INDEKS NARUMI-KATAYAMA DARI GRAF PANGKAT DARI GRUP SIKLIK

SKRIPSI

OLEH

ISTIANA NURAINI

NIM. 18610018

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022

INDEKS NARUMI-KATAYAMA DARI GRAF PANGKAT DARI GRUP SIKLIK

SKRIPSI

Diajukan kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Istiana Nuraini
NIM. 18610018

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022

INDEKS NARUMI-KATAYAMA DARI GRAF PANGKAT DARI GRUP SIKLIK

SKRIPSI

Oleh
Istiana Nuraini
NIM. 18610018

Telah Disetujui Untuk Diuji
Malang, 19 Desember 2022

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Mohammad Nafie Jauhari, M.Si	Erna Herawati, M.Pd
NIDT. 19870218 20160801 1 056	NIDT. 19760723 20180201 2 222

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

ii

INDEKS NARUMI-KATAYAMA DARI GRAF PANGKAT DARI GRUP SIKLIK

SKRIPSI

Oleh
Istiana Nuraini
NIM. 18610018

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal, 28 Desember 2022

Ketua Penguji	: Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D	....
Anggota Penguji I	: Muhammad Khudzaifah, M.Si	....
Anggota Penguji II	: Mohammad Nafie Jauhari, M.Si	....
Anggota Penguji III	: Erna Herawati, M.Pd	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama	: Istiana Nuraini
NIM	: 18610018
Program Studi	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Indeks Narumi-Katayama dari Graf Pangkat dari Grup Siklik

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka sayabersedia menerima sanksi atas perilaku tersebut.

Malang, 28 Desember 2022

Yang membuat pernyataan,

[redacted]

METERAI TEMPEL

D1FAKX234731636

Istiana Nuraini

NIM. 18610018

MOTTO

خيار من خيار

“Orang-orang terpilih dari orang-orang terpilih.”

“Di mana pun ditempatkan yang terpenting bisa bermanfaat.”

(Ustad Anshori Mahfudz)

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Bapak Sarjianto, Ibu Asri Ningsih, seluruh keluarga tercinta, teman-teman tercinta yang selalu mendukung penulis baik berupa moral ataupun material.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala Puji bagi Allah SWT yang telah memberikan rahmat, nikmat dan anugerah-Nya yang berlimpah berupa kecerdasan dan kesehatan sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi yang berjudul "Indeks Narumi-Katayama dari Graf Pangkat dari Grup Siklik" dengan baik serta tepat waktu.

Dalam proses penyelesaian skripsi ini, penulis menyadari dalam penulisan skripsi ini tidak dapat terselesaikan tanpa adanya diskusi, bimbingan dan masukan dari berbagai pihak. Untuk itu penulis mengucapkan terima kasih sebesar-besarnya kepada pihak yang terlibat, terkhusus kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd.,M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Mohammad Nafie Jauhari, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang senantiasa memberikan bimbingan, memberikan saran yang membangun dan selalu sabar demi kebaikan skripsi ini.
5. Erna Herawati, M.Pd, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan bimbing, arahan dan saran yang membangun serta telah memberikan berbagai ilmunya kepada penulis.
6. Abdul Aziz, M.Si, selaku dosen wali yang telah memberi banyak motivasi dan arahan serta nasihat kepada penulis.
7. Seluruh dosen Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim yang tidak pernah bosan memberikan ilmu dan pengalamannya selama masa kuliah.
8. Kedua orang tua tercinta, Bapak Sarjianto dan Ibu Asri, yang selalu mendukung dan tidak pernah putus dalam memanjatkan do'a serta

memberikan nasihat kepada penulis demi tercapainya cita-cita dan pendidikan penulis.

9. Rifqohtul Jannah, Elma Dwiana, Alvin Nurul Mulidiyah selaku sahabat saya yang senantiasa mendukung dan mensupport dalam menyelesaikan skripsi ini.
10. Romo KH. Achmad Zamansyari, ibu Nyai Hj. Sofiatul Muawwanah, KH Muhammad Basuni Azzam, S.E selaku keluarga Dzurriyah Pondok Modern Al-Rifa"ie 1.
11. Nabila Asha Rahmita, Hisba Diana, Nabila Amalia dan Aida Fitria selaku sahabat saya yang senantiasa mendukung dan selalu sabar menasihati dalam perjalanan proses menyelesaikan skripsi ini.
12. Seluruh teman-teman, khususnya teman seperjuangan di Program Studi Matematika angkatan 2018 yang selalu mendukung dan memberikan motivasi kepada penulis dan selalu membantu penulis selama kuliah serta memberikan warna-warni dalam kehidupan perkuliahan.
13. Seluruh teman-teman UKM LKP2M yang selalu membantu saya dalam berdiskusi dan menjadi rumah kedua penulis selama masa perkuliahan.
14. Seluruh pihak yang berpartisipasi dalam membantu penulis dalam hal motivasi, moral sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini.

Selain itu, penulis berharap semoga skripsi ini dapat menambah pengetahuan dan memberikan manfaat bagi semua orang yang membaca dan terutama bermanfaat bagi penulis sendiri.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 28 Desember 2022

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Nuraini, Istiana.2022. **Indeks narumi-katayama dari Graf Pangkat dari Grup siklik**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Malang. Pembimbing: (1) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si, (2) Erna Herawati, M.Pd

Kata kunci: Indeks Narumi-Katayama, Graf Pangkat, Grup siklik.

Indeks topologi dari suatu graf digunakan dalam banyak bidang untuk mempelajari sifat dari objek kehidupan di dunia nyata seperti atom dan molekul dalam kimia. Sehingga penelitian ini menyajikan konsep indeks topologi pada graf yang dibangun oleh suatu grup, yang mana penelitian ini dapat di kembangkan kembali oleh peneliti lain sehingga topik tentang penelitian ini akan terus berkembang. Proses dalam menentukan rumus indeks Narumi-Katayama dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$ adalah sebagai berikut:

1. Menentukan indeks Narumi-Katayama dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$ dengan $p \in \{2,3,5,7,11\}$, untuk memunculkan dugaan.
2. Menentukan derajat setiap simpul $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$ dan menentukan rumus indeks Narumi-Katayama dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$.
3. Menentukan indeks Narumi-Katayama dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$.

Sehingga dari proses tersebut dapat di peroleh hasil sebagai berikut:

$$NK\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})\right) = \begin{cases} (2p-1)^p & jika\ \ p = 2 \\ p \times (2p-1)^p \times\ (2p-2)^{p-1} & jika\ p\ \geq\ 3 \end{cases}$$

ABSTRACT

Nuraini, Istiana.2022. **Narumi-katayama Index of the Power Graph of a Cyclic Group**. Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology,Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisors: (1) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si, (2) Erna Herawati, M.Pd

Keywords: Narumi-Katayama index, Power graph, Cyclic Group.

The topological index of a graph is used in many fields to study the properties of real-world objects of life such as atoms and molecules in chemistry. This research presents the concept of a topological index on a graph built by a group, where this research can be redeveloped by other researchers so that the topic of this research will continue to develop. The process of determining the Narumi-Katayama index formula of $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$ is as follows:

1. Specifies the Narumi-Katayama index of $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$ with $p \in \{2,3,5,7,11\}$, to obtain conjectures,
2. Specifies the degree of each node $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$ and determines the Narumi-Katayama index formula of the $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{2p}\right)$, and
3. Determining the Narumi-Katayama index of $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$.

So that from the process can be obtained the following results:

$$NK\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})\right) = \begin{cases} (2p-1)^p & for \ \ p = 2 \\ p \times (2p-1)^p \times (2p-2)^{p-1} & for \ p \geq 3 \end{cases}$$

مستخلص البحث

نورعيني ، استعانة. ٢٠٢٢. **مؤشر نارومي–كاتاياما على المخططات للترتيب للمجموعة الدورية**.البحث الجامعي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك ابراهيم الإسلامية الحكومية،مالانج. المشرف الأوَّل:(١) محمد نافع جوهري،الماجستير. المشرفة الثانية: (٢) ايرنا هيراواتي ،الماجستير.

الكلمات المفتحيت: مؤشر نارومي–كاتاياما ، الرسم البياني للرتبة ، المجموعة الدورية

تستخدم المؤشرات الطوبولوجية في كثير من المجالات لدراسة خصائص كائنات الحياة في العالم الحقيقي مثل الذرات والجزيئات في الكيمياء. بحيث تعرض هذه الدراسة مفهوم المؤشر الطوبولوجي على مفهوم الرسوم البيانية التي تبنيها مجموعة ، حيث سيتم إعادة استخدام نتائج هذا البحث من قبل أبحاث أخرى في مجال الكيمياء أو في المجالات ذات الصلة لما لها من مزايا بمرور الوقت. فيما يلي عملية تحديد صيغة مؤشر نارومي–كاتاياما على:$\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$

١ لإثارة التخمينات. يحدد درجة .،$p \in \{2,3,5,7,11\}$ مع.$\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$ يحدد مؤشر نارومي–كاتاياما عند كل عقدة.

٢.$\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$ ويحدد صيغة فهرس نارومي–كاتاياما على.$\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$

٣.(.$\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$ تحديد مؤشر نارومي–كاتاياما على .

:بحيث يمكن الحصول على النتائج التالية من العملية

$$NK\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})\right) = \begin{cases} (2p-1)^p & jika\ \ p = 2 \\ p \times (2p-1)^p \times\ (2p-2)^{p-1} & jika\ p\ \geq\ 3 \end{cases}$$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori Graf merupakan salah satu dari banyak ilmu matematika yang dapat diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari. Beberapa masalah jauh lebih mudah dipecahkan dengan mempresentasikan dalam bentuk graf. Teori mengenai graf pertama kali diperkenalkan pada tahun 1736 oleh Leonhard Euler yang merupakan seorang matematikawan Swiss (Soleh dkk, 2015).

Suatu graf (tak berarah) G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tak kosong berhingga dari elemen yang disebut simpul dan E adalah himpunan berhingga (boleh kosong) dari sepasang simpul yang disebut sisi (Marsudi, 2016).

Penelitian graf sendiri sudah banyak diteliti karena dapat dikombinasikan dengan topik matematika lainnya seperti dengan teori grup. Terdapat beberapa graf yang dibangun dari grup seperti graf invers, graf identitas, graf non-commuting, graf konjugasi dan graf pangkat. Sedangkan penelitian ini khusus akan membahas graf pangkat. Definisi graf pangkat dari grup G, $\Gamma(G)$ adalah graf yang himpunan titiknya adalah elemen dari G dan dua simpul berbeda a dan b bertetangga jika dan hanya jika $a^x = b$ dan $b^y = a$ untuk suatu x dan y bilangan bulat positif. (Chelvam & Sattanathan, 2013).

Terdapat beberapa penelitian sebelumnya yang membahas tentang graf pangkat dari suatu grup atau semigrup. Salah satunya pernah dilakukan oleh Asmarani Evi dkk (2022) yang membahas tentang jenis graf pangkat dari grup dihedral. Kemudian yang dilakukan oleh Chelvam dkk (2013) yang berjudul

Power Graph of Finite Abelian Groups. Sedangkan pada penelitian ini dipilih graf pangkat dari grup siklik karena sangat menarik untuk di bahas bentuk representasinya. Grup G disebut grup siklik jika terdapat $a \in G$ sedemikian hingga untuk setiap $x \in G$ berlaku $x = a^n$ untuk suatu bilangan bulat n. Selanjutnya a disebut generator G dan dinotasikan $G = \langle a \rangle$ (Suryanti, 2017).

Jika melihat konsep dalam ajaran Islam, penelitian ini dapat di integrasikan dengan beberapa ayat al-Qur'an. Salah satunya ialah al-Qur'an surat Al-Hujurrat ayat 10. Ayat ini berbunyi:

"*Sesungguhnya orang-orang mukmin adalah bersaudara, karena itu damaikanlah antara kedua saudaramu dan berdakwalah kepada Allah supaya kamu mendapat rahmat".*

Ayat tersebut menerangkan bahwasanya kita semua orang mukmin dengan mukmin lainnya adalah saudara, sehingga ketika kita saling mengenal, menolong dengan sesama agar terus menjalin tali persaudaraan hal ini dapat kita implementasikan terhadap teori graf. Setiap manusia kita anggap sebagai simpul pada setiap unsur di grup siklik dan hubungan tali persaudaraan merupakan sisi pada graf pangkat dari grup siklik. Sehingga dapat kita katakan perintah tersebut terdapat himpunan simpul dan sisi, semakin banyak menjalin tali persaudaraan maka akan membentuk suatu graf.

Indeks Topologi digunakan dalam banyak bidang untuk mempelajari sifat dari objek kehidupan di dunia nyata seperti atom dan molekul dalam kimia. Indeks topologi diklasifikasikan ke dalam beberapa kelompok, salah satunya adalah indeks dengan derajat titik. Beberapa indeks topologi berbasis derajat yang sering dibahas adalah Indeks Zagreb pertama dan kedua, indeks Zagreb multiplikatif pertama dan kedua, Indeks konektivitas ikatan atom, Indeks Narumi-

Katayama. (Ascioglu & Cagul, 2018). Sedangkan penelitian yang membahas tentang indeks Narumi-Katayama pada suatu graf telah dilakukan beberapa kali diantaranya yaitu oleh Ascioglu dan Cagul (2018) yang membahas tentang Indeks Narumi–Katayama dari graf subdivisi. Pernah juga dilakukan Hosseinzadeh dkk (2013) yang berjudul *On the Narumi-Katayama Index of Composite Graphs*. Kemudian pernah dibahas oleh Gutman dan Ghorbani (2011) yang membahas beberapa bentuk dari indeks Narumi-Katayama.

Maka dari itu penelitian ini menggunakan salah satu indeks yang berbasis derajat yaitu Indeks Narumi-Katayama yang mana hasil dari penelitian ini akan di pergunakan kembali oleh peneliti lain pada bidang kimia atau pada bidang terkait karena kelebihannya dari waktu ke waktu.

Kemudian mempelajari semakin jauh tentang tali persaudaraan ada pengintegrasian sebelumnya, sebagaimana dalam surat Al-Isra ayat 26:

"Dan berikanlah haknya kepada kerabat dekat, juga kepada orang miskin dan orang yang dalam perjalanan; dan janganlah kamu menghambur-hamburkan (hartamu) secara boros."

Jika direnungkan pada ayat tersebut, menyebutkan salah suatu cara menjaga silaturahmi yaitu dengan memberikan hak kepada keluarga dekat, bukan hanya berupa materi saja tetapi dengan hal lainnya seperti saling mendoakan. Maka bersedekah juga akan mempererat silaturahmi. Membahas bersedekah terdapat dalam surat Al-Qur'an Surah Al-Hadid ayat 11 yang artinya:

"Barang siapa yang mau meminjamkan kepada Allah pinjaman yang baik, maka Allah akan melipat-gandakan (balasan) pinjaman itu untuknya, dan dia akan memperoleh pahala yang banyak."

Sehingga dalam konteks ini ketika kita bersedekah ke banyak orang maka silaturahmi kita semakin banyak. Karena hal itu akan mempererat antara pemberi dan penerima.

Hal ini dapat kita hubungkan terhadap indeks Narumi-Katayama. Yang mana membahas perkalian setiap derajat. Sebagaimana kita bersedekah ke semua orang bisa kita anggap seperti derajat pada suatu graf maka akan berlipat ganda dan balasan yang kita dapat juga akan berlipat dan bahkan akan memperbanyak silaturahmi dengan berbagai macam orang tanpa membeda-bedakan seperi pada surat pertama yang telah di jelaskan.

Penelitian ini akan menyajikan konsep indeks topologi pada konsep graf yang dibangun oleh suatu grup. Untuk membedakan dengan penelitian sebelumnya peneliti memilih Indeks Narumi-Katayama dari graf pangkat dari grup siklik. Namun graf pangkat yang dibangun dari grup siklik belum pernah dilakukan penelitian sebelumnya, maka sangat menarik dan sangat perlu untuk dibahas..

Sehingga dari beberapa uraian dan pengintegrasian yang telah di jelaskan, maka dari sinilah peneliti ingin mengulik lebih jauh dengan mengambil judul penelitian “Indeks Narumi-Katayama dari Graf Pangkat dari Grup Siklik”

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam dalam penelitian ini adalah bagaimana menentukkan rumus indeks Narumi-Katayama dari dari pangkat dari grup siklik?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, maka tujuan penelitian ini adalah mengetahui proses menentukkan rumus indeks Narumi-Katayama dari graf pangkat dari grup siklik.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Bagi penulis, menambah pengetahuan dan mengembangkan wawasan terkait konsep teori graf, khususnya pada Indeks Narumi-Katayama dari graf pangkat dari grup siklik.
2. Bagi Pembaca, sebagai tambahan wawasan dan sebagai bahan informasi dalam melakukan kajian lebih lanjut tentang Indeks Narumi-Katayama dari graf pangkat dari grup siklik.
3. Bagi lembaga, sebagai tambahan bahan pustaka terkait teori graf khususnya tentang Indeks Narumi-Katayama dari graf pangkat dari grup siklik.

1.5 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini, permasalahan yang akan dibahas dibatasi hanya pada indeks Narumi-Katayama dari graf pangkat dari grup siklik $\mathbb{Z}_{2p}$ dan hanya menggunakan p bilangan prima .

1.6 Definisi Istilah

Definisi istilah yang digunakan dalam penelitian ini, secara garis besar dapat ditulis sebagai berikut:

1. Suatu graf (tak berarah) G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tak kosong berhingga dari elemen yang disebut simpul dan

E adalah himpunan berhingga (boleh kosong) dari sepasang simpul yang disebut sisi.

2. Suatu himpunan tak kosong G dikatakan membentuk grup jika di dalam G didefinisikan sebuah operasi $*$, yang memenuhi sifat tertutup, asosiatif, memiliki elemen identitas dan mempunyai invers.
3. Grup G disebut grup siklik jika terdapat $a \in G$ sedemikian hingga untuk setiap $x \in G$ berlaku $x = a^n$ untuk suatu bilangan bulat n. Selanjutnya a disebut generator G dan dinotasikan $G = \langle a \rangle$.
4. Graf pangkat dari grup G $\Gamma(G)$ adalah graf yang himpunan simpulnya adalah semua elemen dari G dan dua simpul berbeda a dan b bertetangga di G jika dan hanya jika $a^x = b$ dan $b^y = a$ untuk suatu x dan y bilangan bulat positif.
5. Indeks Narumi Katayama dari suatu graf G adalah

$$NK\ (G) = \prod_{v\, \in V(G)} deg(v)$$

Rumus indeks Narumi Katayama merupakan perkalian semua derajat simpul pada suatu graf.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

2.1.1 Operasi Biner

Operasi $*$ pada suatu himpunan tak kosong S adalah pemetaan dari setiap pasang berurutan $x, y \in S$ dengan tepat suatu elemen $x * y \in S$ atau dapat dikatakan bahwa operasi $*$ pada S bersifat tertutup (Setiawan Adi, 2014).

Contoh:

1. Misalkan Z adalah himpunan semua bilangan bulat. Operasi (+) pada Z merupakan operasi biner.

   Bukti

   Maka $\forall\, a, b \in Z$ dan $a + b \in Z$ sehingga jelas bahwa operasi $(+)$ pada Z merupakan operasi biner.

2. Misalkan Z adalah himpunan semua bilangan bulat. Operasi $(\times)$ pada Z merupakan operasi biner.

   Bukti

   Maka $\forall\, a, b \in Z$ dan $a \times b \in Z$ sehingga jelas bahwa oprasi $(\times)$ pada Z merupakan operasi biner.

2.1.2 Konsep Dasar Keterbagian

Suatu bilangan bulat a membagi sesuatu bilangan bulat b, dengan $a \neq 0$ yang ditulis $a|b$. Apabila ada sesuatu bilangan bulat k sedemikian sehingga $b = ka$. Sedangkan a tidak habis membagi b maka ditulis $a \nmid b$ (Handayani, 2020).

Contoh:

$5|30$ karena ada 6 bilangan bulat sehingga $5 \cdot 6 = 30$

$7| - 21$ karena ada -3 bilangan bulat sehingga $7 \cdot (-3) = -21$

$3 \nmid 8$ karena tidak ada k bilangan bulat sehingga $8 = 3k$

Setelah membahas tentang keterbagian, pada penelitian ini akan menggunakan materi kongruensi yang mana materi ini memang berhubungan dengan masalah keterbagian.

Definisi Kongruensi

Jika m suatu bilangan positif, a kongruensi dengan b modulo m dan apabila m membagi $a - b$, ditulis $a \equiv b \ (mod\ m)$. Jika m tidak membagi $a - b$, maka dikatakan a tidak kongruen dengan b, ditulis $a \not\equiv b \ (mod\ m)$ (Irawan dkk, 2014).

Definisi Kongruensi Linier

Bentuk umum kongruensi linier adalah $ax \equiv b \ (mod\ m)$ dengan $a, b, m \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ dan $m > 0$ (Irawan dkk, 2014).

Teorema 2.3

Jika m suatu bilangan positif, maka kongruensi linier $ax \equiv b \ (mod\ m)$ akan punya solusi jika $d = (a, m)|b$, dan pada kasus ini d adalah FPB dari a dan m. Jika a, m relatif prima atau $d = 1$, maka kongruensi memiliki satu penyelesaian (Irawan dkk, 2014).

Bukti:

Kongruensi $ax \equiv b\ (mod\ m)$ mempunyai penyelesaian jika $m|\ ax - b$ menurut definisi kongruensi. Diketahui $d = (a, m)$ maka $d|$a dan d$|m$. Karena $d|a$ maka d habis membagi setia kelipatan a yaitu $d|ax$ dengan x sembarang bilangan bulat. Selanjutnya $d|m$ dan $m|ax - b$ maka berakibat $d|ax - b$, karena $d|ax$ dan $d|ax - b$ yang berakibat $d| - b$ sehingga $d|b.$ Selanjutnya $ax \equiv b\ (mod\ m)$ dapat dinyatkan sebagai $d\left(\frac{a}{d}\right)x \equiv d\left(\frac{b}{d}\right)\ (mod\ m)$ maka dapat ditentukan $\left(\frac{a}{d}\right)x \equiv \left(\frac{b}{d}\right)\ (mod\ \frac{m}{d})$ karena $\left(\frac{a}{d}, \frac{m}{d}\right) = 1$ dan $\left(\frac{a}{d}\right)x \equiv \left(\frac{b}{d}\right)\ (mod\ \frac{m}{d})$ maka menurut teorema kongruensi linear $\left(\frac{a}{d}\right)x \equiv \left(\frac{b}{d}\right)x\ (mod\ \frac{m}{d})$ akan mempunya satu penyelesaian $x = x_0 + t.\frac{m}{d}$ dengan $x_0 \equiv (\frac{a}{d})^{\phi(m)-1}.\left(\frac{b}{d}\right)\ (mod\ m)$ dan $t \in \mathbb{Z}$. Dengan demikian seluruh penyelesaian kongruensi tersebut adalah $x = x_0, x_0 + 1\left(\frac{m}{d}\right), x_0 + 2\left(\frac{m}{d}\right), \dots, x_0 + (d-1)\left(\frac{m}{d}\right)$ (Irawan dkk, 2014). ■

Contoh:

Dalam menentukan solusi $7x \equiv 3\ (mod\ 12)$, dapat dilihat karena FPB $(7,12) = 1$ dan $1|3$, maka kongruensi tersebut mempunyai satu penyelesaian. Sehingga penyelesaiannya $x \equiv 9\ (mod\ 12)$.

Dalam menentukan solusi $3x \equiv 9\ (mod\ 15)$, dapat dilihat karena FPB $(3,15) = 3$ dan $3|9$ maka kongruensi tersebut mempunyai tiga penyelesaian. Sehingga penyelesaiannya $x \equiv 4, x \equiv 9, x \equiv 14\ (mod\ 12)$.

2.1.3 Grup

Suatu himpunan tak kosong G dikatakan membentuk grup jika di dalam G terdapat sebuah operasi $*$, dinotasikan $(G,*)$ jika memenuhi aksioma berikut ini:

1. Operasi $*$ merupakan operasi biner di G. Artinya $\forall a, b \in G$ berlaku $a * b \in G$. Dengan demikian $(G,*)$ berlaku bersifat tertutup.
2. Operasi $*$ bersifat asosiatif. Artinya $\forall a, b \in G$, berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$. Dengan demikian $(G,*)$ berlaku bersifat asosiatif
3. Operasi $*$ memiliki elemen identitas. Artinya $\exists e \in G$ dan $\forall a \in G$ sedemikian sehingga berlaku $a * e = e * a = a$. Dengan demikian $(G,*)$ memiliki elemen identitas.
4. Setiap elemen G mempunyai invers $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G,$ sedemikian sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e,$ maka a^{-1} adalah invers dari elemen a (Suryanti, 2017).

Contoh:

Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ terhadap operasi $+$ merupakan grup

Bukti:

Jika memenuhi ke empat aksioma grup maka $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup:

1. $\mathbb{Z}$ tertutup terhadap operasi $+$ karena $a + b \in \mathbb{Z}$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$.
2. $\mathbb{Z}$ terhadap operasi $+$ bersifat asosiatif karena $(a + b) + c = a + (b + c)$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$
3. Terdapat sebuah elemen identitas operasi $+$ pada $\mathbb{Z}$ yaitu 0

4. Setiap elemen pada $\mathbb{Z}$ memiliki invers terhadap operasi $+$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ terdapat $a^{-1} \in \mathbb{Z}$.

2.1.4 Order Grup dan Order Elemen Grup

Order suatu grup G adalah banyaknya elemen dari G. Jika G berhingga maka order G berhingga dan sebaliknya jika G tak hingga maka order G tak hingga. Misalkan $g \in G$ order dari g dinotasikan dengan $|g|$ yang menyatakan bilangan bilangan bulat positif terkecil n sehingga memenuhi $g^n = e$,dengan e adalah elemen identitas. Jika tidak ada n yang demikian maka $|g| = +\infty$ (Suryanti, 2017).

Setelah memahami definisi dari order grup dan order elemen grup, pada penelitian ini merujuk dua teorema yang dipergunakan , yaitu sebagai berikut:

Teorema 2.1

Misalkan G grup dan $g \in G$, maka g memiliki order berhingga di G jika G adalah grup berhingga (Febyola dkk, 2017).

Bukti:

Misal G adalah grup, $g \in G$ dan $e \in G$ adalah elemen identitas dari G . Karena G tertutup terhadap operasi biner maka $g, g^2, \dots, g^k, \dots, g^h$ dan seterusnya ada di G.

Misal $g^k = g^h$ dengan $k > h$ maka $g^k * (g^h) = g^h * (g^k)$

Karena $g^{k-h} = e$ akibatnya $|g| = k - h$ bilangan positif , misal $k - h = m$.

Maka m adalah bilangan bulat positif berhingga sedemikian sehingga $g^m = e$, akibatnya $|g| \leq h$. Jadi orde dari g berhingga dan g adalah sembarang elemen dari G, maka orde dari grup berhingga adalah berhingga (Febyola dkk, 2017). ■

Teorema 2.2

Misalkan $g \in G$ mempunyai order n, maka $g^k = e$, dimana e adalah elemen identitas jika dan hanya jika $n|k$ (Febyola dkk, 2017).

Bukti:

Akan ditunjukkan $g \in G$ dan $|g| = n$, k adalah bilangan bulat positif dan $n|k$ maka $g^k = e$

jika $n|k$ maka $k = mn$, akibatnya $g^k = g^{nm} = (g^n)^m = e^m = e$.

Misal $g^k = e$, dan andaikan $k = nm + r$ dengan $0 < r < n$. Maka

$$e = g^k = g^{nm+r} = (g^n)^m g^r = e^m g^r = g^r$$

Hal ini kontradiksi dengan kenyataan bahwa $|g| = n$. Maka haruslah $r = 0$, karena bila $r = 0$ maka $g^r = g^0 = e = g^k$ sehingga $k = nm$ dengan kata lain $n|k$ (Febyola dkk,. 2017). ■

Contoh:

Misalkan $(\mathbb{Z}_4, +)$adalah sebuah grup. Order dari $\mathbb{Z}_4$ adalah 4, sedangkan order dari masing-masing elemen di $\mathbb{Z}_4$, adalah sebagai berikut:

1. Order 0 adalah 1, karena $0^1 = 0$
2. Order 1 adalah 4, karena $1^4 = 0$
3. Order 2 adalah 2, karena $2^2 = 0$

4. Order 3 adalah 4, karena $3^4 = 0$

2.1.5 Grup Siklik

Grup G disebut grup siklik jika terdapat $a \in G$ sedemikian hingga untuk setiap $x \in G$ berlaku $x = a^n$ untuk suatu bilangan bulat n. Selanjutnya a disebut generator G yang dinotasikan $G = \langle a \rangle$ (Suryanti, 2017).

Contoh:

Misalkan $(\mathbb{Z}_6, +)$, buktikan bahwa $(\mathbb{Z}_6, +)$ adalah grup siklik dengan generator $\langle 1 \rangle$ dan $\langle 5 \rangle$

Bukti:

Dapat kita tunjukkan

$$\mathbb{Z}_6 = \langle 1 \rangle = \{1^n | \ n \ \in Z\}$$

yang mana dapat kita lihat

$0 = 1^6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ $\quad$ $3 = 1^3 = 1 + 1 + 1$

$1 = 1^1 = 1$ $\quad$ $4 = 1^4 = 1 + 1 + 1 + 1$

$2 = 1^2 = 1 + 1$ $\quad$ $5 = 1^5 = 1 + 1 + 1 + 1 +$

Begitu juga dengan $\mathbb{Z}_6 = \langle 5 \rangle = \{5^n | \ n \ \in Z\}$

$0 = 5^6 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$ $\quad$ $3 = 5^3 = 5 + 5 + 5$

$1 = 5^5 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5$ $\quad$ $4 = 5^2 = 5 + 5$

$2 = 5^4 = 5 + 5 + 5 + 5$ $\quad$ $5 = 5^1 = 5$

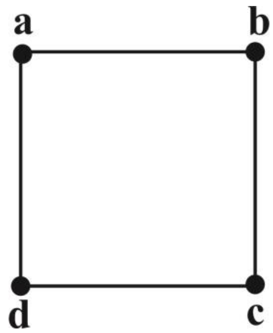
Jadi terbukti bahwa $(\mathbb{Z}_6, +)$ adalah grup siklik dengan generator $\langle 1 \rangle$ dan $\langle 5 \rangle$

2.1.6 Graf

Suatu graf (tak berarah) G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tak kosong berhingga dari elemen yang disebut simpul dan E adalah himpunan berhingga (boleh kosong) dari sepasang simpul yang disebut sisi (Marsudi, 2016).

Contoh:

Sebuah graf $G = (V(G), E(G))$ dengan himpunan simpul $V = \{a, b, c, d\}$ dan himpunan sisi $E = \{(a, b), (b, c), (a, d), (c, d)\}$. Maka graf G sebagi berikut:

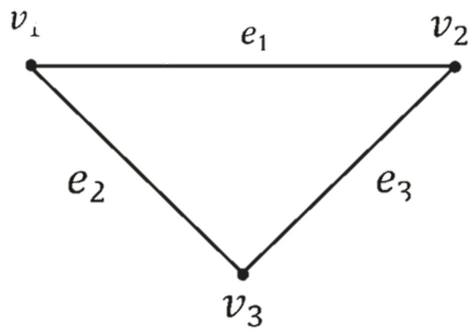


Gambar 2.1 Definisi Graf

2.1.7 Graf Bertetangga dan Terkait Langsung

Misalkan sebuah graf $G = (V, E)$,jika dua simpul $u\ dan\ v \in G$ dihubungkan dengan sisi $e = (u, v)$, maka di katakan bertetangga. Jika sisi $e = (u, v)$, maka simpul u dan sisi e dikatakan terkait langsung begitu pula dengan simpul v dan sisi e (Chartrand dkk, 1986).

Contoh:



Gambar 2.2 Graf Bertetangga dan Terkait Langsung

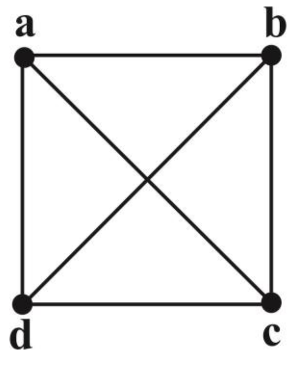
Dari gambar 2.2 dapat dilihat bahwa v_1 bertetangga dengan v_2 dan terkait dengan sisi e_1. v_1 bertetangga dengan $v_3$dan terkait dengan sisi e_2. v_2 bertetangga dengan v_3 dan terakit dengan sisi e_3.

2.1.8 Derajat Graf

Simpul $v \in V(G)$ dinotasikan dengan $deg(v)$ adalah jumlah sisi dari G yang terkait dengan v (Marsudi, 2016).

Contoh:

Misalkan suatu graf digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.3 Derajat Graf

Maka dari gambar dapat ditentukan derajat setiap simpul di graf:

$$\deg(a) = 3 \;\; deg(b) = 3$$

$$\deg(c) = 3 \;\; deg(d) = 3$$

2.1.9 Graf Pangkat

Graf pangkat dari grup $G, \Gamma(G)$ adalah graf yang himpunan simpulnya adalah elemen dari G dan dua simpul berbeda a dan b bertetangga jika dan hanya jika $a^x = b$ dan $b^y = a$ untuk suatu x dan y bilangan bulat positif (Chelvam & Sattanathan, 2013).

Contoh:

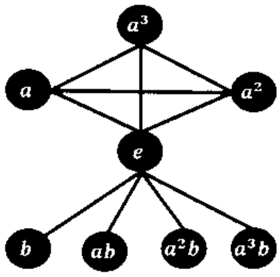
Graf pangkat dari grup dihedral $D_{2.3}$

Dalam menentukan representasi graf dari grup dihedral $D_{2.3} = \{e, a, a^2, b, ab, a^2b\}$ terlebih dahulu dibuat tabel 2.1 sebagai berikut:

Tabel 2. 1 Pangkat dari Grup Dihedral $D_{2.3}$

Pangkat	e	a	a^2	b	ab	a^2b
1	e	a	a^2	b	ab	a^2b
2	e	a^2	a	e	e	e
3	e	e	e	b	ab	a^2b

Berdasarkan tabel 2.1 dapat diperoleh bentuk graf pangkat dari grup dihedral $D_{2.3}$ pada gambar 2.4 sebagai berikut:



Gambar 2.4 Graf Pangkat dari Grup Dihedral $D_{2.3}$

2.1.10 Indeks Narumi-Katayama

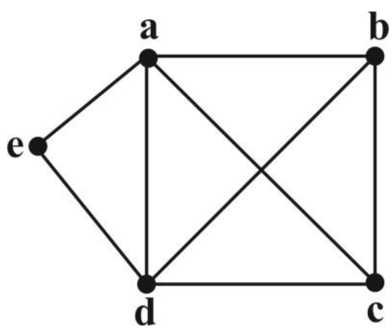
Indeks topologi diklasifikasikan ke dalam beberapa kelompok, salah satunya adalah indeks dengan derajat simpul contohnya yaitu indeks Narumi Katayama. Pada tahun 1980 Indeks Narumi-Katayama didefinisikan sebagai berikut:

$$NK\ (G)\ =\ \prod_{v\ \in V(G)} \deg(v)$$

Bentuk indeks Narumi-Katayam merupakan perkalian semua derajat simpul pada suatu graf (Ascioglu & Cagul, 2018).

Contoh:

Perhatikan graf G pada gambar 2.5:



Gambar 2.5 Graf G

Dari Gambar 2.5 dapat diperoleh masing-masing derajat simpulnya sebagai berikut:

$$\deg(a) = 4\,, \deg(b) = 3$$

$$\deg(c) = 3\,, \deg(d) = 4$$

$$\deg(e) = 2$$

Setelah mengetahui masing-masing derajat graf maka dapat kita tentukan Indeks Narumi-Katayama dari graf tersebut adalah sebagai berikut:

$$NK\ (G) = \prod_{v\ \in V(G)} \deg(v)$$

$$= \deg(a) \times \deg(b) \times \deg(c) \times \deg(d) \times \deg(e)$$

$$= 4 \times 3 \times 3 \times 4 \times 2$$

$$= 288$$

2.2 Kajian Integrasi Topik Dengan Al-Qur'an

2.2.1 Integrasi Graf Pangkat dari Grup Siklik dengan Al-Qur'an

Sebagai makhluk Allah hendaklah selalu saling menjaga silaturahmi dengan sesama manusia. Dengan saling berbuat baik kepada sesama, saling membagi rezeki dan juga saling meringankan beban saudara yang kesusahan. Sebagaimana Al-Qur'an surat Al-Hujurrat ayat 10. Ayat ini berbunyi:

"*Sesungguhnya orang-orang mukmin adalah bersaudara, karena itu damaikanlah antara kedua saudaramu dan berdakwalah kepada Allah supaya kamu mendapat rahmat".*

Dalam tafsir Ibnu Katsir, ayat tersebut dijelaskan bahwa seorang mukmin dengan mukmin lainnya di ibaratkan seperti hubugan kepala dengan seluruh tubuh. Seorang mukmin akan merasa sakit karena orang mukmin lainnya sebagaimana badan akan merasakan sakit karena sakit kepala. Sehingga orang mukim dengan mukmin lainnya merupakan saudara.

Hal tersebut jelas membahas bahwa islam menganjurkan bahwa untuk tetap menjalin tali persaudaraan karena sesama mukmin adalah saudara. Hal ini dapat kita dinyatakan dalam teori graf. Setiap manusia dengan manusia lain akan menjalin hubungan tali persaudaraan. Seperti halnya dalam konsep terbentuknya suatu graf dari sepasang simpul yang bertetangga dengan sisi (Tafsir Ibnu Katsir, 2003).

2.2.2 Integrasi Indeks Narumi-Katayama dengan Al-Qur'an

Membahas lebih jauh tentang tali persaudaraan dalam surat Al-Isra ayat 26:

"Dan berikanlah haknya kepada kerabat dekat, juga kepada orang miskin dan orang yang dalam perjalanan; dan janganlah kamu menghambur-hamburkan (hartamu) secara boros."

Dalam ayat tersebut diperintahkan cara menjaga silaturahmi yaitu dengan memberikan hak kepada keluarga dekat ataupun kepada sesama manusia yang saling membutuhkan untuk meringankan beban. Maka bersedekah juga akan mempererat silaturahmi.

Membahas bersedekah selanjutnya, terdapat firman Allah dalam Al-Qur'an Surah Al-Hadid ayat 11 yang artinya:

"Barang siapa yang mau meminjamkan kepada Allah pinjaman yang baik, maka Allah akan melipat-gandakan (balasan) pinjaman itu untuknya, dan dia akan memperoleh pahala yang banyak."

Dalam tafsir Ibnu Kasir, barang siapa yang meminjamkan sesuatu kepada sesama muslim dijalan Allah secara tulus, ikhlas dan dengan niat yang baik. Maka dalam ayat tersebut Allah berfirman akan melipat gandakan pembayaran kepadanya dengan lipat ganda yang banyak dan seseorang itu akan mendapatkan hal baik yang berlipat ganda pula. Sehingga dalam konteks ini ketika kita bersedekah ke banyak orang maka silaturahmi kita akan semakin banyak. Karena hal itu akan mempererat antara pemberi dan penerima. Sebagaimana dengan konsep pada perhitungan Narumi-Katayama pada perkalian setiap derajat dari suatu graf yang menghasilakn hasil yang berlipat ganda (Tafsir Ibnu Katsir, 2003).

2.3 Kajian Topik Dengan Teori Pendukung

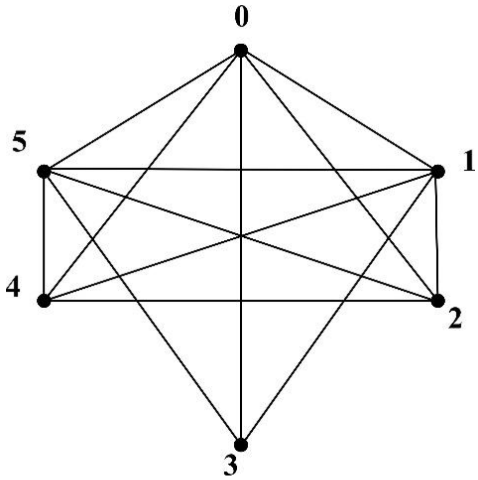
Untuk mencari Indeks Narumi-Katayama dari graf pangkat dari grup siklik, akan dicari terlebih dahulu graf pangkat dari grup siklik $\mathbb{Z}_{2p}$. Adapun salah satu graf pangkat dari grup siklik $\mathbb{Z}_{2p}$ adalah sebagai berikut:

Jika $p = 3$ maka dalam menentukan representasi grafnya terlebih dahulu menggunakan tabel pangkatnya pada tabel 2.2 sebagai berikut:

Tabel 2.2 Pangkat dari Grup Siklik $\mathbb{Z}_6$

Pangkat	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
1	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
2	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
3	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
4	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
5	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
6	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$

Kemudian dari tabel 2.2 dapat di gambarkan bentuk grafnya sebagai berikut:



Gambar 2.6 Graf dari Grup Siklik $\mathbb{Z}_{2p}$

Selanjutnya dari gambar 2.6 akan dicari semua derajat dari masing-masing graf. Sebagai berikut.

$$\deg(0) = 5 \ \ deg(1) = 5$$

$$\deg(2) = 4 \ \ deg(3) = 3$$

$$\deg(4) = 4 \ \ \deg(5) = 5$$

Kemudian dicari indeks Narumi-Katayama dari setiap graf berpagkat dari grup siklik.

$$NK\ (\mathbb{Z}_6\ ) = \prod_{v\ \in V} \deg(v)$$

$$= \deg(0) \times \deg(1) \times \deg(2) \times \deg(3) \times \deg(4) \times \deg(5)$$

$$= 5 \times 5 \times 4 \times 3 \times 4 \times 5$$

$$= 5^2 \times 4^2 \times 3$$

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Dalam penelitian ini, penulis menggunakan jenis penelitian kepustakaan (*library research*), yaitu mengkaji informasi dan data yang berasal bahan yang tertulis serta terkait indeks Narumi-Katayama dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$. Penelitian ini mengumpulkan informasi terkait penelitian dari buku, artikel jurnal, dokumen dan lainnya yang kemudian dari referensi tersebut diambil beberapa landasan teori yang dipergunakan sebagai dasar penelitian ini.

3.2 Pra Penelitian

Proses penelitian diawali dengan mencari literatur landasan teori yang dijadikan rujukan dalam penelitian. Landasan teori bersumber dari jurnal, buku dan lainnya yang akan dipergunakan sebagai tumpuan dasar dalam penelitian ini. Setelah literatur pendukung yang berkaitan dengan topik penelitian telah terkumpul maka dapat juga memilih beberapa ayat dalam Al-Qur'an yang dapat di integrasikan dengan topik penelitian ini. Kemudian dari tumpuan dasar landsan teori, perlu memahami konsep menyeluruh tentang graf pangkat dari grup siklik, dan kemudian memahami pula konsep tentang pengintegrasian pada beberapa ayat Al-Qur'an. Barulah proses selanjutnya adalah mulai menentukan elemen pada setiap graf pangkat dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$ dengan $p \in \{2,3,5,7,11\}$ untuk membantu proses memunculkan dugaan-dugaan sampai mengetahui rumus indeks Narumi-Katayama dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$.

3.3 Tahapan Penelitian

Tahapan penelitian yang dipergunakan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menentukan indeks Narumi-Katayama dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$ dengan $p \in \{2,3,5,7,11\}$, untuk memunculkan dugaan. Dalam bercobaan tersebut terlebih dahulu menentukan representasi $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$ dengan menggunakan tabel dan selanjutnya membentuk grafnya,
2. Menentukan derajat setiap simpul $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$ dengan melihat dari bentuk graf yang telah diperoleh dan menentukan rumus indeks Narumi-Katayama dari setiap $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$,
3. Menentukan indeks Narumi-Katayama dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$ pada percobaan sebelumnya, dan
4. Membuktikan teorema dari pola yang telah didapatkan dengan bantuan beberapa materi yang ada di kajian teori.

BAB IV

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dijelaskan proses menentukan rumus Indeks Narumi-Katayama dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$ dengan p bilangan prima dengan $p \geq 3$. Adapun pada bab ini terdapat dua poin yaitu poin pertama akan memberikan penjelasan berupa dugaan-dugaan representasi $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$, dugaan setiap derajat $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$ serta dugaan pola Indeks Narumi-Katayama dan pada poin kedua akan dibuktikan pola rumus Indeks Narumi-Katayama pada $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{2p}\right)$.

4.1 Graf Pangkat dari Grup Siklik $\mathbb{Z}_{2p}$

Adapun langkah-langkah dalam membentuk representasi $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$ yaitu dengan menggunakan tabel pangkat dari grup siklik, selanjutnya akan ditentukan setiap derajat dari graf dan kemudian menentukan rumus indeks Indeks Narumi-Katayama $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$. Sedangkan pada poin ini akan mengambil dugaan $\mathbb{Z}_{2p}$ dengan p bilangan prima dengan $p \geq 3$ dengan mengambil bilangan prima 2,3,5,7 dan 11.

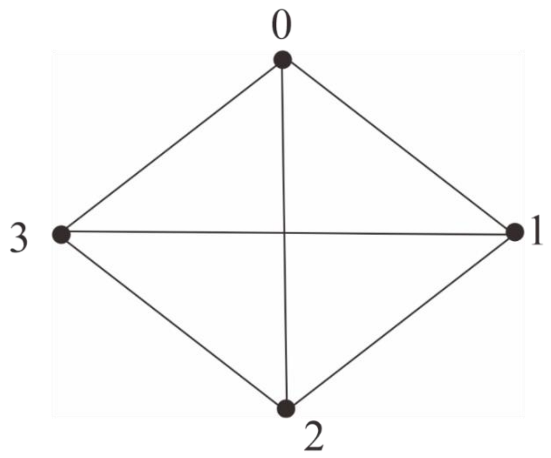
4.1.1 Graf Pangkat dari Grup Siklik $\mathbb{Z}_4$

Dalam menentukan representasi graf pangkat dari grup siklik $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0},\ \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \}$, akan dibuat tabel 4.1:

Table 4.1 Pangkat dari Grup Siklik $\mathbb{Z}_4$

Pangkat	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
1	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
2	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
3	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
4	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$

Berdasarkan tabel diperoleh bentuk $\left(\Gamma(\mathbb{Z}_4)\right)$ pada gambar 4.1:



Gambar 4.1 Graf Pangkat dari Grup Siklik $\mathbb{Z}_4$

Selanjutnya dari gambar 4.1 akan dicari semua derajat dari masing-masing graf. Sebagai berikut:

$$\deg(0) = 3\,, \deg(1) = 3$$

$$\deg(2) = 3\,, \deg(3) = 3$$

Berdasarkan dari derajat setiap graf maka dapat ditentukan rumus indeks Narumi-Katayama dari setiap graf berpagkat dari grup siklik sebagai berikut:

$$NK\ (\Gamma(\mathbb{Z}_6)\ ) = \prod_{v\,\in V} \deg(v)$$

$$= \deg(0) \times \deg(1) \times \deg(2) \times \deg(3)$$

$$= 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

$$= 3^4$$

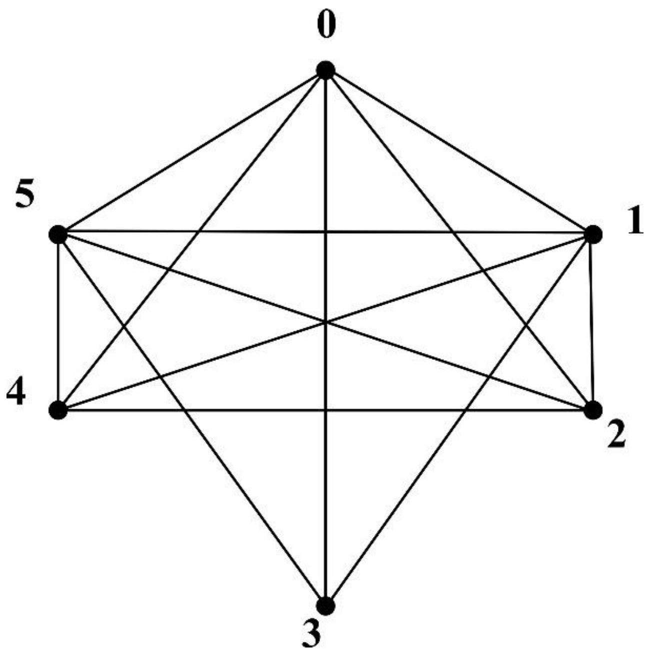
4.1.2 Graf Pangkat dari Grup Siklik $\mathbb{Z}_6$

Dalam menentukan representasi graf pangkat dari grup siklik $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$, akan dibuat tabel 4.2:

Table 4.2 Pangkat dari Grup Siklik $\mathbb{Z}_6$

Pangkat	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{\mathbf{5}}$
1	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
2	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
3	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
4	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
5	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
6	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$

Berdasarkan tabel diperoleh bentuk $(\Gamma(\mathbb{Z}_6))$ pada gambar 4.2:



Gambar 4.2 Graf Pangkat dari Grup Siklik $\mathbb{Z}_6$

Selanjutnya dari gambar 4.2 akan dicari semua derajat dari masing-masing graf. Sebagai berikut:

$$\deg(0) = 5\,, \deg(1) = 5$$

$$\deg(2) = 4\,, \deg(3) = 3$$

$$\deg(4) = 4\,, \deg(5) = 5$$

Berdasarkan dari derajat setiap graf maka dapat ditentukan rumus indeks Narumi-Katayama dari setiap graf berpagkat dari grup siklik sebagai berikut:

$$NK\ (\Gamma(\mathbb{Z}_6)\ ) = \prod_{v\,\in V} \deg(v)$$

$$= \deg(0) \times \deg(1) \times \deg(2) \times \deg(3) \times \deg(4) \times \deg(5)$$

$$= 5 \times 5 \times 4 \times 3 \times 4 \times 5$$

$$= 5^3 \times 4^2 \times 3$$

4.1.3 Graf Pangkat dari Grup Siklik $\mathbb{Z}_{10}$

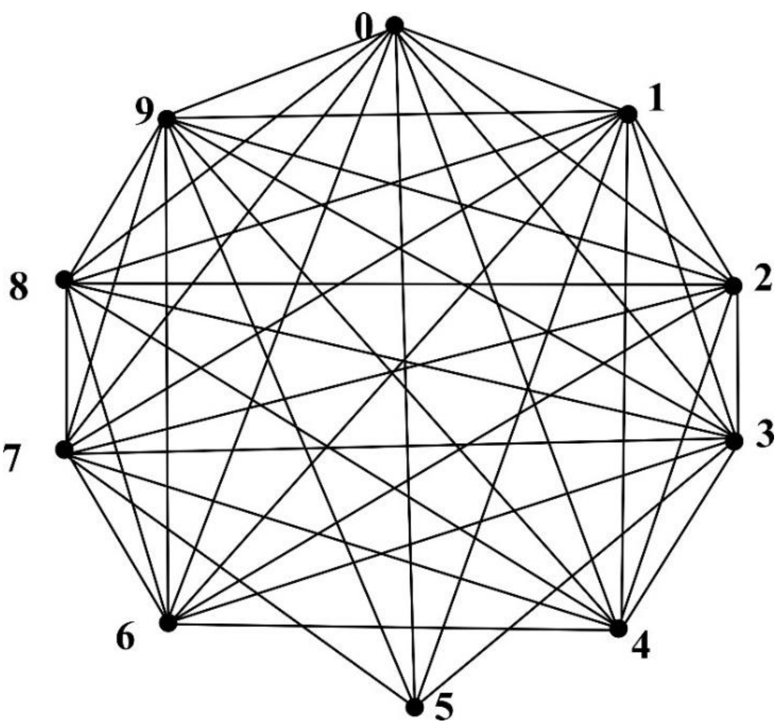
Dalam menentukan representasi graf pangkat dari grup siklik $\mathbb{Z}_{10} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}\}$, akan dibuat tabel 4.3:

Table 4.3 Pangkat dari Grup Siklik $\mathbb{Z}_{10}$

Pangkat	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{\mathbf{5}}$	$\bar{\mathbf{6}}$	$\bar{\mathbf{7}}$	$\bar{\mathbf{8}}$	$\bar{\mathbf{9}}$
1	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$
2	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$
3	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{8}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{\bar{7}}$
4	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$

5	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$
6	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$
7	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{8}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{9}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
8	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
9	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
10	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$

Berdasarkan tabel diperoleh bentuk $\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{10})\right)$ pada gambar 4.3:



Gambar 4.3 Graf Pangkat dari Grup Siklik $\mathbb{Z}_{10}$

Selanjutnya dari gambar 4.3 akan dicari semua derajat dari masing-masing graf. Sebagai berikut.

$$\deg(0) = 9\,, \deg(1) = 9$$

$$\deg(2) = 8\,, \deg(3) = 9$$

$$\deg(4) = 8\,, \deg\ (5) = 5$$

$$\deg(6) = 8\ \ , \deg(7) = 9$$

$$\deg(8) = 8\,, \deg(9) = 9$$

Berdasarkan dari hasil derajat setiap graf maka dapat ditentukan rumus indeks Narumi-Katayama dari setiap graf berpagkat dari grup siklik sebagai berikut:

$$NK\ (\Gamma(\mathbb{Z}_{10})\ ) = \prod_{v\,\in V} \deg(v)$$

$$= \deg(0) \times \deg(1) \times \deg(2) \times \deg(3) \times \deg(4) \times \deg(5)$$
$$\times \deg(6) \times \deg(7) \times \deg(8) \times \deg(9)$$

$$= 9 \times 9 \times 8 \times 9 \times 8 \times 5 \times 8 \times 9 \times 8 \times 9$$

$$= 9^5 \times 8^4 \times 5$$

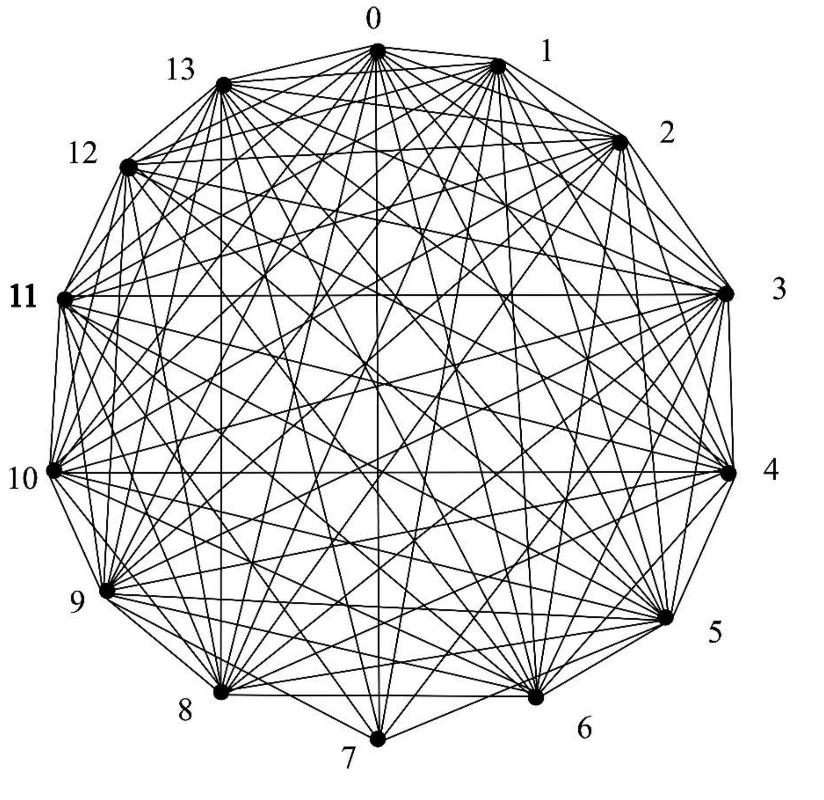
4.1.4 Graf Pangkat dari Grup Siklik $\mathbb{Z}_{14}$

Dalam menentukan representasi graf pangkat dari grup siklik $\mathbb{Z}_{14} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}\}$, akan dibuat tabel 4.4:

Table 4.4 Pangkat dari Grup Siklik $\mathbb{Z}_{14}$

Pangkat	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$
1	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$
2	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$
3	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\overline{12}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$	$\overline{10}$	$\overline{13}$	$\bar{2}$	5	$\bar{8}$	$\overline{11}$
4	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\overline{12}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\overline{10}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\overline{12}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\overline{10}$
5	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\overline{10}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\overline{11}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\overline{12}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\overline{13}$	4	$\bar{9}$
6	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\overline{12}$	$\bar{4}$	$\overline{10}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\overline{12}$	$\bar{4}$	$\overline{10}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$
7	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\overline{10}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$
8	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\overline{10}$	$\bar{4}$	$\overline{12}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\overline{10}$	$\bar{4}$	$\overline{12}$	$\bar{6}$
9	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\bar{4}$	$\overline{13}$	$\bar{8}$	$\bar{3}$	$\overline{12}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\overline{11}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\overline{10}$	$\bar{5}$
10	$\bar{0}$	$\overline{10}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\overline{12}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\overline{10}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\overline{12}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$
11	$\bar{0}$	$\overline{11}$	$\bar{8}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\overline{13}$	$\overline{10}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\overline{12}$	$\bar{9}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
12	$\bar{0}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	4	$\bar{2}$
13	$\bar{0}$	$\overline{13}$	$\overline{12}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
14	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$

Berdasarkan tabel diperoleh bentuk $\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{14})\right)$ pada gambar 4.4:



Gambar 4.4 Graf Pangkat dari Grup Siklik $\mathbb{Z}_{14}$

Selanjutnya dari gambar 4.4 akan dicari semua derajat dari masing-masing graf. Sebagai berikut.

$$\deg(0) = 13\,, \deg(1) = 13$$

$$\deg(2) = 12\,, \deg(3) = 13$$

$$\deg(4) = 12\ \ , \deg(5) = 13$$

$$\deg(6) = 12\,, \deg(7) = 7$$

$$\deg(8) = 12\ \ , \deg(9) = 13$$

$$\deg(10) = 12\ \ , \deg(11) = 13$$

$$\deg(12) = 12\ \ , \deg(13) = 13$$

Berdasarkan dari hasil derajat setiap graf maka dapat ditentukan rumus indeks Narumi-Katayama dari setiap graf berpangkat dari grup siklik sebagai berikut:

$$NK\ (\Gamma(\mathbb{Z}_{14})\ ) = \prod_{v\,\in V} \deg(v)$$

$$= \deg(0) \times \deg(1) \times \deg(2) \times \deg(3) \times \deg(4) \times \deg(5)$$

$$\times \deg(6) \times \deg(7) \times \deg(8) \times \deg(9) \times \deg(10)$$

$$\times \deg(11) \times \deg(12) \times \deg(13)$$

$$= 13 \times 13 \times 12 \times 13 \times 12 \times 13 \times 12 \times 7 \times 12 \times 13 \times 12 \times 13$$

$$\times 12 \times 13$$

$$= 13^7 \times 12^6 \times 7$$

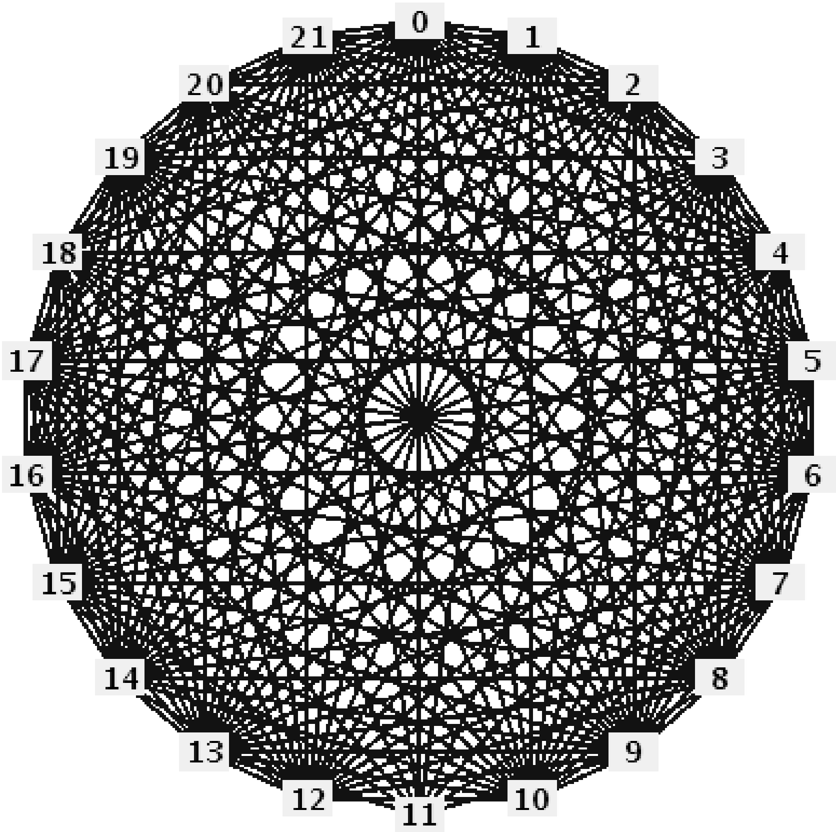
4.1.5 Graf Pangkat dari Grup Siklik $\mathbb{Z}_{22}$

Dalam menentukan representasi graf pangkat dari grup siklik $\mathbb{Z}_{22} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{20}, \overline{21}\}$, akan dibuat tabel 4.5:

Table 4.5 Pangkat dari Grup Siklik $\mathbb{Z}_{22}$

Pangkat	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$
1	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$
2	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\overline{14}$	$\overline{16}$	$\overline{18}$	$\overline{20}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\overline{14}$	$\overline{16}$	$\overline{18}$	$\overline{20}$
3	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{12}$	$\overline{15}$	$\overline{18}$	$\overline{21}$	$\overline{2}$	$\overline{5}$	$\overline{8}$	$\overline{11}$	$\overline{14}$	$\overline{17}$	$\overline{20}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{7}$	$\overline{10}$	$\overline{13}$	$\overline{16}$	$\overline{19}$
4	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{12}$	$\overline{16}$	$\overline{20}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{10}$	$\overline{14}$	$\overline{18}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{12}$	$\overline{16}$	$\overline{20}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{10}$	$\overline{14}$	$\overline{18}$
5	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{15}$	$\overline{20}$	$\overline{3}$	$\overline{8}$	$\overline{13}$	$\overline{18}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{11}$	$\overline{16}$	$\overline{21}$	$\overline{4}$	$\overline{9}$	$\overline{14}$	$\overline{19}$	$\overline{2}$	$\overline{7}$	$\overline{12}$	$\overline{17}$
6	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{18}$	$\overline{2}$	$\overline{8}$	$\overline{14}$	$\overline{20}$	$\overline{4}$	$\overline{10}$	$\overline{16}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{18}$	$\overline{2}$	$\overline{8}$	$\overline{14}$	$\overline{20}$	$\overline{4}$	$\overline{10}$	$\overline{16}$
7	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{14}$	$\overline{21}$	$\overline{6}$	$\overline{13}$	$\overline{20}$	$\overline{5}$	$\overline{12}$	$\overline{19}$	$\overline{4}$	$\overline{11}$	$\overline{18}$	$\overline{3}$	$\overline{10}$	$\overline{17}$	$\overline{2}$	$\overline{9}$	$\overline{16}$	$\overline{1}$	$\overline{8}$	$\overline{15}$
8	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{16}$	$\overline{2}$	$\overline{10}$	$\overline{18}$	$\overline{4}$	$\overline{12}$	$\overline{20}$	$\overline{6}$	$\overline{14}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{16}$	$\overline{2}$	$\overline{10}$	$\overline{18}$	$\overline{4}$	$\overline{12}$	$\overline{20}$	$\overline{6}$	$\overline{14}$
9	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{18}$	$\overline{6}$	$\overline{14}$	$\overline{1}$	$\overline{10}$	$\overline{19}$	$\overline{6}$	$\overline{15}$	$\overline{2}$	$\overline{11}$	$\overline{20}$	$\overline{7}$	$\overline{16}$	$\overline{3}$	$\overline{12}$	$\overline{21}$	$\overline{8}$	$\overline{17}$	$\overline{4}$	$\overline{13}$
10	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{20}$	$\overline{8}$	$\overline{18}$	$\overline{6}$	$\overline{16}$	$\overline{4}$	$\overline{14}$	$\overline{2}$	$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{20}$	$\overline{8}$	$\overline{18}$	$\overline{6}$	$\overline{16}$	$\overline{4}$	$\overline{14}$	$\overline{2}$	$\overline{12}$
11	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$
12	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{2}$	$\overline{14}$	$\overline{4}$	$\overline{16}$	$\overline{6}$	$\overline{18}$	$\overline{8}$	$\overline{20}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{2}$	$\overline{14}$	$\overline{4}$	$\overline{16}$	$\overline{6}$	$\overline{18}$	$\overline{8}$	$\overline{20}$	$\overline{10}$
13	$\overline{0}$	$\overline{13}$	$\overline{4}$	$\overline{17}$	$\overline{8}$	$\overline{21}$	$\overline{12}$	$\overline{3}$	$\overline{16}$	$\overline{7}$	$\overline{20}$	$\overline{11}$	$\overline{2}$	$\overline{15}$	$\overline{6}$	$\overline{19}$	$\overline{10}$	$\overline{1}$	$\overline{14}$	$\overline{5}$	$\overline{18}$	$\overline{9}$
14	$\overline{0}$	$\overline{14}$	$\overline{6}$	$\overline{21}$	$\overline{12}$	$\overline{4}$	$\overline{18}$	$\overline{10}$	$\overline{2}$	$\overline{16}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{14}$	$\overline{6}$	$\overline{20}$	$\overline{12}$	$\overline{4}$	$\overline{18}$	$\overline{10}$	$\overline{2}$	$\overline{16}$	$\overline{8}$
15	$\overline{0}$	$\overline{15}$	$\overline{8}$	$\overline{1}$	$\overline{16}$	$\overline{9}$	$\overline{2}$	$\overline{17}$	$\overline{10}$	$\overline{3}$	$\overline{18}$	$\overline{11}$	$\overline{4}$	$\overline{19}$	$\overline{12}$	$\overline{5}$	$\overline{20}$	$\overline{13}$	$\overline{6}$	$\overline{21}$	$\overline{14}$	$\overline{7}$
16	$\overline{0}$	$\overline{16}$	$\overline{10}$	$\overline{4}$	$\overline{20}$	$\overline{14}$	$\overline{8}$	$\overline{2}$	$\overline{18}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{16}$	$\overline{10}$	$\overline{4}$	$\overline{20}$	$\overline{14}$	$\overline{8}$	$\overline{2}$	$\overline{18}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$
17	$\overline{0}$	$\overline{17}$	$\overline{12}$	$\overline{11}$	$\overline{2}$	$\overline{19}$	$\overline{14}$	$\overline{9}$	$\overline{4}$	$\overline{21}$	$\overline{16}$	$\overline{11}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{18}$	$\overline{13}$	$\overline{8}$	$\overline{3}$	$\overline{20}$	$\overline{15}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$
18	$\overline{0}$	$\overline{18}$	$\overline{14}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{20}$	$\overline{16}$	$\overline{12}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{18}$	$\overline{14}$	$\overline{10}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{20}$	$\overline{16}$	$\overline{12}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$
19	$\overline{0}$	$\overline{19}$	$\overline{16}$	$\overline{10}$	$\overline{10}$	$\overline{7}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{20}$	$\overline{17}$	$\overline{14}$	$\overline{11}$	$\overline{8}$	$\overline{5}$	$\overline{2}$	$\overline{21}$	$\overline{18}$	$\overline{15}$	$\overline{12}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$
20	$\overline{0}$	$\overline{20}$	$\overline{18}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{20}$	$\overline{18}$	$\overline{16}$	$\overline{14}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
21	$\overline{0}$	$\overline{21}$	$\overline{20}$	$\overline{19}$	$\overline{18}$	$\overline{17}$	$\overline{16}$	$\overline{15}$	$\overline{14}$	$\overline{13}$	$\overline{12}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$
22	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$

Berdasarkan tabel diperoleh bentuk $(\Gamma(\mathbb{Z}_{22}))$ pada gambar 4.5:



Gambar 4.5 Graf Pangkat dari Grup Siklik $\mathbb{Z}_{22}$

Selanjutnya dari gambar 4.5 akan dicari semua derajat dari masing-masing graf. Sebagai berikut.

$$\deg(0) = 21, \deg(1) = 21$$

$$\deg(2) = 20, \deg(3) = 21$$

$$\deg(4) = 20 \ , \deg(5) = 21$$

$$\deg(6) = 20 \ , \deg(7) = 21$$

$$\deg(8) = 20 \ , \deg(9) = 21$$

$$\deg(10) = 20 \ , \deg(11) = 21$$

$$\deg(12) = 20 \ , \deg(13) = 21$$

$$\deg(11) = 20\ ,\deg(15) = 21$$

$$\deg(16) = 20\ ,\deg(17) = 21$$

$$\deg(18) = 20\ ,\deg(19) = 21$$

$$\deg(20) = 20\ ,\deg(21) = 21$$

Berdasarkan dari hasil derajat setiap graf maka dapat ditentukan rumus indeks Narumi-Katayama dari setiap graf berpagkat dari grup siklik sebagai berikut:

$$NK\ (\ \Gamma(\mathbb{Z}_{22})\ ) = \prod_{v\ \in V} \deg(v)$$

$$= \deg(0) \times \deg(1) \times \deg(2) \times \deg(3) \times \deg(4) \times \deg(5)$$

$$\times \deg(6) \times \deg(7) \times \deg(8) \times \deg(9) \times \deg(10)$$

$$\times \deg(11) \times \deg(12) \times \deg(13) \times \deg(14) \times \deg(15)$$

$$\times \deg(16) \times \deg(17) \times \deg(18) \times \deg(19) \times \deg(20)$$

$$\times \deg(21)$$

$$= 21 \times 21 \times 20 \times 21 \times 20 \times 21 \times 20 \times 21 \times 20 \times 21 \times 20$$

$$\times 11 \times 20 \times 21 \times 20 \times 21 \times 20 \times 21 \times 20 \times 21 \times 20 \times 21$$

$$= 21^{11} \times 20^{10} \times 11$$

4.2 Menentukan Pola Rumus Indeks Narumi-Katayama dari Graf Pangkat dari Grup Siklik $\mathbb{Z}_{2p}$

Berdasarkan perhitungan beberapa sampel pada $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$ dengan $p =$ 3,5,7 dan 11 yang telah dilakukan sebelumnya , maka diperoleh pola setiap derajat sebagai berikut:

Table 4.6 Pola Setiap Derajat $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$

p	$\deg(\mathbb{Z}_{2p})$
3	5,5,4,3,4,5
5	9,9,8,9,8,5,8,9,8,9
7	13,13,12…,7,…12,13
11	21,21,20,…,11,…,20,21

Sehingga diperoleh dugaan bahwa :

$$\deg(\mathbb{Z}_{2p}) = 2p-1, 2p-1, \ldots, p, \ldots, 2p-2, 2p-1$$

Lemma 4.1

Misalkan p merupakan bilangan prima dengan $p \geq 3$. Derajat masing masing simpul di $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$ adalah :

1. $\deg(\bar{0}) = 2p-1$
2. $\deg(\bar{p}) = p$
3. $\deg(v) = 2p-1$, dengan v bilangan ganjil $\in \mathbb{Z}_{2p}$dan $v \neq p$
4. $\deg(w) = 2p-2$, dengan w bilangan genap $\in \mathbb{Z}_{2p}$ dan $v \neq 0$

Bukti:

Diketahui bahwa elemen dari $\mathbb{Z}_{2p} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \dots, \overline{2p-1}\}$,

1. Setiap $u \in \mathbb{Z}_{2p}$ memiliki order berhingga. Sehingga $n \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $u^n = 0$. Dengan demikian 0 bertetangga dengan semua $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$ yang berarti deg $(0) = 2p - 1$.
2. Misal $v \in \mathbb{Z}_{2p}$ dan $v \neq p$

   Jika v ganjil, maka FPB $(2p, v) = 1$ sehingga kongruensi $vx \equiv p \ (mod\ 2p)$ memiliki solusi. Akibatnya v bertetangga dengan p. Jika v genap, maka FPB $(2p, v) = 2$ sehingga kongruensi $vx \equiv p \ (mod\ 2p)$ tidak memiliki solusi karena $2 \nmid p$. Dengan demikian p bertetangga dengan v ganjil yang berarti deg $(p) = p$.
3. Misal $v \in \mathbb{Z}_{2p}$, $v \neq p$ dan v ganjil

   Untuk setiap $u \in \mathbb{Z}_{2p}$ dan $u \neq v$, karena FPB $(2p, v) = 1 | u$ maka kongruensi $vx \equiv u \ (mod\ 2p)$ memiliki solusi. Dengan demikian v ganjil bertetangga dengan dengan semua $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$ yang berarti deg $(v) = 2p - 1$.
4. Misal $w \in \mathbb{Z}_{2p}$, $w \neq 0$ dan w genap

   Untuk setiap $u \in \mathbb{Z}_{2p}$, dengan u genap $u \neq w$, karena FPB $(2p, w) = 2 | u$ maka kongruensi $wx \equiv u \ (mod\ 2p)$ memiliki solusi. Dengan demikian w bertetangga dengan semua $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$ tetapi akibat dari poin 1 dan 2 deg $(w) = 2p - 2$. ■

Teorema 4.1

Misalkan p merupakan bilngan prima dengan $p \geq 3$, dan merupakan $(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p}))$. Maka Indeks Narumi-Katayama dari $(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p}))$ adalah:

$$NK\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})\right) = (2p-1)^{p} \times (2p-2)^{p-1} \times p$$

Bukti:

Berdasarkan lemma 4.1 bahwa $(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p}))$ memiliki graf dengan simpul yang terbagi menjadi empat dan masing-masing memiliki pola derajat maka dapat diperoleh:

$$NK\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})\right) = \prod_{v \in V} \deg(v)$$

$$NK\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})\right) = \deg(0) \times \deg(p) \times \prod_{\substack{v \in V(G) \\ v\ ganjil \\ v \neq p}} \deg(v) \times \prod_{\substack{w \in V(G) \\ w\ genap \\ w \neq 0}} \deg(w)$$

$$= (2p-1) \times p \times (2p-1)^{p-1} \times (2p-2)^{p-1}$$

$$= p \times (2p-1)^{p} \times (2p-2)^{p-1} \blacksquare$$

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada penelitian ini, proses dalam menentukan rumus indeks Narumi-Katayama dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$ adalah sebagai berikut:

1. Menentukan indeks Narumi-Katayama dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$ dengan $p \in \{2,3,5,7,11\}$, untuk memunculkan dugaan,
2. Menentukan derajat setiap simpul $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$ dan menentukan rumus indeks Narumi-Katayama dari $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{2p}\right)$, dan
3. Menentukan indeks Narumi-Katayama dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$.

Sehingga dari proses tersebut dapat diperoleh rumus Indeks Narumi-Katayama dari graf pangkat dari grup siklik $\mathbb{Z}_{2p}$ dengan p bilangan prima sebagai berikut:

$$NK\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})\right) = \begin{cases} (2p-1)^p & jika\ \ p = 2 \\ p \times (2p-1)^p \times\ (2p-2)^{p-1} & jika\, p\ \geq\ 3 \end{cases}$$

5.2 Saran untuk Penelitian Lanjutan

Berdasarkan kesimpulan pada penelitian ini hanya meneliti Indeks Narumi-Katayama pada graf pangkat dari grup siklik. Bagi penelitian selanjutnya diharapkan dapat meneliti indeks topologi yang lain tetapi sama dengan graf pada grup atau dapat juga menggunakan indeks topologi yang sama tetapi dengan graf pada grup yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

Al-Qur’an Al-Karim dan Terjemahannya dengan transliterasi, Departemen Agama RI, Semarang: PT. Karya Toha Putra,t.t.

Abdullah. (2004). *Tafsir Ibnu Katsir.* Bogor: Pustaka Imam As-syafi'i.

Ascioglu, M., & Cagul, I. N. (2018). Narumi–Katayama index of the subdivision graphs. *Journal of Taibah University for Science*.

Asmarani, E. y., Syarifudin, A. G., Wardhana, A. W., & Switrayni, N. (2021). The Power Graph of a Dihedral Group. *Eigen Mathematics Journal*.

Chartrand, G., Lesniak, L., & Zhang, P. (1986). *Graphs & Digraphs.* California: Dinision of Wadsworth.

Chelvam, T., & Sattanathan, M. (2013). Power graph of finite abelian grups. *Algebra and Discrete Mathematics*.

Fadli, M. R. (2021). Memahami desain metode penelitian. *Humanika*.

Febyola, Helmi, M. R., & Yanita. (2017). Order Unsur dari Grup S4. *urnal Matematika UNAND*.

Gutman, I., & Ghorbani, M. (2012). Some properties of the Narumi–Katayama index. *Applied Mathematics Letters*.

Handayani, R., & Yuliani. (2020). *Teori Bilangan.* Lampung: Universitas Muhammadiyah Kotabum.

Hosseinzadeh, M. A., Iranmanesh, A., & Doslic, T. (2013). On the Narumi-Katayama Index of Composite Graphs. *Croatica Chemica ACTA*.

Irawan, W. H., Hijriyah, N., & Habibi, A. R. (2014). *Pengantar Teori Bilangan.* Malang: UIN-Maliki Press.

Marsudi, M. (2016). *Teori Graf.* Malang: UB Press.

Moleong, L. J. (2009). *Metode Peneletian Kualitatif.* Bandung: PT Remaja Rosdakarya.

Setiawan, A. (2014). *Dasar-dasar Aljabar Modern: Teori Grup & Teori Ring.* Salatiga: Tisara Grafika.

Soleha, Setyowati, D., & Satrio. (2015). Kajian Sifat – Sifat Graf Pembagi-Nol dari Ring Komutatif. *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika*.

Suryanti, S. (2017). *Teori Grup (Struktur Aljabar 1.* Gresik: UMG Press.

RIWAYAT HIDUP

Istiana Nuraini, lahir di Malang pada tanggal 06 November 1999, biasa dipanggil Isti. Penulis tinggal di desa Sumbertangkil, kecamatan Tirtoyudo, kabupaten Malang. Anak pertama dari dua bersaudara dari pasangan bapak Sarjianto dan ibu Asri Ningsih.

Pendidikan dasar ditempuh di SDN Sumbertangkil 01 (2006-2012), kemudian melanjutkan pendidikan menengah pertama di SMP Al-Rifai'e (2012-2015), kemudian pendidikan menengah atas di SMA Al-Rifai'e (2015-2018) dan tahun 2018 penulis mulai menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil program studi matematika

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Istiana Nuraini
NIM : 18610018
Fakultas / Program Studi : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Indeks Narumi-Katayama dari Graf Pangkat dari Grup Siklik
Pembimbing I : Mohammad Nafie Juhari, M.Si.
Pembimbing II : Erna Herawati, M.Pd.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	23 Maret 2022	Konsultasi Judul dan Bab I	1.
2.	6 April 2022	Konsultasi Revisi Bab I	2.
3.	14 April 2022	Konsultasi Bab II dan III	3.
4.	20 April 2022	Konsultasi Revisi Bab II dan III	4.
5.	23 April 2022	Konsultasi Kajian Agama	5.
6.	24 April 2022	Konsultasi Revisi Kajian Agama	6.
7.	1 Juni 2022	ACC Seminar Proposal	7.
8.	30 Agustus 2022	Konsultasi Bab IV dan V	8.
9.	6 September 2022	Konsultasi Revisi Bab IV dan V	9.
10.	20 Oktober 2022	ACC Seminar Hasil	10.
11.	26 Oktober 2022	Konsultasi Kajian Agama	11.
12.	28 Oktober 2022	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	12.
13.	8 November 2022	ACC Matriks Revisi Seminar Hasil	13.
14.	15 November 2022	ACC Sidang Skripsi	14.
15.	29 November 2022	Konsultasi Kajian Agama	15.
16.	28 Desember 2022	ACC Keseluruhan	16.

Malang, 28 Desember 2022
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005