STUDI ENERGI GELAP HOLOGRAFIK MENGGUNAKAN MODEL PERUMUMAN ENTROPI TSALLIS DAN RENYI

SKRIPSI

Oleh:
ANIS ROFI'ATUL KHOIRIYAH
NIM. 18640039

PROGRAM STUDI FISIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022

HALAMAN PENGAJUAN

STUDI ENERGI GELAP HOLOGRAFIK MENGGUNAKAN MODEL PERUMUMAN ENTROPI TSALLIS DAN RENYI

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
ANIS ROFI'ATUL KHOIRIYAH
NIM. 18640039

PROGRAM STUDI FISIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022

HALAMAN PERSETUJUAN

STUDI ENERGI GELAP HOLOGRAFIK MENGGUNAKAN MODEL PERUMUMAN ENTROPI TSALLIS DAN RENYI

SKRIPSI

Oleh:
ANIS ROFI'ATUL KHOIRIYAH
NIM. 18640039

Telah diperiksa dan disetujui untuk diujikan

Pada tanggal, 8 Desember 2022

Menyetujui,

Pembimbing I	Pembimbing II
Arista Romadani, M. Sc	Ahmad Luthfin, S.Si, M.Si
NIP.19900905 201903 1 009	NIP.19860504 201903 1 009

Mengetahui,
Ketua Program Studi

Dr. Imam Tazi, M.Si
NIP. 19740730 200312 1 002

HALAMAN PENGESAHAN

STUDI ENERGI GELAP HOLOGRAFIK MENGGUNAKAN MODEL PERUMUMAN ENTROPI TSALLIS DAN RENYI

SKRIPSI

Oleh:
ANIS ROFI'ATUL KHOIRIYAH
NIM. 18640039

Telah dipertahankan di depan dewan penguji dan diterima sebagai salah satu persyaratan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si)
Pada tanggal, 19 Desember 2022

Penguji Utama	Dr. Erna Hastuti, M.Si NIP. 19811119 200801 2 009	
Ketua Penguji	Muhammad Taufiqi, M.Si NIP. LB. 64021	
Sekretaris Penguji	Arista Romadani, M.Sc NIP.19900905 201903 1 009	
Anggota Penguji	Ahmad Luthfin, S.Si, M.Si NIP.19860504 201903 1 009	

Mengesahkan,
Ketua Program Studi

Dr. Imam Tazi, M.Si
NIP. 19740730 200312 1 002

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Anis Rofi'atul Khoiriyah

NIM : 18640039

Jurusan : Fisika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Studi Energi Gelap Holografik Menggunakan Model Perumuman Entropi Tsallis Dan Renyi

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa hasil penelitian ini tidak terdapat unsur-unsur penjiplakan karya penelitian atau karya ilmiah yang pernah dilakukan atau dibuat oleh orang lain, kecuali yang tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka. Apabila ternyata hasil penelitian ini terbukti terdapat unsur-unsur jiplakan maka saya bersedia untuk menerima sanksi atas perbuata tersebut.

Malang, 19 Desember 2022
Yang Membuat Pernyataan

Anis Rofi'atul Khoiriyah
NIM. 18640039

MOTTO

فَاِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ۙ ۝ اِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ۗ ۝

“ Maka sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan”

(Q.S. Al-Insyirah : 94: 5-6)

Don’t Think Far Just Do it Now

Do’a Without Ikhtiar Is Just Nonsense

HALAMAN PERSEMBAHAN

Alhamdulillah Puji Syukur atas Karunia dan Ridho Allah SWT. yang telah memberikan penuh Rahmat, Kasih, dan Keberkahan sehingga dapat diberikan kesempatan untuk merasakan manisnya pendidikan hingga jenjang sarjana. Semoga tetap terus mendapatkan pertolongan dan keridhoan-Nya untuk segala angan, tujuan, dan impian untuk bisa mendapatkan kesempatan dalam belajar di mana pun dan berkembang. Shalawat serta salam tetap tercurahkan kepada Nabi besar, agung nan mulia Nabi Muhammad SAW. semoga bisa mendapatkan barokah dan menjadi pemimpin muslim bagi diri sendiri dan sesama.

Salam hormat dan ta'dhim saya persembahkan hasil penelitian sekaligus ujian terakhir dalam jenjang sarjana kepada ayah dan ibu tercinta yang terus memberikan dorongan, kasih sayang serta do'a yang tiada henti untuk terus mendampingi salah satu buah hatinya dan semoga bisa memberikan kebanggaan terhadap pencapaian yang telah diberikan.

Untuk segala kerja keras, air mata, kebahagiaan yang telah berjuang dalam menempuh jalan dan rintangan hingga sejauh ini. Semoga bisa menjadi amanah, manfaat, keberkahan, dan cerita di hari tua nanti. Terima kasih untuk masa mudaku yang memberikan banyak pengalaman untuk mencoba banyak hal, semoga buah yang telah tertanam dapat dipanen suatu hari nanti.

Saya ucapkan terima kasih kepada para sahabat, teman, dan keluarga besar fisika teori UIN Malang yang terus memberikan motivasi dan semangat untuk bisa menyelesaikan jenjang ini dengan baik dan berkesan serta semangat untuk bisa terus melanjutkan studi. Semoga kita dapat dipertemukan dengan kondisi sebaik-baiknya kita dan bisa berbagi pengalaman bersama.

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur kami haturkan ke hadirat Allah swt yang telah memberikan rahmat, taufiq, serta hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Proposal Skripsi dengan judul "Studi Energi Gelap Holografik Menggunakan Model Perumuman Entropi Tsallis dan Renyi". Sholawat dan salam semoga tetap tercurahkan kepada junjungan kita Nabi Muhammad SAW yang telah menuntun kita dari zaman jahiliyah menuju zaman terang benderang.

Penulis menyadari bahwa pengerjaan Proposal Skripsi ini tidak akan selesai tanpa adanya bantuan dari beberapa pihak. Oleh sebab itu, pada kesempatan kali ini penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H.M. Zainuddin, MA selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Imam Tazi, M.Si selaku Ketua Program Studi Fisika Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Arista Romadani, M.Sc selaku Dosen Pembimbing yang senantiasa membimbing, mengarahkan, memberikan ilmu pengetahuan, serta meluangkan waktunya dalam membimbing penulis menyelesaikan penyusunan skripsi dengan baik.
5. Ahmad Luthfin, S.Si, M.Si selaku Dosen Pembimbing Integrasi yang senantiasa membimbing, mengarahkan, memberikan ilmu pengetahuan khususnya dalam penerapan Firman Allah terhadap ilmu Sains, serta

meluangkan waktunya dalam membimbing penulis menyelesaikan penyusunan skripsi dengan baik.

6. Segenap Dosen, Laboran, dan Admin Program Studi Fisika UIN Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan ilmu pengetahuan dan arahan demi kelancaran penyusunan skripsi ini.
7. Ayah, ibu, adik, dan seluruh keluarga dan kerabat yang terus memberikan dukungan baik secara materi maupun doa, serta motivasi yang berkelanjutan agar penulis diberikan kemudahan dan kelancaran dalam menghadapi segala hal.
8. Sahabat dekat dan teman-teman yang terus memberikan motivasi dan dorongan kepada penulis agar segera menyelesaikan skripsi.
9. Teman-teman Fisika Angkatan 2018 (Great) khususnya Bidang Minat Teori yang senantiasa memberikan semangat dan dukungan kepada penulis.
10. Serta semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu, yang telah memberikan bantuan sehingga terselesainya skripsi ini.

Banyaknya kekurangan dan kekeliruan yang dilakukan penulis dalam penyelesaian skripsi ini, sehingga penulis mengharapkan segala bentuk kritik dan saran yang bersifat membangun. Demikian yang dapat penulis sampaikan, semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat dan menambahkan pengetahuan kepada berbagai pihak. Amin.

Malang, 19 Desember 2022

Penulis

DAFTAR ISI

COVER ..... **i**
HALAMAN PENGAJUAN ..... **ii**
HALAMAN PERSETUJUAN ..... **iii**
HALAMAN PENGESAHAN ..... **iv**
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN ..... **v**
MOTTO ..... **vi**
HALAMAN PERSEMBAHAN ..... **vii**
KATA PENGANTAR ..... **viii**
DAFTAR ISI ..... **x**
DAFTAR GAMBAR ..... **xii**
DAFTAR LAMPIRAN ..... **xiii**
ABSTRAK ..... **xiv**
ABSTRACT ..... **xv**
الملخص ..... **xvi**

BAB I **1**
1.1. Latar Belakang 1
1.2. Rumusan Masalah 4
1.3. Tujuan Penelitian 4
1.4. Batasan Masalah 5
1.5. Manfaat Penelitian 5

BAB II **6**
2.1 Energi Gelap Holografik 6
2.2 Entropi 9
2.2.1 Fungsi Hartley dan Entropi Shannon 13
2.2.2 Kolmogorov-Nagumo-mean 16
2.2.3 Entropi Renyi 17
2.2.4 Entropi Tsalis 19
2.3 Metrik Friedmann-Robertson-Walker (FRW) 22
2.3.1 Parameter Hubble (H_0) 33
2.3.2 Parameter Densitas (Ω) 36
2.3.3 Parameter Perlambatan (q) 37
2.3.4 Parameter Kuadrat Kecepatan Suara (v_s^2) 38

BAB III **40**
3.1 Entropi Perumuman berdasarkan Entropi Tsallis dan Entropi Renyi 40
3.2 Parameter-parameter Ekspansi Alam Semesta 49
3.3 Pembahasan 101
3.4 Integrasi Al-Qur'an 104

BAB IV **109**
4.1. Kesimpulan 109
4.2. Saran 110

DAFTAR PUSTAKA **111**
LAMPIRAN **114**

DAFTAR GAMBAR

Gambar 3. 1 Grafik total densitas pada energi gelap (Ω_D) terhadap pergeseran merah (z): a) R=-5; b) R=-4; c) R=-2; d) R=2; e) R=3 74
Gambar 3. 2 Grafik total densitas pada energi gelap (Ω_D) terhadap pergeseran merah (z): a) δ=-8; b) δ=-5; c) δ=2; d) δ=5; e) δ=8 77
Gambar 3. 3 Grafik parameter perlambatan (q) terhadap pergeseran merah (z): a) R=-5; b) R=-4; c) R=-2; d) R=2; R=3..... 86
Gambar 3. 4 Grafik parameter perlambatan (q) terhadap pergeseran merah (z): a) δ=-8; b) δ=-5; c) δ=2; d) δ=5; δ=8 89
Gambar 3. 5 Grafik parameter kuadrat kecepatan suara (v_S^2) terhadap pergeseran merah (z): a) R=-5; b) R=-4; c) R=-2; d) R=2; R=3 97
Gambar 3. 6 Grafik parameter kuadrat kecepatan suara (v_S^2) terhadap pergeseran merah (z): a) δ=-8; b) δ=-5; c) δ=2; d) δ=5; δ=8 100

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran A Simbol Christoffel pada Metrik Friedmann-Robertson-Walker..... 115
Lampiran B Simbol Christoffel pada Persamaan Friedmann 124
Lampiran C Persamaan Medan Einstein 134

ABSTRAK

Anis Rofi'atul Khoiriyah. 2022. **Studi Energi Gelap Holografik Menggunakan Model Perumuman Entropi Tsallis Dan Renyi.** Skripsi. Program Studi Fisika. Fakultas Sains dan Teknologi. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Dosen Pembimbing (I) Arista Romadani, M.Sc. (II) Ahmad Luthfin, S.Si., M.Si.

Kata Kunci : Energi Gelap Holografik, Entropi, Parameter Densitas, Parameter Perlambatan, Parameter Kuadrat Kecepatan Suara

Energi Gelap Holografik merupakan salah satu model dari energi gelap dalam menjelaskan ekspansi dipercepat alam semesta. Model ini merupakan penggabungan dari Prinsip Holografik dengan energi gelap, di mana berdasarkan prinsip holografik yakni jumlah derajat keadaan pada suatu sistem harus berhingga dan memiliki batas luas. Pada penelitian ini menggunakan entropi Sharma-Mittal yang merupakan hasil dari formulasi perumuman entropi Tsallis dan Renyi dengan radius Hubble sebagai IR cutoff (batas volume). Terdapat parameter bebas yang juga mempengaruhi perilaku dari alam semesta yakni parameter bebas R dan δ yang digunakan dalam memproyeksikan persamaan dari tiap parameter menjadi grafik dan ditemukan tidak pada semua keadaan mampu menjelaskan alam semesta berekspansi dengan menggunakan model ini. Parameter yang digunakan sebagai landasan untuk mengetahui perilaku alam semesta adalah parameter densitas, parameter perlambatan, dan parameter kuadrat kecepatan suara.

ABSTRACT

Anis Rofi'atul Khoiriyah. 2022. **Study of Holograhic Dark Energy with Generalization of Tsallis and Renyi's Entropy.** Thesis. Physics Department. Faculty of Science and Technology. Maulana Malik Ibrhaim State Islamic University of Malang. Advisor (I) Arista Romadani, M.Sc. (II) Ahmad Luthfin, S.Si., M.Si.

Keywords : Holographic Dark Energy, Entropy, Density Parameter, Deceleration Parameter, Speed of Sound Squared Parameter

Holographic dark energy is one of the dark energy theories proposed to account for the acceleration and expansion of the cosmos. The holographic principle and dark energy ideas are combined in this paradigm. The holographics principle is the number of degrees of conditions in a system must be finite and has a wide limit. The Hubble radius is employed in this work as the IR cutoff (volume limit) and the generalization of Tsallis and Renyi entropy, known as Sharma-Mittal entropy. There are free parameters R and δ in this study that affects how the universe functions as well. The equation from each expansion parameter was projected into a graph using these free parameters, R and, and it was found that not unedr all state could explain how the universe expanded. Parameters that used in this work, such as density parameters, deceleration parameters, and speed of sound squared parameters.

الملخص

انيس رفعة الخيرية. 2022. **دراسات الطاقة المظلمة الهولوغرافي (Energi Gelap Holografik) باستخدام نموذج تعميم إنتروبيا تساليس (Entropi Tsallis) و إنتروبيا رينيي (Entropi Renyi)**. قسم الفزياء. كلية العلوم والتكنولوجية. جامعة مولانا مالك إبراهيم السلامية الحكومية مالانج. المشرف:) أريستا رمضان الماجستير) احمد لطف الاماجستير

لكلمات المفتاحيات : الطاقة المظلمة الهولوغرافي (Energi Gelap Holografik), إنتروبيا (Entropi), معلمة الكثافة (parameter densitas) ,معلمة التباطؤ (parameter perlambatan), سرعة معامل تربيع الصوت (parameter kuadrat kecepatan suara)

الطاقة المظلمة الهولوغرافي (Energi Gelap Holografik) هو أحد نماذج الطاقة المظلمة في تفسير التوسع المتسارع للكون. هذا النموذج هو مزيج من المبدأ الهولوغرافي (Prinsip Holografik) والطاقة المظلمة, والتي تقوم على مبدأ الهولوغرافي (Prinsip Holografik) ، أي أن عدد درجات الحالة في النظام يجب أن يكون محدودًا وله حد واسع. في هذه الدراسة ، يتم استخدام إنتروبيا شارما ميتال (Entropi Sharma−Mittal) والتي هي نتيجة لتركيبة إنتروبيا تساليس (Entropi Tsallis) و إنتروبيا ريني (Entropi Renyi) مع نصف قطر هابل (Hubble) مثل IR cutoff (حد الحجم). هناك معلمات مستقلة (parameter bebas) تؤثر أيضًا على سلوك الكون, وهما معاملان مستقلان R و δ التان تُستخدم لإبراز معادلات كل معلمة على رسم بياني, وقد اتضح أنه لا يمكن لجميع الشروط تفسير توسع الكون باستخدام هذا نموذج. المعلمات (parameter) المستخدمة كأساس لمعرفة سلوك الكون هي معلمة الكثافة (parameter densitas) ومعلمة التباطؤ (parameter perlambatan) وسرعة معامل تربيع الصوت (parameter kuadrat kecepatan suara).

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Alam semesta ditemukan oleh para peneliti mengalami ekspansi atau bisa disebut mengalami percepatan. Hal ini diperoleh dari hasil pengamatan Perl dkk, Riess dkk, dan Schmiet dkk dari plot pergeseran merah (*redshift)* luminositas supernova Tipe-Ia yang dianggap sebagai standard candles karena muncul dari keruntuhan katai putih yang massanya mendekati batas Chandrashekhar (Ananthanarayan & Mohanty, 2021). Dalam kosmologi standar, berdasarkan relativitas umum, alam semesta mengalami percepatan yang dapat dijelaskan dengan mempertimbangkan sumber energi momentum yang dikenal sebagai energi gelap (Sayahian Jahromi et al., 2018). Berdasarkan model standar kosmologi, alam semesta terdiri atas 4,9% materi barionik biasa, 26,8% materi gelap, dan 68,3% energi gelap (Ananthanarayan & Mohanty, 2021).

Keberadaan energi gelap dan sifatnya belum diketahui secara pasti berupa apa. Muncullah berbagai model energi gelap (DE) untuk dapat menjelaskannya. Salah satu model yang dikembangkan pada energi gelap adalah HDE (*Holographic Dark Energy*), di mana menerapkan HP (*Holographic Principle*) pada permasalahan energi gelap sebagaimana diusulkan oleh Miao Li. Prinsip holografik (HP) menyatakan segala informasi yang ada pada volume ruang dipresentasikan sebagai hologram, yang sesuai dengan letak batas ruangnya. Prinsip holografik diyakini menjadi prinsip dasar gravitasi kuantum dan mampu menyelesaikan beberapa persoalan fisika.

Energi gelap merupakan salah satu masalah utama dalam fisika teoritis dan kosmologi modern dan diyakini bahwa energi ini pada dasarnya adalah permasalahan gravitasi kuantum sehingga diambil model energi gelap holografik untuk penyelesaian masalah energi gelap, pada model ini kerapatan energi gelap hanya bergantung pada dua besaran fisis pada batas alam semesta, yakni massa Planck tereduksi $M_p \equiv \sqrt{1/8\pi G}$, di mana G adalah konstanta Newton dan yang lain adalah skala panjang kosmologi L yang dipilih sebagai *future event horizon* pada alam semesta atau sebagai batasan alam semesta (Wang et al., 2017).

Mengikuti hipotesis Cohen, model kelas energi gelap holografik diusulkan berdasarkan hubungan timbal balik antara UV cutoff dan entropi sistem. Pada alam semesta datar Friedmann-Robertson-Walter (FRW), model asli energi gelap holografik (OHDE) adalah menggunakan entropi Bekenstein-Hawking sebagai cosmos horizon dan menghubungkannya dengan Hubble horizon sebagai IR cutoffnya. Pada sistem ini tidak menghasilkan hasil yang tidak memuaskan, karena ternyata model ini tidak selaras dengan radius Hubble dan selalu menunjukkan ketidakstabilan dalam keadaan dominan di kosmos serta ketidakstabilan dalam mengendalikan tingkat ekspansinya, sehingga dirumuskan berbagai model dalam penyelesaian menggunakan model ini (Sayahian Jahromi et al., 2018).

Permodelan energi gelap holografik mulai muncul dengan beberapa sistem informasi entropi, misal entropi Tsallis, Renyi, dan Sharma-Mittal. Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan kedua entropi, yakni Tsallis dan Renyi menghasilkan model alam semesta yang sesuai. Sedangkan pada Sharma-Mittal dianggap kompatibel dengan ekspansi alam semesta dan akan tetap stabil kapanpun ia dominan pada kosmos (Jawad et al., 2018). Oleh sebab itu muncul model HDE

pada FRW datar dengan mempertimbangkan radius Hubble sebagai IR cutoff dan menggunakan generalisasi dari entropi Renyi dan Tsallis yang diketahui memiliki sifat non-adiktif dan non-ekstensif pada alam semesta, sehingga secara teori berpotensi mengalami percepatan alam semesta dan konsisten dengan hasil pengamatan. Model ini menggunakan entropi yang dikenal dengan entropi Sharma-Mittal (Sayahian Jahromi et al., 2018). Oleh sebab itu, dalam penelitian ini menggunakan formalisasi generalisasi entropi Tsallis dan Renyi dalam model Energi Gelap Holografik. Berdasarkan Allah berfirman:

اَللّٰهُ الَّذِيْ رَفَعَ السَّمٰوٰتِ بِغَيْرِ عَمَدٍ تَرَوْنَهَا ثُمَّ اسْتَوٰى عَلَى الْعَرْشِ وَ سَخَّرَ الشَّمْسَ وَ الْقَمَرَ ۗ كُلٌّ يَّجْرِيْ لِاَجَلٍ مُّسَمًّى ۗ يُدَبِّرُ الْاَمْرَ يُفَصِّلُ الْاٰيٰتِ لَعَلَّكُمْ بِلِقَاۤءِ رَبِّكُمْ تُوْقِنُوْنَ ۝

"Allah yang meninggikan langit tanpa tiang (sebagaimana) yang kamu lihat, kemudian Dia bersemayam di atas 'Arsy. Dia menundukkan matahari dan bulan; masing-masing beredar menurut waktu yang telah ditentukan. Dia mengatur urusan (makhluk-Nya), dan menjelaskan tanda-tanda (kebesaran-Nya), agar kamu yakin akan pertemuan dengan Tuhanmu." (QS. Ar-Ra'ad: 2)

Ulama-ulama setelah abad ketiga hijriyah, berusaha menjelaskan makna ayat tersebut dengan mengalihkan kata *istawa*, sehingga ayat tersebut menegaskan kekuasaan Allah dalam mengatur dan mengendalikan alam semesta. Terdapat kata رَفَعَ السَّمٰوٰتِ (*meninggikan langit*), yang mengandung makna bahwa langit dipisahkan dari bumi atau dapat dikatakan bahwa alam semesta mengalami pengembangan berdasarkan kalimat ini. Sedangkan kata بِغَيْرِ عَمَدٍ تَرَوْنَهَا (*tanpa tiang yang kamu lihat*), diibaratkan sebagi tiang karena sebagai yang meninggikan langit sehingga tidak terjatuh ke bawah. Meninggikan tanpa tiang dapat diibaratkan sebagaimana dengan energi yang tidak diketahui rupanya di mana mampu sebagai penyokong dalam meninggikan (mengembang) alam semesta, sehingga disebutlah energi gelap di mana oleh ilmuwan diperkirakan energi gelap ini memiliki energi negatif yang

melawan grafitasi. Oleh karena itu, berdasarkan kalimat رَفَعَ السَّمٰوٰتِ بِغَيْرِ عَمَدٍ تَرَوْنَهَا dapat dikatakan terdapat pengembangan alam semesta yang terjadi akibat adanya energi misterius yang dikenal sebagai energi gelap. Terlihat kebesaran Allah dalam penciptaan alam semesta (Muhammad Quraish Shihab, 2002).

Ayat ini menjadi salah satu bukti akan perilaku alam semesta yang terjadi. Apabila didasarkan pada topik ini di mana asal mula diambilnya model ini dikarenakan faktor awal di mana dalam pengamatan menunjukkan perilaku alam semesta yang berekspansi dipercepat akibat energi gelap yang memiliki energi yang bertolak belakang terhadap gaya grafitasi sehingga terjadi pengembangan alam semesta. Berdasarkan perilaku ini banyak fisikawan menggagas bermacam model energi gelap yang mampu menjelaskan alam semesta yang berekspansi.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan sebelumnya, maka dapat ditarik rumusan masalah pada penelitian ini diantaranya:

1. Bagaimana formalisme perumuman entropi berdasarkan model entropi Tsallis dan Renyi?
2. Bagaimana parameter densitas, perlambatan, dan derajat kecepatan suara yang menggambarkan ekspansi alam semesta berdasarkan model Energi Gelap Holografik dengan perumuman entropi Tsallis dan Renyi?

1.3. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang diambil, penelitian ini bertujuan sebagai berikut:

1. Untuk mengetahui formalisasi perumuman entropi berdasarkan model entropi Tsallis dan Renyi.

2. Untuk memperoleh parameter densitas, perlambatan, dan derajat kecepatan suara yang menggambarkan ekspansi alam semesta berdasarkan model Energi Gelap Holografik dengan perumuman entropi Tsallis dan Renyi.

1.4. Batasan Masalah

Batasan masalah yang digunakan dalam penelitian ini adalah

1. Perhitungan densitas energi menggunakan persamaan Friedmann pada alam semesta datar FRW.
2. Menggunakan radius hubble sebagai IR cutoff.

1.5. Manfaat Penelitian

Berdasarkan tujuan yang telah dijelaskan, diharapkan dari hasil penelitian ini mampu memberikan pemahaman secara rinci terhadap Energi Gelap (DE) dengan permodelan Energi Gelap Holografik (HDE) dengan formalisasi perumuman entropi berdasarkan model entropi Renyi dan Tsallis yang menunjukkan keberadaan energi gelap sebagai alasan alam semesta mengalami ekspansi dan dipercepat.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Energi Gelap Holografik

Energi gelap diyakini sebagai faktor yang menyebabkan alam semesta mengalami percepatan. Bahwasanya memiliki energi negatif yang membuat alam semesta mengembang sebagaimana penilitian yang menunjukkan pergeseran merah dan diyakini memiliki jumlah yang lebih besar di alam semesta, yakni 68,3% (Ananthanarayan & Mohanty, 2021). Muncul berbagai model energi gelap yang digunakan untuk menjelaskan ekspansi dipercepat pada alam semesta yang disebabkan oleh energi gelap. Salah satu model yang masih menjadi bahan penelitian untuk para ilmuwan adalah Energi Gelap Holografik, di mana model ini terkonstruksi dari prinsip holografik dalam quantum grafitasi.

Gagasan mengenai holografik muncul karena lubang hitam yang melanggar prinsip kesatuan. Prinsip kesatuan berdasarkan mekanika kuantum, masa depan harus menyimpan informasi dari masa lalu. Sedangkan segala materi yang jatuh ke dalam lubang hitam dianggap hilang, sebagaimana informasi yang dibawanya. Oleh karena itu, ‘t Hooft (1993) dan Susskind (1995b) mengangkat istilah holografik (Bousso, 2002). Pada peristiwa lubang hitam dengan asumsi di atas menggambarkan hologram, di mana pada *event horizon* berlaku sebagai media 2-dimensi yang memancarkan informasi yang dibawanya menjadi 3-dimensi pada daerah singularitas, sehingga saat lubang hitam mengalami penguapan informasi yang terkandung akibat materi yang masuk tidak menghilang. Hal ini sesuai dengan prinsip kesatuan. Sehingga muncul teori mengejutkan yang disebut prinsip holografik yang menyebutkan alam semesta seperti hologram, yang pada

prinsipnya setiap titik hologram berisi seluruh informasi yang terkandung ((Oort, 1970; Bekenstein, 2003; Robbins, 2006; Anjamrooz, 2011) dalam kutipan (Anjamrooz et al., 2011)).

Menurut prinsip holografik, jumlah derajat kebebasan dari sistem ukuran berhingga harus berhingga dan dibatasi oleh luas batas. Luas batas (L) di sini adalah energi total sistem yang tidak boleh melebihi ukuran dan menyerupai massa lubang hitam, yakni sebesar $L^3\rho_\Lambda \leq LM_P^2$ di mana ρ_Λ adalah quantum zero-point energi densitas yang disebabkan UV cutoff Λ dan M_P^2 adalah massa Planck $(1/8\,\pi G)$ (Naderi et al., 2015).

Berdasarkan analisis dimensi, diketahui (Wang et al., 2017)

$$\rho_D = C^2M_P^4 + C^2M_P^2L^{-2} + C^2L^{-4} + \cdots \tag{2.1}$$

C_1, C_2, C_3 merupakan parameter konstanta. Pada istilah pertama menimbulkan keadaan *fine-turning*. Cohen, Kaplan, dan Nelson, menegaskan bahwa istilah (persamaan) pertama tidak sesuai dengan prinsip holografik (HP). Berdasarkan persamaan densitas energi gelap berdasarkan model energi gelap holografik (HDE) berupa (Wang et al., 2017) (Gao, 2013)

$$\rho_{de} = 3c^2M_P^2L^{-2} \tag{2.2}$$

Di mana C adalah parameter konstanta lain dan M_P^2 merupakan massa Planck.

Persamaan tersebut kemudian diuji berdasarkan arguman dari Cohen et al, dirumuskan berdasarkan QFT (Teori Medan Kuantum) efektif dalam kotak ukuran L dengan cutoff UV diperoleh entropi berskala $S = L^3\Lambda^3$. Menurut prinsip holografik entropi harus dibatasi oleh ikatan entropi Bekenstein-Hawking (Gao, 2013)

$$L^3\Lambda^3 \leq S_{BH} \sim L^2\mathrm{M}_\mathrm{P}^2 \tag{2.3}$$

S_{BH} merupakan entropi Bekenstein-Hawking, sehingga panjang L bertindak sebagai IR cutoff-nya, tapi tidak dapat dipilih sebagai UV cutoff dan juga sebagai skala Λ^3. Terdapat bukti yang menunjukkan bahwa ikatan di atas belum cukup (masih longgar), sehingga tidak dapat mendeskripsikan energi rendah yang efektif dari sistem yang mengandung lubang hitam (misal, keadaan partikel dengan ukuran yang lebih kecil dari radius Schwarzschild yang sesuai). Maka diperlukan ikatan yang lebih kuat atau kendala pada IR cutoff L, yang mengecualikan seluruh keadaan yang ada pada radius Schwarzschild (Gao, 2013).

Teori medan efektif dapat memenuhi persamaan (2.3), apabila mencakup banyak keadaan dengan radius Schwarzschild lebih besar dari ukuran kotak. Agar mendapatkan ini QFT (Teori Medan Kuantum) harus mampu menggambarkan sistem pada suhu T, dengan ketentuan $T \leq \Lambda$; selama $T \gg 1\backslash L$ di mana memiliki energi termal $M \sim L^3T^4$ dan entropi $S \sim L^3T^3$. Ketika persamaan (2.3) jenuh pada $T \sim \left(\frac{M_P^2}{L}\right)^{1/3}$, maka radius Schwarzschild yang sesuai pada sistem ini adalah (Cohen et al., 1999) dalam (Gao, 2013)

$$L_S \sim L(LM_P)^{2/3} \gg L \tag{2.4}$$

Pada sistem ini didapatkan $Ls \gg L$, sehingga perlu diberikan batasan yang lebih mengikat pada IR cutoff $1/L$ yang mengecualikan semua keadaan yang ada di radius Schwarzschild di mana kerapatan energi maksimum pada teori medan efektif adalah $\rho \sim \Lambda^4$, maka diperoleh (Cohen et al., 1999) dalam (Gao, 2013)

$$L^3\Lambda^4 \lesssim LM_P^2 \tag{2.5}$$

Berdasarkan QFT efektif yang telah dijelaskan, hal ini juga sebanding dengan $L^4\Lambda^4$. Berdasarkan prinsip holografik dapat ditemukan $L^4\Lambda^4 \leq S_{BH} \sim L^2 M_P^2$ dan persamaan (2.3) juga terpenuhi (Gao, 2013).

2.2 Entropi

Entopi dikenalkan oleh Clausius pada tahun 1860-an, yang mendefinisikan entropi bukan seperti kalor melainkan fungsi keadaan sistem, yang berarti sistem keadaan tertentu yang memiliki volume, suhu, tekanan, nilai entropi, dll. Berdasarkan Hukum Termodinamika II mengatakan bahwa, "kalor dapat mengalir secara spontan dari benda panas menuju benda dingin; kalor tidak akan mengalir secara spontan dari benda dingin menuju benda panas", sehingga segala keadaan yang terjadi pada suatu sistem didasarkan pada entropi sebagaimana pada persamaan berikut (Giancoli, 2014):

$$\Delta S = \frac{Q}{T} \tag{2.6}$$

Clausius memfokuskan pada ireversibilitas termodinamika dari proses fisik makroskopik (Tsallis, 2022).

Pada dekade berikutnya Boltzmann yang kemudian diteruskan oleh Gibbs merumuskan entropi dari sistem yang mikroskopis (Tsallis, 2022). Pada skala mikroskopis perilakunya tidak berupa suhu, tekanan, medan magnet, dll melainkan harus mengikuti prinsip mekanika kuantum. Di mana partikel hanya bisa berada di salah satu keadaan dengan energi tertentu. Karenanya persamaan entropi berdasarkan keadaan mikro tiap partikel sebagai berikut (Sears & Salinger, 1982) (Greven, 2003).

$$S = k \ln W \tag{2.7}$$

Persamaan (2.7) diperoleh dari persamaan termodinamika II dengan menjadikannya sebagai berikut

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{n\,R\,T}{T}\log\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = n\,R\log\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \tag{2.8}$$

Di mana ΔQ dimisalkan pada kondisi isotermik (suhu selalu konstan)

$$\Delta S = n\,N_A\,k\log 2 = k\log 2^{nN_A} = k\log 2^N \tag{2.9}$$

Di mana $R = N_A k$, $V_2 = 2V_1$, dan $n\,N_A = N$

Misal ada dua kemungkinan terjadi peluang suatu benda untuk berperilaku, seperti koin yang dilempar akan muncul berupa kepala atau ekor. Sehingga tiap kemungkinan dapat memunculkan salah satu dari dua orientasi. Oleh karena itu, banyak cara yang dapat terjadi dalam dua orientasi berupa

$$W = 2 \times 2 \times 2 \times \ldots = 2^N$$

Sehingga persamaan (2.9) sama seperti pada persamaan (2.7)

Entropi ini dikenal dengan entropi Boltzman dan entropi ini memenuhi hukum termodinamika III, di mana suatu sistem akan dalam keadaan setimbang ketika suhu mencapa nol mutlak atau dapat dikatakan proses akan berhenti dan entropi mendekati minimum (Sears & Salinger, 1982). ketika sistem dalam kondisi berhenti atau diam, menunjukkan keadaan molekul dalam keadaan teratur maka

$$S = k\ln 1 = 0$$

S adalah entropi, k merupakan konstanta Boltzman, sedangkan W adalah jumlah kemungkinan keberadaan suatu sistem relatif terhadap semua keadaan yang mungkin ditempati. Dikatakan pula W merupakan parameter ketidakteraturan/kekacauan (*disorder*), karena keadaan partikel akan berbeda ketika sistem berada dalam keadaan mikro (*microstate*) yang berbeda, entropi ini

juga biasa disebut dengan entropi Boltzman (Sears & Salinger, 1982) (Greven, 2003).

Gibbs pada awalnya mengemukakan bahwasanya sistem yang memiliki interaksi jarak jauh kemungkinan tidak ekstensif, sehingga memunculkan ide dalam mendefinisikan entropi. Entropi telah banyak digunakan untuk memodelkan evolusi kosmik dengan beragam pengaturan. Sehingga salah satunya muncul perumuman entropi yang mampu digunakan untuk membangun model baru energi gelap holografik (Moradpour et al., 2020).

Entropi Boltzmann dan Gibbs keduanya berfungsi untuk mengukur keadaan mikro yang ada pada suatu sistem, tapi yang membedakan antar keduanya adalah entropi Boltzmann sebanding dengan logaritma jumlah keadaan mikro pada kulit energi yang diberikan, sedangkan entropi Gibbs sebanding dengan logaritma jumlah keadaan mikro hingga energi tertentu (Buonsante et al., 2016). Dapat dikatakan bentuk antar kedua entropi hampir sama, sehingga entropi Gibbs merupakan hasil generalisasi pada entropi Boltzmann. Jika dalam kondisi setimbang, semua keadaan mikro agar berada pada kondisi setimbang yang sama untuk keadaan W maka akan diperoleh melalui $P_i = 1/W$

$$S_G = -k \sum_{i=1}^{W} P_i \log P_i \tag{2.10}$$

Di mana k adalah konstanta Boltzmann dan $P = \{p_i\}, (1 = 1, \dots, W)$.

Enropi merupakan salah satu hal yang memenuhi alam semesta dan diyakini mempengaruhi perilaku yang ada di alam semesta. Entropi jika dicontohkan secara klasik, misalnya adalah suatu balon yang asalnya mengembang akan tiba-tiba mengerut atau perlahan kehilangan volumenya padahal tidak ada faktor dari luar yang mempengaruhi. Faktor yang mempengaruhi hal ini disebut dengan entropi,

karena wujud dari entropi sendiri tidak ada yang tahu. Sebagaimana di alam semesta, alam semesta mengalami pengembangan maupun penyusutan juga diyakini dipengaruhi oleh entropi. Keadaan alam semesta tidak ada yang tahu pasti mengenai ini, sebagaimana Allah berfirman:

وَمَا خَلَقْنَا السَّمٰوٰتِ وَ الْاَرْضَ وَ مَا بَيْنَهُمَا لٰعِبِيْنَ۝ مَا خَلَقْنٰهُمَآ اِلَّا بِالْحَقِّ وَلٰكِنَّ اَكْثَرَهُمْ لاَ

يَعْلَمُوْنَ۝

"Dan tidaklah Kami bermain-main menciptakan langit dan bumi dan apa yang ada di antara keduanya. Tidaklah Kami ciptakan keduanya melainkan dengan haq (benar), tetapi kebanyakan mereka tidak mengetahui." (QS. Ad-Dukhan : 38-39)

Ayat ini menjelaskan mengenai sebaik-baiknya ciptaan. Sebagaimana menurut Al-Biqa'I, bahwasanya Allah menciptakan segala sesuatu khusunya yang ada diantara langit dan bumi sebagaimana pada ilmu alam terdapat salah satu kebesaran Allah, yakni entropi. Telah termaktub dalam firman Allah "*Kami tidak menciptakan keduanya melainkan dengan haq"*, hal ini membuktikan keesaan dan kekuasaan Kami dan juga menganugerahkan kesempurnaan hidup bagi manusia (M. Quraish Shihab, 2002b). entropi yang merupakan salah satu benda atau metafisis yang dijuluki oleh para ilmuwan dalam menjelaskan suatu kondisi yang sampai saat ini menjadi salah satu parameter yang digunakan baik dalam keadaan mikro maupun makro.

Entropi merupakan salah satu hal yang tidak diketahui pasti berupa apa, sedangkan pada alam semesta merupakan salah satu parameter yang memberikan informasi keadaan/kondisi pada suatu sistem. Berdasarkan pada ayat pertama yang menjelaskan bahwa "*Allah tidak menciptakan langit, bumi, dan diantara keduanya dengan bermain-main"*. Sebagaimana langit digambarkan dalam sistem luas yakni

alam semesta, sehingga dapat dikatakan komponen yang ada diantara langit bumi salah satunya adalah entropi. Entropi merupakan salah satu bentuk bukti Allah yang menciptakan segala hal memiliki fungsi, tujuan dan peranan masing-masing sebagaimana yang dimiliki oleh entropi dan penampakan yang belum diketahui secara pasti oleh para ilmuwan, hal ini tersurat pada penjelasan ayat berikutnya yang mengatakan مَا خَلَقْنٰهُمَآ اِلَّا بِالْحَقِّ (*Tidaklah Kami ciptakan keduanya melainkan dengan haq*). Bahwasanya dengan baik dan benar Allah juga menciptakan salah satu komponen penting yang diyakini penyebab alam semesta berekspansi, yakni entropi. Dengan memiliki tujuan dan kegunaan sebagaimana dalam bidang fisika menjadi parameter dalam menjelaskan kondisi atau keadaan suatu sistem baik dalam keadaan makro ataupun mikro.

2.2.1 Fungsi Hartley dan Entropi Shannon

Entropi dikonseptualkan oleh Shannon, di mana memiliki definisi untuk mengukur informasi yang dihasilkan oleh variabel acak (Mazumdar et al., 2019). Entropi juga didefinisikan sebagai konsep informasi dasar atau suatu sistem mengenai hilangnya suatu informasi tentang keadaan konkret suatu sistem. Dengan kata lain, entropi sebagai kuantitas yang memungkinkan untuk mengukur informasi yang hilang (Beck, 2009).

Dipertimbangakan satu set keadaan W dengan kemungkinan yang diidentifikasikan dalam keadaan mikro suatu sistem, di mana probabilitas suatu peristiwa i dilambangkan sebagai P_i dan dinormalisasikan sebagai bentuk kemungkinan terjadinya peristiwa yang memungkinkan terjadi (Beck, 2009)

$$\sum_{i=1}^{W} P_i = 1 \tag{2.11}$$

Kemudian dengan satu peristiwa i yang terjadi akan diperoleh informasi yang diukur dengan fungsi $h(P_i) = \log P_i$, sehingga informasi rata-rata yang diperoleh dalam suatu peristiwa i dengan probabilitas kejadian dalam suatu peristiwa didapatkan

$$I(\{P_i\}) = \sum_{i=1}^{W} P_i h(P_i) \tag{2.12}$$

Jika semua keadaan adalah equi-probable maka akan mengarah ke prinsip Boltzmann yang dikenal $S = k \log W$. Entropi Gibbs setara dengan ekspresi Shannon apabila diatur $k = 1$ dan menggunakan basis immetarial b untuk fungsi logaritma (Masi, 2005). Entropi Shannon merupakan logaritma informasi pada P yang didefinisikan sebagai $S(P)$ (Dukkipati et al., 2005b) yang berbentuk

$$S_S(P) = -\sum_{i=1}^{W} P_i \log_{\mathrm{b}} P_i \tag{2.13}$$

Mengkuantifikasi informasi dalam bentuk fungsi logaritma diusung pertama kali oleh Hartley dalam mendefinisikan ketidakpastian pada himpunan berhingga yang dikenal sebagai *The Hartley Information Measure*. Himpunan bsehingga A dengan n elemen pada *The Hartley Information Measure* didefinisikan sebagai $H(A) = \log_b n$. Definisi secara umum dari *The Hartley Infromation Measure* adalah ditunjukkan pada kasus khusus entropi Shannon, di mana mendefinisikan fungsi $H: \{x_1, \dots, x_n\} \to \mathbb{R}$ dari nilai-nilai yang diambil pada variabel acak $X \in \chi$ dengan probabilitas yang sesuai dengan massa $p = (p_1, \dots, p_n)$ sebagai (Dukkipati et al., 2005b)

$$H(x_i) = \ln \frac{1}{P_i}\ , \qquad \forall i = 1, \dots, n \tag{2.14}$$

H juga diketahui sebagai entropi pada peristiwa tunggal dan berperan penting dalam seluruh pengukuran informasi klasik. Dapat diartikan bahwa fungsi H sebagai ukuran seberapa tidak terduganya suatu peristiwa atau sebagai ukuran informasi yang dihasilkan oleh suatu peristiwa. Fungsi Hartley memenuhi: (i) $H(x_i) \geq 0$ adalah non-negatif; (ii) $H(x_i x_j) = H(x_i) + H(x_j)$ adalah aditif; (iii) $H(x_i) = 1$ adalah dinormalisasi. Jika diproyeksikan fungsi ini pada entropi Shannon maka menjadi (Dukkipati et al., 2005b)

$$S_S(\mathrm{X}) = \langle H \rangle = \sum_{i=1}^{W} P_i \log \frac{1}{P_i} = \sum_{i=1}^{W} P_i\, H_i \tag{2.15}$$

Di mana dipahami bahwa $\langle H \rangle = \langle H(X) \rangle$. Sehingga karakteristik sifat aditif pada entropi Shannon didapatkan (Dukkipati et al., 2005b)

$$S(X \times Y) = S(X) + S(Y)$$

Entropi Shannon dan entropi Gibbs memiliki karakteristik sifat yang sama, yakni aditif. Karakteristik yang dimiliki juga dapat dibentuk sebagai berikut (Ilić et al., 2021)

$$S_S(A \cap B) = S_S(A) + S_S(B|A) \tag{2.16}$$

Sehingga menjadi

$$S_S(A \cap B) = S_S(A) + \sum_{i=1}^{W} P_i S_S(B|A_i) \tag{2.17}$$

Entropi Shannon dapat ditulis dalam bentuk rata-rata linier (*aritmatika mean*) menjadi (Masi, 2005)

$$S_S(P) = \langle I_i \rangle_{lin} = \left\langle \log\left(\frac{1}{P_i}\right) \right\rangle_{lin} \tag{2.18}$$

Sehingga dikenal kuantitas

$$I_i = \log\left(\frac{1}{P_i}\right) \tag{2.19}$$

2.2.2 Kolmogorov-Nagumo-mean

Rata-rata atau mean merupakan ukuran statistik matematis yang biasa digunakan untuk mempermudah perhitungan data dalam jumlah besar. Arti rata-rata atau mean secara umum adalah penjumlah data yang dibagi dengan jumlah data. Seperti pengertiannya dapat diubah menjadi (Singpurwalla & Lai, 2020)

$$M = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum x_n}{n} \tag{2.20}$$

Kolmogorov (1930) dan Nagumo (1930) mendefinisikan mean atau rata-rata secara khusus adalah barisan tak hingga dari bentuk fungsi $M_1\ (x_1), M_2\ (x_1, x_2), M_3\ (x_1, x_2, x_3), \dots, M_n\ (x_1, x_2, \dots, x_n)$, setiap M_n kontinu, meningkat, dan simetris, serta dengan sifat $M_n(x, x, \dots, x) = x$, untuk seluruh x dan n. Teorema mencolok dari Kolmogorov Nagumo (KN) adalah bahwa terdapat urutan fungsi pada kondisi di bawah dan di atas, di mana fungsi f terus menerus meningkat secara pesat oleh rata-rata nilai $M_n(x_1, \dots, x_n)$ sehingga dapat ditulis (Singpurwalla & Lai, 2020)

$$M_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} f(x_i)\right) \tag{2.21}$$

Di mana $f^{-1}(x)$ adalah invers dari $f(x)$

Pada makalah (1931) Finetti dan Katagawa (1934) mengeneralisasikan hasil K-N dalam pengaruh kasus pengamatan. Jika untuk setiap pengamatan x_i berpengaruh pada q_i dengan $\sum q_i = 1$, maka de Finetti dan Katagawa memberikan syarat (Singpurwalla & Lai, 2020)

$$M_n(x_1, \dots, x_n; q_1, \dots, q_n) = f^{-1}\left(\left(\sum q_i\, f(x_i)\right)\right)$$

Untuk $n = 1,2, \dots$

Pada teori umum rata-rata (mean), kolmogorov-Nagumo-mean disebut juga sebagai quasi linier mean dan apabila pada variabel acak X maka didefinisikan sebagaimana pada rumus sebelumnya yakni menjadi (Dukkipati et al., 2005b)

$$E_\psi X = \langle X \rangle_\psi = \psi^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} P_i\, \psi(x_i)\right) \tag{2.22}$$

ψ disebut sebagai fungsi Kolmogorov-Nagumo (fungsi KN). Apabila ψ berupa linier maka persamaan (2.22) akan berubah menjadi rata-rata linier (*linier averaging*) (Dukkipati et al., 2005b)

$$EX = \langle X \rangle_\psi = \sum_{i=1}^{n} P_i\, \psi(x_i) \tag{2.23}$$

2.2.3 Entropi Renyi

Entropi Renyi merupakan turunan dari entropi Shannon dengan mengganti rata-rata linier dari entropi Shannon dengan rata-rata umum, Kolmogorov-Nagumo *mean* dan dengan mengajukan penambahan ukuran informasi (Dukkipati et al., 2005a) (ada juga mengatakan entropi Renyi merupakan turunan dari entropi Bekeinstein-Gibbs, karena bentuk keduanya yang membedakan hanya pada nilai $k = 1$ pada entropi Shannon). Diawali dengan gagasan rata-rata A.N Kolomogorov dan M. Nagumo, yang secara independent menunjukkan bahwa dalam kerangka aksioma Kolmogorov teori probabilitas, bahwa definisi rata-rata harus diperluas ke *quasi arithmetic mean* atau *quasi linier mean* yang ditentukan pada persamaan (2.21) (Masi, 2005)

$$S = f^{-1}\left(\sum_{i=1}^{W} P_i\, f(I_i)\right)$$

Rata-rata informasi I sebagaimana pada persamaan (2.19) mengarah pada entropi Renyi orde-α, jika fungsi ϕ dipilih dalam bentuk $\phi(x) = \exp\big((1-\alpha)x\big), (\alpha \neq 1)$ karena apabila dipilih dalam bentuk linier (fungsi KN adalah $f(x) = x$), maka akan membentuk entropi Shannon. Kemudian fungsi KN yang dipilih dimodifikasi dengan membiarkan $\phi = \phi_\alpha$ (Naudts & Czachor, 2001) (Dukkipati et al., 2005b)

$$f(x) = \phi_\alpha = \ln_\alpha(e^x) = \frac{e^{(1-\alpha)x} - 1}{1-\alpha} \tag{2.24}$$

Sehingga didapatkan invers dari fungsi di atas

$$y = \frac{e^{(1-\alpha)x} - 1}{1-\alpha}$$

$$y(1-\alpha) + 1 = e^{(1-\alpha)x}$$

$$\log(y(1-\alpha) + 1) = (1-\alpha)x$$

$$x = \frac{1}{1-\alpha}\log(y(1-\alpha) + 1)$$

$$y = \frac{1}{1-\alpha}\log\big((1-\alpha)x + 1\big)$$

$$f^{-1}(x) = \phi_\alpha^{-1} = f^{-1}(x) = \frac{1}{1-\alpha}\log\big((1-\alpha)x + 1\big) \tag{2.25}$$

Perhatikan bahwa rata-rata Kolomogorov-Nagumo adalah invarian di bawah modifikasi di atas, maka

$$S = \frac{1}{1-\alpha}\log\left((1-\alpha)\sum_{i=1}^{W} P_i\, f(x) + 1\right)$$

Fungsi pada persamaan $f(x)$ dimasukkan ke dalam entropi yang telah diperoleh

$$S = \frac{1}{1-\alpha}\log\left(\sum_{i=1}^{W} P_i\left(\frac{e^{(1-\alpha)x}-1}{1-\alpha}\right)(1-\alpha)+1\right)$$

$$S = \frac{1}{1-\alpha}\log\left(\sum_{i=1}^{W} P_i\, e^{(1-\alpha)x}-1+1\right)$$

$$S = \frac{1}{1-\alpha}\log\left(\sum_{i=1}^{W} P_i\, e^{(1-\alpha)x}\right)$$

Dianggap eksponen di atas merupakan nilai keadaan (W), sebagaimana pada penjelasan sebelumnya $P_i = 1/W$. Oleh karena itu, $W^{(1-\alpha)} = \frac{1}{P_i} \rightarrow W = P_i^{(\alpha-1)}$ maka didapatkan

$$S = \frac{1}{1-\alpha}\log\left(\sum_{i=1}^{W} P_i\left(P_i^{(\alpha-1)}\right)\right)$$

$$S = \frac{1}{1-\alpha}\log\left(\sum_{i=1}^{W} P_i^{\alpha}\right)$$

Sehingga terbentuklah entropi Renyi dengan hasil generalisasi menggunakan Kolmogorov-Nagumo-mean dan merupakan hasil generalisasi dari entropi Shannon

$$S = \frac{1}{\delta}\log\sum_{i=1}^{W} P_i^{1-\delta} \tag{2.26}$$

Di mana $\delta = 1-\alpha = 1-Q$

2.2.4 Entropi Tsalis

Entropi Tsallis merupakan entropi generalisasi dari entropi Bekenstein menjadi sistem non-ekstensivitas. Entropi ini hanya mengatur pada parameter yang dipilih, yakni q, tidak seperti Gibbs dan Shannon yang masih mengatur dalam

peristiwa secara umum. Parameter yang dipilih disebut dengan probabilitas-q, yakni probabilitas skala di mana q adalah parameter nyata (Masi, 2005). Entropi Tsallis dianggap sebagai ukuran yang berfungsi dalam menggambarkan sifat termostatis dari kelas tertentu pada sistem fisik yang memerlukan interaksi jarak jauh (*long-range interactions*), ingatan jarak panjang (*long-term memories*), dan sistem multi-fraktal (*multi-fractals system*) (Dukkipati et al., 2005a).

Berdasarkan postulat Constantino Tsallis untuk generalisasi entropi Gibbs (Tsallis, 1988)

$$S_q \equiv k\left[1 - \frac{\sum_{i=1}^{W} P_i^q}{q-1}\right] \qquad q \in \mathbb{R} \tag{2.27}$$

Tsallis mendalilkan generalisasinya yang sekarang terkenal dari entropi Shannon ke non-ekstensivitas (Masi, 2005)

$$S_T(P,q) = \frac{\sum_{i=1}^{W} P_i^q - 1}{1-q} = \frac{k}{q-1}\sum_{i=1}^{W} P_i(1 - P_i^{q-1}) \tag{2.28}$$

Berdasarkan (Ilić et al., 2021) telah dikemukakan hubungan berikut sebagai ganti dari persamaan (2.17)

$$S(A \cap B) = S(A) + \sum_{i=1}^{W} P_1^{\beta} S(B|A_i) \tag{2.29}$$

Menggunakan solusi unik $s(x) = x\log_{\beta}(1/x)$, di mana

$$\log_{\beta}(x) = \frac{x^{1-\beta} - 1}{1-\beta} \tag{2.30}$$

Merupakan fungsi umum dari logaritma yang dikontrol berdasarkan parameter deformasi β, sehingga diturunkan ke logaritma standar dalam $\beta \to 1$, limit: $\ln_1 x \equiv \ln x$. Bentuk entropi sesuai dengan informasi entropi Havrda-Charvat dan Daroczy (Ilić et al., 2021)

$$S_\beta(P) = \frac{1}{1-\beta}\left(\sum_{i=1}^{W} P_i^\beta - 1\right) \tag{2.31}$$

Entropi tsallis didapatkan berdasarkan persamaan (2.7) dan diperoleh dengan penambahan parameter $q = \beta$

$$S = k \log_q W \tag{2.32}$$

Kemudian menggunakan solusi logaritma (2.30)

$$S = k\frac{W^{(1-q)} - 1}{1-q}$$

Karena untuk mengetahui jumlah informasi yang didapat, sehingga dicari dengan mengalikannya pada setiap probabilitas dan menjumlahkan semua kemungkinan kejadian

$$S = \frac{k}{1-q}\sum_{i=1}^{W} P_i\,(W^{(1-q)} - 1)$$

$$S = \frac{k}{1-q}\sum_{i=1}^{W} P_i\,(P_i^{(q-1)} - 1)$$

Sebagaimana pada entropi Renyi bahwa probabilitas keadaan ke-i $P_i = 1/W$

$$S = \frac{k}{1-q}\sum_{i=1}^{W}\left(P_i^q - P_i\right)$$

Di mana $\beta = q$ dan $k = 1$ (sehingga akan merujuk pada entropi Shannon)

Sehingga diperoleh entropi Tsallis dari hasil generalisasi entropi Boltzmann yang diatur menggunakan deformasi-q

$$S_T = \frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^{W}\left(P_i^{1-\delta} - P_i\right) \tag{2.33}$$

Di mana $\delta = 1 - Q = 1 - \beta$

2.3 Metrik Friedmann-Robertson-Walker (FRW)

Alam semesta bersifat homogen dan isotropik. Hal ini secara geometri sering dinyatakan oleh metrik Robertson-Walker. Metrik Friedmann-Robertson-Walker (FRW) adalah homogen spasial dan isotropik sebagai (Amirhashchi et al., 2011). Alam semesta homogen merupakan distribusi massanya sama di semua bagian alam semesta sehingga di mana pun pengamat berada akan mengamati hal yang sama, sedangkan isotropik adalah pengamat akan melihat hal yang sama ke arah manapun pengamat memandang. Metrik Friedmann-Robertson-Walker (FRW) merupakan metrik geometri alam semesta secara makroskopik yang diperoleh dari persamaan Medan Einstein berdasarkan asumsi dan kendala dari pengamatan sebagai berikut (Gautama, 2020):

1. Pengembangan ruang secara seragam (ekspansi Hubble).
2. Terdapat waktu kosmik $x^0 = t$ dalam kerangka bergerak bersamaan dengan pengembangan ruang.
3. Alam semesta secara makroskopik bersifat homogen (seragam) dan isotropik (sama segala arah).
4. Secara makroskopis, alam semesta dipandang didominasi oleh radiasi dan materi berkerapatan rendah.

Berdasarkan asumsi di atas diperoleh ansatz yang mewakili. Pada (1) menunjukkan parameter koordinat ruang mengandung waktu, (2) menggunakan koordinat kosmik berupa $g_{00} = 1$, (3) alam semesta bersifat isotropik menunjukkan metrik bersifat simetri bola dan homogen menunjukkan fungsi metrik harus sama untuk ketiga parameter ruang $(Q_i dx^i)$.

$$ds^2 = c^2dt^2 - e^{2f(r,t)}(dr^2 + r^2d\Omega^2) \tag{2.34}$$

Sehingga tensor metriknya berupa

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{2f} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{2f}r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{2f}r^2\sin^2\theta \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

Diperoleh tensor kontravarian sebagai berikut

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{e^{2f}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{e^{2f}r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{e^{2f}r^2\sin^2\theta} \end{bmatrix} \tag{2.36}$$

Berdasarkan simbol Christoffel yang diperoleh berdasarkan metrik (2.35) diperoleh dengan rumus

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}\right) \tag{2.37}$$

$$\Gamma^0_{00} = \Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{02} = \Gamma^0_{03} = 0$$

$$\Gamma^0_{10} = \Gamma^0_{12} = \Gamma^0_{13} = \Gamma^0_{20} = \Gamma^0_{21} = \Gamma^0_{23} = \Gamma^0_{30} = \Gamma^0_{31} = \Gamma^0_{32} = 0$$

$$\Gamma^1_{00} = \Gamma^1_{02} = \Gamma^1_{03} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{13} = 0$$

$$\Gamma^1_{20} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{23} = \Gamma^1_{30} = \Gamma^1_{31} = \Gamma^1_{32} = 0$$

$$\Gamma^2_{00} = \Gamma^2_{01} = \Gamma^2_{03} = \Gamma^2_{10} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{13} = \Gamma^2_{20} = \Gamma^2_{22} = \Gamma^2_{23} = 0$$

$$\Gamma^2_{30} = \Gamma^2_{31} = \Gamma^2_{32} = 0$$

$$\Gamma^3_{00} = \Gamma^3_{01} = \Gamma^3_{02} = \Gamma^3_{10} = \Gamma^3_{11} = \Gamma^3_{12} = 0$$

$$\Gamma^3_{20} = \Gamma^3_{21} = \Gamma^3_{22} = \Gamma^3_{31} = \Gamma^3_{33} = 0$$

$$\Gamma^3_{32} = \Gamma^3_{23} = \cot\theta$$

$$\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \alpha' + \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10} = \Gamma^2_{02} = \Gamma^2_{20} = \Gamma^3_{03} = \Gamma^3_{30} = \dot{\alpha}$$

$$\Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \alpha' + \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^1_{33} = -\sin^2\theta(r + \alpha' r^2)$$

$$\Gamma^1_{22} = -r - \alpha' r^2$$

$$\Gamma^1_{11} = \alpha'$$

$$\Gamma^0_{33} = \dot{\alpha} r^2 \sin^2\theta\, e^{2\alpha}$$

$$\Gamma^0_{22} = \dot{\alpha} r^2 e^{2\alpha} \tag{2.38}$$

$$\Gamma^0_{11} = \dot{\alpha} e^{2\alpha}$$

Di mana $f(r,t) = \alpha(r,t)$, $\frac{\partial\alpha}{\partial t} = \dot{\alpha}$, $\frac{\partial\alpha}{\partial r} = \alpha'$

Tensor Ricci diperoleh dengan kontraksi tensor Reimann-Christoffel yang memiliki rumus sebagaimana berikut

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} = g^{\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\alpha} + \Gamma^\beta_{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\beta\alpha} - \Gamma^\beta_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{\beta\nu} \tag{2.39}$$

Tensor Ricci yang memiliki nilai sebagaimana berikut

$$R_{00} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{00} - \partial_0 \Gamma^\alpha_{0\alpha} + \Gamma^\beta_{00}\Gamma^\alpha_{\beta\alpha} - \Gamma^\beta_{0\alpha}\Gamma^\alpha_{\beta 0}$$

$$= -(\partial_0 \Gamma^1_{01} + \partial_0 \Gamma^2_{02} + \partial_0 \Gamma^3_{03})$$

$$- (\Gamma^1_{01}\Gamma^1_{10} + \Gamma^2_{02}\Gamma^2_{20} + \Gamma^3_{03}\Gamma^3_{30})$$

$$= -(\partial_t \dot{\alpha} + \partial_t \dot{\alpha} + \partial_t \dot{\alpha}) - (\dot{\alpha}\dot{\alpha} + \dot{\alpha}\dot{\alpha} + \dot{\alpha}\dot{\alpha})$$

$$= -3\ddot{\alpha} - 3\dot{\alpha}^2$$

$$R_{01} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{01} - \partial_1 \Gamma^\alpha_{0\alpha} + \Gamma^\beta_{01}\Gamma^\alpha_{\beta\alpha} - \Gamma^\beta_{0\alpha}\Gamma^\alpha_{\beta 1}$$

$$= \partial_1 \Gamma^1_{01} - (\partial_1 \Gamma^1_{01} + \partial_1 \Gamma^2_{02} + \partial_1 \Gamma^3_{03})$$

$$+ (\Gamma^1_{01}\Gamma^1_{11} + \Gamma^1_{01}\Gamma^2_{12} + \Gamma^1_{01}\Gamma^3_{13})$$

$$- (\Gamma^1_{01}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{02}\Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{03}\Gamma^3_{31})$$

$$= \partial_r \dot{\alpha} - \big(\partial_r(\dot{\alpha} + \dot{\alpha} + \dot{\alpha})\big)$$

$$+ \left(\dot{\alpha}\alpha' + \dot{\alpha}\left(\alpha' + \frac{1}{r}\right) + \dot{\alpha}\left(\alpha' + \frac{1}{r}\right)\right)$$

$$- \left(\dot{\alpha}\alpha' + \dot{\alpha}\left(\alpha' + \frac{1}{r}\right) + \dot{\alpha}\left(\alpha' + \frac{1}{r}\right)\right) = -2\dot{\alpha}'$$

$$R_{11} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{11} - \partial_1 \Gamma^\alpha_{1\alpha} + \Gamma^\beta_{11}\Gamma^\alpha_{\beta\alpha} - \Gamma^\beta_{1\alpha}\Gamma^\alpha_{\beta 1}$$

$$= (\partial_0 \Gamma^0_{11} + \partial_1 \Gamma^1_{11}) - (\partial_1 \Gamma^1_{11} + \partial_1 \Gamma^2_{12})$$

$$+ (\Gamma^0_{11}\Gamma^1_{01} + \Gamma^0_{11}\Gamma^2_{02} + \Gamma^0_{11}\Gamma^3_{03} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{11} + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12}$$

$$+ \Gamma^1_{11}\Gamma^3_{13})$$

$$- (\Gamma^0_{11}\Gamma^1_{01} + \Gamma^1_{10}\Gamma^0_{11} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{31})$$

$$= (\partial_t \dot{\alpha} e^{2\alpha} + \partial_r \alpha')$$

$$- \left(\partial_r \alpha' + \partial_r\left[\alpha' + \frac{1}{r}\right] + \partial_r\left[\alpha' + \frac{1}{r}\right]\right)$$

$$+ \left(\dot{\alpha}^2 e^{2\alpha} + \dot{\alpha}^2 e^{2\alpha} + \dot{\alpha}^2 e^{2\alpha} + \alpha'^2 + \left[\alpha' + \frac{1}{r}\right]\right.$$

$$\left. + \left[\alpha' + \frac{1}{r}\right]\right)$$

$$- \left(\dot{\alpha}^2 e^{2\alpha} + \dot{\alpha}^2 e^{2\alpha} + \alpha'^2 + \left[\alpha' + \frac{1}{r}\right]^2 + \left[\alpha' + \frac{1}{r}\right]\right)$$

$$= e^{2\alpha}(\ddot{\alpha} + 3\dot{\alpha}) - 2\alpha'' - \frac{2}{r}\alpha'$$

$$R_{22} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{22} - \partial_2 \Gamma^\alpha_{2\alpha} + \Gamma^\beta_{22}\Gamma^\alpha_{\beta\alpha} - \Gamma^\beta_{2\alpha}\Gamma^\alpha_{\beta 2}$$

$$= (\partial_0 \Gamma^0_{22} + \partial_1 \Gamma^1_{22}) - (\partial_2 \Gamma^3_{23})$$

$$+ (\Gamma^0_{22}\Gamma^1_{01} + \Gamma^0_{22}\Gamma^2_{02} + \Gamma^0_{22}\Gamma^3_{03} + \Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11} + \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{12}$$

$$+ \Gamma^1_{22}\Gamma^3_{13})$$

$$- (\Gamma^0_{22}\Gamma^2_{02} + \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{20}\Gamma^0_{22} + \Gamma^2_{21}\Gamma^1_{22} + \Gamma^3_{23}\Gamma^3_{32})$$

$$= \left(\partial_t \dot{\alpha}^2 e^{2\alpha} + \partial_r(-r - \alpha' r^2)\right) - (\partial_\theta \cot\theta)$$

$$+ \Big(\dot{\alpha}^2 r^2 e^{2\alpha} + \dot{\alpha}^2 r^2 e^{2\alpha} + \dot{\alpha}^2 r^2 e^{2\alpha}$$

$$+ \alpha'(-r - r^2\alpha') + (-r - r^2\alpha')\left[\alpha' + \frac{1}{r}\right]$$

$$+ (-r - r^2\alpha')\left[\alpha' + \frac{1}{r}\right]\Big)$$

$$- \Big(\dot{\alpha}^2 r^2 e^{2\alpha} + (-r - r^2\alpha')\left[\alpha' + \frac{1}{r}\right] + \dot{\alpha}^2 r^2 e^{2\alpha}$$

$$+ (-r - r^2\alpha')\left[\alpha' + \frac{1}{r}\right] + \cot^2\theta\Big)$$

$$= r^2 e^{2\alpha}(\ddot{\alpha} + \dot{\alpha}^2) - r^2\alpha'' - 3r\alpha' - r^2\alpha'^2$$

$$
\begin{aligned}
R_{33} &= \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{33} - \partial_3 \Gamma^\alpha_{3\alpha} + \Gamma^\beta_{33}\Gamma^\alpha_{\beta\alpha} - \Gamma^\beta_{3\alpha}\Gamma^\alpha_{\beta 3} \\
&= (\partial_0 \Gamma^0_{33} + \partial_1 \Gamma^1_{33} + \partial_2 \Gamma^2_{33}) \\
&+ (\Gamma^0_{33}\Gamma^1_{01} + \Gamma^0_{33}\Gamma^2_{02} + \Gamma^0_{33}\Gamma^3_{03} + \Gamma^1_{33}\Gamma^1_{11} + \Gamma^1_{33}\Gamma^2_{12} \\
&+ \Gamma^1_{33}\Gamma^3_{13} + \Gamma^2_{33}\Gamma^3_{23}) \\
&- (\Gamma^0_{33}\Gamma^3_{03} + \Gamma^1_{33}\Gamma^3_{13} + \Gamma^2_{33}\Gamma^3_{23} + \Gamma^3_{30}\Gamma^0_{33} + \Gamma^3_{31}\Gamma^1_{33} \\
&+ \Gamma^3_{32}\Gamma^2_{33}) \\
&= \Big(\partial_t \dot{\alpha}^2 r^2 e^{2\alpha} + \partial_r\big(-\sin^2\theta\,(r + r^2\alpha')\big) \\
&+ \partial_\theta(-\sin\theta\cos\theta)\Big) \\
&+ \Big(\dot{\alpha}^2 r^2 e^{2\alpha}\sin^2\theta + \dot{\alpha}^2 r^2 e^{2\alpha}\sin^2\theta \\
&+ \dot{\alpha}^2 r^2 e^{2\alpha}\sin^2\theta + \alpha'(-\sin^2\theta\,(r + r^2\alpha')\Big) \\
&+ (-\sin^2\theta\,(r + r^2\alpha')\left[\alpha' + \frac{1}{r}\right] \\
&+ \left(-\sin^2\theta\,(r + r^2\alpha')\left[\alpha' + \frac{1}{r}\right]\right. \\
&+ \left.\cot\theta\,(-\sin\theta\cos\theta)\right) \\
&- \Big(\dot{\alpha}^2 r^2 e^{2\alpha}\sin^2\theta + (-\sin^2\theta\,(r + r^2\alpha')\left[\alpha' + \frac{1}{r}\right] \\
&+ \cot\theta\,(-\sin\theta\cos\theta) + \dot{\alpha}^2 r^2 e^{2\alpha}\sin^2\theta \\
&+ (-\sin^2\theta\,(r + r^2\alpha')\left[\alpha' + \frac{1}{r}\right] \\
&+ \cot\theta\,(-\sin\theta\cos\theta)\Big) \\
&= (r^2 e^{2\alpha}(\ddot{\alpha} + \dot{\alpha}^2) - r^2\alpha'' - 3r\alpha' - r^2\alpha'^2)\sin^2\theta \\
&= R_{22}\sin^2\theta
\end{aligned}
\tag{2.40}
$$

Didapatkan Skala Ricci

$$\mathcal{R} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \tag{2.41}$$

$$\mathcal{R} = g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33}$$

$$\mathcal{R} = (-3\ddot{\alpha} - 3\dot{\alpha}^2) - \frac{1}{e^{2\alpha}}\left(e^{2\alpha}(\ddot{\alpha} + 3\dot{\alpha}^2) - 2\alpha'' - \frac{2}{r}\alpha'\right)$$

$$- \frac{1}{e^{2\alpha} r^2}(e^{2\alpha} r^2 (\ddot{\alpha} + \dot{\alpha}^2) - r^2 \alpha'' - 3r\alpha' - r^2 \alpha'^2)$$

$$- \frac{1}{e^{2\alpha} r^2 \sin^2\theta}(r^2 e^{2\alpha}(\ddot{\alpha} + \dot{\alpha}^2) - r^2 \alpha'' - 3r\alpha'$$

$$- r^2 \alpha'^2) \sin^2\theta$$

$$= -2(3\ddot{\alpha} + 4\dot{\alpha}^2) + \frac{1}{e^{2\alpha}}\left(4\alpha'' + 2\alpha'^2 + \frac{8}{r}\alpha'\right) \tag{2.42}$$

Berdasarkan Persamaan Medan Einstein yang dimasukkan knstanta kosmologi didapatkan

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} - g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} = k T_{\mu\nu} \tag{2.43}$$

Berdasarkan asumsi (4), di mana secara makroskopis alam semesta diasumsikan didominasi oleh radiasi dan materi yang berkerapatan rendah. Oleh karena itu dipilih tensor tekanan-energi-momentum fluida ideal

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \begin{bmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -P \end{bmatrix} \tag{2.44}$$

Sebagaimana keterangan di atas, maka seharusnya komponen 01 didapatkan

$$R_{01} - \frac{1}{2} g_{01} \mathcal{R} - g_{01}\Lambda = k T_{01} = 0$$

$$-2\dot{\alpha}' = 0$$

$$-2\frac{d}{dr}\dot{\alpha} = 0$$

$$-2\frac{d}{dr}\frac{d\alpha}{cdt} = 0 \tag{2.45}$$

Karena $\alpha(r,t)$ mengandung variable r dan t maka dapat dituliskan

$$\alpha(r,t) = A(r) + lnR(t) \tag{2.46}$$

Sehingga $\alpha' = A'$ dan $\dot{\alpha} = \frac{\dot{R}}{R}$

Selanjutnya, mengurangkan r^2R_{11} dari R_{22} diperoleh

$$R_{22} - r^2R_{11} = r^2e^{2\alpha}(\ddot{\alpha} + \dot{\alpha}^2) - r^2\alpha'' - 3r\alpha' - r^2\alpha'^2$$

$$- r^2\left(e^{2\alpha}(\ddot{\alpha} + \dot{\alpha}^2) - 2\alpha'' - \frac{2}{r}\alpha'\right)$$

$$= -r^2\alpha'' - r^2\alpha'^2 - r\alpha' \tag{2.47}$$

$$= -r^2A'' - r^2A'^2 - rA'$$

Berdasarkan persamaan medan Einstein dengan tetapan kosmologi Λ

$$R_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} + g_{\mu\nu}\Lambda = kT_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\left(\frac{\mathcal{R}}{2} + \Lambda\right) \tag{2.48}$$

Oleh karena itu, dari tensor metrik (2.44) dan tensor energi momentum fluida ideal didapatkan

$$R_{00} = k\rho c^2 + \left(\frac{\mathcal{R}}{2} + \Lambda\right)$$

$$R_{11} = k(-P)(-e^{2\alpha}) - e^{2\alpha}\left(\frac{\mathcal{R}}{2} + \Lambda\right) = e^{2\alpha}kP - e^{2\alpha}\left(\frac{\mathcal{R}}{2} + \Lambda\right)$$

$$R_{22} = k(-P)(-e^{2\alpha}r^2) - e^{2\alpha}r^2\left(\frac{\mathcal{R}}{2} + \Lambda\right)$$

$$= e^{2\alpha}r^2kP - e^{2\alpha}r^2\left(\frac{\mathcal{R}}{2} + \Lambda\right) \tag{2.49}$$

Berdasarkan dua persamaan terakhir menunjukkan $R_{22} - r^2 R_{11} = 0$, sehingga berdasarkan persamaan (2.47) diperoleh jalinan

$$r^2 A'' - r^2 A'^2 - rA' = 0$$

$$\frac{d^2A}{dr^2} - \left(\frac{dA}{dr}\right)^2 - \frac{1}{r}\frac{dA}{dr} = 0$$

$$\frac{d^2A}{dr^2} = \left(\frac{dA}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r}\frac{dA}{dr} \tag{2.50}$$

Kemudian dilakukan penyulihan

$$B(r) = \frac{1}{r}\frac{dA}{dr} \tag{2.51.a}$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{d^2A}{dr^2} = \frac{d}{dr}(Br) = r\frac{dB}{dr} + B$$

dan

$$\left(\frac{dA}{dr}\right)^2 = B^2 r^2 \tag{2.51.b}$$

Menyulihkan persamaan (2.51.a) dan (2.51.b) ke dalam persamaan (2.50)

$$r\frac{dB}{dr} + B = B^2 r^2 + B$$

$$r\frac{dB}{dr} = B^2 r^2$$

$$\frac{dB}{dr} = B^2 r$$

Sehingga dapat diintegralkan menjadi

$$\int \frac{dB}{B^2} = \int r\, dr$$

$$-\frac{1}{B} = \frac{1}{2}r^2 + C_1$$

$$B = -\frac{2}{r^2 + 2C_1}$$

Dengan mengikuti persamaan (2.44)

$$B(r) = \frac{1}{r}\frac{dA}{dr}$$

$$\frac{dA}{dr} = -\frac{2r}{r^2 + 2C_1}$$

$$A(r) = -2\int \frac{r}{r^2 + 2C_1} dr$$

$$= -2\int \frac{r}{u}\frac{du}{2r}$$

$$= -\int \frac{1}{r^2 + 2C_1}$$

$$= -\ln(2C_1 + r^2) + C_2$$

Ditemukan parameter dalam metrik berdasarkan persamaan (2.46)

$$\alpha(r,t) = A(r) + \ln R(t)$$

$$= -\ln(2C_1 + r^2)$$

$$+ \ln R(t) + C_2$$

$$= \ln\left(\frac{R(t)}{2C_1 + r^2}\right) + C_2$$

Dikalikan dengan eksponen kuadrat sebagaimana bentuk metrik asumsi sebelumnya

$$e^{2\alpha(r,t)} = R^2(t)e^{2A(r)} = \frac{R^2(t)}{(2C_1 + r^2)^2} e^{2C_2} \tag{2.52}$$

Dibagi dengan $2C_1$

$$e^{2\alpha(r,t)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{r^2}{2C_1}\right)^2} \frac{R^2(t)e^{2C_2}}{2C_1}$$

Di mana $\frac{1}{C_1} = \frac{k}{2}$, $\frac{2C_1}{e^{2C_2}} = R_0(t)$, $\frac{R(t)}{R_0(t)} = a(t)$ maka didapatkan

$$e^{2\alpha(r,t)} = \frac{a^2(t)}{\left(1 + \frac{r^2 k}{4}\right)^2} \tag{2.53}$$

Kemudian ditemukan metrik Friedmann-Robertson-Walker

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{a^2(t)}{\left(1 + \frac{1}{4}kr^2\right)^2}[dr^2 + r^2 d\Omega^2] \tag{2.54}$$

Dengan dilakukan transformasi dengan mengganti *circumference polar coordinates*,

$$\tilde{r} = \frac{r}{1 + \frac{1}{4}kr^2} \tag{2.55}$$

Diperoleh

$$\frac{d\tilde{r}}{dr} = \frac{1 + \frac{r^2}{4}k - \frac{1}{2}r^2 k}{\left(1 + \frac{1}{4}kr^2\right)^2} = \frac{1 - \frac{1}{4}kr^2}{\left(1 + \frac{1}{4}kr^2\right)^2}$$

$$\frac{d\tilde{r}^2}{dr^2} = \frac{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2 - kr^2}{\left(1 + \frac{1}{4}kr^2\right)^4} = \frac{1 - kr^2\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^{-2}}{\left(1 + \frac{1}{4}kr^2\right)^4}$$

$$\frac{d\tilde{r}^2}{1 - kr^2} = \frac{dr^2}{\left(1 + \frac{1}{4}kr^2\right)^2} \tag{2.56}$$

Sehingga dapat dituliskan kembali metrik Friedmann-Robertson-Walker sebagai berikut

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2\right] \tag{2.57}$$

Persamaan Friedmann menggambarkan ekspansi alam semesta, sehingga adanya persamaan ini akan ditemukan parameter-parameter dalam menjelaskan ekspansi

alam semesta ini. Ekspansi alam semesta bukan berarti semakin besarnya alam semesta, melainkan jarak antara galaksi satu dengan lainnya semakin jauh. Pada skala besar semesta menjadi homogen dan isotropik secara efektif, di mana galaksi-galaksi terpisah satu sama lain sesuai dengan persamaan Friedmann dan pada skala besar alam semesta dirasa mengalami ekspansi sehingga berlaku prinsip kosmologi (Liddle, 2015).

2.3.1 Parameter Hubble (H_0)

Salah satu parameter kosmologi yang sangat berpengaruh bagi sifat-sifat ekspansi alam semesta adalah konstanta Hubble H_0 merupakan parameter yang bergantung terhadap waktu dan sebagai bukti perluasan alam semesta yang dipercepat, di mana tiap galaksi harus mematuhi

$$v = H_0 r \tag{2.58}$$

Di mana v adalah pergeseran merah (biasanya dinyatakan km/s, kecepatan), H_0 adalah parameter Hubble (pada pengamat), dan r adalah jarak dari pengamat ke galaksi (biasa diukur dalam megaparsec: Mpc).

Ruang yang mengembang memiliki sistem koordinat yang melekat dan disebut kerangka bergerak bersama (*comoving frame*), sedangkan jarak antar dua titik yang ikut bergerak disebut dengan koordinat bergerak (*comoving coordinate*) (χ). Jarak dari satu titik ke titik lain pada kerangka bergerak dengan ekspansi seragam sebagai berikut (Gautama, 2020):

$$\overrightarrow{d_P}(t) = R(t)\vec{\chi} \tag{2.59}$$

d_P adalah jarak sejati atau jarak sebenarnya antara dua titik, χ adalah jarak satuan nirdimensi sedangkan R adalah faktor skalar yang berdimensi panjang dan berupa

fungsi waktu. Pengembangan alam semesta tidak merubah koordinat dalam ruang, melainkan merubah jarak sejati seiring bertambahnya waktu sehingga dapat dituliskan (Gautama, 2020)

$$d\chi = \frac{d\, d_P(t)}{R(t)} \tag{2.60}$$

Kemudian mengintepretasikan hukum Hubble dengan mengasumsikan alam semesta seperti balon yang yang mengembang, maka titik-titik (umpama galaksi) yang ada di balon dengan jari-jari R akan berpisah satu sama lain, sehingga dapat diukur besarnya sudut pusat (χ) dan jarak ($d_P = R\chi$) antar titik tersebut. Jari-jari bola akan berubah menjadi $R(t) = R_0 + \dot{R}dt$ dan jarak antar titik akan berubah, sedangkan sudut pusat antar titik tidak berubah. Sehingga diperoleh (Gautama, 2020)

$$d_P(t) = R(t)\chi = \chi\left(R_0 + \dot{R}dt\right) = d_0 + \chi\dot{R}dt \tag{2.61}$$

Kecepatan menjauh antar dua titik adalah

$$v = \frac{d\left(d_p\right)}{dt} = \frac{d_{P0} + \chi\dot{R}dt - d_{P0}}{dt} = \dot{R}\chi \tag{2.62}$$

Menyulihkan nilai $d_p = R\chi$, didapatkan

$$v = \frac{\dot{R}}{R} d_P \tag{2.63}$$

Berdasarkan parameter Hubble pada persamaan (2.58) diperoleh

$$H = \frac{\dot{R}}{R} = \frac{\dot{a}}{a} \tag{2.64}$$

Dapat dituliskan persamaan Friedmann sebagai persamaan evolusi dari $H(t)$ sebagai berikut

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \tag{2.65}$$

Kecepatan diberikan oleh pergeseran merah (*redshift*) yang pertama kali diusulkan oleh Vesto Slipher sekitar tahun 1912, di mana galaksi memiliki seperangkat garis serapan dan emisi yang dapat diketahui melalui karakteristik frekuensinya. Jika galaksi bergerak menuju kita (pengamat di bumi) maka gelombang cahaya akan berkumpul bersama dan meningkatkan frekuensinya yang disebut pergeseran biru (*blueshift*). Sedangkan saat galaksi dalam keadaan surut (menjauh) frekuensinya akan semakin rendah yang disebut pergeseran merah (*redshift*) (Liddle, 2015).

Pergeseran merah pada galaksi jauh disebabkan oleh panjang gelombang yang tertarik bersama dengan pengembangan ruang. Apabila galaksi jauh memancarkan foton dengan panjang gelombang λ_e dengan frekuensi v pada waktu t, jika tidak mengalami pengembangan maka panjang gelombang yang dipancarkan menempuh jarak $\lambda_e = c/v$. Apabila ruang mengembang dengan kelajuan v pada pengamat, maka panjang gelombang yang nampak bagi pengamat saat t_0 sebesar $\lambda' = \frac{c+v}{v}$. Karena frekuensi foton tidak berubah maka didapatkan (Gautama, 2020)

$$\frac{c}{\lambda_e} = \frac{c+v}{\lambda'}$$

$$v = \frac{\lambda' - \lambda_e}{\lambda_e} c \tag{2.66}$$

Sehingga diperoleh koefisien pergeseran merah (*redshift*)

$$z \equiv \frac{\lambda' - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\lambda'}{\lambda_e} - 1 \tag{2.67}$$

Kecepatan Hubble bergantung pada jarak dan kecepatan ekspansi hanya dapat secara akurat dibedakan dari kecepatan khusus pada jarak yang jauh, dan mengingat jarak galaksi terindikasi sangat jauh dan tidak memungkinkan karena galaksi terlalu jauh untuk dihitung secara paralaks (bintang yang berjarak banyak

megaparsec akan memiliki pergeseran paralaks yang sangat kecil). Oleh karena itu, pengukuran dilakukan dengan menggunakan metode *standard candle* yakni beberapa jenis objek diasumsikan memiliki sifat sama persis di semua bagian semesta (Liddle, 2015).

Berdasarkan pengertian hukum Hubble, maka jarak dari pengamat di mana objek menjauh dengan kelajuan cahaya disebut jarak Hubble (radius Hubble) (Gautama, 2020).

$$d_H = \frac{c}{H} = \frac{cR}{\dot{R}} \tag{2.68}$$

Permukaan ruang (spasial) yang berjarak d_H dari pengamat disebut bulatan Hubble (*Hubble sphere*), sehingga objek yang berada di luar bulatan Hubble bergerak menjauh dengan kecepatan yang melebihi kecepatan cahaya (Gautama, 2020).

2.3.2 Parameter Densitas (Ω)

Parameter lain yang mendefinisikan sifat alam semesta adalah parameter densitas Ω_0 yang mana untuk menentukan densitas alam semesta dan merupakan kuantifikasi kepadatan total materi yang ada di alam semesta (Liddle, 2015).

Berdasarkan persamaan Friedmann

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \tag{2.69}$$

Pada geometri alam semesta datar $(k = 0)$ dan diketahui didapatkan

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2}{8\pi G} \tag{2.70}$$

Densitas kritis ini belum tentu menjadi kerapatan (densitas) alam semesta yang sebenarnya, karena alam semesta tidak selalu datar. Sehingga ditetapkan secara alami densitas alam semesta bernilai relatif terhadap densitas kritis (Liddle, 2015).

$$\Omega(t) = \frac{\rho}{\rho_c} \tag{2.71}$$

2.3.3 Parameter Perlambatan (q)

Pengembangan tidak hanya terjadi pada alam semesta saja tapi juga terjadi pada laju perluasannya, berdasarkan pada parameter Hubble yang berubah seiring waktu. Laju perluasan ini diukur menggunakan parameter perlambatan atau dapat dikatakan merupakan besaran tanpa dimensi yang menggambarkan perilaku ekspansi alam semesta (Liddle, 2015). Parameter ini digunakan untuk mengetahui perilaku alam semesta, di mana tanda positif dan negatif mengindikasikan melambat dan berakselerasi (Jawad et al., 2019). Parameter perlambatan dalam suatu sistem dapat dikatakan sebagai bentuk fase yang terjadi pada alam semesta sebagaimana pada penjelasan sebelumnya, sehingga fase yang terbentuk dari model yang digunakan dapat mengindikasikan satu fase atau lebih (Jawad et al., 2019). Dipertimbangkan ekspansi Taylor dari faktor skala waktu saat ini

$$a(t) = a(t_0) + \dot{a}(t_0)[t - t_0] + \frac{1}{2}\ddot{a}(t_0)[t - t_0]^2 + \cdots \tag{2.72}$$

Kemudian dibagi dengan $a(t_0)$ dengan $[t - t_0]$ sebagai parameter Hubble saat ini, sehingga diperoleh

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = 1 + H_0[t - t_0] + \frac{1}{2}\frac{\ddot{a}(t_0)}{a(t_0)}H_0^2[t - t_0]^2 + \cdots$$

Suku ketiga menunjukkan percepatan sebagaimana pada definisi persamaan Hubble. $\dot{a}$ menunjukkan laju perubahan percepatan sedangkan $\ddot{a}$ merupakan laju perubahan percepatan dari perubahan percepatan. Oleh karena itu, agar mendapatkan parameter perlambatan dengan menambahkan tanda negatif yang

menunjukkan perlambatan terhadap percepatan sebagaimana pada persamaan berikut

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = 1 + H_0[t - t_0] - \frac{q_0}{2} H_0^2 [t - t_0]^2 + \cdots \tag{2.73}$$

Sehingga mendefinisikan parameter perlambatan q_0 sebagai

$$q_0 = -\frac{\ddot{a}(t_0)}{a(t_0)} \frac{1}{H_0^2} = -\frac{\ddot{a}(t_0)}{a(t_0)} \frac{a^2(t_0)}{\dot{a}^2(t_0)} = -\frac{a(t_0)\ddot{a}(t_0)}{\dot{a}^2(t_0)} \tag{2.74}$$

Dapat diaktikan semakin besar nilai q_0 maka perlambatannya semakin besar. Berdasarkan persamaan akselerasi dan densitas kritis diperoleh

$$q_0 = \frac{4\pi G}{3} \rho \frac{3}{8\pi G \rho_c} = \frac{\Omega_0}{2} \tag{2.75}$$

Hal ini menujukkan parameter perlambatan tidak bisa lepas dari parameter Hubble dan parameter densitas. Karena materi yang ada di alam semesta tidak dapat diketahui seluruhnya, maka q_0 dapat digunakan sebagai cara baru dalam melihat alam semesta. Pada dasarnya parameter ini digunakan untuk menetukan seberapa besar alam semesta pada waktu sebelumnya (Liddle, 2015).

2.3.4 Parameter Kuadrat Kecepatan Suara (v_s^2)

Alam semesta mengalami ekspansi yang dikatakan berupa energi negatif yang melawan energi grafitasi (Ananthanarayan & Mohanty, 2021). Fenomena ini dikatakan sebagai fluida gelap yang tidak diketahui kandungan pasti di dalamnya oleh para peneliti. Fluida ini oleh peneliti dianggap berupa energi gelap dan materi gelap. Pada pembahasan ini, lebih tepatnya pada skala seluruh alam semesta energi gelap lebih berperilaku sebagai fluida gelap dinamis ini dan disebut dengan fluida barotropik (Perkovi & Štefancicˇ, 2020).

Fluida barotropik merupakan fluida di mana tekanan fluidanya adalah fungsi dari densitas energi fluida saja $P = P(\rho)$, di mana sifat dan kondisi fluida dapat diketahui melalui persamaan keadaan $P(\rho) = wc^2\rho$. Kuadrat kecepatan suara digunakan untuk mengetahui tingkat kestabilan suatu sistem. Persamaan dari kuadrat kecepatan suara adalah (Perkovi & Štefancic˘, 2020)

$$v_s^2 = c_s^2 = \frac{dP}{d\rho} \tag{2.76}$$

Sebagaimana fungsi fluida, pada fisika klasik kecepatan suara dapat terjadi apabila terdapat medium sebagai perantaranya. Hal ini juga berlaku pada skala kosmologi, di mana alam semesta juga merupakan susunan fluida sehingga kecapatan suara juga dapat terjadi di alam semesta. Kuadrat kecepatan suara terletak pada rentang $0 \leq v_s^2 \leq 1$. Mengapa nilai parameter ini harus lebih besar dari nol, hal ini dikarenakan apabila $v_s^2 \leq 0$ maka dapat dikatakan tidak ada perambatan kecepatan suara yang terjadi. Sedangkan apabila $v_s^2 \geq 1$, maka hal ini akan setara dengan kecepatan cahaya yang diindiaksikan sebagai $c = 1$. Oleh karena itu, suatu sistem dapat dikatakan stabil apabila berada pada rentang $0 \leq v_s^2 \leq 1$ (Perkovi & Štefancic˘, 2020). Berdasarkan parameter persamaan keadaan yang mengkategorikan berbagai fase pertumbuhan alam semesta(Jawad et al., 2019), sehingga kuadrat kecepatan suara dapat berupa

$$v_s^2 = w + \rho\frac{dw}{d\rho} \tag{2.77}$$

BAB III

HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Entropi Perumuman berdasarkan Entropi Tsallis dan Entropi Renyi

Entropi perumuman ini merupakan hasil gabungan dari dua entropi, yakni entropi tsallis dan entropi renyi. Perumuman sendiri memiliki sinonim generalisasi atau dalam bahasa inggris berupa *generalization*. Generalisasi menurut KBBI merupakan bentuk gagasan atau simpulan umum pada suatu kejadian, membuat gagasan lebih sederhana, membentuk gagasan yang lebih kabur, atau penyamarataan (KBBI, 2021). Maka dapat didefinisikan dalam hal ini adalah perumuman merupakan pengambilan karakteristik umum dari entropi lain sehingga memunculkan model entropi yang lebih konseptual (sistem yang mewakili dari fungsi dasar dari kedua entropi).

Entropi Tsallis merupakan entropi generalisasi dari entropi Bekenstein menjadi sistem non-ekstensivitas dengan memberikan parameter q atau disebut probabilitas-q (Masi, 2005). Entropi Renyi merupakan turunan dari entropi Shannon dengan mengganti rata-rata linier dari entropi Shannon dengan rata-rata umum, Kolmogorov-Nagumo-*average* dan dengan mengajukan penambahan ukuran informasi (Dukkipati et al., 2005a). Keduanya memiliki sifat yang berbeda, oleh karena itu dengan metode generalisasi atau perumuman ini kemungkinan mampu memunculkan aspek non-ekstensif dan non-aditif pada alam semesta di mana secara teori alam semesta berpotensi mengalami percepatan dan konsistennya hasil pengamatan (Sayahian Jahromi et al., 2018).

Langkah yang diambil dalam memperumum kedua entropi adalah dengan menggunakan Kolmogorov-Nagumo-means sebagaimana pada persamaan (2.21).

sebagaimana entropi Renyi yang telah didapat dengan menggunakan metode ini sehingga diketahui fungsinya pada persamaan (2.23)

$$f(x) = \log_{\alpha} e^{x} = \log_{q} e^{x} \tag{3.1}$$

Entropi Tsallis diperoleh menggunakan deformasi-q sesuai pada 2.2.4. Di samping itu, entropi Tsallis juga dapat dipahami dengan menggunakan fungsi logaritma-q, yakni menggeneralisasikan Infomasi Hartley dengan logaritma-q, kemudian mendefinisikannya *The q-Hartley Information Measure* $H = (H_1, \dots, H_n)$ sebagai

$$H = H(P_i) = \log_{q} \frac{1}{P_i}\,, \qquad i = 1,2, \dots., n \tag{3.2}$$

Entropi Tsallis merupakan hasil generalisasi dengan entropi Shannon yang mana apabila $q \to 1$ maka akan kembali menjadi entropi Shannon, dengan kata lain $\log_q = \log x$. Oleh karena itu entropi Tsallis didefinisikan sebagai Informasi q-Hartley rata-rata (Dukkipati et al., 2005a)

$$S_T = \langle H \rangle = \left\langle \log_{\mathrm{q}} \left(\frac{1}{P_i} \right) \right\rangle \tag{3.3}$$

Berdasarkan bentuk entropi Tsallis di atas memiliki bentuk yang sama dengan entropi Shannon (2.18) sehingga entropi Tsallis juga memiliki bentuk rata-rata linier menjadi

$$S_T = \left\langle \log_{\mathrm{q}} \left(\frac{1}{P_i} \right) \right\rangle_{lin} \tag{3.4}$$

Secara kuantitas dapat berupa sebagai berikut

$$I = \log_{q} \frac{1}{P_i} \tag{3.5}$$

Generalisasi yang dilakukan pada entropi Tsallis adalah dengan q-logaritma (q-logaritma memenuhi hukum pseudo-aditif) (Masi, 2005), sehingga bentuk logaritmanya sebagaimana persamaan (2.30) berupa

$$\log_q(x) = \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q}$$

Dan q-logaritma yang memenuhi hukum pseudo-aditif pada entropi Tsallis dalam mengeneralisasikan entropi Shannon memiliki bentuk sebagai berkut

$$\log_q xy = \log_q x + \log_q y + (1 - q)(\log_q x)(\log_q y) \tag{3.6}$$

$$e_q^x e_q^y = e_q^{x+y+(1-q)xy}$$

Berdasarkan rata-rata Kolmogorov-Nagumo yang memiliki fungsi KN berupa linier, persamaan di atas akan berubah menjadi persamaan (2.23)

$$S = \sum_{i=1}^{W} P_i \, \psi(x_i)$$

Sehingga bentuk fungsi KN yang terbentuk adalah $f(x) = x$. Oleh karena itu, dalam membuktikan kesesuaian ini dengan entropi Tsallis dengan mengujinya pada Kolmogorov-Nagumo-mean sesuai pada persamaan (2.22) berdasarkan bentuk fungsi yang didapat maka invers dari $f(x)$ adalah $f^{-1}(x) = x$

$$S_T = \sum_{i=1}^{W} P_i \, f(x) = \sum_{i=1}^{W} P_i \, f(I) = \sum_{i=1}^{W} P_i \left(loq_q \left(\frac{1}{P_i} \right) \right)$$

$$S_T = \sum_{i=1}^{W} P_i \left(\frac{P_i^{(q-1)} - 1}{1 - q} \right) = \frac{1}{1 - q} \sum_{i=1}^{W} \left(P_i^q - P_i \right) \tag{3.7}$$

Kedua entropi yang didapatkan dengan menggunakan KN-mean dapat diperumum dengan mencari bentuk lain dari entropi Tsallis maupun entropi Renyi dengan mencari bentuk lain dari $\sum_{i=1}^{W} P_i^q$

a. Entropi Tsallis

Pertama yang dilakukan untuk mencari bentuk dari $\sum_{i=1}^{W} P_i^q$ adalah dengan mencarinya melalui persamaan entropi Renyi yang telah didapat yakni

$$S_R = \frac{1}{1-q} \log \sum_{i=1}^{W} P_i^q$$

Memindahkan $(1-q)$ pada ruas kiri

$$(1-q)S_R = \log \sum_{i=1}^{W} P_i^q$$

Kemudian dirubah dalam bentuk eksponen untuk mempermudah mendapatkannya di setiap ruas kiri dan kanan, sehingga diperoleh

$$\sum_{i=1}^{W} P_i^q = e^{(1-q)S_R} \tag{3.8}$$

Bentuk $\sum_{i=1}^{W} P_i^q$ yang telah didapatkan, kemudian dimasukkan pada entropi Tsallis sehingga didapatkan generalisasi dari kedua entropi berdasarkan entropi Tsallis dan mengingat normalisasi dari $\sum_{i=1}^{W} P_i = 1$ (Beck, 2009), maka diproleh hasil generalisasinya

$$S_T = \frac{1}{1-q} \sum_{i=1}^{W} \left(P_i^q - P_i\right)$$

$$S_T = \frac{1}{1-q} \left(\sum_{i=1}^{W} P_i^q - 1 \right)$$

$$S_T = \frac{1}{1-q} \left(e^{(1-q)S_R} - 1\right) = \frac{1}{\delta} \left(e^{\delta S_R} - 1\right) = \log_q e^{S_R}$$

Di mana $\delta = 1 - q$

b. Entropi Renyi

Alur yang sama dilakukan pada generalisasi kedua entropi berdasarkan entropi Renyi. Hal pertama yang dilakukan dengan mencari bentuk $\sum_{i=1}^{W} P_i^q$ dari persamaan entropi Tsallis yang telah didapat

$$S_T = \frac{1}{1-q}\sum_{i=1}^{W}\left(P_i^q - P_i\right)$$

Mengingat normasilisasi dari $\sum_{i=1}^{W} P_i = 1$ (Beck, 2009), maka didapat

$$S_T = \frac{1}{1-q}\left(\sum_{i=1}^{W} P_i^q - 1\right)$$

Kemudian $1-q$ dipindahkan ke ruas lain begitu pula elemen lain agar ditemukan $\sum_{i=1}^{W} P_i^q$

$$\sum_{i=1}^{W} P_i^q = [1 + (1-q)S_T] \tag{3.9}$$

Hasil $\sum_{i=1}^{W} P_i^q$ yang telah didapatkan dimasukkan pada persamaan entropi Renyi sehingga didapatkan generalisasi kedua entropi berdasarkan entropi Tsallis

$$S_R = \frac{1}{1-q}\log\sum_{i=1}^{W} P_i^q = \frac{1}{1-q}\log(1 + (1-q)S_T)$$

$$S_R = \frac{1}{\delta}\log(1 + \delta S_T) = \log_q e_q^{S_T}$$

Di mana $\delta = 1 - q$.

Generalisasi dari entropi Tsallis dan Renyi merupakan hasil penggabungan sebagaimana ditemukan di atas. Dari kedua generalisasi di atas, diambil salah satunya. Dalam penelitian ini menggunakan generalisasi berdasarkan entropi Renyi pada poin b. Variabel q pada eksponen dirubah dengan variabel r dengan

penyelesaian menggunakan q-logaritma dan eksponensial-q dengan tetap menggunakan KN-mean

$$f(x) = \log_q e_r^{S_T} \tag{3.10}$$

Sebagaimana pada Kologorov-Nagumo-means persamaan (2.23) maka dicari invers dari fungsi di atas untuk mendapatkan entropi, dengan S_T diganti dengan x

$$f(x) = \log_q e_r^x = \frac{e_r^{(1-q)x} - 1}{1-q} \tag{3.11}$$

Sehingga diperoleh inversnya

$$f^{-1}(x) = \frac{e_r^{(1-q)x} - 1}{1-q} \tag{3.12}$$

Di mana invers dari q-logaritma adalah q-eksponen (Masi, 2005)

$$e_q^x = [1 + (1-q)x]^{\frac{1}{1-q}} \tag{3.13}$$

Sehingga untuk mempermudah dalam mencari inversnya maka menggunakan q-eksponen dan dengan merubah $f^{-1}(x) = y$

$$y = \frac{[1 + (1-r)x]^{\frac{1-q}{1-r}} - 1}{1-q}$$

Dipindah segala elemen pada ruas yang sama guna mencari nilai x sehingga didapatkan sebagai berikut

$$y(1-q) = [1 + (1-r)x]^{\frac{1-q}{1-r}} - 1$$

$$y(1-q) + 1 = [1 + (1-r)x]^{\frac{1-q}{1-r}}$$

Kedua ruas dipangkat $\frac{1-r}{1-q}$

$$[1 + y(1-q)]^{\frac{1-r}{1-q}} = 1 + (1-r)x$$

Kemudian konstanta x dirubah menjadi y dan sebaliknya

$$x = \frac{[1 + y(1-q)]^{\frac{1-r}{1-q}} - 1}{1-r}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{[1 + (1-q)x]^{\frac{1-r}{1-q}} - 1}{1-r}$$

Entropi didapatkan sebagaimana menggunakan KN-mean sebagai berikut dengan simbol S

$$S = \frac{1}{1-r}\,[1 + (1-q)x]^{\frac{1-r}{1-q}} - 1$$

$$S = \frac{1}{1-r}\left[1 + (1-q)\sum_{i=1}^{W} P_i\ \frac{e_r^{(1-q)x} - 1}{1-q}\right]^{\frac{1-r}{1-q}} - 1$$

$$S = \frac{1}{1-r}\left[1 + \sum_{i=1}^{W} P_i\ e_r^{(1-q)x} - 1\right]^{\frac{1-r}{1-q}} - 1$$

$$S = \frac{1}{1-r}\left[1 + \sum_{i=1}^{W} P_i\ e_r^{(1-q)x} - \sum_{i=1}^{W} P_i\right]^{\frac{1-r}{1-q}} - 1$$

Karena normalisasi dari $\sum_{i=1}^{W} P_i = 1$ maka dapat dirubah pada persamaan berikut menjadi

$$S = \frac{1}{1-r}\left[\sum_{i=1}^{W} P_i + \sum_{i=1}^{W} P_i\ e_r^{(1-q)x} - \sum_{i=1}^{W} P_i\right]^{\frac{1-r}{1-q}} - 1$$

$$S = \frac{1}{1-r}\left[\sum_{i=1}^{W} P_i\ e_r^{(1-q)x}\right]^{\frac{1-r}{1-q}} - 1$$

Berdasarkan generalisasi yang diperoleh sebelumnya yakni pada persamaan (3.8) di mana berdasarkan deskripsi awal nilai $r = q$ sebelum pada basis eksponen dirubah sehingga masih memiliki pengertian yang sama dan masih berlaku pada basis r pada eksponen

$$S = \frac{1}{1-r}\left[\sum_{i=1}^{W} P_i \sum_{i=1}^{W} P_i^q\right]^{\frac{1-r}{1-q}} - 1$$

$$S = \frac{1}{1-r}\left[\sum_{i=1}^{W} P_i^q\right]^{\frac{1-r}{1-q}} - 1$$

$$S = \log_r e_q^{S_T} \tag{3.14}$$

Sebagaimana pada persamaan (3.14) maka entropi menjadi

$$S = \frac{1}{1-r}\left(\left[\sum_{i=1}^{W} P_i^q\right]^{\frac{1-r}{1-q}} - 1\right) \tag{3.15}$$

Entropi ini dikenal dengan nama entropi Sharma-Mittal. Entropi ini mengeneralisasikan entropi Renyi dari ekstensif menjadi non-ekstensif yang dicirikan oleh r-logaritma, sehingga parameter r merupakan penentu derajat non-ekstensivitas. Sedangkan q merupakan parameter deformasi, tidak seperti entropi Tsallis di mana q merupakan parameter deformasi dari distribusi probabilitas (q yang mengukur non-ekstensivitas). Apabila $r \to 1$ akan kembali menjadi entropi Renyi dan ketika $r \to q$ akan kembali menjadi entropi Tsallis (Masi, 2005).

$$S_{SM} = \lim_{r \to q} \frac{1}{1-r}\left(\left[\sum_{i=1}^{W} P_i^q\right]^{\frac{1-r}{1-q}} - 1\right) = \frac{1}{1-q}\left(\sum_{i=1}^{W} P_i^q - 1\right) = S_T$$

$$S_{SM} = \lim_{r\to 1}\frac{1}{1-r}\left(\left[\sum_{i=1}^{W} P_i^q\right]^{\frac{1-r}{1-q}} - 1\right) = \lim_{r\to q}\frac{1}{1-r}\left([1+(1-q)S_T]^{\frac{1-r}{1-q}} - 1\right)$$

$$= \lim_{r\to q}\log_r e_q^{S_T} = \log e_q^{S_T} = \log\left(\log_q[1+(1-q)S_T]^{\frac{1-r}{1-q}}\right)$$

$$= \log\left(\frac{[1+(1-q)S_T]^{\frac{1-q}{1-q}} - 1}{1-q}\right) = \frac{1}{1-q}\left(\log\sum_{i=1}^{W} P_i^q - \log 1\right)$$

$$= \frac{1}{1-q}\left(\log\sum_{i=1}^{W} P_i^q\right) = S_R$$

Persamaan (3.13) merupakan ukuran informasi dari B.D. Sharma dan D.P. Mittal yang digunakan dalam kerangka teori informasi sekitar tiga puluh tahun lalu. Entropi Sharma-Mittal juga memenuhi hukum pseudo-aditif sebagaimana seperti entropi Tsallis, sehingga memenuhi (Masi, 2018)

$$S_{SM}(A\cap B) = \log_r e_q^{S_T(A\cap B)}$$

$$= \log_r\left(e_q^{S_T(A)+S_T(B|A)+(1-q)S_T(A)S_T(B|A)}\right)$$

$$= \log_r\left(e_q^{S_T(A)} e_q^{S_T(B|A)}\right)$$

$$= S_{SM}(A) + S_{SM}(B|A) + (1-r)S_{SM}(A)S_{SM}(B|A) \qquad (3.16)$$

Parameter pada entropi, yakni q dan r merupakan parameter bebas yang tidak memiliki nilai tertentu, sehingga nantinya dalam penelitian ini parameter tersebut yang divariasikan dalam mengetahui keadaan alam semesta yang berekspansi. Penentuan nilai pada parameter bebas r dan q, yakni dengan menyesuaikan dengan kondisi alam semesta yang ada. Oleh karena itu, penentuan ini akan dilakukan pada beberapa parameter, yaitu pada parameter densitas, perlambatan, dan kuadrat ekspansi alam semesta.

3.2 Parameter-parameter Ekspansi Alam Semesta

Perilaku alam semesta dapat dijelaskan dengan beberapa parameter sebagai penunjang. Dalam penelitian ini sebagai parameter dalam mengetahui alam semesta mengalami ekspansi dipercepat dengan menggunakan parameter densitas, parameter perlambatan, dan parameter kuadrat kecepatan suara. Ketiga parameter pokok yang dicari tidak lepas dari beberapa parameter pendukung untuk menemukannya, diantaranya yakni densitas energi pada eenergi gelap, tekanan, persamaan Friedmann, dan tingkat ekspansi ($E(z)$). Sebagai pokok dalam mencari bentuk persamaan dan parameter yang dicari adalah pada persamaan Friedmann, di mana sebagai pengatur pengembangan alam semesta dalam model alam semesta yang homogen dan isotropik.

a. Densitas Energi pada Energi Gelap

Energi gelap holografik (HDE) merupakan salah satu model energi gelap yang mengadaptasi prinsip holografik. Sebagaimana penjelasan sebelumnya menurut prinsip holografik, derajat kebebasan pada suatu sistem ukuran berhingga harus terbatas dan dibatasi oleh area sesuai batasnya, asalkan tidak melebihi massa lubang hitam dengan ukuran yang sama (Naderi et al., 2015). Energi gelap holografik pada beberapa literatur dijelaskan sebagai $\rho_D \propto \Lambda^4$, dan hubungan antara UV cutoff (Λ), entropi (S), dan IR cutoff (L) adalah $\Lambda^3 L^3 \leq (S)^{\frac{3}{4}}$. Oleh karena itu, kombinasi antara entropi dan IR cutoff (L) akan memberikan bentuk densitas energi dari energi gelap holografik (HDE) (Sharma & Dubey, 2020). Sehingga dalam mencari densitas energi pada model ini tidak lepas dari entropi, sebagaimana telah ditemukan bentuk dari entropi yang digunakan dalam penelitian ini adalah entropi Sharma-Mittal berdasarkan persamaan (3.13)

$$S_{SM} = \frac{1}{1-r}\left(\left[\sum_{i=1}^{W} P_i^q\right]^{\frac{1-r}{1-q}} - 1\right)$$

Sebelum digunakan untuk mencari densitas energinya, maka entropi ini akan diberikan sedikit perubahan dengan mengganti $1 - r = R$, $1 - q = \delta$, dan bentuk $\sum_{i=1}^{W} P_i^q = (1 + (1-q)S_T) = (1 + \delta S_T)$ sebagaimana pada persamaan (3.9)

$$S_{SM} = \frac{1}{R}\left((1 + \delta S_T)^{R/\delta} - 1\right)$$

Di mana S_{SM} adalah entropi Sharma-Mittal, S_T adalah entropi Tsallis, dan parameter R dan δ merupakan parameter bebas.

Entropi Bekenstein Hawking merupakan kandidat yang tepat dari entropi Tsallis, karena entropi lubang hitam pada loop grafitasi kuantum didasarkan pada rumus entropi Shannon di mana memiliki bentuk dasar yang sama dengan entropi Tsallis. Oleh sebab itu, $S_T \rightarrow S_{BH} = A/4$ (Majhi, 2017) dikutip dari (Sayahian Jahromi et al., 2018)

$$S_{SM} = \frac{1}{R}\left(\left(1 + \frac{\delta A}{4}\right)^{R/\delta} - 1\right)$$

Berdasarkan prinsip holografik, IR cutoff (L) dan UV cutoff (Λ) memiliki hubungan dengan sistem horizon (cakrawala) (S) sebagai (Sayahian Jahromi et al., 2018)

$$\rho_\Lambda \sim \Lambda^4 \propto \frac{S}{L^4} \tag{3.17}$$

$$\rho_\Lambda = \frac{3c^2 S}{8\pi L^4}$$

Di mana L merupakan batas pengamatan yang dikenal sebagai IR cutoff. Berhubung IR cutoff (L) yang dipakai dalam penelitian ini menggunakan jari-jari

Hubble sebagai batas volumenya $L \equiv H^{-1} = \sqrt{\frac{A}{4\pi}}$, maka bentuk densitas energinya akan diperoleh dengan memasukkan persamaan (3.15) yang telah dirubah bentuknya dengan memanfaatkan hubungan antara entropi Tsallis dengan entropi Bekenstein-Hawking (Sayahian Jahromi et al., 2018)

$$\rho_\Lambda = \frac{3c^2H^4}{8\pi R}\left[\left(1+\frac{\delta A}{4}\right)^{\frac{R}{\delta}} - 1\right] = \frac{3c^2H^4}{8\pi R}\left[\left(1+\frac{\delta \pi}{H^2}\right)^{\frac{R}{\delta}} - 1\right] \tag{3.18}$$

Densitas energi (ρ) merupakan salah satu faktor utama dalam perubahan volume alam semesta, baik akan mengalami pengembangan maupun penyusutan. Hal ini dapat diamati berdasarkan persamaan Friedmann di mana densitas energi sendiri sebagai ukuran kondisi alam semesta yang mampu menghasilkan perubahan yang akan diketahui sebagai pengukuran pengembangan alam semesta (Wang et al., 2017).

b. Tekanan pada Energi Gelap

Pengembangan alam semesta diyakini karenan adanya tekanan fluida aneh yang melawan grafitasi. Tekanan ini yang biasa disebut dengan energi gelap karena tidak diketahui wujudnya (Ananthanarayan & Mohanty, 2021). Berdasarkan persamaan Friedmann tekanan menunjukkan pengaruhnya dalam ekspansi alam semesta sebagaimana pada persamaan (3.25), di mana tekanan dan densitas energi tidak bisa lepas keduanya dalam keterlibatan percepatan alam semesta. Oleh sebab itu, dari persamaan (3.27) dapat ditemukan persamaan yang menjelaskan mengenai tekanan sebagaimana berikut

$$\dot{\rho}_D = -3H(\rho_D + P_D)$$

$$\rho_D + P_D = -\frac{\dot{\rho}_D}{3H}$$

$$P_D = -\frac{\dot{\rho}_D}{3H} - \rho_D = -\left(\frac{\rho_D' \dot{H}}{3H} + \rho_D\right) \tag{3.19}$$

Di mana P_D adalah tekanan dari energi gelap, ρ_D adalah densitas energi pada energi gelap, dan H adalah parameter Hubble. Dot pada setiap konstanta menunjukkan turunan terhadap waktu.

Tekanan juga dapat ditemukan berdasarkan persamaan Friedmann pertama, dengan diketahu bahwasanya $\rho' = \frac{d\rho_D}{dH}$ sehingga didapatkan (Sayahian Jahromi et al., 2018) sebagaimana pada persamaan (3.29)

$$H^2 + \frac{2}{3}\dot{H} = -\frac{8\pi P}{3}$$

Sehingga untuk mendapatkan tekanan energi gelap yang ada di alam semesta perlu dicari turunan dari densitas energi $\dot{\rho}_D$

$$\frac{d}{dt}\rho_D = \frac{d}{dt}\frac{3c^2H^4}{8\pi R}\left[\left(1 + \frac{\pi\delta}{H^2}\right)^{R/\delta} - 1\right]$$

$$\dot{\rho}_D = \frac{3c^2}{8\pi R}\frac{d}{dt}\, H^4\left[\left(1 + \frac{\pi\delta}{H^2}\right)^{R/\delta} - 1\right]$$

$$\dot{\rho}_D = \frac{3c^2}{8\pi R}\,\frac{d}{dt}\frac{\left[(1 + \pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}} - 1\right]}{[1+z]^4}$$

$$\dot{\rho}_D = \frac{3c^2}{8\pi R[1+z]^8}\left(2\pi\delta\frac{R}{\delta}[1+z](1 + \pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}-1}[1+z]^4 - 4[1+z]^3\left[(1 + \pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}} - 1\right]\right)$$

$$\dot{\rho}_D = \frac{3c^2}{8\pi R[1+z]^8}\left(2\pi\delta\frac{R}{\delta}(1 + \pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}-1}[1+z]^5 - 4[1+z]^3\left[(1 + \pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}} - 1\right]\right) \tag{3.20}$$

Mencari tekanan diperoleh dengan menggunakan persamaan (3.19) sehingga didapatkan persamaan dengan menganggap

$$P_D = -\frac{\dot{\rho}_D}{3H} - \rho_D$$

$$P_D = -\frac{1}{3H}\frac{3c^2}{8\pi R[1+z]^8}\left(2\pi\delta\frac{R}{\delta}(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}-1}[1+z]^5 - 4[1+z]^3\left[(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}}-1\right]\right) - \frac{3c^2}{8\pi R}\frac{\left[(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}}-1\right]}{[1+z]^4}$$

$$P_D = -\frac{[1+z]}{3}\frac{3c^2}{8\pi R[1+z]^8}\left(2\pi\delta\frac{R}{\delta}(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}-1}[1+z]^5 - 4[1+z]^3\left[(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}}-1\right]\right) - \frac{3c^2}{8\pi R}\frac{\left[(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}}-1\right]}{[1+z]^4}$$

$$P_D = -\frac{c^2}{8\pi R[1+z]^7}\left(2\pi\delta\frac{R}{\delta}(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}-1}[1+z]^5 - 4[1+z]^3\left[(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}}-1\right]\right) - \frac{3c^2}{8\pi R}\frac{\left[(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}}-1\right]}{[1+z]^4}$$

$$P_D = \frac{c^2}{8\pi R[1+z]^4}\left(-\frac{2\pi\delta\frac{R}{\delta}(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}-1}[1+z]^5}{[1+z]^3}\right.$$

$$+\frac{4[1+z]^3\left[(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}}-1\right]}{[1+z]^3}$$

$$\left.-3\left[(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}}-1\right]\right)$$

$$P_D = \frac{c^2}{8\pi R[1+z]^4}\left(-2\pi\delta\frac{R}{\delta}(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}-1}[1+z]^2\right.$$

$$+4\left[(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}}-1\right]$$

$$\left.-3\left[(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}}-1\right]\right)$$

$$P_D = \frac{c^2}{8\pi R[1+z]^4}\left(\left[(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}}-1\right]\right.$$

$$\left.-2\pi\delta\frac{R}{\delta}(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}-1}[1+z]^2\right) \tag{3.21}$$

Diperoleh tekanan pada energi gelap yang ada di alam semesta sebagaimana pada persamaan di atas dengan menggunakan dasar persamaan Friedmann.

c. Persamaan Friedmann

Persamaan Friedmann merupakan manisfestasi dari metrik Friedmann-Robertson-Walker (FRW) yang menggambarkan alam semesta homogen dan isotropik (Gautama, 2020). Fungsi metrik FRW telah dibuktikan pada penjelasan sebelumnya, berdasarkan metrik persamaan (2.57) dan persamaan (2.55) di mana keduanya disubstitusikan pada persamaan (2.53)

$$e^{2\alpha(r,t)} = \frac{a^2(t)}{\left(1+\frac{r^2k}{4}\right)^2} = a^2\left(\frac{\tilde{r}}{r}\right)^2 = \frac{a^2}{1-k\tilde{r}^2}$$

Anggap $\tilde{r} = r$, maka didapatkan bentuk metrik dari persamaan di atas yang kemudian dimasukkan pada metrik (2.35)

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(a\,r)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(a\,r\sin\theta)^2 \end{bmatrix}$$

Sehingga tensor metrik kontravariannya sebagai berikut

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1-kr^2}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{(a\,r)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{(a\,r\sin\theta)^2} \end{bmatrix}$$

Dicari simbol Christoffelnya dengan persamaan (2.37)

$$\Gamma^0_{00} = \Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{02} = \Gamma^0_{03} = 0$$

$$\Gamma^0_{10} = \Gamma^0_{12} = \Gamma^0_{13} = \Gamma^0_{20} = \Gamma^0_{21} = \Gamma^0_{23} = \Gamma^0_{30} = \Gamma^0_{31} = \Gamma^0_{32} = 0$$

$$\Gamma^1_{00} = \Gamma^1_{02} = \Gamma^1_{03} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{13} = 0$$

$$\Gamma^1_{20} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{23} = \Gamma^1_{30} = \Gamma^1_{31} = \Gamma^1_{32} = 0$$

$$\Gamma^2_{00} = \Gamma^2_{01} = \Gamma^2_{03} = \Gamma^2_{10} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{13} = \Gamma^2_{20} = \Gamma^2_{22} = \Gamma^2_{23} = 0$$

$$\Gamma^2_{30} = \Gamma^2_{31} = \Gamma^2_{32} = 0$$

$$\Gamma^3_{00} = \Gamma^3_{01} = \Gamma^3_{02} = \Gamma^3_{10} = \Gamma^3_{11} = \Gamma^3_{12} = 0$$

$$\Gamma^3_{20} = \Gamma^3_{21} = \Gamma^3_{22} = \Gamma^3_{31} = \Gamma^3_{33} = 0$$

$$\Gamma^3_{32} = \Gamma^3_{23} = \cot\theta$$

$$\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10} = \Gamma^2_{02} = \Gamma^2_{20} = \Gamma^3_{03} = \Gamma^3_{30} = \frac{1}{a}\frac{da}{dt}$$

$$\Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^1_{33} = -r\sin^2\theta(1 - kr^2)$$

$$\Gamma^1_{22} = -r(1 - kr^2)$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{kr}{1 - kr^2}$$

$$\Gamma^0_{33} = a\frac{da}{dt}\, r^2\sin^2\theta$$

$$\Gamma^0_{22} = a\frac{da}{dt}\, r^2$$

$$\Gamma^0_{11} = \frac{a}{1 - kr^2}\frac{da}{dt}$$

Tensor Ricci diperoleh dengan konstraksi tensor Reimann-Christoffel berdasarkan persamaan (2.39)

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} = g^{\alpha\beta} = \partial_\alpha\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^\alpha_{\mu\alpha} + \Gamma^\beta_{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\beta\alpha} - \Gamma^\beta_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{\beta\nu}$$

Sehingga didapatkan tensor ricci pada metrik diagonalnya karena yang bernilai terletak pada diagram diagonal

$$R_{00} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{00} - \partial_0 \Gamma^\alpha_{0\alpha} + \Gamma^\beta_{00}\Gamma^\alpha_{\beta\alpha} - \Gamma^\beta_{0\alpha}\Gamma^\alpha_{\beta 0}$$

$$= -(\partial_0 \Gamma^1_{01} + \partial_0 \Gamma^2_{02} + \partial_0 \Gamma^3_{03}) - (\Gamma^1_{01}\Gamma^1_{10} + \Gamma^2_{02}\Gamma^2_{20} + \Gamma^3_{03}\Gamma^3_{30})$$

$$= -\left(\partial_t \frac{1}{a}\frac{da}{dt} + \partial_t \frac{1}{a}\frac{da}{dt} + \partial_t \frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right)$$

$$-\left(\frac{1}{a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \frac{1}{a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \frac{1}{a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2\right)$$

$$= -3\left(-\frac{1}{a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \frac{1}{a}\left(\frac{d^2a}{dt^2}\right)\right) - 3\left(\frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = -\frac{3}{a}\frac{d^2a}{dt^2}$$

$$= -3\frac{\ddot{a}}{a}$$

$$R_{11} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{11} - \partial_1 \Gamma^\alpha_{1\alpha} + \Gamma^\beta_{11}\Gamma^\alpha_{\beta\alpha} - \Gamma^\beta_{1\alpha}\Gamma^\alpha_{\beta 1}$$

$$= (\partial_0 \Gamma^0_{11} + \partial_1 \Gamma^1_{11}) - (\partial_1 \Gamma^1_{11} + \partial_1 \Gamma^2_{12})$$

$$+ (\Gamma^0_{11}\Gamma^1_{01} + \Gamma^0_{11}\Gamma^2_{02} + \Gamma^0_{11}\Gamma^3_{03} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{11} + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \Gamma^1_{11}\Gamma^3_{13})$$

$$- (\Gamma^0_{11}\Gamma^1_{01} + \Gamma^1_{10}\Gamma^0_{11} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{31})$$

$$= \left(\partial_t \frac{a}{1-kr^2}\frac{da}{dt} + \partial_r \frac{kr}{1-kr^2}\right) - \left(\partial_r \frac{kr}{1-kr^2} + \partial_r \frac{1}{r} + \partial_r \frac{1}{r}\right)$$

$$+ \left[\left(\frac{a}{1-kr^2}\frac{da}{dt}\right)\left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right) + \left(\frac{a}{1-kr^2}\frac{da}{dt}\right)\left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right)\right.$$

$$+ \left(\frac{a}{1-kr^2}\frac{da}{dt}\right)\left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right) + \left(\frac{kr}{1-kr^2}\right)\left(\frac{kr}{1-kr^2}\right) + \left(\frac{kr}{1-kr^2}\right)\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\left. + \left(\frac{kr}{1-kr^2}\right)\left(\frac{kr}{1-kr^2}\right)\left(\frac{1}{r}\right)\right]$$

$$- \left[\left(\frac{a}{1-kr^2}\frac{da}{dt}\right)\left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right) + \left(\frac{a}{1-kr^2}\frac{da}{dt}\right)\left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{kr}{1-kr^2}\right)\left(\frac{kr}{1-kr^2}\right) + \left(\frac{1}{r}\right)^2\right]$$

$$= \left[\frac{1}{1-kr^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \left(\frac{a}{1-kr^2}\right)\left(\frac{d^2a}{dt^2}\right) + \frac{k(1-kr^2) + 2(kr)^2}{(1-kr^2)^2}\right]$$

$$- \left[\frac{k(1-kr^2) + 2(kr)^2}{(1-kr^2)^2} + \left(-\frac{1}{r^2}\right) + \left(-\frac{1}{r^2}\right)\right]$$

$$+ \left[\frac{3}{1-kr^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \frac{(kr)^2}{(1-kr^2)^2} + \frac{2k}{1-kr^2}\right]$$

$$- \left[\frac{2}{1-kr^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \frac{(kr)^2}{(1-kr^2)^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2}\right]$$

$$= \frac{2}{1-kr^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \frac{a}{1-kr^2}\frac{d^2a}{dt^2} + \frac{2k}{1-kr^2}$$

$$= \frac{1}{1-kr^2}\left(a\frac{d^2a}{dt^2} + 2\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + 2k\right)$$

$$R_{22} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{22} - \partial_2 \Gamma^\alpha_{2\alpha} + \Gamma^\beta_{22}\Gamma^\alpha_{\beta\alpha} - \Gamma^\beta_{2\alpha}\Gamma^\alpha_{\beta 2}$$

$$= (\partial_0 \Gamma^0_{22} + \partial_1 \Gamma^1_{22}) - (\partial_2 \Gamma^3_{23})$$

$$+ (\Gamma^0_{22}\Gamma^1_{01} + \Gamma^0_{22}\Gamma^2_{02} + \Gamma^0_{22}\Gamma^3_{03} + \Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11} + \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{12} + \Gamma^1_{22}\Gamma^3_{13})$$

$$- (\Gamma^0_{22}\Gamma^2_{02} + \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{20}\Gamma^0_{22} + \Gamma^2_{21}\Gamma^1_{22} + \Gamma^3_{23}\Gamma^3_{32})$$

$$= \left[\partial_t\, ar^2 \frac{da}{dt} + \partial_r\big(-r(1-kr^2)\big)\right] - \left[\partial_\theta\, \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right]$$

$$+ \left[\left(ar^2 \frac{da}{dt}\right)\left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right) + \left(ar^2 \frac{da}{dt}\right)\left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right) + \left(ar^2 \frac{da}{dt}\right)\left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right)\right.$$

$$\left. + \left(-r(1-kr^2)\left(\frac{kr}{1-kr^2} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r}\right)\right)\right]$$

$$- \left[\left(ar^2 \frac{da}{dt}\right)\left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right) + \ -r(1-kr^2)\left(\frac{1}{r}\right) + \left(ar^2 \frac{da}{dt}\right)\left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right)\right.$$

$$\left. + \ -r(1-kr^2)\left(\frac{1}{r}\right) + (\cot^2\theta)\right]$$

$$= \left[\left(\frac{da}{dt}\right)^2 r^2 + ar^2 \frac{d^2a}{dt^2} - (1-kr^2) + 2kr^2\right] - \left[-\frac{1}{\sin^2\theta}\right]$$

$$+ \left[3r^2\left(\frac{da}{dt}\right)^2 - kr^2 - 2(1-kr^2)\right]$$

$$- \left[2r^2\left(\frac{da}{dt}\right)^2 - 2(1-kr^2) + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right]$$

$$= 2r^2\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + ar^2\ \frac{d^2a}{dt^2} - (1-kr^2) + kr^2 + \frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$= r^2\left[a\frac{d^2a}{dt^2} + 2\ \left(\frac{da}{dt}\right)^2 + 2k\right]$$

$$R_{33} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{33} - \partial_3 \Gamma^\alpha_{3\alpha} + \Gamma^\beta_{33}\Gamma^\alpha_{\beta\alpha} - \Gamma^\beta_{3\alpha}\Gamma^\alpha_{\beta 3}$$

$$= (\partial_0 \Gamma^0_{33} + \partial_1 \Gamma^1_{33} + \partial_2 \Gamma^2_{33})$$

$$+ (\Gamma^0_{33}\Gamma^1_{01} + \Gamma^0_{33}\Gamma^2_{02} + \Gamma^0_{33}\Gamma^3_{03} + \Gamma^1_{33}\Gamma^1_{11} + \Gamma^1_{33}\Gamma^2_{12} + \Gamma^1_{33}\Gamma^3_{13} + \Gamma^2_{33}\Gamma^3_{23})$$

$$- (\Gamma^0_{33}\Gamma^3_{03} + \Gamma^1_{33}\Gamma^3_{13} + \Gamma^2_{33}\Gamma^3_{23} + \Gamma^3_{30}\Gamma^0_{33} + \Gamma^3_{31}\Gamma^1_{33} + \Gamma^3_{32}\Gamma^2_{33})$$

$$= \Big[\partial_t\, a\frac{da}{dt} r^2 \sin^2\theta + \partial_r\big(-rsin^2\theta(1-kr^2)\big)$$

$$+ \partial_\theta(-\sin\theta\cos\theta)\Big]$$

$$+ \left[\left(a\frac{da}{dt}r^2\sin^2\theta\right)\left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right) + \left(a\frac{da}{dt}r^2\sin^2\theta\right)\left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right)\right.$$

$$+ \left(a\frac{da}{dt}r^2\sin^2\theta\right)\left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right)$$

$$+ \big(-rsin^2\theta(1-kr^2)\big)\left(\frac{kr}{1-kr^2} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r}\right)$$

$$\left. + (-\sin\theta\cos\theta)\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\right]$$

$$- \left[\left(a\frac{da}{dt}r^2\sin^2\theta\right)\left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right) + (-rsin^2\theta)(1-kr^2)\left(\frac{1}{r}\right)\right.$$

$$+ (-\sin\theta\cos\theta)\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) + \left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right)\left(a\frac{da}{dt}r^2\sin^2\theta\right)$$

$$\left. + \left(\frac{1}{r}\right)(-rsin^2\theta)(1-kr^2) + \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}(-\sin\theta\cos\theta)\right)\right]$$

$$= \left[r^2\sin^2\theta\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + ar^2\sin^2\theta\frac{d^2a}{dt^2}\right.$$

$$\left. + (-\sin^2\theta)\big(1-kr^2+(-2kr^2)\big) - (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\right]$$

$$+ \left[3r^2\sin^2\theta\left(\frac{da}{dt}\right)^2 - kr^2\sin^2\theta - 2\sin^2\theta\,(1-kr^2) - \cos^2\theta\right]$$

$$- \left[2r^2\sin^2\theta\left(\frac{da}{dt}\right)^2 - 2\sin^2\theta\,(1-kr^2) - 2\cos^2\theta\right]$$

$$= r^2 \sin^2\theta \left[a\frac{d^2a}{dt^2} + 2\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + 2k \right]$$

Didapatkan Skala Ricci sebagaimana persamaan (2.41)

$$\mathcal{R} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

$$\mathcal{R} = g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33}$$

$$\mathcal{R} = -\frac{3}{a}\frac{d^2a}{dt^2} - \frac{(1-kr^2)}{a^2}\left[\frac{1}{1-kr^2}\left(a\frac{d^2a}{dt^2} + 2\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + 2k\right)\right]$$

$$-\frac{(1-kr^2)}{a^2r^2}\left[r^2\left(a\frac{d^2a}{dt^2} + 2\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + 2k\right)\right]$$

$$-\frac{(1-kr^2)}{a^2r^2\sin^2\theta}\left[r^2\sin^2\theta\left(a\frac{d^2a}{dt^2} + 2\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + 2k\right)\right]$$

$$= -\frac{3}{a}\frac{d^2a}{dt^2} - \frac{1}{a}\frac{d^2a}{dt^2} - \frac{2}{a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 - \frac{2k}{a^2} - \frac{1}{a}\frac{d^2a}{dt^2} - \frac{2}{a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 - \frac{2k}{a^2}$$

$$-\frac{1}{a}\frac{d^2a}{dt^2} - \frac{2}{a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 - \frac{2k}{a^2} = -\frac{6}{a}\frac{d^2a^2}{dt} - \frac{6}{a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 - \frac{6k}{a^2}$$

$$= -\frac{6}{a^2}\left(a\, d62\frac{a}{dt^2} + \left(\frac{da}{dt}\right)^2 + k\right)$$

Alam semesta pada awalnya dikemukakan oleh Einstein yakni memiliki keadaan statis sebagaimana pada persamaan Einstein dan merupakan cikal bakal munculnya istilah kosmologi berdasarkan persamaan (2.43), di mana ditunjukkan sebagai bagian dari geometri yang ada di ruas kiri. Konsep ini sebagai pengimbangan dengan adanya pengaruh gravitasi dari materi yang ada di alam semesta, sehingga dianggap alam semesta diperlambat atau dapat dikatakan statis. Kemudian dengan adanya pembuktian dari Hubble yang menunjukkan kebalikan dari yang dikemukakan oleh Eisntein, bahwasanya alam semesta mengalami perluasan atau pengembangan yang secara tidak langsung menunjukkan dinamis.

Oleh karena itu, muncullah gagasan bahwa awal evolusi alam semesta didominasi oleh materi dan radiasi, dan ketika masa evoluasi lanjutan alam semesta didominasi oleh energi gelap (dianggap sebagai penyebab alam semesta dipercepat). Konstanta kosmologi pada ruas kiri persamaan Einstein dilenyapkan dan sebagai gantinya menempatkan suatu kontribusi energi untuk menimbulkan efek yang setara dengan konstanta kosmologi yang diusung dengan sebutan energi gelap pada ruas kanan persamaan Einstein menjadi (Gautama, 2020)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\mathcal{R} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T'_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Lambda\right) = kT_{\mu\nu} \tag{3.22}$$

Energi gelap memiliki kerapatan energi $\rho_\Lambda = \Lambda/8\pi G$, dan $T'_{\mu\nu}$ menunjukkan kerapatan energi dan tekanan yang sudah diketahui (materi dan radiasi) berupa $T'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}.diag(\rho', -P', -P', -P')$. Dari persamaan di atas $\left(T'_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Lambda\right)$ dianggap sebagai tensor tekanan-energi-momentum yang baru berupa $T_{\mu\nu} = diag(\rho, -P, -P, -P)$ dan dianggap mengandung materi, radiasi, dan energi gelap (Gautama, 2020).

Tensor tekanan-energi-momentum yang terbentuk menjadi

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{P} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{P} \end{bmatrix}$$

Kemudian tensor dan skala Ricci disulihkan ke dalam persamaan medan Einstein. Pada G_{00} diperoleh sebagai berikut dan mengingat $\hbar = c = G = k_B = 1$

$$R_{00} - \frac{1}{2} g_{00}\mathcal{R} = 8\pi G T_{00}$$

$$-\frac{3}{a}\frac{d^2a}{dt^2} - \frac{1}{2}\left[-\frac{6}{a^2}\left(a\frac{d^2a}{dt^2} + \left(\frac{da}{dt}\right)^2 + k\right)\right] = 8\pi\rho$$

$$-\frac{3}{a}\frac{d^2a}{dt^2}+\frac{3}{a}\frac{d^2a}{dt^2}+\frac{3}{a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2+\frac{3}{a^2}k=8\pi\rho$$

$$\frac{3}{a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2+\frac{3}{a^2}k=8\pi\rho$$

$$\frac{3}{a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2=8\pi\rho-\frac{3}{a^2}k$$

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2=8\pi\rho-\frac{k}{a^2}$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2=\frac{8\pi\rho}{3}-\frac{k}{a^2} \tag{3.23}$$

Persamaan ini tidak lain adalah persamaan Friedmann pertama yang menunjukkan parameter Hubble $H=\frac{\dot{a}}{a}$ (Gautama, 2020).

Kemudian hal sama juga dilakukan pada G_{11}, G_{22}, dan G_{33} dengan menyulihkannya pada persaman medan Einstein, karena dari ketiganya memiliki bentuk yang sama maka di sini hanya ditunjukkan hanya pada G_{11} (dan sisanya terdapat pada lampiran) sebagaimana pada persamaan berikut dan mengingat $\hbar=c=G=k_B=1$ (Gautama, 2020)

$$R_{11}-\frac{1}{2}g_{11}\mathcal{R}=8\pi GT_{11}$$

$$\frac{1}{1-kr^2}\left(a\frac{d^2a}{dt^2}+2\left(\frac{da}{dt}\right)^2+2k\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left(-\frac{a^2}{1-kr^2}\right)\left[-\frac{6}{a^2}\left(a\frac{d^2a}{dt^2}+\left(\frac{da}{dt}\right)^2+k\right)\right]$$

$$=8\pi\left(\frac{Pa^2}{1-kr^2}\right)$$

$$\frac{1}{1-kr^2}\left(a\frac{d^2a}{dt^2}+2\left(\frac{da}{dt}\right)^2+2k\right)$$

$$-\frac{1}{1-kr^2}\left(3a\frac{d^2a}{dt^2}+3\left(\frac{da}{dt}\right)^2+3k\right)$$

$$=8\pi\left(\frac{Pa^2}{1-kr^2}\right)$$

$$-2a\frac{d^2a}{dt^2}-\left(\frac{da}{dt}\right)^2-k=8\pi Pa^2$$

$$-\frac{2}{a}\frac{d^2a}{dt^2}-\frac{1}{a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2-\frac{k}{a^2}=8\pi P$$

$$-\frac{2}{a}\frac{d^2a}{dt^2}-\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2-\frac{k}{a^2}=8\pi P$$

$$-\frac{2}{a}\frac{d^2a}{dt^2}-\left[\frac{8\pi\rho}{3}-\frac{k}{a^2}+\frac{\Lambda}{3}\right]-\frac{k}{a^2}=8\pi P$$

$$-\frac{2}{a}\frac{d^2a}{dt^2}-\frac{8\pi\rho}{3}=8\pi P$$

$$-\frac{2}{a}\frac{d^2a}{dt^2}=8\pi P+\frac{8\pi\rho}{3}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a}=-4\pi P+\frac{4\pi\rho}{3}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a}=-\frac{4\pi}{3}(3P+\rho) \tag{3.24}$$

Persamaan ini dikenal dengan persamaan percepatan. Kedua persamaan ini merupakan persamaan dalam bidang kosmologi yang mengatur pengembangan alam semesta yang homogen dan isotropik (Gautama, 2020).

Untuk persamaan friedmann pertama di mana $H^2=\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2$

$$H^2=\frac{8\pi\rho}{3}-\frac{k}{a^2}$$

Kondisi alam semesta saat ini dianggap dalam kondisi dominan materi dan energi gelap serta berada pada $k = 0$ atau alam semesta yang terus mengembang dengan kecepatan semakin melambat dan merupakan model alam semesta tertutup, maka didapatkan (Gautama, 2020)

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}\,(\rho_m + \rho_D) \tag{3.25}$$

Di mana P_D merupakan tekanan pada energi delap, ρ_D merupakan densitas energi pada energi gelap, H adalah parameter Hubble.

Persamaan friedmann pertama dapat juga digunakan untuk mencari diferensial dari densitas energi (ρ) sebagai berikut

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi\rho}{3} - \frac{k}{a^2}$$

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi\rho a^2}{3} - k$$

Persamaan ini kemudian diturunkan terhadap waktu

$$\frac{d}{dt}\dot{a}^2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{8\pi\rho a^2}{3} - k\right)$$

$$2\ddot{a}\dot{a} = \frac{8\pi}{3}(\dot{\rho}a^2 + 2a\dot{a}\rho)$$

$$\ddot{a}\dot{a} = \frac{4\pi}{3}(\dot{\rho}a^2 + 2a\dot{a}\rho)$$

Kemudian dari persamaan di atas dibagi dengan $\dot{a}a$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\dot{\rho}a}{\dot{a}} + 2\rho\right)$$

Dimasukkan persamaan $\frac{\ddot{a}}{a}$ ke dalam persamaan di atas

$$-\frac{4\pi}{3}(3P + \rho) = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\dot{\rho}a}{\dot{a}} + 2\rho\right)$$

$$-(3P+\rho)=\left(\frac{\dot{\rho}a}{\dot{a}}+2\rho\right)$$

$$\frac{\dot{\rho}a}{\dot{a}}=-3P-\rho-2\rho$$

$$\frac{\dot{\rho}a}{\dot{a}}=-3P-3\rho$$

$$\dot{\rho}=-3\frac{\dot{a}}{a}(P+\rho) \tag{3.26}$$

Sehingga berdasarkan persamaan yang telah didapatkan dikonversikan pada densitas energi pada energi gelap

$$\dot{\rho_D}=-3H(P_D+\rho_D) \tag{3.27}$$

Diketahui P_D adalah tekanan pada energi gelap dan ρ_D adalah densitas energi pada energi gelap sedangkan tanda dot [.] menunjukkan turunan terhadap waktu.

Begitu pula pada densitas energi pada materi dengan menggunakan persamaan keadaan pada materi adalah $w=0\ \left(w=\frac{P}{\rho}\right)$, maka diperoleh

$$\dot{\rho_m}=-3H\rho_m$$

Di mana ρ_m adalah densitas energi pada materi dan tanda dot [.] pada variabel menunjukkan turunan terhadap waktu.

Percepatan dapat diperoleh dengan dibentuk menjadi sebagai berikut

$$\frac{\ddot{a}}{a}=H^2+\dot{H}=\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2+\frac{d}{dt}\frac{\dot{a}}{a}=\frac{1}{a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2+\frac{d}{dt}\frac{1}{a}\frac{da}{dt}$$

$$=\frac{1}{a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2-\frac{1}{a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2+\frac{1}{a}\frac{d^2a}{dt^2}=\frac{1}{a}\frac{d^2a}{dt^2} \tag{3.28}$$

Di mana hasilnya sama dengan $\frac{\ddot{a}}{a}$ sesudah dan sebelum dioperasikan. Bentuk lain dalam persamaan percepatan juga dapat membentuk

$$\frac{\ddot{a}}{a}=-\frac{4\pi}{3}(3P+\rho)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi P + \frac{4\pi\rho}{3}$$

$$-\frac{2}{a}\frac{d^2a}{dt^2} = 8\pi P + \frac{8\pi\rho}{3}$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 = -8\pi P$$

Dirubah pada variabel $\frac{\ddot{a}}{a}$ dengan menggunakan persamaan (3.28)

$$H^2 + 2\left(H^2 + \dot{H}\right) = -8\pi P$$

$$H^2 + 2H^2 + 2\dot{H} = -8\pi P$$

$$3H^2 + 2\dot{H} = -8\pi P$$

$$H^2 + \frac{2}{3}\dot{H} = -\frac{8\pi P}{3} \tag{3.29}$$

Persamaan friedmann merupakan salah satu hal penting yang mampu mendefinisikan kondisi alam semesta homogen dan isotropik. Persamaan ini diibaratkan sebagai wadah yang mampu mendefinisikan suatu sistem dengan beberapa elemen di dalamnya seperti densitas energi (ρ) yang menjelaskan kondisi kandungan yang ada pada suatu sistem, parameter perlambatan (q) yang akan menggambarkan pergerakan kecepatan pada suatu sistem, parameter densitas (Ω) yang mempu menjelaskan kepadatan alam semesta.

d. Tingkat Ekspansi

Tingkat ekspansi alam semesta disimbolkan dalam $E(z)$ yang merupakan bagian dari parameter Hubble. Berdasarkan paramater Hubble di mana sebagai patokan dalam mengetahui pengembangan alam semesta yang memanfaatkan pergeseran merah (z) (Zhai et al., 2011), apakah alam semesta semakin mengembang yang ditunjukkan dengan frekuensi cahaya semakin rendah yang menunjukkan pergeseran merah, dan sebaliknya semakin tinggi frekuensi cahanya

maka gelombang cahaya akan berkumpul dan disebut sebagai pergeseran biru (Liddle, 2015).

$$H^2 = E^2(z)H_0^2$$

$$E^2(z) = \frac{H^2}{H_0^2} \tag{3.30}$$

Di mana H adalah parameter Hubble, H_0 adalah parameter Hubble saat ini, dan $E(z)$ adalah tingkat ekspansi alam semesta. Sehingga perlu diketahui besar dari H^2 yang didapatkan dari persamaan Friedmann sesuai dengan persamaan (3.25)

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}(\rho_m + \rho_D)$$

Di mana H adalah parameter Hubble, ρ_m adalah densitas energi pada materi, dan ρ_D adalah densitas energi pada energi gelap.

ρ_D diambil dari persamaan (3.18) yakni densitas energi pada energi gelap, sedangkan ρ_m merupakan densitas energi materi $\rho_m = \rho_{m0}a^{-3}$ maka diperoleh

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}\left(\rho_{m0}a^{-3} + \frac{3c^2H^4}{8\pi R}\left[\left(1 + \frac{\pi\delta}{H^2}\right)^{\frac{R}{\delta}} - 1\right]\right)$$

Mengingat bahwa $\Omega_m = \frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho_{\mathrm{m0}}$

$$H^2 = \Omega_m H_0^2[1+z]^3 + \frac{c^2E^4(z)H_0^4}{R}\left[\left(1 + \frac{\pi\delta}{E^2(z)H_0^2}\right)^{\frac{R}{\delta}} -\right.$$

Dimasukkan pada persamaan $E^2(z) = \frac{H^2}{H_0^2}$

$$E^2(z) = \frac{1}{H_0^2}\left(\Omega_m H_0^2[1+z]^3 + \frac{c^2E^4(z)H_0^4}{R}\left[\left(1+\frac{\pi\delta}{E^2(z)H_0^2}\right)^{\frac{R}{\delta}} - 1\right]\right)$$

$$E^2(z) = \Omega_m[1+z]^3 + \frac{c^2E^4(z)H_0^2}{R}\left[\left(1+\frac{\pi\delta}{E^2(z)H_0^2}\right)^{\frac{R}{\delta}} - 1\right]$$

Ketika $E(z=0) = 1$ maka akan didapatkan

$$1 = \Omega_m + \frac{c^2H_0^2}{R}\left[\left(1+\frac{\pi\delta}{H_0^2}\right)^{\frac{R}{\delta}} - 1\right]$$

$$1 - \Omega_m = \frac{c^2H_0^2}{R}\left[\left(1+\frac{\pi\delta}{H_0^2}\right)^{\frac{R}{\delta}} - 1\right]$$

$$\frac{c^2H_0^2}{R} = \frac{1-\Omega_m}{\left[\left(1+\frac{\pi\delta}{H_0^2}\right)^{\frac{R}{\delta}} - 1\right]}$$

Sehingga $E^2(z)$ diperoleh

$$E^2(z) = \Omega_m[1+z]^3 + \frac{(1-\Omega_m)E^4(z)}{\left[\left(1+\frac{\pi\delta}{H_0^2}\right)^{\frac{R}{\delta}} - 1\right]}\left[\left(1+\frac{\pi\delta}{E^2(z)H_0^2}\right)^{\frac{R}{\delta}} - 1\right]$$

$$E^2(z) = \left(\Omega_m[1+z]^3 + \frac{(1-\Omega_m)[(1+\pi\delta[1+z]^2)^\gamma - 1]}{[1+z]^4H_0^4\left[\left(1+\frac{\pi\delta}{H_0^2}\right)^{\gamma} - 1\right]}\right) \tag{3.31}$$

Tingkat ekspansi yang dicari merupakan salah satu parameter yang digunakan untuk menunjang dalam mencari parameter lain sebagaimana untuk menemukan bentuk dari perlambatan. Tingkat ekspansi ini dapat dikatakan sebagai skala fungsi terhadap pergeseran merah. Di mana berdasarkan $H = H_0E(z)$, tingkat ekspansi

dipengaruhi oleh parameter Hubble saat ini dengan parameter Hubble yang diidentifikasikan. Diketahui parameter Hubble merupakan salah satu yang menjelaskan pengembangan alam semesta yang sebanding dengan jarak pengamat dengan objek (dalam hal ini adalah pergeseran merah). Oleh karena itu, tingkat ekspansi alam semesta sangat akrab dengan besar tingkat pergeseran merahnya.

3.2.1. Parameter Densitas (Ω)

Parameter densitas merupakan kuantifikasi kepadatan total materi yang ada di alam semesta (Liddle, 2015). Alam semesta juga dianggap fluida yang mana dengan kerapatan fluida yang ada akan mempengaruhi pengembangan alam semesta, dengan kadar kerapatan yang semakin rendah maka percepatan alam semesta semakin tingga begitu pula sebaliknya. Berdasarkan persamaan friedmann dan persamaan (2.70) parameter densitas memiliki persamaan sebagai berikut

$$\Omega_D = \frac{8\pi}{3H_0^2}\rho_D$$

Di mana Ω_D adalah kerapatan pada energi gelap, H_0 adalah parameter Hubble saat ini, dan ρ_D adalah densitas energi pada energi gelap.

Sesuai dengan model energi gelap yang digunakan, densitas energi ρ_D disubstitusikan pada persamaan di atas karena parameter ini tidak bisa lepas dari dari ρ_D sebagaimana pada persamaan Friedmann.

$$\Omega_D = \frac{8\pi}{3H_0^2}\frac{3c^2H^4}{8\pi R}\left[\left(1+\frac{\pi\delta}{H^2}\right)^{\frac{R}{\delta}} - 1\right]$$

$$\Omega_D = \frac{1}{H_0^2}\frac{c^2E^4(z)H_0^4}{R}\left[\left(1+\frac{\pi\delta}{H^2}\right)^{\frac{R}{\delta}} - 1\right]$$

$$\Omega_D = \frac{c^2 E^4(z) H_0^2}{R}\left[\left(1+\frac{\pi\delta}{H^2}\right)^{\frac{R}{\delta}} - 1\right]$$

Dimisalkan $E(z=0)=1$ maka

$$1 = \Omega_m + \frac{c^2 H_0^2}{R}\left[\left(1+\frac{\pi\delta}{H_0^2}\right)^{\frac{R}{\delta}} - 1\right]$$

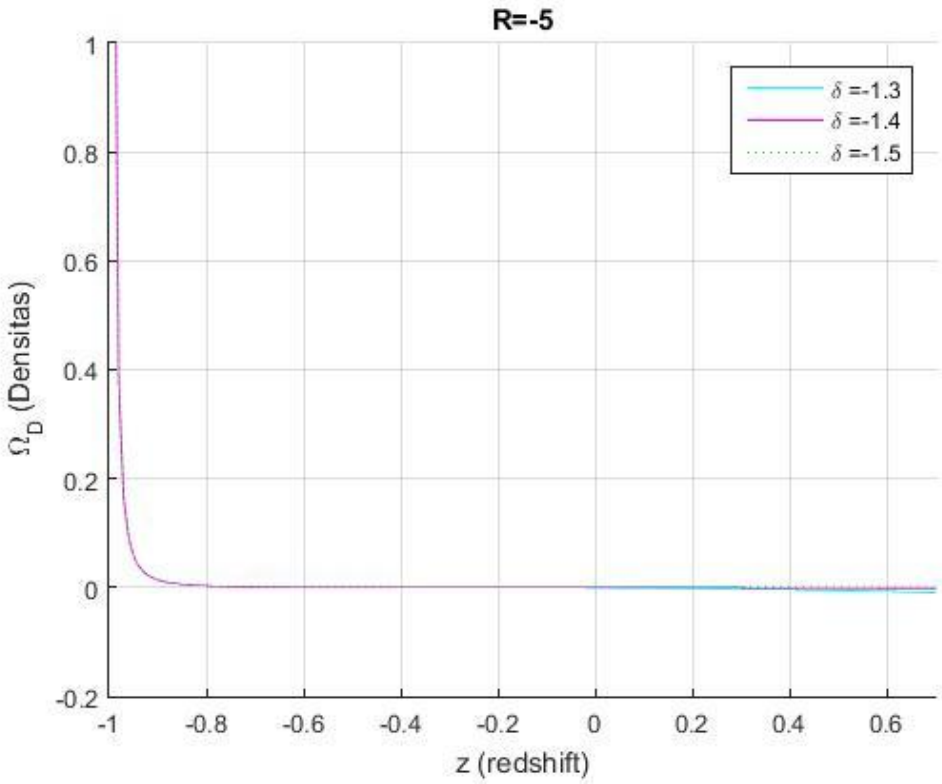
$$1 - \Omega_m = \frac{c^2 H_0^2}{R}\left[\left(1+\frac{\pi\delta}{H_0^2}\right)^{\frac{R}{\delta}} - 1\right]$$

$$\frac{c^2 H_0^2}{R} = \frac{1-\Omega_m}{\left[\left(1+\frac{\pi\delta}{H_0^2}\right)^{\frac{R}{\delta}} - 1\right]}$$

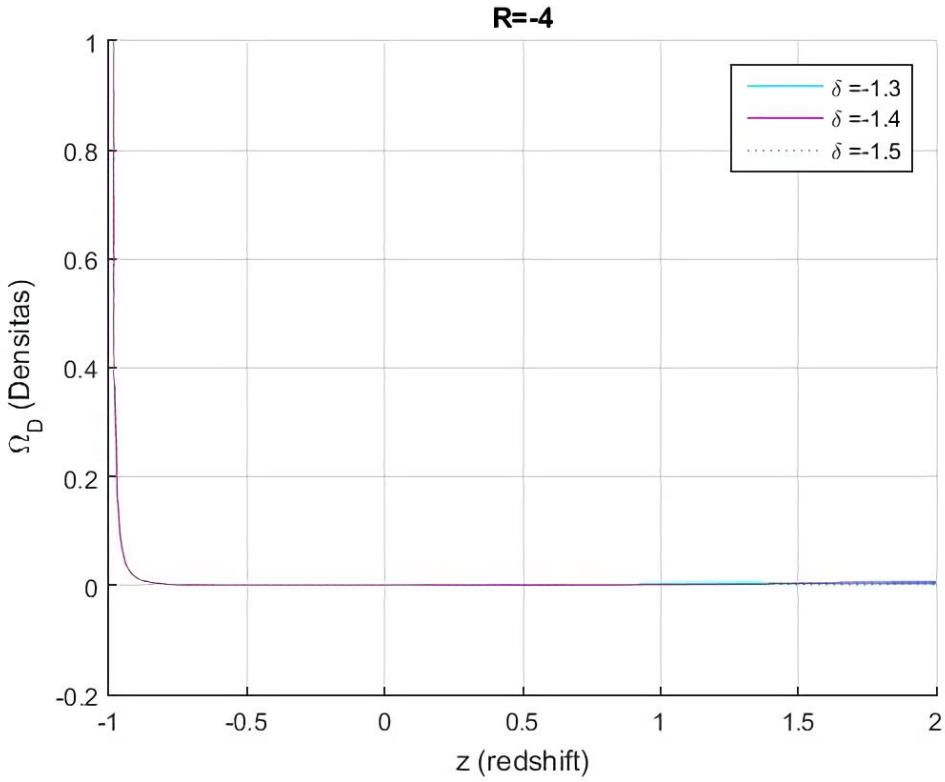
Sehingga didapatkan kerapatan pada model energi gelap holografik sebagaimana berikut

$$\Omega_D = \frac{(1-\Omega_m)E^4(z)}{\left[\left(1+\frac{\pi\delta}{H_0^2}\right)^{\frac{R}{\delta}} - 1\right]}\left[\left(1+\frac{\pi\delta}{E^2(z)H_0^2}\right)^{\frac{R}{\delta}} - 1\right] \tag{3.32}$$

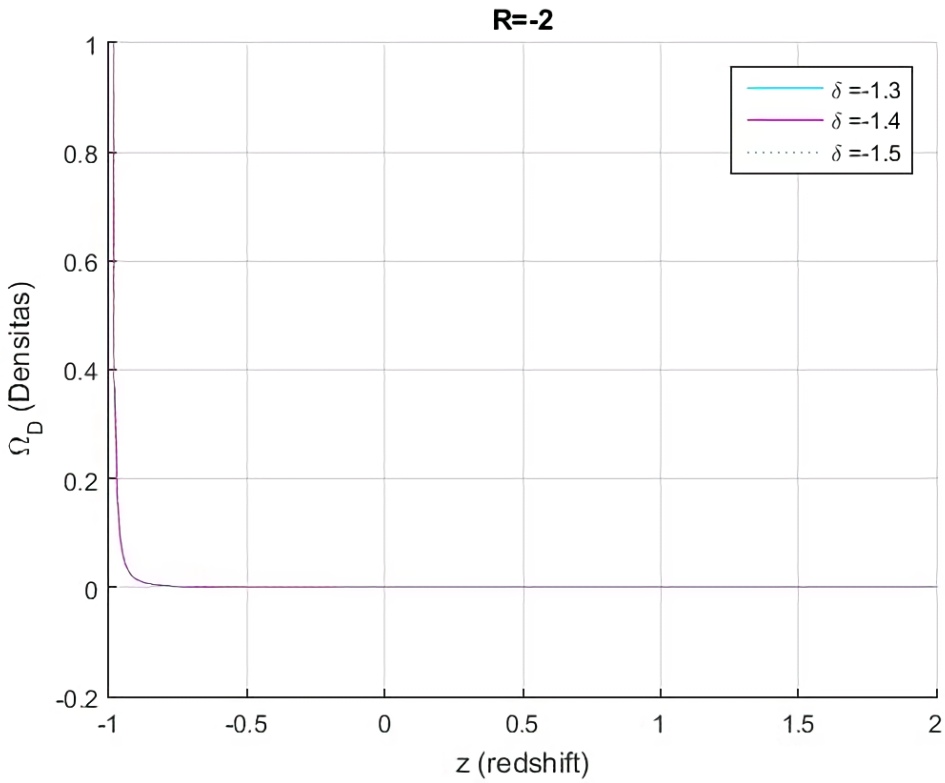
Berdasarkan persamaan kepadatan yang ditemukan dapat dibuat plot grafik berdasarkan pergeseran merah sebagai berikut


R=-5
δ =-1.3
δ =-1.4
δ =-1.5
Ω_D (Densitas)
z (redshift)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6

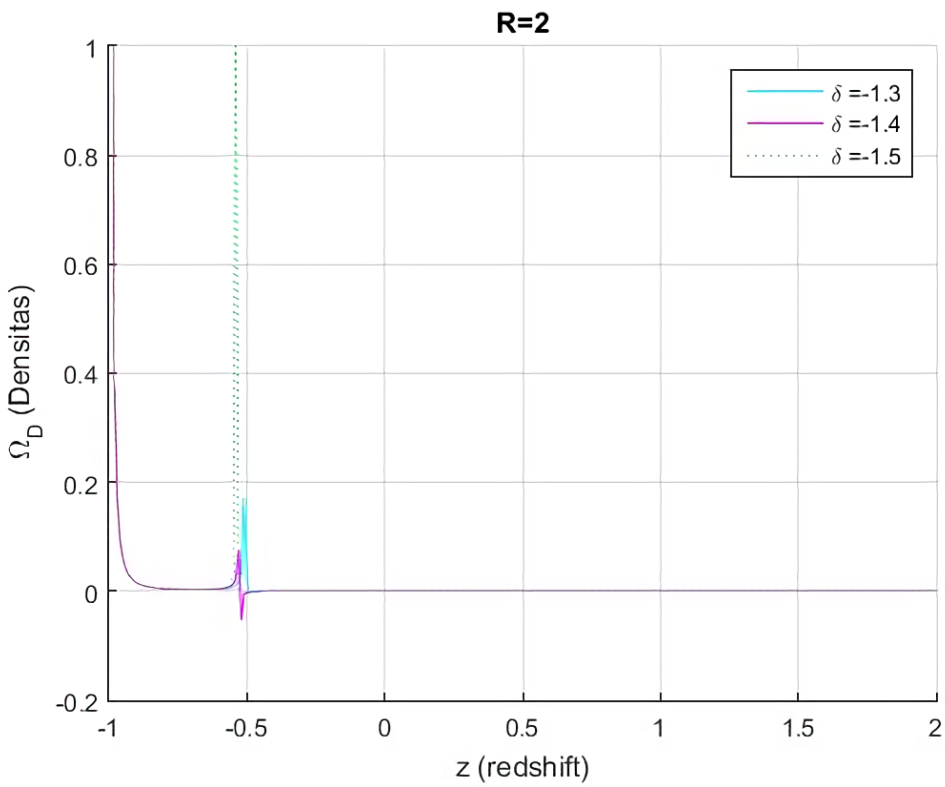
(a)


R=-4
δ =-1.3
δ =-1.4
δ =-1.5
Ω_D (Densitas)
z (redshift)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

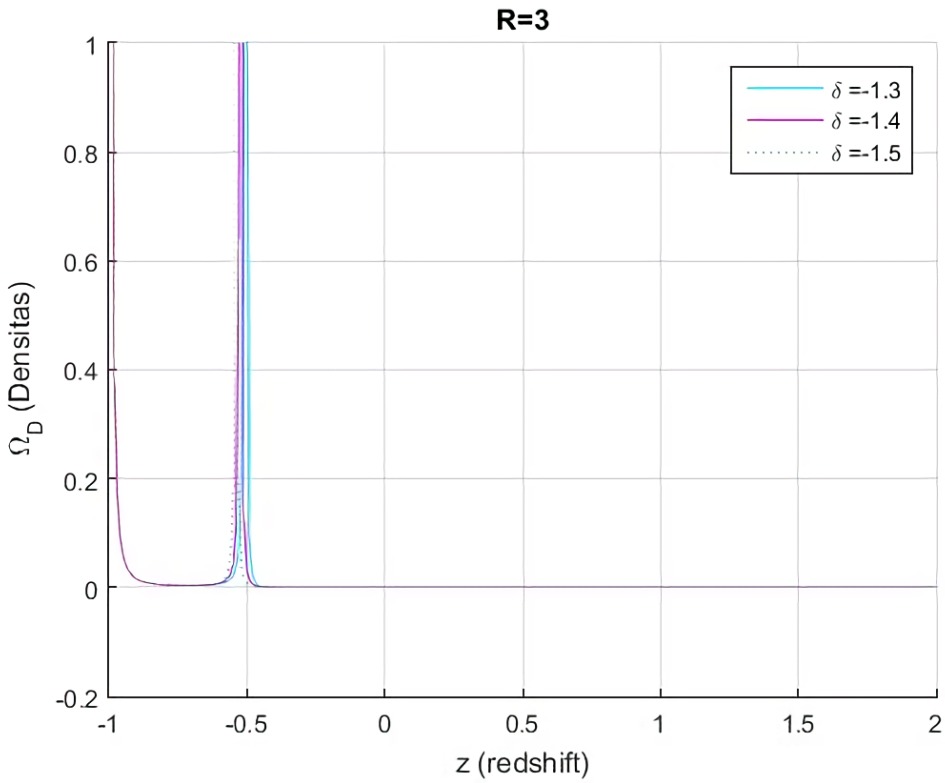
(b)


R=-2
δ =-1.3
δ =-1.4
δ =-1.5
Ω_D (Densitas)
z (redshift)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

(c)

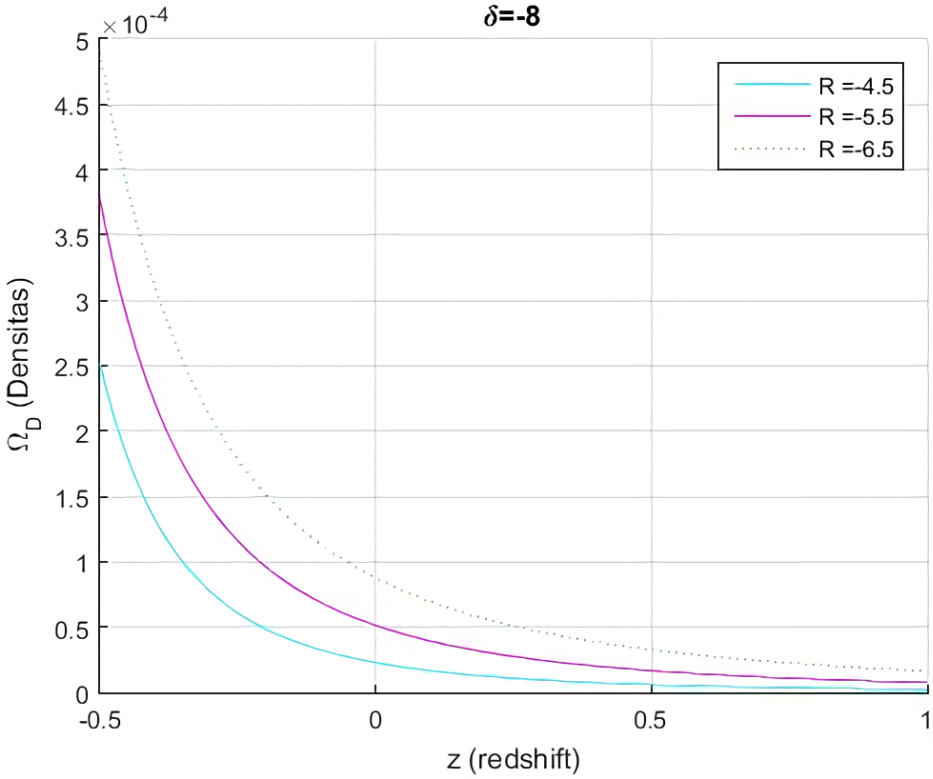

R=2
δ =-1.3
δ =-1.4
δ =-1.5
Ω_D (Densitas)
z (redshift)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

(d)

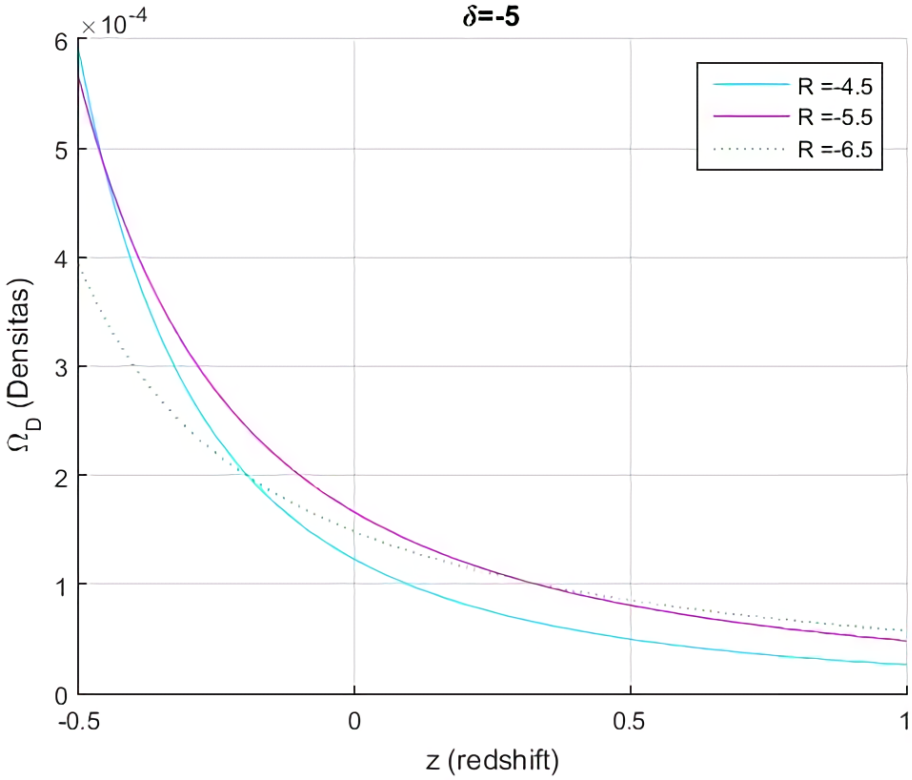


(e)

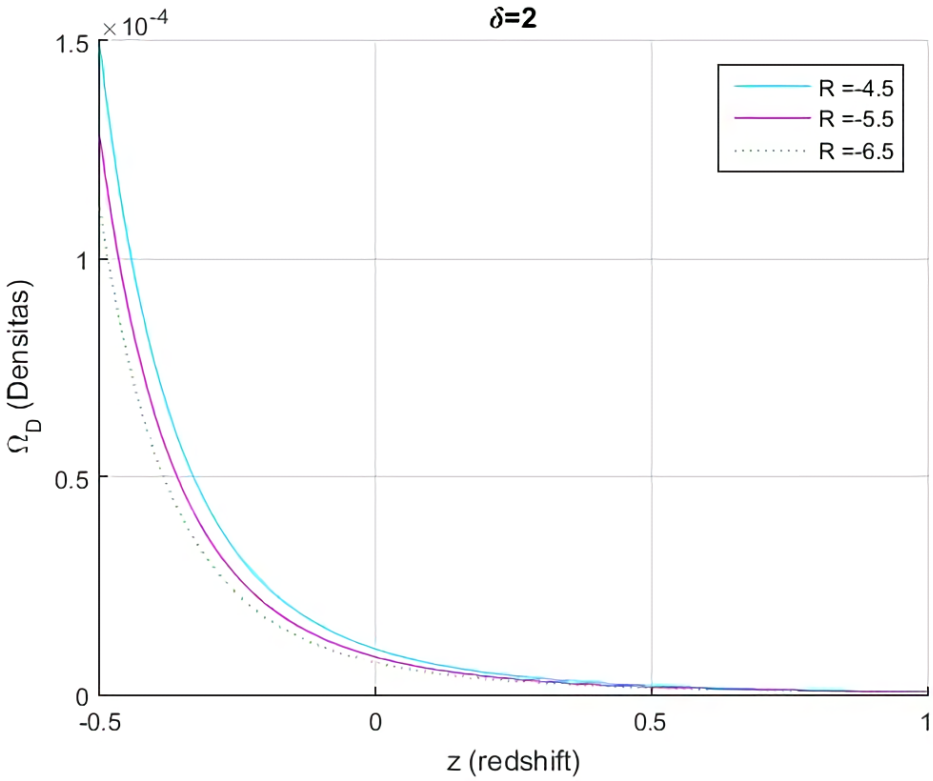
Gambar 3. 1 Grafik total densitas pada energi gelap (Ω_D) terhadap pergeseran merah (z): a) R=-5; b) R=-4; c) R=-2; d) R=2; e) R=3. Mengetahui nilai $c = 1;\ H_0 = 67{,}9(Km\, s^{-1} Mpc^{-1}); \delta = -1{,}3; -1{,}4; -1{,}5$


δ=-8
×10^-4
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
0
0.5
1
Ω_D (Densitas)
z (redshift)
R =-4.5
R =-5.5
R =-6.5

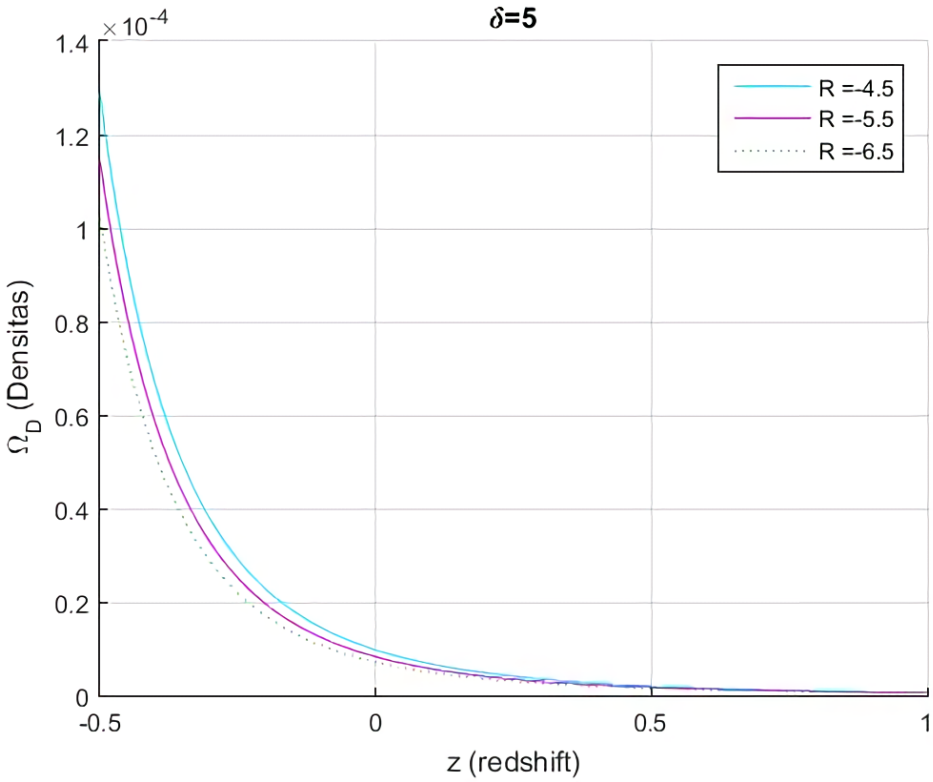
(a)


δ=-5
×10^-4
6
5
4
3
2
1
0
-0.5
0
0.5
1
Ω_D (Densitas)
z (redshift)
R =-4.5
R =-5.5
R =-6.5

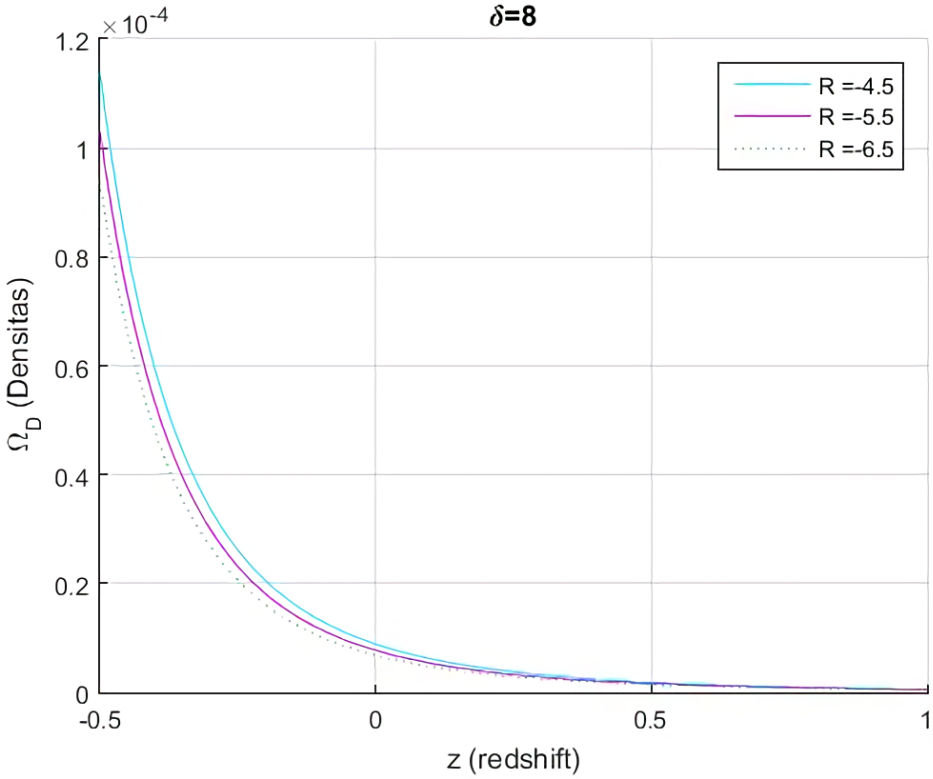
(b)


δ=2
×10^-4
1.5
1
0.5
0
-0.5
0
0.5
1
Ω_D (Densitas)
z (redshift)
R =-4.5
R =-5.5
R =-6.5

(c)


δ=5
×10^-4
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.5
0
0.5
1
Ω_D (Densitas)
z (redshift)
R =-4.5
R =-5.5
R =-6.5

(d)



(e)

Gambar 3. 2 Grafik total densitas pada energi gelap (Ω_D) terhadap pergeseran merah (z): a) δ=-8; b) δ=-5; c) δ=2; d) δ=5; e) δ=8. Mengetahui nilai $c = 1;\ H_0 = 67{,}9(Km\ s^{-1}Mpc^{-1}); R = -4{,}5; -5{,}5; -6{,}5$

Parameter densitas merupakan salah satu parameter yang mampu menjelaskan apakah alam semesta mengalami ekspansi. Sebagaimana pada pengertian densitas sendiri adalah kerapatan, sehingga tingkat kerapatan suatu sistem mempengaruhi perluasan alam semesta. Berdasarkan persamaan $\Omega = \frac{\rho}{\rho_{critis}}$, hal ini mengindikasikan apabila semakin kecil kerapatan suatu sistem maka sudah jelas volume alam semesta semakin diperluas sebagaimana jika kita indikasikan $\rho = m/V$ maka kita proyeksikan pada persamaan Ω maka semakin kecil kerapatannya maka semakin luas volumenya dan pada cakupan alam semesta tidak lepas dari pengaruh pergesran merahnya.

3.2.2. Parameter Perlambatan (q)

Alam semesta dianggap statis atau lebih mengarah ke mengerut sebagaimana pendapat Einstein berdasarkan persamaan Ensitein yang diusung dengan mengangkat konstanta kosmologi sebagai alasan semesta statis. Hal ini dianggap karena adanya pengaruh gravitasi yang menyebabkan alam semesta diperlambat dan dianggap alam semesta didominasi oleh radiasi dan materi sebagaimana penjelasan sebelumnya. Sedangkan pada masa kini alam semesta didominasi oleh materi dan energi gelap, di mana energi gelap dianggap sebagai faktor utama pengembangan alam semesta (Gautama, 2020). Oleh karena itu, mengapa tidak menggunakan kata percepatan dibandingkan perlambatan, hal ini didasarkan sebagaimana awal kondisi alam semesta yakni diperlambat. Maka perlambatan diambil sebagai parameter utama dalam ekspansi alam semesta. Parameter ini sebagai bukti apakah alam semesta saat ini masih tetap dalam kondisi mengalami perlambatan atau percepatan, sehingga semakin kecil nilai perlambatannya maka alam semesta mengalami perluasan begitu pula sebaliknya.

Parameter perlambatan dapat diperoleh berdasarkan persamaan Friedmann yang mengemukakan sebagai persamaan yang menjelaskan ekspansi alam semesta, di mana laju perluasan alam semesta pada parameter Hubble akan berubah seiring waktu. Berdasarkan persamaan (2.74) diketahui perlambatan berupa

$$q = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} = -\frac{a^2}{\dot{a}^2}\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{H^2}\left(\dot{H} + H^2\right) = -1 - \frac{\dot{H}}{H^2}$$

Asumsikan bahwa $H(z) = H_0 E(z)$, maka diferensial dari $H(z)$ adalah $\dot{H} = H_0 \frac{d}{dz} E(z)$

$$q = -\left(1 + \frac{H_0 \frac{d}{dz} E(z)}{H_0^2 E^2(z)}\right) = -\left(1 + \frac{1}{H_0} \frac{1}{E^2(z)} \frac{d}{dz}\ E(z)\right)$$

$$= -\left(1 + \frac{1}{H(z)E(z)} \frac{d}{dz}\ E(z)\right)$$

Ingat bahwa $a(t) = [1+z]^{-1}$, maka diferensialnya adalah $\frac{d}{dt}\ [1+z]^{-1} = -\frac{1}{[1+z]^2}$

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = -\frac{1}{[1+z]^2} \cdot \frac{1}{[1+z]^{-1}} = -\frac{1}{[1+z]}$$

$$q = -\left(1 - \frac{[1+z]}{E(z)} \frac{d}{dz}\ E(z)\right)$$

$$q = -1 + \frac{[1+z]}{E(z)} \frac{d}{dz}\ E(z) \tag{3.33}$$

Berdasarkan penurunan dari persamaan perlambatan perlu diketahui seberapa tingkat perubahan ekspansi yang berubah seiring waktu.

$$E(z) = \left(\Omega_m [1+z]^3 + \frac{1-\Omega_m}{[1+z]^4 H_0^4 \left[\left(1 + \frac{\pi\delta}{H_0^2}\right)^{R/\delta} - 1\right]} \left[(1 + \pi\delta[1+z]^2)^{R/\delta} - 1\right]\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\Omega_m [1+z]^3 + \frac{1-\Omega_m}{[1+z]^4 H_0^4 \left[\left(1 + \frac{\pi\delta}{H_0^2}\right)^{R/\delta} - 1\right]} [(1 + \pi\delta[1+z]^2)^{R/\delta} - 1]}$$

$$\frac{d}{dt}\,E(z) = \frac{1}{2}\left(\Omega_m[1+z]^3 + \frac{1-\Omega_m}{[1+z]^4 H_0^4\left[\left(1+\frac{\pi\delta}{H_0^2}\right)^{R/\delta} - 1\right]}\left[(1+\pi\delta[1+z]^2)^{R/\delta} - 1\right]\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\times\frac{d}{dt}\left(\Omega_m[1+z]^3 + \frac{1-\Omega_m}{[1+z]^4 H_0^4\left[\left(1+\frac{\pi\delta}{H_0^2}\right)^{R/\delta} - 1\right]}\left[(1+\pi\delta[1+z]^2)^{R/\delta} - 1\right]\right)$$

$$\frac{d}{dt}\,E(z)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\Omega_m[1+z]^3 + \frac{1-\Omega_m}{[1+z]^4 H_0^4\left[\left(1+\frac{\pi\delta}{H_0^2}\right)^{R/\delta} - 1\right]}\left[(1+\pi\delta[1+z]^2)^{R/\delta} - 1\right]}}$$

$$\times\left(3\Omega_m[1+z]^2 + \frac{1-\Omega_m}{H_0^4\left[\left(1+\frac{\pi\delta}{H_0^2}\right)^{R/\delta} - 1\right]}\frac{d}{dt}\frac{\left[(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}} - 1\right]}{[1+z]^4}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\,E(z)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\Omega_m[1+z]^3 + \frac{1-\Omega_m}{[1+z]^4 H_0^4\left[\left(1+\frac{\pi\delta}{H_0^2}\right)^{R/\delta} - 1\right]}[(1+\pi\delta[1+z]^2)^{R/\delta} - 1]}}$$

$$\times\left(3\Omega_m[1+z]^2 + \frac{1-\Omega_m}{H_0^4\left[\left(1+\frac{\pi\delta}{H_0^2}\right)^{R/\delta} - 1\right][1+z]^8}\left(2\pi\delta\frac{R}{\delta}[1 + z](1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}-1}[1+z]^4 - 4[1+z]^3\left[(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}} - 1\right]\right)\right)$$

$$\frac{d}{dt}\,E(z)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\Omega_m[1+z]^3 + \frac{1-\Omega_m}{[1+z]^4 H_0^4\left[\left(1+\frac{\pi\delta}{H_0^2}\right)^{R/\delta} - 1\right]}[(1+\pi\delta[1+z]^2)^{R/\delta} - 1]}}$$

$$\times\left(3\Omega_m[1+z]^2+\frac{(1-\Omega_m)2\pi\delta\frac{R}{\delta}[1+z]^5(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}-1}}{H_0^4\left[\left(1+\frac{\pi\delta}{H_0^2}\right)^{R/\delta}-1\right][1+z]^8}\right.$$

$$\left.-\frac{(1-\Omega_m)4[1+z]^3\left[(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}}-1\right]}{H_0^4\left[\left(1+\frac{\pi\delta}{H_0^2}\right)^{R/\delta}-1\right][1+z]^8}\right)$$

Berdasarkan parameter perlambatan dalam ekspansi alam semesta menggunakan persamaan (3.33)

$$q=-1+\frac{[1+z]}{E(z)}\frac{d}{dz}\,E(z)$$

$$q=-1\;+\frac{[1+z]}{\sqrt{\Omega_m[1+z]^3+\frac{1-\Omega_m}{[1+z]^4H_0^4\left[\left(1+\frac{\pi\delta}{H_0^2}\right)^{R/\delta}-1\right]}[(1+\pi\delta[1+z]^2)^{R/\delta}-1]}}$$

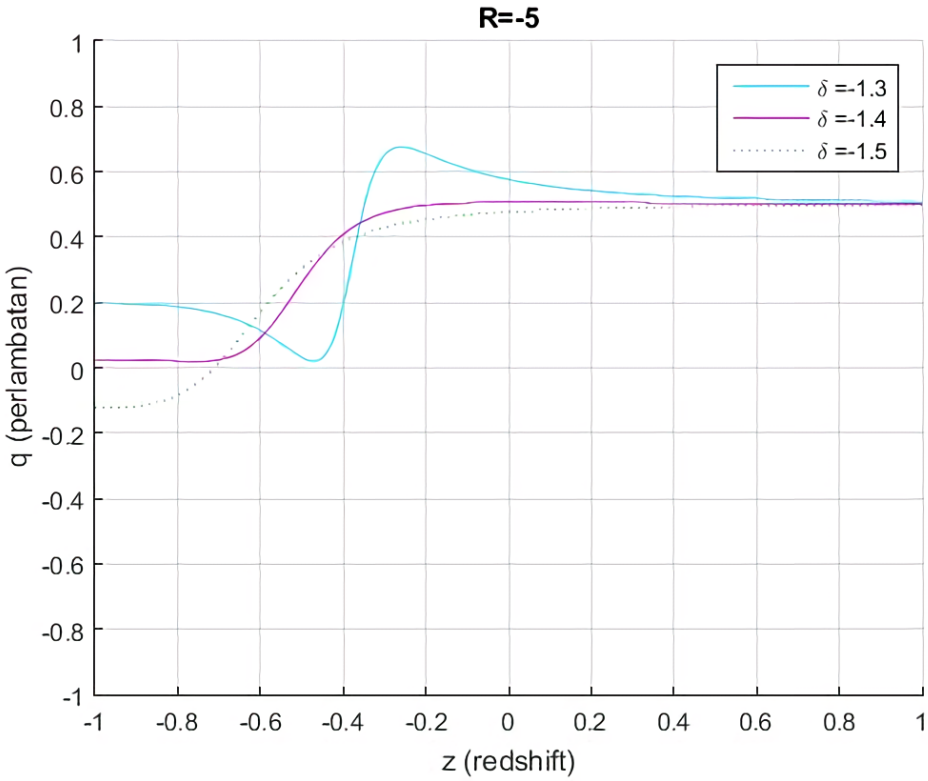
$$\times\frac{1}{2\sqrt{\Omega_m[1+z]^3+\frac{1-\Omega_m}{[1+z]^4H_0^4\left[\left(1+\frac{\pi\delta}{H_0^2}\right)^{R/\delta}-1\right]}[(1+\pi\delta[1+z]^2)^{R/\delta}-1]}}$$

$$\times\left(3\Omega_m[1+z]^2+\frac{(1-\Omega_m)2\pi\delta\frac{R}{\delta}[1+z]^5(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}-1}}{H_0^4\left[\left(1+\frac{\pi\delta}{H_0^2}\right)^{R/\delta}-1\right][1+z]^8}\right.$$

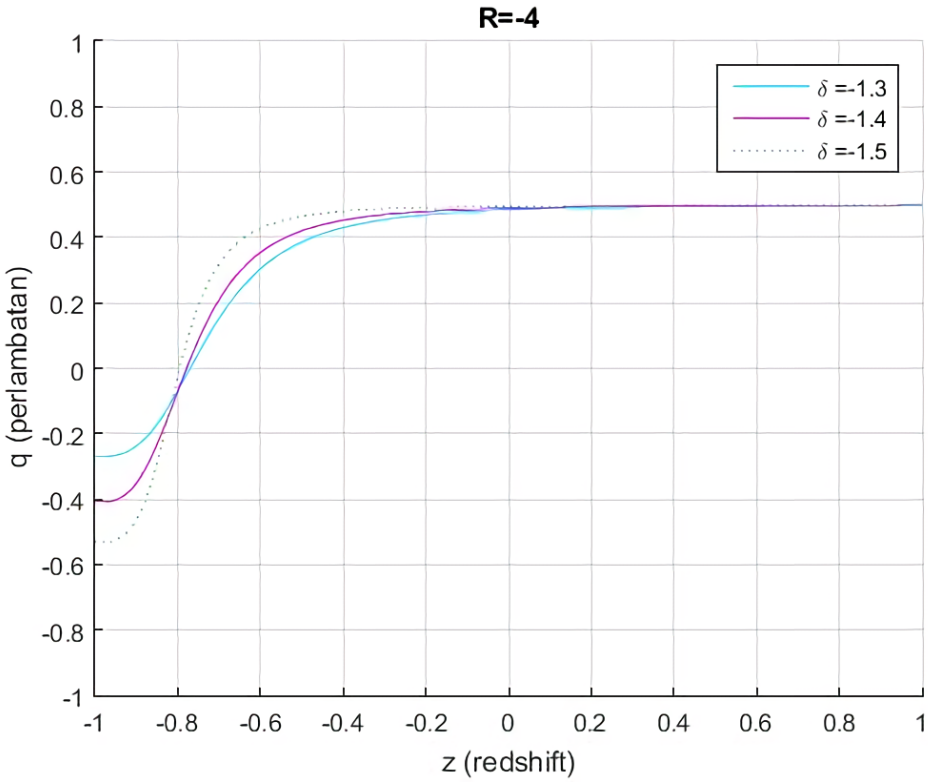
$$\left.-\frac{(1-\Omega_m)4[1+z]^3\left[(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}}-1\right]}{H_0^4\left[\left(1+\frac{\pi\delta}{H_0^2}\right)^{R/\delta}-1\right][1+z]^8}\right)$$

$$q = -1 + \frac{1}{2\left(\Omega_m[1+z]^3 + \frac{1-\Omega_m}{[1+z]^4 H_0^4\left[\left(1+\frac{\pi\delta}{H_0^2}\right)^{\frac{R}{\delta}}-1\right]}\left[(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}}-1\right]\right)} \times \left(3\Omega_m[1+z]^3 + \frac{2\pi\delta\frac{R}{\delta}(1-\Omega_m)(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}-1}}{H_0^4\left[\left(1+\frac{\pi\delta}{H_0^2}\right)^{\frac{R}{\delta}}-1\right][1+z]^2} - \frac{4(1-\Omega_m)\left[(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}}-1\right]}{H_0^4\left[\left(1+\frac{\pi\delta}{H_0^2}\right)^{\frac{R}{\delta}}-1\right][1+z]^4}\right) \tag{3.34}$$

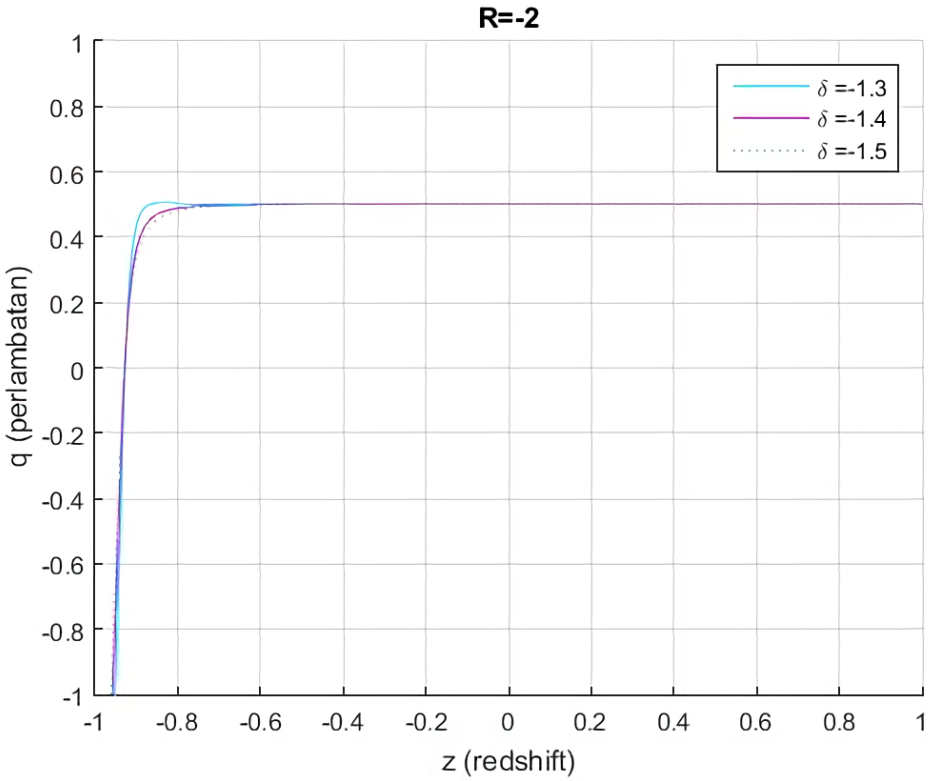
Berdasarkan persamaan perlambatan yang diperoleh dengan model ini diperoleh grafik berdasarkan pergeseran merah (z), yakni sebagai berikut


R=-5
δ =-1.3
δ =-1.4
δ =-1.5
q (perlambatan)
z (redshift)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

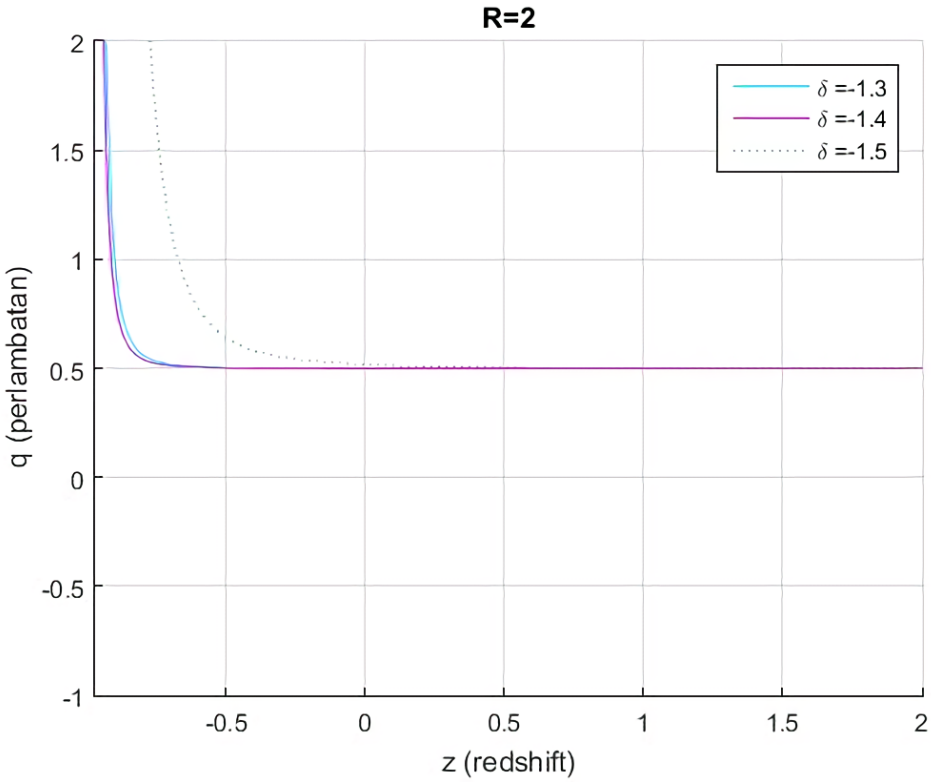
(a)


R=-4
δ =-1.3
δ =-1.4
δ =-1.5
q (perlambatan)
z (redshift)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

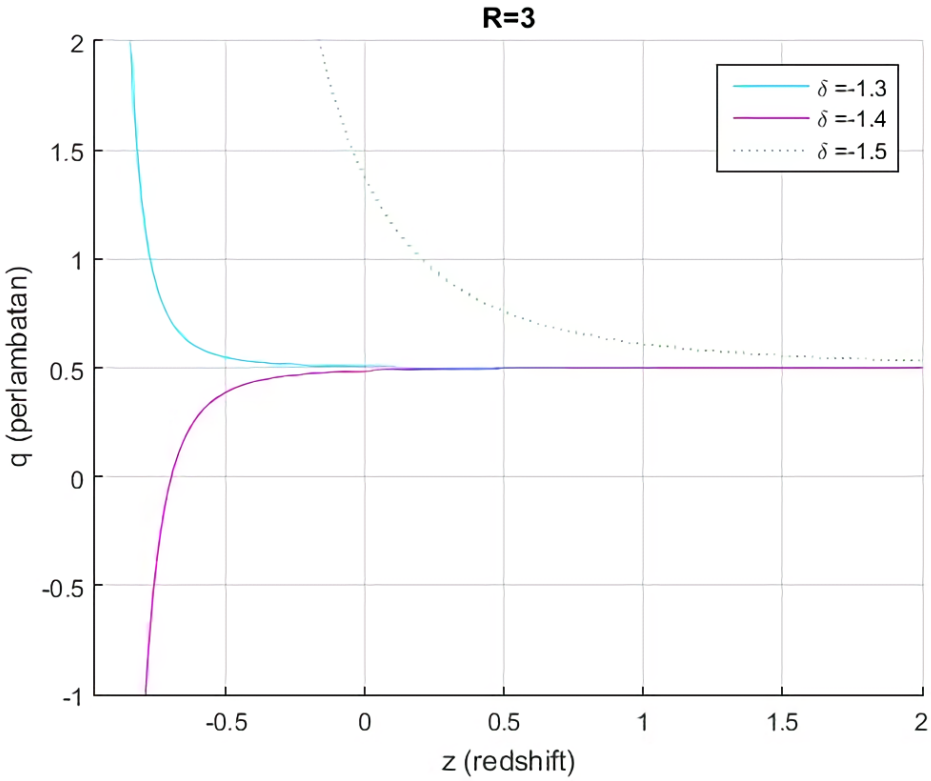
(b)


R=-2
δ =-1.3
δ =-1.4
δ =-1.5
q (perlambatan)
z (redshift)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

(c)

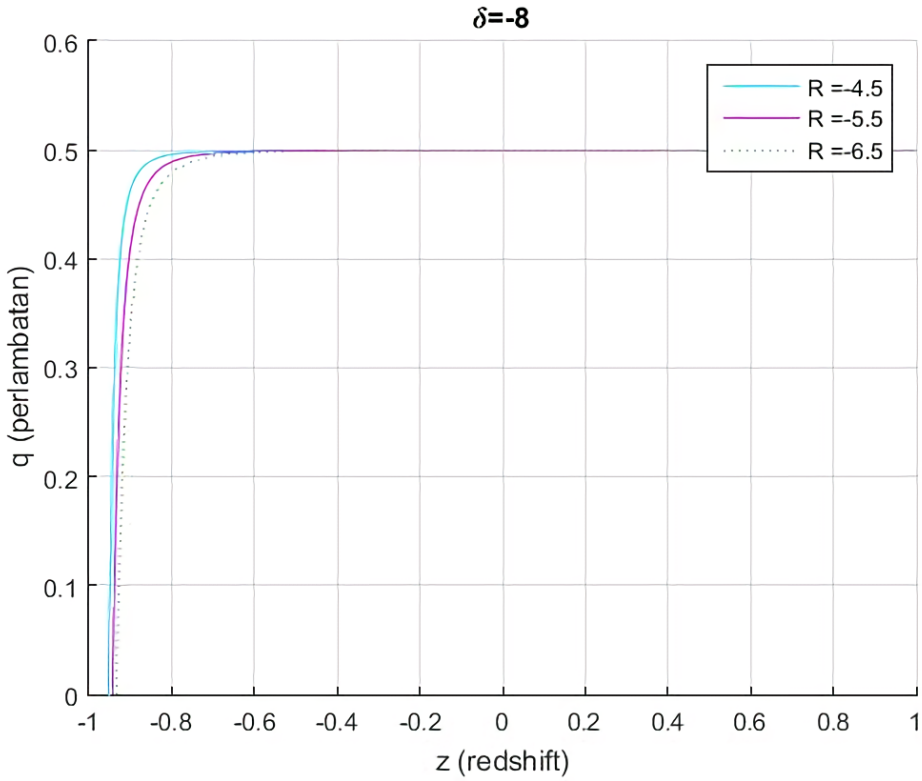

R=2
δ =-1.3
δ =-1.4
δ =-1.5
q (perlambatan)
z (redshift)
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

(d)

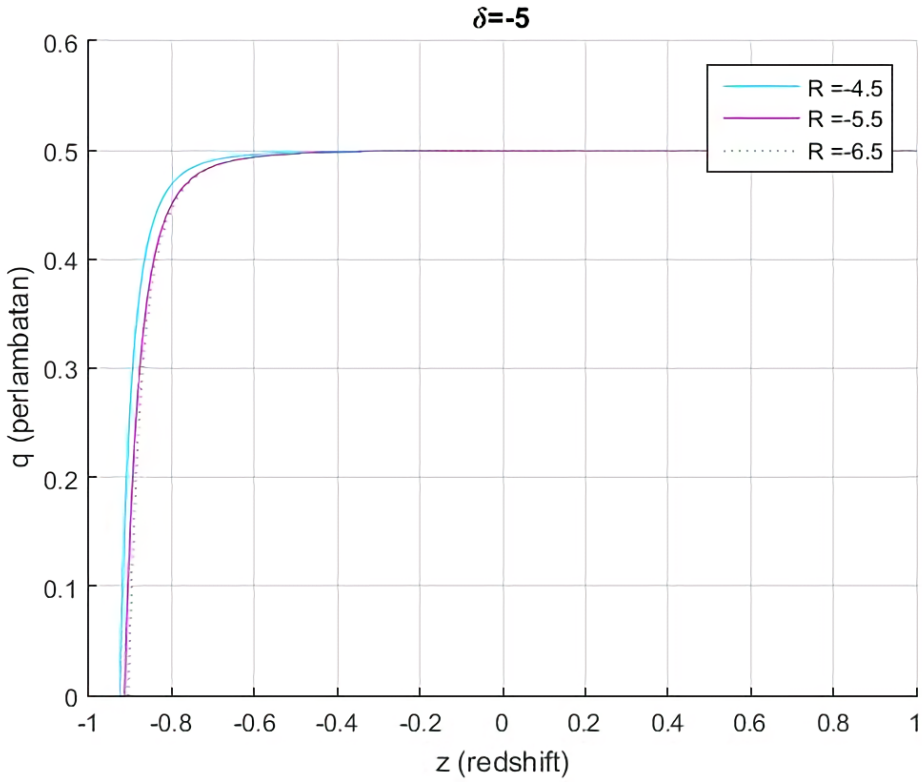


(e)

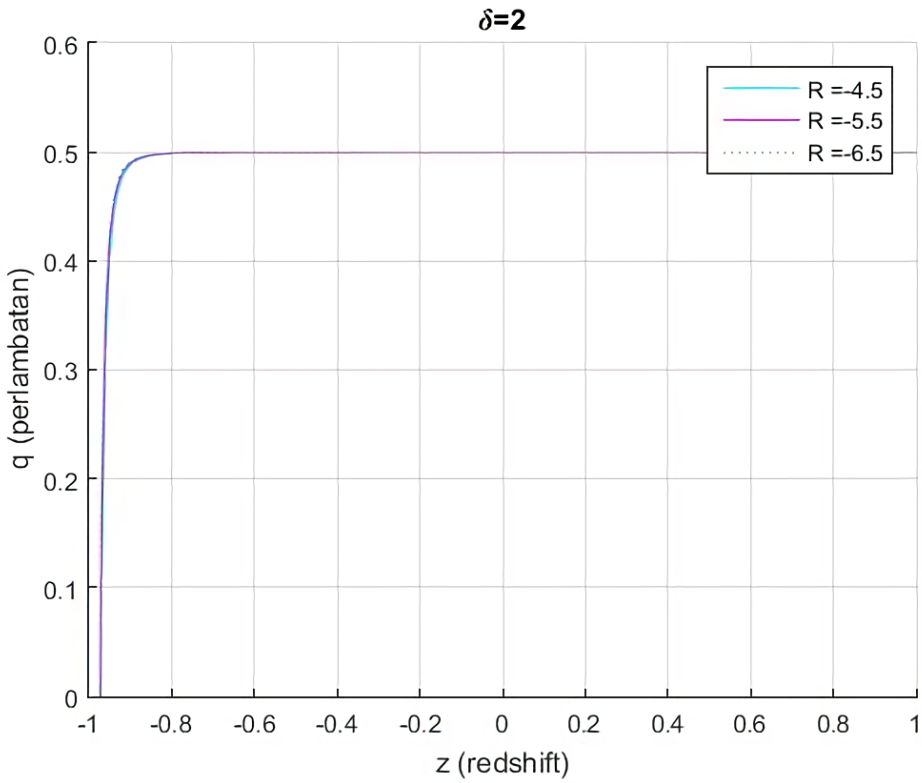
Gambar 3. 3 Grafik parameter perlambatan (q) terhadap pergeseran merah (z): a) R=-5; b) R=-4; c) R=-2; d) R=2; R=3. Mengetahui nilai $c = 1;\ H_0 = 67{,}9(Km/s)/Mpc$ dengan $\delta = -1{,}3;\ -1{,}4;\ -1{,}5$


δ=-8
R =-4.5
R =-5.5
R =-6.5
q (perlambatan)
z (redshift)
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

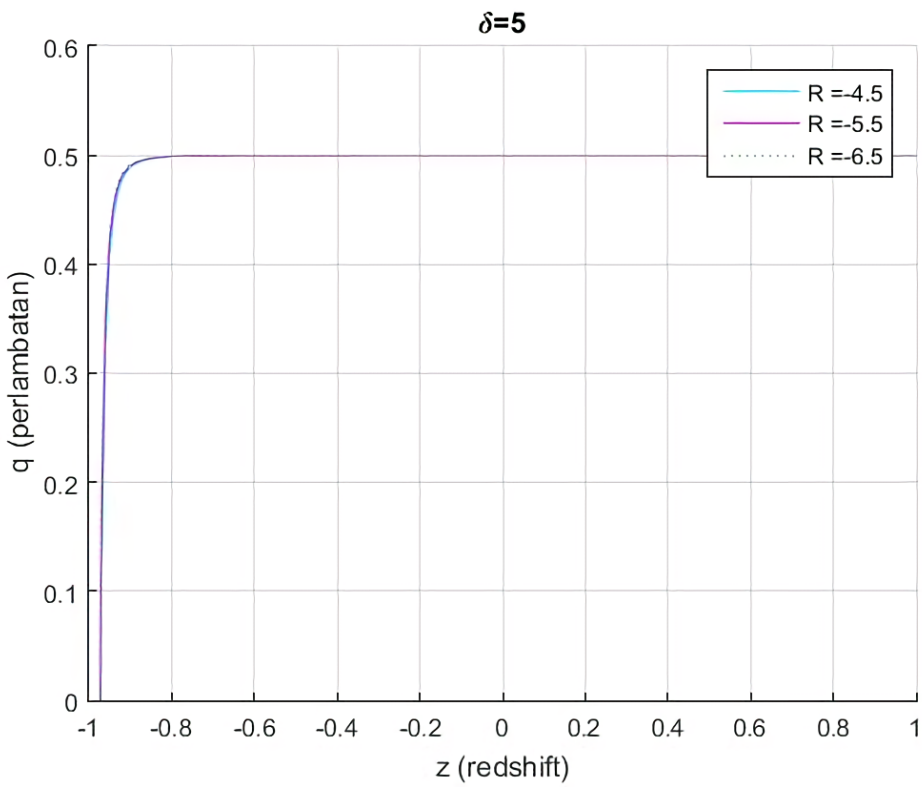
(a)


δ=-5
R =-4.5
R =-5.5
R =-6.5
q (perlambatan)
z (redshift)
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

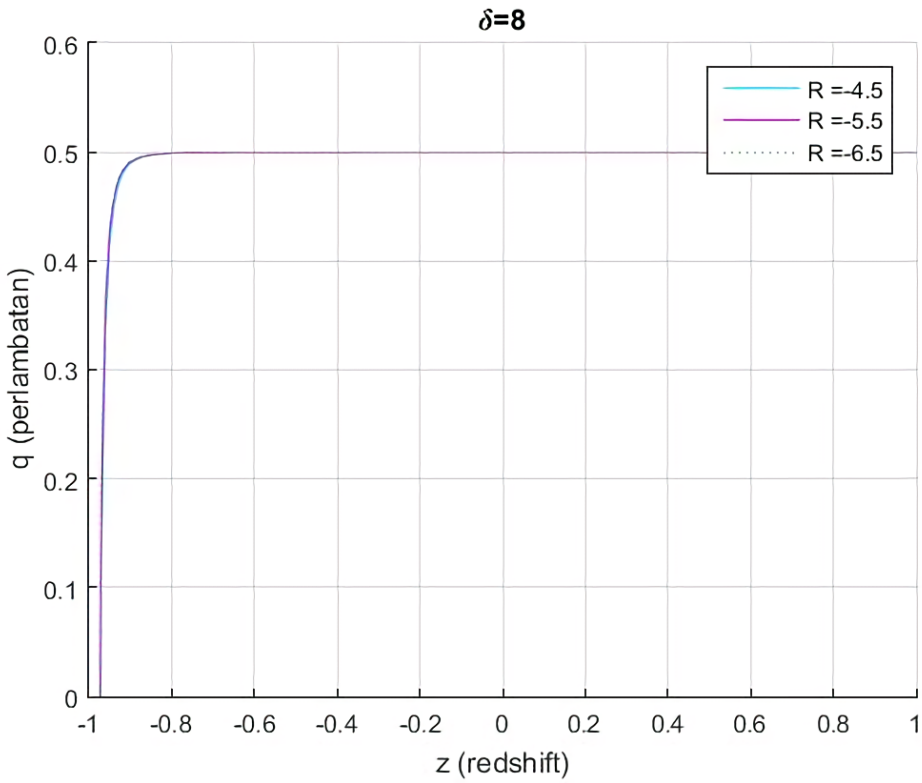
(b)


δ=2
R =-4.5
R =-5.5
R =-6.5
q (perlambatan)
z (redshift)
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

(c)


δ=5
R =-4.5
R =-5.5
R =-6.5
q (perlambatan)
z (redshift)
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

(d)



(e)

Gambar 3. 4 Grafik parameter perlambatan (q) terhadap pergeseran merah (z): a) δ=-8; b) δ=-5; c) δ=2; d) δ=5; δ=8. Mengetahui nilai $c = 1;\ H_0 = 67{,}9(Km/s)/Mpc$ dengan $R = -4{,}5;\ -5{,}5;\ -6{,}5$

Perlambatan merupakan salah satu variabel kinematik yang digunakan untuk memahami percepatan alam semesta dan menguantifikasikan bagaimana tingkat ekspansi berubah dari waktu ke waktu (Al Mamon & Bamba, 2018). Parameter perlambatan dalam kosmik merupakan fase percepatan yang terjadi di alam semesta, jadi apabila parameter ini menunjukkan nilai negatif maka mengalami kenaikan percepatan dan apabila menunjukkan semakin positif nilainya maka percepatan semakin menurun atau dapat dikatakan mengalami fase perlambatan (Jawad et al., 2019).

3.2.3. Parameter Kuadrat Kecepatan Suara (v_s^2)

Kuadrat kecepatan suara merupakan salah satu parameter penting dalam pemodelan energi gelap ini karena dengan parameter ini dapat diketahui tingkat kestabilan suatu model dalam ekspansi alam semesta. Rentang kuadrat kecepatan suara $0 \leq v_s^2 \leq 1$, di mana saat $v_s^2 > 0$ maka alam semesta diangap lebih stabil dibandingkan saat $v_s^2 < 0$. Alam semesta dianggap memiliki fluida barotropik yang menyebabkan ekspansi alam semesta, apabila nilai $v_s^2 \leq 0$ maka tidak akan ada perambataan kecepatan suara oleh karena itu harus di atas nol, sedangkan apabila $v_s^2 \geq 1$ maka hal ini telah sama atau melebihi dari kecepatan suara ($c = 1$), di mana tidak ada yang lebih besar dari kecepatan suara (Perkovi & Štefancic˘, 2020). Kerapatan alam semesta memiliki dua hal yang tidak bisa lepas, yakni tekanan dan densitas energinya. Sebagaimana pada persamaan keadaan umum, yakni $c = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)}$. Karena alam semesta dianggap mengalami ekspansi atau dinamis, maka bisa dikatakan alam semesta merupakan susunan fluida dinamis yang terdiri dari berbagai macam properti pengendali. Fluida dinamis ini dikatakan sebagai faktor utama alam semesta mengalami ekspansi, di mana belum diketahui berupa apa fluida ini sehingga dikenal dengan sebutan fluida gelap dan diyakini merupakan komponen dari energi gelap dan materi gelap yang memiliki kandungan hampir 90% di alam semesta. Sebagaimana pada pembahasan ini energi gelap sebagai fluida barotropik. Fluida barotropik merupakan fluida di mana tekanan fluida merupakan fungsi dari densitas energi fluida saja (Perkovi & Štefancic˘, 2020).

Berdasarkan persamaan (2.76) yang menjelaskan mengenai kuadrat kecepatan suara diperoleh sebagai berikut

$$v_s^2 = \frac{dP}{d\rho}$$

Di mana v_s^2 adalah kuadrat kecepatan suara, P adalah tekanan, dan ρ adalah densitas energi

Diperlukan diferensial dari tekanan dan densitas energi berdasarkan persamaan di atas. Dari persamaan densitas energi yang telah ditemukan akan daperoleh diferensialnya sebagai berikut

$$\dot{\rho}_D = \frac{3c^2}{8\pi R[1+z]^8}\left(2\pi\delta\frac{R}{\delta}(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}-1}[1+z]^5 - 4[1+z]^3\left[(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}}-1\right]\right)$$

Persamaan diferensial pada tekanan juga didapatkan dengan hasil tekanan yang telah diperoleh pada persamaan (3.21)

$$P_D = \frac{c^2}{8\pi R[1+z]^4}\left(\left[(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}}-1\right] - 2\pi\delta\frac{R}{\delta}(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}-1}[1+z]^2\right)$$

$$\frac{d}{dt}P_D = \frac{c^2}{8\pi R[1+z]^4}\left(\left[(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}}-1\right] - 2\pi\delta\frac{R}{\delta}(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}-1}[1+z]^2\right)$$

$$\frac{d}{dt}P_D = \frac{c^2}{8\pi R}\frac{d}{dt}\frac{1}{[1+z]^4}\left(\left[(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}}-1\right] - 2\pi\delta\frac{R}{\delta}(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}-1}[1+z]^2\right)$$

$$\dot{P_D} = \frac{c^2}{8\pi R}\frac{1}{[1+z]^8}\Bigg([1+z]^4\Bigg\{2\pi\delta[1+z]\frac{R}{\delta}(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}-1}$$

$$-2\pi\delta\frac{R}{\delta}\Bigg[2[1+z](1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}-1}$$

$$+2\pi\delta\left(\frac{R}{\delta}-1\right)[1+z]^2(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}-2}\Bigg]\Bigg\}$$

$$-4[1+z]^3\left(\left[(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}}-1\right]\right.$$

$$\left.-2\pi\delta\frac{R}{\delta}(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}-1}[1+z]^2\right)\Bigg)$$

$$\dot{P_D} = \frac{c^2}{8\pi R}\frac{1}{[1+z]^8}\Bigg(2\pi\delta[1+z]^5\frac{R}{\delta}(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}-1}$$

$$-2\pi\delta\frac{R}{\delta}[1+z]^4\Bigg[2[1+z](1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}-1}$$

$$+2\pi\delta\left(\frac{R}{\delta}-1\right)[1+z]^2(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}-2}\Bigg]$$

$$-4[1+z]^3\left(\left[(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}}-1\right]\right.$$

$$\left.-2\pi\delta\frac{R}{\delta}(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}-1}[1+z]^2\right)\Bigg)$$

$$\dot{P_D} = \frac{c^2}{8\pi R}\frac{1}{[1+z]^8}\Bigg(2\pi\delta[1+z]^5\frac{R}{\delta}(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}-1}$$

$$-4\pi\delta\frac{R}{\delta}[1+z]^5(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}-1}$$

$$-4\pi^2\delta^2\left(\frac{R}{\delta}-1\right)[1+z]^7(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}-2}$$

$$-4[1+z]^3\left[(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}}-1\right]$$

$$+8\pi\delta\frac{R}{\delta}(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}-1}[1+z]^5\Bigg)$$

$$\dot{P_D} = \frac{c^2}{8\pi R}\frac{1}{[1+z]^8}\Big(6\pi\delta[1+z]^5\frac{R}{\delta}(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}-1}$$

$$-4\pi^2\delta^2\left(\frac{R}{\delta}-1\right)[1+z]^7(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}-2}$$

$$-4[1+z]^3\left[(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}}-1\right]\Big)$$

$$\dot{P_D} = \frac{c^2}{8\pi R}\frac{1}{[1+z]^8}[1+z]^3\Big(6\pi\delta[1+z]^2\frac{R}{\delta}(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}-1}$$

$$-4\pi^2\delta^2\left(\frac{R}{\delta}-1\right)[1+z]^4(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}-2}$$

$$-4\left[(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}}-1\right]\Big)$$

$$\dot{P_D} = \frac{c^2}{8\pi R}\frac{1}{[1+z]^5}\Big(2\pi\delta[1+z]^2\Big[3(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}-1}\frac{R}{\delta}$$

$$-2\pi\delta\left(\frac{R}{\delta}-1\right)[1+z]^2(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}-2}\Big]$$

$$-4\left[(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}}-1\right]\Big)$$

Diperoleh persamaan derajat kecepatan suara adalah

$$v_s^2 = \frac{\dot{P_D}}{\dot{\rho}_D}$$

$$v_s^2$$

$$= \frac{c^2}{8\pi R}\frac{1}{[1+z]^5}\Big(2\pi\delta[1+z]^2\Big[3(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}-1}\frac{R}{\delta}$$

$$-2\pi\delta\left(\frac{R}{\delta}-1\right)[1+z]^2(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}-2}\Big]-4\left[(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}}-1\right]\Big)$$

$$\times\frac{1}{\frac{3c^2}{8\pi R[1+z]^8}\left(2\pi\delta\frac{R}{\delta}(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}-1}[1+z]^5-4[1+z]^3\left[(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}}-1\right]\right)}$$

$$v_s^2$$

$$= \frac{c^2}{8\pi R}\frac{1}{[1+z]^5}\left(2\pi\delta[1+z]^2\left[3(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}-1}\frac{R}{\delta}\right.\right.$$

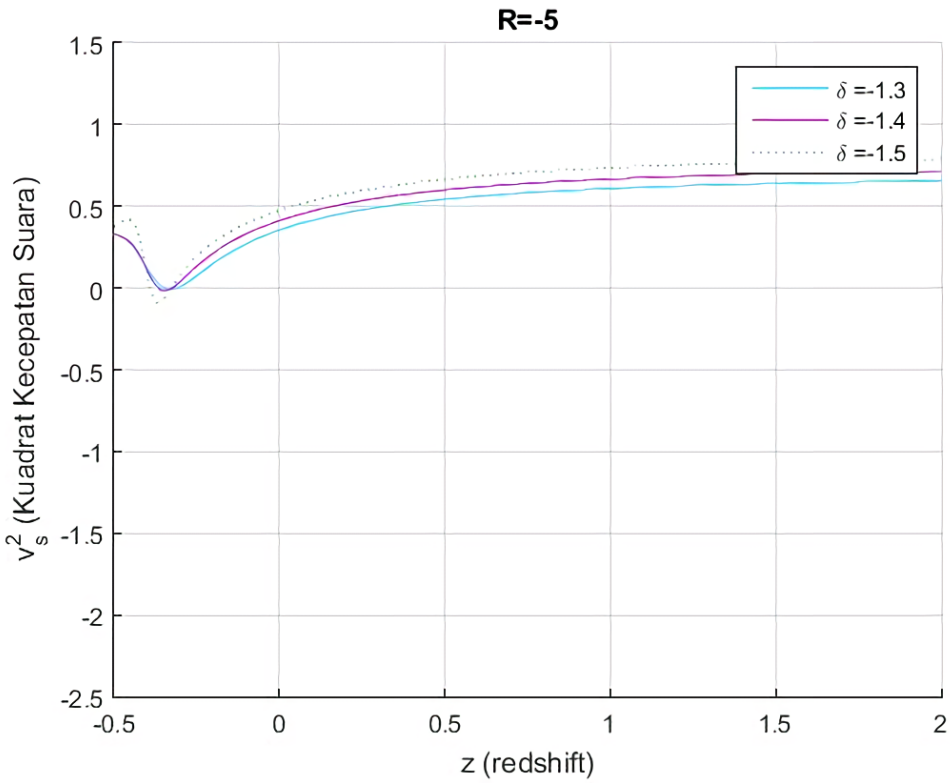
$$\left.\left.-2\pi\delta\left(\frac{R}{\delta}-1\right)[1+z]^2(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}-2}\right]-4\left[(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}}-1\right]\right)$$

$$\times\frac{1}{\frac{3c^2}{8\pi R[1+z]^5}\left(2\pi\delta\frac{R}{\delta}(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}-1}[1+z]^2-4\left[(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}}-1\right]\right)}$$

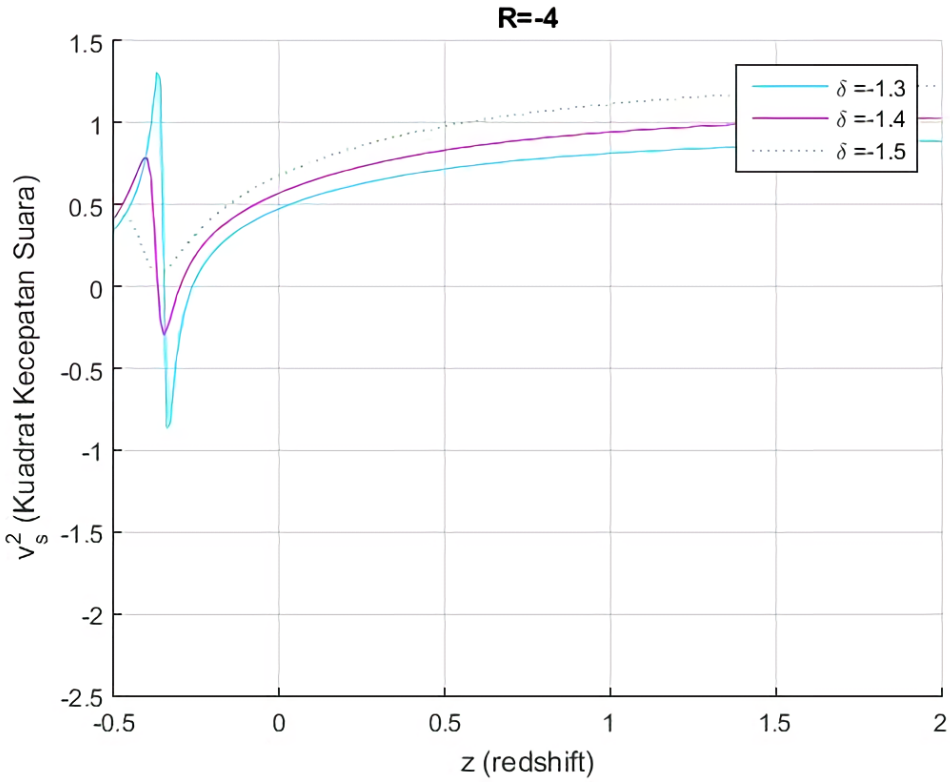
$$\begin{aligned} v_s^2 = \Bigg(2\pi\delta[1+z]^2 \Bigg[&3(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}-1}\frac{R}{\delta} \\ &-2\pi\delta\left(\frac{R}{\delta}-1\right)[1+z]^2(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}-2}\Bigg] \\ &-4\left[(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}}-1\right]\Bigg) \\ &\times\frac{1}{3\left(2\pi\delta\frac{R}{\delta}(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}-1}[1+z]^2-4\left[(1+\pi\delta[1+z]^2)^{\frac{R}{\delta}}-1\right]\right)} \end{aligned}$$

(3.36)

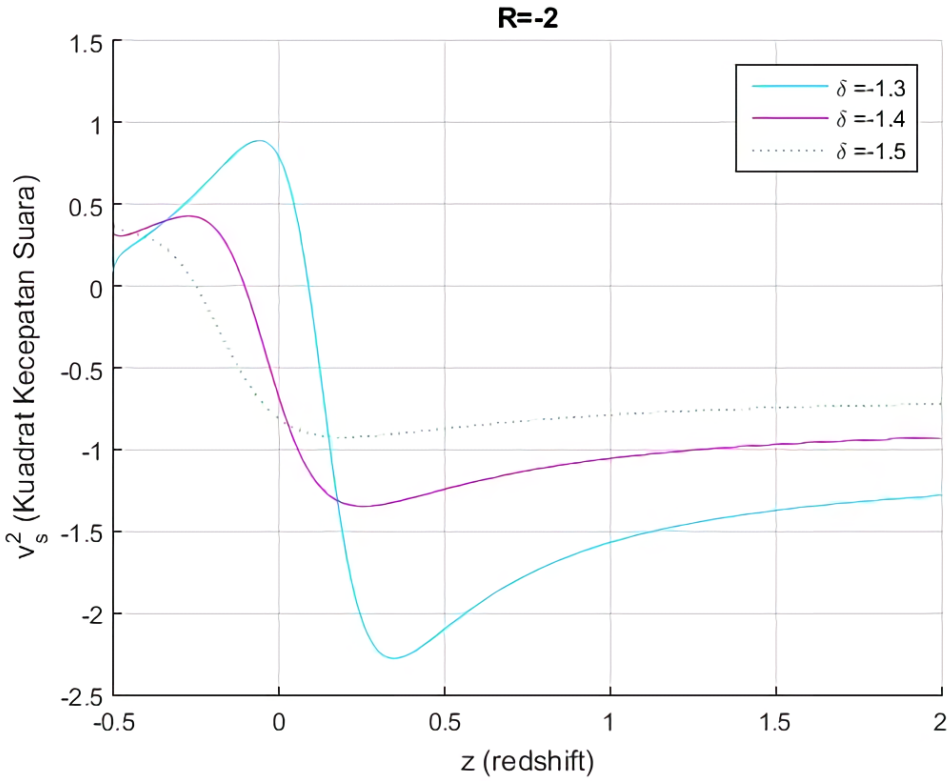
Berdasarkan hasil kuadrat kecepatan suara yang diperoleh dapat diproyeksikan ke dalam grafik sebagai berikut


R=-5
δ =-1.3
δ =-1.4
δ =-1.5
v_s^2 (Kuadrat Kecepatan Suara)
z (redshift)
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

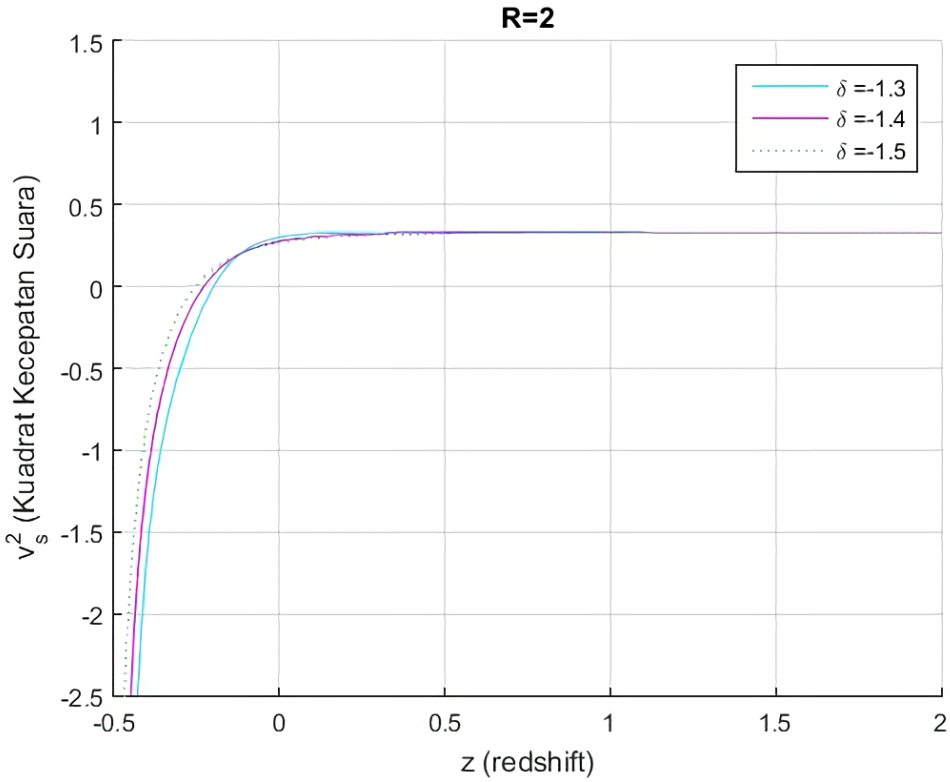
(a)


R=-4
δ =-1.3
δ =-1.4
δ =-1.5
v_s^2 (Kuadrat Kecepatan Suara)
z (redshift)
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

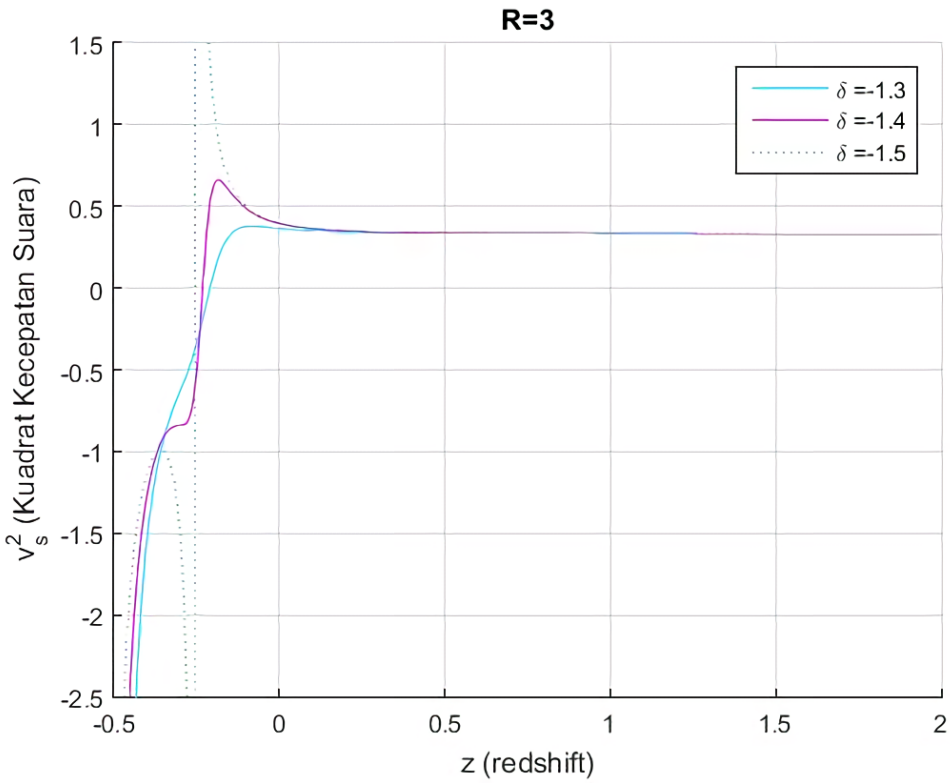
(b)


R=-2
δ =-1.3
δ =-1.4
δ =-1.5
v_s^2 (Kuadrat Kecepatan Suara)
z (redshift)
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

(c)

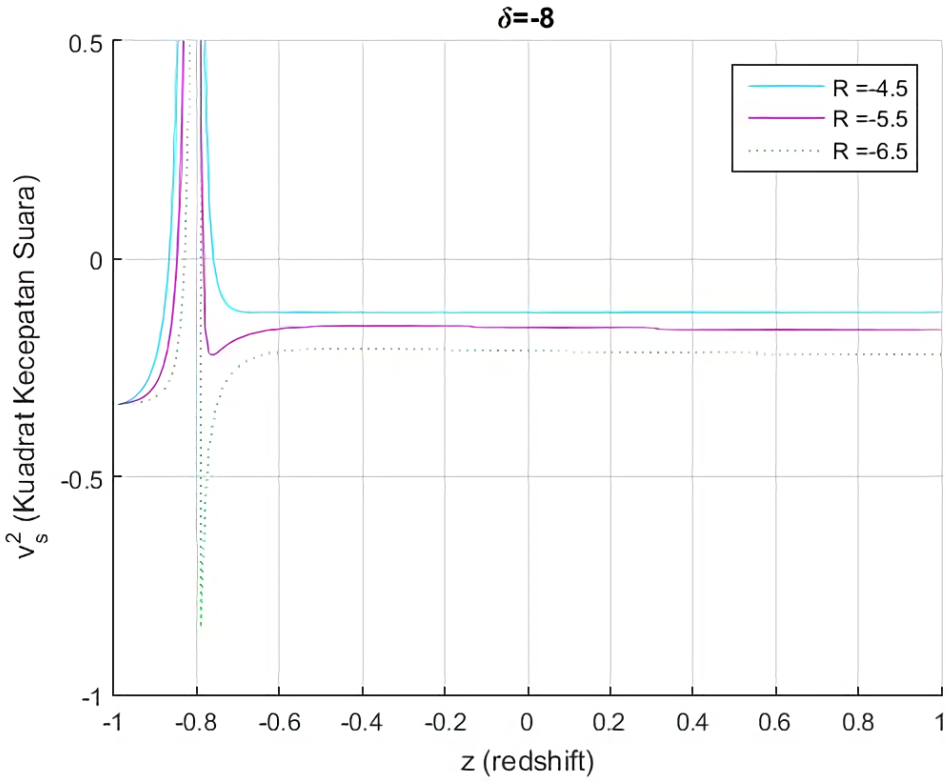

R=2
δ =-1.3
δ =-1.4
δ =-1.5
v_s^2 (Kuadrat Kecepatan Suara)
z (redshift)
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

(d)

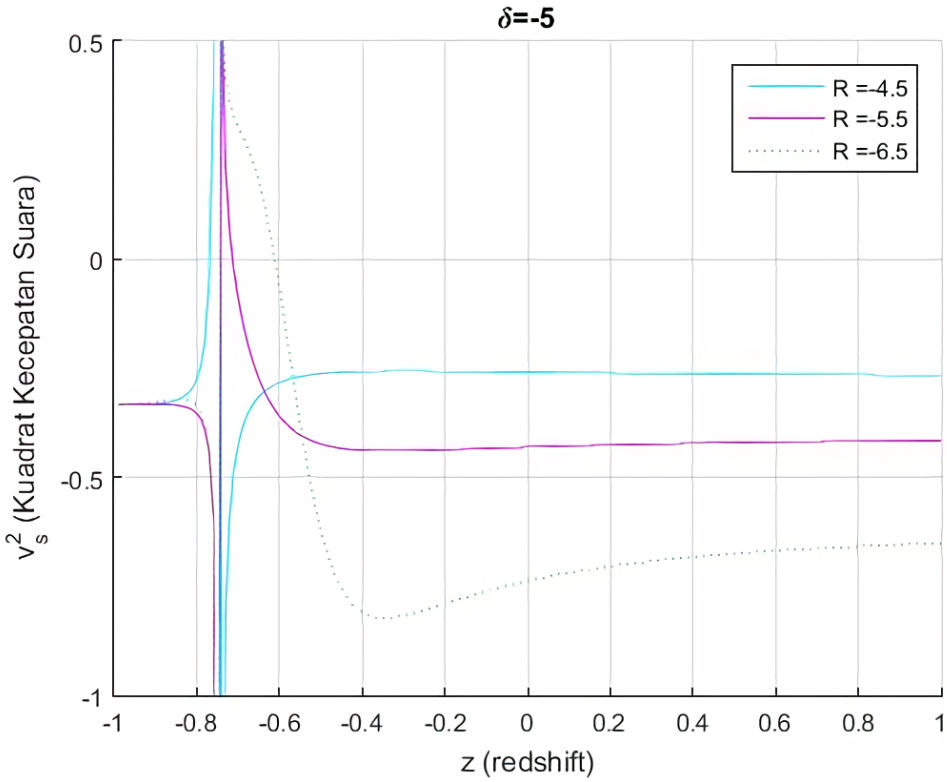


(e)

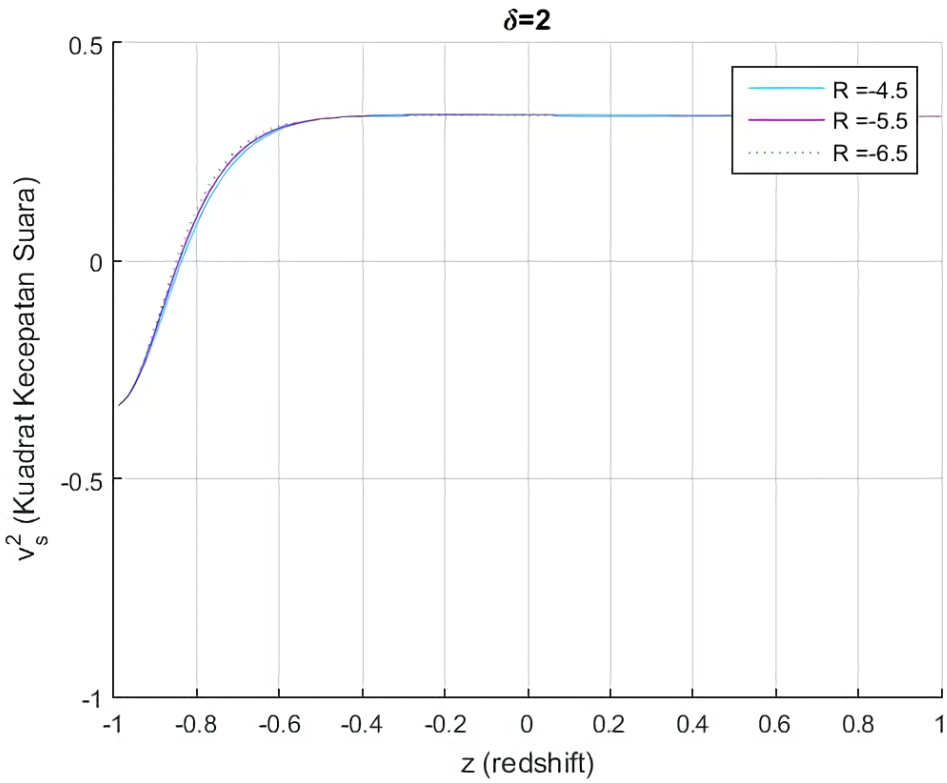
Gambar 3. 5 Grafik parameter kuadrat kecepatan suara (v_s^2) terhadap pergeseran merah (z): a) R=-5; b) R=-4; c) R=-2; d) R=2; R=3. Mengetahui nilai $c = 1;\ H_0 = 67{,}9(Km/s)/Mpc$ dengan $\delta = -1{,}3;\ -1{,}4;\ -1{,}5$


δ=-8
R =-4.5
R =-5.5
R =-6.5
v_s^2 (Kuadrat Kecepatan Suara)
z (redshift)
0.5
0
-0.5
-1
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

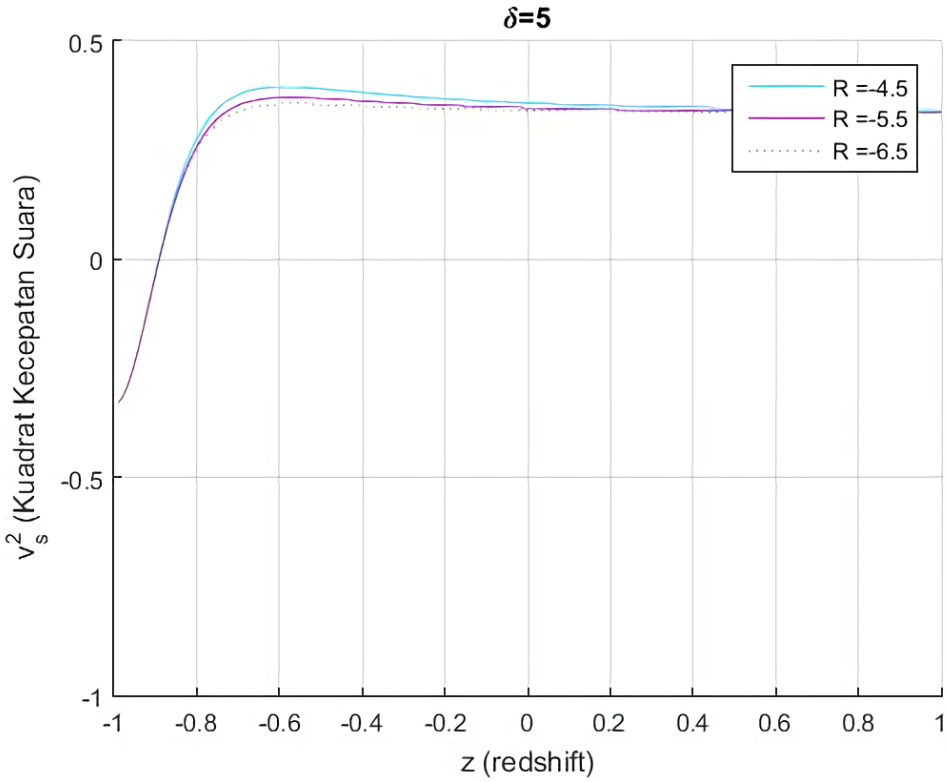
(a)


δ=-5
R =-4.5
R =-5.5
R =-6.5
v_s^2 (Kuadrat Kecepatan Suara)
z (redshift)
0.5
0
-0.5
-1
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

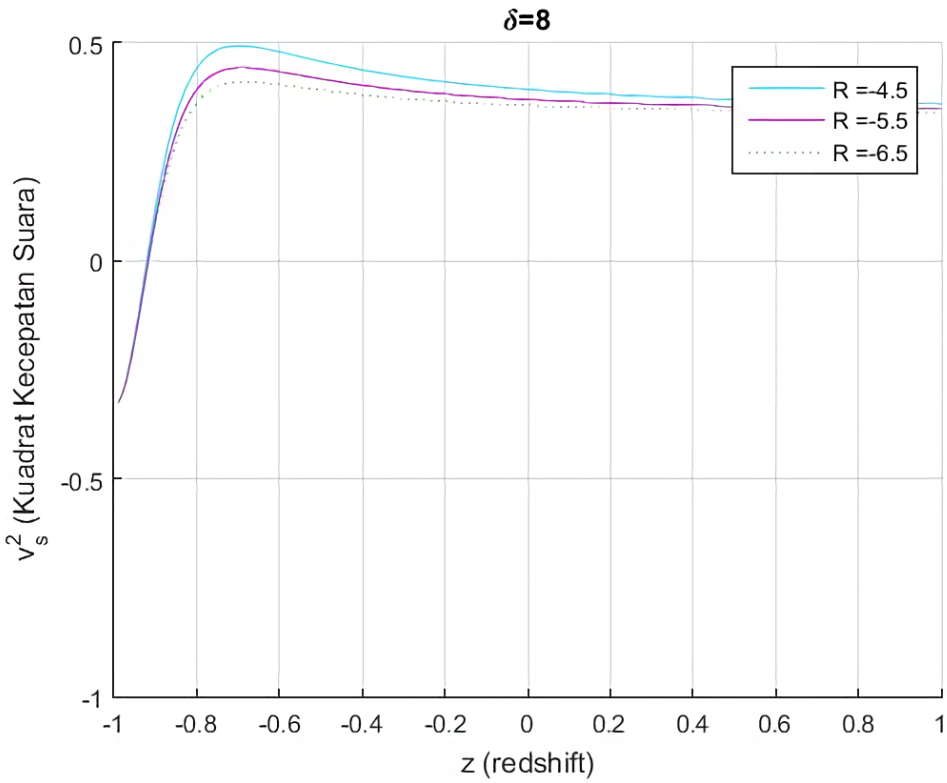
(b)


δ=2
R =-4.5
R =-5.5
R =-6.5
v_s^2 (Kuadrat Kecepatan Suara)
z (redshift)
0.5
0
-0.5
-1
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

(c)


δ=5
R =-4.5
R =-5.5
R =-6.5
v_s^2 (Kuadrat Kecepatan Suara)
z (redshift)
0.5
0
-0.5
-1
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

(d)



(e)

Gambar 3. 6 Grafik parameter kuadrat kecepatan suara (v_s^2) terhadap pergeseran merah (z): a) δ=-8; b) δ=-5; c) δ=2; d) δ=5; δ=8. Mengetahui nilai $c = 1$; $H_0 = 67{,}9(Km/s)/Mpc$ dengan $R = -4{,}5;\ -5{,}5;\ -6{,}5$

Parameter Kuadrat Kecepatan Suara merupakan salah satu parameter yang digunakan sebagai indikasi kestabilan suatu sistem dengan batas $0 \leq v_s^2 \leq 1$. Hal ini sebagai pengertian terhadap fluida sendiri di mana sutau sistem akan stabil ketika berada diantara batasan tersebut karena mengindikasikan adanya fluida yang mampu sebagai medium untuk kecepatan suara karena suara tidak akan diterima jka tidak ada medium yang dilewatinya. Begitu pula apabila melebihi dari satu maka hal ini melanggar bahwasanya tidak ada kecepatan yang lebih tinggi dibandingkan dengan kecepatan suara, karena kecepatan suara diindikasikan sebagai $c = 1$ (Perkovi & Štefancic˘, 2020).

3.3 Pembahasan

Parameter-parameter yang dicari guna untuk mengamati apakah dengan model ini mampu menjelaskan apakah alam semesta mengalami ekspansi. Ketiga parameter tidak lepas dengan pergeseran merah, hal ini didasarkan pada pengamatan Hubble dengan frekuensi akan semakin kecil dengan semakin besarnya jarak dan panjang gelombang akan semakin besar, begitu sebaliknya pada pergeseran biru. Sebagaimana misal pada ranah galaksi apabila suatu galaksi memancarkan frekuensi yang semakin kecil maka menunjukkan semakin besarnya jarak yang terbentuk. Perubahan pergeseran merah (jarak) menunjukkan perubahan pada tiap komponen di dalamnya baik energinya (tekanan dan densitas energi) maupun kerapatan yang dimiliki di alam semesta. Berdasarkan bukti dari pencarian Supernova , percobaan WMAP, CMBR, LSS, dan dan pengukuran BAO selama dua dekade ini menunjukkan percepatan kosmologi berekspansi (Solanki et al., 2022). Jarak yang terbentuk dari pengamat dengan objek pastinya juga dipengaruhi oleh segala hal yang terkandung dalam alam semesta, sehingga pergeseran merah yang terjadi merupakan hasil dari keadaan di dalam alam semesta itu sendiri sebagaimana perilaku alam semesta yang berekspansi dan dipercepat. Fenomena ini disebabkan oleh energi yang bertolak belakang dengan energi grafitasi yang ada. Oleh karena itu, energi gelap mendorong perluasan pada alam semesta sehingga terindikasikan dengan pergeseran merah yang ditangkap oleh pengamat. Berdasarkan grafik yang terbentuk dari ketiga parameter menunjukkan kestabilan ketika δ sebagai variabel tetap dan bebasnya pada parameter R.

Kestabilan suatu sistem ditentukan berdasarkan parameter v_s^2 diketahui mencapai ketabilan ketika δ = 2; 5; 8 sebagaimana pada parameter densitas ketika δ = 2; 5; 8 menunjukkan penurunan nilai densitas yang menunjukkan alam semesta

berekspansi, kemudian pada parameter q ketika δ = 2; 5; 8 menunjukkan pada fase perlambatan yang semakin menurun ketika z sekitar berada pada -0,9 dan terus mengalami kestabilan pada q = 0,5. Dari beragam variasi dalam parameter bebas R dan δ yang menunjukkan kestabilan dan fasenya lebih banyak ketika parameter bebas δ sebagai variabel tetap dan R sebagai variabel bebasnya.

Pemilihan nilai pada parameter R dan δ didasarkan pada pengertian parameter bebas dapat ditemukan dengan melakukan percobaan dan mengambil hasil sesuai yang diinginkan atau jika berdasarkan pengamatan ini disesuiakan dengan hasil pengamatan yang di mana alam semesta mengalami ekspansi. Sedangkan pemilihan rentang pada pergeseran merah didasarkan pada hasil pengamatan yang diperoleh berdasarkan pada data yang diperoleh dari sampel Pantheon yang terdiri dari 1048 Supernova tipe Ia berada pada rentang $0{,}01 < z < 2{,}3$ (Solanki et al., 2022) yang juga disesuikan dengan hasil model yang dibuat agar mendapatkan model yang sesuai.

Parameter densitas (Ω_D) yang diperoleh dari proyeksi grafiknya dengan nilai parameter bebas yang diberikan menunjukkan kestabilan atau konsisten sama, yakni mengalami penurunan sepanjang pergeseran merah lebih tepatnya ketika $\delta = -8; -5; 2; 5; 8$ baik ketika R = $-4{,}5; -5{,}5; -6{,}5$. Hal ini menunjukkan semakin kecilnya nilai densitas di alam semesta menunjukkan alam semesta semakin mengembang atau perluasan volume. Penurunan nilai densitas ini menunjukkan kesesuaian dengan pengamatan yang dilakukan selama dua dekade ini di mana alam semesta mengalami ekspansi (Solanki et al., 2022). Sedangkan ketika R = $-5; -4; -2; 2; 3$ dengan $\delta = -1{,}3; -1{,}4; -1{,}5$ menunjukkan ketidakkonsistenannya baik ketika R bernilai positif maupun negatif. Ketika R bernilai negatif grafik

menunjukkan penurunan hingga mendekatai nol ketika $-1 < z \leq -0{,}8$. Sedangkan ketika R bernilai positif mengalami kenaikan maksimal lalu penurunan hingga mendekati nol ketika $-0{,}4 \leq z < -0{,}5$. Hal ini jika dibandingkan berdasarkan kosmologi Planck 2013 densitas pada energi gelap (konstanta kosmologi) menunjukkan $\Omega_\Lambda = 0{,}6928$ (Aricò et al., 2020) maka berdasarkan grafik yang didapatkan lebih mendekati ketika $\delta = -8, -5, 2, 5, 8$ baik ketika R = $-4{,}5; -5{,}5; -6{,}5$ keseluruhannya mengalami pada titik sekitar rentang $\Omega_\Lambda = 0{,}6928$ hingga mendekati nol ketika pada $0{,}5 < z$, kecuali pada $\delta = -5$. Jika ditarik secara garis besar perubahan densitas diperoleh menunjukkan kesesuaian yakni mengalami penurunan densitas sepanjang pergeseran merah, di mana diketahui bahwasanya total densitas alam semesta yang memenuhinya akan terus menurun sepanjang berubahnya fase. Awal fase menunjukkan penurunan densitas hingga densitas mendekati nol ketika alam semesta berada pada fase saat ini (Liddle, 2015).

Parameter perlambatan kosmik menujukkan fase yang dialami oleh alam semesta dan merupakan salah satu parameter untuk mengetahui tingkat percepatan pada alam semesta. Berdasarkan hasil penelitian yang didapatkan dengan dimanifestasikan berupa grafik dapat kita ketahui bagaimana perilaku alam semesta terhadap model yang telah dikaji. Terdapat dua perlakuan dengan beberapa variasi dalam mengujinya ke bentuk grafik. Pertama adalah ketika R = $-5; -4; -2; 2; 3$ dengan $\delta = -1{,}3; -1{,}4; -1{,}5$ yang menunjukkan bentuk yang beragam. Ketika R =-5 menunjukkan fase perlambatan kecuali pada $\delta = -1{,}5$ ketika R=-4 menunjukkan fase percepatan dan perlambatan; ketika R = -2 menunjukkan fase percepatan dan perlambatan; ketika R = 2 dan 3 menunjukkan fase perlambatan yang menurun kecuali ketika R = 3 pada $\delta = -1{,}4$ menunjukkan fase percepatan

dan perlambatan. Dari kelima variasi R yang diberikan akan mengalami konstan atau perubahan menjadi q = 0,5 tetapi tidak pada transisi z yang sama, sebagian besar menunjukkan perubahan menjadi q =0.5 ketika z < 0. Bentuk yang kedua, yakni ketika $\delta = -8; -5; 2; 5; 8$ dengan R = $-4{,}5; -5{,}5; -6{,}5$ menunjukkan fase yang sama yakni fase perlambatan dan semakin lama akan bertransisi menjadi q = 0,5 yang rata-rata terletak pada pergeseran merah z < 0. Sedangkan pada kasus model ΛCDM nilai parameter perlambatan saat ini adalah $q_0 \approx -0{,}56$ dengan pergeseran merah transisi adalah $z_t \approx 0{,}66$ (Solanki et al., 2022). Secara umum berdasarkan data observasi alam semesta mengalami percepatan yang ditandai dengan $q < 0$ terhadap perubahan waktu di mana menunjukkan transisi pada $q \leq -0{,}5$ (Yerokhin, 2015). Oleh karena itu, penelitian ini pada parameter perlambatan menunjukkan ketidak sesuaian dengan teori. Banyak faktor yang terjadi, diantaranya adalah dalam penentuan parameter bebas kurang tepat baik pada parameter bebas R dan δ, karena parameter bebas merupakan variabel matematis yang tidak dapat diprediksi secara pasti (Wikipedia, 2022) dan faktor lain juga bisa muncul akibat dalam penentuan salah satu variabel perubahan dalam persamaan yang digunakan tidak sesuai dengan model ini sehingga menunjukkan hasil demikian.

3.4 Integrasi Al-Qur'an

Apabila berdasarkan dengan penelitian ini, integrasi merupakan bukti nyata kebesaran Allah akan hasil penelitian yang telah dibuktikan oleh para ilmuwan. Integrasi ini mampu memberikan pemahaman dan pengetahuan akan kebesaran Allah atas ciptaannya dan pengetahuannya.

Alam semesta sangat luas adanya. Tiada yang mampu menciptakannya selain Allah, sebagaimana pada firman AllahSWT.:

اَوَلَمْ يَرَ الَّذِيْنَ كَفَرُوْٓا اَنَّ السَّمٰوٰتِ وَالْاَرْضَ كَانَتَا رَتْقًا فَفَتَقْنٰهُمَا ۗ وَجَعَلْنَا مِنَ الْمَآءِ كُلَّ شَيْءٍ

حَيٍّ ۗ اَفَلَا يُؤْمِنُوْنَ ۝

"Dan apakah orang-orang kafir tidak mengetahui bahwa langit dan bumi keduanya dahulu menyatu kemudian Kami pisahkan antara keduanya; dan Kami jadikan segala sesuatu yang hidup berasal dari air; maka mengapa mereka tidak beriman?" (QS. Al-Anbiya':30)

Kata رَتْقًا (*ratqan*) dari segi bahasa berarti terpadu, sedangkan kata فَفَتَقْنٰهُمَا (*fataqnahuma*) berasal dari kata فَتَقْ (*fataqa*) berarti terbelah atau terpisah. Berdasarkan pendapat para ilmuwan, adalah ayat ini merupakan salah satu mukjizat Al-Quran yang mengungkapkan peristiwa terbentuknya alam semesta. Menurut pakar penyusun tafsir al-Muntakhab, dipahami bahwa bumi dan langit pada dasarnya satu kesatuan seperti membentuk satu massa. Sebagaimana pada ilmuwan mengungkapkan peristiwa Bigbang, sebagaimana ayat ini berfirman bahwasanya langit dan bumi adalah satu kesatuan kemudian dipisahkan dari keduanya dengan adanya ledakan keras sehingga terpecah-pecah di alam raya segala materinya (M. Quraish Shihab, 2002a). Berdasarkan hal ini, suatu ledakan akan memiliki tekanan dan energi keluar yang besar. Jika ditekankan pada kondisi alam semesta saat ini maka kemungkinan dengan peristiwa Bigbang ini masih memiliki energi dan tekanan keluar yang mampu mendorong pengembangan alam semesta.

Pengembangan yang terjadi juga termaktub pada firman Allah SWT. yang menjelaskan secara gamblang perluasan ini, yakni sebagai berikut:

وَالسَّمَآءَ بَنَيْنٰها بِاَيْدٍ وَّاِنَّا لَمُوْسِعُوْنَ ۞

"Dan langit Kami bangun dengan kekuasaan (Kami), dan Kami benar-benar meluaskannya" (Q.S. Adz-Dzariyat: 47)

Ayat ini merupakan ayat yang menjelaskan kekuasaan Allah. berdasarkan salah satu kalimat yang terdapat pada ayat ini, yakni وَّاِنَّا لَمُوْسِعُوْنَ (sesungguhnya Kami benar-benar Maha Luas). Menurut Tim Penyusun Tafsir Al-Muntakhab terdiri dari sekian pakar Mesir Kontemporer, bahwa mengisyaratkan rahasia ilmiah, di mana menunjukkan betapa luasnya alam semesta (M. Quraish Shihab, 2002b). Perluasan (pengembangan) alam semesta merupakan salah satu perilaku yang diteliti berdasarkan pada penelitian ini. Terdapat beberapa parameter yang mampu menjelaskan hal pengembangan alam semesta, yakni beberapa diantaranya adalah parameter densitas, parameter perlambatan, dan parameter kuadrat kecepatan suara sebagai penentu kestabilan pada suatu sistem.

Salah satu hasil penelitian kami yang diperoleh menunjukkan tingkat parameter densitas mengalami penurunan, di mana mengindikasikan bahwasanya terjadi pengembangan alam semesta. Di sisi lain, parameter perlambatan yang menjelaskan mengenai fase percepatan yang terjadi menunjukkan kenaikan percepatan di fase akhirnya, meskipun fase awal menunjukkan fase perlambatan atau penurunan percepatan sepanjang pergeseran merah.

Segala hal yang ada merupakan ciptaan Allah dengan pengukuran tepat dan sesuai, sebagaimana pada firman Allah yang mengatakan:

اِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنٰهُ بِقَدَرٍ ۞

"Sungguh, Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran" (QS. AL-Qamar: 49)

Kadar penciptaan Allah memiliki komposisi masing-masing dengan memiliki sifat yang mampu mempengaruhi segala hal di sekitarnya. Sebagaimana pada alam semesta yang memiliki fluida gelap berupa energi gelap memiliki kandungan yang dominan sekitar 70%. Jumlah ini memiliki perannya sendiri bagi keberlangsungan alam semesta. tidak ada yang tahu alam semesta ini akan berakhir mengembang selamanya atau runtuh pada satu inti. Oleh karena itu, segala hal ciptaan Allah memiliki kadar yang setimbang. Hal ini dijelaskan dalam Al-Quran sebagaimana berikut:

الَّذِيْ خَلَقَ سَبْعَ سَمٰوٰتٍ طِبَاقًاۗ مَا تَرٰى فِيْ خَلْقِ الرَّحْمٰنِ مِنْ تَفٰوُتٍۗ فَارْجِعِ الْبَصَرَ ۙ هَلْ تَرٰى مِنْ فُطُوْرٍ ۝
ثُمَّ ارْجِعِ الْبَصَرَ كَرَّتَيْنِ يَنْقَلِبْ اِلَيْكَ الْبَصَرُ خَاسِئًا وَّ هُوَ حَسِيْرٌ ۝

"yang menciptakan tujuh langit berlapis-lapis. Tidak akan kamu lihat sesuatu yang tidak seimbang pada ciptaan Tuhan Yang Maha Pengasih. Maka lihatlah sekali lagi, apakah kamu lihat sesuatu yang cacat. Kemudian ulangi pandangan(mu) sekali lagi, niscaya pandanganmu akan kembali kepadamu tanpa menemukan cacat dan ia (pandanganmu) dalam keadaan letih." (QS. Al-Mulk: 3-4)

Ayat ini menunjukkan pada kalimat مَا تَرٰى فِيْ خَلْقِ الرَّحْمٰنِ مِنْ تَفٰوُتٍ (*Tidak akan kamu lihat sesuatu yang tidak seimbang pada ciptaan Tuhan Yang Maha Pengasih*). Oleh karena itu, pengembangan atau perluasan alam semesta akan memiliki kesetimbangan antar parameter penyusun lain yang ada di alam semesta dan memiliki kesinambungan diantaranya. Sebagaimana pengembangan alam semesta juga menyebabkan perubahan laju perluasan terhadap waktu. Hal ini dapat dimaknai bahwasanya Allah menciptakan segala sesuatu sesuai ukurannya dan memiliki porsi yang seimbang dari satu hal dengan hal lainnya. Sebagaimana Allah dalam menentukan komposisi yang terkandung di alam semesta pasti memiliki

kesinambungan terhadap parameter-parameter lain seperti pada penelitian ini. Dengan menurunnya tingkat densitas yang dimiliki pada energi gelap menyebabkan alam semesta mengalami perubahan perluasan. Allah memutuskan dalam menciptakan jumlah densitas yang dimiliki alam semesta pastinya memiliki tujuan yang benar dan baik, begitu juga akan menyebabkan efek (ekspansi) yang pastinya demi kemaslahatan ciptaan-Nya. Tidak ada yang tahu akhir dari dunia ini, yang ada manusia diperintahkan untuk terus belajar dari firman dan sunnah-Nya serta alam-Nya untuk selalu bersyukur dan berikhtiar.

BAB IV

PENUTUP

4.1. Kesimpulan

Berdasarkan penelitian yang mengangkat topik Studi Energi Gelap Holografik Menggunakan Model Perumuman Entropi Tsallis dan Renyi dengan beberapa tujuan penelitian, telah mendapatkan hasil berdasarkan tujuan yang diajukan dalam penelitian ini.

Formalisme model entropi perumuman yang diperoleh digunakan pada seluruh parameter yang ada, karena entropi merupakan komponen dasar dalam mengetahui keadaan mikro dalam alam semesta. berdasarkan model entropi Sharma-Mittal diketahui bagaimana posisinya mampu menunjukkan alam semesta dipercepat dengan mempertimbangkan hasil drai parameter lain. Apabila berdasarkan parameter densitas, menunjukkan bahwa parameter densitas menunjukkan kesesuaian terhadap teori dan hasil observasi yang ada yakni penurunan nilai densitas yang menunjukkan ekspansi alam semesta.

Parameter perlambatan menunjukkan perilaku pada fase akhir yakni penurunan perlambatan kemudian mendekati nilai 0,5 selama perubahan pergeseran merah, tapi dengan penurunan perlambatan ini tidak menunjukkan kesesuaian terhadap teroi maupun hasil observasi. Hal ini disebabkan, kondisi alam semesta yang semestinya terjadi yakni dipercepat atau bernilainya negatif pada parameter perlambatan.

Parameter kuadrat kecepatan suara yang diperoleh menunjukkan tidak stabil baik pada variasi paraemeter bebas R dan δ yang diberikan ketika pada fase awal,

dan kemudian mayoritas mengalami kestabilan ketika pada fase akhirnya yang ditunjukkan ketika $-0{,}5 < z < 0$. Kestabilan terjadi hanya pada R=-5 dengan δ=$-1{,}3;-1{,}4;-1{,}5$. Jika ditarik berdasarkan kestabilan pada titik ini maka pada parameter densitas menunjukkan penurunan nilai yang sesuai dengan observasi dan teori, sedangkan pada parameter perlambatan menunjukkan fase percepatan di awal dan fase perlambatan di akhir fase.

Berdasarkan hasil penelitian yang diperoleh menunjukkan bahwasanya model energi gelap holografik menggunakan formalisme perumuman entropi Tsallis dan Renyi menunjukkan kesesuaian terhadap alam semesta yang berekspansi dan dipercepat hanya pada parameter densitas berdasarkan awal fase hingga akhir fase. Sedangkan pada parameter perlambatan menunjukkan fase percepatan ketika di awal fase saja, serta pada parameter kuadrat kecepatan suara menunjukkan kestabilan hanya pada akhir fase. Hal ini dapat terjadi karena penentuan nilai parameter bebas R dan δ yang kurang tepat, terdapat komponen lain yang seharusnya dimasukkan tapi tidak diketahui oleh penulis, dan juga kemungkinan terdapat batasan tertentu dalam memplot persamaan ke dalam bentuk grafik.

4.2. Saran

Penelitian ini merupakan salah satu dari model ekpansi alam semesta di mana energi gelap sebagai pokok bahasan yang menyebabkannya. Model ini bukanlah hal baru di bidang kosmologi, melainkan belum banyak para astronomer atau fisikawan Indonesia yang membahas detail mengenai model energi gelap ini. Semoga dengan adanya penelitian ini dapat membuka pengetahuan baru bagi pembaca sehingga dapat memahaminya dan mampu menjadi bahan pembahasan untuk selanjutnya dengan beragam cara dan metode demi memahami perilaku pada alam semesta kita.

DAFTAR PUSTAKA

Al Mamon, A., & Bamba, K. (2018). Observational constraints on the jerk parameter with the data of the Hubble parameter. *European Physical Journal C*, *78*(10), 1–8. https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-018-6355-2

Amirhashchi, H., Pradhan, A., Saha, B., & Branch, M. (2011). *An Interacting Two-Fluid Scenario for Dark Energy in FRW Universe*. 1–11.

Ananthanarayan, B., & Mohanty, S. (2021). The accelerating universe: evidence and theories. *The European Physical Journal*, *230*(9), 2051–2053. https://doi.org/10.1140/epjs/s11734-021-00259-x

Anjamrooz, S. H., Mcconnell, D. J., & Azari, H. (2011). The cellular universe: A new cosmological model based on the holographic principle. *International Journal of Physical Sciences*, *6*(9), 2175–2183. https://doi.org/10.5897/IJPS10.461

Aricò, G., Angulo, R. E., Hernández-Monteagudo, C., Contreras, S., Zennaro, M., Pellejero-Ibañez, M., & Rosas-Guevara, Y. (2020). Modelling the large-scale mass density field of the universe as a function of cosmology and baryonic physics. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, *495*(4), 4800–4819. https://doi.org/10.1093/MNRAS/STAA1478

Beck, C. (2009). Generalised information and entropy measures in physics. *Contemporary Physics*, *50*(4), 495–510. https://doi.org/10.1080/00107510902823517

Bousso, R. (2002). The holographic principle. *Reviews of Modern Physics*, *74*(3), 825–874. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.74.825

Buonsante, P., Franzosi, R., & Smerzi, A. (2016). On the dispute between Boltzmann and Gibbs entropy. *Annals of Physics*, *375*, 414–434. https://doi.org/10.1016/j.aop.2016.10.017

Cohen, A. G., Kaplan, D. B., & Nelson, A. E. (1999). Effective field theory, black holes, and the cosmological constant. *Physical Review Letters*, *82*(25), 4971–4974. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.82.4971

Dukkipati, A., Murty, M. N., & Bhatnagar, S. (2005a). *Nongeneralizability of Tsallis Entropy by means of Kolmogorov-Nagumo averages under pseudo-additivity*. *October*, 1–7. http://arxiv.org/abs/math-ph/0505078

Dukkipati, A., Murty, M. N., & Bhatnagar, S. (2005b). Uniqueness of Nonextensive entropy under Renyi's Recipe. *CoRR*, *abs/cs/051*. http://arxiv.org/abs/cs/0511078

Gao, S. (2013). Explaining holographic dark energy. *Galaxies*, *1*(3), 180–191. https://doi.org/10.3390/galaxies1030180

Gautama, S. E. (2020). *Pengantar Teori Relativitas Dan Kosmologi* (Revisi 2.2). Paradoks Softbook Publisher.

Giancoli, D. C. (2014). Fisika Edisi Ketujuh Jilid 1: Prinsip dan Aplikasi. In

Penerbit Erlangga (7th ed.).

Greven, A. (2003). *Entropy*. Princeton University Press.

Ilić, V. M., Korbel, J., Gupta, S., & Scarfone, A. M. (2021). An overview of generalized entropic forms. *Epl*, *133*(5). https://doi.org/10.1209/0295-5075/133/50005

Jawad, A., Bamba, K., Younas, M., Qummer, S., & Rani, S. (2018). Tsallis, Rényi and Sharma-Mittal holographic dark energy models in loop quantum cosmology. *Symmetry*, *10*(11), 1–15. https://doi.org/10.3390/sym10110635

Jawad, A., Butt, S., Rani, S., & Asif, K. (2019). Cosmological aspects of sound speed parameterizations in fractal universe. *European Physical Journal C*, *79*(11). https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-019-7445-5

KBBI. (2021). *Generalisasi: "kamus."* KBBI Online. https://kbbi.web.id/generalisasi

Liddle, A. R. (2015). An Introduction to Modern Cosmology. In *Angewandte Chemie International Edition, 6(11), 951–952.* (Third Edit). John Wiley & Son, Ltd.

Majhi, A. (2017). Non-extensive statistical mechanics and black hole entropy from quantum geometry. *Physics Letters, Section B: Nuclear, Elementary Particle and High-Energy Physics*, *775*, 32–36. https://doi.org/10.1016/j.physletb.2017.10.043

Masi, M. (2005). A step beyond Tsallis and Rényi entropies. *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2005.01.094

Masi, M. (2018). On the extended Kolmogorov-Nagumo information-entropy theory, the q → 1 / q duality and its possible implications for a non-extensive two-dimensional Ising model. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, *377*(1), 67–78. https://doi.org/10.1016/j.physa.2006.11.019

Mazumdar, S., Dutta, S., & Guha, P. (2019). *Sharma-Mittal Quantum Discord*. 1–27. https://doi.org/10.1007/s11128-019-2289-3

Moradpour, H., Ziaie, A. H., & Zangeneh, M. K. (2020). Generalized entropies and corresponding holographic dark energy models. *European Physical Journal C*, *80*(8), 1–7. https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-020-8307-x

Naderi, T., Malekjani, M., & Pace, F. (2015). Evolution of spherical overdensities in holographic dark energy models. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, *447*(2), 1873–1884. https://doi.org/10.1093/mnras/stu2481

Naudts, J., & Czachor, M. (2001). *Generalized thermostatistics and Kolmogorov-Nagumo averages*. *September*, 1–26. http://arxiv.org/abs/cond-mat/0110077

Perkovi, D., & Štefancicˇ, H. (2020). Barotropic fluid compatible parametrizations of dark energy. *The European Physical Journal C*, *80*(629). https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-020-8199-9

Sayahian Jahromi, A., Moosavi, S. A., Moradpour, H., Morais Graça, J. P., Lobo, I. P., Salako, I. G., & Jawad, A. (2018). Generalized entropy formalism and a new holographic dark energy model. *Physics Letters, Section B: Nuclear, Elementary Particle and High-Energy Physics*, *780*, 21–24. https://doi.org/10.1016/j.physletb.2018.02.052

Sears, F. W., & Salinger, G. L. (1982). *Thermodynamics, kinetic theory, and statistical thermodynamics* (Ketiga). Addison-Wesley Publishing Company. http://books.google.com/books?ei=c5aFUKm2GJCk0AXJnIHACA&id=3gRRAAAAMAAJ&pgis=1

Sharma, U. K., & Dubey, V. C. (2020). Exploring the Sharma–Mittal HDE models with different diagnostic tools. *European Physical Journal Plus*, *135*(5), 1–11. https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-020-00411-x

Shihab, M. Quraish. (2002a). *Tafsir Al-Mishbah: Pesan, Kesan, dan Keserasian Al-Qur'an Jilid 8* (Vol. 8). Lentera Hati.

Shihab, M. Quraish. (2002b). *TAFSIR AL-MISHBAH Pesan, Kesan dan Keserasian Al-Qur'an: Jilid 13* (Vol. 13). Lentera Hati.

Shihab, Muhammad Quraish. (2002). *Tafsir Al-Misbah, Pesan, Kesan dan Keserasian Al-Quran: Jilid 6* (Vol. 6). Lentera Hati.

Singpurwalla, N. D., & Lai, B. (2020). What Does the "Mean" Really Mean? *Journal of Cornell University*, 1–10. http://arxiv.org/abs/2003.01973

Solanki, R., De, A., Mandal, S., & Sahoo, P. K. (2022). Accelerating expansion of the universe in modified symmetric teleparallel gravity. *Physics of the Dark Universe*, *36*, 1–10. https://doi.org/10.1016/j.dark.2022.101053

Tsallis, C. (1988). Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics. *Journal of Statistical Physics*, *52*(1–2), 479–487. https://doi.org/10.1007/BF01016429

Tsallis, C. (2022). Entropy. *Encyclopedia MDPI*, *2*, 264–300.

Wang, S., Wang, Y., & Li, M. (2017). Holographic dark energy. *Physics Report, Elsevier*, *696*, 1–57. https://doi.org/10.1016/j.physrep.2017.06.003

Wikipedia. (2022). *Free Parameter*. https://en.wikipedia.org/wiki/Free_parameter

Yerokhin, L. D. a. (2015). *Cosmology in terms of the deceleration parameter. part i*.

Zhai, Z. X., Zhang, T. J., & Liu, W. B. (2011). Constraints on Lambda Λ(t)CDM models as holographic and agegraphic dark energy with the observational Hubble parameter data. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, *2011*(8). https://doi.org/10.1088/1475-7516/2011/08/019

LAMPIRAN

Lampiran A Simbol Christoffel pada Metrik Friedmann-Robertson-Walker

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left(\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}\right)$$

$$\Gamma^{0}_{00} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_0 g_{00} + \partial_0 g_{00} - \partial_0 g_{00}) = \frac{1}{2}\ (\partial_t(1) + \partial_t(1) - \partial_t(1)) = 0$$

$$\Gamma^{0}_{01} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_0 g_{10} + \partial_1 g_{00} - \partial_0 g_{01}) = \frac{1}{2}\ (\partial_t(0) + \partial_r(1) - \partial_t(0)) = 0$$

$$\Gamma^{0}_{02} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_0 g_{20} + \partial_2 g_{00} - \partial_0 g_{02}) = \frac{1}{2}\ (\partial_t(0) + \partial_\theta(1) - \partial_t(0)) = 0$$

$$\Gamma^{0}_{03} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_0 g_{30} + \partial_3 g_{00} - \partial_0 g_{03}) = \frac{1}{2}\ \left(\partial_t(0) + \partial_\phi(1) - \partial_t(0)\right) = 0$$

$$\Gamma^{0}_{10} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_1 g_{00} + \partial_0 g_{01} - \partial_0 g_{10}) = \frac{1}{2}\ (\partial_r(1) + \partial_t(0) - \partial_t(0)) = 0$$

$$\Gamma^{0}_{20} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_2 g_{00} + \partial_0 g_{02} - \partial_0 g_{20}) = \frac{1}{2}\ (\partial_\theta(1) + \partial_t(0) - \partial_t(0)) = 0$$

$$\Gamma^{0}_{30} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_3 g_{00} + \partial_0 g_{03} - \partial_0 g_{30}) = \frac{1}{2}\ \left(\partial_\phi(1) + \partial_t(0) - \partial_t(0)\right) = 0$$

$$\Gamma^{0}_{11} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_1 g_{10} + \partial_1 g_{01} - \partial_0 g_{11}) = \frac{1}{2}\ (\partial_r(0) + \partial_r(0) - \partial_t(-e^{2\alpha})) = \dot{\alpha}\ e^{2\alpha}$$

$$\Gamma^{0}_{12} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_1 g_{20} + \partial_2 g_{01} - \partial_0 g_{12}) = \frac{1}{2}\ (\partial_r(0) + \partial_\theta(0) - \partial_t(0)) = 0$$

$$\Gamma^{0}_{13} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_1 g_{30} + \partial_3 g_{01} - \partial_0 g_{13}) = \frac{1}{2}\ \left(\partial_r(0) + \partial_\phi(0) - \partial_t(0)\right) = 0$$

$$\Gamma^{0}_{20} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_2 g_{00} + \partial_0 g_{02} - \partial_0 g_{20}) = \frac{1}{2}\ (\partial_\theta(1) + \partial_\theta(0) - \partial_t(0)) = 0$$

$$\Gamma^{0}_{21} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_2 g_{10} + \partial_1 g_{02} - \partial_0 g_{21}) = \frac{1}{2}\ (\partial_\theta(1) + \partial_r(0) - \partial_t(0)) = 0$$

$$\Gamma^0_{22} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_2 g_{20} + \partial_2 g_{02} - \partial_0 g_{22}) = \frac{1}{2}\ (\partial_\theta(0) + \partial_\theta(0) - \partial_t(-e^{2\alpha} r^2))$$

$$= \dot{\alpha} e^{2\alpha} r^2$$

$$\Gamma^0_{23} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_2 g_{30} + \partial_3 g_{02} - \partial_0 g_{23}) = \frac{1}{2}\ \big(\partial_\theta(1) + \partial_\phi(0) - \partial_t(0)\big) = 0$$

$$\Gamma^0_{30} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_3 g_{00} + \partial_0 g_{03} - \partial_0 g_{30}) = \frac{1}{2}\ \big(\partial_\phi(1) + \partial_t(0) - \partial_t(0)\big) = 0$$

$$\Gamma^0_{31} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_3 g_{10} + \partial_1 g_{03} - \partial_0 g_{31}) = \frac{1}{2}\ \big(\partial_\phi(0) + \partial_r(0) - \partial_t(0)\big) = 0$$

$$\Gamma^0_{32} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_3 g_{20} + \partial_2 g_{03} - \partial_0 g_{32}) = \frac{1}{2}\ \big(\partial_\phi(0) + \partial_\theta(0) - \partial_t(0)\big) = 0$$

$$\Gamma^0_{33} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_3 g_{30} + \partial_3 g_{03} - \partial_0 g_{33})$$

$$= \frac{1}{2}\ \big(\partial_\phi(0) + \partial_\phi(0) - \partial_t(-e^{2\alpha} r^2 \sin^2\theta)\big) = \dot{\alpha} e^{2\alpha} r^2 \sin^2\theta$$

$$\Gamma^1_{00} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_0 g_{01} + \partial_0 g_{10} - \partial_1 g_{00}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha}}\right)(\partial_t(0) + \partial_t(0) - \partial_r(1)) = 0$$

$$\Gamma^1_{01} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_0 g_{11} + \partial_1 g_{10} - \partial_1 g_{01}) = \frac{1}{2}\ \left(-\frac{1}{e^{2\alpha}}\right)(\partial_t(-e^{2\alpha}) + \partial_r(0) - \partial_r(0))$$

$$= \dot{\alpha}$$

$$\Gamma^1_{02} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_0 g_{21} + \partial_2 g_{10} - \partial_1 g_{02}) = \frac{1}{2}\ \left(-\frac{1}{e^{2\alpha}}\right)(\partial_t(0) + \partial_\theta(0) - \partial_r(0)) = 0$$

$$\Gamma^1_{03} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_0 g_{31} + \partial_3 g_{10} - \partial_1 g_{03}) = \frac{1}{2}\ \left(-\frac{1}{e^{2\alpha}}\right)\big(\partial_t(0) + \partial_\phi(0) - \partial_r(0)\big)$$

$$= 0$$

$$\Gamma^1_{10} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_1 g_{01} + \partial_0 g_{11} - \partial_1 g_{10}) = \frac{1}{2}\ \left(-\frac{1}{e^{2\alpha}}\right)(\partial_r(0) + \partial_t(-e^{2\alpha}) - \partial_r(0))$$

$$= \dot{\alpha}$$

$$\Gamma^1_{20} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_2 g_{01} + \partial_0 g_{12} - \partial_1 g_{20}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha}}\right)(\partial_\theta(0) + \partial_t(0) - \partial_r(0)) = 0$$

$$\Gamma^1_{30} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_3 g_{01} + \partial_0 g_{13} - \partial_1 g_{30}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha}}\right)\left(\partial_\phi(0) + \partial_t(0) - \partial_r(0)\right)$$

$$= 0$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha}}\right)(\partial_r(-e^{2\alpha}) + \partial_r(-e^{2\alpha}) - \partial_r(-e^{2\alpha})) = \alpha'$$

$$\Gamma^1_{12} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_1 g_{21} + \partial_2 g_{11} - \partial_1 g_{12}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha}}\right)(\partial_r(0) + \partial_\theta(0) - \partial_r(0)) = 0$$

$$\Gamma^1_{13} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_1 g_{31} + \partial_3 g_{11} - \partial_1 g_{13}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha}}\right)\left(\partial_r(0) + \partial_\phi(-e^{2\alpha}) - \partial_r(0)\right)$$

$$= 0$$

$$\Gamma^1_{20} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_2 g_{01} + \partial_0 g_{12} - \partial_1 g_{20}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha}}\right)(\partial_\theta(0) + \partial_t(0) - \partial_r(0)) = 0$$

$$\Gamma^1_{21} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_2 g_{11} + \partial_1 g_{12} - \partial_1 g_{21}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha}}\right)(\partial_\theta(-e^{2\alpha}) + \partial_r(0) - \partial_r(0))$$

$$= 0$$

$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_2 g_{21} + \partial_2 g_{12} - \partial_1 g_{22})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha}}\right)(\partial_\theta(0) + \partial_\theta(0) - \partial_r(-e^{2\alpha} r^2)) = -\alpha' r^2 - r$$

$$\Gamma^1_{23} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_2 g_{31} + \partial_3 g_{12} - \partial_1 g_{23}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha}}\right)\left(\partial_\theta(0) + \partial_\phi(0) - \partial_r(0)\right)$$

$$= 0$$

$$\Gamma^1_{30} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_3 g_{01} + \partial_0 g_{13} - \partial_1 g_{30}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha}}\right)\left(\partial_\phi(0) + \partial_t(0) - \partial_r(0)\right)$$

$$= 0$$

$$\Gamma^1_{31} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_3 g_{11} + \partial_1 g_{13} - \partial_1 g_{31}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha}}\right)\left(\partial_\phi(-e^{2\alpha}) + \partial_r(0) - \partial_r(0)\right)$$

$$= 0$$

$$\Gamma^1_{32} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_3 g_{21} + \partial_2 g_{13} - \partial_1 g_{32}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha}}\right)\left(\partial_\phi(0) + \partial_\theta(0) - \partial_r(0)\right)$$

$$= 0$$

$$\Gamma^1_{33} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_3 g_{31} + \partial_3 g_{13} - \partial_1 g_{33})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha}}\right)\left(\partial_\phi(0) + \partial_\phi(0) - \partial_r(-e^{2\alpha} r^2 \sin^2\theta)\right)$$

$$= -\sin^2\theta\,(\alpha' r^2 + r)$$

$$\Gamma^2_{00} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_0 g_{02} + \partial_0 g_{20} - \partial_2 g_{00}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha} r^2}\right)(\partial_t(0) + \partial_t(0) - \partial_\theta(1))$$

$$= 0$$

$$\Gamma^2_{01} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_0 g_{12} + \partial_1 g_{20} - \partial_2 g_{01}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha} r^2}\right)(\partial_t(0) + \partial_r(0) - \partial_\theta(0))$$

$$= 0$$

$$\Gamma^2_{02} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_0 g_{22} + \partial_2 g_{20} - \partial_2 g_{02})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha} r^2}\right)(\partial_t(-e^{2\alpha} r^2) + \partial_\theta(0) - \partial_\theta(0)) = \dot{\alpha}$$

$$\Gamma^2_{03} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_0 g_{32} + \partial_3 g_{20} - \partial_2 g_{03}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha} r^2}\right)\left(\partial_t(0) + \partial_\phi(0) - \partial_\theta(0)\right)$$

$$= 0$$

$$\Gamma^2_{10} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_1 g_{02} + \partial_0 g_{21} - \partial_2 g_{10}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha} r^2}\right)(\partial_r(0) + \partial_t(0) - \partial_\theta(0))$$

$$= 0$$

$$\Gamma^2_{20} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_2 g_{02} + \partial_0 g_{22} - \partial_2 g_{20})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha} r^2}\right)(\partial_\theta(0) + \partial_t(-e^{2\alpha} r^2) - \partial_\theta(0)) = \dot{\alpha}$$

$$\Gamma^2_{30} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_3 g_{02} + \partial_0 g_{23} - \partial_2 g_{30}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha} r^2}\right)\left(\partial_\phi(0) + \partial_t(0) - \partial_\theta(0)\right)$$

$$= 0$$

$$\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_1 g_{12} + \partial_1 g_{21} - \partial_2 g_{11})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha} r^2}\right)(\partial_r(0) + \partial_r(0) - \partial_\theta(-e^{2\alpha})) = 0$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{21} - \partial_2 g_{12})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha} r^2}\right)(\partial_r(-e^{2\alpha} r^2) + \partial_\theta(0) - \partial_\theta(0)) = \alpha' + \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^2_{13} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_1 g_{32} + \partial_3 g_{21} - \partial_2 g_{13}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha} r^2}\right)\left(\partial_r(0) + \partial_\phi(0) - \partial_\theta(0)\right)$$

$$= 0$$

$$\Gamma^2_{20} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_2 g_{02} + \partial_0 g_{22} - \partial_2 g_{20})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha} r^2}\right)(\partial_\theta(0) + \partial_t(-e^{2\alpha} r^2) - \partial_\theta(0)) = \dot{\alpha}$$

$$\Gamma^2_{21} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_2 g_{12} + \partial_1 g_{22} - \partial_2 g_{21})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha} r^2}\right)(\partial_\theta(0) + \partial_r(-e^{2\alpha} r^2) - \partial_\theta(0)) = \alpha' + \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^2_{22} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_2 g_{22} + \partial_2 g_{22} - \partial_2 g_{22})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha}r^2}\right)(\partial_\theta(-e^{2\alpha}r^2) + \partial_\theta(-e^{2\alpha}r^2) - \partial_\theta(-e^{2\alpha}r^2)) = 0$$

$$\Gamma^2_{23} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_2 g_{32} + \partial_3 g_{22} - \partial_2 g_{23})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha}r^2}\right)\left(\partial_\theta(0) + \partial_\phi(-e^{2\alpha}r^2) - \partial_\theta(0)\right) = 0$$

$$\Gamma^2_{30} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_3 g_{02} + \partial_0 g_{23} - \partial_2 g_{30}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha}r^2}\right)\left(\partial_\phi(0) + \partial_t(0) - \partial_\theta(0)\right)$$

$$= 0$$

$$\Gamma^2_{31} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_3 g_{12} + \partial_1 g_{23} - \partial_2 g_{31}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha}r^2}\right)\left(\partial_\phi(0) + \partial_r(0) - \partial_\theta(0)\right)$$

$$= 0$$

$$\Gamma^2_{32} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_3 g_{22} + \partial_2 g_{23} - \partial_2 g_{32})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha}r^2}\right)\left(\partial_\phi(-e^{2\alpha}r^2) + \partial_\theta(0) - \partial_\theta(0)\right) = 0$$

$$\Gamma^2_{33} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_3 g_{32} + \partial_3 g_{23} - \partial_2 g_{33})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha}r^2}\right)\left(\partial_\phi(0) + \partial_\phi(0) - \partial_\theta(-e^{2\alpha}r^2\sin^2\theta)\right)$$

$$= -\sin\theta\cos\theta$$

$$\Gamma^3_{00} = \frac{1}{2} g^{33}(\partial_0 g_{03} + \partial_0 g_{30} - \partial_3 g_{00})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha}r^2\sin^2\theta}\right)\left(\partial_t(0) + \partial_t(0) - \partial_\phi(1)\right) = 0$$

$$\Gamma^3_{01} = \frac{1}{2} g^{33}(\partial_0 g_{13} + \partial_1 g_{30} - \partial_3 g_{01})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha} r^2 \sin^2\theta}\right)\left(\partial_t(0) + \partial_r(0) - \partial_\phi(0)\right) = 0$$

$$\Gamma^3_{02} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_0 g_{23} + \partial_2 g_{30} - \partial_3 g_{02})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha} r^2 \sin^2\theta}\right)\left(\partial_t(0) + \partial_\theta(0) - \partial_\phi(0)\right) = 0$$

$$\Gamma^3_{03} = \frac{1}{2} g^{33}(\partial_0 g_{33} + \partial_3 g_{30} - \partial_3 g_{03})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha} r^2 \sin^2\theta}\right)\left(\partial_t(-e^{2\alpha} r^2 \sin^2\theta) + \partial_\phi(0) - \partial_\phi(0)\right) = \dot{\alpha}$$

$$\Gamma^3_{10} = \frac{1}{2} g^{33}(\partial_1 g_{03} + \partial_0 g_{31} - \partial_3 g_{10})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha} r^2 \sin^2\theta}\right)\left(\partial_r(0) + \partial_t(0) - \partial_\phi(0)\right) = 0$$

$$\Gamma^3_{20} = \frac{1}{2} g^{33}(\partial_2 g_{03} + \partial_0 g_{32} - \partial_3 g_{20})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha} r^2 \sin^2\theta}\right)\left(\partial_\theta(0) + \partial_t(0) - \partial_\phi(0)\right) = 0$$

$$\Gamma^3_{30} = \frac{1}{2} g^{33}(\partial_3 g_{03} + \partial_0 g_{33} - \partial_3 g_{30})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha} r^2 \sin^2\theta}\right)\left(\partial_\phi(0) + \partial_t(0) - \partial_\phi(0)\right) = 0$$

$$\Gamma^3_{11} = \frac{1}{2} g^{33}(\partial_1 g_{13} + \partial_1 g_{31} - \partial_3 g_{11})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha} r^2 \sin^2\theta}\right)\left(\partial_r(0) + \partial_r(0) - \partial_\phi(-e^{2\alpha})\right) = 0$$

$$\Gamma^3_{12} = \frac{1}{2} g^{33}(\partial_1 g_{23} + \partial_2 g_{31} - \partial_3 g_{12})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha} r^2 \sin^2\theta}\right)\left(\partial_r(0) + \partial_\theta(0) - \partial_\phi(0)\right) = 0$$

$$\Gamma^3_{13} = \frac{1}{2} g^{33}(\partial_1 g_{33} + \partial_3 g_{31} - \partial_3 g_{13})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha} r^2 \sin^2\theta}\right)\left(\partial_r(-e^{2\alpha} r^2 \sin^2\theta) + \partial_\phi(0) - \partial_\phi(0)\right)$$

$$= \alpha' + \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^3_{20} = \frac{1}{2} g^{33}(\partial_2 g_{03} + \partial_0 g_{32} - \partial_3 g_{20})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha} r^2 \sin^2\theta}\right)\left(\partial_\theta(0) + \partial_t(0) - \partial_\phi(0)\right) = 0$$

$$\Gamma^3_{21} = \frac{1}{2} g^{33}(\partial_2 g_{13} + \partial_1 g_{32} - \partial_3 g_{21})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha} r^2 \sin^2\theta}\right)\left(\partial_\theta(0) + \partial_r(0) - \partial_\phi(0)\right) = 0$$

$$\Gamma^3_{22} = \frac{1}{2} g^{33}(\partial_2 g_{23} + \partial_2 g_{32} - \partial_3 g_{22})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha} r^2 \sin^2\theta}\right)(\partial_\theta(0) + \partial_\theta(0) - \partial_\theta(-e^{2\alpha} r^2)) = 0$$

$$\Gamma^3_{23} = \frac{1}{2} g^{33}(\partial_2 g_{33} + \partial_3 g_{32} - \partial_3 g_{23})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha} r^2 \sin^2\theta}\right)\left(\partial_\theta(-e^{2\alpha} r^2 \sin^2\theta) + \partial_\phi(0) - \partial_\phi(0)\right)$$

$$= \cot\theta$$

$$\Gamma^3_{30} = \frac{1}{2} g^{33}(\partial_3 g_{03} + \partial_0 g_{33} - \partial_3 g_{30})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha} r^2 \sin^2\theta}\right)\left(\partial_\phi(0) + \partial_t(-e^{2\alpha} r^2 \sin^2\theta) - \partial_\phi(0)\right) = \dot{\alpha}$$

$$\Gamma^3_{31} = \frac{1}{2} g^{33}(\partial_3 g_{13} + \partial_1 g_{33} - \partial_3 g_{31})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha} r^2 \sin^2\theta}\right)\left(\partial_\phi(0) + \partial_r(-e^{2\alpha} r^2 \sin^2\theta) - \partial_\phi(0)\right)$$

$$= \alpha' + \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^3_{32} = \frac{1}{2} g^{33}(\partial_3 g_{23} + \partial_2 g_{33} - \partial_3 g_{32})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha} r^2 \sin^2\theta}\right)\left(\partial_\phi(0) + \partial_\theta(-e^{2\alpha} r^2 \sin^2\theta) - \partial_\phi(0)\right)$$

$$= \cot\theta$$

$$\Gamma^3_{33} = \frac{1}{2} g^{33}(\partial_3 g_{33} + \partial_3 g_{33} - \partial_3 g_{33})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha} r^2 \sin^2\theta}\right)\left(\partial_\phi(-e^{2\alpha} r^2 \sin^2\theta) + \partial_\phi(-e^{2\alpha} r^2 \sin^2\theta)\right.$$

$$\left. - \partial_\phi(-e^{2\alpha} r^2 \sin^2\theta)\right) = 0$$

Lampiran B Simbol Christoffel pada Persamaan Friedmann

$$\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_0 g_{00} + \partial_0 g_{00} - \partial_0 g_{00}) = \frac{1}{2}\ (\partial_t(1) + \partial_t(1) - \partial_t(1)) = 0$$

$$\Gamma^0_{01} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_0 g_{10} + \partial_1 g_{00} - \partial_0 g_{01}) = \frac{1}{2}\ (\partial_t(0) + \partial_r(1) - \partial_t(0)) = 0$$

$$\Gamma^0_{02} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_0 g_{20} + \partial_2 g_{00} - \partial_0 g_{02}) = \frac{1}{2}\ (\partial_t(0) + \partial_\theta(1) - \partial_t(0)) = 0$$

$$\Gamma^0_{03} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_0 g_{30} + \partial_3 g_{00} - \partial_0 g_{03}) = \frac{1}{2}\ \big(\partial_t(0) + \partial_\phi(1) - \partial_t(0)\big) = 0$$

$$\Gamma^0_{10} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_1 g_{00} + \partial_0 g_{01} - \partial_0 g_{10}) = \frac{1}{2}\ (\partial_r(1) + \partial_t(0) - \partial_t(0)) = 0$$

$$\Gamma^0_{20} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_2 g_{00} + \partial_0 g_{02} - \partial_0 g_{20}) = \frac{1}{2}\ (\partial_\theta(1) + \partial_t(0) - \partial_t(0)) = 0$$

$$\Gamma^0_{30} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_3 g_{00} + \partial_0 g_{03} - \partial_0 g_{30}) = \frac{1}{2}\ \big(\partial_\phi(1) + \partial_t(0) - \partial_t(0)\big) = 0$$

$$\Gamma^0_{11} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_1 g_{10} + \partial_1 g_{01} - \partial_0 g_{11}) = \frac{1}{2}\left(\partial_r(0) + \partial_r(0) - \partial_t(-\frac{a^2}{1-kr^2})\right)$$

$$= \frac{a}{1-kr^2}\frac{da}{dt}$$

$$\Gamma^0_{12} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_1 g_{20} + \partial_2 g_{01} - \partial_0 g_{12}) = \frac{1}{2}\ (\partial_r(0) + \partial_\theta(0) - \partial_t(0)) = 0$$

$$\Gamma^0_{13} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_1 g_{30} + \partial_3 g_{01} - \partial_0 g_{13}) = \frac{1}{2}\ \big(\partial_r(0) + \partial_\phi(0) - \partial_t(0)\big) = 0$$

$$\Gamma^0_{20} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_2 g_{00} + \partial_0 g_{02} - \partial_0 g_{20}) = \frac{1}{2}\ (\partial_\theta(1) + \partial_\theta(0) - \partial_t(0)) = 0$$

$$\Gamma^0_{21} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_2 g_{10} + \partial_1 g_{02} - \partial_0 g_{21}) = \frac{1}{2}\ (\partial_\theta(1) + \partial_r(0) - \partial_t(0)) = 0$$

$$\Gamma^0_{22} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_2 g_{20} + \partial_2 g_{02} - \partial_0 g_{22}) = \frac{1}{2}\ (\partial_\theta(0) + \partial_\theta(0) - \partial_t(-(ar)^2))$$

$$= a\frac{da}{dt}\ r^2$$

$$\Gamma^0_{23} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_2 g_{30} + \partial_3 g_{02} - \partial_0 g_{23}) = \frac{1}{2}\ \big(\partial_\theta(1) + \partial_\phi(0) - \partial_t(0)\big) = 0$$

$$\Gamma^0_{30} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_3 g_{00} + \partial_0 g_{03} - \partial_0 g_{30}) = \frac{1}{2}\ \big(\partial_\phi(1) + \partial_t(0) - \partial_t(0)\big) = 0$$

$$\Gamma^0_{31} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_3 g_{10} + \partial_1 g_{03} - \partial_0 g_{31}) = \frac{1}{2}\ \big(\partial_\phi(0) + \partial_r(0) - \partial_t(0)\big) = 0$$

$$\Gamma^0_{32} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_3 g_{20} + \partial_2 g_{03} - \partial_0 g_{32}) = \frac{1}{2}\ \big(\partial_\phi(0) + \partial_\theta(0) - \partial_t(0)\big) = 0$$

$$\Gamma^0_{33} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_3 g_{30} + \partial_3 g_{03} - \partial_0 g_{33}) = \frac{1}{2}\ \big(\partial_\phi(0) + \partial_\phi(0) - \partial_t(-(a\, r \sin\theta)^2)\big)$$

$$= a\frac{da}{dt}\ r^2 \sin^2\theta$$

$$\Gamma^1_{00} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_0 g_{01} + \partial_0 g_{10} - \partial_1 g_{00})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{(1-kr^2)}{a^2}\right)(\partial_t(0) + \partial_t(0) - \partial_r(1)) = 0$$

$$\Gamma^1_{01} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_0 g_{11} + \partial_1 g_{10} - \partial_1 g_{01})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{(1-kr^2)}{a^2}\right)\left(\partial_t(-\frac{a^2}{1-kr^2}) + \partial_r(0) - \partial_r(0)\right) = \frac{1}{a}\frac{da}{dt}$$

$$\Gamma^1_{02} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_0 g_{21} + \partial_2 g_{10} - \partial_1 g_{02})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{(1-kr^2)}{a^2}\right)(\partial_t(0) + \partial_\theta(0) - \partial_r(0)) = 0$$

$$\Gamma^1_{03} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_0 g_{31} + \partial_3 g_{10} - \partial_1 g_{03})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{(1-kr^2)}{a^2}\right)\big(\partial_t(0) + \partial_\phi(0) - \partial_r(0)\big) = 0$$

$$\Gamma^1_{10} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_1 g_{01} + \partial_0 g_{11} - \partial_1 g_{10})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{(1-kr^2)}{a^2}\right)\left(\partial_r(0) + \partial_t(-\frac{a^2}{1-kr^2}) - \partial_r(0)\right) = \frac{1}{a}\frac{da}{dt}$$

$$\Gamma^1_{20} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_2 g_{01} + \partial_0 g_{12} - \partial_1 g_{20})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{(1-kr^2)}{a^2}\right)(\partial_\theta(0) + \partial_t(0) - \partial_r(0)) = 0$$

$$\Gamma^1_{30} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_3 g_{01} + \partial_0 g_{13} - \partial_1 g_{30})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{(1-kr^2)}{a^2}\right)\big(\partial_\phi(0) + \partial_t(0) - \partial_r(0)\big) = 0$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{(1-kr^2)}{a^2}\right)\left(\partial_r(-\frac{a^2}{1-kr^2}) + \partial_r(-\frac{a^2}{1-kr^2})\right.$$

$$\left. - \partial_r(-\frac{a^2}{1-kr^2})\right) = \frac{kr}{1-kr^2}$$

$$\Gamma^1_{12} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_1 g_{21} + \partial_2 g_{11} - \partial_1 g_{12})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{(1-kr^2)}{a^2}\right)(\partial_r(0) + \partial_\theta(0) - \partial_r(0)) = 0$$

$$\Gamma^1_{13} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_1 g_{31} + \partial_3 g_{11} - \partial_1 g_{13})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{(1-kr^2)}{a^2}\right)\left(\partial_r(0) + \partial_\phi(-\frac{a^2}{1-kr^2}) - \partial_r(0)\right) = 0$$

$$\Gamma^1_{20} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_2 g_{01} + \partial_0 g_{12} - \partial_1 g_{20})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{(1-kr^2)}{a^2}\right)(\partial_\theta(0) + \partial_t(0) - \partial_r(0)) = 0$$

$$\Gamma^1_{21} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_2 g_{11} + \partial_1 g_{12} - \partial_1 g_{21})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{(1-kr^2)}{a^2}\right)\left(\partial_\theta(-\frac{a^2}{1-kr^2}) + \partial_r(0) - \partial_r(0)\right) = 0$$

$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_2 g_{21} + \partial_2 g_{12} - \partial_1 g_{22})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{(1-kr^2)}{a^2}\right)(\partial_\theta(0) + \partial_\theta(0) - \partial_r(-(a\,r)^2))$$

$$= -r(1-kr^2)$$

$$\Gamma^1_{23} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_2 g_{31} + \partial_3 g_{12} - \partial_1 g_{23})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{(1-kr^2)}{a^2}\right)\big(\partial_\theta(0) + \partial_\phi(0) - \partial_r(0)\big) = 0$$

$$\Gamma^1_{30} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_3 g_{01} + \partial_0 g_{13} - \partial_1 g_{30})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{(1-kr^2)}{a^2}\right)\big(\partial_\phi(0) + \partial_t(0) - \partial_r(0)\big) = 0$$

$$\Gamma^1_{31} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_3 g_{11} + \partial_1 g_{13} - \partial_1 g_{31})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{(1-kr^2)}{a^2}\right)\left(\partial_\phi(-\frac{a^2}{1-kr^2}) + \partial_r(0) - \partial_r(0)\right) = 0$$

$$\Gamma^1_{32} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_3 g_{21} + \partial_2 g_{13} - \partial_1 g_{32})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{(1-kr^2)}{a^2}\right)\big(\partial_\phi(0) + \partial_\theta(0) - \partial_r(0)\big) = 0$$

$$\Gamma^1_{33} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_3 g_{31} + \partial_3 g_{13} - \partial_1 g_{33})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{(1-kr^2)}{a^2}\right)\big(\partial_\phi(0) + \partial_\phi(0) - \partial_r(-(a\,r\sin\theta)^2)\big)$$

$$= -r\sin^2\theta(\,1-kr^2)$$

$$\Gamma^2_{00} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_0 g_{02} + \partial_0 g_{20} - \partial_2 g_{00}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(a\,r)^2}\right)(\partial_t(0) + \partial_t(0) - \partial_\theta(1))$$

$$= 0$$

$$\Gamma^2_{01} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_0 g_{12} + \partial_1 g_{20} - \partial_2 g_{01}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(a\,r)^2}\right)(\partial_t(0) + \partial_r(0) - \partial_\theta(0))$$

$$= 0$$

$$\Gamma^2_{02} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_0 g_{22} + \partial_2 g_{20} - \partial_2 g_{02})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(a\,r)^2}\right)(\partial_t(-(a\,r)^2) + \partial_\theta(0) - \partial_\theta(0)) = \frac{1}{a}\frac{da}{dt}$$

$$\Gamma^2_{03} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_0 g_{32} + \partial_3 g_{20} - \partial_2 g_{03}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(a\,r)^2}\right)\big(\partial_t(0) + \partial_\phi(0) - \partial_\theta(0)\big)$$

$$= 0$$

$$\Gamma^2_{10} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_1 g_{02} + \partial_0 g_{21} - \partial_2 g_{10}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(a\,r)^2}\right)(\partial_r(0) + \partial_t(0) - \partial_\theta(0))$$

$$= 0$$

$$\Gamma^2_{20} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_2 g_{02} + \partial_0 g_{22} - \partial_2 g_{20})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(a\,r)^2}\right)(\partial_\theta(0) + \partial_t(-(a\,r)^2) - \partial_\theta(0)) = \frac{1}{a}\frac{da}{dt}$$

$$\Gamma^2_{30} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_3 g_{02} + \partial_0 g_{23} - \partial_2 g_{30}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(a\,r)^2}\right)\big(\partial_\phi(0) + \partial_t(0) - \partial_\theta(0)\big)$$

$$= 0$$

$$\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_1 g_{12} + \partial_1 g_{21} - \partial_2 g_{11})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(a\,r)^2}\right)\left(\partial_r(0) + \partial_r(0) - \partial_\theta(-\frac{a^2}{1-kr^2})\right) = 0$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{21} - \partial_2 g_{12})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(a\,r)^2}\right)(\partial_r(-(a\,r)^2) + \partial_\theta(0) - \partial_\theta(0)) = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^2_{13} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_1 g_{32} + \partial_3 g_{21} - \partial_2 g_{13}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(a\,r)^2}\right)\big(\partial_r(0) + \partial_\phi(0) - \partial_\theta(0)\big)$$

$$= 0$$

$$\Gamma^2_{20} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_2 g_{02} + \partial_0 g_{22} - \partial_2 g_{20})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(a\,r)^2}\right)(\partial_\theta(0) + \partial_t(-(a\,r)^2) - \partial_\theta(0)) = \frac{1}{a}\frac{da}{dt}$$

$$\Gamma^2_{21} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_2 g_{12} + \partial_1 g_{22} - \partial_2 g_{21})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(a\,r)^2}\right)(\partial_\theta(0) + \partial_r(-(a\,r)^2) - \partial_\theta(0)) = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^2_{22} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_2 g_{22} + \partial_2 g_{22} - \partial_2 g_{22})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(a\,r)^2}\right)(\partial_\theta(-(a\,r)^2) + \partial_\theta(-(a\,r)^2) - \partial_\theta(-(a\,r)^2))$$

$$= 0$$

$$\Gamma^2_{23} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_2 g_{32} + \partial_3 g_{22} - \partial_2 g_{23})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(a\,r)^2}\right)\big(\partial_\theta(0) + \partial_\phi(-(a\,r)^2) - \partial_\theta(0)\big) = 0$$

$$\Gamma^2_{30} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_3 g_{02} + \partial_0 g_{23} - \partial_2 g_{30}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(a\,r)^2}\right)\big(\partial_\phi(0) + \partial_t(0) - \partial_\theta(0)\big)$$

$$= 0$$

$$\Gamma^2_{31} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_3 g_{12} + \partial_1 g_{23} - \partial_2 g_{31}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(a\,r)^2}\right)\big(\partial_\phi(0) + \partial_r(0) - \partial_\theta(0)\big)$$

$$= 0$$

$$\Gamma^2_{32} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_3 g_{22} + \partial_2 g_{23} - \partial_2 g_{32})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(a\,r)^2}\right)\big(\partial_\phi(-(a\,r)^2) + \partial_\theta(0) - \partial_\theta(0)\big) = 0$$

$$\Gamma^2_{33} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_3 g_{32} + \partial_3 g_{23} - \partial_2 g_{33})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(a\,r)^2}\right)\big(\partial_\phi(0) + \partial_\phi(0) - \partial_\theta(-(a\,r\sin\theta)^2)\big)$$

$$= -\sin\theta\cos\theta$$

$$\Gamma^3_{00} = \frac{1}{2} g^{33}(\partial_0 g_{03} + \partial_0 g_{30} - \partial_3 g_{00})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(a\,r\sin\theta)^2}\right)\big(\partial_t(0) + \partial_t(0) - \partial_\phi(1)\big) = 0$$

$$\Gamma^3_{01} = \frac{1}{2} g^{33}(\partial_0 g_{13} + \partial_1 g_{30} - \partial_3 g_{01})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(a\,r\sin\theta)^2}\right)\big(\partial_t(0) + \partial_r(0) - \partial_\phi(0)\big) = 0$$

$$\Gamma^3_{02} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_0 g_{23} + \partial_2 g_{30} - \partial_3 g_{02})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(a\,r\sin\theta)^2}\right)\big(\partial_t(0) + \partial_\theta(0) - \partial_\phi(0)\big) = 0$$

$$\Gamma^3_{03} = \frac{1}{2} g^{33}(\partial_0 g_{33} + \partial_3 g_{30} - \partial_3 g_{03})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(a\,r\sin\theta)^2}\right)\big(\partial_t(-(a\,r\sin\theta)^2) + \partial_\phi(0) - \partial_\phi(0)\big)$$

$$= \frac{1}{a}\frac{da}{dt}$$

$$\Gamma^3_{10} = \frac{1}{2} g^{33}(\partial_1 g_{03} + \partial_0 g_{31} - \partial_3 g_{10})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(a\,r\sin\theta)^2}\right)\big(\partial_r(0) + \partial_t(0) - \partial_\phi(0)\big) = 0$$

$$\Gamma^3_{20} = \frac{1}{2} g^{33}(\partial_2 g_{03} + \partial_0 g_{32} - \partial_3 g_{20})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(a\,r\sin\theta)^2}\right)\big(\partial_\theta(0) + \partial_t(0) - \partial_\phi(0)\big) = 0$$

$$\Gamma^3_{30} = \frac{1}{2} g^{33}(\partial_3 g_{03} + \partial_0 g_{33} - \partial_3 g_{30})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(a\,r\sin\theta)^2}\right)\big(\partial_\phi(0) + \partial_t(0) - \partial_\phi(0)\big) = 0$$

$$\Gamma^3_{11} = \frac{1}{2} g^{33}(\partial_1 g_{13} + \partial_1 g_{31} - \partial_3 g_{11})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(a\,r\sin\theta)^2}\right)\left(\partial_r(0) + \partial_r(0) - \partial_\phi(-\frac{a^2}{1-kr^2})\right) = 0$$

$$\Gamma^3_{12} = \frac{1}{2} g^{33}(\partial_1 g_{23} + \partial_2 g_{31} - \partial_3 g_{12})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(a\,r\sin\theta)^2}\right)\left(\partial_r(0) + \partial_\theta(0) - \partial_\phi(0)\right) = 0$$

$$\Gamma^3_{13} = \frac{1}{2} g^{33}(\partial_1 g_{33} + \partial_3 g_{31} - \partial_3 g_{13})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(a\,r\sin\theta)^2}\right)\left(\partial_r(-(a\,r\sin\theta)^2) + \partial_\phi(0) - \partial_\phi(0)\right) = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^3_{20} = \frac{1}{2} g^{33}(\partial_2 g_{03} + \partial_0 g_{32} - \partial_3 g_{20})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(a\,r\sin\theta)^2}\right)\left(\partial_\theta(0) + \partial_t(0) - \partial_\phi(0)\right) = 0$$

$$\Gamma^3_{21} = \frac{1}{2} g^{33}(\partial_2 g_{13} + \partial_1 g_{32} - \partial_3 g_{21})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(a\,r\sin\theta)^2}\right)\left(\partial_\theta(0) + \partial_r(0) - \partial_\phi(0)\right) = 0$$

$$\Gamma^3_{22} = \frac{1}{2} g^{33}(\partial_2 g_{23} + \partial_2 g_{32} - \partial_3 g_{22})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(a\,r\sin\theta)^2}\right)(\partial_\theta(0) + \partial_\theta(0) - \partial_\theta(-(a\,r)^2)) = 0$$

$$\Gamma^3_{23} = \frac{1}{2} g^{33}(\partial_2 g_{33} + \partial_3 g_{32} - \partial_3 g_{23})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(a\,r\sin\theta)^2}\right)\left(\partial_\theta(-(a\,r\sin\theta)^2) + \partial_\phi(0) - \partial_\phi(0)\right)$$

$$= \cot\theta$$

$$\Gamma^3_{30} = \frac{1}{2} g^{33}(\partial_3 g_{03} + \partial_0 g_{33} - \partial_3 g_{30})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(a\,r\sin\theta)^2}\right)\left(\partial_\phi(0) + \partial_t(-(a\,r\sin\theta)^2) - \partial_\phi(0)\right)$$

$$= \frac{1}{a}\frac{da}{dt}$$

$$\Gamma^3_{31} = \frac{1}{2} g^{33}(\partial_3 g_{13} + \partial_1 g_{33} - \partial_3 g_{31})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(a\,r\sin\theta)^2}\right)\left(\partial_\phi(0) + \partial_r(-(a\,r\sin\theta)^2) - \partial_\phi(0)\right) = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^3_{32} = \frac{1}{2} g^{33}(\partial_3 g_{23} + \partial_2 g_{33} - \partial_3 g_{32})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(a\,r\sin\theta)^2}\right)\left(\partial_\phi(0) + \partial_\theta(-(a\,r\sin\theta)) - \partial_\phi(0)\right)$$

$$= \cot\theta$$

$$\Gamma^3_{33} = \frac{1}{2} g^{33}(\partial_3 g_{33} + \partial_3 g_{33} - \partial_3 g_{33})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(a\,r\sin\theta)^2}\right)\left(\partial_\phi(-(a\,r\sin\theta)^2) + \partial_\phi(-(a\,r\sin\theta)^2)\right.$$

$$\left. - \partial_\phi(-(a\,r\sin\theta)^2)\right) = 0$$

Lampiran C Persamaan Medan Einstein

Persamaan Medan Einstein pada G_{22} dan G_{33}

$$R_{22} - \frac{1}{2} g_{22}\mathcal{R} = 8\pi G T_{22}$$

$$r^2\left[a\frac{d^2a}{dt^2} + 2\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + 2k\right] - \frac{1}{2}(-(a\,r)^2)\left[-\frac{6}{a^2}\left(a\frac{d^2a}{dt^2} + \left(\frac{da}{dt}\right)^2 + k\right)\right]$$

$$= 8\pi G\left(\frac{Pa^2}{1-kr^2}\right)$$

$$r^2\left[a\frac{d^2a}{dt^2} + 2\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + 2k\right] - a^2r^2\left(\frac{3}{a}\frac{d^2a}{dt^2} + \frac{3}{a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \frac{3k}{a^2}\right) = 8\pi\mathrm{G}\, a^2r^2P$$

$$-2ar^2\frac{d^2a}{dt^2} - r^2\left(\frac{da}{dt}\right)^2 - kr^2 = 8\pi G\mathrm{a}^2r^2P$$

$$-\frac{2}{a}\frac{d^2a}{dt^2} - \frac{1}{a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 - \frac{k}{a^2} = 8\pi GP$$

$$R_{33} - \frac{1}{2} g_{33}\mathcal{R} = 8\pi G T_{33}$$

$$r^2\sin^2\theta\left[a\frac{d^2a}{dt^2} + 2\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + 2k\right]$$

$$-\frac{1}{2}(-(a\,r\sin^2\theta)^2)\left[-\frac{6}{a^2}\left(a\frac{d^2a}{dt^2} + \left(\frac{da}{dt}\right)^2 + k\right)\right]$$

$$= 8\pi G\mathrm{a}^2r^2\sin^2\theta\, P$$

$$r^2\sin^2\theta\left[a\frac{d^2a}{dt^2} + 2\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + 2k\right] - a^2r^2\sin^2\theta\left(\frac{3}{a}\frac{d^2a}{dt^2} + \frac{3}{a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \frac{3k}{a^2}\right)$$

$$= 8\pi\mathrm{G}a^2r^2\sin^2\theta\, P$$

$$-2ar^2 \sin^2\theta \frac{d^2a}{dt^2} - r^2 \sin^2\theta \left(\frac{da}{dt}\right)^2 - kr^2 \sin^2\theta = 8\pi G \mathrm{a}^2 r^2 \sin^2\theta\, P$$

$$-\frac{2}{a}\frac{d^2a}{dt^2} - \frac{1}{a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 - \frac{k}{a^2} = 8\pi G P$$

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
PROGRAM STUDI FISIKA
Jl. Gajayana No. 50 Malang 65144 Telp./Faks. (0341) 558933
Website : https://fisika.uin-malang.ac.id, e-mail : Fis@uin-malang.ac.id

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : **Anis Rofi'atul Khoiriyah**

NIM : **18640039**

Fakultas/Program Studi : **Sains dan Teknologi/ Fisika**

Judul Skripsi : **Studi Holografik Dark Energy Menggunakan Model Perumuman Entropi Tsallis dan Renyi**

Pembimbing 1 : **Arista Romadani, M. Sc**

Pembimbing 2 : **Ahmad Luthfin, S.Si., M.Si**

- **Konsultasi Fisika**

No.	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	19 Juli 2022	Revisi Proposal	
2.	20 Juli 2022	Konsultasi Pembahasan	
3.	18 Oktober 2022	Konsultasi Pembahasan	
4.	3 November 2022	Konsultasi Pembahasan	
5.	8 November 2022	Konsultasi Pembahasan	
6.	10 November 2022	Konsultasi Pembahasan	

- **Konsultasi Integrasi**

No.	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	24 Oktober 2022	Konsultasi Integrasi	
2.	6 Desember 2022	Konsultasi Integrasi	
3.	12 Desember 2022	Konsultasi Integrasi	
4.	16 Desember 2022	Integrasi + Abstrak Arab	
5.	20 Desember 2022	Integrasi + Abstrak Arab	

Malang, 22 Desember 2022
Mengetahui,
Ketua Program Studi,

Dr. Imam Tazi, M.Si

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
PROGRAM STUDI FISIKA
Jl. Gajayana No. 50 Malang 65144 Telp./Faks. (0341) 558933
Website : https://fisika.uin-malang.ac.id, e-mail : f.sa@uin-malang.ac.id

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : **Anis Rofi'atul Khoiriyah**

NIM : **18640039**

Fakultas/Program Studi : **Sains dan Teknologi/ Fisika**

Judul Skripsi : **Studi Holografik Dark Energy Menggunakan Model Perumuman Entropi Tsallis dan Renyi**

Pembimbing 1 : **Arista Romadani, M. Sc**

Pembimbing 2 : **Ahmad Luthfin, S.Si., M.Si**

- **Konsultasi Fisika**

No.	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
7.	19 Desember 2022	Revisi Skripsi	
8.	20 Desember 2022	Konsultasi Jurnal	

- **Konsultasi Integrasi**

No.	Tanggal	Hal	Tanda Tangan

Malang, 22 Desember 2022
Mengetahui,
Ketua Program Studi,

Dr. Imam Tazi, M.Si