ORTOGONALITAS-*G* DI RUANG NORM-*n*

SKRIPSI

OLEH
MIFTAHUL DEWANTO
NIM. 18610082

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022

ORTOGONALITAS-*G* DI RUANG NORM-*n*

SKRIPSI

Diajukan kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Mememenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S. Mat)

Oleh
Miftahul Dewanto
NIM. 18610082

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022

ORTOGONALITAS-*G* DI RUANG NORM-*n*

SKRIPSI

Oleh
Miftahul Dewanto
NIM. 18610082

Telah Disetujui Untuk Diuji

Malang, 26 Desember 2022

Dosen Pembimbing I

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

Dosen Pembimbing II

Erna Herawati, M.Pd
NIDT. 19760723 20180201 2 222

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

ORTOGONALITAS-*G* DI RUANG NORM-*n*

SKRIPSI

Oleh
MIFTAHUL DEWANTO
NIM. 18610082

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 28 Desember 2022

Penguji Utama	: Dr. Usman Pagalay, M.Si	...
Anggota Penguji I	: Intan Nisfulaila, M. Si	...
Anggota Penguji II	: Dr. Elly Susanti, M.Sc	...
Anggota Penguji III	: Erna Herawati, M.Pd	...

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Miftahul Dewanto

NIM : 18610082

Program Studi : Matematika

Judul Skripsi : Ortogonalitas-G di Ruang Norm-n

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumbe cuplikan pada daftar rujukan. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 28 Desember 2022

Yang membuat pernyataan

Miftahul Dewanto

NIM. 18610082

MOTO

“Berharaplah kecewa maka kau tidak akan kecewa”

PERSEMBAHAN

Bismillahirrahmanirrahim

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayah Maidi dan Ibu Didin Tuwiyowati yang selalu mendo'akan untuk kesuksesan serta kelancaran dalam penelitian skripsi ini serta yang menjadi alasan kuat penulis untuk terus berjuang menggapai mimpi. Limpahan kasih sayang diberikan kepada kakak Marlita Dewanti dan adik Fairuz Jinan Izdihar Z yang selalu mengirimkan dukungan dan semangat kepada penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah Swt atas taufik, rahmat, hidayah, inayah, dan ridha-Nya penulis dapat menyelesaikan proposal skripsi dengan lancar. Tidak lupa lupa shalawat serta salam penulis panjatkan kepada Nabi Muhammad Saw yang telah membawa umat manusia dari zaman kegelapan menuju zaman penuh cahaya. Judul proposal skripsi yang penulis angkat yakni " **Ortogonalitas-*G* di Ruang Norm-*n*** ".

Ucapan terima kasih ditujukan atas berhasilnya penulisan naskah skripsi yang tidak lepas dari arahan dan bimbingan serta bantuan dari berbagai pihak, baik berupa pemikiran, tenaga, motivasi maupun dalam bentuk do'a kepada :

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, S.pd., M.Sc., selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah mengayomi masyarakatnya serta memberikan arahan dan motivasi kepada penulis selama proses perkuliahan.
4. Dr. Elly Susanti, S.pd., M.Sc, selaku dosen pembimbing I yang telah meluangkan waktu dan ilmu serta memnberikan arahan dan bimbingan dengan sabar selama proses penyelesaian skripsi.
5. Erna Herawati, M.Pd., selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan arahan dalam bidang agama sehingga penulis dapat mengintegrasikan judul skripsi dengan ilmu dalam agama islam.
6. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan ilmu dan semua upaya dalam mendidik, membimbing, dan mengajar penulis selama proses perkuliahan.

7. Para staf dan karyawan Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah dengan sabar dan baik dalam memberikan pelayanan administrasi.
8. Teman-teman mahasiswa Angkatan 2018 yang banyak memberikan ide, motivasi, dan dorongan, serta fasilitas kepada penulis sehingga dapat mendorong serta memudahkan penulis dalam menyelesaikan skripsi.
9. Keluarga penulis yang kebaikannya tak bisa diukur dan dengan sabar telah memberikan dorongan serta motivasi sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

Wassalamu'alaikum Wr.Wb.

Malang, November 2022

Penulis

DAFTAR ISI

ABSTRAK

Dewanto, Miftahul. 2022. **Ortogonalitas-*G* di Ruang Norm-*n*.** Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Elly Susanti, S.Pd, M.Sc. (II) Erna Herawati, M.Pd.

Kata Kunci: *Ruang Vektor, Ruang Bernorm, Ruang Bernorm-n, Ruang Hasil Kali dalam, Ortogonalitas, Ortogonalitas-G.*

Ortogonalitas merupakan salah satu konsep pada ruang hasil kali dalam yang berhubungan dengan besar sudut antara 2 vektor, secara matematis dua vektor x dan y dikatakan ortogonal pada ruang hasil kali dalam jika dan hanya jika $< x, y >$ = 0. Berdasarkan penelitian terdahulu yang dilakukan pada tahun 1986 oleh J.R. Partington mengenai ortogonalitas pada ruang hasil kali dalam, diketahui bahwa ortogonalitas pada ruang hasil kali dalam memenuhi beberapa sifat dasar antara lain: nondegenerasi, simetri, homogenitas, aditif kanan, resolvabilitas, dan kontinuitas. Ortogonalitas sendiri terbagi dalam beberapa definisi antara lain: ortogonalitas-*P* (*Phytagorean Orthogonality*), ortogonalitas-*I* (*Isosceles Orthogonality*), ortogonalitas-*BJ* (*Birkhoff-James Orthogonality*), dan ortogonalitas-*G*. Penelitian sebelumnya telah dilakukan oleh Gunawan, dkk namun pada pemaparan hasil pembuktian masih kurang lengkap. Oleh karena itu, penelitian ini bertujuan untuk memaparkan hasil pembuktian secara lebih rinci mengenai ortogonalitas-*G* di ruang norm-*n*. Berdasarakan hasil pembahasan dapat disimpulkan bahwa hasil kali dalam-*n* terpenuhi jika $x = 0$ atau $y = 0$. Ortogonalitas-*G* memenuhi sifat nondegenerasi, simetri, dan homogenitas. Ortogonalitas-*G* ekuivalen terhadap ortogonalitas secara umum.

ABSTRACT

Dewanto, Miftahul. 2022. **G-Orthogonality in n-Norm Space**. Thesis. Study Program of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negri Maulana Malik Ibrahim Malang.. Advisors: (I) Dr. Elly Susanti, S.Pd, M.Sc. (II) Erna Herawati, M.Pd.

Keywords: Vector Space, Normed Space, n-Norm Space, Inner Product Space, Orthogonality, G-Orthogonality.

Orthogonality is one of the concepts in the inner product space that relates to the size of the angle between two vectors, mathematically two vectors x and y are said to be orthogonal to the inner product space if and only if $\langle x, y\rangle$ = 0. Based on previous research conducted in 1986 by J.R. Partington regarding the orthogonality of the inner product space, it is known that the orthogonality of the inner product space satisfies several basic properties, including: nondegeneracy, symmetry, homogeneity, right additive, resolvability, and continuity. Orthogonality itself is divided into several definitions, including: P-orthogonality (Phytagorean Orthogonality), I-orthogonality (Isosceles Orthogonality), BJ-orthogonality (Birkhoff-James Orthogonality), and G-orthogonality. This study aims to examine the properties of orthogonality in inner product spaces with n or infinite dimensions. Therefore, this study aims to present the results of the proof in more detail regarding the G-orthogonality in the n-norm space. Based on the results of the discussion, it can be concluded that the n-in product is satisfied if $x = 0$ or $y = 0$. G-orthogonality satisfies the properties of nondegeneracy, symmetry, and homogeneity. G-orthogonality is equivalent to orthogonality in general.

مستخلص البحث

ديوانتو ، مفتاح. ٢.٢٢ . **G– التعامد في الفضاء Norm-n.** اطروحه. برنامج دراسة الرياضيات ،كلية العلوم والتكنولوجيا ، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف: (١) د. إيلي سوسانتي ، الماجستير. (٢) إرنا هيراواتي ، دكتوراه في الطب

الكلمات المفتاحية: الفضاء المتجه ، الفضاء المعياري ، الفضاء المعياري n ، مساحة المنتج الداخلية ، التعامد ، التعامد G.

التعامد هو أحد المفاهيم في فضاء المنتج الداخلي الذي يتوافق مع مقدار الزاوية بين متجهين ٢ ، رياضيا يقال إن المتجهين x و y متعامدان في مساحة المنتج الداخلية إذا وفقط إذا $< x, y >$ 0= . استنادا إلى بحث سابق أجراه J.R. Partington في عام ١٩٨٦ فيما يتعلق بالتعامد في مساحة المنتج الداخلية ، من المعروف أن التعامد في مساحة المنتج في تلبية العديد من الخصائص الأساسية بما في ذلك: عدم التنكس ، والتماثل ، والتجانس ، والإضافة الصحيحة ، والذوبان ، والاستمرارية. وقد أجري بحث سابق من قبل Gunawan, et al. ولكن عرض نتائج الأدلة لا يزال غير مكتمل. لذلك ، تهدف هذه الدراسة إلى تقديم نتائج الأدلة بمزيد من التفصيل فيما يتعلق بتعامد G في الفضاء المعياري. بناء على نتائج المناقشة ، يمكن الاستنتاج أن الضرب في n-يتم الوفاء به إذا $y = 0.x = 0$ atau . G-orthogonality يرضي خصائص عدم التنكس والتماثل والتجانس. G-التعامد يعادل التعامد بشكل عام.

DAFTAR SIMBOL

$\leq$	: Kurang dari atau sama dengan
$\geq$	: Lebih dari atau sama dengan
$\forall$	: Untuk setiap
$\in$	: Elemen dari himpunan
$\ni$	: Sedemikian hingga
$\exists$	: Terdapat
$\notin$	: Bukan elemen dari himpunan
α	: Alpha
β	: Beta
$\mathbb{R}$	: Himpunan bilangan riil
$\mathbb{N}$	: Himpunan bilangan asli
$\mathbb{C}$	: Himpunan bilangan kompleks
$\lvert x \rvert$	: Mutlak x
$\lVert\cdot\rVert$	: Norm
$\lVert\cdot,\cdot,\ldots,\cdot\rVert$	: Norm-*n*
$<\cdot,\cdot>$	: Hasil kali dalam
$<\cdot,\ldots,\cdot>$	: Hasil kali dalam-*n*
$\perp$	: Ortogonalitas
$\perp_G$	: Ortogonalitas-*G*

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika pada era milenial seperti sekarang telah menjadi sebuah unsur yang sangat diperlukan untuk menunjang kehidupan baik secara langsung maupun secara tidak langsung. Contoh sederhana dalam kehidupan adalah dalam memperhitungkan waktu mengerjakan latihan soal, dan berbagai hal lainnya. Di lain sisi, matematika merupakan salah satu cabang ilmu yang sulit untuk didefinisikan secara deterministik, akan tetapi matematika memiliki beberapa ciri khas yang hanya dimiliki oleh ilmu matematika yaitu merupakan abstraksi dari dunia nyata, menggunakan bahasa simbolik, dan bersikukuh pada satu jenis pemikiran (Nasoetion, 1980). Oleh karena itu pendalaman materi dalam ilmu matematika haruslah dilakukan dengan teratur dan sistematik agar bisa diimplementasikan dalam segala sesuatu, sehingga saat menghadapi permasalahan yang berkaitan dekat ataupun jauh dari matematika bisa diatasi secara menyeluruh. Dalam Al-Qur'an surat Yunus ayat 5 disebutkan secara tidak langsung dorongan untuk mempelajari ilmu matematika. Ayat tersebut berbunyi :

هُوَ الَّذِيْ جَعَلَ الشَّمْسَ ضِيَاۤءً وَّالْقَمَرَ نُوْرًا وَّقَدَّرَه مَنَازِلَ لِتَعْلَمُوْا عَدَدَ السِّنِيْنَ وَالْحِسَابَۗ مَا خَلَقَ اللّٰهُ ذٰلِكَ اِلَّا بِالْحَقِّۗ يُفَصِّلُ الْاٰيٰتِ لِقَوْمٍ يَّعْلَمُوْنَ

Artinya : " *Dialah yang menjadikan matahari bersinar dan bulan bercahaya, dan Dialah yang menetapkan tempat-tempat orbitnya, agar kamu mengetahui bilangan tahun, dan perhitungan (waktu). Allah tidak menciptakan demikian itu melainkan dengan benar. Dia menjelaskan tanda-tanda (kebesaran-Nya) kepada orang-orang yang mengetahui(Q.S Yunus: 5)*".

Dalam matematika sendiri memiliki berbagai macam konsentrasi seperti salah satunya yakni analisis. Pengertian analisis adalah bukan hanya sekedar penelusuran atau penyelelidikan, tetapi suatu kegiatan yang terencana dan dilakukan secara sungguh-sunggguh dengan menggunakan pemikiran yang kritis untuk memperoleh kesimpulan dari apa yang ditaksir. Di antara banyaknya cabang ilmu matematika, analisis fungsional merupakan cabang matematika abstrak yang berasal dari analisis klasik yang sudah mberkembang sejak 80 tahun yang lalu. Analisis fungsional tidak hanya memusatkan perhatian pada ruang yang berdimensi dua, tetapi juga dimensi tiga, empat sampai tak hingga. Hingga saat ini, perannya sangat penting dalam berbagai bidang dalam matematika serta aplikasinya (Kreyzig, 1978).

Dalam pembahasannya cabang ilmu analisis ini meliputi ruang vektor pada dimensi tak hingga, pemetaan, dan konsep kekontinuan serta kekonvergenan pada ruang vektor. Dalam analisis fungsional ini terdapat objek yang meliputi ruang bernorm, ruang hasil kali dalam, dan operator linier kontinu pada ruang vektor. Ruang vektor merupakan penerapan konsep dasar dari ruang bernorm dan ruang hasil kali dalam. Definisi secara umum untuk ruang bernorm adalah ruang vektor yang dilengkapi dengan fungsi norm dengan memenuhi sifat ruang bernorm, istilah norm (norm) sendiri didefinisikan sebagai fungsi bernilai riil pada sebuah ruang vektor yang sedemikian hingga mempunyai sifat layaknya jarak.

Pada Al-Qur’an telah dijelaskan bahwa konsep tentang ruang vektor dan ruang bernorm tak lepas akan ketetapan suatu ukuran sehingga kata kesempurnaan dapat kita fahami secara jelas. Dalam surat An-Najm ayat 9 yang berbunyi :

فَكَانَ قَابَ قَوْسَيْنِ اَوْ اَدْنٰىۚ

Artinya : “*Maka jadilah Dia dekat (pada Muhammad sejarak) dua ujung busur panah atau lebih dekat (lagi) (Q.S An-Najm: 9)* ”.

Sedangkan dalam surat Al-Furqon berbunyi :

ٱلَّذِى لَهُۥ مُلْكُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُن لَّهُۥ شَرِيكٌ فِى ٱلْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَىْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا

Artinya : “*Yang memiliki kerajaan langit dan bumi, tidak mempunyai anak, tidak ada sekutu bagi-Nya dalam kekuasaan (-Nya), dan Dia menciptakan segala sesuatu, lalu menetapkan ukuran-ukurannya dengan tepat (Q.S Al-Furqon: 2)*”.

Ortogonalitas adalah salah satu konsep pada ruang hasil kali dalam yang berhubungan dengan besar sudut antara 2 vektor, secara matematis dua vektor x dan y dikatakan ortogonal pada ruang hasil kali dalam jika dan hanya jika $< x, y >$ = 0 (Anton & Rorres, 2004:327).

Salah satu ayat pada Al-qur’an bisa diambil adanya suatu pelajaran sekaligus suatu konsep ortogonal yakni adanya suatu hubungan yang terikat antara manusia dengan sang pencipta yakni Allah Swt atau biasa disebut habluminallah serta manusia sesama manusia atau biasa disebut habluminannas. Untuk lebih jelas memahami konsep ini, dalam Al-Qur’an surat ‘Ali Imron ayat 112 yang berbunyi :

ضُرِبَتْ عَلَيْهِمُ الذِّلَّةُ اَيْنَ مَا ثُقِفُوْٓا اِلَّا بِحَبْلٍ مِّنَ اللّٰهِ وَحَبْلٍ مِّنَ النَّاسِ وَبَاۤءُوْ بِغَضَبٍ مِّنَ اللّٰهِ وَضُرِبَتْ عَلَيْهِمُ الْمَسْكَنَةُ ۗ ذٰلِكَ بِاَنَّهُمْ كَانُوْا يَكْفُرُوْنَ بِاٰيٰتِ اللّٰهِ وَيَقْتُلُوْنَ الْاَنْۢبِيَاۤءَ بِغَيْرِ حَقٍّ ۗ ذٰلِكَ بِمَا عَصَوْا وَّكَانُوْا يَعْتَدُوْنَ

Artinya : *‘‘Mereka diliputi kehinaan di mana saja mereka berada, kecuali jika mereka (berpegang) pada tali (agama) Allah dan tali (perjanjian) dengan manusia. Mereka mendapat murka dari Allah dan (selalu) diliputi kesengsaraan. Yang demikian itu karena mereka mengingkari ayat-ayat Allah dan membunuh para nabi, tanpa hak (alasan yang benar). Yang demikian itu karena mereka durhaka dan melampaui batas.(Q.S ‘Ali Imron : 112)’’.*

Berdasarkan penelitian terdahulu yang dilakukan oleh J. R. Partington pada tahun 1986 diketahui bahwa ortogonalitas pada ruang hasil kali dalam memenuhi beberapa sifat, antara lain nondegenarsi, simetri, homogenitas, aditif kanan, resolvabilitas, dan kontinuitas. Ortogonalitas pada ruang bernorm terdapat beberapa definisi, antara lain ortogonalitas-*P* (*Phytagorean Ortogonality*), ortogonalitas-*I* (*Isosceles Ortogonality*), ortogonalitas-*BJ* (*Birkhoff-James Ortogonality*), dan ortogonalitas-*G*. Antara satu ortogonalitas dengan ortogonalitas lain mempunyai perbedaan definisi sehingga terdapat perbedaan pula sifat-sifatnya satu dengan lainnya. Oleh karena itu, dalam penelitian ini penulis akan mengkaji atau lebih tepatnya melengkapi pembuktian dari penelitian terdahulu dan mengambil judul "**Ortogonalitas-*G* di Ruang Norm-*n***"

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, rumusan masalah dalam penelitian ini adalah

1. Bagaimana syarat perlu ruang hasil kali dalam dengan dimensi *n* pada dimensi *n*+1 atau lebih?
2. Sifat ortogonalitas apa saja yang memenuhi ortogonalitas-*G* di ruang norm-*n*?
3. Bagaimana keekuivalensian ortogonalitas-*G* dengan ortogonalitas biasa?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan dari penelitian ini adalah

1. Untuk mengetahui syarat perlu ruang hasil kali dalam dengan dimensi *n* pada dimensi *n*+1 atau lebih.
2. Untuk mengetahui sifat ortogonalitas apa saja yang memenuhi ortogonalitas-*G* di ruang norm-*n*.

3. Untuk mengetahui keekuivalensian ortogonalitas-*G* terhadap ortogonalitas biasa.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Bagi Peneliti

   Sebagai bentuk pengimplementasian dan pendalaman ilmu yang telah didapat selama masa perkuliahan khususnya mengenai analisis.

2. Bagi Instansi

   Sebagai bentuk dari kontribusi nyata dalam bentuk referensi dan bahan bacaan mengenai ilmu khususnya analisis di Program Studi Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

3. Bagi Pembaca

   Sebagai tambahan referensi, bahan bacaan, ilmu, dan wawasan baru mengenai ortogonalitas-*G* pada di norm-*n*.

1.5 Batasan Masalah

Pembatasan suatu masalah bergunan untuk menghindari penyimpangan dan pelebaran pokok masalah agar penelitian ini lebih terarah dan memudahkan dalam pembahasan sehingga tujuan penelitian akan menghasilkan hasil yang diharapkan. Adapun beberapa batasan masalah dalam penelitian ini sebagai berikut :

1. Sifat-sifat dasar ortogonalitas yang dikaji.
2. Ruang yang dibahas pada penelitian ini yakni ruang norm-*n*.
3. Ayat-ayat yang berhubungan dengan ortogonalitas pada Al-Qur’an.

1.6 Definisi Istilah

Untuk menghindari kesalahpahaman penafsiran pada penelitian ini, penulis memberikan daftar istilah yang dapat mencegah kesalahpahaman sebagai berikut:

1. Ortogonalitas

   Konsep ortogonalitas terdapat pada ruang hasil kali dalam (Nursupiamin, 2013). Pada penelitian ini hanya menggunakan definisi ortogonalitas-*G* yang didefinisikan pada ruang norm-*n*.

2. Ruang norm-*n*

   Norm-*n* didefinisikan sebagai berikut:

   $$\|x\| = (< x, y|x_2, \dots, x_n >)^{\frac{1}{2}}$$

   $$= \left(\begin{vmatrix} < x, y > & < x, x_2 > & \cdots & < x, x_n > \\ < x_2, y > & < x_2, x_2 > & \cdots & < x_2, x_n > \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ < x_n, y > & < x_n, x_2 > & \cdots & < x_n, x_n > \end{vmatrix} \right)^{\frac{1}{2}}$$

3. Ortogonalitas-*G*

   Pada penelitian ini akan dibuktikan ortogonalitas-*G* di ruang norm-*n* memenuhi beberapa sifat ortogonalitas dan keekuivalensian ortogonalitas-*G* terhadap ortogonalitas secara umum

4. Ortogonalitas dalam al-Qur’an

   Integrasi konsep ortogonalitas pada al-Qur’an yakni dua vektor dikatakan ortogonal apabila hasil kali dalam kedua vektor tersebut sama dengan nol.

BAB II

KAJIAN TEORI

Seperti yang telah diketahui, bidang analisis berisikan berbagai hal yang sangat terukur dan membutuhkan konsentrasi yang tinggi dalam memhamainya. Hal tersebut tak lain dan tak bukan dikarenakan dalam bidang ini masih tergolong abstrak dan dibutuhkan penalaran serta ketelitian dalam menelaah bidang ini. Dalam analisis dapat ditemukan objek pembelajaran yang bernama ortogonalitas, objek ini mempelajari sudut antara dua vektor. Namun sebelum menelaah objek ini, diharuskan untuk memahami konsep-konsep dasar yakni tentang ruang vektor yang merupakan suatu ruang berisikan vektor-vektor skalar yang dapat dioperasikan, lalu ruang norm yang merupakan ruang vektor yang dilengkapi fungsi norm (dan memenuhi sifat ruang bernorm), serta ruang hasil kali dalam yang merupakan konsep dasar dari ortogonalitas itu sendiri.

Pada dasarnya konsep ortogonalitas berhubungan erat dengan hasil kali dalam (dua vektor dikatakan ortogonal jika hasil kali dalam bernilai 0), dan pada penelitian sebelumnya diketahui terdapat beberapa sifat ortogonalitas yang terpenuhi pada ruang bernorm dan bernorm-2.

2.1 Teori Pendukung

2.1.1 Lapangan (*Field*)

Definisi 2.1

Lapangan adalah sistem bilangan riil dengan operasi penjumlahan dan perkalian.

1. $a + b = b + a$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$

2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$
3. $\exists\ 0 \in \mathbb{R}\ \ni a + 0 = a$
4. $\exists -a \in \mathbb{R} \ni a + (-a) = 0$.
5. $a.b = b.a$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$
6. $(a.b).c = a.(b.c)$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$
7. $\exists\ 1 \in \mathbb{R} \ni a.1 = a = 1.a$, untuk setiap $a \in \mathbb{R}$
8. $\exists \frac{1}{a} \in \mathbb{R} \ni a.\left(\frac{1}{a}\right) = 1 = \left(\frac{1}{a}\right).a$, untuk setiap $a \in \mathbb{R}$

(Anton & Rorres)

Contoh 2.1

Diberikan $\mathbb{C}$ dengan $x, y, z\ \in \mathbb{C}$ didefinisikan $x = a_1 + b_1 i$, $y = a_2 + b_2 i$, $z = a_3 + b_3 i$ dengan $a, b \in \mathbb{R}$ dan $i = \sqrt{-1}$. Tunjukkan $\mathbb{C}$ adalah lapangan.

Penyelesaian.

1. Ambil sebarang $x, y\ \in \mathbb{C}$, dengan $x = a_1 + b_1 i$, $y = a_2 + b_2 i$ dengan $a, b \in \mathbb{R}$ dan $i = \sqrt{-1}$.

   Akan ditunjukkan $x + y = y + x$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{C}$

   $x + y\ = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i)$

   $\quad\quad = (a_1 + b_2 i) + (a_2 + b_1 i)$

   $\quad\quad = y + x$

2. Ambil sebarang $x, y\ \in \mathbb{C}$, dengan $x = a_1 + b_1 i$, $y = a_2 + b_2 i, z = a_3 + b_3 i$ dengan $a, b \in \mathbb{R}$ dan $i = \sqrt{-1}$.

   Akan ditunjukkan $(x + y) + z = x + (y + z)$ untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{C}$

   $x + (y + z)\ = ((a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i)) + (a_3 + b_3 i)$

$= \left((a_1 + a_2 + b_1 i + b_2 i)\right) + (a_3 + b_3 i)$

$= (a_1 + a_2 + a_3 + b_1 i + b_2 i + b_3 i)$

$= (a_1 + (a_2 + a_3) + b_1 i + (b_2 i + b_3 i))$

$= (a_1 + b_1 i) + ((a_2 + b_2 i), (a_3 + b_3 i))$

$= x + (y + z)$

3. Ambil sebarang $x \in \mathbb{C}$, dengan $x = a_1 + b_1 i$ dengan $a, b \in \mathbb{R}$ dan $i = \sqrt{-1}$.

   Akan ditunjukkan $\exists$ 0 $\in \mathbb{C}$ $\ni x$ + 0 = x untuk semua $x \in \mathbb{C}$

   Pilih $0 = (0 + 0i) \in \mathbb{C}$

   $x + 0$ $= (a_1 + b_1 i) + (0 + 0i)$

   $= (a_1 + 0 + b_1 i + 0i)$

   $= (a_1 + b_1 i)$

   $= x$

4. Ambil sebarang $x \in \mathbb{C}$, dengan $x = a_1 + b_1 i$ dengan $a, b \in \mathbb{R}$ dan $i = \sqrt{-1}$.

   Akan ditunjukkan $\exists -x \in \mathbb{C} \ni x + (-x)$ = 0 untuk semua $x \in \mathbb{C}$

   Pilih $-x = (-a_1 - b_1 i) \in \mathbb{C}$

   $x + (-x)$ $= (a_1 + b_1 i) + (-a_1 - b_1 i)$

   $= (a_1 + (-a_1) + b_1 i + (-b_1 i))$

   = (0,0)

   = 0

5. Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{C}$, dengan $x = a_1 + b_1 i$, $y = a_2 + b_2 i$ dengan $a, b \in \mathbb{R}$ dan $i = \sqrt{-1}$.

   Akan ditunjukkan $x.y = y.x$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}^2$

$x.y$ $= (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i)$

$= a_1.a_2 + a_1b_2i + a_2b_1i + b_1i.b_2i$

$= a_2.a_1 + a_2b_1i + a_1b_2i + b_2i.b_1i$

$= (a_2 + b_2i)(a_1 + b_1i)$

6. Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{C}$, dengan $x = a_1 + b_1i$, $y = a_2 + b_2i, z = a_3 + b_3i$ dengan $a, b \in \mathbb{R}$ dan $i = \sqrt{-1}$.

   Akan ditunjukkan $(x.y).z = x.(y.z)$ untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{C}$

   $(x.y).z$ $= ((a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i))(a_3 + b_3i)$

   $= (a_1.a_2 + a_1b_2i + a_2b_1i + b_1i.b_2i)\ (a_3 + b_3i)$

   $= (a_1.a_2.a_3 + a_1.a_2b_3i + a_1a_3b_2i + a_1b_2ib_3i + a_2a_3b_1i + a_2b_1ib_3i + a_3b_1i.b_2i + b_1i.b_2ib_3i)$

   $= ((a_1 + b_1i)(a_2.a_3 + a_2b_3i + a_3b_2i + b_2i.b_3i))$

   $= x.(y.z)$

7. Ambil sebarang $x \in \mathbb{C}$, dengan $x = a_1 + b_1i$ dengan $a, b \in \mathbb{R}$ dan $i = \sqrt{-1}$.

   Akan ditunjukkan $\exists 1 \in \mathbb{C} \ni x.1 = x = 1.x$ untuk setiap $x \in \mathbb{C}$

   Pilih $1 = (1 + 0i) \in \mathbb{C}$

   $x.1$ $= (a_1 + b_1i)\ (1 + 0i)$

   $= (a_1.1 + a_1.0i + b_1i.1 + b_1i.0i)$

   $= (a_1 + b_1i)$

   $= x$

8. Ambil sebarang $x \in \mathbb{C}$, dengan $x = a_1 + b_1i$ dengan $a, b \in \mathbb{R}$ dan $i = \sqrt{-1}$.

kan ditunjukkan $\exists \frac{1}{a} \in \mathbb{C} \ni x.\left(\frac{1}{x}\right) = 1 = \left(\frac{1}{x}\right).x$, untuk setiap $x \in \mathbb{C}$

$$x.\left(\frac{1}{x}\right) = a_1 + b_1 i.\left(\frac{1}{a_1+b_1 i}\right)$$

$$= \frac{a_1+b_1 i}{a_1+b_1 i}$$

$$= 1$$

2.1.2 Ruang Vektor

Ruang vektor $(X, +, \cdot)$ ialah ruang yang anggotanya berisikan sekumpulan vektor skalar yang dapat dioperasikan baik secara penjumlahan maupun perkalian dimana X merupakan himpunan tak-kosong berupa bilangan riil.

Definisi 2.2

Misalkan V adalah himpunan sembarang objek tak-kosong dimana dua operasi didefinisikan: penjumlahan dan perkalian dengan angka yang disebut ***skalar***. ***Penjumlahan*** yang dimaksud adalah aturan untuk mengasosiasikan setiap pasangan $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ dalam V, $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ disebut ***jumlah*** dari $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$; ***perkalian skalar*** yang dimaksud adalah aturan untuk mengasosiasikan setiap skalar α dan setiap objek $\boldsymbol{u}$ di V, $k\boldsymbol{u}$ disebut ***kelipatan skalar*** dari $\boldsymbol{u}$ oleh k Jika aksioma berikut terpenuhi oleh setiap $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ di V dan semua skalar k dan m, maka V disebut ***ruang vektor*** dan objek di V sebagai ***vektor***:

1. Jika $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ adalah objek di V, maka $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ ada di V
2. $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$ (komutatif penjumlahan)
3. $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$ (asosiatif penjumlahan)
4. $\exists\ 0 \in H \ni \boldsymbol{u} + 0 = \boldsymbol{u}$ (identitas penjumlahan)
5. $\exists -\boldsymbol{u} \in H \ni \boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = 0$. (invers penjumlahan)

6. Jika k adalah sembarang skalar dan x adalah sembarang objek di V, maka $k\boldsymbol{u}$ ada di V
7. $\alpha(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})$ = $k\boldsymbol{u}$ + $k\boldsymbol{v}$
8. $(k+m)\boldsymbol{u}$ = $k\boldsymbol{u}+m\boldsymbol{u}$. (distributif perkalian)
9. k $(m\boldsymbol{u})$ = $(km)\boldsymbol{u}$ (asosiatif perkalian)
10. $1\boldsymbol{u}$ = $\boldsymbol{u}$ (invers perkalian)

(Anton & Rorres)

Contoh 2.2

Tunjukkan bahwa $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ merupakan ruang vektor atas lapangan $\mathbb{R}$.

Penyelesaian.

Ambil sebarang vektor $x, y \in \mathbb{R}^2$, dengan $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ dan $z = (z_1, z_2)$, akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{R}^2$ merupakan ruang vektor atas lapangan $\mathbb{R}$.

1. Ambil sebarang vektor $x, y \in \mathbb{R}^2$, dengan $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$

   Akan ditunjukkan $x + y \in \mathbb{R}^2$

   x + y = $(x_1, x_2) + (y_1, y_2)$

   = $(x_1 + y_1, x_2 + y_2)$

   Karena (x_1, x_2),$(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ maka $(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in \mathbb{R}^2$

2. Ambil sebarang vektor $x, y \in \mathbb{R}^2$, dengan $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$

   Akan ditunjukkan x + y = y + x untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}^2$

   x + y = $(x_1, x_2) + (y_1, y_2)$

   = $(x_1 + y_1, x_2 + y_2)$

   = $(y_1 + x_1, y_2 + x_2)$

   = y + x

3. Ambil sebarang vektor $x, y \in \mathbb{R}^2$, dengan $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2)$

   Akan ditunjukkan $(x + y) + z = x + (y + z)$ untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}^2$

   $x + (y + z)$ $= ((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) + (z_1, z_2)$

   $= \big((x_1 + y_1, x_2 + y_2)\big) + (z_1, z_2)$

   $= \big((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2\big)$

   $= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2))$

   $= (x_1, x_2) + ((y_1 + z_1), (y_2 + z_2))$

   $= x + (y + z)$

4. Ambil sebarang vektor $x, y \in \mathbb{R}^2$, dengan $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$

   Akan ditunjukkan $\exists\ 0 \in \mathbb{R}^2 \ni x + 0 = x$

   Pilih $0 = (0,0) \in \mathbb{R}^2$

   $x + 0$ $= (x_1, x_2) + (0,0)$

   $= (x_1 + 0, x_2 + 0)$

   $= (x_1, x_2)$

   $= x$

5. Ambil sebarang vektor $x \in \mathbb{R}^2$, dengan $x = (x_1, x_2)$

   Akan ditunjukkan $\exists$ - $x \in \mathbb{R}^2 \ni x$ + (-x) = 0

   Pilih vektor $-x = (-x_1, -x_2) \in \mathbb{R}^2$

   $x + (-x)$ $= (x_1, x_2) + (-x_1, -x_2)$

   $= (x_1 + (-x_1), x_2 + (-x_2))$

   $= (0,0)$

   $= 0$

6. Ambil sebarang vektor $x \in \mathbb{R}^2$, dengan $x = (x_1, x_2)$ dan $\alpha = k \in \mathbb{R}$

   Akan dibuktikan $\alpha x \in \mathbb{R}^2$

   αx $= k(x_1, x_2)$

   $= (kx_1, kx_2)$

   Karena $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ maka $(kx_1, kx_2) \in \mathbb{R}^2$

7. Ambil sebarang vektor $x, y \in \mathbb{R}^2$, dengan $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, dan $\alpha = k, \beta = l \in \mathbb{R}$

   Akan dibuktikan $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

   $\alpha(x + y)$ $= \alpha((x_1, x_2) + (y_1, y_2))$

   $= k((x_1, x_2) + (y_1, y_2))$

   $= k((x_1 + y_1), (x_2 + y_2))$

   $= k(x_1 + y_1), k(x_2 + y_2)$

   $= (kx_1 + ky_1), (kx_2 + ky_2)$

   $= (kx_1 + ky_1), (kx_2 + ky_2)$

   $= (kx_1, kx_2) + (ky_1 + ky_2)$

   $= k(x_1, x_2) + k(y_1, y_2)$

   $= \alpha x + \alpha y$

8. Ambil sebarang vektor $x \in \mathbb{R}^2$, dengan $x = (x_1, x_2)$ dan pilih $\alpha = k, \beta = l \in \mathbb{R}$

   Akan dibuktikan $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

   $(\alpha + \beta)x$ $= (\alpha + \beta)\ (x_1, x_2)$

   $= (\alpha + \beta)x_1, (\alpha + \beta)x_2$

   $= (\alpha x_1 + \beta x_1), (\alpha x_2 + \beta x_2)$

   $= (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\beta x_1, \beta x_2)$

$= \alpha(x_1, x_2) + \beta(x_1, x_2)$

$= \alpha x + \beta x$

9. Ambil sebarang vektor $x \in \mathbb{R}^2$, dengan $x = (x_1, x_2)$ dan pilih $\alpha = k, \beta = l \in \mathbb{R}$.

   Akan dibuktikan $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

   $\alpha\ (\beta x) = \alpha\ (\beta(x_1, x_2))$

   $= k(l(x_1, x_2))$

   $= k(l.x_1, l.x_2)$

   $= (k(l.x_1), k(l.x_2))$

   $= ((k.l)x_1, (k.l)x_2)$

   $= (k.l)(\ x_1, x_2)$

   $= (\alpha\beta)x$

10. Ambil sebarang vektor $x \in \mathbb{R}^2$, dengan $x = (x_1, x_2)$

    Akan dibuktikan $1x = x$

    $1x \quad = 1(x_1, x_2)$

    $= (1.x_1, 1.x_2)$

    $= (x_1, x_2)$

    $= x$

2.1.3 Himpunan Pembangun (*Span*)

Definisi 2.3

Jika $S = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ adalah himpunan vektor tak kosong di ruang vektor V, maka subruang W dari V yang berisi semua himpunan kombinasi linier yang mungkin dari vektor di S disebut subruang dari V yang dibangun oleh S, dan vektor $w_1, w_2, \dots, w_n$ disebut span W. Secara matematis ditulis sebagai berikut

W = span$\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ atau W = span(S) (Anton & Rorres)

Contoh 2.3

Diberikan vektor $x = (1,2,1), y = (2,-1,1), z = (3,1,2) \in \mathbb{R}^3$, vektor x, y, z disebut span($\mathbb{R}^3$)

Penyelesaian.

Vektor x, y, z disebut span($\mathbb{R}^3$) karena setiap vektor $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ dapat diekspresikan sebagai

$$v = (14,3,9) = 1(1,2,1) + 2(2,-1,1) + 3(3,1,2)$$

$$= ax + by + cz$$

2.1.4 Bergantung Linier dan Bebas Linier

Definisi 2.4

Himpunan vektor S disebut bebas linier atas lapangan F jika terdapat vektor $v_1, v_2, \dots, v_n \in S$ dan $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ yang tak semua 0, sedemikian hingga memenuhi $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$. Himpunan vektor yang tidak bergantung linier atas F disebut bebas linier atas F(Gallian, 2016).

Contoh 2.4(1)

Diberikan vektor pada $\mathbb{R}^3$ yakni $v_1 = (2,-4,6), v_2 = (1,3,2), v_3 = (2,5,3)$. Tunjukkan apakah vektor v_1, v_2, v_3 bergantung linier atau bebas linier

Penyelesaian.

Vektor-vektor yang bergantung linier atau bebas linier dapat ditunjukkan melalui kombinasi linier

$$k_1 v_1 + k_3 v_2 + k_3 v_3 = 0 \dots (1)$$

$$k_1(2,-4,6) + k_2(1,3,2) + k_3(2,5,3) = (0,0,0)$$

Sehingga didapat sistem persamaan linier berikut

$2k_1 + k_2 + 2k_3 \quad = 0$

$-4k_1 + 3k_2 + 5k_3 \quad = 0$

$6k_1 + 2k_2 + 3k_3 \quad = 0$

Dari persamaan di atas dapat dibentuk matriks koefisien

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Akan dicari det(A)

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$|A|$ = -12

Karena det(A) $\neq 0$ maka sistem persamaan (1) hanya mempunyai solusi trivial.

Sehingga v_1, v_2, v_3 bebas linier.

Contoh 2.4(2)

Diberikan vektor pada $\mathbb{R}^4$ yakni $v_1 = (1,2,2,-1), v_2 = (4,9,9,-4), v_3 = (5,8,9,-5)$. Tunjukkan apakah vektor v_1, v_2, v_3 bergantung linier atau bebas linier.

Penyelesaian.

Vektor-vektor yang bergantung linier atau bebas linier dapat ditunjukkan melalui kombinasi linier

$k_1v_1 + k_3v_2 + k_3v_3 = 0$ ... (1)

$k_1(1,2,2,-1) + k_2(4,9,9,-4) + k_3(5,8,9,-5) = (0,0,0,0)$

Sehingga didapat sistem persamaan linier berikut

$k_1 + 4k_2 + 5k_3 \quad = 0$ … (1)

$2k_1 + 9k_2 + 8k_3 \quad = 0 \dots (2)$

$2k_1 + 9k_2 + 9k_3 \quad = 0 \dots (3)$

$-k_1 - 4k_2 - 5k_3 \quad = 0 \dots (4)$

Eliminasi persamaan (1) dan (2)

$$\begin{array}{rl} k_1 + 4k_2 + 5k_3 = 0 & | \times 2 \\ \underline{2k_1 + 9k_2 + 8k_3 = 0}\, - & | \times 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2k_1 + 8k_2 + 10k_3 = 0 \\ \underline{2k_1 + 9k_2 + 8k_3 = 0}\ - \end{array}$$

$-k_3 = 0$

$k_3 = 0$

Subtitusi persamaan (5) ke persamaan (3) dan (4)

$2k_1 + 9k_2 + 9(0) \quad = 2k_1 + 9k_2 = 0 \dots (6)$

$-k_1 - 4k_2 - 5(0) \quad = -k_1 - 4k_2 = 0 \dots (7)$

Eliminasi persamaan (6) dan (7)

$$\begin{array}{rl} 2k_1 + 9k_2 = 0 & | \times 2 \\ \underline{-k_1 - 4k_2 = 0}\, - & | \times 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2k_1 + 9k_2 = 0 \\ \underline{-2k_1 - 8k_2 = 0}\, - \end{array}$$

$k_2 = 0 \dots (8)$

Subtitusi persamaan (8) ke persamaan (7)

$-k_1 - 4k_2 = 0$

$-k_1 - 4(0) = 0$

$-k_1 = 0$

$k_1 = 0$

Dari persamaan di atas didapat penyelesaian

$$k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$$

Sehingga v_1, v_2, v_3 bergantung linier

2.1.5 Determinan

Dalam membahas bab matriks seringkali ditemukan kata determinan. Secara sederhana determinan dapat diartikan sebagai nilai real yang dihitung berdasarkan nilai-nilai elemennya. Untuk lebih jelasnya determinan dapat didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 2.5

Jika A adalah matriks $n \times n$, determinan dari A dinotasikan $\det(A)$ atau $|A|$ adalah skalar yang dihitung sebagai penjumlahan hasil kali dari n elemen A masing-masing dengan tanda yang sesuai, dengan tepat satu elemen dari setiap baris dan tepat satu elemen dari setiap kolom.(Kolman & Hill, n.d.)

Contoh 2.5

Diberikan matriks A dengan ordo $n \times n$, akan ditunjukkan determinan dari matriks A.

Penyelesaian.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\left(a_{11}.a_{22}.\dots.a_{nn} + a_{12}.a_{23}.\dots.a_{n1} + \cdots + a_{1n}.a_{21}.\dots.a_{n(n-1)}\right) - \left(a_{1n}.a_{2(n-1)}.\dots.a_{n1} + a_{11}.a_{2n}.\dots.a_{n2} + \cdots + a_{nn}.a_{(n-1)1}.\dots.a_{1(n-1)}\right)\right)$$

2.1.6 Ruang Hasil Kali Dalam

Definisi 2.6

Jika V adalah ruang hasil kali dalam, maka norm dari vektor v di V atau dinotasikan $\|v\|$ dan didefinisikan sebagai

$$\|v\| = \sqrt{< v, v >}$$

Dan jarak antara dua vektor dinotasikan sebagai $d(u, v)$ dan didefinisikan sebagai

$$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{< u - v, u - v >}$$ (Anton & Rorres).

Contoh 2.6

Diberikan $V = \mathbb{R}^2$ dan vektor $u, v \in V$ didefinisikan $u = (u_1, u_2)$ dan $v = (v_1, v_2)$.

Norm dari u atau dinotasikan $\|v\|$ didefinisikan sebagai

$\|u\| = \sqrt{< u, u >} = \sqrt{(u_1, u_2), (u_1, u_2)}$

$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{< u - v, u - v >} =$

$\sqrt{(u_1, u_2) - (v_1, v_2), (u_1, u_2) - (v_1, v_2)}$

Definisi 2.7

Misal X ruang hasil kali dalam pada X, hasil kali dalam adalah fungsi $<\cdot,\cdot>$ $: X \times X \to \mathbb{R}$ sedemikian hingga $\forall x, y, x \in X$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$(Rynne & Youngson, 2008:51)

1. $< x, x > \geq 0$;
2. $< x, x > = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$;
3. $< \alpha x + \beta y, z > = \alpha < x, z > + \beta < y, z >$;
4. $< x, y > = < y, x >$.

Contoh 2.7

Diberikan vektor $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ dan $w = (w_1, w_2)$, $u, v, w \in \mathbb{R}^2$.

Tunjukkan bahwa $< u, v >$ = $3u_1v_1 + 2u_2v_2$ memenuhi 4 sifat hasil kali dalam.

Penyelesaian.

1. Akan dibuktikan $< u, u > \geq 0$

   $< u, u >$ = $3u_1u_1 + 2u_2u_2$

   = $3{u_1}^2 + 2{u_2}^2 \geq 0$

2. Akan dibuktikan $< u, u >$ = 0 jika dan hanya jika $x = 0$

   Jika $u = 0$ maka

   $< u, u >$ = $3u_1u_1 + 2u_2u_2$

   = $3u_1^2 + 2u_2^2$

   = $3.0^2 + 2.0^2$

   = 0.

   Jika $< u, u >$ = 0 maka $u_1 = u_2 = 0$ atau $u = 0$.

3. Akan dibuktikan $< \alpha x + \beta y, z >$ = $\alpha < x, z > + \beta < y, z >$

   Pilih $\alpha = k$ dan $\beta = l$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

   $< \alpha u + \beta v, w >$ = $3(\alpha u_1 + \beta v_1)w_1 + 2(\alpha u_2 + \beta v_2)w_2$

   = $3(\alpha u_1 + \beta v_1)w_1 + 2(\alpha u_2 + \beta v_2)w_2$

4. $< u, v >$ = $3u_1v_1 + 2u_2v_2$

   = $3(u_1, u_2)(v_1, v_2) + 2(u_1, u_2)(v_1, v_2)$

   = $3(v_1, v_2)(u_1, u_2) + 2(v_1, v_2)(u_1, u_2)$

   = $3v_1u_1 + 2v_2u_2$

   = $< v, u >$

Definisi 2.8

Misalkan X suatu ruang vektor atas dimensi n atau lebih dan n ≥ 2 bilangan bulat non negatif. Fungsi bernilai riil $<\cdot,\cdot \mid \cdot, \ldots, \cdot>$ pada X^{n+1} memenuhi lima properti

1. $< x_1, x_1 | x_2, \ldots, x_n > = 0$; $< x_1, x_1 | x_2, \ldots, x_n > = 0$ jika dan hanya jika $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bergantung linier;
2. $< x_1, x_1 | x_2, \ldots, x_n > = < x_{i1}, x_{i1} | x_{i2}, \ldots, x_{in} >$ untuk setiap permutasi $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ dari $(1, \ldots, n)$;
3. $< x, y | x_2, \ldots, x_n > = < y, x | x_2, \ldots, x_n >$;
4. $< \alpha x, y | x_2, \ldots, x_n > = \alpha < x, y | x_2, \ldots, x_n >, \alpha \in \mathbb{R}$;
5. $< x + x', y | x_2, \ldots, x_n > = < x, y | x_2, \ldots, x_n > + < x', y | x_2, \ldots, x_n >$

disebut hasil kali dalam-*n* di *X* dan $(X, <\cdot,\cdot \mid \cdot, \ldots, \cdot>)$ disebut ruang hasil kali dalam-*n*(H Gunawan et al., 2006).

Definisi 2.9

Diberikan X ruang vektor, jika $(X, <\cdot,\cdot \mid \cdot, \ldots, \cdot>)$ adalah ruang hasil kali dalam-*n*, maka norm-*n* dapat didefinisikan dengan formula

$$\|x_1, x_2, \ldots, x_n\| = \sqrt{< x_1, x_1 | x_2, \ldots, x_n >}$$

Dimana $< x_1, x_1 | x_2, \ldots, x_n >$ didefinisikan sebagai

$$< x_1, x_1 | x_2, \ldots, x_n > = \begin{vmatrix} < x, x > & < x, x_2 > & \cdots & < x, x_n > \\ < x_2, x > & < x_2, x_2 > & \cdots & < x_2, x_n > \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ < x_n, x > & < x_n, x_2 > & \cdots & < x_n, x_n > \end{vmatrix}$$

(H Gunawan et al., 2006)

2.1.7 Ruang Bernorm

Definisi 2.10

Misalkan $(X, +, \cdot)$ suatu ruang vektor atas lapangan $\mathbb{R}$, dimana $x, y \in X$. Norm pada X didefinisikan sebagai fungsi $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ yang memenuhi

1. $\|x\| \geq 0$
2. $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$
3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\ \|x\|$, untuk setiap $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{R}$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, untuk setiap x, y $\in X$ (Gozali, n.d.)

Contoh 2.10

Diberikan $(X, +, \cdot)$ ruang bernorm atas lapangan $\mathbb{R}^2$, dimana $k, l \in X$ dengan $k = (k_1, k_2)$ dan $l = (l_1, l_2)$. Fungsi norm pada $\mathbb{R}^2$ untuk $p = 2$ didefinisikan $\|k\| = (\sum_{i=1}^{n} |k_i|^2)^{\frac{1}{2}}$. Akan ditunjukkan vektor-vektor X memenuhi sifat-sifat ruang norm.

Penyelesaian

1. Ambil sebarang vektor $k \in \mathbb{R}^2$, dengan $k = (k_1, k_2)$

   Akan ditunjukkan $\|k\| \geq 0$

   $\|k\| \quad = (\sum_{i=1}^{n} |k_i|^2)^{\frac{1}{2}}$

   $\qquad = (|k_1|^2 + |k_2|^2)^{\frac{1}{2}}$

   Karena $|k_i| \geq 0$ maka $\|k\| \geq 0$

2. Ambil sebarang vektor $k \in \mathbb{R}^2$, dengan $k = (k_1, k_2)$

   Akan ditunjukkan $\|k\| = 0$, jika dan hanya jika $p = 0$

   Jika $k = 0$, maka

   $\|k\| \quad = (\sum_{i=1}^{n} |k_i|^2)^{\frac{1}{2}}$

$= (|k_1|^2 + |k_2|^2)^{\frac{1}{2}}$

$= (|0|^2 + |0|^2)^{\frac{1}{2}}$

$= 0$

Jika $\|k\| = 0$, maka $k_1 = k_2 = 0$ atau $k = 0$

3. Ambil sebarang vektor $k \in \mathbb{R}^2$, dengan $k = (k_1, k_2)$

   Akan ditunjukkan $\|\alpha k\| = |\alpha|\ \|k\|$. Pilih $\alpha = x$

   $\|\alpha k\| \quad = (\sum_{i=1}^{n} |\alpha k_i|^2)^{\frac{1}{2}}$

   $= (|xk_1|^2 + |xk_2|^2)^{\frac{1}{2}}$

   $= (|x|^2|k_1|^2 + |x|^2|k_2|^2)^{\frac{1}{2}}$

   $= (|x|^2)^{\frac{1}{2}}(|k_1|^2 + |k_2|^2)^{\frac{1}{2}}$

   $= |x|(|k_1|^2 + |k_2|^2)^{\frac{1}{2}}$

   $= |\alpha|\ \|k\|$

4. Ambil sebarang vektor $k \in \mathbb{R}^2$, dengan $k = (k_1, k_2)$, $l = (l_1, l_2)$

   Akan ditunjukkan $\|k + l\| \leq \|k\| + \|l\|$

   $\|k + l\| = (\sum_{i=1}^{n} |k_i + l_i|^2)^{\frac{1}{2}}$

   $= (|k_1 + l_1|^2 + |k_2 + l_2|^2)^{\frac{1}{2}}$

   $\leq (|k_1 + l_1|^2 + |k_2 + l_2|^2)^{\frac{1}{2}}$

   $\leq \|k\| + \|l\|$

Jadi, vektor $k = (k_1, k_2)$ dan $l = (l_1, l_2)$ pada ruang vektor X memenuhi sifat-sifat ruang bernorma.

Definisi 2.11

Misalkan X suatu ruang vektor atas dimensi n atau lebih dan $n \geq 2$ bilangan bulat non negatif. Fungsi bernilai real $\|\cdot, \dots, \cdot\|$ pada X^n memenuhi 4 sifat

1. $\|x_1, \dots, x_n\| = 0$ jika dan hanya jika $x_1, \dots, x_n$ bergantung linier,
2. $\|x_1, \dots, x_n\|$ invarian di bawah permutasi,
3. $\|\alpha x_1, x_2, \dots, x_n\| = |\alpha| \|x_1, \dots, x_n\| \; \forall \; \alpha \in \mathbb{R}$
4. $\|x + x', x_2 \dots, x_n\| \leq \|x, x_2 \dots, x_n\| + \|x', x_2 \dots, x_n\|$

Disebut norm-*n* *X*, dan $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ disebut ruang norm-*n*.(H Gunawan et al., 2006).

2.1.8 Proses Gram-Schmidt

Definisi 2.12

Untuk mengubah basis $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ menjadi basis ortogonal $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, akan digunakan rumus:

$$v_1 = u_1$$

$$v_2 = u_1 - \frac{< u_1, v_1 >}{\|v_1\|^2} v_1$$

$$v_3 = u_3 - \frac{< u_3, v_1 >}{\|v_1\|^2} v_1 - u_1 - \frac{< u_3, v_2 >}{\|v_2\|^2} v_2$$

$$v_4 = u_4 - \frac{<u_4, v_1>}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{<u_4, v_2>}{\|v_2\|^2} v_2 - \frac{<u_4, v_3>}{\|v_3\|^2} v_3$$

(lanjutkan v_n langkah)

Untuk mengubah basis ortogonal menjadi basis ortonormal $\{q_1, q_2, q_3\}$, normalisasikan basis ortogonal(Anton & Rorres).

Contoh 2.12

Misalkan $\mathbb{R}^3$ mempunyai hasil kali dalam Euclidian. Gunakan proses Gram-Schmidt untuk mengubah vektor-vektor

$u_1 = (1,1,1), u_2 = (-1,1,0)$ dan $u_3 = (1,2,1)$

Menjadi basis ortogonal, lalu normalisasikan vektor basis ortogonal untuk memperoleh basis ortonormal $\{q_1, q_2, q_3\}$

Penyelesaian.

$v_1 \quad = u_1 = (1,1,1)$

$v_2 \quad = u_2 - \frac{<u_2,v_1>}{\|v_1\|^2} v_1$

$\quad\quad = (-1,1,0) - \frac{0}{3}(1,1,1) = (-1,1,0)$

$v_3 \quad = u_3 - \frac{<u_3,v_1>}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{<u_3,v_2>}{\|v_2\|^2} v_2$

$\quad\quad = (1,2,1) - \frac{4}{3}(1,1,1) - \frac{1}{2}(-1,1,0)$

$\quad\quad = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right)$

Sehingga didapat $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (-1,1,0)$, $v_3 = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right)$

Dan norm dari masing-masing vektor di atas adalah

$\|v_1\| = \sqrt{3}$, $\|v_2\| = \sqrt{2}$, $\|v_3\| = \frac{1}{\sqrt{6}}$

Sehingga basis ortonormal dari $\mathbb{R}^3$ adalah

$$q_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$q_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

$$q_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

2.1.9 Ortogonalitas

Definisi 2.13

Misal *P* adalah ruang vektor yang dilengkapi dengan ruang hasil kali dalam. Vektor $x, y \in P$ dikatakan ortogonal jika $< x, y > = 0$, dan dapat ditulis $x \perp y$ (Rynne & Youngson, 2008:60).

Contoh 2.13

Diberikan $X = \mathbb{R}^3$ merupakan ruang bernorm, $x, y \in X$ didefinisikan sebagai $x = (x_1, x_2, x_3) = (-1,1,2)$ dan $y = (y_1, y_2, y_3) = (4,0,2)$. Tunjukkan $x \perp y$.

Penyelesaian.

Diberikan:

$x = (x_1, x_2, x_3) = (-1,1,2)$

$y = (y_1, y_2, y_3) = (4,0,2)$

Maka

$$
\begin{aligned}
< x, y > &= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \\
&= (-1)(4) + (1)(0) + (2)(2) \\
&= -4 + 0 + 4 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Karena $< x, y > = 0$, maka $x \perp y$.

Definisi 2.14

Di ruang hasilkali dalam $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ dua vektor x dan y dikatakan *ortogonal* ditulis $x \perp y$ jika dan hanya jika $< x, y > = 0$. Beberapa sifat dasar ortogonalitas di ruang hasil kali dalam $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ adalah:

1. *Nondegenerasi*, jika $x \perp x$ maka $x = 0$.
2. *Simetri*, jika $x \perp y$ maka $y \perp x$.

3. *Homogenitas*, jika $x \perp y$ maka $\alpha x \perp \beta y$ untuk setiap α, β vektor.
4. *Aditif kanan*, jika $x \perp y$ dan $x \perp z$ maka $x \perp y \perp z$.
5. *Resolvabilitas*, Untuk setiap $x, y \in X$ terdapat vektor α sedemikian sehingga $x \perp (\alpha x \perp y)$.
6. *Kontinuitas*, Jika $x_n \to x$, $y_n \to y$ (dalam norm) dan $x_n \perp x_n$ untuk setiap *n* maka $x \perp y$(Gunawan dkk., 2005:1).

Definisi 2.15

Diberikan $(X, <\cdot,\cdot \mid \cdot, \dots, \cdot>)$ ruang hasil kali dalam-*n*. Untuk setiap $x, y \in X$, x dikatakan ortogonalitas-*G* terhadap y dan ditulis $x \perp_G y$ jika dan hanya jika terdapat $V \subset X$ dengan $\text{codim}(V) = 1$ sedemikian hingga

$< x, y|x_2, \dots, x_n > = 0$ untuk setiap $x_2, \dots, x_n \in V$(H Gunawan et al., 2006).

2.1.10 Himpunan Ortonormal

Definisi 2.16

Misalkan X ruang hasil kali dalam dan $V = \{v_1, v_1, \dots, v_n\}$, $V \subseteq X$. Himpunan V disebut ortonormal jika X himpunan ortogonal dan panjang setiap anggota V adalah 1, atau dalam bentuk lambang ditulis sebagai berikut(Rahayu, 2019)

1. $< v_i, v_j > = 0$ untuk setiap $i, j = 1,2, \dots, n$
2. $\|v_i\| = 1$ untuk setiap $i = 1,2, \dots, n$

Contoh 2.16

Diberikan vektor $x, y \in \mathbb{R}^2$ dimana x, y didefinisikan sebagai $x = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Akan ditunjukkan himpunan $S = \{x, y\}$ himpunan ortonormal

Penyelesaian.

Akan ditunjukkan $< x, y > = 0$

$$< v_i, v_j > \quad = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 0$$

Akan ditunjukkan $\|x\| = 1$ dan $\|y\| = 1$

$$\|x\| \quad = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$$

$$= 1$$

$$\|y\| \quad = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$$

$$= 1$$

Contoh 2.16

Diberikan vektor $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ dimana v_1, v_2, v_3 didefinisikan sebagai $v_1 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$; $v_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$; $v_3 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Akan ditunjukkan himpunan $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ himpunan ortonormal.

Penyelesaian.

Akan ditunjukkan $< v_i, v_j > = 0$ untuk setiap $i, j = 1,2, \dots, n$

$$< v_1, v_2 > \quad = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{4}{9} + \left(-\frac{2}{9}\right) + (-\frac{2}{9})$$

$$= 0$$

$$< v_1, v_3 > \quad = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{2}{9} + \left(-\frac{4}{9}\right) + \frac{2}{9}$$

$$= 0$$

$$< v_2, v_3 > \quad = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \left(-\frac{4}{9}\right)$$

$$= 0$$

Akan ditunjukkan $\|v_i\| = 1$, untuk setiap $i = 1,2, \ldots, n$

$$\|v_1\| \quad = \sqrt{\frac{2}{3}^2 + (-\frac{2}{9})^2 + \frac{1}{3}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}}$$

$$= 1$$

$$\|v_2\| \quad = \sqrt{\frac{2}{3}^2 + \frac{1}{3}^2 + (-\frac{2}{3})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}}$$

$$= 1$$

$$\|v_3\| \quad = \sqrt{\frac{1}{3}^2 + \frac{2}{3}^2 + \frac{2}{3}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}}$$

$$= 1$$

2.2 Kajian Integrasi Ortogonalitas dalam al-Qur’an

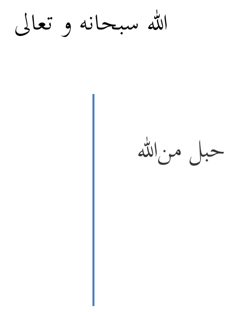
Pada sub bab ini akan dibahas bagaimana Al-Qur’an yang merupakan kajian utama ajaran islam sekaligus pedoman penting bagi hidup seorang muslim menerangkan hubungan antara 2 subjek sebagaimana konsep ortogonalitas yang telah dijelaskan pada bagian sebelumnya. Secara bahasa, ortogonal dapat didefinisikan sebagai suatu hubungan garis yang saling tegak lurus. Sedangkan ortogonalitas sendiri dapat diartikan sebagai konsep untuk menentukan besar sudut antara 2 vektor. Sedangkan secara definisi konsep ortogonalitas ialah jika P adalah ruang vektor yang dilengkapi dengan ruang hasil kali dalam. Vektor x, y $\in P$ dikatakan ortogonal jika $< x, y > = 0$, dan dapat ditulis $x \perp$ y(Rynne & Youngson, 2008:60).

Pada salah satu ayat bisa diambil suatu pelajaran sekaligus suatu konsep ortogonal yakni adanya suatu hubungan yang terikat antara manusia dengan sang pencipta yakni Allah Swt atau biasa disebut habluminallah serta manusia sesama manusia atau biasa disebut habluminannas. Untuk lebih jelas memahami konsep ini, dalam Al-Qur'an surat 'Ali Imron ayat 112 yang berbunyi :

ضُرِبَتْ عَلَيْهِمُ الذِّلَّةُ اَيْنَ مَا ثُقِفُوْٓا اِلَّا بِحَبْلٍ مِّنَ اللّٰهِ وَحَبْلٍ مِّنَ النَّاسِ وَبَاۤءُوْ بِغَضَبٍ مِّنَ اللّٰهِ وَضُرِبَتْ عَلَيْهِمُ
الْمَسْكَنَةُ ۗ ذٰلِكَ بِاَنَّهُمْ كَانُوْا يَكْفُرُوْنَ بِاٰيٰتِ اللّٰهِ وَيَقْتُلُوْنَ الْاَنْۢبِيَاۤءَ بِغَيْرِ حَقٍّ ۗ ذٰلِكَ بِمَا عَصَوْا وَّكَانُوْا يَعْتَدُوْنَ

Artinya : *''Mereka diliputi kehinaan di mana saja mereka berada, kecuali jika mereka (berpegang) pada tali (agama) Allah dan tali (perjanjian) dengan manusia. Mereka mendapat murka dari Allah dan (selalu) diliputi kesengsaraan. Yang demikian itu karena mereka mengingkari ayat-ayat Allah dan membunuh para nabi, tanpa hak (alasan yang benar). Yang demikian itu karena mereka durhaka dan melampaui batas.(Q.S 'Ali Imron : 112)''*

Agar semakin jelas, perhatikan ilustrasi berikut :



حبل من الناس

الناس

Pada gambar di atas, garis lurus horizontal menunjukkan kedudukan semua manusia di hadapan Allah Swt ialah sama, sehingga dalam menjalani kehidupan di dunia perlu menjalin hubungan atau simbiosis kepada sesama manusia. Sedangkan garis vertikal menunjukkkan hakikat dari hidupnya semua manusia yakni beribadah hanya kepada Allah Swt. Terlihat jelas jika konsep ortogonal yang merupakan dua vektor saling tegak lurus dapat dipahami selaras dengan ilmu dalam islam yakni selalu menjaga hubungan antar manusia dan berpegang teguh kepada Allah Swt atau secara islam disebut dengan habluminallah wa habluminannas.

2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung

Pada dasarnya konsep ortogonalitas secara umum bisa ditemui pada ruang bernorm pada ruang barisan yang memiliki perbedaan definisi norm pada tiap kasusnya, sebagai contoh jika $X = \ell^p$ dimana $1 < p < \infty$, maka norm pada X akan didefinisikan sebagai $\|x\| = (\sum_{i=1}^{\infty} |\ x_i\ |^p)^{\frac{1}{p}}$. Pada penelitian ini akan diselidiki konsep ortogonalitas-*G* pada ruang barisan dengan norm-*n* yang didefinisikan sebagai

$$\|x\| = (< x, y|x_2, \dots, x_n >)^{\frac{1}{2}} = \left(\begin{vmatrix} < x, y > & < x, x_2 > & \cdots & < x, x_n > \\ < x_2, y > & < x_2, x_2 > & \cdots & < x_2, x_n > \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ < x_n, y > & < x_n, x_2 > & \cdots & < x_n, x_n > \end{vmatrix} \right)^{\frac{1}{2}}$$

(H Gunawan et al., 2006).

Sedemikian sehingga dapat dibuktikan beberapa teorema di bawah ini:

Teorema 1

Diberikan $(X, <\cdot,\cdot \mid \cdot, \dots, \cdot>)$ ruang hasil kali dalam-*n* standar dengan dimensi $n + 1$ atau lebih. Maka kondisi $< x, y|x_2, \dots, x_n >= 0$ untuk setiap $x_2, \dots, x_n \notin$ span$\{x, y\}$ akan terpenuhi hanya jika x = 0 atau y = 0.

Teorema 2

Diberikan $(X, <\cdot,\cdot \mid \cdot, \dots, \cdot>)$ ruang hasil kali dalam-*n*. Maka

1. $x \perp_G y$ jika dan hanya jika $x = 0$;
2. $x \perp_G y$ jika dan hanya jika $y \perp_G x$;
3. Jika $x \perp_G y$ maka $\alpha x \perp_G \beta y$ untuk setiap $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Teorema 3

Diberikan $(X, <\cdot,\cdot \mid \cdot, \dots, \cdot>)$ ruang hasil kali dalam-*n* standar. Maka $x \perp_G y$ jika dan hanya jika $x \perp y$.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah **penelitian kualitatif** dengan menggunakan metode kepustakaan (*library reseacrch*).

3.2 Pra Penelitian

Langkah-langkah yang dilakukan peneliti sebelum melaksanakan penelitian adalah :

1. Menentukan topik penelitian yang didapat dari membaca artikel, jurnal, buku, skripsi terdahulu sebagai referensi.
2. Menentukan rumusan masalah yang akan dibahas dalam penelitian ini.
3. Menentukan tujuan dan manfaat dari dilakukannya penelitian ini.
4. Menyusun latar belakang dengan memahami serta mencantumkan definisi dan konsep-konsep dasar mengenai ruang vektor (*vector space*), ruang bernorm (*norm space*), bergantung linier dan bebas linier, determinan, himpunan ortonormal, ruang hasil kali dalam (*inner product space*), ortogonalitas serta ayat-ayat al-Qur’an yang akan diintegrasikan pada penelitian.

3.3 Tahapan Penelitian

Setelah memahami dan menyusun latar belakang yang digunakan dalam penelitian ini, selanjutnya peneliti melakukan langkah-langkah berikut :

1. Mengkaji dan memahami jurnal penelitian yang ditulis oleh Gunawan dkk (2006) yang berjudul "Ortogonalitas di Ruang Norm-*n*".
2. Mengumpulkan referensi terkait pembuktian konsep hasil kali dalam-*n* dan konsep ortogonalitas-*G* di ruang norm-*n*.
3. Memaparkan definisi mengenai ruang vektor (*vector space*), ruang bernorm (*norm space*), bergantung linier dan bebas linier, determinan, himpunan ortonormal, ruang hasil kali dalam (*inner product space*), dan ortogonalitas.
4. Menentukan ayat al-Qur'an yang berkaitan dengan penelitian.
5. Mengkaji teori integrasi ortogonalitas pada al-Qur'an.
6. Membuktikan konsep hasil kali dalam-*n* menggunakan definisi.
7. Membuktikan ortogonalitas-*G* menggunakan definisi dan teorema sehingga memenuhi sifat dasar ortogonalitas yakni nondegenerasi, simetri, dan homogenitas.
8. Membuktikan keekuivalensian ortogonalitas-*G* menggunakan definisi dan teorema sehingga terpenuhi $x \perp_G y$ jika dan hanya jika $x \perp y$.
9. Menetapkan kesimpulan berdasarakan teorema pendukung yang digunkan dalam pembuktian pada bab pembahasan.

BAB IV

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dilakukan pembahasan mengenai (1) pembuktian ruang hasil kali dalam-*n*, (2) pembuktian apakah ortogonalitas-*G* memenuhi sifat nondegenerasi, simetri dan homogenitas dan (3) keekuivalensian ortogonalitas-*G*.

4.1 Syarat Perlu Ruang Hasil Kali Dalam Berdimensi *n*

Jika V adalah ruang hasil kali dalam, maka norm dari vektor v di V atau dinotasikan $\|v\|$ dan didefinisikan sebagai

$$\|v\| = \sqrt{< v, v >}$$

Dan jarak antara dua vektor dinotasikan sebagai $d(u, v)$ dan didefinisikan sebagai

$$d(u,v) = \|u - v\| = \sqrt{< u - v, u - v >}$$ (Anton & Rorres).

Namun berbeda jika pada ruang norm-*n*, norm x didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned}\|x\| &= \sqrt{< x, y|x_2, \dots, x_n >} \\ &= (< x, y|x_2, \dots, x_n >)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\begin{vmatrix} < x, y > & < x, x_2 > & \cdots & < x, x_n > \\ < x_2, y > & < x_2, x_2 > & \cdots & < x_2, x_n > \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ < x_n, y > & < x_n, x_2 > & \cdots & < x_n, x_n > \end{vmatrix}\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

(H Gunawan et al., 2006)

Misalkan X suatu ruang vektor atas dimensi *n* atau lebih dan n ≥ 2 bilangan bulat non negatif. Fungsi bernilai riil $<\cdot,\cdot \mid \cdot, \dots, \cdot>$ pada X^{n+1} memenuhi lima properti

1. $< x_1, x_1|x_2, \dots, x_n > = 0$; $< x_1, x_1|x_2, \dots, x_n > = 0$ jika dan hanya jika $x_1, x_2, \dots, x_n$ bergantung linier;
2. $< x_1, x_1|x_2, \dots, x_n > = < x_{i1}, x_{i1}|x_{i2}, \dots, x_{in} >$ untuk setiap permutasi $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ dari $(1, \dots, n)$;
3. $< x, y|x_2, \dots, x_n > = < y, x|x_2, \dots, x_n >$;
4. $< \alpha x, y|x_2, \dots, x_n > = \alpha < x, y|x_2, \dots, x_n >, \alpha \in \mathbb{R}$;
5. $< x + x', y|x_2, \dots, x_n > = < x, y|x_2, \dots, x_n > + < x', y|x_2, \dots, x_n >$

disebut hasil kali dalam-*n* di *X* dan $(X, <\cdot,\cdot \mid \cdot, \dots, \cdot>)$ disebut ruang hasil kali dalam-*n*(H Gunawan et al., 2006).

Teorema 4.1

Pada teorema ini sudah dibuktikan di artikel Gunawan, dkk dan penelitian ini melengkapi bagian pembuktian yang belum lengkap pada kasus 1, 2a, dan 2b.

Diberikan $(X, <\cdot,\cdot \mid \cdot, \dots, \cdot>)$ *adalah ruang hasil kali dalam-n standar dengan dimensi* $n+1$ *atau lebih. Maka, kondisi* $< x, y|x_2, \dots, x_n > = 0$ *untuk setiap* $x_2, \dots, x_n \notin$ *span*$\{x, y\}$ *terpenuhi hanya jika* $x = 0$ *atau* $y = 0$.

Bukti.

Diberikan

$$< x, y|x_2, \dots, x_n > = \begin{vmatrix} < x, y > & < x, x_2 > & \cdots & < x, x_n > \\ < x_2, y > & < x_2, x_2 > & \cdots & < x_2, x_n > \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ < x_n, y > & < x_n, x_2 > & \cdots & < x_n, x_n > \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

$x_2, \dots, x_n \notin$ *span*$\{x, y\}$ yang berarti $\forall x_2, \dots, x_n \in X$ dan $\alpha_i \in \mathbb{R}$ dengan kombinasi linier $x_2, \dots, x_n \neq \alpha_1 x + \alpha_2 y$

Untuk membuktikan Teorema 4.1 akan dipaparkan melalui 2 kasus berikut:

Kasus 1

Jika x, y bergantung linier

Andaikan $x \neq 0$ dan $y \neq 0$

Jika x dan y bergantung linier, sehingga dapat dibentuk $y = \alpha x$ untuk $\alpha \neq 0$.

artinya $\forall x, y \in X \ \exists\ \alpha_i \in \mathbb{R}, \alpha_i \neq 0$, maka

$< x, y|x_2, \dots, x_n > \ = < x, \alpha x|x_2, \dots, x_n >$ (subtitusi $y = \alpha x$)

Berdasarkan **Definisi 2.8** (3) maka

$< x, \alpha x|x_2, \dots, x_n > \ = < \alpha x, x|x_2, \dots, x_n >$

Berdasarkan **Definisi 2.8** (4) maka

$< \alpha x, x|x_2, \dots, x_n > \ = \alpha < x, x|x_2, \dots, x_n >$

Sehingga didapat

$\alpha < x, x|x_2, \dots, x_n > = \alpha \ \|x, x_2, \dots, x_n\|^2$

Pilih $x_2, \dots, x_n \notin \text{span}\{x, y\} \ni \{x, x_2, \dots, x_n\}$ bebas linier

yang berarti $\forall x, x_2, \dots, x_n$ dengan $\alpha_1 x + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$

dengan $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$

Sehingga didapat $< x, y|x_2, \dots, x_n > = \alpha\|x, x_2, \dots, x_n\|^2 \neq 0$

Karena $x \neq 0$ dan $y \neq 0$ maka $\alpha\|x, x_2, \dots, x_n\|^2 \neq 0$.

Kasus 2

Jika x, y bebas linier, maka terdapat 2 kondisi yakni

2a. Andaikan $x \neq 0$ dan $y \neq 0$

Jika x, y bebas linier yang berarti $\forall x, y \in X$ dengan kombinasi linier

$\alpha_1 x + \alpha_2 y = 0$ dengan $\alpha_i = 0 \in \mathbb{R}$

Jika $x \not\perp y$ atau $< x, y > \neq 0$

Maka pilih barisan ortonormal $x_2, \dots, x_n \in \{x, y\}^\perp$ sehingga

$$< x, y|x_2, \dots, x_n > \quad = \begin{vmatrix} < x, y > & < x, x_2 > & \cdots & < x, x_n > \\ < x_2, y > & < x_2, x_2 > & \cdots & < x_2, x_n > \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ < x_n, y > & < x_n, x_2 > & \cdots & < x_n, x_n > \end{vmatrix}$$

Karena $x_2, \dots, x_n$ merupakan barisan ortonormal maka memenuhi

1. $< x_i, x_j > = 0$
2. $\|x_i\| = 1$

Maka

$$= < x, y >< x_2, x_2 > \cdots < x_n, x_n > + < x, x_2 >$$

$$< x_2, x_3 > \cdots < x_n, y > + \cdots + < x, x_n >$$

$$< x_2, y > \cdots < x_n, x_{n-1} > - < x_n, y >$$

$$< x_{n-1}, x_2 > \cdots < x, x_n > + < x_n, x_2 >$$

$$< x_{n-1}, x_3 > \cdots < x, y > + \cdots + < x_n, x_n >$$

$$< x_{n-1}, y > \cdots < x, x_{n-1} >$$

$$= < x, y >< x_2, x_2 > \cdots < x_n, x_n > + 0.0. \dots .0 +$$

$$\dots + 0.0. \dots .0 - 0.0. \dots .0 + 0.0. \dots .0 + \cdots +$$

$$0.0. \dots .0$$

Berdasarkan definisi norm diperoleh

$$= < x, y > \|x_2\|^2 \|x_3\|^2 \dots \|x_n\|^2$$

$$= < x, y > 1.1. \dots .1$$

$$= < x, y >$$

Karena $x \neq 0$ dan $y \neq 0$ sehingga $< x, y > \neq 0$

2b. Andaikan $x \neq 0$ dan $y \neq 0$

Jika x, y bebas linier yang berarti $\forall x, y \in X$ dengan kombinasi linier

$\alpha_1 x + \alpha_2 y = 0$ dengan $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

Jika $x \perp y$ atau $< x, y > = 0$

Pilih vektor tak nol atau $x_2 = x + y + u \notin \text{span}\{x, y\}$

dimana u adalah vektor tegak lurus tetap terhadap span$\{x, y\}$, dan vektor

tak nol $x_3, \dots, x_n \notin \text{span}\{x, y\}$

dimana $x_3 \perp \text{span}\{x, y\}$ dan $x_3 \perp \text{span}\{x, y, x_3, \dots, x_{n-1}\}$ untuk $i = 4, \dots, n$

Sehingga didapat

$$< x, y | x_2, \dots, x_n > = \begin{vmatrix} < x, y > & < x, x_2 > & \cdots & < x, x_n > \\ < x_2, y > & < x_2, x_2 > & \cdots & < x_2, x_n > \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ < x_n, y > & < x_n, x_2 > & \cdots & < x_n, x_n > \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & < x, x_2 > & \cdots & 0 \\ < x_2, y > & < x_2, x_2 > & \cdots & < x_2, x_n > \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & < x_n, x_2 > & \cdots & < x_n, x_n > \end{vmatrix}$$

$$= 0 < x_2, x_2 > \cdots < x_n, x_n > +$$

$$< x, x_2 >< x_2, x_3 > \cdots 0 + \cdots +$$

$$0 < x_2, y > \cdots < x_n, x_{n-1} > -$$

$$0 < x_{n-1}, x_2 > \cdots < x, x_n > +$$

$$< x_n, x_2 >< x_{n-1}, x_3 > \cdots 0 + \cdots +$$

$$< x_n, x_n >< x_{n-1}, y > \cdots < x, x_{n-1} >$$

$$= - < x, x_2 >< x_2, y >< x_3, x_3 > \cdots < x_n, x_n >$$

$= - < x, x_2 >< x_2, y > \|x_3\|^2 \ldots \|x_n\|^2$ (Definisi 2.7)

$= - < x, x + y + u >< x + y + u, y >$

$\|x_3\|^2 \ldots \|x_n\|^2$ (Subtitusi $x_2 = x + y + u$)

$= - (< x, x > + < x, y > + < x, u >)(< x, y >$

$+ < y, y > + < u, y >)\|x_3\|^2 \ldots \|x_n\|^2$

$= - (< x, x > +0 + 0)(0 + < y, y > +0)$

$\|x_3\|^2 \ldots \|x_n\|^2$

$= - < x, x >< y, y > \|x_3\|^2 \ldots \|x_n\|^2$

$= - \|x\|^2\|y\|^2\|x_3\|^2 \ldots \|x_n\|^2 \neq 0$

Contoh

1. Diberikan $X = \mathbb{R}^3$ merupakan ruang bernorm, $x, x_2, x_3, y \in X$ didefinisikan sebagai $x = (0,0,0)$, $x_2 = (1,2,1)$, $x_3 = (3,1,4)$ dan $y = (4,0,2)$. Tunjukkan $< x, y|x_2, \ldots, x_n > = 0$

   Penyelesaian.

   Diberikan:

   $x = (0,0,0)$

   $x_2 = (1,2,1)$

   $x_3 = (3,1,4)$

   $y = (4,0,2)$

   Maka

   $$< x, y|x_2, x_3 > = \begin{vmatrix} < x, y > & < x, x_2 > & < x, x_3 > \\ < x_2, y > & < x_2, x_2 > & < x_2, x_3 > \\ < x_3, y > & < x_3, x_2 > & < x_3, x_3 > \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 10 \\ 20 & 10 & 20 \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

2. Diberikan $X = \mathbb{R}^3$ merupakan ruang bernorm, $x, x_2, x_3, y \in X$ didefinisikan sebagai $x = (0,0,0)$, x_2= $(1,2,1)$, x_3= $(3,1,4)$ dan $y = (4,0,2)$. Tunjukkan $< x, y|x_2, \dots, x_n >= 0$

   Penyelesaian.

   Diberikan:

   $x = (4,0,2)$

   x_2= $(1,2,1)$

   x_3= $(3,1,4)$

   $y = (0,0,0)$

   Maka

$$< x, y|x_2, x_3 > \quad = \begin{vmatrix} < x, y > & < x, x_2 > & < x, x_3 > \\ < x_2, y > & < x_2, x_2 > & < x_2, x_3 > \\ < x_3, y > & < x_3, x_2 > & < x_3, x_3 > \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 6 & 20 \\ 0 & 6 & 10 \\ 0 & 10 & 20 \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

4.2 Sifat-Sifat Ortogonalitas-*G*

Diketahui definisi ortogonalitas-*G* terdapat pada Definisi 2.13. Dengan menggunakan Definisi 2.11 dan Definisi 2.12, akan dilakukan pembuktian bahwa ortogonalitas-*G* memenuhi sifat nondegenerasi, simetri, dan homogenitas.

Definisi 2.11

Misal P adalah ruang vektor yang dilengkapi dengan ruang hasil kali dalam. Vektor $x, y \in P$ dikatakan ortogonal jika $< x, y >= 0$, dan dapat ditulis $x \perp y$ (Rynne & Youngson, 2008:60).

Definisi 2.12

Di ruang hasilkali dalam $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ dua vektor x dan y dikatakan ortogonal ditulis $x \perp y$ jika dan hanya jika $< x, y >= 0$. Beberapa sifat dasar ortogonalitas di ruang hasil kali dalam $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ adalah:

1. *Nondegenerasi*, jika $x \perp x$ maka x = 0.
2. *Simetri, jika $x \perp y$ maka $y \perp x$.*
3. *Homogenitas, jika $x \perp y$ maka $\alpha x \perp \beta y$ untuk setiap α, β vektor.*
4. *Aditif kanan, jika $x \perp y$ dan $x \perp z$ maka $x \perp y \perp z$.*
5. *Resolvabilitas, Untuk setiap $x, y \in$* X *terdapat vektor α sedemikian sehingga $x \perp (\alpha x \perp$* y).
6. *Kontinuitas, Jika $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$ (dalam norm) dan $x_n \perp x_n$ untuk setiap n maka $x \perp y$* (Gunawan dkk., 2005:1).

Teorema 4.2

Pada teorema ini sudah dibuktikan di artikel Gunawan, dkk dan penelitian ini melengkapi bagian pembuktian yang belum lengkap pada sifat 2 dan 3.

Diberikan $(X, <\cdot,\cdot \mid \cdot, \dots, \cdot>)$ adalah ruang hasil kali dalam-n. Maka,

1. *$x \perp_G x$ jika dan hanya jika $x = 0$*
2. *$x \perp_G y$ jika dan hanya jika $y \perp_G x$*
3. *Jika $x \perp_G y$, maka $\alpha x \perp_G \beta y$ untuk setiap $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*

Bukti.

1. $x \perp_G x$ jika dan hanya jika $x = 0$

(⇒) Diketahui $x \perp_G x$ akan dibuktikan $x = 0$

Karena $x \perp_G x$ berdasarkan definisi maka $\forall x \in X \ \exists \ V \subset X$ dengan codim(V) = 1 sedemikian hingga memenuhi $< x, x|x_2, \dots, x_n > = 0, \forall x_2, \dots, x_n \ \in V$.

Karena $x \perp_G x$ sehingga kondisi $< x, x|x_2, \dots, x_n > = 0$ terpenuhi, sedemikian hingga berdasarkan **Teorema 4.1** $< x, x|x_2, \dots, x_n > = 0$ terpenuhi jika $x = 0$.

(⇐) Diketahui $x = 0$ akan dibuktikan $x \perp_G x$

Karena $x \in X^{n+1}$ maka $< x, x|x_2, \dots, x_n >$, $x, x_2, \dots, x_n \in X$ untuk $x = 0$ dengan kombinasi linier $\alpha_1 x + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$ terdapat $\alpha_i \neq 0$

Karena $x, x_2, \dots, x_n$ bebas linier sehingga $< x, x|x_2, \dots, x_n > = 0$.

Katakan $V = \{x_2, \dots, x_n\} \subset X$, karena dimensi $(X) = n + 1$ dan dimensi $(V) = n$ maka codim$(V) = 1$ sehingga terpenuhi $< x, x|x_2, \dots, x_n > = 0$.

Contoh.

Diberikan $X = \mathbb{R}^3$ ruang bernorm atas lapangan bilangan riil, untuk $x \in X$ didefinisikan sebagai $x = (x_1, x_2, x_3) = (0,0,0)$ berlaku jika $x \perp x$ maka $x = 0$.

Penyelesaian.

Diberikan $x \perp x$ maka $< x, x > = 0$

$< x, x >$ $= x_1 x_1 + x_2 x_2 + x_3 x_3$

$= (0)(0) + (0)(0) + (0)(0)$

$= 0 + 0 + 0$

$= 0$

Andaikan $x = (x_1, x_2, x_3) = (1, -1, 2)$

$< x, x >$ $= x_1 x_1 + x_2 x_2 + x_3 x_3$

$= (1)(1) + (-1)(-1) + (2)(2)$

$= 1 + 1 + 4$

$= 6 \neq 0$

2. $x \perp_G y$ jika dan hanya jika $y \perp_G x$

(⇒) Jika $x \perp_G y$ maka $y \perp_G x$

Diketahui $x \perp_G y$ akan dibuktikan $y \perp_G x$

Diketahui $x \perp_G y$ yang berarti $\forall x, y \in X \; \exists \; V \subset X$ dengan $\mathrm{codim}(V) = 1$ sedemikian hingga memenuhi $< x, y | x_2, \dots, x_n > = 0$, $\forall x_2, \dots, x_n \in V$.

Berdasarkan **Definisi 2.8** (3) maka

$< x, y | x_2, \dots, x_n > = < y, x | x_2, \dots, x_n > = 0$

Akan dibuktikan $< y, x | x_2, \dots, x_n > = 0$

Karena $\exists \; x_2, \dots, x_n \in V$ dimana $V \subset X$ dan memiliki $\dim(V) = n + 1$ dan $\dim(V) = n$ sehingga $\mathrm{codim}(X) = 1$ sedemikian hingga $< y, x | x_2, \dots, x_n > = 0$ atau $y \perp_G x$.

(⇐) Jika $y \perp_G x$ maka $x \perp_G y$

Diketahui $y \perp_G x$ akan dibuktikan $x \perp_G y$

Diketahui $y \perp_G x$ yang berarti $\forall y, x \in X \exists V \subset X$ dengan codim(V) $= 1$ sedemikian hingga memenuhi $< y, x|x_2, \dots, x_n >= 0$, $\forall x_2, \dots, x_n \in V$.

Berdasarkan **Definisi 2.8** (3) maka

$< y, x|x_2, \dots, x_n >=< x, y|x_2, \dots, x_n >= 0$

Akan dibuktikan $< x, y|x_2, \dots, x_n >= 0$

Karena $\exists\ x_2, \dots, x_n \in V$ dimana $V \subset X$ dan memiliki $\dim(V) = n + 1$ dan $\dim(V) = n$ sehingga codim$(X) = 1$ sedemikian hingga $< x, y|x_2, \dots, x_n >= 0$ atau $x \perp_G y$.

Contoh.

Diberikan $X = \mathbb{R}^3$ merupakan ruang bernorm, $x, y \in X$ didefinisikan sebagai $x = (x_1, x_2, x_3) = (-1,1,2)$ dan $y = (y_1, y_2, y_3) = (4,0,2)$, berlaku jika $x \perp y$ maka $y \perp x$.

Penyelesaian.

Diberikan

$x = (x_1, x_2, x_3) = (-1,1,2)$

$y = (y_1, y_2, y_3) = (4,0,2)$

Akan ditunjukkan $x \perp y$

$$
\begin{aligned}
< x, y > &= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \\
&= (-1)(4) + (1)(0) + (2)(2) \\
&= -4 + 0 + 4 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Karena $< x, y >= 0$, maka $x \perp y$

Selanjutnya akan ditunjukkan jika $x \perp y$ maka $y \perp x$

$< y, x >$ $= y_1x_1 + y_2x_2 + y_2x_3$

$= (4)(-1) + (0)(1) + (2)(2)$

$= -4 + 0 + 4$

$= 0$

Karena $< y, x > = 0$, maka berlaku jika $x \perp y$ maka $y \perp x$.

3. Jika $x \perp_G y$ maka $\alpha x \perp_G \beta y$ untuk setiap $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Diketahui $x \perp_G y$ yang berarti $\forall x, y \in X$ $\exists$ $V \subset X$ dengan codim(V) = 1 sedemikian hingga memenuhi $< y, x | x_2, \dots, x_n > = 0$ ... (1), $\forall x_2, \dots, x_n \in V$.

Dipilih $\alpha \in \mathbb{R}$ kemudian dari persamaan (1) kedua ruas dikali α

$\alpha < x, y | x_2, \dots, x_n > = \alpha . 0,$

Berdasarkan **Definisi 2.8** (4) diperoleh

$\alpha < x, y | x_2, \dots, x_n > = < \alpha x, y | x_2, \dots, x_n >$

Berdasarkan **Definisi 2.8** (3) diperoleh

$< \alpha x, y | x_2, \dots, x_n > = < y, \alpha x | x_2, \dots, x_n > = 0$ ... (2)

Dipilih $\beta \in \mathbb{R}$ kemudian dari persamaan (2) kedua ruas dikali β

$\beta < y, \alpha x | x_2, \dots, x_n > = \beta . 0,$

Berdasarkan **Definisi 2.8** (4) diperoleh

$\beta < y, \alpha x | x_2, \dots, x_n > = < \beta y, \alpha x | x_2, \dots, x_n >$

Berdasarkan **Definisi 2.8** (3) diperoleh

$< \beta y, \alpha x | x_2, \dots, x_n > = < \alpha x, \beta y | x_2, \dots, x_n >$

Jadi $\forall x, y \in X$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dapat dibentuk $\alpha x, \beta y \in X$ dan $\exists$ $V \subset X$ dengan codim(V) = 1 sedemikian hingga memenuhi $< \alpha x, \beta y | x_2, \dots, x_n > = 0$.

Sehingga terbukti jika $x \perp_G y$ maka $\alpha x \perp_G \beta y$ untuk setiap $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Contoh.

Diberikan $X = \mathbb{R}^3$ merupakan ruang bernorm, $x, y \in X$ didefinisikan sebagai $x = (x_1, x_2, x_3) = (-1,1,2)$ dan $y = (y_1, y_2, y_3) = (4,0,2)$,berlaku jika $x \perp y$ maka $\alpha x \perp \beta y$ untuk setiap $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\ x, y \in X$.

Penyelesaian.

Diberikan

$x = (x_1, x_2, x_3) = (-1,1,2)$

$y = (y_1, y_2, y_3) = (4,0,2)$

Akan ditunjukkan $x \perp y$

$< x, y >$ $= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$

$= (-1)(4) + (1)(0) + (2)(2)$

$= -4 + 0 + 4$

$= 0$

Karena $< x, y > = 0$, maka $x \perp y$

Selanjutnya akan ditunjukkan jika $x \perp y$ maka $\alpha x \perp \beta y$ untuk setiap $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\ x, y \in X$.

Ambil $\alpha = 2$ dan $\beta = 3$, sehingga

$< \alpha x, \beta y >$ $= (\alpha x_1 \beta y_1 + \alpha x_2 \beta y_2 + \alpha x_{3\beta} y_3)$

$= \alpha\beta(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)$ (Distributif)

$= 2.3((-1)(4) + (1)(0) + (2)(2))$

$= 6(-4 + 0 + 4)$

$= 6(0)$

$= 0$

Karena $< \alpha x, \beta y >= 0$ maka berlaku ditunjukkan jika $x \perp y$ maka $\alpha x \perp \beta y$ untuk setiap $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $x, y \in X$.

4.3 Ekuivalensi Ortogonalias-*G* terhadap Ortogonalitas Biasa

Ekuivalensi ortogonalitas-*G* akan dibuktikan dengan menggunakan definisi di bawah

Definisi 2.11

Misal *P* adalah ruang vektor yang dilengkapi dengan ruang hasil kali dalam. Vektor $x, y \in P$ dikatakan ortogonal jika $< x, y >= 0$, dan dapat ditulis $x \perp$ y (Rynne & Youngson, 2008:60).

Contoh.

Diberikan $X = \mathbb{R}^3$ merupakan ruang bernorm, $x, y \in X$ didefinisikan sebagai $x = (x_1, x_2, x_3) = (-1,1,2)$ dan $y = (y_1, y_2, y_3) = (4,0,2)$. Tunjukkan $x \perp y$.

Penyelesaian.

Diberikan:

$x = (x_1, x_2, x_3) = (-1,1,2)$

$y = (y_1, y_2, y_3) = (4,0,2)$

Maka

$$
\begin{aligned}
< x, y > &= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \\
&= (-1)(4) + (1)(0) + (2)(2) \\
&= -4 + 0 + 4 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Karena $< x, y >= 0$, maka $x \perp y$.

Ruang hasil kali dalam-*n* atau ditulis $< x_1, x_1 | x_2, \dots, x_n >$ didefinisikan sebagai

$$< x_1, x_1 | x_2, \dots, x_n > \;=\; \begin{vmatrix} < x, x > & < x, x_2 > & \cdots & < x, x_n > \\ < x_2, x > & < x_2, x_2 > & \cdots & < x_2, x_n > \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ < x_n, x > & < x_n, x_2 > & \cdots & < x_n, x_n > \end{vmatrix}$$

Teorema 4.3

Pada teorema ini sudah dibuktikan di artikel Gunawan, dkk dan penelitian ini melengkapi bagian pembuktian yang belum lengkap pada bagian proses penyelesaian akhir.

Diberikan $(X, <\cdot,\cdot \mid \cdot, \dots, \cdot>)$ *adalah ruang hasil kali dalam-n standar. Maka* $x \perp_G y$ *jika dan hanya jika* $x \perp y$.

Bukti.

(⇒) Diketahui $x \perp_G y$

Akan dibuktikan $x \perp y$

Andaikan $x \perp y$, sehingga $< x, y > = 0$ dan $x, y \neq 0$

Maka dapat dipilih $V = \{x\}^{\perp}$

Sehingga jelas $V \subset X$ dengan $\mathrm{codim}(V) = 1$

Sehingga $\forall x_2, \dots, x_n \in V$ memenuhi

$< x, y | x_2, \dots, x_n > = 0$

(⇐) Diketahui $x \perp y$

Akan dibuktikan $x \perp_G y$

Andaikan $x \not\perp y$, sehingga $< x, y > \neq 0$

Jelaslah x, y adalah vektor tak nol

Akan ditunjukkan $x \not\perp_G y$

Misal $V \in X$ dengan $\mathrm{codim}(V) = 1$

Karena dim $(V \cap \{x\}^{\perp}) \geq n - 1$

maka terdapat himpunan ortonormal $x_2, \dots, x_n \in V$

sedemikian hingga $< x, x_i > = 0 \ \forall\ i = 2, \dots, n$

Sehingga didapat

$$< x, y | x_2, \dots, x_n > = \begin{vmatrix} < x, y > & < x, x_2 > & \cdots & < x, x_n > \\ < x_2, y > & < x_2, x_2 > & \cdots & < x_2, x_n > \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ < x_n, y > & < x_n, x_2 > & \cdots & < x_n, x_n > \end{vmatrix}$$

$$= < x, y >< x_2, x_2 > \cdots < x_n, x_n > + < x, x_2 >$$
$$< x_2, x_3 > \cdots < x_n, y > + \cdots + < x, x_n >$$
$$< x_2, y > \cdots < x_n, x_{n-1} > - < x_n, y >$$
$$< x_{n-1}, x_2 > \cdots < x, x_n > + < x_n, x_2 >$$
$$< x_{n-1}, x_3 > \cdots < x, y > + \cdots + < x_n, x_n >$$
$$< x_{n-1}, y > \cdots < x, x_{n-1} >$$
$$= < x, y >< x_2, x_2 > \cdots < x_n, x_n > + 0.0. \dots .0 +$$
$$\dots + 0.0. \dots .0 - 0.0. \dots .0 + 0.0. \dots .0 + \cdots +$$
$$0.0. \dots .0$$

Berdasarkan definisi norm diperoleh

$$= < x, y > \|x_2\|^2 \ \|x_3\|^2 \dots \ \|x_n\|^2$$
$$= < x, y > 1.1. \dots .1$$
$$= < x, y >$$

Karena $x \neq 0$ dan $y \neq 0$ sehingga $< x, y > \neq 0$.

Contoh.

Diberikan $X = \mathbb{R}^3$ merupakan ruang bernorm, $x, y \in X$ didefinisikan sebagai $x = (x_1, x_2, x_3) = (-1,1,2)$ dan $y = (y_1, y_2, y_3) = (4,0,2)$. Tunjukkan $x \perp_P y$ ekuivalen dengan $x \perp y$.

Penyelesaian.

Pertama akan ditunjukkan bahwa $x \perp y$

Diberikan:

$x = (x_1, x_2, x_3) = (-1,1,2)$

$y = (y_1, y_2, y_3) = (4,0,2)$

Maka

$$
\begin{aligned}
< x, y > &= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \\
&= (-1)(4) + (1)(0) + (2)(2) \\
&= -4 + 0 + 4 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Karena $< x, y > = 0$, maka $x \perp y$

Selanjutnya akan ditunjukkan $x \perp_P y$ ekuivalen dengan $x \perp y$

Pada ruang bernorma riil $(X, \|\cdot\|)$, suatu vektor x dikatakan ortogonalitas-*P* terhadap y jika dan hanya jika $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$,

$$
\begin{aligned}
\|x - y\|^2 &= < x - y, x - y > \\
&= < x, x - y > - < y, x - y > \\
&= < x, x > - < x, y > - < y, x > + < y, y > \\
&= < x, x > - < x, y > - < x, y > + < y, y > \\
&= < x, x > - 2 < x, y > + < y, y > \\
&= < x, x > + < y, y > \\
&= \big((-1)(-1) + (1)(1) + (2)(2)\big) + ((4)(4) + (0)(0) + (2)(2)) \\
&= (6) + (20) \\
&= 26
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|x\|^2 &= < x, x > \\
&= (-1)(-1) + (1)(1) + (2)(2)
\end{aligned}
$$

$= 6$

$\|y\|^2 \quad = < y, y >$

$= (4)(4) + (0)(0) + (2)(2)$

$= 20$

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan definisi yang diberikan mengenai sifat-sifat pada ruang bernorm dan pendefinisian ortogonalitas-*G* di ruang norm-*n* dapat disimpulkan bahwa

1. Syarat perlu agar kondisi $< x, y|x_2, \dots, x_n >= 0$ terpenuhi hanya jika $x = 0$ atau $y = 0$.
2. Ortogonalitas-*G* memenuhi sifat nondegenerasi, simetri dan homogenitas.
3. Ortogonalitas-*G* ekuivalen dengan ortogonalitas biasa.

5.2 Saran

Skripsi ini diharapkan dapat menjadi sarana pembelajaran serta referensi bagi para pembaca mengenai ortogonalitas-*G* di ruang norm-*n*. Skripsi ini terbatas hanya pada seputar ortogonalitas-*G* di ruang norm-*n*. Pada penelitian berikutnya diharapkan dapat dikembangkan di ruang lingkup yang lebih luas baik dari segi ortogonalitas-*G* maupun ruang norm-*n*.

DAFTAR PUSTAKA

Al-Qur'an dan Terjemahannya. (2019). Kementrian Agama RI.

Alsina, C., dkk.. 2010. *Norm Derrivatives And Characterizations Of Inner Product Spaces*. Singapore: World Scientific.

Anton, H. Dan Rorres, C.. 2004. *Aljabar Linier Elementer Versi Aplikasi Edisi Delapan Jilid I*. Jakarta: Erlangga

Bartle, R. G dan Donald R. Shelbert. 2000. *Introduction to Real Analytics Third Edition.* USA: John Wiley and Sons

Castillo, Rene Erlin Dan Rafeiro, Humberto (2005) : *Elementary Linier Algebra.*, Wiley, Canada

Debnath, L. dan Mikusinski, P.. 1990. *Introduction to Hilbert Space with Applications*. San Diego: Academic Press.

Gallian, J. (2016). Contemporary abstract algebra/Joseph A. Gallian. *Boston, MA*.

Gozali, S. M. (n.d.). *Ruang Norm*.

Gunawan H. *Et Al.*, 2006. *Ortogonality In 2-Normed Spaces Revisited*. Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak Ser. Mat.17.

Gunawan, H., Kikianty, E., Gemawati, S., & Sihwaningrum, I. (2006). *ORTHOGONALITY IN n -NORMED SPACES*. *December*, 1–9.Gallian, J. (2016). Contemporary abstract algebra/Joseph A. Gallian. *Boston, MA*.

Gozali, S. M. (n.d.). *Ruang Norm*.

Gunawan, H, Kikianty, E., Gemawati, S., & Sihwaningrum, I. (2006). *ORTHOGONALITY IN n -NORMED SPACES*. *December*, 1–9.

Gunawan, Hendra, & Kikianty, E. (2005). *BEBERAPA KONSEP ORTOGONALITAS DI RUANG NORM*. 1–7.

Koliha, J. J. (2008). Introductory Functional Analysis. In *Metrics, Norms and Integrals*. https://doi.org/10.1142/9789812836588_0011

Kolman, B., & Hill, D. (n.d.). *[Bernard_Kolman,_David_Hill]_Elementary_Linear_Alg(BookZZ.org) (7).pdf*.

Kreyzig, E. (1978) : *Introductory Functional Analysis With Application.,* John Wiley Sons, New York.

Muhammad, A. (2016). Analisis Nilai Pendidikan Karakter Yang Dikembangkan Di Sma Negeri 2 Kendari Kelurahan Rahandouna Kecamatan Poasia Kota Kendari. *Journal Of Chemical Information And Modeling*, *53*(9), 1689–1699.

Muh Nur., (2011). Teorema Titik Tetao Di Ruang Norm- Standar. *Program Tesis ITB*

Rynne, B.P. Dan Youngson, M.A.. 2008. *Linier Functional Analysis.* New York: Springer-Verlag.

RIWAYAT HIDUP

Miftahul Dewanto, lahir di Palu, 23 Maret 2000. Putra kedua dari Bapak Maidi dan Ibu Didin Tuwiyowati. Laki-laki yang kerap disapa Dewa atau Tahul ini telah menempuh pendidikan formal mulai dari jenjang TK Muslimat NU Malang yang lulus pada tahun 2006, dilanjutkan dengan pendidikan dasar di SDN Kebonsari 2 Malang sehingga lulus pada tahun 2012. Kemudian ia melanjutkan pendidikan pendidikan formalnya ke jenjang menengah pertama di SMPN 12 Malang dan lulus pada tahun 2015. Selanjutnya menempuh pendidikan di SMAN 2 Malang dan lulus pada tahun 2018. Setelah menempuh jenjang sekolah menengah akhir, ia melanjutkan pendidikan di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Laki-laki yang telah menggemari matematika ini mulai aktif mengikuti lomba dan kegiatan yang berhubungan dengan matematika sejak di jenjang sekolah dasar dan berlanjut hingga ke jenjang menengah atas. Selama menjadi mahasiswa di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, laki-laki ini pernah tergabung dalam organisasi Mathematics English Club (MEC) dan pernah menjadi ketua pelaksana pada acara Mathematics English Club Competition.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Miftahul Dewanto
NIM : 18610082
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Orotogonalitas-G di Ruang Norm-n
Pembimbing I : Dr. Elly Susanti, M.Sc
Pembimbing II : Erna Herawati, M.Pd

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	14 Maret 2022	Konsultasi Bab I, II, III	1.
2.	18 Maret 2022	Revisi Bab I, II, III	2.
3.	20 Maret 2022	ACC Bab I,II, III	3.
4.	25 Maret 2022	Konsultasi Kajian Agama (Bab I dan II)	4.
5.	30 Maret 2022	Konsultasi Kajian Agama (Bab I dan II)	5.
6.	25 Mei 2022	Konsultasi Bab I, II, III	6.
7.	3 Agustus 2022	Konsultasi Bab I, II, III	7.
8.	15 September 2022	ACC Bab I, II, III	8.
9.	18 Oktober 2022	Konsultasi Bab IV	9.
10.	20 Oktober 2022	Konsultasi Bab IV	10.
11.	17 November 2022	Konsultasi Bab IV	11.
12.	29 November 2022	Konsultasi Bab IV	12.
13.	5 Desember 2022	Konsultasi Kajian Agama	13.
14.	5 Desember 2022	ACC Kajian Agama	14.
15.	28 Desember 2022	ACC Keseluruhan Bab	15.

Malang, 28 Desember 2022
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005