sin(5z - \sigma) \right] \\
& - \frac{a^6 \beta^6 \epsilon^3}{b^9} \left[\frac{3}{512} \sin 4\sigma \cos(3z - \sigma) \right. \\
& + \left(\frac{5}{512} \cos 4\sigma - \frac{7}{768} \right) \sin(3z - \sigma) + \frac{7}{2304} \sin 2\sigma \cos(5z - \sigma) \\
& \left. + \frac{1}{1152} \cos 2\sigma \sin(5z - \sigma) \right] \quad (H. 9)
\end{aligned}$$

Persamaan diatas adalah fungsi gelombang partikel yang bergerak pada permukaantorus yang tebal.

Lampiran I Nilai Probabilitas Fungsi Gelombang Partikel yang Bergerak pada Simpul Torus dengan Pendekatan Hill-Whittaker

Fungsi gelombang perlu dinormalisasikan terlebih dahulu, diperoleh hasil normalisasi dengan batas $0 \leq v \leq 1, 0 \leq \sigma \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq z \leq 2\pi, 0 \leq \eta \leq 2\pi$, persamaan normalisasi diperoleh:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dx = 1 \quad (\text{I.1})$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \left| N e^{ivz} \left[\sin(z - \sigma) - \frac{a^2 \beta^2 \epsilon}{8b^3} \sin(3z - \sigma) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{a^4 \beta^4 \epsilon^2}{b^6} \left[\frac{1}{64} \cos 2\sigma \sin(3z - \sigma) \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. + \frac{3}{64} \sin 2\sigma \cos(3z - \sigma) + \frac{1}{192} \sin(5z - \sigma) \right] \right] \right|^2 dv d\sigma dz d\eta \\ & = 1 \end{aligned} \quad (\text{I.2})$$

dilakukannya perhitungan dengan mengintegrasikan terhadap dv , didapatkan hasil:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} N^2 \left(\frac{i \sin^2(z) + \cos(z) \sin(z)}{z} \right) \left[\sin(z - \sigma) - \frac{a^2 \beta^2 \epsilon}{8b^3} \sin(3z - \sigma) \right. \\ & \quad \left. + \frac{a^4 \beta^4 \epsilon^2}{b^6} \left[\frac{1}{64} \cos 2\sigma \sin(3z - \sigma) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{3}{64} \sin 2\sigma \cos(3z - \sigma) + \frac{1}{192} \sin(5z - \sigma) \right] \right]^2 d\sigma dz d\eta = 1 \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

dan selanjutnya akan dilakukannya perhitungan terhadap $d\sigma$, dengan hasil :

$$\begin{aligned}
N^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} & \left(\frac{i \sin^2(z) + \cos(z) \sin(z)}{z} \right) \left[\frac{-2 \sin(2z) + \pi}{4} \right. \\
& - \frac{a^2 \beta^2 \epsilon - 2 \sin(4z) + \pi \cos(2z)}{4b^3} + \frac{a^4 \beta^4 \epsilon^2}{32b^6} \left(\frac{-2\pi \cos(4z)}{16} \right) \\
& - \frac{3a^4 \beta^4 \epsilon^2}{32b^6} \left(\frac{8 \sin(2z) + 2\pi \cos(4z)}{16} \right) \\
& + \frac{a^4 \beta^4 \epsilon^2}{96b^6} \left(\frac{-2 \sin(6z) + \pi \cos(4z)}{4} \right) \\
& + \frac{a^4 \beta^4 \epsilon^2}{64b^6} \left(\frac{-2 \sin(6z) + \pi}{4} \right) - \frac{a^6 \beta^6 \epsilon^3}{256b^9} \left(\frac{-2\pi \cos(6z)}{16} \right) \\
& + \frac{3a^6 \beta^6 \epsilon^3}{256b^9} \left(\frac{2\pi \cos(6z)}{16} \right) \\
& + \frac{a^6 \beta^6 \epsilon^3}{768b^9} \left(\frac{-2 \sin(8z) + \pi \cos(2z)}{4} \right) \\
& - \frac{a^8 \beta^8 \epsilon^4}{4096b^{12}} \left(\frac{8 \sin(6z) - 6\pi}{48} \right) - \frac{3a^8 \beta^8 \epsilon^4}{2048b^{12}} \left(\frac{-8 \sin(6z)}{48} \right) \\
& + \frac{a^8 \beta^8 \epsilon^4}{6144b^{12}} \left(\frac{-2\pi \cos(8z)}{16} \right) - \frac{9a^8 \beta^8 \epsilon^4}{4096b^{12}} \left(\frac{-16 \sin(6z) - 6\pi}{48} \right) \\
& - \frac{3a^8 \beta^8 \epsilon^4}{6144b^{12}} \left(\frac{-8 \sin(2z) + 2\pi \cos(8z)}{16} \right) \\
& \left. + \frac{a^8 \beta^8 \epsilon^4}{36864b^{12}} \left(\frac{-2 \sin(10z) + \pi}{4} \right) \right] dz d\eta = 1 \tag{I.4}
\end{aligned}$$

Persamaan (4.20) merupakan hasil dari integral terhadap $d\sigma$, berikutnya adalah perhitungan terhadap dz untuk mendapatkan nilai dari N, yakni :

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \left[-\frac{i}{2} \left(\frac{48\pi^3}{9} \right) + \frac{ia^2\beta^2\epsilon}{8b^3} \left(\frac{96\pi^3}{9} \right) - \frac{ia^4\beta^4\epsilon^2}{8b^6} \left(\frac{33\pi^3}{9} \right) - \frac{ia^6\beta^6\epsilon^3}{1536b^9} \left(\frac{192\pi^3}{9} \right) \right. \\
& + \frac{5ia^8\beta^8\epsilon^4}{384b^{12}} \left(\frac{11\pi^3}{9} \right) + \frac{\pi}{4} \left(2\pi - \frac{16\pi^3}{9} \right) - \frac{\pi a^2\beta^2\epsilon}{16b^3} \left(2\pi - \frac{64\pi^3}{9} \right) \\
& - \frac{5\pi a^4\beta^4\epsilon^2}{384b^6} \left(2\pi - \frac{60\pi^3}{9} \right) + \frac{\pi a^4\beta^4\epsilon^2}{256b^6} \left(2\pi - \frac{16\pi^3}{9} \right) \\
& + \frac{\pi a^6\beta^6\epsilon^3}{512b^9} \left(2\pi - \frac{448\pi^3}{9} \right) + \frac{\pi a^6\beta^6\epsilon^3}{768b^9} \left(2\pi - \frac{64\pi^3}{9} \right) \\
& - \frac{\pi a^8\beta^8\epsilon^4}{12288b^{12}} \left(2\pi - \frac{784\pi^3}{9} \right) + \frac{23\pi a^8\beta^8\epsilon^4}{73728b^{12}} \left(2\pi - \frac{16\pi^3}{9} \right) \\
& + \frac{i\pi}{4} \left(-\frac{1}{2} \ln(4\pi) + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& + \frac{i\pi a^4\beta^4\epsilon^2}{256b^6} \left(-\frac{1}{2} \ln(4\pi) + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} \ln(8\pi) + \frac{1}{4} \ln(2\pi) + 4\pi^2 \right) \\
& + \frac{a^2\beta^2\epsilon}{8b^3} \left(-\frac{1}{4} \ln(12\pi) + \frac{1}{4} \ln(4\pi) + 8\pi^2 \right) \\
& + \frac{23i\pi a^8\beta^8\epsilon^4}{73728b^{12}} \left(-\frac{1}{2} \ln(4\pi) + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& - \frac{3a^4\beta^4\epsilon^2}{64b^6} \left(-\frac{1}{4} \ln(8\pi) + \frac{1}{4} \ln(2\pi) + 4\pi^2 \right) \\
& - \frac{a^4\beta^4\epsilon^2}{192b^6} \left(-\frac{1}{4} \ln(16\pi) + \frac{1}{4} \ln(8\pi) + 12\pi^2 \right) \\
& - \frac{a^4\beta^4\epsilon^2}{128b^6} \left(-\frac{1}{4} \ln(16\pi) + \frac{1}{4} \ln(8\pi) + 12\pi^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{a^6 \beta^6 \epsilon^3}{1536b^9} \left(-\frac{1}{4} \ln(20\pi) + \frac{1}{4} \ln(12\pi) + 16\pi^2 \right) \\
& + \frac{a^8 \beta^8 \epsilon^4}{4096b^{12}} \left(-\frac{1}{4} \ln(8\pi) + \frac{1}{4} \ln(2\pi) + 4\pi^2 \right) \\
& + \frac{23a^8 \beta^8 \epsilon^4}{24576b^{12}} \left(-\frac{1}{4} \ln(16\pi) + \frac{1}{4} \ln(8\pi) + 12\pi^2 \right) \\
& - \frac{a^8 \beta^8 \epsilon^4}{73728b^{12}} \left(-\frac{1}{4} \ln(24\pi) + \frac{1}{4} \ln(16\pi) + 20\pi^2 \right) \\
& - \frac{i\pi a^2 \beta^2 \epsilon}{16b^3} \left(-\frac{1}{4} \ln(8\pi) + \frac{1}{2} \ln(4\pi) - \frac{1}{4} \ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& - \frac{5i\pi a^4 \beta^4 \epsilon^2}{384b^6} \left(-\frac{1}{4} \ln(12\pi) + \frac{1}{2} \ln(8\pi) - \frac{1}{4} \ln(4\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& + \frac{5i\pi a^6 \beta^6 \epsilon^3}{1536b^9} \left(-\frac{1}{4} \ln(16\pi) + \frac{1}{2} \ln(12\pi) - \frac{1}{4} \ln(8\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& - \frac{i\pi a^8 \beta^8 \epsilon^4}{12288b^{12}} \left(-\frac{1}{4} \ln(20\pi) + \frac{1}{2} \ln(16\pi) - \frac{1}{4} \ln(12\pi) + 2\pi^2 \right) \Big] d\eta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N = \text{srt}q1 / & \left[-i\pi \left(\frac{48\pi^3}{9} \right) + \left[\frac{0.79ia^2\epsilon}{2} + \frac{0.78ia^2\epsilon}{8} \right] \left(\frac{96\pi^3}{9} \right) \right. \\
& - \left[1.1ia^4\epsilon^2 - \frac{0.199ia^4\epsilon^2}{8} \right] \left(\frac{33\pi^3}{9} \right) - \left[\frac{0.42ia^6\epsilon^3}{24} + \frac{0.06ia^6\epsilon^3}{1536} \right] \left(\frac{192\pi^3}{9} \right) \\
& + \left[0.74ia^8\epsilon^4 + \frac{0.1ia^8\epsilon^4}{384} \right] \left(\frac{11\pi^3}{9} \right) + \frac{\pi^2}{2} \left(2\pi - \frac{16\pi^3}{9} \right) \\
& - \left[\frac{0.79\pi a^2\epsilon}{4} + \frac{0.78\pi a^2\epsilon}{16} \right] \left(2\pi - \frac{64\pi^3}{9} \right) \\
& - \left[\frac{5.5\pi a^4\beta^4\epsilon^2}{24} + \frac{0.995\pi a^4\beta^4\epsilon^2}{384} \right] \left(2\pi - \frac{60\pi^3}{9} \right) \\
& + \left[\frac{0.53\pi a^4\epsilon^2}{16} + \frac{0.199\pi a^4\epsilon^2}{256} \right] \left(2\pi - \frac{16\pi^3}{9} \right) \\
& + \left[\frac{0.42\pi a^6\epsilon^3}{8} + \frac{0.06\pi a^6\epsilon^3}{512} \right] \left(2\pi - \frac{448\pi^3}{9} \right) \\
& + \left[\frac{0.42\pi a^6\beta^6\epsilon^3}{12} + \frac{0.06\pi a^6\beta^6\epsilon^3}{768} \right] \left(2\pi - \frac{64\pi^3}{9} \right) \\
& - \left[\frac{0.36\pi a^8\epsilon^4}{48} - \frac{0.02\pi a^8\epsilon^4}{12288} \right] \left(2\pi - \frac{784\pi^3}{9} \right) \\
& + \left[\frac{8.28\pi a^8\beta^8\epsilon^4}{288} + \frac{0.46\pi a^8\beta^8\epsilon^4}{73728} \right] \left(2\pi - \frac{16\pi^3}{9} \right) \\
& + \frac{i\pi^2}{2} \left(-\frac{1}{2}\ln(4\pi) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& + \left[\frac{0.53i\pi a^4\epsilon^2}{16} + \frac{0.19i\pi a^4\epsilon^2}{256} \right] \left(-\frac{1}{2}\ln(4\pi) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& - \pi \left(-\frac{1}{4}\ln(8\pi) + \frac{1}{4}\ln(2\pi) + 4\pi^2 \right) \\
& + \left[\frac{0.78a^2\epsilon}{2} + \frac{0.78a^2\epsilon}{8} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(12\pi) + \frac{1}{4}\ln(4\pi) + 8\pi^2 \right) \\
& + \left[\frac{8.51i\pi a^8\epsilon^4}{73728} + \frac{0.46i\pi a^8\epsilon^4}{73728} \right] \left(-\frac{1}{2}\ln(4\pi) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{1.59a^4\epsilon^2}{4} + \frac{0.57a^4\epsilon^2}{64} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(8\pi) + \frac{1}{4}\ln(2\pi) + 4\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{a^4\epsilon^2}{12} + \frac{0.19a^4\epsilon^2}{192} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(16\pi) + \frac{1}{4}\ln(8\pi) + 12\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{0.53a^4\epsilon^2}{8b^6} + \frac{0.19a^4\epsilon^2}{128} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(16\pi) + \frac{1}{4}\ln(8\pi) + 12\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{0.43a^6\epsilon^3}{24} + \frac{0.06a^6\epsilon^3}{1536} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(20\pi) + \frac{1}{4}\ln(12\pi) + 16\pi^2 \right) \\
& + \left[\frac{0.36a^8\epsilon^4}{16} + \frac{0.02a^8\epsilon^4}{4096} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(8\pi) + \frac{1}{4}\ln(2\pi) + 4\pi^2 \right) \\
& + \left[\frac{8.28a^8\epsilon^4}{96} + \frac{0.46a^8\epsilon^4}{24576} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(16\pi) + \frac{1}{4}\ln(8\pi) + 12\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{0.36a^8\epsilon^4}{288} - \frac{0.02a^8\epsilon^4}{73728} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(24\pi) + \frac{1}{4}\ln(16\pi) + 20\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{0.79i\pi a^2\epsilon}{8} + \frac{0.78i\pi a^2\epsilon}{16} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(8\pi) + \frac{1}{2}\ln(4\pi) - \frac{1}{4}\ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{2.65i\pi a^4\epsilon^2}{24} + \frac{0.95i\pi a^4\epsilon^2}{384} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(12\pi) + \frac{1}{2}\ln(8\pi) - \frac{1}{4}\ln(4\pi) + 2\pi^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{2.15i\pi a^6 \epsilon^3}{24} + \frac{0.3i\pi a^6 \epsilon^3}{1536} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(16\pi) + \frac{1}{2} \ln(12\pi) - \frac{1}{4} \ln(8\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{0.36i\pi a^8 \epsilon^4}{48} + \frac{0.02i\pi a^8 \epsilon^4}{12288} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(20\pi) + \frac{1}{2} \ln(16\pi) - \frac{1}{4} \ln(12\pi) \right. \\
& \left. + 2\pi^2 \right) \Bigg] \tag{I.5}
\end{aligned}$$

Persamaan (I.5) adalah normalisasi fungsi gelombang, sehingga diperoleh nilai

dari N. Dengan persamaan probabilitas seperti pada :

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, t) \Psi(x, t) dx =$$

dengan integral terhadap v, σ , dan z , masing-masing memiliki batas $v_1 - v_2, \sigma_1 -$

σ_2 dan $z_1 - z_2, \eta_2 - \eta_1$ sehingga persamaan probabilitas diatas menjadi :

$$\begin{aligned}
P = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{z_1}^{z_2} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \int_{v_1}^{v_2} & \left(Srtq \ 1 \right. \\
& / \left[-i\pi \left(\frac{48\pi^3}{9} \right) + \left[\frac{0.79ia^2\epsilon}{2} + \frac{0.78ia^2\epsilon}{8} \right] \left(\frac{96\pi^3}{9} \right) \right. \\
& - \left[1.1ia^4\epsilon^2 - \frac{0.199ia^4\epsilon^2}{8} \right] \left(\frac{33\pi^3}{9} \right) - \left[\frac{0.42ia^6\epsilon^3}{24} + \frac{0.06ia^6\epsilon^3}{1536} \right] \left(\frac{192\pi^3}{9} \right) \\
& + \left[0.74ia^8\epsilon^4 + \frac{0.1ia^8\epsilon^4}{384} \right] \left(\frac{11\pi^3}{9} \right) + \frac{\pi^2}{2} \left(2\pi - \frac{16\pi^3}{9} \right) \\
& - \left[\frac{0.79\pi a^2\epsilon}{4} + \frac{0.78\pi a^2\epsilon}{16} \right] \left(2\pi - \frac{64\pi^3}{9} \right) \\
& - \left[\frac{5.5\pi a^4\beta^4\epsilon^2}{24} + \frac{0.995\pi a^4\beta^4\epsilon^2}{384} \right] \left(2\pi - \frac{60\pi^3}{9} \right) \\
& + \left[\frac{0.53\pi a^4\epsilon^2}{16} + \frac{0.199\pi a^4\epsilon^2}{256} \right] \left(2\pi - \frac{16\pi^3}{9} \right) \\
& + \left[\frac{0.42\pi a^6\epsilon^3}{8} + \frac{0.06\pi a^6\epsilon^3}{512} \right] \left(2\pi - \frac{448\pi^3}{9} \right) \\
& + \left[\frac{0.42\pi a^6\beta^6\epsilon^3}{12} + \frac{0.06\pi a^6\beta^6\epsilon^3}{768} \right] \left(2\pi - \frac{64\pi^3}{9} \right) \\
& - \left[\frac{0.36\pi a^8\epsilon^4}{48} - \frac{0.02\pi a^8\epsilon^4}{12288} \right] \left(2\pi - \frac{784\pi^3}{9} \right) \\
& + \left[\frac{8,28\pi a^8\beta^8\epsilon^4}{288} + \frac{0.46\pi a^8\epsilon^4}{73728} \right] \left(2\pi - \frac{16\pi^3}{9} \right) \\
& + \frac{i\pi^2}{2} \left(-\frac{1}{2}\ln(4\pi) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& + \left[\frac{0.53i\pi a^4\epsilon^2}{16} + \frac{0.19i\pi a^4\epsilon^2}{256} \right] \left(-\frac{1}{2}\ln(4\pi) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& - \pi \left(-\frac{1}{4}\ln(8\pi) + \frac{1}{4}\ln(2\pi) + 4\pi^2 \right) \\
& + \left[\frac{0.78a^2\epsilon}{2} + \frac{0.78a^2\epsilon}{8} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(12\pi) + \frac{1}{4}\ln(4\pi) + 8\pi^2 \right) \\
& + \left[\frac{8.51i\pi a^8\epsilon^4}{73728} + \frac{0.46i\pi a^8\epsilon^4}{73728} \right] \left(-\frac{1}{2}\ln(4\pi) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{1.59a^4\epsilon^2}{4} + \frac{0.57a^4\epsilon^2}{64} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(8\pi) + \frac{1}{4}\ln(2\pi) + 4\pi^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{a^4 \epsilon^2}{12} + \frac{0.19 a^4 \epsilon^2}{192} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(16\pi) + \frac{1}{4} \ln(8\pi) + 12\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{0.53 a^4 \epsilon^2}{8b^6} + \frac{0.19 a^4 \epsilon^2}{128} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(16\pi) + \frac{1}{4} \ln(8\pi) + 12\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{0.43 a^6 \epsilon^3}{24} + \frac{0.06 a^6 \epsilon^3}{1536} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(20\pi) + \frac{1}{4} \ln(12\pi) + 16\pi^2 \right) \\
& + \left[\frac{0.36 a^8 \epsilon^4}{16} + \frac{0.02 a^8 \epsilon^4}{4096} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(8\pi) + \frac{1}{4} \ln(2\pi) + 4\pi^2 \right) \\
& + \left[\frac{8.28 a^8 \epsilon^4}{96} + \frac{0.46 a^8 \epsilon^4}{24576} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(16\pi) + \frac{1}{4} \ln(8\pi) + 12\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{0.36 a^8 \epsilon^4}{288} - \frac{0.02 a^8 \epsilon^4}{73728} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(24\pi) + \frac{1}{4} \ln(16\pi) + 20\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{0.79 i \pi a^2 \epsilon}{8} + \frac{0.78 i \pi a^2 \epsilon}{16} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(8\pi) + \frac{1}{2} \ln(4\pi) - \frac{1}{4} \ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{2.65 i \pi a^4 \epsilon^2}{24} + \frac{0.95 i \pi a^4 \epsilon^2}{384} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(12\pi) + \frac{1}{2} \ln(8\pi) - \frac{1}{4} \ln(4\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& + \left[\frac{2.15 i \pi a^6 \epsilon^3}{24} + \frac{0.3 i \pi a^6 \epsilon^3}{1536} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(16\pi) + \frac{1}{2} \ln(12\pi) - \frac{1}{4} \ln(8\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{0.36 i \pi a^8 \epsilon^4}{48} + \frac{0.02 i \pi a^8 \epsilon^4}{12288} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(20\pi) + \frac{1}{2} \ln(16\pi) - \frac{1}{4} \ln(12\pi) \right. \\
& \left. + 2\pi^2 \right) \Big] e^{ivz} \left[\sin(z - \sigma) - \frac{a^2 \beta^2 \epsilon}{8b^3} \sin(3z - \sigma) \right. \\
& \left. + \frac{a^4 \beta^4 \epsilon^2}{b^6} \left[\frac{1}{64} \cos 2\sigma \sin(3z - \sigma) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{3}{64} \sin 2\sigma \cos(3z - \sigma) + \frac{1}{192} \sin(5z - \sigma) \right] \right] \Big] dv d\sigma dz d\eta \quad (I.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{z_1}^{z_2} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} & \left(Srtq \ 1 \right. \\
& / \left[-i\pi \left(\frac{48\pi^3}{9} \right) + \left[\frac{0.79ia^2\epsilon}{2} + \frac{0.78ia^2\epsilon}{8} \right] \left(\frac{96\pi^3}{9} \right) \right. \\
& - \left[1.1ia^4\epsilon^2 - \frac{0.199ia^4\epsilon^2}{8} \right] \left(\frac{33\pi^3}{9} \right) - \left[\frac{0.42ia^6\epsilon^3}{24} + \frac{0.06ia^6\epsilon^3}{1536} \right] \left(\frac{192\pi^3}{9} \right) \\
& + \left[0.74ia^8\epsilon^4 + \frac{0.1ia^8\epsilon^4}{384} \right] \left(\frac{11\pi^3}{9} \right) + \frac{\pi^2}{2} \left(2\pi - \frac{16\pi^3}{9} \right) \\
& - \left[\frac{0.79\pi a^2\epsilon}{4} + \frac{0.78\pi a^2\epsilon}{16} \right] \left(2\pi - \frac{64\pi^3}{9} \right) \\
& - \left[\frac{5.5\pi a^4\beta^4\epsilon^2}{24} + \frac{0.995\pi a^4\beta^4\epsilon^2}{384} \right] \left(2\pi - \frac{60\pi^3}{9} \right) \\
& + \left[\frac{0.53\pi a^4\epsilon^2}{16} + \frac{0.199\pi a^4\epsilon^2}{256} \right] \left(2\pi - \frac{16\pi^3}{9} \right) \\
& + \left[\frac{0.42\pi a^6\epsilon^3}{8} + \frac{0.06\pi a^6\epsilon^3}{512} \right] \left(2\pi - \frac{448\pi^3}{9} \right) \\
& + \left[\frac{0.42\pi a^6\beta^6\epsilon^3}{12} + \frac{0.06\pi a^6\beta^6\epsilon^3}{768} \right] \left(2\pi - \frac{64\pi^3}{9} \right) \\
& - \left[\frac{0.36\pi a^8\epsilon^4}{48} - \frac{0.02\pi a^8\epsilon^4}{12288} \right] \left(2\pi - \frac{784\pi^3}{9} \right) \\
& + \left[\frac{8,28\pi a^8\beta^8\epsilon^4}{288} + \frac{0.46\pi a^8\epsilon^4}{73728} \right] \left(2\pi - \frac{16\pi^3}{9} \right) \\
& + \frac{i\pi^2}{2} \left(-\frac{1}{2}\ln(4\pi) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& + \left[\frac{0.53i\pi a^4\epsilon^2}{16} + \frac{0.19i\pi a^4\epsilon^2}{256} \right] \left(-\frac{1}{2}\ln(4\pi) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& - \pi \left(-\frac{1}{4}\ln(8\pi) + \frac{1}{4}\ln(2\pi) + 4\pi^2 \right) \\
& + \left[\frac{0.78a^2\epsilon}{2} + \frac{0.78a^2\epsilon}{8} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(12\pi) + \frac{1}{4}\ln(4\pi) + 8\pi^2 \right) \\
& + \left[\frac{8.51i\pi a^8\epsilon^4}{73728} + \frac{0.46i\pi a^8\epsilon^4}{73728} \right] \left(-\frac{1}{2}\ln(4\pi) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{1.59a^4\epsilon^2}{4} + \frac{0.57a^4\epsilon^2}{64} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(8\pi) + \frac{1}{4}\ln(2\pi) + 4\pi^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{a^4 \epsilon^2}{12} + \frac{0.19a^4 \epsilon^2}{192} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(16\pi) + \frac{1}{4} \ln(8\pi) + 12\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{0.53a^4 \epsilon^2}{8b^6} + \frac{0.19a^4 \epsilon^2}{128} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(16\pi) + \frac{1}{4} \ln(8\pi) + 12\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{0.43a^6 \epsilon^3}{24} + \frac{0.06a^6 \epsilon^3}{1536} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(20\pi) + \frac{1}{4} \ln(12\pi) + 16\pi^2 \right) \\
& + \left[\frac{0.36a^8 \epsilon^4}{16} + \frac{0.02a^8 \epsilon^4}{4096} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(8\pi) + \frac{1}{4} \ln(2\pi) + 4\pi^2 \right) \\
& + \left[\frac{8.28a^8 \epsilon^4}{96} + \frac{0.46a^8 \epsilon^4}{24576} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(16\pi) + \frac{1}{4} \ln(8\pi) + 12\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{0.36a^8 \epsilon^4}{288} - \frac{0.02a^8 \epsilon^4}{73728} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(24\pi) + \frac{1}{4} \ln(16\pi) + 20\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{0.79i\pi a^2 \epsilon}{8} + \frac{0.78i\pi a^2 \epsilon}{16} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(8\pi) + \frac{1}{2} \ln(4\pi) - \frac{1}{4} \ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{2.65i\pi a^4 \epsilon^2}{24} + \frac{0.95i\pi a^4 \epsilon^2}{384} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(12\pi) + \frac{1}{2} \ln(8\pi) - \frac{1}{4} \ln(4\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& + \left[\frac{2.15i\pi a^6 \epsilon^3}{24} + \frac{0.3i\pi a^6 \epsilon^3}{1536} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(16\pi) + \frac{1}{2} \ln(12\pi) - \frac{1}{4} \ln(8\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{0.36i\pi a^8 \epsilon^4}{48} + \frac{0.02i\pi a^8 \epsilon^4}{12288} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(20\pi) + \frac{1}{2} \ln(16\pi) - \frac{1}{4} \ln(12\pi) \right. \\
& \left. + 2\pi^2 \right) \left] \frac{\sin(v_2 z) - i \cos(v_2 z) - \sin(v_1 z) + i \cos(v_1 z)}{z} \left[\sin(z - \sigma) \right. \right. \\
& - \frac{a^2 \beta^2 \epsilon}{8b^3} \sin(3z - \sigma) \\
& + \frac{a^4 \beta^4 \epsilon^2}{b^6} \left[\frac{1}{64} \cos 2\sigma \sin(3z - \sigma) \right. \\
& + \frac{3}{64} \sin 2\sigma \cos(3z - \sigma) \\
& \left. \left. + \frac{1}{192} \sin(5z - \sigma) \right] \right]^2 d\sigma dz d\eta \tag{I.7}
\end{aligned}$$

P

$$\begin{aligned}
&= \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{z_1}^{z_2} \left(Srtq 1 \right. \\
&/ \left[-i\pi \left(\frac{48\pi^3}{9} \right) + \left[\frac{0.79ia^2\epsilon}{2} + \frac{0.78ia^2\epsilon}{8} \right] \left(\frac{96\pi^3}{9} \right) - \left[1.1ia^4\epsilon^2 - \frac{0.199ia^4\epsilon^2}{8} \right] \left(\frac{33\pi^3}{9} \right) \right. \\
&- \left[\frac{0.42ia^6\epsilon^3}{24} + \frac{0.06ia^6\epsilon^3}{1536} \right] \left(\frac{192\pi^3}{9} \right) + \left[0.74ia^8\epsilon^4 + \frac{0.1ia^8\epsilon^4}{384} \right] \left(\frac{11\pi^3}{9} \right) + \frac{\pi^2}{2} \left(2\pi - \frac{16\pi^3}{9} \right) \\
&- \left[\frac{0.79\pi a^2\epsilon}{4} + \frac{0.78\pi a^2\epsilon}{16} \right] \left(2\pi - \frac{64\pi^3}{9} \right) - \left[\frac{5.5\pi a^4\beta^4\epsilon^2}{24} + \frac{0.995\pi a^4\beta^4\epsilon^2}{384} \right] \left(2\pi - \frac{60\pi^3}{9} \right) \\
&+ \left[\frac{0.53\pi a^4\epsilon^2}{16} + \frac{0.199\pi a^4\epsilon^2}{256} \right] \left(2\pi - \frac{16\pi^3}{9} \right) + \left[\frac{0.42\pi a^6\epsilon^3}{8} + \frac{0.06\pi a^6\epsilon^3}{512} \right] \left(2\pi - \frac{448\pi^3}{9} \right) \\
&+ \left[\frac{0.42\pi a^6\beta^6\epsilon^3}{12} + \frac{0.06\pi a^6\beta^6\epsilon^3}{768} \right] \left(2\pi - \frac{64\pi^3}{9} \right) - \left[\frac{0.36\pi a^8\epsilon^4}{48} - \frac{0.02\pi a^8\epsilon^4}{12288} \right] \left(2\pi - \frac{784\pi^3}{9} \right) \\
&+ \left[\frac{8.28\pi a^8\beta^8\epsilon^4}{288} + \frac{0.46\pi a^8\beta^8\epsilon^4}{73728} \right] \left(2\pi - \frac{16\pi^3}{9} \right) + \frac{i\pi^2}{2} \left(-\frac{1}{2}\ln(4\pi) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) \\
&+ \left[\frac{0.53i\pi a^4\epsilon^2}{16} + \frac{0.19i\pi a^4\epsilon^2}{256} \right] \left(-\frac{1}{2}\ln(4\pi) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) \\
&- \pi \left(-\frac{1}{4}\ln(8\pi) + \frac{1}{4}\ln(2\pi) + 4\pi^2 \right) + \left[\frac{0.78a^2\epsilon}{2} + \frac{0.78a^2\epsilon}{8} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(12\pi) + \frac{1}{4}\ln(4\pi) + 8\pi^2 \right) \\
&+ \left[\frac{8.51i\pi a^8\epsilon^4}{73728} + \frac{0.46i\pi a^8\epsilon^4}{73728} \right] \left(-\frac{1}{2}\ln(4\pi) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) \\
&- \left[\frac{1.59a^4\epsilon^2}{4} + \frac{0.57a^4\epsilon^2}{64} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(8\pi) + \frac{1}{4}\ln(2\pi) + 4\pi^2 \right) \\
&- \left[\frac{a^4\epsilon^2}{12} + \frac{0.19a^4\epsilon^2}{192} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(16\pi) + \frac{1}{4}\ln(8\pi) + 12\pi^2 \right) \\
&- \left[\frac{0.53a^4\epsilon^2}{8b^6} + \frac{0.19a^4\epsilon^2}{128} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(16\pi) + \frac{1}{4}\ln(8\pi) + 12\pi^2 \right) \\
&- \left[\frac{0.43a^6\epsilon^3}{24} + \frac{0.06a^6\epsilon^3}{1536} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(20\pi) + \frac{1}{4}\ln(12\pi) + 16\pi^2 \right) \\
&+ \left[\frac{0.36a^8\epsilon^4}{16} + \frac{0.02a^8\epsilon^4}{4096} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(8\pi) + \frac{1}{4}\ln(2\pi) + 4\pi^2 \right) \\
&+ \left[\frac{8.28a^8\epsilon^4}{96} + \frac{0.46a^8\epsilon^4}{24576} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(16\pi) + \frac{1}{4}\ln(8\pi) + 12\pi^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{0.36a^8\epsilon^4}{288} - \frac{0.02a^8\epsilon^4}{73728} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(24\pi) + \frac{1}{4}\ln(16\pi) + 20\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{0.79i\pi a^2\epsilon}{8} + \frac{0.78i\pi a^2\epsilon}{16} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(8\pi) + \frac{1}{2}\ln(4\pi) - \frac{1}{4}\ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{2.65i\pi a^4\epsilon^2}{24} + \frac{0.95i\pi a^4\epsilon^2}{384} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(12\pi) + \frac{1}{2}\ln(8\pi) - \frac{1}{4}\ln(4\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& + \left[\frac{2.15i\pi a^6\epsilon^3}{24} + \frac{0.3i\pi a^6\epsilon^3}{1536} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(16\pi) + \frac{1}{2}\ln(12\pi) - \frac{1}{4}\ln(8\pi) + 2\pi^2 \right) \\
& - \left[\frac{0.36i\pi a^8\epsilon^4}{48} + \frac{0.02i\pi a^8\epsilon^4}{12288} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(20\pi) + \frac{1}{2}\ln(16\pi) - \frac{1}{4}\ln(12\pi) \right. \\
& \left. + 2\pi^2 \right) \left) \frac{\sin(v_2 z) - i \cos(v_2 z) - \sin(v_1 z) + i \cos(v_1 z)}{z} \left[\frac{\sin(2z - 2\sigma_2) - \sin(2z - 2\sigma_1) + (2\sigma_2 - 2\sigma_1)}{4} \right. \\
& \left. - \frac{a^2 \beta^2 \epsilon \sin(4z - 2\sigma_2) - \sin(4z - 2\sigma_1) + (2\sigma_2 - 2\sigma_1) \cos(2z)}{4b^3} \right. \\
& + \frac{a^4 \beta^4 \epsilon^2}{32b^6} \left(\frac{\sin(4z - 4\sigma_2) - \sin(4z - 4\sigma_1) + 2 \sin(2z + 2\sigma_2) - 2 \sin(2z - 2\sigma_2) - 2 \sin(2z + 2\sigma_1)}{16} \right. \\
& \left. + \frac{2 \sin(2z - 2\sigma_1) + (4\sigma_1 - 4\sigma_2) \cos(4z)}{16} \right) \\
& - \frac{3a^4 \beta^4 \epsilon^2}{32b^6} \left(\frac{\sin(4z - 4\sigma_2) - \sin(4z - 4\sigma_1) - 2 \sin(2z + 2\sigma_2) - 2 \sin(2z - 2\sigma_2) + 2 \sin(2z + 2\sigma_1)}{16} \right. \\
& \left. + \frac{2 \sin(2z - 2\sigma_1) + (4\sigma_2 - 4\sigma_1) \cos(4z)}{16} \right) \\
& + \frac{a^4 \beta^4 \epsilon^2}{96b^6} \left(\frac{\sin(6z - 2\sigma_2) - \sin(6z - 2\sigma_1) + (2\sigma_2 - 2\sigma_1) \cos(4z)}{4} \right) \\
& + \frac{a^4 \beta^4 \epsilon^2}{64b^6} \left(\frac{\sin(6z - 2\sigma_2) - \sin(6z - 2\sigma_1) + (2\sigma_2 - 2\sigma_1)}{4} \right) \\
& - \frac{a^6 \beta^6 \epsilon^3}{256b^9} \left(\frac{\sin(6z - 2\sigma_2) - \sin(6z - 2\sigma_1) + (4\sigma_2 - 4\sigma_1) \cos(6z) + 4 \sin(2\sigma_2) - 4 \sin(2\sigma_1)}{16} \right) \\
& + \frac{3a^6 \beta^6 \epsilon^3}{256b^9} \left(\frac{\sin(6z - 4\sigma_2) - \sin(6z - 4\sigma_1) + (4\sigma_2 - 4\sigma_1) \cos(6z)}{16} \right) \\
& + \frac{a^6 \beta^6 \epsilon^3}{768b^9} \left(\frac{\sin(8z - 2\sigma_2) - \sin(8z - 2\sigma_1) + (2\sigma_2 - 2\sigma_1) \cos(2z)}{4} \right) \\
& - \frac{3a^8 \beta^8 \epsilon^4}{2048b^{12}} \left(\frac{3 \sin(6z + 2\sigma_2) + \sin(6z - 6\sigma_2) - 3 \sin(6z + 2\sigma_2) - \sin(6z - 6\sigma_2)}{48} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{a^8 \beta^8 \epsilon^4}{4096b^{12}} \left(\frac{3 \sin(6z + 2\sigma_2) - 6 \sin(6z - 2\sigma_2) - \sin(6z - 6\sigma_2) - 3 \sin(6z + 2\sigma_1) + 6 \sin(6z - 2\sigma_1)}{48} \right. \\
& + \left. \frac{\sin(6z - 6\sigma_1) - 3 \sin(4\sigma_2) - 12\sigma_2 + 3 \sin(4\sigma_1) + 12\sigma_1}{48} \right) \\
& + \frac{a^8 \beta^8 \epsilon^4}{6144b^{12}} \left(\frac{\sin(8z - 4\sigma_2) - \sin(8z - 4\sigma_1) + 2 \sin(2z + 2\sigma_2) - 2 \sin(2z - 2\sigma_2) - 2 \sin(2z + 2\sigma_1)}{16} \right. \\
& + \left. \frac{2 \sin(2z - 2\sigma_1) + (4\sigma_1 - 4\sigma_2) \cos(8z)}{16} \right) \\
& - \frac{9a^8 \beta^8 \epsilon^4}{4096b^{12}} \left(\frac{3 \sin(6z + 2\sigma_2) + 6 \sin(6z - 2\sigma_2) - \sin(6z - 6\sigma_2) - 3 \sin(6z + 2\sigma_1) - 6 \sin(6z - 2\sigma_1)}{48} \right. \\
& + \left. \frac{\sin(6z - 6\sigma_1) + 3 \sin(4\sigma_2) - 12\sigma_2 - 3 \sin(4\sigma_1) + 12\sigma_1}{48} \right) \\
& - \frac{3a^8 \beta^8 \epsilon^4}{6144b^{12}} \left(\frac{\sin(8z - 4\sigma_2) - \sin(8z - 4\sigma_1) + 2 \sin(2z + 2\sigma_2) + 2 \sin(2z - 2\sigma_2) - 2 \sin(2z + 2\sigma_1)}{16} \right. \\
& + \left. \frac{-2 \sin(2z - 2\sigma_1) + (4\sigma_1 - 4\sigma_2) \cos(8z)}{16} \right) \\
& + \frac{a^8 \beta^8 \epsilon^4}{36864b^{12}} \left(\frac{\sin(10z - 2\sigma_2) - \sin(10z - 2\sigma_1) + (2\sigma_2 - 2\sigma_1)}{4} \right) \Big] dz d\eta \tag{I.8}
\end{aligned}$$

P

$$\begin{aligned}
&= \left(Srtq 1 \right. \\
&/ \left[-i\pi \left(\frac{48\pi^3}{9} \right) + \left[\frac{0.79ia^2\epsilon}{2} + \frac{0.78ia^2\epsilon}{8} \right] \left(\frac{96\pi^3}{9} \right) - \left[1.1ia^4\epsilon^2 - \frac{0.199ia^4\epsilon^2}{8} \right] \left(\frac{33\pi^3}{9} \right) \right. \\
&- \left[\frac{0.42ia^6\epsilon^3}{24} + \frac{0.06ia^6\epsilon^3}{1536} \right] \left(\frac{192\pi^3}{9} \right) + \left[0.74ia^8\epsilon^4 + \frac{0.1ia^8\epsilon^4}{384} \right] \left(\frac{11\pi^3}{9} \right) + \frac{\pi^2}{2} \left(2\pi - \frac{16\pi^3}{9} \right) \\
&- \left[\frac{0.79\pi a^2\epsilon}{4} + \frac{0.78\pi a^2\epsilon}{16} \right] \left(2\pi - \frac{64\pi^3}{9} \right) - \left[\frac{5.5\pi a^4\beta^4\epsilon^2}{24} + \frac{0.995\pi a^4\beta^4\epsilon^2}{384} \right] \left(2\pi - \frac{60\pi^3}{9} \right) \\
&+ \left[\frac{0.53\pi a^4\epsilon^2}{16} + \frac{0.199\pi a^4\epsilon^2}{256} \right] \left(2\pi - \frac{16\pi^3}{9} \right) + \left[\frac{0.42\pi a^6\epsilon^3}{8} + \frac{0.06\pi a^6\epsilon^3}{512} \right] \left(2\pi - \frac{448\pi^3}{9} \right) \\
&+ \left[\frac{0.42\pi a^6\beta^6\epsilon^3}{12} + \frac{0.06\pi a^6\beta^6\epsilon^3}{768} \right] \left(2\pi - \frac{64\pi^3}{9} \right) - \left[\frac{0.36\pi a^8\epsilon^4}{48} - \frac{0.02\pi a^8\epsilon^4}{12288} \right] \left(2\pi - \frac{784\pi^3}{9} \right) \\
&+ \left[\frac{8.28\pi a^8\beta^8\epsilon^4}{288} + \frac{0.46\pi a^8\beta^8\epsilon^4}{73728} \right] \left(2\pi - \frac{16\pi^3}{9} \right) + \frac{i\pi^2}{2} \left(-\frac{1}{2}\ln(4\pi) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) \\
&+ \left[\frac{0.53i\pi a^4\epsilon^2}{16} + \frac{0.19i\pi a^4\epsilon^2}{256} \right] \left(-\frac{1}{2}\ln(4\pi) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) - \pi \left(-\frac{1}{4}\ln(8\pi) + \frac{1}{4}\ln(2\pi) + 4\pi^2 \right) \\
&+ \left[\frac{0.78a^2\epsilon}{2} + \frac{0.78a^2\epsilon}{8} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(12\pi) + \frac{1}{4}\ln(4\pi) + 8\pi^2 \right) \\
&+ \left[\frac{8.51i\pi a^8\epsilon^4}{73728} + \frac{0.46i\pi a^8\epsilon^4}{73728} \right] \left(-\frac{1}{2}\ln(4\pi) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) \\
&- \left[\frac{1.59a^4\epsilon^2}{4} + \frac{0.57a^4\epsilon^2}{64} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(8\pi) + \frac{1}{4}\ln(2\pi) + 4\pi^2 \right) \\
&- \left[\frac{a^4\epsilon^2}{12} + \frac{0.19a^4\epsilon^2}{192} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(16\pi) + \frac{1}{4}\ln(8\pi) + 12\pi^2 \right) \\
&- \left[\frac{0.53a^4\epsilon^2}{8b^6} + \frac{0.19a^4\epsilon^2}{128} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(16\pi) + \frac{1}{4}\ln(8\pi) + 12\pi^2 \right) \\
&- \left[\frac{0.43a^6\epsilon^3}{24} + \frac{0.06a^6\epsilon^3}{1536} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(20\pi) + \frac{1}{4}\ln(12\pi) + 16\pi^2 \right) \\
&+ \left[\frac{0.36a^8\epsilon^4}{16} + \frac{0.02a^8\epsilon^4}{4096} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(8\pi) + \frac{1}{4}\ln(2\pi) + 4\pi^2 \right) \\
&+ \left[\frac{8.28a^8\epsilon^4}{96} + \frac{0.46a^8\epsilon^4}{24576} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(16\pi) + \frac{1}{4}\ln(8\pi) + 12\pi^2 \right) \\
&- \left[\frac{0.36a^8\epsilon^4}{288} - \frac{0.02a^8\epsilon^4}{73728} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(24\pi) + \frac{1}{4}\ln(16\pi) + 20\pi^2 \right) \\
&- \left[\frac{0.79i\pi a^2\epsilon}{8} + \frac{0.78i\pi a^2\epsilon}{16} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(8\pi) + \frac{1}{2}\ln(4\pi) - \frac{1}{4}\ln(2\pi) + 2\pi^2 \right) \\
&- \left[\frac{2.65i\pi a^4\epsilon^2}{24} + \frac{0.95i\pi a^4\epsilon^2}{384} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(12\pi) + \frac{1}{2}\ln(8\pi) - \frac{1}{4}\ln(4\pi) + 2\pi^2 \right) \\
&+ \left[\frac{2.15i\pi a^6\epsilon^3}{24} + \frac{0.3i\pi a^6\epsilon^3}{1536} \right] \left(-\frac{1}{4}\ln(16\pi) + \frac{1}{2}\ln(12\pi) - \frac{1}{4}\ln(8\pi) + 2\pi^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{0.36i\pi a^8 \epsilon^4}{48} + \frac{0.02i\pi a^8 \epsilon^4}{12288} \right] \left(-\frac{1}{4} \ln(20\pi) + \frac{1}{2} \ln(16\pi) - \frac{1}{4} \ln(12\pi) + 2\pi^2 \right) \Bigg) \\
& - \left[\frac{(\sin(2\sigma_2) + i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) - \sin(2\sigma_1)) \left((v_2 + 2)z_2 - (v_2 + 2)z_1 - \frac{((v_2 + 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 2)z_1)^3}{18} \right)}{8} \right. \\
& + \frac{(-i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) + \cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_2 + 2)z_2) - \ln((v_2 + 2)z_1) - \frac{((v_2 + 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 2)z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& + \frac{-4(\sigma_2 - 2\sigma_1) \left((v_2 z_2) - (v_2 z_1) - \frac{(v_2 z_2)^3}{18} + \frac{(v_2 z_1)^3}{18} \right) + 4i(\sigma_2 - 2\sigma_1) \left(\ln(v_2 z_2) - \ln(v_2 z_1) - \frac{(v_2 z_2)^2}{4} + \frac{(v_2 z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& + \frac{(\sin(2\sigma_2) - i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1) - \sin(2\sigma_1)) \left((v_2 + 2)z_2 - (v_2 + 2)z_1 - \frac{((v_2 + 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 2)z_1)^3}{18} \right)}{8} \\
& + \frac{(-i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) - \cos(2\sigma_2) + \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_2 + 2)z_2) - \ln((v_2 + 2)z_1) - \frac{((v_2 + 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 2)z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& + \frac{(-\sin(2\sigma_2) - i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) + \sin(2\sigma_1)) \left((v_1 + 2)z_2 - (v_1 + 2)z_1 - \frac{((v_1 + 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 2)z_1)^3}{18} \right)}{8} \\
& + \frac{(i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) - \cos(2\sigma_2) + \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_1 + 2)z_2) - \ln((v_1 + 2)z_1) - \frac{((v_1 + 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 2)z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& + \frac{4(\sigma_2 - 2\sigma_1) \left((v_1 z_2) - (v_1 z_1) - \frac{(v_1 z_2)^3}{18} + \frac{(v_1 z_1)^3}{18} \right) - 4i(\sigma_2 - 2\sigma_1) \left(\ln(v_1 z_2) - \ln(v_1 z_1) - \frac{(v_1 z_2)^2}{4} + \frac{(v_1 z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& + \frac{(-\sin(2\sigma_2) + i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1) + \sin(2\sigma_1)) \left((v_1 + 2)z_2 - (v_1 + 2)z_1 - \frac{((v_1 + 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 2)z_1)^3}{18} \right)}{8} \\
& + \left. \frac{(i(\sin(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1) + \cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_1 + 2)z_2) - \ln((v_1 + 2)z_1) - \frac{((v_1 + 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 2)z_1)^2}{4} \right)}{8} \right) \\
& + \frac{a^2 \beta^2 \epsilon}{4b^3} \left[\frac{(\sin(2\sigma_2) + i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) - \sin(2\sigma_1)) \left((v_2 + 4)z_2 - (v_2 + 4)z_1 - \frac{((v_2 + 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 4)z_1)^3}{18} \right)}{8} \right. \\
& + \left. \frac{(-i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) + \cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_2 + 4)z_2) - \ln((v_2 + 4)z_1) - \frac{((v_2 + 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 4)z_1)^2}{4} \right)}{8} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(\sin(2\sigma_2) - i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) - \sin(2\sigma_1)) \left((v_2 - 4)z_2 - (v_2 - 4)z_1 - \frac{((v_2 - 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 4)z_1)^3}{18} \right)}{8} \\
& + \frac{(-i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) - \cos(2\sigma_2) + \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_2 - 4)z_2) - \ln((v_2 - 4)z_1) - \frac{((v_2 - 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 4)z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& + \frac{(-\sin(2\sigma_2) - i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) + \sin(2\sigma_1)) \left((v_1 + 4)z_2 - (v_1 + 4)z_1 - \frac{((v_1 + 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 4)z_1)^3}{18} \right)}{8} \\
& + \frac{(i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) - \cos(2\sigma_2) + \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_1 + 4)z_2) - \ln((v_1 + 4)z_1) - \frac{((v_1 + 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 4)z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& + \frac{(\sin(2\sigma_2) - i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) - \sin(2\sigma_1)) \left((v_1 - 4)z_2 - (v_1 - 4)z_1 - \frac{((v_1 - 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 4)z_1)^3}{18} \right)}{8} \\
& + \frac{(i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) - \cos(2\sigma_2) + \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_1 - 4)z_2) - \ln((v_1 - 4)z_1) - \frac{((v_1 - 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 4)z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& - \frac{(x_2 - x_1) \left((v_2 + 2)z_2 - (v_2 + 2)z_1 - \frac{((v_2 + 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 2)z_1)^3}{18} \right)}{4} \\
& - \frac{(x_2 - x_1) \left((v_2 - 2)z_2 - (v_2 - 2)z_1 - \frac{((v_2 - 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 2)z_1)^3}{18} \right)}{4} \\
& + \frac{i(x_2 - x_1) \left(\ln((v_2 + 2)z_2) - \ln((v_2 + 2)z_1) - \frac{((v_2 + 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 2)z_1)^2}{4} \right)}{4} \\
& + \frac{i(x_2 - x_1) \left(\ln((v_2 - 2)z_2) - \ln((v_2 - 2)z_1) - \frac{((v_2 - 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 2)z_1)^2}{4} \right)}{4} \\
& + \frac{(x_2 - x_1) \left((v_1 + 2)z_2 - (v_1 + 2)z_1 - \frac{((v_1 + 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 2)z_1)^3}{18} \right)}{4} \\
& + \frac{(x_2 - x_1) \left((v_1 - 2)z_2 - (v_1 - 2)z_1 - \frac{((v_1 - 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 2)z_1)^3}{18} \right)}{4} \\
& - \frac{i(x_2 - x_1) \left(\ln((v_1 + 2)z_2) - \ln((v_1 + 2)z_1) - \frac{((v_1 + 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 2)z_1)^2}{4} \right)}{4} \\
& - \frac{i(x_2 - x_1) \left(\ln((v_1 - 2)z_2) - \ln((v_1 - 2)z_1) - \frac{((v_1 - 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 2)z_1)^2}{4} \right)}{4} \Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{a^4 \beta^4 \epsilon^2}{32b^6} \left[\frac{(\sin(4\sigma_2) + i(\cos(4\sigma_2) - \cos(4\sigma_1)) - \sin(4\sigma_1)) \left((v_2 + 4)z_2 - (v_2 + 4)z_1 - \frac{((v_2 + 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 4)z_1)^3}{18} \right)}{32} \right. \\
& + \frac{(-i(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1)) + \cos(4\sigma_2) - \cos(4\sigma_1)) \left(\ln((v_2 + 4)z_2) - \ln((v_2 + 4)z_1) - \frac{((v_2 + 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 4)z_1)^2}{4} \right)}{32} \\
& + \frac{(\sin(4\sigma_2) - i(\cos(4\sigma_2) - \cos(4\sigma_1)) - \sin(4\sigma_1)) \left((v_2 - 4)z_2 - (v_2 - 4)z_1 - \frac{((v_2 - 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 4)z_1)^3}{18} \right)}{32} \\
& + \frac{(-i(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1)) - \cos(4\sigma_2) + \cos(4\sigma_1)) \left(\ln((v_2 - 4)z_2) - \ln((v_2 - 4)z_1) - \frac{((v_2 - 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 4)z_1)^2}{4} \right)}{32} \\
& + \frac{(-\sin(4\sigma_2) - i(\cos(4\sigma_2) - \cos(4\sigma_1)) + \sin(4\sigma_1)) \left((v_1 + 4)z_2 - (v_1 + 4)z_1 - \frac{((v_1 + 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 4)z_1)^3}{18} \right)}{32} \\
& + \frac{(i(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1)) - \cos(4\sigma_2) + \cos(4\sigma_1)) \left(\ln((v_1 + 4)z_2) - \ln((v_1 + 4)z_1) - \frac{((v_1 + 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 4)z_1)^2}{4} \right)}{32} \\
& + \frac{(-\sin(4\sigma_2) - i(\cos(4\sigma_2) - \cos(4\sigma_1)) - \sin(4\sigma_1)) \left((v_1 - 4)z_2 - (v_1 - 4)z_1 - \frac{((v_1 - 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 4)z_1)^3}{18} \right)}{32} \\
& + \frac{(i(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1)) + \cos(4\sigma_2) - \cos(4\sigma_1)) \left(\ln((v_1 - 4)z_2) - \ln((v_1 - 4)z_1) - \frac{((v_1 - 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 4)z_1)^2}{4} \right)}{32} \\
& - \frac{(2 \sin(2\sigma_2) + i \cos(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) \left((v_2 + 2)z_2 - (v_2 + 2)z_1 - \frac{((v_2 + 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 2)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& - \frac{(-2i \sin(2\sigma_2) + i \sin(2\sigma_1) + \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_2 + 2)z_2) - \ln((v_2 + 2)z_1) - \frac{((v_2 + 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 2)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& - \frac{(2 \sin(2\sigma_2) - i \cos(2\sigma_1) - \sin(2\sigma_1)) \left((v_2 - 2)z_2 - (v_2 - 2)z_1 - \frac{((v_2 - 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 2)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& - \frac{(-2i \sin(2\sigma_2) + i \sin(2\sigma_1) - \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_2 - 2)z_2) - \ln((v_2 - 2)z_1) - \frac{((v_2 - 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 2)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& - \frac{(-2 \sin(2\sigma_2) - i \cos(2\sigma_1) + \sin(2\sigma_1)) \left((v_1 + 2)z_2 - (v_1 + 2)z_1 - \frac{((v_1 + 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 2)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& - \frac{(i(2 \sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) - \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_1 + 2)z_2) - \ln((v_1 + 2)z_1) - \frac{((v_1 + 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 2)z_1)^2}{4} \right)}{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(-2 \sin(2\sigma_2) + i \cos(2\sigma_1) + \sin(2\sigma_1)) \left((v_1 - 2)z_2 - (v_1 - 2)z_1 - \frac{((v_1 - 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 2)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& \frac{(i(2 \sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) + \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_1 - 2)z_2) - \ln((v_1 - 2)z_1) - \frac{((v_1 - 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 2)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& \frac{(-2 \sin(2\sigma_1) - i \cos(2\sigma_2)) \left((v_2 + 2)z_2 - (v_2 + 2)z_1 - \frac{((v_2 + 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 2)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& \frac{(i \sin(2\sigma_1) - \cos(2\sigma_2)) \left(\ln((v_2 + 2)z_2) - \ln((v_2 + 2)z_1) - \frac{((v_2 + 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 2)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& \frac{(-\sin(2\sigma_1) + i \cos(2\sigma_2)) \left((v_2 - 2)z_2 - (v_2 - 2)z_1 - \frac{((v_2 - 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 2)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& \frac{(i \sin(2\sigma_1) + \cos(2\sigma_2)) \left(\ln((v_2 - 2)z_2) - \ln((v_2 - 2)z_1) - \frac{((v_2 - 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 2)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& \frac{(\sin(2\sigma_1) + i \cos(2\sigma_2)) \left((v_1 + 2)z_2 - (v_1 + 2)z_1 - \frac{((v_1 + 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 2)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& \frac{(-i \sin(2\sigma_1) + \cos(2\sigma_2)) \left(\ln((v_1 + 2)z_2) - \ln((v_1 + 2)z_1) - \frac{((v_1 + 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 2)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& \frac{(\sin(2\sigma_1) - i \cos(2\sigma_2)) \left((v_1 - 2)z_2 - (v_1 - 2)z_1 - \frac{((v_1 - 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 2)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& \frac{(-i \sin(2\sigma_1) - \cos(2\sigma_2)) \left(\ln((v_1 - 2)z_2) - \ln((v_1 - 2)z_1) - \frac{((v_1 - 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 2)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& + \frac{(2x_1 - 2x_2) \left((v_2 + 4)z_2 - (v_2 + 4)z_1 - \frac{((v_2 + 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 4)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& \frac{(2x_1 - 2x_2) \left((v_2 - 4)z_2 - (v_2 - 4)z_1 - \frac{((v_2 - 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 4)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& + \frac{(2ix_2 - 2ix_1) \left(\ln((v_2 + 4)z_2) - \ln((v_2 + 4)z_1) - \frac{((v_2 + 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 4)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& \frac{(2ix_2 - 2ix_1) \left(\ln((v_2 - 4)z_2) - \ln((v_2 - 4)z_1) - \frac{((v_2 - 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 4)z_1)^2}{4} \right)}{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(2x_2 - 2x_1) \left((v_1 + 4)z_2 - (v_1 + 4)z_1 - \frac{((v_1 + 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 4)z_1)^3}{18} \right)}{4} \\
& + \frac{(2x_2 - 2x_1) \left((v_1 - 4)z_2 - (v_1 - 4)z_1 - \frac{((v_1 - 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 4)z_1)^3}{18} \right)}{4} \\
& + \frac{(2ix_2 - 2ix_1) \left(\ln((v_1 + 4)z_2) - \ln((v_1 + 4)z_1) - \frac{((v_1 + 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 4)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& + \frac{(2ix_2 - 2ix_1) \left(\ln((v_1 - 4)z_2) - \ln((v_1 - 4)z_1) - \frac{((v_1 - 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 4)z_1)^2}{4} \right)}{16} \Bigg] \\
& + \frac{3a^4\beta^4\epsilon^2}{32b^6} \left[\frac{(\sin(4\sigma_2) + i(\cos(4\sigma_2) - \cos(4\sigma_1)) - \sin(4\sigma_1)) \left((v_2 + 4)z_2 - (v_2 + 4)z_1 - \frac{((v_2 + 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 4)z_1)^3}{18} \right)}{32} \right. \\
& + \frac{(-i(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1)) + \cos(4\sigma_2) - \cos(4\sigma_1)) \left(\ln((v_2 + 4)z_2) - \ln((v_2 + 4)z_1) - \frac{((v_2 + 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 4)z_1)^2}{4} \right)}{32} \\
& + \frac{(\sin(4\sigma_2) - i(\cos(4\sigma_2) - \cos(4\sigma_1)) - \sin(4\sigma_1)) \left((v_2 - 4)z_2 - (v_2 - 4)z_1 - \frac{((v_2 - 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 4)z_1)^3}{18} \right)}{32} \\
& + \frac{(-i(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1)) - \cos(4\sigma_2) + \cos(4\sigma_1)) \left(\ln((v_2 - 4)z_2) - \ln((v_2 - 4)z_1) - \frac{((v_2 - 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 4)z_1)^2}{4} \right)}{32} \\
& + \frac{(-\sin(4\sigma_2) - i(\cos(4\sigma_2) - \cos(4\sigma_1)) + \sin(4\sigma_1)) \left((v_1 + 4)z_2 - (v_1 + 4)z_1 - \frac{((v_1 + 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 4)z_1)^3}{18} \right)}{32} \\
& + \frac{(i(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1)) - \cos(4\sigma_2) + \cos(4\sigma_1)) \left(\ln((v_1 + 4)z_2) - \ln((v_1 + 4)z_1) - \frac{((v_1 + 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 4)z_1)^2}{4} \right)}{32} \\
& + \frac{(-\sin(4\sigma_2) + i(\cos(4\sigma_2) + \cos(4\sigma_1)) - \sin(4\sigma_1)) \left((v_1 - 4)z_2 - (v_1 - 4)z_1 - \frac{((v_1 - 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 4)z_1)^3}{18} \right)}{32} \\
& + \frac{(i(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1)) + \cos(4\sigma_2) - \cos(4\sigma_1)) \left(\ln((v_1 - 4)z_2) - \ln((v_1 - 4)z_1) - \frac{((v_1 - 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 4)z_1)^2}{4} \right)}{32} \\
& - \frac{(-\sin(2\sigma_2) + i \cos(2\sigma_2) + 2 \sin(2\sigma_1)) \left((v_2 + 2)z_2 - (v_2 + 2)z_1 - \frac{((v_2 + 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 2)z_1)^3}{18} \right)}{16}
\end{aligned}$$

$$\frac{(i \sin(2\sigma_2) - 2i \sin(2\sigma_1) + \cos(2\sigma_2)) \left(\ln((v_2 + 2)z_2) - \ln((v_2 + 2)z_1) - \frac{((v_2 + 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 2)z_1)^2}{4} \right)}{16}$$

$$\frac{(-\sin(2\sigma_2) - i \cos(2\sigma_2) + 2 \sin(2\sigma_1)) \left((v_2 - 2)z_2 - (v_2 - 2)z_1 - \frac{((v_2 - 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 2)z_1)^3}{18} \right)}{16}$$

$$\frac{(i \sin(2\sigma_2) - 2i \sin(2\sigma_1) - \cos(2\sigma_2)) \left(\ln((v_2 - 2)z_2) - \ln((v_2 - 2)z_1) - \frac{((v_2 - 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 2)z_1)^2}{4} \right)}{16}$$

$$\frac{(\sin(2\sigma_2) - i \cos(2\sigma_2) - 2 \sin(2\sigma_1)) \left((v_1 + 2)z_2 - (v_1 + 2)z_1 - \frac{((v_1 + 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 2)z_1)^3}{18} \right)}{16}$$

$$\frac{(i(2 \sin(2\sigma_1) - \sin(2\sigma_2)) - \cos(2\sigma_2)) \left(\ln((v_1 + 2)z_2) - \ln((v_1 + 2)z_1) - \frac{((v_1 + 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 2)z_1)^2}{4} \right)}{16}$$

$$\frac{(\sin(2\sigma_2) + i \cos(2\sigma_2) - 2 \sin(2\sigma_1)) \left((v_1 - 2)z_2 - (v_1 - 2)z_1 - \frac{((v_1 - 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 2)z_1)^3}{18} \right)}{16}$$

$$\frac{(i(-\sin(2\sigma_2) + 2 \sin(2\sigma_1)) + \cos(2\sigma_2)) \left(\ln((v_1 - 2)z_2) - \ln((v_1 - 2)z_1) - \frac{((v_1 - 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 2)z_1)^2}{4} \right)}{16}$$

$$\frac{(-2 \sin(2\sigma_1) - i \cos(2\sigma_1)) \left((v_2 + 2)z_2 - (v_2 + 2)z_1 - \frac{((v_2 + 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 2)z_1)^3}{18} \right)}{16}$$

$$\frac{(i \sin(2\sigma_1) - \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_2 + 2)z_2) - \ln((v_2 + 2)z_1) - \frac{((v_2 + 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 2)z_1)^2}{4} \right)}{16}$$

$$\frac{(-\sin(2\sigma_1) + i \cos(2\sigma_1)) \left((v_2 - 2)z_2 - (v_2 - 2)z_1 - \frac{((v_2 - 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 2)z_1)^3}{18} \right)}{16}$$

$$\frac{(i \sin(2\sigma_1) + \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_2 - 2)z_2) - \ln((v_2 - 2)z_1) - \frac{((v_2 - 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 2)z_1)^2}{4} \right)}{16}$$

$$\frac{(\sin(2\sigma_1) + i \cos(2\sigma_1)) \left((v_1 + 2)z_2 - (v_1 + 2)z_1 - \frac{((v_1 + 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 2)z_1)^3}{18} \right)}{16}$$

$$\frac{(-i \sin(2\sigma_1) + \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_1 + 2)z_2) - \ln((v_1 + 2)z_1) - \frac{((v_1 + 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 2)z_1)^2}{4} \right)}{16}$$

$$\frac{(\sin(2\sigma_1) - i \cos(2\sigma_1)) \left((v_1 - 2)z_2 - (v_1 - 2)z_1 - \frac{((v_1 - 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 2)z_1)^3}{18} \right)}{16}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(-i \sin(2\sigma_1) - \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_1 - 2)z_2) - \ln((v_1 - 2)z_1) - \frac{((v_1 - 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 2)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& - \frac{(2x_2 - 2x_1) \left((v_2 + 4)z_2 - (v_2 + 4)z_1 - \frac{((v_2 + 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 4)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& - \frac{(2x_2 - 2x_1) + \left((v_2 - 4)z_2 - (v_2 - 4)z_1 - \frac{((v_2 - 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 4)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& + \frac{(2ix_2 - 2ix_1) \left(\ln((v_2 + 4)z_2) - \ln((v_2 + 4)z_1) - \frac{((v_2 + 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 4)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& + \frac{(2ix_2 - 2ix_1) \left(\ln((v_2 - 4)z_2) - \ln((v_2 - 4)z_1) - \frac{((v_2 - 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 4)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& + \frac{(2x_2 - 2x_1) \left((v_1 + 4)z_2 - (v_1 + 4)z_1 - \frac{((v_1 + 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 4)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& + \frac{(2x_2 - 2x_1) \left((v_1 - 4)z_2 - (v_1 - 4)z_1 - \frac{((v_1 - 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 4)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& - \frac{(2ix_2 - 2ix_1) \left(\ln((v_1 + 4)z_2) - \ln((v_1 + 4)z_1) - \frac{((v_1 + 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 4)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& - \frac{(2ix_2 - 2ix_1) \left(\ln((v_1 - 4)z_2) - \ln((v_1 - 4)z_1) - \frac{((v_1 - 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 4)z_1)^2}{4} \right)}{16} \Bigg] \\
& + \frac{a^4 \beta^4 \epsilon^2}{96b^6} \left[\frac{(-\sin(2\sigma_2) - i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) + \sin(2\sigma_1)) \left((v_2 + 6)z_2 - (v_2 + 6)z_1 - \frac{((v_2 + 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 6)z_1)^3}{18} \right)}{8} \right. \\
& + \frac{(i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) - \cos(2\sigma_2) + \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_2 + 6)z_2) - \ln((v_2 + 6)z_1) - \frac{((v_2 + 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 6)z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& + \frac{(-\sin(2\sigma_2) + i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) + \sin(2\sigma_1)) \left((v_2 - 6)z_2 - (v_2 - 6)z_1 - \frac{((v_2 - 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 6)z_1)^3}{18} \right)}{8} \\
& \left. + \frac{(i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) + \cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_2 - 6)z_2) - \ln((v_2 - 6)z_1) - \frac{((v_2 - 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 6)z_1)^2}{4} \right)}{8} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(-\sin(2\sigma_2) + i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1) + \sin(2\sigma_1))) \left((v_1 + 6)z_2 - (v_1 + 6)z_1 - \frac{((v_1 + 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 6)z_1)^3}{18} \right)}{8} \\
& + \frac{(-i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) - \cos(2\sigma_2) + \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_1 + 6)z_2) - \ln((v_1 + 6)z_1) - \frac{((v_1 + 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 6)z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& + \frac{(-\sin(2\sigma_2) - i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1) + \sin(2\sigma_1))) \left((v_1 - 6)z_2 - (v_1 - 6)z_1 - \frac{((v_1 - 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 6)z_1)^3}{18} \right)}{8} \\
& + \frac{(-i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) - \cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_1 - 6)z_2) - \ln((v_1 - 6)z_1) - \frac{((v_1 - 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 6)z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& + \frac{(x_2 - x_1) \left((v_2 + 4)z_2 - (v_2 + 4)z_1 - \frac{((v_2 + 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 4)z_1)^3}{18} \right)}{8} \\
& + \frac{(x_2 - x_1) \left((v_2 - 4)z_2 - (v_2 - 4)z_1 - \frac{((v_2 - 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 4)z_1)^3}{18} \right)}{8} \\
& - \frac{i(x_2 - x_1) \left(\ln((v_2 + 4)z_2) - \ln((v_2 + 4)z_1) - \frac{((v_2 + 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 4)z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& - \frac{i(x_2 - x_1) \left(\ln((v_2 - 4)z_2) - \ln((v_2 - 4)z_1) - \frac{((v_2 - 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 4)z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& + \frac{(x_2 - x_1) \left((v_1 + 4)z_2 - (v_1 + 4)z_1 - \frac{((v_1 + 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 4)z_1)^3}{18} \right)}{8} \\
& + \frac{(x_2 - x_1) \left((v_1 - 4)z_2 - (v_1 - 4)z_1 - \frac{((v_1 - 4)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 4)z_1)^3}{18} \right)}{8} \\
& + \frac{i(x_2 - x_1) \left(\ln((v_1 + 4)z_2) - \ln((v_1 + 4)z_1) - \frac{((v_1 + 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 4)z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& - \frac{i(x_2 - x_1) \left(\ln((v_1 - 4)z_2) - \ln((v_1 - 4)z_1) - \frac{((v_1 - 4)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 4)z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& - \frac{\alpha^4 \beta^4 \epsilon^2}{64b^6} \left[\frac{(\sin(2\sigma_2) + i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) - \sin(2\sigma_1)) \left((v_2 + 6)z_2 - (v_2 + 6)z_1 - \frac{((v_2 + 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 6)z_1)^3}{18} \right)}{8} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(-i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) + \cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_2 + 6)z_2) - \ln((v_2 + 6)z_1) - \frac{((v_2 + 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 6)z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& + \frac{-4(\sigma_2 - \sigma_1) \left((v_2 z_2) - (v_2 z_1) - \frac{(v_2 z_2)^3}{18} + \frac{(v_2 z_1)^3}{18} \right) + 4i(\sigma_2 - \sigma_1) \left(\ln(v_2 z_2) - \ln(v_2 z_1) - \frac{(v_2 z_2)^2}{4} + \frac{(v_2 z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& + \frac{(\sin(2\sigma_2) - i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1) - \sin(2\sigma_1))) \left((v_2 - 6)z_2 - (v_2 - 6)z_1 - \frac{((v_2 - 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 6)z_1)^3}{18} \right)}{8} \\
& + \frac{(-i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) - \cos(2\sigma_2) + \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_2 - 6)z_2) - \ln((v_2 - 6)z_1) - \frac{((v_2 - 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 6)z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& + \frac{(\sin(2\sigma_2) - i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) - \sin(2\sigma_1)) \left((v_1 + 6)z_2 - (v_1 + 6)z_1 - \frac{((v_1 + 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 6)z_1)^3}{18} \right)}{8} \\
& + \frac{(i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) + \cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_1 + 6)z_2) - \ln((v_1 + 6)z_1) - \frac{((v_1 + 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 6)z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& + \frac{-4(\sigma_2 - \sigma_1) \left((v_1 z_2) - (v_1 z_1) - \frac{(v_1 z_2)^3}{18} + \frac{(v_1 z_1)^3}{18} \right) - 4i(\sigma_2 - 2\sigma_1) \left(\ln(v_1 z_2) - \ln(v_1 z_1) - \frac{(v_1 z_2)^2}{4} + \frac{(v_1 z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& + \frac{(\sin(2\sigma_2) + i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1) - \sin(2\sigma_1))) \left((v_1 - 6)z_2 - (v_1 - 6)z_1 - \frac{((v_1 - 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 6)z_1)^3}{18} \right)}{8} \\
& + \frac{(i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1) - \cos(2\sigma_2) + \cos(2\sigma_1))) \left(\ln((v_1 - 6)z_2) - \ln((v_1 - 6)z_1) - \frac{((v_1 - 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 6)z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& + \frac{a^6 \beta^6 \epsilon^3}{256b^9} \left[\frac{(\sin(2\sigma_2) + i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) - \sin(2\sigma_1)) \left((v_2 + 6)z_2 - (v_2 + 6)z_1 - \frac{((v_2 + 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 6)z_1)^3}{18} \right)}{32} \right. \\
& + \frac{(-i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) + \cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_2 + 6)z_2) - \ln((v_2 + 6)z_1) - \frac{((v_2 + 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 6)z_1)^2}{4} \right)}{32} \\
& + \frac{(\sin(2\sigma_2) - i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) - \sin(2\sigma_1)) \left((v_2 - 6)z_2 - (v_2 - 6)z_1 - \frac{((v_2 - 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 6)z_1)^3}{18} \right)}{32} \\
& \left. + \frac{(-i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) - \cos(2\sigma_2) + \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_2 - 6)z_2) - \ln((v_2 - 6)z_1) - \frac{((v_2 - 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 6)z_1)^2}{4} \right)}{32} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(-\sin(2\sigma_2) - i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1) + \sin(2\sigma_1))) \left((v_1 + 6)z_2 - (v_1 + 6)z_1 - \frac{((v_1 + 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 6)z_1)^3}{18} \right)}{32} \\
& + \frac{(i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) - \cos(2\sigma_2) + \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_1 + 6)z_2) - \ln((v_1 + 6)z_1) - \frac{((v_1 + 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 6)z_1)^2}{4} \right)}{32} \\
& + \frac{(-\sin(2\sigma_2) + i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1) + \sin(2\sigma_1))) \left((v_1 - 6)z_2 - (v_1 - 6)z_1 - \frac{((v_1 - 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 6)z_1)^3}{18} \right)}{32} \\
& + \frac{(i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) + \cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_1 - 6)z_2) - \ln((v_1 - 6)z_1) - \frac{((v_1 - 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 6)z_1)^2}{4} \right)}{32} \\
& - \frac{2(x_2 - x_1) \left((v_2 + 6)z_2 - (v_2 + 6)z_1 - \frac{((v_2 + 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 6)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& + \frac{2i(x_2 - x_1) \left(\ln((v_2 + 6)z_2) - \ln((v_2 + 6)z_1) - \frac{((v_2 + 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 6)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& - \frac{2(x_2 - x_1) \left(\ln((v_2 - 6)z_2) - \ln((v_2 - 6)z_1) - \frac{((v_2 - 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 6)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& + \frac{2(x_2 - x_1) \left(\ln((v_1 + 6)z_2) - \ln((v_1 + 6)z_1) - \frac{((v_1 + 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 6)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& + \frac{2(x_2 - x_1) \left(\ln((v_1 - 6)z_2) - \ln((v_1 - 6)z_1) - \frac{((v_1 - 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 6)z_1)^2}{4} \right)}{4} \\
& - \frac{2(x_2 - x_1) \left((v_2 - 6)z_2 - (v_2 - 6)z_1 - \frac{((v_2 - 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 6)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& + \frac{2i(x_2 - x_1) \left((v_1 + 6)z_2 - (v_1 + 6)z_1 - \frac{((v_1 + 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 6)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& + \frac{2i(x_2 - x_1) \left((v_1 - 6)z_2 - (v_1 - 6)z_1 - \frac{((v_1 - 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 6)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& - \frac{4(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) \left((v_2z_2) - (v_2z_1) - \frac{(v_2z_2)^3}{18} + \frac{(v_2z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& + \frac{4i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) \left(\ln(v_2z_2) - \ln(v_2z_1) - \frac{(v_2z_2)^2}{4} + \frac{(v_2z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& + \frac{4(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) \left((v_1z_2) - (v_1z_1) - \frac{(v_1z_2)^3}{18} + \frac{(v_1z_1)^3}{18} \right)}{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{4i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) \left(\ln(v_1 z_2) - \ln(v_1 z_1) - \frac{(v_1 z_2)^2}{4} + \frac{(v_1 z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& + \frac{a^8 \beta^8 \epsilon^4}{4096 b^{12}} \left[\frac{(\sin(6\sigma_2) + i(\cos(6\sigma_2) + 3\cos(2\sigma_2)) + 9\sin(2\sigma_2)) \left((v_2 + 6)z_2 - (v_2 + 6)z_1 - \frac{((v_2 + 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 6)z_1)^3}{18} \right)}{96} \right. \\
& - \frac{(-i(\sin(6\sigma_2) + 9\sin(2\sigma_2)) + \cos(6\sigma_2) + 3\cos(2\sigma_2)) \left(\ln((v_2 + 6)z_2) - \ln((v_2 + 6)z_1) - \frac{((v_2 + 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 6)z_1)^2}{4} \right)}{96} \\
& - \frac{(\sin(6\sigma_2) - i(\cos(6\sigma_2) + 3\cos(2\sigma_2) + 9\sin(2\sigma_2))) \left((v_2 - 6)z_2 - (v_2 - 6)z_1 - \frac{((v_2 - 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 6)z_1)^3}{18} \right)}{96} \\
& - \frac{(-i(\sin(6\sigma_2) + 9\sin(2\sigma_2)) - \cos(6\sigma_2) - 3\cos(2\sigma_2)) \left(\ln((v_2 - 6)z_2) - \ln((v_2 - 6)z_1) - \frac{((v_2 - 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 6)z_1)^2}{4} \right)}{96} \\
& - \frac{(-\sin(6\sigma_2) - i(\cos(6\sigma_2) + 3\cos(2\sigma_2)) - 9\sin(2\sigma_2)) \left((v_1 + 6)z_2 - (v_1 + 6)z_1 - \frac{((v_1 + 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 6)z_1)^3}{18} \right)}{96} \\
& - \frac{(i(\sin(6\sigma_2) + 9\sin(2\sigma_2)) - \cos(6\sigma_2) - 3\cos(2\sigma_2)) \left(\ln((v_1 + 6)z_2) - \ln((v_1 + 6)z_1) - \frac{((v_1 + 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 6)z_1)^2}{4} \right)}{96} \\
& - \frac{(-\sin(6\sigma_2) + i(\cos(6\sigma_2) + 3\cos(2\sigma_2) - 9\sin(2\sigma_2))) \left((v_1 - 6)z_2 - (v_1 - 6)z_1 - \frac{((v_1 - 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 6)z_1)^3}{18} \right)}{96} \\
& - \frac{(i(\sin(6\sigma_2) + 9\sin(2\sigma_2) + \cos(6\sigma_2) + 3\cos(2\sigma_2))) \left(\ln((v_1 - 6)z_2) - \ln((v_1 - 6)z_1) - \frac{((v_1 - 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 6)z_1)^2}{4} \right)}{96} \\
& + \frac{(\sin(6\sigma_1) + i(\cos(6\sigma_1) + 3\cos(2\sigma_1)) + 9\sin(2\sigma_1)) \left((v_2 + 6)z_2 - (v_2 + 6)z_1 - \frac{((v_2 + 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 6)z_1)^3}{18} \right)}{96} \\
& + \frac{(-i(\sin(6\sigma_1) + 9\sin(2\sigma_1)) + \cos(6\sigma_1) + 3\cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_2 + 6)z_2) - \ln((v_2 + 6)z_1) - \frac{((v_2 + 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 6)z_1)^2}{4} \right)}{96} \\
& + \frac{(\sin(6\sigma_1) - i(\cos(6\sigma_1) + 3\cos(2\sigma_1) + 9\sin(2\sigma_1))) \left((v_2 - 6)z_2 - (v_2 - 6)z_1 - \frac{((v_2 - 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 6)z_1)^3}{18} \right)}{96} \\
& + \frac{(-i(\sin(6\sigma_1) + 9\sin(2\sigma_1)) - \cos(6\sigma_1) - 3\cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_2 - 6)z_2) - \ln((v_2 - 6)z_1) - \frac{((v_2 - 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 6)z_1)^2}{4} \right)}{96}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(-\sin(6\sigma_1) - i(\cos(6\sigma_1) + 3\cos(2\sigma_1)) - 9\sin(2\sigma_1)) \left((v_1 + 6)z_2 - (v_1 + 6)z_1 - \frac{((v_1 + 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 6)z_1)^3}{18} \right)}{96} \\
& + \frac{(i(\sin(6\sigma_1) + 9\sin(2\sigma_1)) - \cos(6\sigma_1) - 3\cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_1 + 6)z_2) - \ln((v_1 + 6)z_1) - \frac{((v_1 + 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 6)z_1)^2}{4} \right)}{96} \\
& + \frac{(-\sin(6\sigma_1) + i(\cos(6\sigma_1) + 3\cos(2\sigma_1)) - 9\sin(2\sigma_1)) \left((v_1 - 6)z_2 - (v_1 - 6)z_1 - \frac{((v_1 - 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 6)z_1)^3}{18} \right)}{96} \\
& + \frac{(i(\sin(6\sigma_1) + 9\sin(2\sigma_1)) + \cos(6\sigma_1) + 3\cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_1 - 6)z_2) - \ln((v_1 - 6)z_1) - \frac{((v_1 - 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 6)z_1)^2}{4} \right)}{96} \\
& + \frac{3(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1) + 4\sigma_2 - 4\sigma_1) \left((v_2z_2) - (v_2z_1) - \frac{(v_2z_2)^3}{18} + \frac{(v_2z_1)^3}{18} \right)}{48} \\
& - \frac{3i(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1) + 4\sigma_2 - 4\sigma_1) \left(\ln(v_2z_2) - \ln(v_2z_1) - \frac{(v_2z_2)^2}{4} + \frac{(v_2z_1)^2}{4} \right)}{48} \\
& + \frac{3(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1) + 4\sigma_2 - 4\sigma_1) \left((v_1z_2) - (v_1z_1) - \frac{(v_1z_2)^3}{18} + \frac{(v_1z_1)^3}{18} \right)}{48} \\
& - \frac{3i(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1) + 4\sigma_2 - 4\sigma_1) \left(\ln(v_1z_2) - \ln(v_1z_1) - \frac{(v_1z_2)^2}{4} + \frac{(v_1z_1)^2}{4} \right)}{48} \Bigg| \\
& - \frac{a^8 \beta^8 \epsilon^4}{6144b^{12}} \left[\frac{(\sin(4\sigma_2) + i(\cos(4\sigma_2) - \cos(4\sigma_1)) - \sin(4\sigma_1)) \left((v_2 + 8)z_2 - (v_2 + 8)z_1 - \frac{((v_2 + 8)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 8)z_1)^3}{18} \right)}{32} \right. \\
& + \frac{(-i(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1)) + \cos(4\sigma_2) - \cos(4\sigma_1)) \left(\ln((v_2 + 8)z_2) - \ln((v_2 + 8)z_1) - \frac{((v_2 + 8)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 8)z_1)^2}{4} \right)}{32} \\
& + \frac{(\sin(4\sigma_2) - i(\cos(4\sigma_2) - \cos(4\sigma_1)) - \sin(4\sigma_1)) \left((v_2 - 8)z_2 - (v_2 - 8)z_1 - \frac{((v_2 - 8)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 8)z_1)^3}{18} \right)}{32} \\
& + \frac{(-i(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1)) - \cos(4\sigma_2) + \cos(4\sigma_1)) \left(\ln((v_2 - 8)z_2) - \ln((v_2 - 8)z_1) - \frac{((v_2 - 8)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 8)z_1)^2}{4} \right)}{32} \\
& + \frac{(-\sin(4\sigma_2) - i(\cos(4\sigma_2) - \cos(4\sigma_1)) + \sin(4\sigma_1)) \left((v_1 + 8)z_2 - (v_1 + 8)z_1 - \frac{((v_1 + 8)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 8)z_1)^3}{18} \right)}{32} \\
& + \frac{(i(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1)) - \cos(4\sigma_2) + \cos(4\sigma_1)) \left(\ln((v_1 + 8)z_2) - \ln((v_1 + 8)z_1) - \frac{((v_1 + 8)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 8)z_1)^2}{4} \right)}{32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(-\sin(4\sigma_2) + i(\cos(4\sigma_2) - \cos(4\sigma_1) + \sin(4\sigma_1))) \left((v_1 - 8)z_2 - (v_1 - 8)z_1 - \frac{((v_1 - 8)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 8)z_1)^3}{18} \right)}{32} \\
& + \frac{(i(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1)) + \cos(4\sigma_2) - \cos(4\sigma_1)) \left(\ln((v_1 - 8)z_2) - \ln((v_1 - 8)z_1) - \frac{((v_1 - 8)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 8)z_1)^2}{4} \right)}{32} \\
& - \frac{(2 \sin(2\sigma_2)) \left((v_2 + 2)z_2 - (v_2 + 2)z_1 - \frac{((v_2 + 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 2)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& + \frac{(2 i \sin(2\sigma_2)) \left(\ln((v_2 + 2)z_2) - \ln((v_2 + 2)z_1) - \frac{((v_2 + 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 2)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& - \frac{(2 \sin(2\sigma_2)) \left((v_2 - 2)z_2 - (v_2 - 2)z_1 - \frac{((v_2 - 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 2)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& + \frac{(2i \sin(2\sigma_2)) \left(\ln((v_2 - 2)z_2) - \ln((v_2 - 2)z_1) - \frac{((v_2 - 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 2)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& + \frac{(2 \sin(2\sigma_2)) \left((v_1 + 2)z_2 - (v_1 + 2)z_1 - \frac{((v_1 + 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 2)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& - \frac{(2i \sin(2\sigma_2)) \left(\ln((v_1 + 2)z_2) - \ln((v_1 + 2)z_1) - \frac{((v_1 + 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 2)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& + \frac{(2 \sin(2\sigma_2)) \left((v_1 - 2)z_2 - (v_1 - 2)z_1 - \frac{((v_1 - 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 2)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& - \frac{(2i \sin(2\sigma_2)) \left(\ln((v_1 - 2)z_2) - \ln((v_1 - 2)z_1) - \frac{((v_1 - 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 2)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& - \frac{(2 \sin(2\sigma_1)) \left((v_2 + 2)z_2 - (v_2 + 2)z_1 - \frac{((v_2 + 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 2)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& + \frac{(2 i \sin(2\sigma_1)) \left(\ln((v_2 + 2)z_2) - \ln((v_2 + 2)z_1) - \frac{((v_2 + 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 2)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& - \frac{(2 \sin(2\sigma_1)) \left((v_2 - 2)z_2 - (v_2 - 2)z_1 - \frac{((v_2 - 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 2)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& + \frac{(2 \sin(2\sigma_1)) \left(\ln((v_2 - 2)z_2) - \ln((v_2 - 2)z_1) - \frac{((v_2 - 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 2)z_1)^2}{4} \right)}{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(2 \sin(2\sigma_1)) \left((v_1 + 2)z_2 - (v_1 + 2)z_1 - \frac{((v_1 + 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 2)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& - \frac{(2i \sin(2\sigma_1)) \left(\ln((v_1 + 2)z_2) - \ln((v_1 + 2)z_1) - \frac{((v_1 + 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 2)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& + \frac{(2 \sin(2\sigma_1)) \left((v_1 - 2)z_2 - (v_1 - 2)z_1 - \frac{((v_1 - 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 2)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& - \frac{(i \sin(2\sigma_1)) \left(\ln((v_1 - 2)z_2) - \ln((v_1 - 2)z_1) - \frac{((v_1 - 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 2)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& + \frac{(2x_2 - 2x_1) \left((v_2 + 8)z_2 - (v_2 + 8)z_1 - \frac{((v_2 + 8)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 8)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& + \frac{(2x_2 - 2x_1) \left((v_2 - 8)z_2 - (v_2 - 8)z_1 - \frac{((v_2 - 8)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 8)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& - \frac{(2ix_2 - 2ix_1) \left(\ln((v_2 + 8)z_2) - \ln((v_2 + 8)z_1) - \frac{((v_2 + 8)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 8)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& - \frac{(2ix_2 - 2ix_1) \left(\ln((v_2 - 8)z_2) - \ln((v_2 - 8)z_1) - \frac{((v_2 - 8)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 8)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& - \frac{(2x_2 - 2x_1) \left((v_1 + 8)z_2 - (v_1 + 8)z_1 - \frac{((v_1 + 8)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 8)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& - \frac{(2x_2 - 2x_1) \left((v_1 - 8)z_2 - (v_1 - 8)z_1 - \frac{((v_1 - 8)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 8)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& + \frac{(2ix_2 - 2ix_1) \left(\ln((v_1 + 8)z_2) - \ln((v_1 + 8)z_1) - \frac{((v_1 + 8)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 8)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& + \frac{(2ix_2 - 2ix_1) \left(\ln((v_1 - 8)z_2) - \ln((v_1 - 8)z_1) - \frac{((v_1 - 8)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 8)z_1)^2}{4} \right)}{16} \Bigg] \\
& + \frac{9a^8 \beta^8 \epsilon^4}{4096b^{12}} \left[- \frac{(\sin(6\sigma_2) + i(\cos(6\sigma_2) - 9\cos(2\sigma_2)) - 3\sin(2\sigma_2)) \left((v_2 + 6)z_2 - (v_2 + 6)z_1 - \frac{((v_2 + 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 6)z_1)^3}{18} \right)}{96} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{-i(\sin(6\sigma_2) - 3\sin(2\sigma_2)) + \cos(6\sigma_2) - 9\cos(2\sigma_2)}{96} \left(\ln((v_2 + 6)z_2) - \ln((v_2 + 6)z_1) - \frac{((v_2 + 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 6)z_1)^2}{4} \right) \\
& - \frac{(\sin(6\sigma_2) - i(\cos(6\sigma_2) - 9\cos(2\sigma_2) - 3\sin(2\sigma_2)))}{96} \left((v_2 - 6)z_2 - (v_2 - 6)z_1 - \frac{((v_2 - 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 6)z_1)^3}{18} \right) \\
& - \frac{(-i(\sin(6\sigma_2) - 3\sin(2\sigma_2)) - \cos(6\sigma_2) + 9\cos(2\sigma_2))}{96} \left(\ln((v_2 - 6)z_2) - \ln((v_2 - 6)z_1) - \frac{((v_2 - 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 6)z_1)^2}{4} \right) \\
& - \frac{(-\sin(6\sigma_2) - i(\cos(6\sigma_2) - 9\cos(2\sigma_2)) + 3\sin(2\sigma_2))}{96} \left((v_1 + 6)z_2 - (v_1 + 6)z_1 - \frac{((v_1 + 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 6)z_1)^3}{18} \right) \\
& - \frac{(i(\sin(6\sigma_2) - 3\sin(2\sigma_2)) - \cos(6\sigma_2) + 9\cos(2\sigma_2))}{96} \left(\ln((v_1 + 6)z_2) - \ln((v_1 + 6)z_1) - \frac{((v_1 + 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 6)z_1)^2}{4} \right) \\
& - \frac{(-\sin(6\sigma_2) + i(\cos(6\sigma_2) - 9\cos(2\sigma_2) + 3\sin(2\sigma_2)))}{96} \left((v_1 - 6)z_2 - (v_1 - 6)z_1 - \frac{((v_1 - 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 6)z_1)^3}{18} \right) \\
& - \frac{(i(\sin(6\sigma_2) - 3\sin(2\sigma_2)) + \cos(6\sigma_2) - 9\cos(2\sigma_2))}{96} \left(\ln((v_1 - 6)z_2) - \ln((v_1 - 6)z_1) - \frac{((v_1 - 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 6)z_1)^2}{4} \right) \\
& + \frac{(\sin(6\sigma_1) + i(\cos(6\sigma_1) - 9\cos(2\sigma_1)) - 3\sin(2\sigma_1))}{96} \left((v_2 + 6)z_2 - (v_2 + 6)z_1 - \frac{((v_2 + 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 6)z_1)^3}{18} \right) \\
& + \frac{(-i(\sin(6\sigma_1) - 3\sin(2\sigma_1)) + \cos(6\sigma_1) - 9\cos(2\sigma_1))}{96} \left(\ln((v_2 + 6)z_2) - \ln((v_2 + 6)z_1) - \frac{((v_2 + 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 6)z_1)^2}{4} \right) \\
& + \frac{(\sin(6\sigma_1) - i(\cos(6\sigma_1) - 9\cos(2\sigma_1) - 3\sin(2\sigma_1)))}{96} \left((v_2 - 6)z_2 - (v_2 - 6)z_1 - \frac{((v_2 - 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 6)z_1)^3}{18} \right) \\
& + \frac{(-i(\sin(6\sigma_1) - 3\sin(2\sigma_1)) - \cos(6\sigma_1) + 9\cos(2\sigma_1))}{96} \left(\ln((v_2 - 6)z_2) - \ln((v_2 - 6)z_1) - \frac{((v_2 - 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 6)z_1)^2}{4} \right) \\
& + \frac{(-\sin(6\sigma_1) - i(\cos(6\sigma_1) - 9\cos(2\sigma_1)) + 3\sin(2\sigma_1))}{96} \left((v_1 + 6)z_2 - (v_1 + 6)z_1 - \frac{((v_1 + 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 6)z_1)^3}{18} \right) \\
& + \frac{(i(\sin(6\sigma_1) - 3\sin(2\sigma_1)) - \cos(6\sigma_1) + 9\cos(2\sigma_1))}{96} \left(\ln((v_1 + 6)z_2) - \ln((v_1 + 6)z_1) - \frac{((v_1 + 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 6)z_1)^2}{4} \right) \\
& + \frac{(-\sin(6\sigma_1) + i(\cos(6\sigma_1) - 9\cos(2\sigma_1) + 3\sin(2\sigma_1)))}{96} \left((v_1 - 6)z_2 - (v_1 - 6)z_1 - \frac{((v_1 - 6)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 6)z_1)^3}{18} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(i(\sin(6\sigma_1) - 3\sin(2\sigma_1) + \cos(6\sigma_1) - 9\cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_1 - 6)z_2) - \ln((v_1 - 6)z_1) - \frac{((v_1 - 6)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 6)z_1)^2}{4} \right))}{96} \\
& - \frac{3(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1) - 4\sigma_2 + 4\sigma_1) \left((v_2z_2) - (v_2z_1) - \frac{(v_2z_2)^3}{18} + \frac{(v_2z_1)^3}{18} \right)}{48} \\
& + \frac{3i(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1) - 4\sigma_2 + 4\sigma_1) \left(\ln(v_2z_2) - \ln(v_2z_1) - \frac{(v_2z_2)^2}{4} + \frac{(v_2z_1)^2}{4} \right)}{48} \\
& + \frac{3(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1) - 4\sigma_2 + 4\sigma_1) \left((v_1z_2) - (v_1z_1) - \frac{(v_1z_2)^3}{18} + \frac{(v_1z_1)^3}{18} \right)}{48} \\
& - \frac{3i(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1) - 4\sigma_2 + 4\sigma_1) \left(\ln(v_1z_2) - \ln(v_1z_1) - \frac{(v_1z_2)^2}{4} + \frac{(v_1z_1)^2}{4} \right)}{48} \Bigg] \\
& + \frac{3a^8\beta^8\epsilon^4}{6144b^{12}} \left[\frac{(\sin(4\sigma_2) + i(\cos(4\sigma_2) - \cos(4\sigma_1)) - \sin(4\sigma_1)) \left((v_2 + 8)z_2 - (v_2 + 8)z_1 - \frac{((v_2 + 8)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 8)z_1)^3}{18} \right)}{32} \right. \\
& + \frac{(-i(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1)) + \cos(4\sigma_2) - \cos(4\sigma_1)) \left(\ln((v_2 + 8)z_2) - \ln((v_2 + 8)z_1) - \frac{((v_2 + 8)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 8)z_1)^2}{4} \right)}{32} \\
& + \frac{(\sin(4\sigma_2) - i(\cos(4\sigma_2) - \cos(4\sigma_1)) - \sin(4\sigma_1)) \left((v_2 - 8)z_2 - (v_2 - 8)z_1 - \frac{((v_2 - 8)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 8)z_1)^3}{18} \right)}{32} \\
& + \frac{(-i(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1)) - \cos(4\sigma_2) + \cos(4\sigma_1)) \left(\ln((v_2 - 8)z_2) - \ln((v_2 - 8)z_1) - \frac{((v_2 - 8)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 8)z_1)^2}{4} \right)}{32} \\
& + \frac{(-\sin(4\sigma_2) - i(\cos(4\sigma_2) - \cos(4\sigma_1)) + \sin(4\sigma_1)) \left((v_1 + 8)z_2 - (v_1 + 8)z_1 - \frac{((v_1 + 8)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 8)z_1)^3}{18} \right)}{32} \\
& + \frac{(i(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1)) - \cos(4\sigma_2) + \cos(4\sigma_1)) \left(\ln((v_1 + 8)z_2) - \ln((v_1 + 8)z_1) - \frac{((v_1 + 8)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 8)z_1)^2}{4} \right)}{32} \\
& + \frac{(-\sin(4\sigma_2) + i(\cos(4\sigma_2) - \cos(4\sigma_1)) + \sin(4\sigma_1)) \left((v_1 - 8)z_2 - (v_1 - 8)z_1 - \frac{((v_1 - 8)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 8)z_1)^3}{18} \right)}{32} \\
& + \frac{(i(\sin(4\sigma_2) - \sin(4\sigma_1)) + \cos(4\sigma_2) - \cos(4\sigma_1)) \left(\ln((v_1 - 8)z_2) - \ln((v_1 - 8)z_1) - \frac{((v_1 - 8)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 8)z_1)^2}{4} \right)}{32} \\
& + \frac{(2i \cos(2\sigma_2)) \left((v_2 + 2)z_2 - (v_2 + 2)z_1 - \frac{((v_2 + 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 2)z_1)^3}{18} \right)}{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(2 \cos(2\sigma_2)) \left(\ln((v_2 + 2)z_2) - \ln((v_2 + 2)z_1) - \frac{((v_2 + 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 2)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& - \frac{(2i \cos(2\sigma_2)) \left((v_2 - 2)z_2 - (v_2 - 2)z_1 - \frac{((v_2 - 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 2)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& - \frac{(2 \cos(2\sigma_2)) \left(\ln((v_2 - 2)z_2) - \ln((v_2 - 2)z_1) - \frac{((v_2 - 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 2)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& - \frac{(2i \cos(2\sigma_2)) \left((v_1 + 2)z_2 - (v_1 + 2)z_1 - \frac{((v_1 + 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 2)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& - \frac{(2 \cos(2\sigma_2)) \left(\ln((v_1 + 2)z_2) - \ln((v_1 + 2)z_1) - \frac{((v_1 + 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 2)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& + \frac{(2i \cos(2\sigma_2)) \left((v_1 - 2)z_2 - (v_1 - 2)z_1 - \frac{((v_1 - 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 2)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& + \frac{(2 \cos(2\sigma_2)) \left(\ln((v_1 - 2)z_2) - \ln((v_1 - 2)z_1) - \frac{((v_1 - 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 2)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& - \frac{(2i \cos(2\sigma_1)) \left((v_2 + 2)z_2 - (v_2 + 2)z_1 - \frac{((v_2 + 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 2)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& - \frac{(2 \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_2 + 2)z_2) - \ln((v_2 + 2)z_1) - \frac{((v_2 + 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 2)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& + \frac{(2i \cos(2\sigma_1)) \left((v_2 - 2)z_2 - (v_2 - 2)z_1 - \frac{((v_2 - 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 2)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& + \frac{(2 \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_2 - 2)z_2) - \ln((v_2 - 2)z_1) - \frac{((v_2 - 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 2)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& + \frac{(2 \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_1 + 2)z_2) - \ln((v_1 + 2)z_1) - \frac{((v_1 + 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 2)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& + \frac{(2i \cos(2\sigma_1)) \left((v_1 + 2)z_2 - (v_1 + 2)z_1 - \frac{((v_1 + 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 2)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& - \frac{(2i \cos(2\sigma_1)) \left((v_1 - 2)z_2 - (v_1 - 2)z_1 - \frac{((v_1 - 2)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 2)z_1)^3}{18} \right)}{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(2 \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_1 - 2)z_2) - \ln((v_1 - 2)z_1) - \frac{((v_1 - 2)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 2)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& + \frac{(2x_2 - 2x_1) \left((v_2 + 8)z_2 - (v_2 + 8)z_1 - \frac{((v_2 + 8)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 8)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& + \frac{(2x_2 - 2x_1) \left((v_2 - 8)z_2 - (v_2 - 8)z_1 - \frac{((v_2 - 8)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 8)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& - \frac{(2ix_2 - 2ix_1) \left(\ln((v_2 + 8)z_2) - \ln((v_2 + 8)z_1) - \frac{((v_2 + 8)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 8)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& - \frac{(2ix_2 - 2ix_1) \left(\ln((v_2 - 8)z_2) - \ln((v_2 - 8)z_1) - \frac{((v_2 - 8)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 8)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& - \frac{(2x_2 - 2x_1) \left((v_1 + 8)z_2 - (v_1 + 8)z_1 - \frac{((v_1 + 8)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 8)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& - \frac{(2x_2 - 2x_1) \left((v_1 - 8)z_2 - (v_1 - 8)z_1 - \frac{((v_1 - 8)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 8)z_1)^3}{18} \right)}{16} \\
& + \frac{(2ix_2 - 2ix_1) \left(\ln((v_1 + 8)z_2) - \ln((v_1 + 8)z_1) - \frac{((v_1 + 8)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 8)z_1)^2}{4} \right)}{16} \\
& + \frac{(2ix_2 - 2ix_1) \left(\ln((v_1 - 8)z_2) - \ln((v_1 - 8)z_1) - \frac{((v_1 - 8)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 8)z_1)^2}{4} \right)}{16} \Bigg] \\
& - \frac{a^8 \beta^8 \epsilon^4}{36864b^{12}} \left[\frac{(\sin(2\sigma_2) + i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) - \sin(2\sigma_1)) \left((v_2 + 10)z_2 - (v_2 + 10)z_1 - \frac{((v_2 + 10)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 + 10)z_1)^3}{18} \right)}{8} \right. \\
& + \frac{(-i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) + \cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_2 + 10)z_2) - \ln((v_2 + 10)z_1) - \frac{((v_2 + 10)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 + 10)z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& + \frac{-4(\sigma_2 - \sigma_1) \left((v_2 z_2) - (v_2 z_1) - \frac{(v_2 z_2)^3}{18} + \frac{(v_2 z_1)^3}{18} \right) + 4i(\sigma_2 - \sigma_1) \left(\ln(v_2 z_2) - \ln(v_2 z_1) - \frac{(v_2 z_2)^2}{4} + \frac{(v_2 z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& \left. + \frac{(\sin(2\sigma_2) - i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) - \sin(2\sigma_1)) \left((v_2 - 10)z_2 - (v_2 - 10)z_1 - \frac{((v_2 - 10)z_2)^3}{18} + \frac{((v_2 - 10)z_1)^3}{18} \right)}{8} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(-i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) - \cos(2\sigma_2) + \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_2 - 10)z_2) - \ln((v_2 - 10)z_1) - \frac{((v_2 - 10)z_2)^2}{4} + \frac{((v_2 - 10)z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& + \frac{(-\sin(2\sigma_2) - i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1) + \sin(2\sigma_1)) \left((v_1 + 10)z_2 - (v_1 + 10)z_1 - \frac{((v_1 + 10)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 + 10)z_1)^3}{18} \right)}{8} \\
& + \frac{(i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) - \cos(2\sigma_2) + \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_1 + 10)z_2) - \ln((v_1 + 10)z_1) - \frac{((v_1 + 10)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 + 10)z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& + \frac{4(\sigma_2 - \sigma_1) \left((v_1 z_2) - (v_1 z_1) - \frac{(v_1 z_2)^3}{18} + \frac{(v_1 z_1)^3}{18} \right) - 4i(\sigma_2 - \sigma_1) \left(\ln(v_1 z_2) - \ln(v_1 z_1) - \frac{(v_1 z_2)^2}{4} + \frac{(v_1 z_1)^2}{4} \right)}{8} \\
& + \frac{(-\sin(2\sigma_2) + i(\cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1) + \sin(2\sigma_1)) \left((v_1 - 10)z_2 - (v_1 - 10)z_1 - \frac{((v_1 - 10)z_2)^3}{18} + \frac{((v_1 - 10)z_1)^3}{18} \right)}{8} \\
& + \frac{(i(\sin(2\sigma_2) - \sin(2\sigma_1)) + \cos(2\sigma_2) - \cos(2\sigma_1)) \left(\ln((v_1 - 10)z_2) - \ln((v_1 - 10)z_1) - \frac{((v_1 - 10)z_2)^2}{4} + \frac{((v_1 - 10)z_1)^2}{4} \right)}{8} \Bigg]
\end{aligned}$$



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
JURUSAN FISIKA

Jl. Gajayana No. 50 Malang 65144 Telp. / Fax. (0341) 558933
Website : <http://fisika.uin-malang.ac.id>, e-mail : Fis@uin-malang.ac.id

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama
NIM
Fakultas/Program Studi
Judul Skripsi

: Rizka Maulidiyah
: 17640005
: Sains dan Teknologi
: Studi Gerak Partikel pada Simpul Torus Menggunakan Pendekatan Mathieu dan Hill-Whittaker
: Arista Romadani, M.Sc
: Drs. Abdul Basid, M.Si

Pembimbing 1
Pembimbing 2
• Konsultasi Fisika

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	20 November 2021	Konsultasi BAB I & II	
2.	2 Desember 2021	Konsultasi BAB II & III	
3.	7 Desember 2021	Konsultasi BAB III	
4.	7 Februari 2022	Konsultasi BAB I, II, & III (ACC)	
5.	23 Februari 2022	Konsultasi Revisi & penelitian	
6.	5 Oktober 2022	Konsultasi BAB IV	
7.	6 Oktober 2022	Konsultasi revisi BAB IV	
8.	2 Desember 2022	Konsultasi Semua BAB dan Abstrak	

• Konsultasi Integrasi

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	3 Agustus 2021	Konsultasi Kajian Agama BAB I - II	
2.	1 Desember 2021	Konsultasi Kajian Agama BAB I -II ACC	
3.	26 Oktober 2022	Konsultasi Kajian Agama BAB VI	
	23 November 22	Konsultasi Kajian Agama BAB I-VI ACC	

Malang, 2 Desember 2022

Mengetahui,

Ketua
Jurusan,



Dr. Imam Tazi, M.Si

NIP. 19740730 200312 1 002