

**ANALISIS DINAMIK MODEL *PREY-PREDATOR* DENGAN
STRUKTUR UMUR DAN PERILAKU *ANTI-PREDATOR***

SKRIPSI

**OLEH:
HAYATI FI ROHMATIKA
NIM. 18610064**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022**

**ANALISIS DINAMIK MODEL *PREY-PREDATOR* DENGAN
STRUKTUR UMUR DAN PERILAKU *ANTI-PREDATOR***

SKRIPSI

**Diajukan kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Hayati Fi Rohmatika
NIM. 18610064**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022**

**ANALISIS DINAMIK MODEL *PREY-PREDATOR* DENGAN
STRUKTUR UMUR DAN PERILAKU *ANTI-PREDATOR***

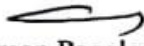
SKRIPSI

**Oleh
Hayati Fi Rohmatika
NIM. 18610064**


Telah Disetujui untuk Diuji

Malang, 26 Desember 2022

Dosen Pembimbing I


Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

Dosen Pembimbing II


Ach. Nasichuddin, M.A
NIP. 19730705 200003 1 001

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika


Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

ANALISIS DINAMIK MODEL *PREY-PREDATOR* DENGAN STRUKTUR UMUR DAN PERILAKU *ANTI-PREDATOR*

SKRIPSI

Oleh
Hayati Fi Rohmatika
NIM. 18610064

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

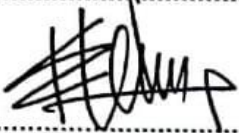
Tanggal 28 Desember 2022

Ketua Penguji : Ari Kusumastuti, M.Si., M.Pd



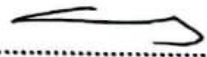
.....

Anggota Penguji 1 : Dr. Heni Widayani, M.Si




.....

Anggota Penguji 2 : Dr. Usman Pagalay, M.Si



.....

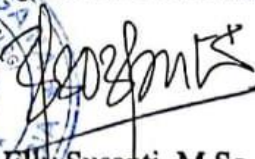
Anggota Penguji 3 : Ach. Nasichuddin, M.A



.....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika




Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertandatangan dibawah ini:

Nama : Hayati Fi Rohmatika.
NIM : 18610064.
Program Studi : Matematika.
Fakultas : Sains dan Teknologi.
Judul Skripsi : Analisis Model *Prey-Predator* Dengan Struktur Umur
Dan Perilaku *Anti-Predator*.

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 28 Desember 2022
Yang membuat pernyataan,



Hayati Fi Rohmatika
NIM. 18610064

MOTTO DAN PERSEMBAHAN

“Pilihan yang telah kamu pilih menjadi tanggung jawabmu sepenuhnya”

“Barangsiapa yang memberikan syafa'at yang baik, niscaya ia akan memperoleh bagian (pahala) dari padanya. Dan barangsiapa memberi syafa'at yang buruk, niscaya ia akan memikul bagian (dosa) dari padanya. Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu”

(An-Nisa' (4):85)

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Kedua orang tua penulis, abah Abdul Salam dan ibu Sittin yang menjadi pendukung nomor satu penulis. Berupa do'a, kasih sayang, nasihat, semangat, dan motivasi.

Ketiga saudara penulis, adik Sakinah Baridah, adik M.Ulul Albab, dan adik M.Almu'tashim Billah yang saling mendukung satu sama lain, baik berupa do'a, kasih sayang, semangat, dan motivasi.

Seluruh dosen yang telah membimbing, memberi motivasi serta semangat kepada penulis dalam penyelesaian naskah skripsi ini.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah atas Rahmat dan hidayahnya sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi yang berjudul Analisis Dinamik Model *Prey-Predator* dengan Struktur Umur dan Perilaku *Anti-Predator*, sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Ucapan terima kasih dan penghargaan sebesar-besarnya tidak lupa untuk disampaikan kepada berbagai pihak atas bimbingan dan dukungan yang telah diberikan kepada penulis, ucapan tersebut penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan dukungan dan arahan pada penulis sehingga penelitian ini dapat diselesaikan dengan baik.
5. Ach. Nasichuddin, M.A, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan dukungan dan arahan pada penulis sehingga penelitian ini dapat diselesaikan dengan baik.
6. Ari Kusumastuti, M.Si., M.Pd dan Dr. Heni Widayani, M.Si, selaku penguji Seminar Proposal dan Seminar Hasil yang telah memberikan dukungan dan arahan pada penulis sehingga penelitian ini dapat diselesaikan dengan baik.
7. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
8. Abah Abdul Salam dan Ibuk Sittin, selaku kedua orang tua penulis yang menjadi pendukung nomor satu dan menjadi panutan dalam hidup penulis.

9. Ketiga saudara terkasih penulis yaitu, Sakinah Baridah, M. Ulul Albab, dan M. Almu'tashim Billah.
10. K.H. Abdul Mannan selaku guru spiritual penulis, yang selalu memberikan arahan dan motivasi luar biasa.
11. Ustadz H.M. Maliku Fajri Shobah, Lc., M.Pd.I. selaku pengasuh pondok pesantren Al-Barokah yang selalu mendukung dan mendoakan penulis.
12. Pengasuh Pondok Pesantren Tarbiyatut Tholabah Kranji Paciran Lamongan sekeluarga.
13. Pengasuh Pondok Pesantren Al-Fathimiyah Paciran Lamongan Sekeluarga.

Demikian penulis telah menyelesaikan tugas akhir ini, semoga dengan rahmat dan karunia-Nya skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis maupun bagi pembaca *Aamiin*.

Wassalamu'alaikum Warohmatullahi Wabarokatuh

Malang, 28 Desember 2022

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSETUJUAN	ii
HALAMAN PENGAJUAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	v
MOTTO DAN PERSEMBAHAN	vi
KATA PENGANTAR	vii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR TABEL	xi
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR LAMPIRAN	xiii
ABSTRAK	xiv
ABSTRACT	xv
ملخص	xvi
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Manfaat Penelitian	4
1.5 Batasan Penelitian	5
1.6 Definisi Istilah	6
BAB II KAJIAN PUSTAKA	7
2.1 Teori Pendukung	7
2.1.1 Persamaan Diferensial	7
2.1.2 Persamaan Diferensial Linier dan Non-Linier	8
2.1.3 Fungsi Respon	9
2.2 Interaksi Antar Kelompok Dalam Islam	11
2.3 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan	13
2.3.1 Titik Keseimbangan	13
2.3.2 Linierisasi dan Matriks Jacobi	14
2.3.3 Nilai Eigen dan Vektor Eigen	16
2.3.4 Kestabilan Titik Keseimbangan	17
2.3.5 Kriteria <i>Routh-Hurwitz</i>	18
BAB III METODE PENELITIAN	21
3.1 Jenis Penelitian	21
3.2 Pra Penelitian	21
3.3 Tahapan Penelitian	21
BAB IV PEMBAHASAN	23
4.1 Model <i>Predator-Prey</i> Dengan <i>Stage-Structure</i> Pada Kedua Spesies Dan Kebiasaan <i>Anti-Predator</i>	23
4.1.1 Identifikasi Model	23
4.1.2 Besaran Nilai Awal Dan Parameter	24

4.2 Titik Kesetimbangan Pada Persamaan Model	26
4.3 Analisis Model <i>Prey-Predator</i> Dengan Struktur Umur Dan Perilaku <i>Anti-Predator</i>	37
4.3.1 Analisis Model Dengan Titik Kesetimbangan Pertama.....	39
4.3.1.1 Linierisasi Model	39
4.3.1.2 Nilai Eigen Model.....	42
4.3.1.3 Analisis Titik Kesetimbangan Model	44
4.3.2 Analisis Model Dengan Titik Kesetimbangan Kedua	49
4.3.2.1 Linierisasi Model	49
4.3.2.2 Nilai Eigen Model.....	51
4.3.2.3 Analisis Titik Kesetimbangan Model	53
4.4 Simulasi Model <i>Prey-Predator</i> Dengan Struktur Umur Dan Perilaku <i>Anti-Predator</i>	56
BAB V PENUTUP	63
5.1 Kesimpulan	63
5.2 Saran	64
DAFTAR PUSTAKA	66
LAMPIRAN.....	68
RIWAYAT HIDUP	81

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Respon Fungsi.....	11
Tabel 2.2 Kestabilan.....	17
Tabel 2.3 <i>Routh Array</i>	19
Tabel 4.1 Nilai Awal.....	24
Tabel 4.2 Nilai Parameter I.....	25
Tabel 4.3 Nilai Parameter II.....	25
Tabel 4.4 Nilai Parameter III.....	26

DAFTAR GAMBAR

Gambar 4.1 Kasus 3 Ketika $m_2 < m_1$	55
Gambar 4.2 Kasus 3 Ketika $m_2 = m_1$	57
Gambar 4.3 Kasus 3 Ketika $m_2 < m_1$	59
Gambar 4.4 Simulasi Model Untuk Menunjukkan Adanya Bifurkasi Pada Model	61

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1	Perhitungan Penentuan Nilai Y tanpa Parameter.....	68
Lampiran 2	Perhitungan Penentuan Nilai Y dengan Parameter I.....	70
Lampiran 3	Perhitungan Penentuan Nilai Y dengan Parameter II	72
Lampiran 4	Perhitungan Penentuan Nilai Y dengan Parameter III.....	74
Lampiran 5	M-File untuk Simulasi Kasus I.....	75
Lampiran 6	M-File untuk Simulasi Kasus II.....	77
Lampiran 7	M-File untuk Simulasi Kasus III	78
Lampiran 8	M-File untuk Simulasi Dimana Menunjukkan Perlu Adan Bifurkasi.....	80

ABSTRAK

Rohmatika, Hayati Fi. 2022. **Analisis Dinamik Model *Prey-Predator* Dengan Struktur Umur Dan Perilaku *Anti-Predator***. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr.Usman Pagalay, M.Si. (II) Ach. Nasichuddin, M.A.

Kata Kunci: Model *Prey-Predator*, Struktur Umur, *Anti-Predator*

Pembagian struktur umur pada model *prey-predator* dibedakan menjadi spesies remaja dan dewasa, dengan diberikan faktor perilaku *anti-predator* berupa pertahanan kelompok pada *prey* dewasa. Laju predasi dari *predator* dewasa ke *prey* remaja disimbolkan m_1 dan laju predasi dari *predator* dewasa ke *prey* remaja disimbolkan m_2 . Kemudian diberikan kasus ketika $m_2 < m_1$, $m_2 = m_1$, dan $m_2 > m_1$, dari perbedaan parameter tersebut akan ditentukan kestabilan dari model dengan kriteria *Routh-Hurwitz*, dan ditunjukkan simulasi numerik untuk mengetahui dari ketiga kasus tersebut manakah kasus yang paling baik untuk model ini. Titik kesetimbangan yang diperoleh adalah $E_0 = \left(\frac{r}{c_1(b_1+d_1)} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right), \frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right), 0, 0 \right)$ dan $E_1 = (X^*, Y^*, Z^*, W^*)$. Hasil yang diperoleh dari ketiga kasus adalah pada ketiga kasus dikatakan stabil, kemudian untuk simulasi numerik menunjukkan bahwa kasus yang paling baik adalah kasus ketika $m_2 = m_1$, dikarenakan jarak populasi stabil dari keempat spesies tidak terlalu jauh. Sehingga dengan faktor *anti-predator* yang diberikan pada model ini, untuk mencegah kepunahan pada keempat spesies, maka laju predasi terhadap *prey* dewasa harus setara dengan predasi terhadap *prey dewasa*.

ABSTRACT

Rohmatika, Hayati Fi. 2022. **Dynamic Analysis Of The Prey-Predator Model With Age Structure And Anti-Predator Behavior.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing. Advisors: (I) Dr.Usman Pagalay, M.Si. (II) Ach. Nasichuddin, M.A.

Kata Kunci: Prey-Predator Model, Stage Structure, Anti-Predator

The division of the age structure in the prey-predator model is divided into juvenile and adult species, given anti-predator behavior factors in the form of group defense in adult prey. The predation rate from adult predator to juvenile prey is symbolized m_1 and the predation rate from adult predator to adult prey is symbolized m_2 . Then given the case when $m_2 < m_1$, $m_2 = m_1$, and $m_2 > m_1$, from the difference in these parameters the stability of the model will be determined with the Routh-Hurwitz criteria, and a numerical simulation is shown to find out which of the three cases is the best case for this model. The equilibrium point obtained is $E_0 = \left(\frac{r}{c_1(b_1+d_1)} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right), \frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right), 0, 0 \right)$ and $E_1 = (X^*, Y^*, Z^*, W^*)$. The results obtained from the three cases are that all three cases are said to be stable, then for the numerical simulation it shows that the best case is the case when $m_2 = m_1$, because the distance between the stable populations of the four species is not too far away. So with the anti-predator factor given to this model, to prevent extinction of the four species, the rate of predation of adult prey must be equivalent to predation of adult prey.

مستخلص البحث

رحمتك ,حياتي في , 2022. التحليل الديناميكي لنموذج **Prey-Predator** مع الهيكل العمري و-**Anti** **Predator** للسلوك. البحث العلمي. قسم الرياضيات, كلية العلوم والتكنولوجيا, جامعة الحكومية الإسلامية مولنا مالك إبراهيم مالانج. المشرفة: (1) عثمان فاكلاي المحيستيرة, (2) أحمد نصحدين المحيستيرة.

الكلمات الرئيسية: نموذج **Prey-Predator**, الهيكل العمري, **Anti-Predator** للسلوك

ينقسم تقسيم التركيب العمري في نموذج الفريسة المفترسة إلى أنواع الأحداث والبالغات ، نظرًا لعوامل السلوك المضادة للحيوانات المفترسة في شكل دفاع جماعي في الفرائس البالغة. يُرمز إلى معدل الافتراس من المفترس البالغ إلى الفريسة اليافعة m_1 ومعدل الافتراس من المفترس البالغ إلى الفريسة الصغيرة يرمز له بـ m_2 بعد ذلك ، بالنظر إلى الحالة عندما تكون معايير **Routh-Hurwitz** ، ويتم عرض محاكاة عددية لمعرفة ذلك أي من الحالات الثلاث هي أفضل حالة لهذا النموذج. نقطة التوازن التي تم الحصول عليها هي $E_0 = \left(\frac{r}{c_1(b_1+d_1)} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right), \frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right), 0, 0 \right)$, $E_1 = (X^*, Y^*, Z^*, W^*)$ جميعها مستقرة ، ثم بالنسبة للمحاكاة العددية تظهر أن أفضل حالة هي الحالة عندما تكون $m_2 = m_1$ ، لأن المسافة بين التجمعات المستقرة للأنواع الأربعة ليست كذلك. بعيد جدا. لذلك مع عامل مكافحة المفترس المعطى لهذا النموذج ، لمنع انقراض الأنواع الأربعة ، يجب أن يكون معدل افتراس الفريسة البالغة معادلاً لافتراس الفريسة البالغة.

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Struktur umur pada *prey* dan *predator* dapat dibagi menjadi remaja dan dewasa. Terdapat beberapa penelitian mengembangkan model *prey-predator* yang dikemukakan oleh *Lotka Volterra* menjadi lebih dari 2 variabel tak bebas. Beberapa penelitian tersebut mengategorikan *prey* dan *predator* menjadi 2 bagian berdasarkan karakteristik yang ditentukan. Sun, Huo, dan Ma (2013) menyatakan bahwa karakteristik yang diperhitungkan adalah kemampuan memangsa atau mencari makanan yang bisa dilakukan oleh *prey* dewasa saja. Pei, Chen, Zhang, dan Li (2005) mengatakan dalam penelitiannya bahwa kemampuan reproduksi, pertahanan kelompok pada *prey* dan memangsa pada *predator* hanya bisa dilakukan oleh *prey* dan *predator* dewasa.

Anti-predator berupa pertahanan kelompok dapat menghambat atau menggagalkan proses predasi. Terdapat suatu kasus apabila populasi dari *prey* lebih banyak dari populasi dari *predator* maka ada kemungkinan bahwa *prey* akan menggagalkan proses predasi yang dilakukan oleh *predator*. Dikatakan bahwa kebiasaan *prey* diantaranya adalah hidup secara berkelompok disebabkan untuk mengurangi resiko pemangsaan atau predasi individu. Goulart dan Young (2013) menyatakan bahwa seleksi alam tidak harus menjadi patokan utama pada proses predasi melainkan terdapat kemungkinan lain dimana *prey* dapat menghentikan proses predasi yang dilakukan oleh *predator*. Hal tersebut menunjukkan bahwa fungsi respon tidak hanya bergerak secara monoton melainkan dapat bergerak secara non-monoton.

Dari judul yang diberikan, faktor yang difokuskan pada penelitian ini yaitu struktur umur dan *anti-predator*. Pembagian struktur umur spesies pada penelitian ini dibagi menjadi empat, yaitu pertama *prey* remaja yang disimbolkan dengan $X(t)$, kedua *prey* dewasa disimbolkan dengan $Y(t)$, ketiga *predator* remaja yang disimbolkan dengan $Z(t)$, terakhir yaitu *predator* dewasa yang disimbolkan dengan $W(t)$. Pada model diberikan fungsi respon tipe II dan IV, fungsi respon tipe II digunakan pada *prey* remaja dan fungsi respon tipe IV pada *prey* dewasa (Pei, Chen, Zhang, & Li, 2005). Dimisalkan bahwa jenis *prey* disini adalah yang hidupnya secara berkelompok (Goulart & Young, 2013), maka pada *prey* remaja digunakan fungsi respon tipe II bukan fungsi respon tipe III, karena diasumsikan bahwa hanya satu jenis *prey* saja yang digunakan, *predator* dewasa tidak diberikan faktor dapat berganti jenis *prey*. Fungsi respon pada *prey* remaja juga tidak menggunakan fungsi respon tipe I karena diasumsikan bahwa *predator* dewasa memerlukan waktu untuk mencerna *prey* remaja yang dimangsa.

Fungsi respon tipe IV diberikan pada *prey* dewasa dikarenakan faktor *anti-predator* berupa pertahanan kelompok. Sementara pengaruh laju predasi yang dilakukan oleh *predator* dewasa pada kedua *prey* yaitu pada pertumbuhan populasi pada *predator* remaja. Maksudnya adalah laju predasi tersebut mempengaruhi proses reproduksi yang dilakukan oleh *predator* dewasa, dikarenakan tenaga yang dibutuhkan oleh *predator* dewasa untuk reproduksi berasal dari laju predasi yang dilakukan. Berdasarkan judul yang diberikan, setelah struktur umur diterapkan pada pembagian spesies, maka faktor kedua yang sangat berpengaruh yaitu fungsi respon tipe IV, tepatnya laju predasi yang dilakukan oleh *predator* dewasa pada *prey* dewasa. Diberikan asumsi bahwa apabila populasi dari *predator* remaja punah

maka populasi dari *predator* dewasa juga akan punah, maka timbul dua kemungkinan yaitu populasi dari kedua *prey* akan *overload* atau akan punah. Sehingga nilai dari laju predasi terhadap *prey* dewasa yang sangat mempengaruhi kestabilan dari populasi keempat spesies.

Dalam suatu ekosistem perlu untuk ditemukan kestabilan interaksi dari suatu populasi, guna mempertahankan ekosistem dari ketidakstabilan, sesuai dengan firman Allah pada QS. Al-Mulk ayat 15 sebagai berikut:

هُوَ الَّذِي جَعَلَ لَكُمُ الْأَرْضَ ذُلُولًا فَامْشُوا فِي مَنَاكِبِهَا وَكُلُوا مِن رِّزْقِهِ ۗ وَإِلَيْهِ النُّشُورُ (١٥)

Dialah Yang menjadikan bumi itu mudah bagi kamu, maka berjalanlah di segala penjurunya dan makanlah sebahagian dari rezeki-Nya. Dan hanya kepada-Nya-lah kamu (kembali setelah) dibangkitkan.

Setelah Allah menerangkan bahwa alam ini diciptakan untuk manusia dan memudahkannya untuk keperluan mereka, maka Dia memerintahkan agar mereka berjalan di muka bumi untuk memperhatikan keindahan alam berusaha mengolah alam yang mudah ini. Sebab, semua yang disediakan Allah itu harus diolah dan diusahakan lebih dahulu sebelum dimanfaatkan bagi keperluan hidup manusia. Dari penjelasan tafsir yang diberikan dikatakan bahwa kita diperintah oleh Allah untuk mengolah alam ini dengan baik, dapat disimpulkan bahwa kita diperintahkan menjaga alam ini dari kerusakan atau kepunahan populasi dari makhluk hidup lain di bumi ini. Oleh karena itu memprediksi kestabilan dari ekosistem *prey* dan *predator* sangat penting untuk dilakukan, sehingga bertambah dan berkurangnya populasi yang ekstrim dapat diatasi. Sesuai dengan penjelasan diatas, penelitian ini mengambil judul “Analisis Dinamik Model *Prey-Predator* dengan Struktur Umur dan Perilaku *Anti-Predator*”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang sudah dijelaskan, maka rumusan masalah yang diperoleh adalah:

1. Bagaimana analisis kestabilan titik kesetimbangan pada model *Prey-Predator* dengan struktur umur dan perilaku *Anti-predator*?
2. Bagaimana simulasi numerik model *Prey-Predator* dengan struktur umur dan perilaku *Anti-Predator*?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini yaitu:

1. Untuk mengetahui analisis kestabilan titik kesetimbangan pada model *Prey-Predator* dengan struktur umur dan perilaku *Anti-Predator*.
2. Untuk mengetahui simulasi numerik model *Prey-Predator* dengan struktur umur dan perilaku *Anti-Predator*.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian yang diperoleh berdasarkan tujuan penelitian ini adalah:

1. Dapat mengetahui, memahami serta menganalisis kestabilan model *Prey-Predator* dengan pembagian struktur pada kedua spesies dan kebiasaan *Anti-Predator* dengan baik.
2. Dapat mengetahui hasil simulasi dari perubahan pada model *Prey-Predator* dengan pembagian struktur pada kedua spesies dan kebiasaan *Anti-Predator* dengan baik.

1.5 Batasan Masalah

Masalah yang akan diteliti diberikan batasan supaya pembahasan tidak melebar, batasan yang diberikan adalah:

1. Populasi *Prey* dan *Predator* dibagi menjadi dua kelas yaitu, remaja dan dewasa.
2. Pertumbuhan populasi secara logistik pada *Prey* maupun *Predator*.
3. Pertumbuhan populasi *Predator* dan *Prey* dewasa dipengaruhi oleh laju konversi dari *Predator* dan *Prey* remaja.
4. Tingkat kelahiran *Prey* remaja sebanding dengan populasi *Prey* dewasa.
5. *Prey* dan *Predator* yang lahir masuk ke kelas remaja.
6. Hanya *Prey* dewasa yang memiliki respon *Anti-Predator*.
7. Hanya *Predator* dewasa yang dapat melakukan proses predasi.
8. Tidak terdapat kanibalisme pada *Predator*.
9. Laju interaksi pemangsaan *prey* remaja oleh *Predator* dewasa menggunakan fungsi respon tipe II.
10. Laju interaksi pemangsaan *Prey* dewasa oleh *Predator* dewasa menggunakan fungsi respon tipe IV.
11. Terdapat kompetisi antar *Prey* dewasa.
12. Setiap populasi memiliki peluang kematian alami yang berbeda.
13. Persamaan model merujuk pada artikel “Dinamika model *Predator-Prey* dengan *Stage-Structure* pada kedua spesies dan kebiasaan *Anti-Predator*” yang ditulis oleh Sk Golam Mortoja, Prabir Panja, dan Shyamal Kumar Mondal (2018:50-57) yaitu:

$$\frac{dX}{dt} = rY - b_1X - d_1X - \frac{m_1XW}{k_1 + X}$$

$$\frac{dY}{dt} = b_1X - c_1Y^2 - \frac{m_2YW}{k_2 + k_3Y^2} - d_2Y$$

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\alpha m_1XW}{k_1 + X} + \frac{\beta m_2YW}{k_2 + k_3Y^2} - nZ - d_3Z - \eta YW$$

$$\frac{dW}{dt} = nZ - d_4W$$

1.6 Definisi Istilah

Istilah-istilah kunci yang diberikan perlu dijelaskan secara jelas untuk memberikan pemahaman yang tepat sehingga tidak menimbulkan kesalahpahaman pada skripsi ini, berikut batasan-batasan istilah yang diberikan:

1. Analisis Dinamik. Analisis dinamik disini merupakan analisis dinamika populasi atau naik turunnya populasi dari *Prey* dan *Predator*.
2. Model *Prey-Predator*. Model *Prey-Predator* yang digunakan adalah model *Lotka Voltera*.
3. Struktur Umur. Struktur umur yang digunakan bergantung pada kemampuan reproduksi, apabila jenis tersebut baik *Prey* maupun *Predator* bisa melakukan produksi maka bisa digolongkan sebagai *Prey* atau *Predator* dewasa, dan sebaliknya apabila jenis tersebut belum bisa melakukan reproduksi maka dikategorikan sebagai *Prey* atau *Predator* remaja.
4. *Anti-Predator*. *Anti-Predator* merupakan sistem pertahanan yang dilakukan oleh *Prey* dewasa secara berkelompok.

BAB II KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

2.1.1 Persamaan Diferensial

Terdapat berbagai masalah baik dalam ilmu fisika, ilmu sosial, ilmu alam, dan lain sebagainya. ketika beberapa masalah tersebut diformulasikan atau dimodelkan dalam bentuk matematika, maka masalah tersebut dapat dirumuskan dalam bentuk beberapa persamaan. Persamaan-persamaan tersebut memuat satu atau lebih turunan-turunan dari fungsi yang terdapat dalam persamaan-persamaan tersebut. persamaan-persamaan yang tersusun tersebut dinamakan dengan persamaan diferensial (Waluya, 2006).

Terdapat beberapa klasifikasi pada persamaan diferensial, diantaranya adalah fungsi yang diketahui bergantung pada satu atau lebih dari variabel bebas (Waluya, 2006). Persamaan diferensial berdasarkan klasifikasi tersebut dibagi menjadi dua, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial biasa itu hanya memuat satu variabel bebas saja. Sementara persamaan diferensial parsial itu memuat dua atau lebih variabel bebas. Berikut bentuk umum dari persamaan diferensial $F(t, X, Y, Z, W) = 0$ (Zill, Wright, & Cullen, 2013). Bentuk umum dari persamaan diferensial itu berupa fungsi yang terdapat variabel bebas dimisalkan t dan variabel tak bebas dimisalkan X, Y, Z, W . Berikut diberikan beberapa contoh persamaan diferensial biasa:

1. Persamaan $\frac{dX}{dt} = rY - b_1X - d_1X - \frac{m_1XW}{k_1+X}$.
2. Persamaan $\frac{dY}{dt} = b_1X - c_1Y^2 - \frac{m_2YW}{k_2+k_3Y^2} - d_2Y$.
3. Persamaan $\frac{dZ}{dt} = \frac{\alpha m_1XW}{k_1+X} + \frac{\beta m_2YW}{k_2+k_3Y^2} - nZ - d_3Z - \eta YW$.

4. Persamaan $\frac{dW}{dt} = nZ - d_4W$.

2.1.2 Persamaan Diferensial Linier dan Non-Linier

Persamaan diferensial $F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ dikatakan linier jika memenuhi bentuk umum persamaan berikut:

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y - g(t) = 0$$

atau dapat ditulis juga sebagai berikut:

$$a_n(t) \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t) \frac{dy}{dt} + a_0(t)y = g(t).$$

Terdapat beberapa karakteristik yang dapat menunjukkan bahwa persamaan-persamaan diatas adalah persamaan diferensial linier yaitu:

1. Variabel tak bebas yaitu, y dan semua turunannya $y, y', \dots, y^{(n)}$ memiliki pangkat satu tidak lebih.
2. Koefisien a_0, a_1, \dots, a_n dari $y, y', \dots, y^{(n)}$ paling bergantung pada variabel bebas yaitu t .

Apabila persamaan diferensial tidak memenuhi karakteristik dari persamaan diferensial linier maka disebut sebagai persamaan diferensial non-linier, contoh seperti pada persamaan *Van der Pol* yaitu:

$$y'' - \epsilon(1 - y^2)y' + \delta y = 0$$

(Dobrushkin, 2015). Persamaan *Van der Pol* dikatakan sebagai persamaan diferensial non-linier dikarenakan terdapat variabel dependen yang memiliki pangkat lebih dari satu yaitu y^2 .

2.1.3 Fungsi Respon

Holling (1965) menyarankan tiga jenis fungsi respon yang berbeda untuk berbagai macam jenis kasus yang mungkin terjadi pada interaksi antara *prey* dan *predator* yaitu, fungsi respon tipe I, tipe II, dan tipe III. Secara umum ketiga fungsi tersebut biasa disebut dengan Holling Tipe I, Holling Tipe II, dan Holling Tipe III (Pei, Chen, Zhang, & Li, 2005). Fungsi respon tipe I mendiskripsikan bahwa tingkat serangan yang dilakukan oleh *predator* secara individu, akan meningkat secara linier, seiring dengan kepadatan *prey*. Sehingga kurva dari fungsi respon tipe I berbentuk linier. Berikut bentuk persamaan umumnya:

$$p(X) = X, p(X) \rightarrow \infty \text{ sebagai } X \rightarrow \infty$$

(Upadhyay & Iyengar, 2014).

Untuk fungsi respon tipe II, tingkat serangan yang dilakukan oleh *predator* akan naik, seiring berkurangnya kepadatan populasi dari *prey* sampai *predator* kenyang. Fungsi respon tipe II ini juga disebut sebagai fungsi respon tipe *cyrtoid* dimana pada tipe ini *predator* lebih fokus pada satu jenis *prey* saja. Berikut adalah persamaan yang diberikan

$$p(X) = \frac{X}{X+D}, D > 0.$$

Fungsi respon tipe III atau bisa juga disebut dengan fungsi respon tipe *sigmoid*.

Persamaannya sebagai berikut:

$$p(X) = \frac{X^2}{X^2+D^2}, D > 0.$$

Tingkat serangan *predator* cepat pada awal, kemudian perlahan melambat dikarenakan faktor kenyang. Perbedaan dengan fungsi respon tipe *cyrtoid* adalah *predator* dapat merubah jenis *prey*. Apabila populasi dari jenis *prey* pertama

mengalami penurunan, maka *predator* dapat beralih ke jenis *prey* lain yang memiliki populasi lebih tinggi (Upadhyay & Iyengar, 2014).

Fungsi respon yang dikemukakan oleh Holling(1965) hanya fokus pada respon secara monoton. Sementara terdapat beberapa eksperimen yang menunjukkan, bahwa terdapat respon secara non-monoton pada suatu tingkat tertentu. Misalkan konsentrasi nutrisi yang mencapai tingkat cukup tinggi, dapat menimbulkan penghambatan pada laju pertumbuhan tertentu. Oleh karena itu, Andrews (1968) mengusulkan fungsi respon tipe IV atau bisa disebut juga dengan fungsi *Monod-Haldane* untuk fungsi non-monoton (Pei, Chen, Zhang, & Li, 2005).

Haldane memperkenalkan fungsi respon tipe IV dengan berdasarkan pada kasus *enzimologi*, yaitu mengenai penghambatan laju pertumbuhan yang diakibatkan oleh konsentrasi nutrisi yang tinggi. Untuk persamaan sebagai berikut:

$$p(X) = \frac{cX}{(X^2/i) + X + a}$$

Dimana:

i : Ukuran kekebalan *predator* dari *prey*.

c, a : Tingkat predasi per kapita maksimum dan konstanta setengah jenuh tanpa adanya efek penghambatan.

Perhatikan bahwa apabila nilai dari i berkurang, maka tingkat proses mencari makan oleh *predator* akan berkurang. Sementara itu fungsi respon tipe IV ini menunjukkan, bahwa tingkat populasi *predator* per kapita dalam proses predasi, akan berkurang seiring dengan kepadatan populasi dari *prey*. Sokol dan Howel (1980) mengusulkan persamaan sederhana untuk fungsi respon tipe IV sebagai berikut:

$$p(X) = \frac{cX}{X^2 + D}$$

(Upadhyay & Iyengar, 2014). Berikut adalah tabel sekaligus grafik yang menunjukkan respon fungsi tipe I, II, III, dan IV.

Tabel 2.1 Respon Fungsi

Fungsi Respon	Definisi	Aplikasi
I	$p(X) = X$	
II	$p(X) = \frac{X}{D + X}$	Harimau dan karibu
III	$p(X) = \frac{X^2}{D + X^2}$	Tikus dan lalat kayu
IV	$p(X) = \frac{cX}{X^2 + D}$	Pertahanan kelompok

2.2 Menjaga Ekosistem Di Lingkungan Hidup Dalam Islam

Secara singkat ekosistem berarti sistem yang berlangsung dalam suatu lingkungan. Di dalam lingkungan terdapat komponen fisik (biotik dan abiotik) maupun komponen nonfisik. Di dalam lingkungan juga terjadi suatu peristiwa dinamika, yang berhubungan dengan interaksi antar kelompok fisik. Dapat dikatakan bahwa di dalam lingkungan tersebut terjadi suatu sistem yang dinamis. Adanya saling ketergantungan dan hubungan timbal balik, serta sebab-akibat dari seluruh komponen tersebut dapat membentuk ekosistem. Kemudian masing-masing ekosistem memiliki perbedaan hanya dalam hal jenis, struktur, karakteristik dan kualitas komponen-komponen yang terlibat (Maknun, 2017).

وَالْأَرْضَ مَدَدْنَا فِيهَا رِوَاسِي وَأَنْبَتْنَا فِيهَا مِنْ كُلِّ شَيْءٍ مَّوْزُونٍ (١٩) وَجَعَلْنَا لَكُمْ فِيهَا مَعَايِشَ وَمَنْ لَسْتُمْ لَهُ بِرَازِقِينَ (٢٠)

19. Dan Kami telah menghamparkan bumi dan menjadikan padanya gunung-gunung dan Kami tumbuhkan padanya segala sesuatu menurut ukuran. 20. Dan Kami telah menjadikan untukmu di bumi keperluan-keperluan hidup, dan (Kami

menciptakan pula) makhluk-makhluk yang kamu sekali-kali bukan pemberi rezeki kepadanya. (Al-Hijr (15):19-20)

Surat Al-Hijr ayat 19-20 ini membahas tentang ciptaan Allah SWT yang terbentang di bumi. Allah swt. berfirman: *“Dan Kami telah menciptakan dan menghamparkan bumi sehingga menjadi luas terbentang guna memudahkan hidup kamu, kendati Kami menciptakannya bulat dan menjadikan padanya gunung-gunung yang mantap dan kokoh agar bumi tidak bergoncang sehingga menyulitkan penghuninya dan Kami tumbuhkan dan ciptakan padanya yakni di bumi itu segala sesuatu menurut ukuran yang tepat sesuai hikmah, kebutuhan dan kemaslahatan makhluk. Dan Kami telah menjadikan sebagai anugerah dari Kami untuk kamu di sana yakni di bumi segala sarana kehidupan baik yang berupa kebutuhan pokok maupun pelengkap, dan Kami menciptakan pula makhluk-makhluk yang kamu sekali-kali wahai yang merasa kuat di bumi terhadapnya yakni terhadap makhluk-makhluk itu bukanlah para pemberi rezeki”*. Firman-Nya (وَأَنْبَتْنَا فِيهَا مِنْ كُلِّ شَيْءٍ مَّوْزُونٍ) *“dan Kami tumbuhkan padanya segala sesuatu menurut ukuran”* (Shihab, 2012).

Firman berikut difahami oleh ulama bahwa, Allah menumbuhkembangkan makhluk hidup-Nya di bumi ini untuk kelangsungan hidup dan menetapkan masa pertumbuhan sesuai dengan kuantitas dan kebutuhan makhluk hidup. Begitupun Allah SWT menyesuaikan bentuk dan fungsinya berdasarkan kemampuan dan habitat yang ditempati. Firman-Nya (وَمَنْ لَّسْنُهُ لَهُ يَرَاظِينَ) *“kamu sekali-kali bukan pemberi rezeki kepadanya”*. Berbicara perihal makhluk hidup yang lemah yang membutuhkan bantuan manusia yang memiliki kemampuan. Penggalan ayat ini menjelaskan bahwa Allah SWT telah menyediakan segala sesuatu untuk manusia. Dikarenakan terdapat makhluk hidup yang lemah, maka bukan berarti makhluk

hidup yang kuat mampu memberikan rezeki pada yang lemah untuk bertahan hidup (Shihab, 2012).

Dalam ilmu biologi terdapat istilah ekosistem, dimana ekosistem tersebut berisi komponen biotik dan abiotik. Dimana komponen-komponen tersebut salah berhubungan untuk kelangsungan hidup dalam ekosistem tersebut. Dalam ekosistem yang dapat dispesifikasi berisi hewan, terdapat hewan yang kuat dan lemah, dimana yang kuat dapat memangsa yang lemah. Tetapi hal tersebut tidak selalu yang kuat yang memangsa, dikarenakan akan menimbulkan ketidakseimbangan populasi kedua spesies. Sehingga kelangsungan hidup yang stabil dalam ekosistem tersebut akan rusak. Maka terdapat faktor lain dalam ekosistem tersebut yang menyebabkan kelangsungan hidup dari kedua spesies dapat berlangsung dengan baik.

2.3 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan

Titik keseimbangan harus dicari terlebih dahulu, sebelum melakukan proses analisis kestabilan pada titik keseimbangan. Proses analisis tersebut, yaitu dengan mengevaluasi nilai eigen yang dihasilkan dari matriks Jacobi. Matriks tersebut hasil dari proses linierisasi persamaan yang diberikan. Proses linierisasi dengan berdasar pada sistem *autonomous* dan ekspansi fungsi pada deret Taylor (Iswanto, 2012).

2.3.1 Titik Keseimbangan

Sebelum masuk dalam definisi dari titik keseimbangan, berikut adalah bentuk umum persamaan diferensial yang digunakan sebagai patokan

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

Titik kesetimbangan dari persamaan diatas merupakan nilai x jika $\frac{dx}{dt} = 0$. Fungsi konstan dari suatu persamaan diferensial adalah solusi dari persamaan tersebut. Karena x merupakan fungsi konstan, maka x disebut sebagai solusi kesetimbangan dari persamaan diatas (Meyer, 1985).

Selanjutnya akan dijelaskan bagaimana cara menentukan titik kesetimbangan dari suatu persamaan. Pertama diberikan bentuk persamaan diferensial berikut

$$x(t + 1) - x = f(x).$$

Berdasarkan definisi, maka persamaan diatas memiliki titik kesetimbangan yaitu x jika $f(x) = 0$. Fungsi konstan x adalah solusi dari persamaan tersebut, maka x dikatakan sebagai solusi kesetimbangan dari persamaan (Meyer, 1985).

2.3.2 Linierisasi dan Matriks Jacobi

Untuk menganalisis sebuah persamaan linier setelah diketahui titik kesetimbangannya, maka dilakukan proses linierisasi yaitu proses pendekatan persamaan diferensial non-linier dengan persamaan diferensial linier, guna memahami persamaan non-linier tersebut. Proses linierisasi dilakukan dengan ekspansi taylor (Boyce, Diprima, & Meade, 2017). Karena menggunakan sistem autonomous pada persamaan non-linier, maka dapat ditulis sebagai berikut persamaan non-linier yang diberikan:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y), \frac{dy}{dt} = G(x, y)$$

(Boyce, Diprima, & Meade, 2017).

Selanjutnya akan dilakukan ekspansi taylor pada (x_0, y_0) . Persamaan diatas dapat ditulis sebagai berikut:

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0). \quad (2.1)$$

$$G(x, y) = G(x_0, y_0) + G_x(x_0, y_0)(x - x_0) + G_y(x_0, y_0)(y - y_0). \quad (2.2)$$

Perhatikan persamaan-persamaan berikut:

1. Persamaan $\frac{dx}{dt} = \frac{d(x-x_0)}{dt} = \frac{du}{dt}$.

2. Persamaan $\frac{dy}{dt} = \frac{d(y-y_0)}{dt} = \frac{dv}{dt}$.

Kita lihat bahwa diberikan pemisalan $(x - x_0) = u$ dan $(y - y_0) = v$, sehingga persamaan (2.1) dan (2.2) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{du}{dt} = 0 + F_x(x_0, y_0)u + F_y(x_0, y_0)v$$

$$\frac{dv}{dt} = 0 + G_x(x_0, y_0)u + G_y(x_0, y_0)v.$$

Selanjutnya akan disusun matriks dari hasil linierisasi diatas. Berikut adalah matriks yang diperoleh:

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) \\ G_x(x_0, y_0) & G_y(x_0, y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

Sehingga dari bentuk matriks pada titik (x_0, y_0) dapat ditulis secara umum sebagai berikut:

$$J[F, G](x, y) = \begin{bmatrix} F_x(x, y) & F_y(x, y) \\ G_x(x, y) & G_y(x, y) \end{bmatrix}.$$

Matrik J disebut sebagai Matriks Jacobi dari fungsi F dan G . Dimana Matriks Jacobi adalah matriks yang setiap elemennya adalah turunan pertama dari berbagai fungsi (Boyce, Diprima, & Meade, 2017).

2.3.3 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi nilai eigen dan vektor eigen adalah jika A adalah suatu matriks $n \times n$, maka vektor tak-nol \mathbf{x} pada R^n disebut suatu vektor eigen dari A , jika $A\mathbf{x}$ adalah suatu penggandaan skalar dari \mathbf{x} yaitu,

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

untuk suatu skalar λ . Skalar λ disebut nilai-eigen dari A . Vektor tak-nol \mathbf{x} disebut suatu vektor eigen dari A yang berpadanan dengan λ . Untuk mencari nilai eigen dari matriks A pada $n \times n$ dapat ditulis ulang persamaan $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ sebagai berikut:

$$A\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x}.$$

atau ekuivalen

$$(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$$

supaya λ menjadi nilai eigen maka harus terdapat penyelesaian tak nol dari persamaan $(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$, berdasarkan teorema 6.2.7 maka dapat ditulis persamaan tak nol dari $(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$ adalah

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Persamaan tersebut disebut polinom karakteristik dari matriks A , maka dapat ditulis polinom karakteristik dari suatu matriks $n \times n$ sebagai berikut:

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \dots + c_n$$

Karena $\det(\lambda I - A) = 0$, maka berdasarkan teorema dasar aljabar dapat diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \dots + c_n = 0.$$

Sehingga banyaknya nilai eigen dari suatu matriks $n \times n$ berjumlah paling banyak n yang berbeda (Anton, 2000).

2.3.4 Kestabilan Titik Kesetimbangan

Apabila suatu persamaan diferensial telah diperoleh. Nilai eigen dari matriks jacobii yang berisi turunan pertama dari berbagai fungsi pada persamaan differensial yang diberikan dengan disimbolkan sebagai λ_i , atau $Re(\lambda_i)$ yang merupakan bentuk bilangan real dari λ_i . Menurut Iswanto (2012) berikut adalah syarat untuk menentukan apakah persamaan diferensial linier tersebut stabil atau tidak:

1. Stabil

- a. Setiap nilai eigen real kurang dari nol atau negatif ($\forall \lambda_i < 0, i = 1, 2, 3, \dots, n$).
- b. Setiap bentuk real dari nilai eigen yang berbentuk kompleks bernilai kurang dari nol atau negatif ($\forall Re(\lambda_i) < 0, i = 1, 2, 3, \dots, n$).

2. Tidak Stabil

- a. Terdapat nilai eigen real lebih dari nol atau positif ($\exists \lambda_i > 0, i = 1, 2, 3, \dots, n$).
- b. Terdapat bentuk real dari nilai eigen yang berbentuk kompleks bernilai lebih dari nol atau positif ($\exists Re(\lambda_i) > 0, i = 1, 2, 3, \dots, n$) (Iswanto, 2012).

Berikut diberikan tabel sebagai dasar untuk menentukan tipe dan kestabilan pada persamaan diferensial linier

Tabel 2.2 Kestabilan (Boyce, Diprima, & Meade, 2017)

Nilai Eigen	Kestabilan
$\exists \lambda_i \in R > 0, i = 1, 2, 3, \dots, n$	Tidak stabil
$\forall \lambda_i \in R < 0, i = 1, 2, 3, \dots, n$	Stabil asimtotik
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1, \lambda_1, \lambda_2 \in R$	Tidak stabil
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0, \lambda_1, \lambda_2 \in R$	Tidak stabil

$\lambda_1 = \lambda_2 < 0, \lambda_1, \lambda_2 \in R$	Stabil asimtotik
$\lambda_1, \lambda_2 = Re(\lambda_i) \pm bi \in C$	
$Re(\lambda_i) > 0$	Tidak stabil
$Re(\lambda_i) < 0$	Stabil asimtotik
$Re(\lambda_i) = 0$	Stabil

2.3.5 Kriteria *Routh-Hurwitz*

Kestabilan suatu titik kesetimbangan bergantung pada nilai eigennya, yaitu positif atau negatifnya nilai tersebut. Kriteria *Routh-Hurwitz* merupakan salah satu cara untuk menentukan Apakah bagian real dari nilai eigen tersebut bernilai positif atau negatif. Sehingga titik kesetimbangan tersebut dapat ditentukan kestabilannya (Hanh, 1967). Diberikan persamaan karakteristik bentuk polinomial sebagai berikut:

$$f(s) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{(n-1)} + a_2\lambda^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n \quad (2.3)$$

jika persamaan (2.3) mempunyai bagian real negatif maka,

$$\frac{a_1}{a_0} > 0, \frac{a_2}{a_0} > 0, \dots, \frac{a_n}{a_0} > 0 \quad (2.4)$$

dengan a_0 positif dan a_k bilangan real, $k = 1, 2, 3, \dots, n$.

Persamaan (2.3) dapat ditulis dalam bentuk Matriks Hurwitz (H) yang berbentuk bujur sangkar berukuran $n \times n$ sebagai berikut:

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \dots & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & a_n \end{bmatrix}$$

Determinan Hurwitz tingkat ke- k , dinotasikan dengan Δ_k , $k = 1, 2, \dots, n$.

Determinan tersebut ditulis dalam bentuk matriks Hurwitz sebagai berikut,

$$\Delta_1 = [a_1].$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix}.$$

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix}.$$

$$\Delta_n = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \dots & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & a_n \end{bmatrix}.$$

Persamaan karakteristik (2.3) memiliki bagian real negatif jika hanya jika pertidaksamaan (2.4) dipenuhi dan $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_n > 0$ (Gantmacher, 1959). Sehingga dapat dikatakan berdasarkan kriteria kestabilan *Hurwitz* tersebut bahwa sistem persamaan karakteristik (2.3) stabil.

Persamaan (2.3) dapat ditulis dalam bentuk *Routh Array* (Runtun-Routh), yang ditulis dalam bentuk tabel, sebagai berikut:

Tabel 2.3 Routh Array

λ^n	a_0	a_2	a_4	a_6	\dots	0
λ^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	\dots	0
λ^{n-2}	b_1	b_2	b_3	0	\dots	0
λ^{n-3}	c_1	c_2	c_3	0	\dots	0
\vdots	\vdots	\vdots				
λ^2	f_1	f_3				
λ^1	g_1					
λ^0	h_1					

Perhatikan bahwa, tabel pada baris pertama dan kedua berasal dari persamaan karakteristik (2.3). Baris ketiga kebawah mengikuti pola dari rumus berikut:

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}, b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}, b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$$

$$c_1 = \frac{b_1 b_2 - b_0 b_3}{b_1}, c_2 = \frac{b_1 b_4 - b_0 b_5}{b_1}$$

⋮

Pola tersebut tetap dilakukan, sampai semua koefisien diperoleh dan membentuk matriks setengah piramida terbalik. Dapat ditunjukkan bahwa kriteria kestabilan *Routh* identik dengan kriteria kestabilan *Hurwitz*. Perhatikan pernyataan berikut,

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, c_1 = \frac{b_1 b_2 - b_0 b_3}{b_1} = \frac{\Delta_3}{\Delta_2 / \Delta_1} = \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \dots$$

Kriteria kestabilan *Routh* dapat ditulis sebagai berikut:

1. Persamaan karakteristik (2.3) memiliki akar bernilai negatif atau berupa bilangan real negatif, jika semua koefisien dari kolom pertama tabel 2.3 bernilai positif.
2. Jika terdapat satu atau lebih koefisien kolom pertama dari tabel 2.3, maka sistem tersebut tidak stabil.

BAB III METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode studi literatur atau *library search*.

3.2 Pra Penelitian

Pra penelitian adalah tahap awal yang dilakukan penulis sebelum melakukan penelitian, berikut tahapan pra penelitian yang dilakukan:

1. Menemukan topik permasalahan yang akan diangkat.
2. Melakukan kajian literasi pada topik yang akan diangkat yaitu kajian pada model *Prey-Predator*.
3. Mencari permasalahan dari model yang diusulkan oleh (Mortoja, Panja, & Mondal, 2018) yang dapat diangkat sebagai penelitian.

3.3 Tahapan Penelitian

Tahapan penelitian yang dilakukan adalah :

1. Melakukan analisis kestabilan pada persamaan model yang diberikan pada artikel Sk Golam Mortoja, Prabir Panja, dan Shyamal Kumar Mondal (2018:50-57):
 - a. Mengambil persamaan model *prey-predator* dengan pembagian struktur pada kedua spesies dan kebiasaan *anti-predator* yang merujuk pada jurnal Sk Golam Mortoja, Prabir Panja, dan Shyamal Kumar Mondal (2018:50-57).
 - b. Mendeskripsikan setiap persamaan model yang diambil.
 - c. Menentukan titik kesetimbangan.
 - d. Melakukan linierisasi model.

- e. Melakukan analisis kestabilan pada setiap titik kesetimbangan yang diperoleh :
 - (1). Menentukan matriks jacobii dari persamaan yang telah dilinierisasi.
 - (2). Menentukan polinom karakteristik dari matriks jacobii yang diberikan.
 - (3). Menentukan nilai eigen dari polinom karakteristik yang diberikan.
 - (4). Menentukan kestabilan pada setiap titik kesetimbangan yang diberikan.
2. Melakukan simulasi numerik model *Prey-Predator* dengan struktur umur dan perilaku *Anti-Predator*.

BAB IV PEMBAHASAN

4.1 Model *Predator-Prey* Dengan *Stage-Structure* Pada Kedua Spesies Dan Kebiasaan *Anti-Predator*

4.1.1 Identifikasi Model

Model *Predator-Prey* yang digunakan dalam penelitian ini sudah disebutkan pada bab I bagian batasan masalah. Berikut adalah identifikasi dari beberapa variabel dan parameter yang terdapat dalam model:

$X(t)$: Banyaknya populasi *prey* remaja.

$Y(t)$: Banyaknya populasi *prey* dewasa.

$Z(t)$: Banyaknya populasi *predator* remaja.

$W(t)$: Banyaknya populasi *predator* dewasa.

r : Laju pertambahan *prey* remaja karena adanya *prey* yang dilahirkan.

b_1 : Laju transisi dari *prey* remaja menuju *prey* dewasa.

c_1 : Koefisien dari kompetisi antar *prey* dewasa.

d_1 : Laju kematian alami pada *prey* remaja.

d_2 : Laju kematian alami pada *prey* dewasa.

d_3 : Laju kematian alami pada *predator* remaja.

d_4 : Laju kematian alami pada *predator* dewasa.

α : Efisiensi konversi dari *prey* remaja terhadap pertumbuhan populasi *predator* remaja.

β : Efisiensi konversi dari *prey* remaja terhadap pertumbuhan populasi *predator* remaja.

n : Laju transisi dari *predator* remaja menuju *predator* dewasa.

- η : Laju kemampuan *anti-predator* pada *prey* dewasa kepada *predator* remaja.
- m_1 : Laju serangan *predator* dewasa terhadap *prey* remaja.
- m_2 : Laju serangan *predator* dewasa terhadap *prey* dewasa.
- k_1 : Besaran satuan kejenuhan yang berpengaruh terhadap besarnya daya kapasitas yang dilakukan oleh *predator* dewasa terhadap *prey* remaja.
- k_2 : Besaran satuan kejenuhan yang berpengaruh terhadap besarnya daya kapasitas yang dilakukan oleh *predator* dewasa terhadap *prey* dewasa.
- k_3 : Besaran satuan kejenuhan yang berpengaruh terhadap besarnya daya kapasitas oleh *prey* dewasa yang saling berkompetisi.

4.1.2 Besaran Nilai Awal Dan Parameter

Nilai Awal yang diberikan pada penelitian ini diambil dari artikel jurnal Can-Yun Huang, Yan-Juan Li, Hai-Feng Huo (2012). Terdapat 3 jenis kombinasi parameter yang diambil dari 4 artikel artikel jurnal yaitu, artikel jurnal yang ditulis oleh Can-Yun Huang, Yan-Juan Li, Hai-Feng Huo (2012); Sk Golam Mortoja, Prabir Panja, dan Shyamal Kumar Mondal (2018); Charu Arora dan Vivek Kumar (2018) dan Demou Luo (2021). Berikut adalah nilai awal dan nilai dari parameter-parameter tersebut:

Tabel 4.1 Nilai Awal

No.	Variabel	Nilai	Sumber
1.	$X(0)$	0,5	(Huang, Li, & Huo, 2012)
2.	$Y(0)$	0,5	
3.	$Z(0)$	0,5	
4.	$W(0)$	0,5	

Tabel 4.2 Nilai Parameter I

No.	Parameter	Nilai	Sumber
1.	r	1	(Huang, Li, & Huo, 2012)
2.	b_1	1	(Luo, 2021)
3.	c_1	1	(Arora & Kumar, 2018)
4.	d_1	0,1	(Mortoja, Panja, & Mondal, 2018)
5.	d_2	0,06	(Mortoja, Panja, & Mondal, 2018)
6.	d_3	1	(Arora & Kumar, 2018)
7.	d_4	0,3	(Arora & Kumar, 2018)
8.	m_1	0,6	(Mortoja, Panja, & Mondal, 2018)
9.	m_2	0,5	asumsi
10.	k_1	1	(Luo, 2021)
11.	k_2	0,5	(Arora & Kumar, 2018)
12.	k_3	1	(Arora & Kumar, 2018)
13.	n	2	(Arora & Kumar, 2018)
14.	α	0,6	(Mortoja, Panja, & Mondal, 2018)
15.	β	1,1	(Mortoja, Panja, & Mondal, 2018)
16.	η	0,1	(Mortoja, Panja, & Mondal, 2018)

Tabel 4.3 Nilai Parameter II

No.	Parameter	Nilai	Sumber
1.	r	1	(Huang, Li, & Huo, 2012)
2.	b_1	1	(Luo, 2021)
3.	c_1	1	(Arora & Kumar, 2018)
4.	d_1	0,1	(Mortoja, Panja, & Mondal, 2018)
5.	d_2	0,06	(Mortoja, Panja, & Mondal, 2018)
6.	d_3	1	(Arora & Kumar, 2018)
7.	d_4	0,3	(Arora & Kumar, 2018)
8.	m_1	0,6	(Mortoja, Panja, & Mondal, 2018)
9.	m_2	0,6	asumsi
10.	k_1	1	(Luo, 2021)
11.	k_2	0,5	(Arora & Kumar, 2018)
12.	k_3	1	(Arora & Kumar, 2018)
13.	n	2	(Arora & Kumar, 2018)

14.	α	0,6	(Mortoja, Panja, & Mondal, 2018)
15.	β	1,1	(Mortoja, Panja, & Mondal, 2018)
16.	η	0,1	(Mortoja, Panja, & Mondal, 2018)

Tabel 4.4 Nilai Parameter III

No.	Parameter	Nilai	Sumber
1.	r	1	(Huang, Li, & Huo, 2012)
2.	b_1	1	(Luo, 2021)
3.	c_1	1	(Arora & Kumar, 2018)
4.	d_1	0,1	(Mortoja, Panja, & Mondal, 2018)
5.	d_2	0,06	(Mortoja, Panja, & Mondal, 2018)
6.	d_3	1	(Arora & Kumar, 2018)
7.	d_4	0,3	(Arora & Kumar, 2018)
8.	m_1	0,6	(Mortoja, Panja, & Mondal, 2018)
9.	m_2	0,7	asumsi
10.	k_1	1	(Luo, 2021)
11.	k_2	0,5	(Arora & Kumar, 2018)
12.	k_3	1	(Arora & Kumar, 2018)
13.	n	2	(Arora & Kumar, 2018)
14.	α	0,6	(Mortoja, Panja, & Mondal, 2018)
15.	β	1,1	(Mortoja, Panja, & Mondal, 2018)
16.	η	0,1	(Mortoja, Panja, & Mondal, 2018)

4.2 Titik Keseimbangan Pada Persamaan Model

Titik keseimbangan dari persamaan-persamaan berikut:

$$\frac{dX}{dt} = rY - b_1X - d_1X - \frac{m_1XW}{k_1+X} \quad (4.1)$$

$$\frac{dY}{dt} = b_1X - c_1Y^2 - \frac{m_2YW}{k_2+k_3Y^2} - d_2Y \quad (4.2)$$

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\alpha m_1XW}{k_1+X} + \frac{\beta m_2YW}{k_2+k_3Y^2} - nZ - d_3Z - \eta YW \quad (4.3)$$

$$\frac{dW}{dt} = nZ - d_4W \quad (4.4)$$

dapat dicari melalui beberapa tahap. Tahap pertama misalkan $\frac{dW}{dt} = 0$ maka,

$$0 = nZ - d_4W$$

$$d_4W = nZ$$

$$W = \frac{nZ}{d_4}.$$

Selanjutnya substitusikan $W = \frac{nZ}{d_4}$ pada persamaan (4.1), (4.2) & (4.3), maka

diperoleh

$$\frac{dX}{dt} = rY - b_1X - d_1X - \frac{m_1nXZ}{d_4(k_1+X)} \quad (4.5)$$

$$\frac{dY}{dt} = b_1X - c_1Y^2 - \frac{m_2nYZ}{d_4(k_2+k_3Y^2)} - d_2Y \quad (4.6)$$

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\alpha m_1nXZ}{d_4(k_1+X)} + \frac{\beta m_2nYZ}{d_4(k_2+k_3Y^2)} - nZ - d_3Z - \frac{\eta nYZ}{d_4}. \quad (4.7)$$

Dari persamaan (4.7) akan dicari Z, dengan dimisalkan $\frac{dZ}{dt} = 0$ maka,

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\alpha m_1nXZ}{d_4(k_1+X)} + \frac{\beta m_2nYZ}{d_4(k_2+k_3Y^2)} - nZ - d_3Z - \frac{\eta nYZ}{d_4}$$

$$0 = \frac{\alpha m_1nXZ}{d_4(k_1+X)} + \frac{\beta m_2nYZ}{d_4(k_2+k_3Y^2)} - nZ - d_3Z - \frac{\eta nYZ}{d_4}$$

$$0 = Z \left(\frac{\alpha m_1nX}{d_4(k_1+X)} + \frac{\beta m_2nY}{d_4(k_2+k_3Y^2)} - n - d_3 - \frac{\eta nY}{d_4} \right)$$

$$0 = Z \text{ dan } \left(\frac{\alpha m_1nX}{d_4(k_1+X)} + \frac{\beta m_2nY}{d_4(k_2+k_3Y^2)} - n - d_3 - \frac{\eta nY}{d_4} \right) = 0$$

diperoleh $Z = 0$. Substitusikan Z pada persamaan (4.5), (4.6) & (4.4)

$$\frac{dX}{dt} = rY - b_1X - d_1X - \frac{m_1nX(0)}{d_4(k_1+X)}$$

$$\frac{dX}{dt} = rY - b_1X - d_1X - 0$$

$$\frac{dX}{dt} = rY - b_1X - d_1X \quad (4.8)$$

$$\frac{dY}{dt} = b_1X - c_1Y^2 - \frac{m_2nY(0)}{d_4(k_2+k_3Y^2)} - d_2Y$$

$$\frac{dY}{dt} = b_1X - c_1Y^2 - 0 - d_2Y$$

$$\frac{dY}{dt} = b_1X - c_1Y^2 - d_2Y \quad (4.9)$$

$$\frac{dW}{dt} = n(0) - d_4W$$

$$\frac{dW}{dt} = -d_4W. \quad (4.1.1)$$

Nilai W dapat dicari dari persamaan (4.1.1) dengan memisalkan $\frac{dW}{dt} = 0$

$$\frac{dW}{dt} = -d_4W$$

$$0 = -d_4W$$

$$\frac{0}{-d_4} = W$$

$$0 = W.$$

Selanjutnya akan dicari X & Y dari persamaan (4.8) & (4.9). Dimisalkan

$$\frac{dX}{dt} = 0,$$

$$0 = rY - b_1X - d_1X$$

$$0 = rY - X(b_1 + d_1)$$

$$X(b_1 + d_1) = rY$$

$$X = \frac{rY}{(b_1 + d_1)}. \quad (4.1.2)$$

Kemudian substitusikan $X = \frac{rY}{(b_1 + d_1)}$ pada persamaan (4.9), dengan memisalkan

$$\frac{dY}{dt} = 0$$

$$0 = \frac{b_1 r Y}{(b_1 + d_1)} - c_1 Y^2 - d_2 Y$$

$$0 = Y \left(\frac{b_1 r}{(b_1 + d_1)} - c_1 Y - d_2 \right)$$

$$\frac{0}{Y} = \left(\frac{b_1 r}{(b_1 + d_1)} - c_1 Y - d_2 \right)$$

$$0 = \left(\frac{b_1 r}{(b_1 + d_1)} - c_1 Y - d_2 \right)$$

$$c_1 Y = \left(\frac{b_1 r}{(b_1 + d_1)} - d_2 \right)$$

$$Y = \frac{\left(\frac{b_1 r}{(b_1 + d_1)} - d_2 \right)}{c_1}.$$

Substitusikan $Y = \frac{\left(\frac{b_1 r}{(b_1 + d_1)} - d_2 \right)}{c_1}$ pada persamaan (4.1.2)

$$X = \frac{r}{c_1(b_1 + d_1)} \left(\frac{b_1 r}{(b_1 + d_1)} - d_2 \right).$$

Maka diperoleh titik kesetimbangan pertama adalah $E_0 = \left(\frac{r}{c_1(b_1 + d_1)} \left(\frac{b_1 r}{(b_1 + d_1)} - d_2 \right), \frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1 r}{(b_1 + d_1)} - d_2 \right), 0, 0 \right)$.

Berikut adalah proses untuk menemukan titik kesetimbangan selanjutnya.

Pertama akan dicari nilai X dari persamaan (4.6) dengan memisalkan $\frac{dY}{dt} = 0$

$$0 = b_1 X - c_1 Y^2 - \frac{m_2 n Z Y}{d_4(k_2 + k_3 Y^2)} - d_2 Y$$

$$b_1 X = c_1 Y^2 + \frac{m_2 n Z Y}{d_4(k_2 + k_3 Y^2)} + d_2 Y$$

$$X = \frac{\left(c_1 Y^2 + \frac{m_2 n Z Y}{d_4(k_2 + k_3 Y^2)} + d_2 Y \right)}{b_1}$$

$$X = \frac{Y}{b_1} \left(c_1 Y + \frac{m_2 n Z}{d_4(k_2 + k_3 Y^2)} + d_2 \right). \quad (4.1.3)$$

Substitusikan nilai X pada persamaan (4.5)

$$\frac{dX}{dt} = rY - b_1 X - d_1 X - \frac{m_1 n X Z}{d_4(k_1 + X)}$$

$$\rightarrow \frac{dX}{dt} = rY - X \left(b_1 + d_1 + \frac{m_1 n Z}{d_4(k_1 + X)} \right)$$

$$\rightarrow \frac{dX}{dt} = rY - \frac{Y}{b_1} \left(c_1Y + \frac{m_2nZ}{d_4(k_2+k_3Y^2)} + d_2 \right) \left(b_1 + d_1 + \frac{m_1nZ}{d_4 \left(k_1 + \frac{Y}{b_1} \left(c_1Y + \frac{m_2nZ}{d_4(k_2+k_3Y^2)} + d_2 \right) \right)} \right) \quad (4.1.4)$$

Substitusikan nilai X pada persamaan (4.7)

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dt} &= \frac{\alpha m_1 n X Z}{d_4(k_1+X)} + \frac{\beta m_2 n Y Z}{d_4(k_2+k_3Y^2)} - nZ - d_3Z - \frac{\eta n Y Z}{d_4} \\ \rightarrow \frac{dZ}{dt} &= \frac{Y}{b_1} \left(c_1Y + \frac{m_2nZ}{d_4(k_2+k_3Y^2)} + d_2 \right) \frac{\alpha m_1 n Z}{d_4 \left(k_1 + \frac{Y}{b_1} \left(c_1Y + \frac{m_2nZ}{d_4(k_2+k_3Y^2)} + d_2 \right) \right)} + \frac{\beta m_2 n Z Y}{d_4(k_2+k_3Y^2)} - \\ &nZ - d_3Z - \frac{\eta n Y Z}{d_4}. \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Lakukan proses eliminasi pada persamaan (4.1.4) & (4.1.5), untuk menentukan nilai Z . Kalikan α pada persamaan (4.1.4) kemudian jumlahkan kedua persamaan dengan memisalkan $\frac{dX}{dt} = \frac{dZ}{dt} = 0$.

$$\begin{aligned} \alpha r Y - \frac{\alpha Y}{b_1} \left(c_1Y + \frac{m_2nZ}{d_4(k_2+k_3Y^2)} + d_2 \right) \left(b_1 + d_1 + \frac{m_1nZ}{d_4 \left(k_1 + \frac{Y}{b_1} \left(c_1Y + \frac{m_2nZ}{d_4(k_2+k_3Y^2)} + d_2 \right) \right)} \right) + \\ \frac{Y}{b_1} \left(c_1Y + \frac{m_2nZ}{d_4(k_2+k_3Y^2)} + d_2 \right) \frac{\alpha m_1 n Z}{d_4 \left(k_1 + \frac{Y}{b_1} \left(c_1Y + \frac{m_2nZ}{d_4(k_2+k_3Y^2)} + d_2 \right) \right)} + \frac{\beta m_2 n Z Y}{d_4(k_2+k_3Y^2)} - nZ - \\ d_3Z - \frac{\eta n Y Z}{d_4} = 0 \\ \rightarrow \alpha r Y - \frac{\alpha Y}{b_1} \left(c_1Y + \frac{m_2nZ}{d_4(k_2+k_3Y^2)} + d_2 \right) (b_1 + d_1) + \frac{\beta m_2 n Z Y}{d_4(k_2+k_3Y^2)} - nZ - d_3Z - \\ \frac{\eta n Y Z}{d_4} = 0 \\ \rightarrow \alpha r Y - \frac{\alpha c_1 Y^2 (b_1 + d_1)}{b_1} - \frac{\alpha Y m_2 n Z (b_1 + d_1)}{b_1 d_4 (k_2 + k_3 Y^2)} - \frac{\alpha d_2 Y (b_1 + d_1)}{b_1} + \frac{\beta m_2 n Z Y}{d_4 (k_2 + k_3 Y^2)} - nZ - d_3Z - \\ \frac{\eta n Y Z}{d_4} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow \alpha r Y - \frac{\alpha c_1 Y^2 (b_1 + d_1)}{b_1} - \frac{\alpha d_2 Y (b_1 + d_1)}{b_1} - Z \left(\frac{\alpha Y m_2 n (b_1 + d_1)}{b_1 d_4 (k_2 + k_3 Y^2)} - \frac{\beta m_2 n Y}{d_4 (k_2 + k_3 Y^2)} + n + d_3 + \right. \\
&\left. \frac{n \eta Y}{d_4} \right) = 0 \\
&\rightarrow \alpha Y \left(r - \frac{c_1 Y (b_1 + d_1)}{b_1} - \frac{d_2 (b_1 + d_1)}{b_1} \right) - Z \left(\frac{\alpha Y m_2 n (b_1 + d_1)}{b_1 d_4 (k_2 + k_3 Y^2)} - \frac{\beta m_2 n Y}{d_4 (k_2 + k_3 Y^2)} + n + d_3 + \right. \\
&\left. \frac{n \eta Y}{d_4} \right) = 0 \\
&\rightarrow \alpha Y \left(r - \frac{c_1 Y (b_1 + d_1)}{b_1} - \frac{d_2 (b_1 + d_1)}{b_1} \right) = Z \left(\frac{\alpha Y m_2 n (b_1 + d_1)}{b_1 d_4 (k_2 + k_3 Y^2)} - \frac{\beta m_2 n Y}{d_4 (k_2 + k_3 Y^2)} + n + d_3 + \right. \\
&\left. \frac{n \eta Y}{d_4} \right) \\
&\rightarrow \frac{\alpha Y}{\left(\frac{\alpha Y m_2 n (b_1 + d_1)}{b_1 d_4 (k_2 + k_3 Y^2)} - \frac{\beta m_2 n Y}{d_4 (k_2 + k_3 Y^2)} + n + d_3 + \frac{n \eta Y}{d_4} \right)} \left(r - \frac{c_1 Y (b_1 + d_1)}{b_1} - \frac{d_2 (b_1 + d_1)}{b_1} \right) = Z \\
&\rightarrow \frac{d_4 (k_2 + k_3 Y^2) \alpha Y (r - a_2 c_1 Y - a_2 d_2)}{(\alpha Y a_1 a_2 - \beta a_2 Y + d_4 (k_2 + k_3 Y^2) (n + d_3) + (k_2 + k_3 Y^2) n \eta Y)} = Z. \quad (4.1.6)
\end{aligned}$$

Dimana,

$$a_1 = \frac{(b_1 + d_1)}{b_1}$$

$$a_2 = m_2 n .$$

Sederhanakan persamaan (4.1.5) dengan dimisalkan $\frac{dZ}{dt} = 0$

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{Y}{b_1} \left(c_1 Y + \frac{a_2 Z}{d_4 (k_2 + k_3 Y^2)} + d_2 \right) \frac{\alpha a_2 Z}{d_4 \left(k_1 + \frac{Y}{b_1} \left(c_1 Y + \frac{a_2 Z}{d_4 (k_2 + k_3 Y^2)} + d_2 \right) \right)} + \frac{\beta a_2 Z Y}{d_4 (k_2 + k_3 Y^2)} -$$

$$nZ - d_3 Z - \frac{n \eta Y Z}{d_4}$$

Dimana,

$$a_2 = m_2 n$$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow 0 = Z \left(\frac{Y}{b_1} \left(c_1 Y + \frac{a_2 Z}{d_4(k_2+k_3 Y^2)} + d_2 \right) \frac{\alpha a_2}{d_4 \left(k_1 + \frac{Y}{b_1} \left(c_1 Y + \frac{a_2 Z}{d_4(k_2+k_3 Y^2)} + d_2 \right) \right)} + \right. \\
&\quad \left. \frac{\beta a_2 Y}{d_4(k_2+k_3 Y^2)} - n - d_3 - \frac{n \eta Y}{d_4} \right) \\
&\rightarrow 0 = \frac{Y}{b_1} \left(c_1 Y + \frac{a_2 Z}{d_4(k_2+k_3 Y^2)} + d_2 \right) \frac{\alpha a_2}{d_4 \left(k_1 + \frac{Y}{b_1} \left(c_1 Y + \frac{a_2 Z}{d_4(k_2+k_3 Y^2)} + d_2 \right) \right)} + \frac{\beta a_2 Y}{d_4(k_2+k_3 Y^2)} - \\
&\quad n - d_3 - \frac{n \eta Y}{d_4} \\
&\rightarrow \frac{Y}{b_1} \left(c_1 Y + \frac{a_2 Z}{d_4(k_2+k_3 Y^2)} + d_2 \right) \frac{\alpha a_2}{d_4 \left(k_1 + \frac{Y}{b_1} \left(c_1 Y + \frac{a_2 Z}{d_4(k_2+k_3 Y^2)} + d_2 \right) \right)} = - \frac{\beta a_2 Y}{d_4(k_2+k_3 Y^2)} + \\
&\quad n + d_3 + \frac{n \eta Y}{d_4} \tag{4.1.7}
\end{aligned}$$

Substitusikan nilai Z pada persamaan (4.1.7)

$$\begin{aligned}
&\frac{Y}{b_1} \left(c_1 Y + \frac{a_2 \left(\frac{d_4(k_2+k_3 Y^2) \alpha Y (r - a_2 c_1 Y - a_2 d_2)}{(\alpha Y a_1 a_2 - \beta a_2 Y + d_4(k_2+k_3 Y^2)(n+d_3) + (k_2+k_3 Y^2) n \eta Y)} \right)}{d_4(k_2+k_3 Y^2)} + d_2 \right) \\
&\quad \frac{\alpha a_2}{d_4 \left(k_1 + \frac{Y}{b_1} \left(c_1 Y + \frac{a_2 \left(\frac{d_4(k_2+k_3 Y^2) \alpha Y (r - a_2 c_1 Y - a_2 d_2)}{(\alpha Y a_1 a_2 - \beta a_2 Y + d_4(k_2+k_3 Y^2)(n+d_3) + (k_2+k_3 Y^2) n \eta Y)} \right)}{d_4(k_2+k_3 Y^2)} + d_2 \right) \right)} = - \frac{\beta a_2 Y}{d_4(k_2+k_3 Y^2)} + \\
&\quad n + d_3 + \frac{n \eta Y}{d_4} \\
&\rightarrow \frac{Y}{b_1} \left(c_1 Y + \frac{d_4(k_2+k_3 Y^2) a_2 \alpha Y (r - a_2 c_1 Y - a_2 d_2)}{d_4(k_2+k_3 Y^2) (\alpha Y a_1 a_2 - \beta a_2 Y + d_4(k_2+k_3 Y^2)(n+d_3) + (k_2+k_3 Y^2) n \eta Y)} + \right. \\
&\quad \left. d_2 \right) \frac{\alpha a_2}{d_4 \left(k_1 + \frac{Y}{b_1} \left(c_1 Y + \frac{d_4(k_2+k_3 Y^2) a_2 \alpha Y (r - a_2 c_1 Y - a_2 d_2)}{d_4(k_2+k_3 Y^2) (\alpha Y a_1 a_2 - \beta a_2 Y + d_4(k_2+k_3 Y^2)(n+d_3) + (k_2+k_3 Y^2) n \eta Y)} + d_2 \right) \right)} = \\
&\quad - \frac{\beta a_2 Y}{d_4(k_2+k_3 Y^2)} + n + d_3 + \frac{n \eta Y}{d_4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \frac{Y}{b_1} \left(c_1 Y + \frac{a_2 \alpha Y (r - a_2 c_1 Y - a_2 d_2)}{(\alpha Y a_1 a_2 - \beta a_2 Y + d_4 (k_2 + k_3 Y^2) (n + d_3) + (k_2 + k_3 Y^2) n \eta Y)} + \right. \\ &d_2 \left. \frac{\alpha a_2}{d_4 \left(k_1 + \frac{Y}{b_1} \left(c_1 Y + \frac{a_2 \alpha Y (r - a_2 c_1 Y - a_2 d_2)}{(\alpha Y a_1 a_2 - \beta a_2 Y + d_4 (k_2 + k_3 Y^2) (n + d_3) + (k_2 + k_3 Y^2) n \eta Y)} + d_2 \right) \right)} = - \frac{\beta a_2 Y}{d_4 (k_2 + k_3 Y^2)} + \right. \\ &n + d_3 + \frac{n \eta Y}{d_4} \\ &\rightarrow \frac{\alpha a_3 Y \left(c_1 Y + \frac{a_2 \alpha Y (r - a_2 c_1 Y - a_2 d_2)}{(\alpha Y a_1 a_2 - \beta a_2 Y + d_4 (k_2 + k_3 Y^2) (n + d_3) + (k_2 + k_3 Y^2) n \eta Y)} + d_2 \right)}{b_1 d_4 \left(k_1 + \frac{Y}{b_1} \left(c_1 Y + \frac{a_2 \alpha Y (r - a_2 c_1 Y - a_2 d_2)}{(\alpha Y a_1 a_2 - \beta a_2 Y + d_4 (k_2 + k_3 Y^2) (n + d_3) + (k_2 + k_3 Y^2) n \eta Y)} + d_2 \right) \right)} = - \frac{\beta a_2 Y}{d_4 (k_2 + k_3 Y^2)} + \\ &n + d_3 + \frac{n \eta Y}{d_4} \end{aligned}$$

Untuk mencari nilai Y diperlukan bantuan aplikasi *maple*, yang menghasilkan

bentuk persamaan polinomial orde 8 sebagai berikut:

$$\rho_1 Y^8 + \rho_2 Y^7 + \rho_3 Y^6 + \rho_4 Y^5 + \rho_5 Y^4 + \rho_6 Y^3 + \rho_7 Y^2 + \rho_8 Y + \rho_9 = 0.$$

Dimana:

$$\rho_1 = \eta^2 n^2 c_1 k_3^2.$$

$$\rho_2 = -a_2 \alpha c_1 k_3^2 n \eta + d_3 d_4 c_1 k_3^2 n \eta + d_3 c_1 d_4^2 k_3^2 n \eta + d_4 c_1 k_3^2 n^2 \eta + d_2 k_3^2 n^2 \eta^2 + c_1 d_4^2 k_3^2 n^2 \eta.$$

$$\rho_3 = -a_2 \alpha c_1 d_4^2 k_3^2 n - a_2 \alpha c_1 d_4^2 k_3^2 d_3 - a_3 \alpha d_2 k_3^2 n \eta - 2n \eta \beta a_3 c_1 k_3 + d_2 d_3 d_4 k_3^2 n \eta + d_2 d_3 d_4^3 k_3^2 n \eta + 2c_1 d_3 d_4^2 k_3^2 n + d_2 d_4 k_3^2 n^2 \eta + c_1 d_4^3 k_3^2 n^2 + c_1 d_4^2 d_4^3 k_3^2 + k_1 b_1 k_3^2 n^2 \eta^2 + 2k_2 k_3 c_1 n^2 \eta^2 + d_2 d_4^2 k_3^2 n^2 \eta - n \eta \alpha a_1 a_2 c_1 k_3.$$

$$\rho_4 = 2k_3^2 n d_4^2 d_3 d_2 + 2k_3^2 n^2 d_4 k_1 \eta b_1 - k_3^2 \alpha m_1 n d_2 d_3 d_4 + k_3^2 n^2 d_4^2 d_2 +$$

$$2k_3^2 d_3 d_4 k_1 \eta b_1 + k_3^2 d_3^2 d_4^2 d_2 - k_3^2 \alpha m_1 n^2 d_2 d_4 + 2k_3 \eta^2 n^2 k_2 d_2 +$$

$$k_3 \eta n^2 m_2 \alpha r - 2k_3 \beta m_2 n^2 c_1 d_4 - 2k_3 \beta m_2 n c_1 d_3 d_4 + 4k_3 n^2 d_4 k_2 c_1 \eta -$$

$$2k_3 \alpha m_1 n^2 c_1 k_2 \eta + k_3 \alpha m_1 n^2 c_1 \beta m_2 + 4k_3 d_3 d_4 k_2 c_1 \eta n - 2k_3 \beta m_2 n^2 d_2 \eta.$$

$$\rho_5 = a_2^2 \alpha^2 c_1 a_2 k_3 + a_2^2 \alpha c_1 \beta k_3 + 2n d_4^3 d_2 k_3^2 d_3 + 2k_3 \eta^2 n^2 k_2 d_2 +$$

$$n^2 \eta k_1 b_1 d_4^2 k_3^2 + 2n^2 \eta k_2 c_1 k_3 d_4^2 + n \eta \alpha r a_2 k_3 - \alpha n a_2 d_2 d_4^2 k_3^2 - \alpha a_2 d_2 d_3 d_4^2 k_3^2 -$$

$$\begin{aligned} & \beta a_2 c_1 n d_4^2 k_3^2 - \beta a_2 c_1 d_3 d_4^2 k_3^2 - 2\beta n \eta a_2 d_2 k_3 + n^2 \eta k_1 b_1 d_4 k_3^2 + \\ & 2n^2 d_4 c_1 k_2 k_3 \eta - n\beta d_4 c_1 a_2 k_3 - \beta d_3 d_4 c_1 a_2 k_3 + n\eta \alpha a_2 a_1 c_1 k_3 - \\ & n d_4 \alpha a_2 a_1 c_1 k_3 - d_3 d_4 \alpha a_2 a_1 c_1 k_3 + n\eta k_1 b_1 d_3 d_4 k_3^2 + 2n\eta k_2 k_3 c_1 d_3 d_4 - \\ & n d_2 \alpha a_2 a_1 k_3 + n\eta k_1 b_1 d_3 d_4^2 k_3^2 + 2n\eta k_2 k_3 c_1 d_3 d_4^2 - 2n\eta k_2 k_3 c_1 a_3 \alpha + \\ & n^2 d_2 d_4^3 k_3^2 + d_2 d_4^3 d_3^2 k_3^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_6 = & \beta^2 a_2^2 c_1 - a_2^2 \alpha^2 c_1 a_1 k_3 + a_2^2 \alpha^2 d_2 a_1 k_3 + a_2^2 \alpha d_2 k_3 + \beta a_2^2 \alpha a_1 c_1 + \\ & n^2 k_1 b_1 d_4^2 k_3^2 + 2n^2 \eta k_2 d_2 k_3 d_4^2 - n\beta \eta c_1 a_2 k_3 - \beta n a_2 d_2 k_3 d_4^2 - \beta a_2 d_3 d_2 k_3 d_4^2 + \\ & 2n k_1 b_1 d_3 d_4^3 k_3^2 + 4n k_2 k_3 b_1 d_3 d_4^3 + 2\eta n^2 d_2 d_4 k_2 k_3 + n r \alpha d_4 a_2 k_3 - \\ & n\beta d_2 d_4 a_2 k_3 + r \alpha d_3 d_4 a_2 k_3 - \beta d_2 d_3 d_4 a_2 k_3 + 2k_3 \eta^2 n^2 k_2 k_1 b_1 + \\ & n \alpha d_4 a_1 a_2 c_1 k_3 + \alpha d_3 d_4 a_1 a_2 c_1 k_3 + \eta n \alpha a_1 a_2 d_2 k_3 - 2\alpha n k a_1 c_1 k_2 d_4^2 - \\ & 2\eta n \alpha k_2 a_2 d_2 k_3 - 2\eta n \beta k_1 a_2 b_1 k_3 - n \alpha a_1 a_2 d_2 d_4 k_3 - \alpha a_1 a_2 d_2 d_3 d_4 k_3 + \\ & 2\eta n d_2 d_3 d_4 k_2 k_3 - \eta n \alpha a_1 a_2 c_1 k_3 + 2\eta n d_4^2 d_3 k_2 k_3 - 2\alpha d_4^2 a_2 c_1 d_3 k_2 k_3 + \\ & \eta^2 n^2 c_1 k_2^2 - r \alpha^2 k_3 a_2^2 + 2n^2 d_4^2 c_1 k_2 k_3 + k_1 b_1 d_3^2 d_4^3 k_3^2 + 2k_2 k_3 c_1 d_3^2 d_4^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_7 = & n\eta d_2 d_3 d_4^2 k_2^2 - a_2 \alpha c_1 d_4^2 k_2^2 n - a_2 \alpha c_1 d_3 d_4^2 k_2^2 - \alpha n \eta a_2 d_2 k_2^2 - \\ & \beta a_2 d_2 k_2 d_4^2 n - \beta a_2 d_2 d_3 k_2 d_4^2 + 2n^2 d_4^3 b_1 k_1 k_2 k_3 + n \alpha d_4 a_2 k_2 - n\beta d_4 d_2 a_2 k_2 + \\ & 2d_3^2 d_4^3 b_1 k_1 k_2 k_3 + r \alpha a_2 d_3 d_4 k_2 - \beta a_2 d_2 d_3 d_4 k_2 + n\eta d_2 d_3 d_4 k_2^2 + \\ & n \alpha d_4 a_1 a_2 c_1 k_2 + \alpha d_3 d_4 a_1 a_2 c_1 k_2 + n\eta \alpha d_2 a_1 a_2 k_2 - 2\eta n \beta k_1 a_2 b_1 k_3 + \\ & 4n d_4^3 b_1 k_1 k_2 k_3 d_3 - n \alpha a_1 a_2 d_2 d_4 k_2 - \alpha a_1 a_2 d_2 d_3 d_4 k_2 + \beta^2 a_3^2 k_1 b_1 + \\ & n^2 c_1 d_4^3 k_2^2 + b_1 d_3^2 d_4^3 k_2^2 - r \alpha^2 a_2^2 k_2 - \alpha \beta a_2^2 a_1 d_2 - \alpha^2 a_2^2 k_2 a_1 c_1 + \\ & \alpha^2 a_2^2 k_2 a_1 d_2 + \alpha \beta a_2^2 k_2 d_2 + 2n c_1 d_3 d_4^3 k_2^2 + \eta n^2 d_4 d_2 k_2^2 + \eta^2 n^2 b_1 k_1 k_2^2 + \\ & \eta n^2 d_4^2 d_2 k_2^2 + n \alpha a_1 a_2 k_1 b_1 d_4 k_3 + \alpha a_1 a_2 k_1 b_1 d_3 d_4 k_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_8 = & n\eta d_4^2 b_1 k_1 k_2^2 d_3 + n^2 d_4^3 d_2 k_2^2 - d_3 d_4 b_1 k_1 \beta a_2 k_2 - \beta a_3^2 k_1 b_1 \alpha a_1 + \\ & d_3^2 d_4^3 k_1 b_1 k_2^2 - \beta a_3 k_1 b_1 d_4^2 k_2 n + d_3 d_4 a_1 d_2 \alpha a_1 k_2 + n d_4 d_2 \alpha a_1 a_2 k_2 - \\ & \alpha a_2 d_2 d_4^2 k_2^2 n - \alpha a_2 d_2 d_4^2 k_2^2 d_3 - n d_4 k_1 \beta b_1 a_2 k_2 + n^2 k_1 b_1 d_4^2 k_2^2 \eta n + \end{aligned}$$

$$n^2 d_4 k_1 b_1 \eta k_2^2 + d_3 d_4 k_1 b_1 \eta m k_2^2 - \beta a_2 k_1 b_1 d_4^2 k_2 d_3 + n \eta \alpha k_1 b_1 a_1 a_3 k_2 - \\ a_3^2 \alpha^2 d_2 a_2 k_2 + 2 n d_4^3 k_2^2 d_2 d_3.$$

$$\rho_9 = n^2 d_4^3 k_1 b_1 k_2^2 + d_3^2 d_4^3 k_1 b_1 k_2^2 + n d_4 b_1 k_1 \alpha a_1 a_2 k_2 + d_3 d_4 b_1 k_1 \alpha a_1 a_2 k_2 + \\ 2 n d_4^3 b_1 k_1 k_2^2 d_3. .$$

Dikarenakan harus menyelesaikan persamaan karakteristik orde 8 untuk menemukan nilai Y , maka perlu dilakukan substitusi nilai parameter. Terdapat 4 tabel nilai parameter, yang dapat disubstitusikan dalam persamaan karakteristik orde 8. Sehingga diperoleh nilai Y dari setiap tabel parameter, yang dapat disimbolkan menjadi Y^* . Nilai Y yang diambil dari setiap tabel parameter adalah nilai yang bernilai positif dan menyebabkan nilai $X, Z, & W$ juga bernilai positif. Substitusikan σ tersebut pada persamaan (4.1.6) untuk menemukan nilai Z tanpa komponen variabel.

$$\frac{d_4^2 (k_2 + Y^{*2} k_3) Y^* \alpha (r - a_2 c_1 Y^* - a_2 d_2)}{(Y^* \alpha a_1 a_2 d_4 - Y^* \beta a_2 d_4 + d_4^2 (k_2 + Y^{*2} k_3) (n + d_3) + Y^* d_4 (k_2 + Y^{*2} k_3) n \eta)} = Z.$$

Karena nilai Z sudah diketahui, maka substitusikan nilai Y dan Z pada persamaan X dan W

$$X^* = \frac{\left(Y^{*2} c_1 + \frac{Y^* m_2 n \mu}{d_4 (k_2 + Y^{*2} k_3)} + Y^* d_2 \right)}{b_1}$$

$$\frac{n Z^*}{d_4} = W^*$$

Dimana,

$$Z = Z^*.$$

Sehingga diperoleh titik kesetimbangan terakhir yaitu $E_1 = (X^*, Y^*, Z^*, W^*)$.

4.3 Analisis Model *Prey-Predator* Dengan Struktur Umur Dan Perilaku *Anti-Predator*

Ekspansi deret taylor digunakan dalam proses linierisasi dengan menggunakan sistem autonomous, maka persamaan (4.1), (4.2), (4.3), & (4.4) dapat ditulis ulang sebagai berikut:

$$F(X, Y, Z, W) = rY - b_1X - d_1X - \frac{m_1XW}{k_1+X} \quad (4.2.1)$$

$$G(X, Y, Z, W) = b_1X - c_1Y^2 - \frac{m_2YW}{k_2+k_3Y^2} - d_2Y \quad (4.2.2)$$

$$H(X, Y, Z, W) = \frac{\alpha m_1XW}{k_1+X} + \frac{\beta m_2YW}{k_2+k_3Y^2} - nZ - d_3Z - \eta YW \quad (4.2.3)$$

$$J(X, Y, Z, W) = nZ - d_4W. \quad (4.2.4)$$

Berikut proses linierisasi disekitar (X_0, Y_0, Z_0, W_0) :

$$\begin{aligned} F(X, Y, Z, W) \approx & F(X_0, Y_0, Z_0, W_0) + F_X(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(X - X_0) + \\ & F_Y(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(Y - Y_0) + F_Z(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(Z - Z_0) + \\ & F_W(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(W - W_0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(X, Y, Z, W) \approx & G(X_0, Y_0, Z_0, W_0) + G_X(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(X - X_0) + \\ & G_Y(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(Y - Y_0) + G_Z(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(Z - Z_0) + \\ & G_W(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(W - W_0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(X, Y, Z, W) \approx & H(X_0, Y_0, Z_0, W_0) + H_X(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(X - X_0) + \\ & H_Y(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(Y - Y_0) + H_Z(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(Z - Z_0) + \\ & H_W(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(W - W_0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J(X, Y, Z, W) \approx & J(X_0, Y_0, Z_0, W_0) + J_X(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(X - X_0) + \\ & J_Y(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(Y - Y_0) + J_Z(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(Z - Z_0) + \\ & J_W(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(W - W_0). \end{aligned}$$

Selanjutnya akan dicari turunan pertama dari persamaan (4.2.1), (4.2.2), (4.2.3), & (4.2.4) terhadap setiap variabel.

1. $F(X, Y, Z, W)$.

$$F_X(X_1, Y_1, Z_1, W_1) = -b_1 - d_1 - \frac{m_1 W}{k_1 + X} + \frac{m_1 W X}{(k_1 + X)^2}.$$

$$F_Y(X_1, Y_1, Z_1, W_1) = r.$$

$$F_Z(X_1, Y_1, Z_1, W_1) = 0.$$

$$F_W(X_1, Y_1, Z_1, W_1) = -\frac{m_1 X}{k_1 + X}.$$

2. $G(X, Y, Z, W)$.

$$G_X(X_1, Y_1, Z_1, W_1) = b_1.$$

$$G_Y(X_1, Y_1, Z_1, W_1) = -2c_1 Y - \frac{m_2 W}{k_2 + k_3 Y^2} + \frac{2m_2 W k_3 Y^2}{(k_2 + k_3 Y^2)^2} - d_2.$$

$$G_Z(X_1, Y_1, Z_1, W_1) = 0.$$

$$G_W(X_1, Y_1, Z_1, W_1) = -\frac{m_2 Y}{k_2 + k_3 Y^2}.$$

3. $H(X, Y, Z, W)$.

$$H_X(X_1, Y_1, Z_1, W_1) = \frac{\alpha m_1 W}{k_1 + X} - \frac{\alpha m_1 X W}{(k_1 + X)^2}.$$

$$H_Y(X_1, Y_1, Z_1, W_1) = \frac{\beta m_2 W}{k_2 + k_3 Y^2} - \frac{2\beta m_2 W k_3 Y^2}{(k_2 + k_3 Y^2)^2} - \eta W.$$

$$H_Z(X_1, Y_1, Z_1, W_1) = -n - d_3.$$

$$H_W(X_1, Y_1, Z_1, W_1) = \frac{\alpha m_1 X}{k_1 + X} + \frac{\beta m_2 Y}{k_2 + k_3 Y^2} - \eta Y.$$

4. $J(X, Y, Z, W)$.

$$H_X(X_1, Y_1, Z_1, W_1) = 0.$$

$$H_Y(X_1, Y_1, Z_1, W_1) = 0.$$

$$H_Z(X_1, Y_1, Z_1, W_1) = n.$$

$$H_W(X_1, Y_1, Z_1, W_1) = -d_4.$$

4.3.1 Analisis Model dengan Titik Kesetimbangan Pertama

4.3.1.1 Linierisasi Model

Linierisasi model tahap ini menggunakan titik kesetimbangan pertama yaitu,

$$(X, Y, Z, W) = \left(\frac{r}{c_1(b_1+d_1)} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right), \frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right), 0, 0 \right).$$

Substitusikan titik kesetimbangan pertama pada rumus ekspansi Taylor di setiap persamaan model maka,

$$1. \quad F(X, Y, Z, W) \approx F(X_0, Y_0, Z_0, W_0) + F_X(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(X - X_0) + F_Y(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(Y - Y_0) + F_Z(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(Z - Z_0) + F_W(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(W - W_0).$$

$$\begin{aligned} F(X, Y, Z, W) &= \left(r \left\{ \frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\} - b_1 \left\{ \frac{r}{c_1(b_1+d_1)} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\} - d_1 \left\{ \frac{r}{c_1(b_1+d_1)} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\} - \frac{m_1 \left\{ \frac{r}{c_1(b_1+d_1)} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\} \{0\}}{k_1 + \left\{ \frac{r}{c_1(b_1+d_1)} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\}} \right) + \\ &\left(-b_1 - d_1 - \frac{m_1 \{0\}}{k_1 + \left\{ \frac{r}{c_1(b_1+d_1)} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\}} + \frac{m_1 \left\{ \frac{r}{c_1(b_1+d_1)} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\} \{0\}}{\left(k_1 + \left\{ \frac{r}{c_1(b_1+d_1)} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\} \right)^2} \right) \\ &\left(X - \left\{ \frac{r}{c_1(b_1+d_1)} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\} \right) + (r) \left(Y - \frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right) + \\ &(0)(Z - \{0\}) + \left(- \frac{m_1 \left\{ \frac{r}{c_1(b_1+d_1)} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\}}{k_1 + \left\{ \frac{r}{c_1(b_1+d_1)} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\}} \right) (W - \{0\}). \\ &\rightarrow F(X, Y, Z, W) = r \left\{ \frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\} - 2(b_1 + d_1) \\ &\left\{ \frac{r}{c_1(b_1+d_1)} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\} - (b_1 + d_1)X - \frac{m_1 W \left\{ \frac{r}{c_1(b_1+d_1)} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\}}{k_1 + \left\{ \frac{r}{c_1(b_1+d_1)} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\}}. \end{aligned}$$

$$2. \quad G(X, Y, Z, W) \approx G(X_0, Y_0, Z_0, W_0) + G_X(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(X - X_0) + \\ G_Y(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(Y - Y_0) + G_Z(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(Z - Z_0) + \\ G_W(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(W - W_0).$$

$$G(X, Y, Z, W) = \left(b_1 \left\{ \frac{r}{c_1(b_1+d_1)} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\} - c_1 \left\{ \frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\}^2 - \frac{m_2 \left\{ \frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\} \{0\}}{k_2+k_3 \left\{ \frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\}^2} - d_2 \left\{ \frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\} \right) + (b_1) \left(X - \left\{ \frac{r}{c_1(b_1+d_1)} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\} \right) + \left(-2c_1 \left\{ \frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\} - \frac{m_2 \{0\}}{k_2+k_3 \left\{ \frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\}^2} + \frac{2m_2 \{0\} k_3 \left\{ \frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\}^2}{\left(k_2+k_3 \left\{ \frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\}^2 \right)} - d_2 \right) \left(Y - \left\{ \frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\} \right) + (0)(Z - \{0\}) + \left(-\frac{m_2 \left\{ \frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\}}{k_2+k_3 \left\{ \frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\}^2} \right) (W - \{0\}).$$

$$\rightarrow G(X, Y, Z, W) = b_1 \left\{ \frac{r}{c_1(b_1+d_1)} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\} - c_1 \left\{ \frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\}^2 - d_2 \left\{ \frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\} + b_1 X - b_1 \left\{ \frac{r}{c_1(b_1+d_1)} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\} - 2c_1 Y \left\{ \frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\} - d_2 Y - 2c_1 \left\{ \frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\}^2 - d_2 \left\{ \frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\} - \frac{m_2 W \left\{ \frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\}}{k_2+k_3 \left\{ \frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\}^2}.$$

$$3. \quad H(X, Y, Z, W) \approx H(X_0, Y_0, Z_0, W_0) + H_X(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(X - X_0) + \\ H_Y(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(Y - Y_0) + H_Z(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(Z - Z_0) + \\ H_W(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(W - W_0).$$

$$\begin{aligned}
H(X, Y, Z, W) &= \left(\frac{\alpha m_1 \left\{ \frac{r}{c_1(b_1+d_1)} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\} \{0\}}{k_1 + \left\{ \frac{r}{c_1(b_1+d_1)} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\}} + \right. \\
&\quad \left. \frac{\beta m_2 \left\{ \frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\} \{0\}}{k_2 + k_3 \left\{ \frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\}^2} - n \{0\} - d_3 \{0\} - \eta \left\{ \frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\} \{0\} \right) + \\
&\quad \left(\frac{\alpha m_1 \{0\}}{k_1 + \left\{ \frac{r}{c_1(b_1+d_1)} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\}} - \frac{\alpha m_1 \left\{ \frac{r}{c_1(b_1+d_1)} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\} \{0\}}{\left(k_1 + \left\{ \frac{r}{c_1(b_1+d_1)} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\} \right)^2} \right) (X - \\
&\quad \left\{ \frac{r}{c_1(b_1+d_1)} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\}) + \left(\frac{\beta m_2 \{0\}}{k_2 + k_3 \left\{ \frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\}^2} - \right. \\
&\quad \left. \frac{2\beta m_2 \{0\} k_3 \left\{ \frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\}^2}{\left(k_2 + k_3 \left\{ \frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\} \right)^2} - \eta \{0\} \right) \left(Y - \left\{ \frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\} \right) + (-n - \\
&\quad d_3)(Z - \{0\}) + \left(\frac{\alpha m_1 \left\{ \frac{r}{c_1(b_1+d_1)} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\}}{k_1 + \left\{ \frac{r}{c_1(b_1+d_1)} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\}} + \frac{\beta m_2 \left\{ \frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\}}{k_2 + k_3 \left\{ \frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\}^2} - \right. \\
&\quad \left. \eta \left\{ \frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\} \right) (W - \{0\}). \\
\rightarrow H(X, Y, Z, W) &= -(n + d_3)(Z) + \frac{\alpha m_1 W \left\{ \frac{r}{c_1(b_1+d_1)} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\}}{k_1 + \left\{ \frac{r}{c_1(b_1+d_1)} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\}} + \\
&\quad \frac{\beta W m_2 \left\{ \frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\}}{k_2 + k_3 \left\{ \frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\}^2} - \eta W \left\{ \frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \quad J(X, Y, Z, W) &\approx J(X_0, Y_0, Z_0, W_0) + J_X(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(X - X_0) + \\
&\quad J_Y(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(Y - Y_0) + J_Z(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(Z - Z_0) + \\
&\quad J_W(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(W - W_0).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J(X, Y, Z, W) &= (n \{0\} - d_4 \{0\}) + (0) \left(X - \left\{ \frac{r}{c_1(b_1+d_1)} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. d_2 \right) \right\} \right) + (0) \left(Y - \left\{ \frac{r}{c_1(b_1+d_1)} \left(\frac{b_1 r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right\} \right) + (n)(Z - \{0\}) + \\
&\quad (-d_4)(W - \{0\})
\end{aligned}$$

$$\rightarrow J(X, Y, Z, W) = nZ - d_4W.$$

4.3.1.2 Nilai Eigen Model Di Titik $(X, Y, Z, W) = \left(\frac{r}{c_1(b_1+d_1)}\left(\frac{b_1r}{(b_1+d_1)} - d_2\right), \frac{1}{c_1}\left(\frac{b_1r}{(b_1+d_1)} - d_2\right), 0, 0\right)$

Untuk menentukan nilai eigen dari model, perlu dibentuk jacobian terlebih dahulu. Berikut adalah bentuk jacobian yang diperoleh dari proses linierisasi pada tahap sebelumnya

$$J[F, G, H, J](X, Y, Z, W) = \begin{bmatrix} -b_1 - d_1 & r & 0 & T_2 \\ b_1 & T_1 & 0 & T_3 \\ 0 & 0 & -n - d_3 & T_4 \\ 0 & 0 & n & -d_4 \end{bmatrix}.$$

Dimana:

$$T_1 = 2c_1 \left(\frac{r}{c_1(b_1+d_1)} \left(\frac{b_1r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right) + d_2.$$

$$T_2 = - \frac{m_1 \left(\frac{r}{c_1(b_1+d_1)} \left(\frac{b_1r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right)}{k_1 + \left(\frac{r}{c_1(b_1+d_1)} \left(\frac{b_1r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right)}.$$

$$T_3 = - \frac{m_2 \left(\frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right)}{k_2 + k_3 \left(\frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right)^2}.$$

$$T_4 = \frac{am_1 \left(\frac{r}{c_1(b_1+d_1)} \left(\frac{b_1r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right)}{k_1 + \left(\frac{r}{c_1(b_1+d_1)} \left(\frac{b_1r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right)} + \frac{\beta m_2 \left(\frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right)}{k_2 + k_3 \left(\frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right)^2} - \eta \left(\frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right) \right).$$

Nilai eigen dapat diperoleh dari jacobian diatas, yaitu dengan cara mencari determinan dari matrik identitas yang dikalikan dengan λ dan dikurangi dengan jacobian yang diperoleh,

$$\det \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -b_1 - d_1 & r & 0 & T_2 \\ b_1 & -T_1 & 0 & T_3 \\ 0 & 0 & -n - d_3 & T_4 \\ 0 & 0 & n & -d_4 \end{bmatrix} \right) = 0.$$

$$\rightarrow \det \left(\begin{bmatrix} \lambda + b_1 + d_1 & r & 0 & T_2 \\ b_1 & \lambda + T_1 & 0 & T_3 \\ 0 & 0 & \lambda + n + d_3 & T_4 \\ 0 & 0 & n & \lambda + d_4 \end{bmatrix} \right) = 0.$$

Jadi diperoleh hasil determinan sebagai berikut

$$((\lambda + b_1 + d_1)(\lambda + T_1)(\lambda + n + d_3)(\lambda + d_4)) + (rnb_1T_4) = 0.$$

$$\rightarrow ((b_1T_1 + d_1T_1 + \lambda T_1 + b_1\lambda + d_1\lambda + \lambda^2)(nd_4 + d_3d_4 + \lambda d_4 + n\lambda + d_3\lambda + \lambda^2)) + (rnb_1T_4) = 0.$$

$$\rightarrow ((T_1(b_1 + d_1) + \lambda(T_1 + b_1 + d_1) + \lambda^2)(d_4(n + d_3) + \lambda(d_4 + n + d_3) + \lambda^2)) + (rnb_1T_4) = 0.$$

$$\rightarrow ((T_1d_4(n + d_3)(b_1 + d_1) + \lambda d_4(n + d_3)(T_1 + b_1 + d_1) + \lambda^2 d_4(n + d_3) + T_1\lambda(d_4 + n + d_3)(b_1 + d_1) + \lambda^2(d_4 + n + d_3)(T_1 + b_1 + d_1) + \lambda^3(d_4 + n + d_3) + T_1\lambda^2(b_1 + d_1) + \lambda^3(T_1 + b_1 + d_1) + \lambda^4)) + (rnb_1T_4) = 0.$$

$$\rightarrow ((T_1d_4(n + d_3)(b_1 + d_1) + (rnb_1T_4) + \lambda(d_4(n + d_3)(T_1 + b_1 + d_1) + T_1(d_4 + n + d_3)(b_1 + d_1)) + \lambda^2((d_4 + n + d_3)(T_1 + b_1 + d_1) + T_1(b_1 + d_1) + d_4(n + d_3)) + \lambda^3(T_1 + b_1 + d_1 + d_4 + n + d_3) + \lambda^4)) = 0.$$

Persamaan karakteristik diatas dapat ditulis ulang sebagai berikut,

$$\tau_1 + \tau_2\lambda + \tau_3\lambda^2 + \tau_4\lambda^3 + \lambda^4 = 0. \quad (4.2.5)$$

Dimana,

$$\tau_1 = T_1d_4(n + d_3)(b_1 + d_1) + (rnb_1T_4).$$

$$\tau_2 = d_4(n + d_3)(T_1 + b_1 + d_1) + T_1(d_4 + n + d_3)(b_1 + d_1).$$

$$\tau_3 = (d_4 + n + d_3)(T_1 + b_1 + d_1) + T_1(b_1 + d_1) + d_4(n + d_3).$$

$$\tau_4 = T_1 + b_1 + d_1 + d_4 + n + d_3.$$

4.3.1.3 Analisis Titik Kesetimbangan Model

Berdasarkan penjelasan mengenai analisis titik kesetimbangan, maka perlu dicari nilai eigen dari model yang bernilai positif. Pada analisis ini akan digunakan kriteria *Routh-Hurwitz*, dikarenakan bentuk persamaan karakteristik (4.2.5) berbentuk polinomial orde 4, sehingga perlu dilakukan proses substitusi nilai parameter.

1. Nilai Parameter I

Berikut hasil dari persamaan (4.2.5) yang telah disubstitusikan dengan nilai parameter I dan titik kesetimbangan.

$$(X, Y, Z, W) = (0,7719; 0,8491; 0; 0):$$

dengan persamaan karakteristik,

$$6,0038 + 6,2942\lambda + 8,2552\lambda^2 + 2,4966\lambda^3 + \lambda^4 = 0 \quad (4.2.6)$$

Persamaan (4.2.6) dapat ditulis dalam bentuk matriks *Hurwitz*, dengan ukuran 4×4 .

$$H = \begin{bmatrix} 2,4966 & 1 & 0 & 0 \\ 6,2942 & 8,2552 & 2,4966 & 1 \\ 0 & 6,0038 & 6,2942 & 8,2552 \\ 0 & 0 & 0 & 6,0038 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya akan dihitung determinan *Hurwitz* tingkat ke-4.

$$\Delta_1 = [2,4966] = 2,4966 > 0.$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 2,4966 & 1 \\ 6,2942 & 8,2552 \end{bmatrix}$$

$$= 14,3156 > 0.$$

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} 2,4966 & 1 & 0 \\ 6,2942 & 8,2552 & 2,4966 \\ 0 & 6,0038 & 6,2942 \end{bmatrix}$$

$$= 52,6838 > 0.$$

$$\Delta_4 = \begin{bmatrix} 2,4966 & 1 & 0 & 0 \\ 6,2942 & 8,2552 & 2,4966 & 1 \\ 0 & 6,0038 & 6,2942 & 8,2552 \\ 0 & 0 & 0 & 6,0038 \end{bmatrix}$$

$$= 778,8212 > 0.$$

Semua koefisien dari persamaan karakteristik (4.2.6) bernilai positif, dan semua hasil determinan *Hurwitz* juga bernilai positif, maka sistem dikatakan stabil, berdasarkan kriteria kestabilan *Hurwitz*.

Persamaan karakteristik (4.2.6) dapat ditulis dalam bentuk tabel *Routh*,

λ^4	1	8,2552	6,0038
λ^3	2,4966	6,2942	0
λ^2	5,734	6,0038	0
λ^1	3,6801	0	0
λ^0	6,0038	0	0

Dikarenakan semua koefisien pada baris pertama dari tabel *Routh* diatas bernilai positif, maka sistem dikatakan stabil.

2. Nilai Parameter II

Berikut hasil dari persamaan (4.2.5) yang telah disubstitusikan dengan nilai parameter II dan titik kesetimbangan.

$$(X, Y, Z, W) = (0,7719; 0,8491; 0; 0):$$

dengan persamaan karakteristik,

$$6,0038 + 6,2942\lambda + 8,2552\lambda^2 + 2,6496\lambda^3 + \lambda^4 = 0 \quad (4.2.7)$$

Persamaan (4.2.7) dapat ditulis dalam bentuk matriks *Hurwitz*, dengan ukuran 4×4 .

$$H = \begin{bmatrix} 2,6496 & 1 & 0 & 0 \\ 6,2942 & 8,2552 & 2,6496 & 1 \\ 0 & 6,0038 & 6,2942 & 8,2552 \\ 0 & 0 & 0 & 6,0038 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya akan dihitung determinan *Hurwitz* tingkat ke-4.

$$\Delta_1 = [2,6496] = 2,6496 > 0.$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 2,6496 & 1 \\ 6,2942 & 8,2552 \end{bmatrix}$$

$$= 15,5786 > 0.$$

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} 2,6496 & 1 & 0 \\ 6,2942 & 8,2552 & 2,6496 \\ 0 & 6,0038 & 6,2942 \end{bmatrix}$$

$$= 55,9064 > 0.$$

$$\Delta_4 = \begin{bmatrix} 2,6496 & 1 & 0 & 0 \\ 6,2942 & 8,2552 & 2,6496 & 1 \\ 0 & 6,0038 & 6,2942 & 8,2552 \\ 0 & 0 & 0 & 6,0038 \end{bmatrix}$$

$$= 826,5488 > 0.$$

Semua koefisien dari persamaan karakteristik (4.2.7) bernilai positif, dan semua hasil determinan *Hurwitz* juga bernilai positif, maka sistem dikatakan stabil, berdasarkan kriteria kestabilan *Hurwitz*.

Persamaan karakteristik (4.2.7) dapat ditulis dalam bentuk tabel *Routh*,

λ^4		1	8,2552	6,0038
λ^3		2,6496	6,2942	0
λ^2		5,8796	6,0038	0
λ^1		3,5886	0	0
λ^0		6,0038	0	0

Dikarenakan semua koefisien pada baris pertama dari tabel *Routh* diatas bernilai positif, maka sistem dikatakan stabil.

3. Nilai Parameter III

Berikut hasil dari persamaan (4.2.5) yang telah disubstitusikan dengan nilai parameter III dan titik kesetimbangan.

$$(X, Y, Z, W) = (0,7719; 0,8491; 0; 0):$$

dengan persamaan karakteristik,

$$6,0038 + 6,2942\lambda + 8,2552\lambda^2 + 2,8026\lambda^3 + \lambda^4 = 0 \quad (4.2.8)$$

Persamaan (4.2.8) dapat ditulis dalam bentuk matriks *Hurwitz*, dengan ukuran 4×4 .

$$H = \begin{bmatrix} 2,8026 & 1 & 0 & 0 \\ 6,2942 & 8,2552 & 2,8026 & 1 \\ 0 & 6,0038 & 6,2942 & 8,2552 \\ 0 & 0 & 0 & 6,0038 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya akan dihitung determinan *Hurwitz* tingkat ke-4.

$$\Delta_1 = [2,8026] = 2,8026 > 0.$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{bmatrix} 2,8026 & 1 \\ 6,2942 & 8,2552 \end{bmatrix} \\ &= 16,8416 > 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \begin{bmatrix} 2,8026 & 1 & 0 \\ 6,2942 & 8,2552 & 2,8026 \\ 0 & 6,0038 & 6,2942 \end{bmatrix} \\ &= 58,8479 > 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_4 &= \begin{bmatrix} 2,8026 & 1 & 0 & 0 \\ 6,2942 & 8,2552 & 2,8026 & 1 \\ 0 & 6,0038 & 6,2942 & 8,2552 \\ 0 & 0 & 0 & 6,0038 \end{bmatrix} \\ &= 874,2765 > 0. \end{aligned}$$

Semua koefisien dari persamaan karakteristik (4.2.8) bernilai positif, dan semua hasil determinan *Hurwitz* juga bernilai positif, maka sistem dikatakan stabil, berdasarkan kriteria kestabilan *Hurwitz*.

Persamaan karakteristik (4.2.8) dapat ditulis dalam bentuk tabel *Routh*,

λ^4	1	8,2552	6,0038	
λ^3	2,8026	6,2942	0	
λ^2	6,0093	6,0038	0	
λ^1	3,4942	0	0	
λ^0	6,0038	0	0	

Dikarenakan semua koefisien pada baris pertama dari tabel *Routh* diatas bernilai positif, maka sistem dikatakan stabil.

4.3.2 Analisis Model dengan Titik Keseimbangan Kedua

4.3.2.1 Linierisasi Model

Linierisasi model tahap ini menggunakan titik keseimbangan pertama yaitu $(X, Y, Z, W) = (\gamma, \sigma, \mu, \theta)$. Substitusikan titik keseimbangan pertama pada rumus ekspansi taylor setiap persamaan model maka,

$$1. \quad F(X, Y, Z, W) \approx F(X_0, Y_0, Z_0, W_0) + F_X(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(X - X_0) + F_Y(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(Y - Y_0) + F_Z(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(Z - Z_0) + F_W(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(W - W_0).$$

$$F(X, Y, Z, W) = \left(r\sigma - b_1\gamma - d_1\gamma - \frac{m_1\gamma\theta}{k_1+\gamma} \right) + \left(-b_1 - d_1 - \frac{m_1\theta}{k_1+\gamma} + \frac{m_1\theta\gamma}{(k_1+\gamma)^2} \right) (X - \gamma) + r(Y - \sigma) + 0(Z - \mu) - \frac{m_1\gamma}{k_1+\gamma} (W - \theta).$$

$$\rightarrow F(X, Y, Z, W) = r\sigma - b_1\gamma - d_1\gamma - \frac{m_1\gamma\theta}{k_1+\gamma} + X \left(-b_1 - d_1 - \frac{m_1\theta}{k_1+\gamma} + \frac{m_1\theta\gamma}{(k_1+\gamma)^2} \right) - \gamma \left(-b_1 - d_1 - \frac{m_1\theta}{k_1+\gamma} + \frac{m_1\theta\gamma}{(k_1+\gamma)^2} \right) + rY - r\sigma - \frac{m_1\gamma W}{k_1+\gamma} + \theta \frac{m_1\gamma}{k_1+\gamma}.$$

$$2. \quad G(X, Y, Z, W) \approx G(X_0, Y_0, Z_0, W_0) + G_X(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(X - X_0) + \\ G_Y(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(Y - Y_0) + G_Z(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(Z - Z_0) + \\ G_W(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(W - W_0).$$

$$G(X, Y, Z, W) = \left(b_1\gamma - c_1\sigma^2 - \frac{m_2\sigma\theta}{k_2+k_3\sigma^2} - d_2\sigma \right) + b_1(X - \gamma) + \\ \left(-2\sigma c_1 - \frac{m_2\theta}{k_2+k_3\sigma^2} + \frac{2m_2\theta k_3\sigma^2}{(k_2+k_3\sigma^2)^2} - d_2 \right) (Y - \sigma) + 0(Z - \mu) - \\ \frac{m_2\sigma}{k_2+k_3\sigma^2} (W - \theta).$$

$$\rightarrow G(X, Y, Z, W) = b_1\gamma - c_1\sigma^2 - \frac{m_2\sigma\theta}{k_2+k_3\sigma^2} - d_2\sigma + b_1X - b_1\gamma + \\ Y \left(-2\sigma c_1 - \frac{m_2\theta}{k_2+k_3\sigma^2} + \frac{2m_2\theta k_3\sigma^2}{(k_2+k_3\sigma^2)^2} - d_2 \right) - \sigma \left(-2\sigma c_1 - \frac{m_2\theta}{k_2+k_3\sigma^2} + \right. \\ \left. \frac{2m_2\theta k_3\sigma^2}{(k_2+k_3\sigma^2)^2} - d_2 \right) - \frac{m_2\sigma W}{k_2+k_3\sigma^2} + \theta \frac{m_2\sigma}{k_2+k_3\sigma^2}.$$

$$3. \quad H(X, Y, Z, W) \approx H(X_0, Y_0, Z_0, W_0) + H_X(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(X - X_0) + \\ H_Y(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(Y - Y_0) + H_Z(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(Z - Z_0) + \\ H_W(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(W - W_0).$$

$$H(X, Y, Z, W) = \left(\frac{\alpha m_1\gamma\theta}{k_1+\gamma} + \frac{\beta m_2\sigma\theta}{k_2+k_3\sigma^2} - n\mu - d_3\mu - \eta\sigma\theta \right) + \left(\frac{\alpha m_1\theta}{k_1+\gamma} - \right. \\ \left. \frac{\alpha m_1\gamma\theta}{(k_1+\gamma)^2} \right) (X - \gamma) + \left(\frac{\beta m_2\theta}{k_2+k_3\sigma^2} - \frac{2\beta m_2\theta k_3\sigma^2}{(k_2+k_3\sigma^2)^2} - \eta\theta \right) (Y - \sigma) - (n + \\ d_3)(Z - \mu) + \left(\frac{\alpha m_1\gamma}{k_1+\gamma} + \frac{\beta m_2\sigma}{k_2+k_3\sigma^2} - \eta\sigma \right) (W - \theta).$$

$$4. \quad J(X, Y, Z, W) \approx J(X_0, Y_0, Z_0, W_0) + J_X(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(X - X_0) + \\ J_Y(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(Y - Y_0) + J_Z(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(Z - Z_0) + \\ J_W(X_0, Y_0, Z_0, W_0)(W - W_0).$$

$$J(X, Y, Z, W) = (nZ - d_4W) + 0(X - \gamma) + 0(Y - \sigma) - n(Z - \mu) - \\ d_4(W - \theta).$$

$$\rightarrow J(X, Y, Z, W) = nZ - d_4W - n(Z - \mu) - d_4(W - \theta).$$

4.3.2.2 Nilai Eigen Model Di Titik $(X, Y, Z, W) = (\gamma, \sigma, \mu, \theta)$

Untuk menentukan nilai eigen dari model, perlu dibentuk jacobian terlebih dahulu. Berikut adalah bentuk jacobian yang diperoleh dari proses linierisasi pada tahap sebelumnya

$$J[F, G, H, J](X, Y, Z, W) = \begin{bmatrix} -K_1 & r & 0 & -K_2 \\ b_1 & -K_3 & 0 & -K_4 \\ K_5 & K_6 & -n - d_3 & K_7 \\ 0 & 0 & n & -d_4 \end{bmatrix}.$$

Dimana:

$$K_1 = b_1 + d_1 + \frac{m_1\theta k_1}{(k_1 + \gamma)^2}.$$

$$K_2 = \frac{m_1\gamma}{k_1 + \gamma}.$$

$$K_3 = 2\sigma c_1 + \frac{m_2\theta(k_2 - k_3\sigma^2)}{(k_2 + k_3\sigma^2)^2} + d_2.$$

$$K_4 = \frac{m_2\sigma}{k_2 + k_3\sigma^2}.$$

$$K_5 = \frac{\alpha m_1\theta}{k_1 + \gamma} - \frac{\alpha m_1\gamma\theta}{(k_1 + \gamma)^2}.$$

$$K_6 = \frac{\beta m_2\theta k_2}{(k_2 + k_3\sigma^2)^2} - \eta\theta.$$

$$K_7 = \frac{\alpha m_1\gamma}{k_1 + \gamma} + \frac{\beta m_2\sigma}{k_2 + k_3\sigma^2} - \eta\sigma.$$

Nilai eigen dapat diperoleh dari jacobian diatas, yaitu dengan cara mencari determinan dari jacobian yang dikurangi dengan matrik identitas dimana dikalikan dengan λ .

$$\det \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -K_1 & r & 0 & -K_2 \\ b_1 & -K_3 & 0 & -K_4 \\ K_5 & K_6 & -n - d_3 & K_7 \\ 0 & 0 & n & -d_4 \end{bmatrix} \right) = 0.$$

$$\rightarrow \det \begin{pmatrix} \lambda + K_1 & r & 0 & -K_2 \\ b_1 & \lambda + K_3 & 0 & -K_4 \\ K_5 & K_6 & \lambda + n + d_3 & K_7 \\ 0 & 0 & n & \lambda + d_4 \end{pmatrix} = 0.$$

Jadi diperoleh hasil determinan sebagai berikut

$$((\lambda + K_1)(\lambda + K_3)(\lambda + n + d_3)(\lambda + d_4)) + (rnb_1K_7) = 0.$$

$$\rightarrow ((K_1K_3 + \lambda K_3 + \lambda K_1 + \lambda^2)(nd_4 + d_3d_4 + d_4\lambda + n\lambda + d_3\lambda + \lambda^2)) + (rnb_1K_7) = 0.$$

$$\rightarrow ((K_1K_3 + \lambda(K_3 + K_1) + \lambda^2)(d_4(n + d_3) + \lambda(d_4 + n + d_3) + \lambda^2)) + (rnb_1K_7) = 0.$$

$$\rightarrow ((K_1K_3 + \lambda(K_3 + K_1) + \lambda^2)(d_4(n + d_3) + \lambda(d_4 + n + d_3) + \lambda^2)) + (rnb_1K_7) = 0.$$

$$\rightarrow ((K_1K_3d_4(n + d_3) + \lambda(K_3 + K_1)d_4(n + d_3) + \lambda^2d_4(n + d_3) + K_1K_3\lambda(d_4 + n + d_3) + \lambda^2(d_4 + n + d_3)(K_3 + K_1) + \lambda^3(d_4 + n + d_3) + K_1K_3\lambda^2 + \lambda^3(K_3 + K_1) + \lambda^4)) + (rnb_1K_7) = 0.$$

$$\rightarrow ((K_1K_3d_4(n + d_3) + (rnb_1K_7) + \lambda((K_3 + K_1)d_4(n + d_3) + K_1K_3(d_4 + n + d_3)) + \lambda^2(d_4(n + d_3) + (d_4 + n + d_3)(K_3 + K_1) + K_1K_3) + \lambda^3(d_4 + n + d_3 + K_3 + K_1) + \lambda^4)) = 0.$$

Persamaan karakteristik diatas dapat ditulis ulang sebagai berikut,

$$\delta_1 + \delta_2\lambda + \delta_3\lambda^2 + \delta_4\lambda^3 + \lambda^4 = 0. \quad (4.2.9)$$

Dimana,

$$\delta_1 = K_1K_3d_4(n + d_3) + (rnb_1K_7).$$

$$\delta_2 = (K_3 + K_1)d_4(n + d_3) + K_1K_3(d_4 + n + d_3).$$

$$\delta_3 = d_4(n + d_3) + (d_4 + n + d_3)(K_3 + K_1) + K_1K_3.$$

$$\delta_4 = d_4 + n + d_3 + K_3 + K_1.$$

4.3.2.3 Analisis Titik Keseimbangan Model

Berdasarkan penjelasan mengenai analisis titik keseimbangan, maka perlu dicari nilai eigen dari model yang bernilai positif. Pada analisis ini akan digunakan kriteria *Routh-Hurwitz*, dikarenakan bentuk persamaan karakteristik (4.2.9) berbentuk polinomial orde 4, sehingga perlu dilakukan proses substitusi nilai parameter.

1. Nilai Parameter I

Berikut hasil dari persamaan (4.2.9) yang telah disubstitusikan dengan nilai parameter I dan titik keseimbangan,

$$(X, Y, Z, W) = (0,5496; 0,6543; 0,035; 0,2335):$$

dengan persamaan karakteristik,

$$5,8367 + 10,8677\lambda + 7,5518\lambda^2 + 2,3369\lambda^3 + \lambda^4 = 0 \quad (4.3.1)$$

Persamaan (4.3.1) dapat ditulis dalam bentuk matriks *Hurwitz*, dengan ukuran 4×4 .

$$H = \begin{bmatrix} 2,3369 & 1 & 0 & 0 \\ 10,8677 & 7,5518 & 2,3369 & 1 \\ 0 & 5,8367 & 10,8677 & 7,5518 \\ 0 & 0 & 0 & 5,8367 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya akan dihitung determinan *Hurwitz* tingkat ke-4.

$$\Delta_1 = [2,3369] = 2,3369 > 0.$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{bmatrix} 2,3369 & 1 \\ 10,8677 & 7,5518 \end{bmatrix} \\ &= 6,7803 > 0. \end{aligned}$$

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} 2,3369 & 1 & 0 \\ 10,8677 & 7,5518 & 2,3369 \\ 0 & 5,8367 & 10,8677 \end{bmatrix}$$

$$= 41,8104 > 0.$$

$$\Delta_4 = \begin{bmatrix} 2,3369 & 1 & 0 & 0 \\ 10,8677 & 7,5518 & 2,3369 & 1 \\ 0 & 5,8367 & 10,8677 & 7,5518 \\ 0 & 0 & 0 & 5,8367 \end{bmatrix}$$

$$= 1.119,43 > 0.$$

Semua koefisien dari persamaan karakteristik (4.3.1) bernilai positif, dan semua hasil determinan *Hurwitz* juga bernilai positif, maka sistem dikatakan stabil, berdasarkan kriteria kestabilan *Hurwitz*.

Persamaan karakteristik (4.3.1) dapat ditulis dalam bentuk tabel *Routh*,

λ^4	1	7,5518	5,8367
λ^3	2,3369	10,8677	0
λ^2	2,9014	5,8367	0
λ^1	6,1667	0	0
λ^0	5,8367	0	0

Dikarenakan semua koefisien pada baris pertama dari tabel *Routh* diatas bernilai positif, maka sistem dikatakan stabil.

2. Nilai Parameter II

Berikut hasil dari persamaan (4.2.9) yang telah disubstitusikan dengan nilai parameter II dan titik kesetimbangan,

$$(X, Y, Z, W) = (0,3213; 0,406; 0,0541; 0,3605):$$

dengan persamaan karakteristik,

$$5,5599 + 9,6257\lambda + 6,2182\lambda^2 + 2,0412\lambda^3 + \lambda^4 = 0 \quad (4.3.2)$$

Persamaan (4.3.2) dapat ditulis dalam bentuk matriks *Hurwitz*, dengan ukuran 4×4 .

$$H = \begin{bmatrix} 2,0412 & 1 & 0 & 0 \\ 9,6257 & 6,2182 & 2,0412 & 1 \\ 0 & 5,5599 & 9,6257 & 6,2182 \\ 0 & 0 & 0 & 5,5599 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya akan dihitung determinan *Hurwitz* tingkat ke-4.

$$\Delta_1 = [2,0412] = 2,0412 > 0.$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 2,0412 & 1 \\ 9,6257 & 6,2182 \end{bmatrix}$$

$$= 3,0667 > 0.$$

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} 2,0412 & 1 & 0 \\ 9,6257 & 6,2182 & 2,0412 \\ 0 & 5,5599 & 9,6257 \end{bmatrix}$$

$$= 6,3547 > 0.$$

$$\Delta_4 = \begin{bmatrix} 2,0412 & 1 & 0 & 0 \\ 9,6257 & 6,2182 & 2,0412 & 1 \\ 0 & 5,5599 & 9,6257 & 6,2182 \\ 0 & 0 & 0 & 5,5599 \end{bmatrix}$$

$$= 679,2688 > 0.$$

Semua koefisien dari persamaan karakteristik (4.3.2) bernilai positif, dan semua hasil determinan *Hurwitz* juga bernilai positif, maka sistem dikatakan stabil, berdasarkan kriteria kestabilan *Hurwitz*.

Persamaan karakteristik (4.3.2) dapat ditulis dalam bentuk tabel *Routh*,

λ^4	1	6,2182	5,5599	
λ^3	2,0412	9,6257	0	
λ^2	1,5024	5,5599	0	
λ^1	2,0719	0	0	
λ^0	5,5599	0	0	

Dikarenakan semua koefisien pada baris pertama dari tabel *Routh* diatas bernilai positif, maka sistem dikatakan stabil.

3. Nilai Parameter III

Berikut hasil dari persamaan (4.2.9) yang telah disubstitusikan dengan nilai parameter III dan titik kesetimbangan,

$$(X, Y, Z, W) = (0,2527; 0,3205; 0,0527; 0,3513):$$

dengan persamaan karakteristik,

$$5,5042 + 9,3712\lambda + 5,9346\lambda^2 + 1,9775\lambda^3 + \lambda^4 = 0 \quad (4.3.3)$$

Persamaan (4.3.3) dapat ditulis dalam bentuk matriks *Hurwitz*, dengan ukuran 4×4 .

$$H = \begin{bmatrix} 1,9775 & 1 & 0 & 0 \\ 9,3712 & 5,9346 & 1,9775 & 1 \\ 0 & 5,5042 & 9,3712 & 5,9346 \\ 0 & 0 & 0 & 5,5042 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya akan dihitung determinan *Hurwitz* tingkat ke-4.

$$\Delta_1 = [1,9775] = 1,9775 > 0.$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 1,9775 & 1 \\ 9,3712 & 5,9346 \end{bmatrix}$$

$$= 2,3646 > 0.$$

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} 1,9775 & 1 & 0 \\ 9,3712 & 5,9346 & 1,9775 \\ 0 & 5,5042 & 9,3712 \end{bmatrix}$$

$$= 0,6343 > 0.$$

$$\Delta_4 = \begin{bmatrix} 1,9775 & 1 & 0 & 0 \\ 9,3712 & 5,9346 & 1,9775 & 1 \\ 0 & 5,5042 & 9,3712 & 5,9346 \\ 0 & 0 & 0 & 5,5042 \end{bmatrix}$$

$$= 605.3529 > 0.$$

Semua koefisien dari persamaan karakteristik (4.3.3) bernilai positif, dan semua hasil determinan *Hurwitz* juga bernilai positif, maka sistem dikatakan stabil, berdasarkan kriteria kestabilan *Hurwitz*.

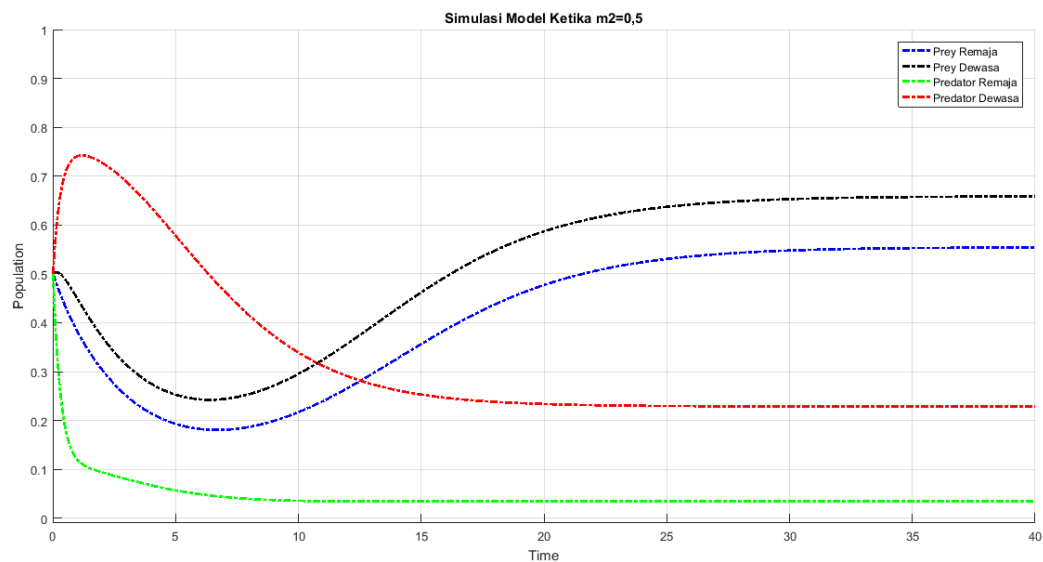
Persamaan karakteristik (4.3.3) dapat ditulis dalam bentuk tabel *Routh*,

λ^4	1	5,9346	5,5042
λ^3	1,9775	9,3712	0
λ^2	1,1958	5,5042	0
λ^1	0,2689	0	0
λ^0	5,5042	0	0

Dikarenakan semua koefisien pada baris pertama dari tabel *Routh* diatas bernilai positif, maka sistem dikatakan stabil.

4.4 Simulasi Model *Prey-Predator* Dengan Struktur Umur Dan Perilaku *Anti-Predator*

Pada subbab ini, akan ditunjukkan hasil simulasi dari model *Prey-Predator* dengan struktur umur dan perilaku *Anti-Predator*. Selanjutnya akan dilakukan substitusi nilai parameter I-III pada persamaan (4.1) – (4.4).

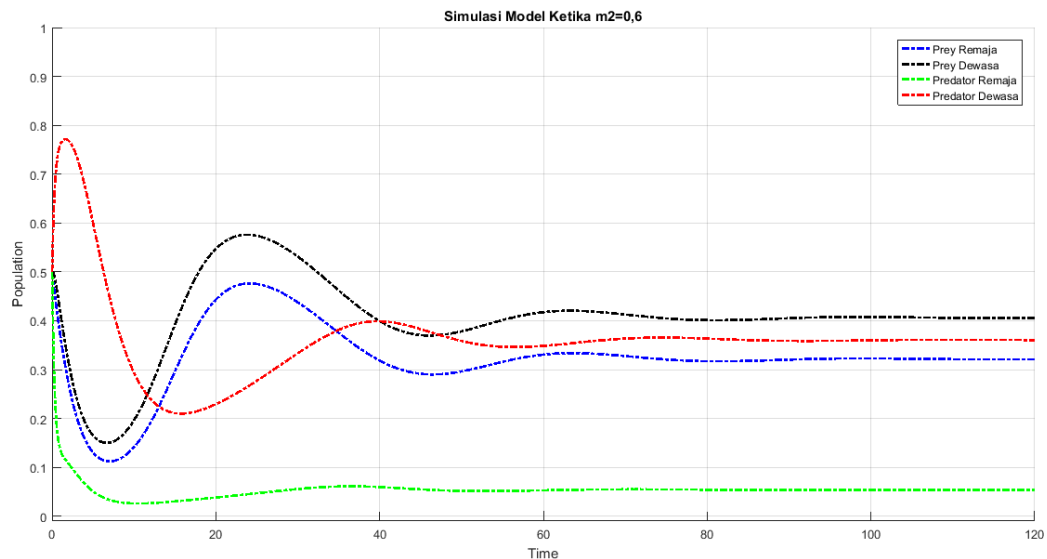


Gambar 4.1 Kasus I Ketika $m_2 < m_1$, diberikan nilai parameter $r = 1; b_1 = 1; c_1 = 1; d_1 = 0,1; d_2 = 0,06; d_3 = 1; d_4 = 0,3; m_1 = 0,6; m_2 = 0,5; k_1 = 1; k_2 = 0,5; k_3 = 1; n = 2; \alpha = 0,6; \beta = 1,1; \eta = 0,1$ dengan $0 \leq t \leq 40$ dan titik awal $X(0) = Y(0) = Z(0) = W(0) = 0,5$

Pada kasus pertama ini dapat diperoleh bahwa, populasi dari *predator* dewasa meningkat sampai 0,73 ketika $t = 3$, kemudian populasinya akan menurun sampai 0,23 ketika $t = 20$. Populasi dari *predator* dewasa mengalami kenaikan terlebih dahulu disebabkan oleh parameter yang diberikan. Dalam persamaan $\frac{dW}{dt}$ nilai parameter dari n lebih besar dari nilai d_4 . Perhatikan bahwa ketika dimisalkan $\frac{dW}{dt} = 0$ maka $nZ(t) - d_4W(t) = 0$, sehingga ketika nilai parameter dan nilai awal diberikan hasil yang diperoleh adalah $nZ(0) > d_4W(0)$ yaitu, $1 > 0,15$. Dari perhitungan tersebut maka dapat ditunjukkan bahwa populasi dari *predator* dewasa akan mengalami kenaikan terlebih dahulu. Ketika populasi telah mengalami kenaikan maksimal ketika $t = 1$, lebih tepatnya ketika populasi terjadi ketika $t > 1$, maka hasil perhitungan dari $nZ(t) - d_4W(t) = 0$ akan menghasilkan $nZ(t) < d_4W(t)$, hal tersebut menimbulkan populasi menurun. Penurunan populasi tersebut mengalami penurunan menuju $t = 20$ sehingga ketika $t > 20$ nilai dari $nZ(t) < d_4W(t)$ akan tetap sama tidak mengalami perubahan, maka menimbulkan populasi yang stabil.

Untuk populasi dari *predator* remaja paling tinggi adalah ketika populasinya 0,5, dimana nilai tersebut adalah nilai awal yang diberikan sehingga hal tersebut terjadi ketika $t = 0$. Kemudian populasinya akan menurun sampai 0,035 ketika $t = 10$, hal ini terjadi dikarenakan nilai dari $\frac{\alpha m_1 X(t)W(t)}{k_1 + X(t)} + \frac{\beta m_2 Y(t)W(t)}{k_2 + k_3 Y(t)^2} < (n + d_3)Z(t) + \eta Y(t)W(t)$. Kemudian ketika $t > 10$ nilai dari $\frac{\alpha m_1 X(t)W(t)}{k_1 + X(t)} + \frac{\beta m_2 Y(t)W(t)}{k_2 + k_3 Y(t)^2} < (n + d_3)Z(t) + \eta Y(t)W(t)$ akan tetap sama, sehingga akan menimbulkan populasi yang stabil. Sementara populasi dari *prey* dewasa akan meningkat sampai 0,65 ketika $t = 25$, hal tersebut terjadi dikarenakan nilai dari

$b_1X(t) > c_1Y(t)^2 + \frac{m_2Y(t)W(t)}{k_2+k_3Y(t)^2} + d_2Y(t)$. Kemudian populasinya akan menurun sampai 0,25 ketika $t = 10$. Untuk populasi dari *prey* remaja meningkat sampai 0,55 ketika $t = 25$, hal tersebut terjadi dikarenakan $rY > b_1X + d_1X + \frac{m_1XW}{k_1+X}$. Kemudian populasinya akan menurun sampai 0,19 ketika $t = 10$. Dari kasus pertama ini dapat diperhatikan bahwa ketika *prey* mencapai populasi maksimumnya maka setelah it akan mencapai populasi stabil ketika $20 \leq t \leq 200$, sehingga populasi stabil dari *prey* remaja adalah 0,55 dan untuk *prey* dewasa adalah 0,65.



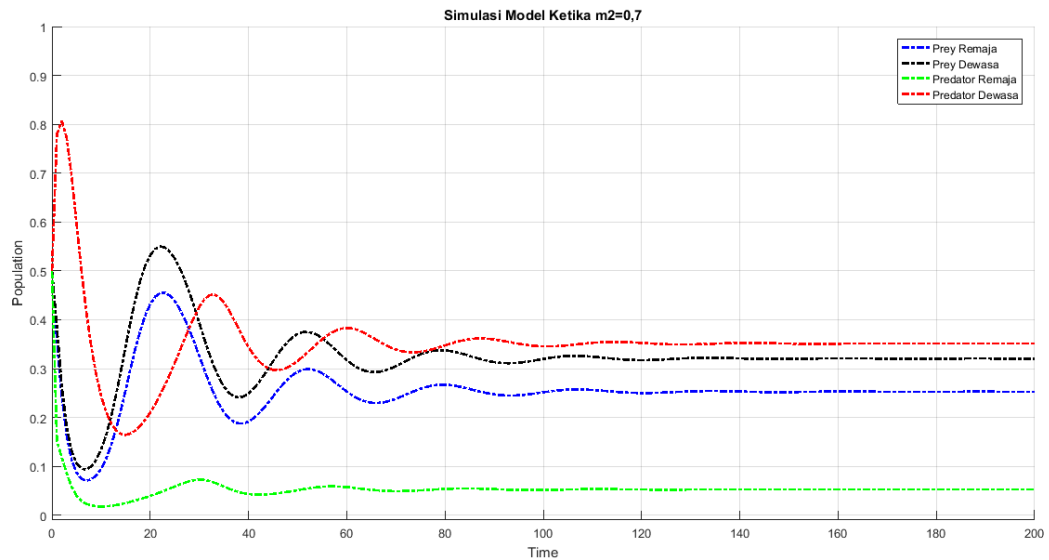
Gambar 4.2 Kasus II Ketika $m_2 = m_1$, diberikan nilai parameter $r = 1$; $b_1 = 1$; $c_1 = 1$; $d_1 = 0,1$; $d_2 = 0,06$; $d_3 = 1$; $d_4 = 0,3$; $m_1 = 0,6$; $m_2 = 0,6$; $k_1 = 1$; $k_2 = 0,5$; $k_3 = 1$; $n = 2$; $\alpha = 0,6$; $\beta = 1,1$; $\eta = 0,1$ dengan $0 \leq t \leq 120$ dan titik awal $X(0) = Y(0) = Z(0) = W(0) = 0,5$

Pada kasus kedua ini dapat diperoleh bahwa, populasi dari *predator* dewasa meningkat sampai 0,78 ketika $t = 3$, kemudian populasinya akan menurun sampai 0,21 ketika $t = 15$. Populasi dari *predator* dewasa mengalami kenaikan terlebih dahulu disebabkan oleh parameter yang diberikan. Dalam persamaan $\frac{dW}{dt}$ nilai parameter dari n lebih besar dari nilai d_4 . Perhatikan bahwa ketika dimisalkan $\frac{dW}{dt} =$

0 maka $nZ(t) - d_4W(t) = 0$, sehingga ketika nilai parameter dan nilai awal diberikan hasil yang diperoleh adalah $nZ(0) > d_4W(0)$ yaitu, $1 > 0,15$. Dari perhitungan tersebut maka dapat ditunjukkan bahwa populasi dari *predator* dewasa akan mengalami kenaikan terlebih dahulu. Ketika populasi telah mengalami kenaikan maksimal ketika $t = 15$, lebih tepatnya ketika populasi terjadi ketika $t > 15$, maka hasil perhitungan dari $nZ(t) - d_4W(t) = 0$ akan menghasilkan $nZ(t) < d_4W(t)$, hal tersebut menimbulkan populasi menurun. Kejadian naik turunnya populasi akan terus berlangsung sampai ketika ketika $100 \leq t \leq 200$ nilai dari $nZ(t) < d_4W(t)$ akan tetap sama tidak mengalami perubahan, maka menimbulkan populasi yang stabil.

Untuk populasi dari *predator* remaja paling tinggi adalah ketika populasinya 0,5, dimana nilai tersebut adalah nilai awal yang diberikan sehingga hal tersebut terjadi ketika $t = 0$. Kemudian populasinya akan menurun sampai 0,02 ketika $t = 10$, hal ini terjadi dikarenakan nilai dari $\frac{\alpha m_1 X(t)W(t)}{k_1 + X(t)} + \frac{\beta m_2 Y(t)W(t)}{k_2 + k_3 Y(t)^2} < (n + d_3)Z(t) + \eta Y(t)W(t)$. Kemudian ketika $80 \leq t \leq 200$ nilai dari $\frac{\alpha m_1 X(t)W(t)}{k_1 + X(t)} + \frac{\beta m_2 Y(t)W(t)}{k_2 + k_3 Y(t)^2} < (n + d_3)Z(t) + \eta Y(t)W(t)$ akan tetap sama, sehingga akan menimbulkan populasi yang stabil.. Sementara populasi dari *prey* dewasa meningkat sampai 0,58 ketika $t = 24$, hal tersebut terjadi dikarenakan nilai dari $b_1 X(t) > c_1 Y(t)^2 + \frac{m_2 Y(t)W(t)}{k_2 + k_3 Y(t)^2} + d_2 Y(t)$. Kemudian populasinya akan menurun sampai 0,17 ketika $t = 8$. Untuk populasi dari *prey* remaja meningkat sampai 0,46 ketika $t = 25$, hal tersebut terjadi dikarenakan $rY > b_1 X + d_1 X + \frac{m_1 XW}{k_1 + X}$. Kemudian populasinya akan menurun sampai 0,11 ketika $t = 8$. Dari kasus kedua

ini dapat diketahui bahwa rentang populasi stabil pada *prey* remaja dan *prey* dewasa adalah ketika $100 \leq t \leq 200$, dimana populasi stabil dari *prey* remaja adalah 0,32, untuk *prey* dewasa adalah 0,41.



Gambar 4.3 Kasus III Ketika $m_2 > m_1$, diberikan nilai parameter $r = 1; b_1 = 1; c_1 = 1; d_1 = 0,1; d_2 = 0,06; d_3 = 1; d_4 = 0,3; m_1 = 0,6; m_2 = 0,7; k_1 = 1; k_2 = 0,5; k_3 = 1; n = 2; \alpha = 0,6; \beta = 1,1; \eta = 0,1$ dengan $0 \leq t \leq 200$ dan titik awal $X(0) = Y(0) = Z(0) = W(0) = 0,5$

Pada kasus kedua ini dapat diperoleh bahwa, populasi dari *predator* dewasa meningkat sampai 0,8 ketika $t = 3$, kemudian populasinya akan menurun sampai 0,18 ketika $t = 18$. Populasi dari *predator* dewasa mengalami kenaikan terlebih dahulu disebabkan oleh parameter yang diberikan. Dalam persamaan $\frac{dW}{dt}$ nilai parameter dari n lebih besar dari nilai d_4 . Perhatikan bahwa ketika dimisalkan $\frac{dW}{dt} = 0$ maka $nZ(t) - d_4W(t) = 0$, sehingga ketika nilai parameter dan nilai awal diberikan hasil yang diperoleh adalah $nZ(0) > d_4W(0)$ yaitu, $1 > 0,15$. Dari perhitungan tersebut maka dapat ditunjukkan bahwa populasi dari *predator* dewasa akan mengalami kenaikan terlebih dahulu. Ketika populasi telah mengalami kenaikan maksimal ketika $t = 15$, lebih tepatnya ketika populasi terjadi ketika $t >$

15, maka hasil perhitungan dari $nZ(t) - d_4W(t) = 0$ akan menghasilkan $nZ(t) < d_4W(t)$, hal tersebut menimbulkan populasi menurun. Kejadian naik turunnya populasi akan terus berlangsung sampai ketika ketika $140 \leq t \leq 200$ nilai dari $nZ(t) < d_4W(t)$ akan tetap sama tidak mengalami perubahan, maka menimbulkan populasi yang stabil.

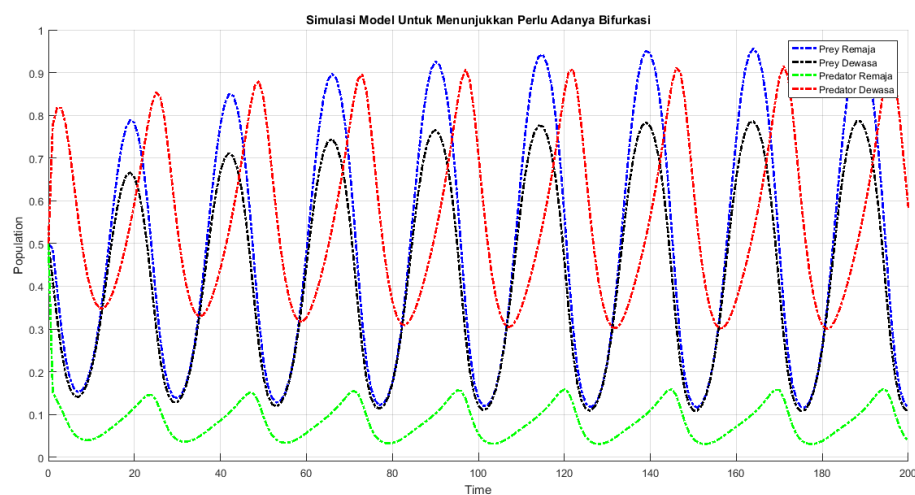
Untuk populasi dari *predator* remaja paling tinggi adalah ketika populasinya 0,5, dimana nilai tersebut adalah nilai awal yang diberikan sehingga hal tersebut terjadi ketika $t = 0$. Kemudian populasinya akan menurun sampai 0,02 ketika $t = 12$, hal ini terjadi dikarenakan nilai dari $\frac{\alpha m_1 X(t)W(t)}{k_1 + X(t)} + \frac{\beta m_2 Y(t)W(t)}{k_2 + k_3 Y(t)^2} < (n + d_3)Z(t) + \eta Y(t)W(t)$. Kemudian ketika $95 \leq t \leq 200$ nilai dari $\frac{\alpha m_1 X(t)W(t)}{k_1 + X(t)} + \frac{\beta m_2 Y(t)W(t)}{k_2 + k_3 Y(t)^2} < (n + d_3)Z(t) + \eta Y(t)W(t)$ akan tetap sama, sehingga akan menimbulkan populasi yang stabil.. Sementara populasi dari *prey* dewasa meningkat sampai 0,54 ketika $t = 22$, hal tersebut terjadi dikarenakan nilai dari $b_1 X(t) > c_1 Y(t)^2 + \frac{m_2 Y(t)W(t)}{k_2 + k_3 Y(t)^2} + d_2 Y(t)$. Kemudian populasinya akan menurun sampai 0,1 ketika $t = 9$. Untuk populasi dari *prey* remaja meningkat sampai 0,45 ketika $t = 22$, hal tersebut terjadi dikarenakan $rY > b_1 X + d_1 X + \frac{m_1 XW}{k_1 + X}$. Kemudian populasinya akan menurun sampai 0,09 ketika $t = 10$. Dari kasus ketiga ini dapat diketahui bahwa rentang populasi stabil pada *prey* remaja dan *prey* dewasa adalah ketika $140 \leq t \leq 200$, dimana populasi stabil dari *prey* remaja adalah 0,25 dan untuk *prey* dewasa adalah 0,32.

Berdasarkan penjelasan yang telah disampaikan perihal interpretasi simulasi, diperoleh bahwa faktor yang mempengaruhi naik turunnya populasi adalah nilai parameter yang diberikan. Dari keempat populasi dengan tiga kasus

yang diberikan tidak ada yang mengalami kepunahan, karena memiliki populasi stabil pada keempat populasi. Dari kasus I-III, kasus yang paling baik adalah kasus kedua, dikarenakan jarak populasi stabil dari keempat spesies tidak terlalu jauh. Perhatikan bahwa populasi yang ada kemungkinan atau dapat dikatakan rawan terjadi kepunahan adalah populasi dari *predator* remaja, dikarenakan populasi stabilnya dibawah 0,1. Sementara populasi stabil spesies lain masih diatas 0,1, sehingga dapat ditambahkan faktor lain untuk menaikkan populasi stabilnya, contoh pembudidayaan oleh manusia dan lain sebagainya.

Berdasarkan penjelasan pada latar belakang, bahwa pertumbuhan populasi spesies yang menjadi pengaruh dasar terhadap pertumbuhan populasi spesies yang lain adalah *predator* remaja. Berdasarkan asumsi berikut, yaitu apabila populasi dari *predator* remaja punah maka populasi dari *predator* dewasa juga akan punah, maka timbul dua kemungkinan yaitu populasi dari kedua *prey* akan *overload* atau akan punah. Sehingga akan ditunjukkan dari kasus I-III manakah yang memiliki peluang paling baik pada model tersebut.

Berikut akan ditunjukkan simulasi model yang menunjukkan bahwa dapat dilakukan bifurkasi pada model ini.



Gambar 4.4 Simulasi Model Untuk Menunjukkan Adanya Bifurkasi Pada Model, diberikan nilai parameter $r = 1,6$; $b_1 = 1$; $c_1 = 1$; $d_1 = 0,1$; $d_2 = 0,06$; $d_3 = 1$; $d_4 = 0,3$; $m_1 = 0,8$; $m_2 = 0,8$; $k_1 = 1$; $k_2 = 0,5$; $k_3 = 1$; $n = 2$; $\alpha = 0,3$; $\beta = 1$; $\eta = 0,1$ dengan $0 \leq t \leq 200$ dan titik awal $X(0) = Y(0) = Z(0) = W(0) = 0,5$

Dari simulasi tersebut dapat dilihat bahwa, pada keempat spesies dari rentang waktu $0 < t < 200$ belum menunjukkan kestabilan sama sekali, atau bisa dikatakan selalu berisolasi. Sehingga dari simulasi dengan parameter tersebut dapat dilakukan proses bifurkasi untuk mengetahui parameter mana dan berapa nilai yang dibutuhkan parameter tersebut untuk memperoleh kestabilan.

BAB V PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang diperoleh dari penelitian ini adalah :

1. Diperoleh 2 titik kesetimbangan dari model yaitu, $E_0 = \left(\frac{r}{c_1(b_1+d_1)} \left(\frac{b_1r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right), \frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right), 0, 0 \right)$ dan $E_1 = (X^*, Y^*, Z^*, W^*)$, dimana nilai dari $\gamma, \sigma, \mu, \theta$ bergantung pada nilai parameter yang diberikan. Melalui proses linierisasi model, matriks Jacobi, kemudian diperoleh persamaan karakteristik. Persamaan karakteristik untuk $E_0 = \left(\frac{r}{c_1(b_1+d_1)} \left(\frac{b_1r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right), \frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right), 0, 0 \right)$ yang diperoleh dari ketiga kasus semua nilai koefisiennya bernilai positif dan hasil dari semua determinan *Hurwitz* bernilai positif. Hasil dari tabel *Routh* menyatakan, bahwa semua koefisien pada baris pertama tabel bernilai positif, maka Berdasarkan kriteria *Routh-Hurwitz* sistem persamaan model disekitar $E_0 = \left(\frac{r}{c_1(b_1+d_1)} \left(\frac{b_1r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right), \frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1r}{(b_1+d_1)} - d_2 \right), 0, 0 \right)$ dikatakan stabil. Persamaan karakteristik yang diperoleh untuk $E_1 = (X^*, Y^*, Z^*, W^*)$ semua koefisiennya bernilai positif dan hasil dari semua determinan *Hurwitz* bernilai positif. Hasil dari tabel *Routh* menyatakan, bahwa semua koefisien pada baris pertama tabel bernilai positif, maka sistem persamaan model disekitar $E_1 = (X^*, Y^*, Z^*, W^*)$ dikatakan stabil.
2. Berdasarkan penjelasan yang telah disampaikan perihal interpretasi simulasi dari kasus I-III, diperoleh bahwa faktor yang mempengaruhi naik turunnya populasi adalah nilai parameter yang diberikan. Dari keempat populasi

dengan tiga kasus yang diberikan tidak ada yang mengalami kepunahan, karena memiliki populasi stabil pada keempat populasi. Dari kasus I-III, kasus yang paling baik adalah kasus kedua, dikarenakan jarak populasi stabil dari keempat spesies tidak terlalu jauh. Perhatikan bahwa populasi yang ada kemungkinan atau dapat dikatakan rawan terjadi kepunahan adalah populasi dari *predator* remaja, dikarenakan populasi stabilnya dibawah 0,1. Sementara populasi stabil spesies lain masih diatas 0,1, sehingga dapat ditambahkan faktor lain untuk menaikkan populasi stabilnya, contoh pembudidayaan oleh manusia dan lain sebagainya.

5.2 Saran

Pada gambar 4.4 menunjukkan bahwa grafik yang ditunjukkan selalu berisolasi, sehingga perlu dilakukan analisis bifurkasi untuk penelitian selanjutnya. Untuk menemukan parameter mana saja yang berpengaruh pada kestabilan model.

DAFTAR PUSTAKA

- Al-Qur'an dan Terjemahnya*. (2019). Kementrian Agama RI.
- Anton, H. (2000). *Dasar-Dasar Aljabar Jilid 2 Edisi 7*. Batam: Interaksara.
- Arora, C., & Kumar, V. (2018). Dynamical Behavior of a Stage Structured Prey–Predator Model with Two Delays and Monod-Haldane Functional Response. *Appl. Comput. Math*, 46.
- Boyce, W. E., Diprima, R. C., & Meade, D. B. (2017). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems Eleventh Edition*. USA: John Wiley & Sons.
- Cui, Q., Zhang, Q., Qiu, Z., & Hu, Z. (2016). Complex dynamics of a discrete-time predator-prey system with Holling IV functional response. *Chaos, Solitons and Fractals (Nonlinear Science, and Nonequilibrium and Complex Phenomena)*, 158-171.
- Dobrushkin, V. A. (2015). *Applied Diferential Equation*. USA: CRC Press, Taylor & Francis Group.
- Gantmacher, F. (1959). *The Theory of Matrices*. New York: Chelsea Publishing Company.
- Goulart, V. D., & Young, R. J. (2013). Selfish behaviour as an antipredator response in schooling fish? *Animal Behaviour*, 443-450.
- Hanh, W. (1967). *Stability of Motion*. New York: Springer-Verlag.
- Huang, C.-Y., Li, Y.-J., & Huo, H.-F. (2012). The dynamics of a stage-structured predator-prey system with impulsive effect and Holling mass defence. *Applied Mathematical Modelling*, 87-96.
- Iswanto, R. J. (2012). *Pemodelan Matematika : Aplikasi dan Terapannya*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Luo, D. (2021). Global bifurcation for a reaction-diffusion predator-prey model with Holling-II functional response and prey-taxis. *Chaos, Solitons and Fractals*.
- Maknun, D. (2017). *Eologi: Populasi, Komunitas, Ekosistem Mewujudkan Kampus Hijau Asri, Islami dan Ilmiah*. Cirebon: Nurjati Press.
- Meyer, W. J. (1985). *Concept of Mathematical Modeling*. Singapura: McGraw-Hill Book.
- Mortoja, S. G., Panja, P., & Mondal, S. K. (2018). Dynamics of a predator-prey model with stage-structure on both species and. *Informatics in Medicine Unlocked*, 50-57.
- Pei, Y., Chen, L., Zhang, Q., & Li, C. (2005). Extinction and permanence of one-prey multi-predators of Holling type II function response system with impulsive biological control. *Journal of Theoretical Biology*, 495-503.
- Rhidho, M. (2017). Pandangan Tentang Kesejahteraan Sosial Bagi Kelompok Penyandang Disabilitas. *Al-Bayan Vol.23 No.1*, 106.
- Sun, X.-K., Huo, H.-F., & Ma, C.-C. (2013). Hopf bifurcation and stability in predator–prey model. *Applied Mathematics and Computation*, 10313-10324.
- Supriadi, E. (2003). *Sosialisme Islam, Pemikiran Ali Syari'ati*. Jakarta: Pustaka Pelajar.
- Upadhyay, R. K., & Iyengar, S. R. (2014). *Introduction to Mathematical Modeling and Chaotic Dynamics*. Raton, Mexico: CRC Press.

- Waluya, S. (2006). *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Zill, D. S., Wright, W. S., & Cullen, M. R. (2013). *Differential Equations with Boundary-Value Problems*. China: Brooks/Cole, Cengage Learning.
- Zuderer, E. (2006). *Partial Differential Equations of Applied Mathematics*. New York: Pure and Applied Mathematics.

LAMPIRAN

Lampiran 1: Perhitungan Penentuan Nilai Y tanpa Parameter

> restart : with(linalg) : with(LinearAlgebra) :

>

$$\begin{aligned}
 M := & \left(\alpha m_1 Y \left(c_1 Y d_4 k_2 + c_1 Y^3 d_4 k_3 - \left(m_2 n \left(-r b_1 + b_1 c_1 Y + b_1 d_2 + d_1 c_1 Y \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + d_1 d_2 \right) \alpha Y d_4 \left(k_2 + k_3 Y^2 \right) \right) \right) / \left(\alpha Y m_2 n b_1 + \alpha d_1 Y m_2 n - \beta m_2 Y n b_1 \right. \\
 & \left. + n d_4 b_1 k_2 + n d_4 b_1 k_3 Y^2 + d_3 d_4 b_1 k_2 + d_3 d_4 b_1 k_3 Y^2 + \eta Y n b_1 k_2 \right. \\
 & \left. + \eta Y^3 n b_1 k_3 \right) + d_2 d_4 k_2 + d_2 d_4 k_3 Y^2 \left. \right) n \Bigg/ \left(d_4^2 \left(k_2 \right. \right. \\
 & \left. \left. + k_3 Y^2 \right) b_1 \left(k_1 + \frac{1}{d_4 \left(k_2 + k_3 Y^2 \right)} b \left(Y \left(c_1 Y d_4 k_2 + c_1 Y^3 d_4 k_3 \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - \left(m_2 n \left(-r b_1 + b_1 c_1 Y + b_1 d_2 + d_1 c_1 Y + d_1 d_2 \right) \alpha Y d_4 \left(k_2 + k_3 Y^2 \right) \right) \right) \right) / \left(\alpha \right. \right. \\
 & \left. \left. - \beta m_2 Y n b_1 + n d_4 b_1 k_2 + n d_4 b_1 k_3 Y^2 + d_3 d_4 b_1 k_2 + d_3 d_4 b_1 k_3 Y^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. + \eta Y n b_1 k_2 + \eta Y^3 n b_1 k_3 \right) + d_2 d_4 k_2 + d_2 d_4 k_3 Y^2 \right) \Bigg) + \frac{\beta m_2 Y n}{d_4 \left(k_2 + k_3 Y^2 \right)} \\
 & - n - d_3 - \frac{\eta Y n}{d_4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M := & \left(\alpha m_1 Y \left(c_1 Y d_4 k_2 + c_1 Y^3 d_4 k_3 - \left(m_2 n \left(-r b_1 + b_1 c_1 Y + b_1 d_2 + d_1 c_1 Y \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + d_1 d_2 \right) \alpha Y d_4 \left(k_2 + k_3 Y^2 \right) \right) \right) / \left(\alpha Y m_2 n b_1 + \alpha d_1 Y m_2 n - \beta m_2 Y n b_1 \right. \\
 & \left. + n d_4 b_1 k_2 + n d_4 b_1 k_3 Y^2 + d_3 d_4 b_1 k_2 + d_3 d_4 b_1 k_3 Y^2 + \eta Y n b_1 k_2 \right. \\
 & \left. + \eta Y^3 n b_1 k_3 \right) + d_2 d_4 k_2 + d_2 d_4 k_3 Y^2 \left. \right) n \Bigg/ \left(d_4^2 \left(k_2 \right. \right. \\
 & \left. \left. + k_3 Y^2 \right) b_1 \left(k_1 + \frac{1}{d_4 \left(k_2 + k_3 Y^2 \right)} b_1 \left(Y \left(c_1 Y d_4 k_2 + c_1 Y^3 d_4 k_3 \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - \left(m_2 n \left(-r b_1 + b_1 c_1 Y + b_1 d_2 + d_1 c_1 Y + d_1 d_2 \right) \alpha Y d_4 \left(k_2 + k_3 Y^2 \right) \right) \right) \right) / \left(\alpha \right. \right. \\
 & \left. \left. - \beta m_2 Y n b_1 + n d_4 b_1 k_2 + n d_4 b_1 k_3 Y^2 + d_3 d_4 b_1 k_2 + d_3 d_4 b_1 k_3 Y^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. + \eta Y n b_1 k_2 + \eta Y^3 n b_1 k_3 \right) + d_2 d_4 k_2 + d_2 d_4 k_3 Y^2 \right) \Bigg) + \frac{\beta m_2 Y n}{d_4 \left(k_2 + k_3 Y^2 \right)} \\
 & - n - d_3 - \frac{\eta Y n}{d_4}
 \end{aligned}$$

> solve({M}, {Y});

$$\begin{aligned}
\{Y = \text{RootOf} & \left(\eta^2 n^2 c_1 k_3^2 _Z^8 + \left(-k_3^2 \alpha m_1 n^2 c_1 \eta + 2 k_3^2 d_3 d_4 c_1 \eta n + k_3^2 \eta^2 n^2 d_2 + 2 \right. \right. \\
& k_3^2 n^2 d_4 c_1 \eta \left. \right) _Z^7 + \left(-k_3^2 \alpha m_1 n^2 c_1 d_4 + 2 k_3^2 d_3 d_4 d_2 \eta n + k_3^2 n^2 d_4^2 c_1 - \right. \\
& k_3^2 \alpha m_1 n^2 d_2 \eta - k_3^2 \alpha m_1 n c_1 d_3 d_4 + 2 k_3^2 n d_4^2 c_1 d_3 + 2 k_3^2 n^2 d_4 d_2 \eta + k_3^2 d_3^2 \\
& d_4^2 c_1 + k_3^2 \eta^2 n^2 k_1 b_1 + 2 k_3 \eta^2 n^2 k_2 c_1 - 2 k_3 \beta m_2 n^2 c_1 \eta \left. \right) _Z^6 + \left(2 \right. \\
& k_3^2 n^2 d_4 k_1 \eta b_1 + k_3^2 n^2 d_4^2 d_2 - k_3^2 \alpha m_1 n d_2 d_3 d_4 + 2 k_3^2 d_3 d_4 k_1 \eta n b_1 + 2 k_3^2 n \\
& d_4^2 d_2 d_3 + k_3^2 d_3^2 d_4^2 d_2 - k_3^2 \alpha m_1 n^2 d_2 d_4 - 2 k_3 \beta m_2 n^2 d_2 \eta \\
& - 2 k_3 \beta m_2 n c_1 d_3 d_4 + 2 k_3 \eta^2 n^2 k_2 d_2 - 2 k_3 \beta m_2 n^2 c_1 d_4 \\
& + 4 k_3 d_3 d_4 k_2 c_1 \eta n + k_3 \alpha m_1 n^2 c_1 \beta m_2 + k_3 \eta n^2 m_2 \alpha r + 4 k_3 n^2 d_4 k_2 c_1 \eta \\
& \left. - 2 k_3 \alpha m_1 n^2 c_1 \eta k_2 \right) _Z^5 + \left(2 k_3^2 n d_4^2 k_1 d_3 b_1 + k_3^2 d_3^2 d_4^2 k_1 b_1 + k_3^2 n^2 d_4^2 k_1 b_1 \right. \\
& + 2 k_3 d_3^2 d_4^2 k_2 c_1 - 2 k_3 \beta m_2 n^2 d_2 d_4 + 2 k_3 n^2 d_4^2 k_2 c_1 + k_3 \eta n^2 k_1 \alpha d_1 m_2 \\
& - 2 k_3 \alpha m_1 n^2 c_1 d_4 k_2 - 2 k_3 \alpha m_1 n^2 d_2 \eta k_2 - 2 k_3 \beta m_2 n^2 k_1 \eta b_1 \\
& + k_3 \alpha m_1 n^2 d_2 \beta m_2 - 2 k_3 \beta m_2 n d_2 d_3 d_4 + 4 k_3 d_3 d_4 k_2 d_2 \eta n \\
& + k_3 d_3 d_4 m_2 n \alpha r + k_3 \eta n^2 k_1 \alpha m_2 b_1 + 4 k_3 n^2 d_4 k_2 d_2 \eta - k_3 \alpha^2 m_1 n^2 m_2 r \\
& + k_3 n^2 d_4 m_2 \alpha r + 4 k_3 n d_4^2 k_2 c_1 d_3 - 2 k_3 \alpha m_1 n c_1 d_3 d_4 k_2 \\
& \left. + 2 k_3 \eta^2 n^2 k_2 k_1 b_1 + \beta^2 m_2^2 n^2 c_1 + \eta^2 n^2 c_1 k_2^2 - 2 \beta m_2 n^2 c_1 k_2 \eta \right) _Z^4 + \left(\right. \\
& - 2 k_3 \alpha m_1 n^2 d_2 d_4 k_2 + k_3 n^2 d_4 k_1 \alpha m_2 b_1 + k_3 n^2 d_4 k_1 \alpha d_1 m_2 \\
& + 4 k_3 n^2 d_4 k_2 k_1 \eta b_1 + 2 k_3 n^2 d_4^2 k_2 d_2 + 2 k_3 d_3^2 d_4^2 k_2 d_2 \\
& - 2 k_3 \alpha m_1 n d_2 d_3 d_4 k_2 - 2 k_3 \beta m_2 n k_1 d_3 d_4 b_1 - 2 k_3 \beta m_2 n^2 k_1 d_4 b_1 \\
& + 4 k_3 n d_4^2 k_2 d_2 d_3 + 4 k_3 d_3 d_4 k_2 k_1 \eta n b_1 + k_3 d_3 d_4 k_1 \alpha m_2 n b_1 \\
& + k_3 d_3 d_4 k_1 \alpha d_1 m_2 n + \beta^2 m_2^2 n^2 d_2 - \beta m_2^2 n^2 \alpha r + 2 n^2 d_4 c_1 k_2^2 \eta + \eta^2 n^2 d_2 \\
& k_2^2 - \alpha m_1 n^2 c_1 k_2^2 \eta + \eta n^2 k_2 m_2 \alpha r - 2 \beta m_2 n c_1 k_2 d_3 d_4 - 2 \beta m_2 n^2 c_1 k_2 d_4 \\
& \left. - 2 \beta m_2 n^2 d_2 k_2 \eta + 2 d_3 d_4 c_1 k_2^2 \eta n + \alpha m_1 n^2 c_1 k_2 \beta m_2 \right) _Z^3 + \left(2 k_3 n^2 \right. \\
& d_4^2 k_2 k_1 b_1 + 4 k_3 n d_4^2 k_2 k_1 d_3 b_1 + 2 k_3 d_3^2 d_4^2 k_2 k_1 b_1 + n^2 d_4^2 c_1 k_2^2 + d_3^2 d_4^2 c_1 k_2^2 \\
& - \alpha m_1 n^2 c_1 k_2^2 d_4 - \alpha m_1 n^2 d_2 k_2^2 \eta - \alpha^2 m_1 n^2 m_2 r k_2 - 2 \beta m_2 n^2 d_2 k_2 d_4 - \beta \\
& m_2^2 n^2 k_1 \alpha b_1 - \beta m_2^2 n^2 k_1 \alpha d_1 + d_3 d_4 k_2 m_2 n \alpha r + n^2 d_4 k_2 m_2 \alpha r + 2 d_3 d_4 d_2 \\
& k_2^2 \eta n + \beta^2 m_2^2 n^2 k_1 b_1 + \eta^2 n^2 k_1 b_1 k_2^2 + 2 n d_4^2 c_1 k_2^2 d_3 + 2 n^2 d_4 d_2 k_2^2 \eta \\
& \left. - 2 \beta m_2 n^2 k_1 \eta b_1 k_2 + \alpha m_1 n^2 d_2 k_2 \beta m_2 - \alpha m_1 n c_1 k_2^2 d_3 d_4 \right. \\
& \left. - 2 \beta m_2 n d_2 k_2 d_3 d_4 + \eta n^2 k_2 k_1 \alpha d_1 m_2 + \eta n^2 k_2 k_1 \alpha m_2 b_1 \right) _Z^2 + \left(n^2 \right. \\
& d_4^2 d_2 k_2^2 + d_3^2 d_4^2 d_2 k_2^2 - \alpha m_1 n^2 d_2 k_2^2 d_4 + 2 n^2 d_4 k_1 \eta b_1 k_2^2 + 2 n d_4^2 d_2 k_2^2 d_3 \\
& - 2 \beta m_2 n k_1 d_3 d_4 b_1 k_2 - \alpha m_1 n d_2 k_2^2 d_3 d_4 - 2 \beta m_2 n^2 k_1 d_4 b_1 k_2 \\
& + n^2 d_4 k_2 k_1 \alpha m_2 b_1 + n^2 d_4 k_2 k_1 \alpha d_1 m_2 + 2 d_3 d_4 k_1 \eta n b_1 k_2^2 \\
& \left. + d_3 d_4 k_2 k_1 \alpha m_2 n b_1 + d_3 d_4 k_2 k_1 \alpha d_1 m_2 n \right) _Z + 2 n d_4^2 k_1 d_3 b_1 k_2^2 + n^2 \\
& \left. d_4^2 k_1 b_1 k_2^2 + d_3^2 d_4^2 k_1 b_1 k_2^2 \right\}
\end{aligned}$$

Lampiran 2: Perhitungan Penentuan Nilai Y dengan Parameter I

> restart : with(linalg) : with(LinearAlgebra) :

> r := 1; d[1] := 0.1; b[1] := 1; c[1] := 1; m[1] := 0.6; k[1] := 1; d[2] := 0.06; alpha
:= 0.6; n := 2; d[3] := 1; d[4] := 0.3; m[2] := 0.5; k[2] := 0.5; k[3] := 1; beta
:= 1.1; eta := 0.1;

r := 1

d₁ := 0.1

b₁ := 1

c₁ := 1

m₁ := 0.6

k₁ := 1

d₂ := 0.06

alpha := 0.6

n := 2

d₃ := 1

d₄ := 0.3

m₂ := 0.5

k₂ := 0.5

k₃ := 1

beta := 1.1

eta := 0.1

>

$$\begin{aligned}
 H := & \left(\alpha m_1 Y \left(c_1 Y d_4 k_2 + c_1 Y^3 d_4 k_3 - \left(m_2 n \left(-r b_1 + b_1 c_1 Y + b_1 d_2 + d_1 c_1 Y \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + d_1 d_2 \right) \alpha Y d_4 \left(k_2 + k_3 Y^2 \right) \right) \right) / \left(\alpha Y m_2 n b_1 + \alpha d_1 Y m_2 n - \beta m_2 Y n b_1 \right. \\
 & \left. + n d_4 b_1 k_2 + n d_4 b_1 k_3 Y^2 + d_3 d_4 b_1 k_2 + d_3 d_4 b_1 k_3 Y^2 + \eta Y n b_1 k_2 \right. \\
 & \left. + \eta Y^3 n b_1 k_3 \right) + d_2 d_4 k_2 + d_2 d_4 k_3 Y^2 \left. \right) n \left/ \left(\begin{array}{l} d_4^2 \left(k_2 + k_3 Y^2 \right) b_1 \left[k_1 \right. \right. \\ \left. \left. \left. \left(\alpha Y m_2 n b_1 + \alpha d_1 Y m_2 n - \beta m_2 Y n b_1 + n d_4 b_1 k_2 + n d_4 b_1 k_3 Y^2 \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + d_3 d_4 b_1 k_2 + d_3 d_4 b_1 k_3 Y^2 + \eta Y n b_1 k_2 + \eta Y^3 n b_1 k_3 \right) + d_2 d_4 k_2 \right. \right. \\ \left. \left. \left. + d_2 d_4 k_3 Y^2 \right) \right) \right) \right) + \frac{\beta m_2 Y n}{d_4 \left(k_2 + k_3 Y^2 \right)} - n - d_3 - \frac{\eta Y n}{d_4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H := & \left(8.000000000 \ Y \left(0.15 \ Y + 0.3 \ Y^3 - \frac{0.180 \ (-0.934 + 1.1 \ Y) \ Y \ (0.5 + Y^2)}{-0.340 \ Y + 0.45 + 0.9 \ Y^2 + 0.2 \ Y^3} \right. \right. \\
& \left. \left. + 0.0090 + 0.018 \ Y^2 \right) \right) / \left((0.5 + Y^2) \left(1 \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{0.5 + Y^2} \left(3.333333333 \ Y \left(0.15 \ Y + 0.3 \ Y^3 \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \frac{0.180 \ (-0.934 + 1.1 \ Y) \ Y \ (0.5 + Y^2)}{-0.340 \ Y + 0.45 + 0.9 \ Y^2 + 0.2 \ Y^3} + 0.0090 + 0.018 \ Y^2 \right) \right) \right) \\
& \left. + \frac{3.666666667 \ Y}{0.5 + Y^2} - 3 - 0.666666667 \ Y \right)
\end{aligned}$$

> solve({H}, {Y});

$$\begin{aligned}
& \{Y = 0.6542974278 \}, \{Y = 0.9303637753 \}, \{Y = 0.7247695919 + 1.050661573 \ I\}, \{Y = \\
& -0.0008828126358 + 0.5598955477 \ I\}, \{Y = -2.924597904 \}, \{Y = \\
& -5.567836858 \}, \{Y = -0.0008828126358 - 0.5598955477 \ I\}, \{Y = 0.7247695919 \\
& - 1.050661573 \ I\}
\end{aligned}$$

Lampiran 3: Perhitungan Penentuan Nilai Y dengan Parameter II

> `restart : with(linalg) : with(LinearAlgebra) :`

> `r := 1; d[1] := 0.1; b[1] := 1; c[1] := 1; m[1] := 0.6; k[1] := 1; d[2] := 0.06; alpha
:= 0.6; n := 2; d[3] := 1; d[4] := 0.3; m[2] := 0.6; k[2] := 0.5; k[3] := 1; beta
:= 1.1; eta := 0.1;`

`r := 1`

`d1 := 0.1`

`b1 := 1`

`c1 := 1`

`m1 := 0.6`

`k1 := 1`

`d2 := 0.06`

`alpha := 0.6`

`n := 2`

`d3 := 1`

`d4 := 0.3`

`m2 := 0.6`

`k2 := 0.5`

`k3 := 1`

`beta := 1.1`

`eta := 0.1`

>

$$H := \left(\alpha m_1 Y \left(c_1 Y d_4 k_2 + c_1 Y^3 d_4 k_3 - \left(m_2 n \left(-r b_1 + b_1 c_1 Y + b_1 d_2 + d_1 c_1 Y + d_1 d_2 \right) \alpha Y d_4 \left(k_2 + k_3 Y^2 \right) \right) \right) \right) / \left(\alpha Y m_2 n b_1 + \alpha d_1 Y m_2 n - \beta m_2 Y n b_1 + n d_4 b_1 k_2 + n d_4 b_1 k_3 Y^2 + d_3 d_4 b_1 k_2 + d_3 d_4 b_1 k_3 Y^2 + \eta Y n b_1 k_2 + \eta Y^3 n b_1 k_3 \right) + d_2 d_4 k_2 + d_2 d_4 k_3 Y^2 \Bigg) / \left(d_4^2 \left(k_2 + k_3 Y^2 \right) b_1 \left(k_1 + \frac{1}{d_4 \left(k_2 + k_3 Y^2 \right) b_1} \left(Y \left(c_1 Y d_4 k_2 + c_1 Y^3 d_4 k_3 - \left(m_2 n \left(-r b_1 + b_1 c_1 Y + b_1 d_2 + d_1 c_1 Y + d_1 d_2 \right) \alpha Y d_4 \left(k_2 + k_3 Y^2 \right) \right) \right) \right) / \left(\alpha Y m_2 n b_1 + \alpha d_1 Y m_2 n - \beta m_2 Y n b_1 + n d_4 b_1 k_2 + n d_4 b_1 k_3 Y^2 + d_3 d_4 b_1 k_2 + d_3 d_4 b_1 k_3 Y^2 + \eta Y n b_1 k_2 + \eta Y^3 n b_1 k_3 \right) + d_2 d_4 k_2 + d_2 d_4 k_3 Y^2 \right) \right) + \frac{\beta m_2 Y n}{d_4 \left(k_2 + k_3 Y^2 \right)} - n - d_3 - \frac{\eta Y n}{d_4} \right)$$

$$\begin{aligned}
 H := & \left(8.000000000 \ Y \left(0.15 \ Y + 0.3 \ Y^3 - \frac{0.216 \ (-0.934 + 1.1 \ Y) \ Y \ (0.5 + Y^2)}{-0.428 \ Y + 0.45 + 0.9 \ Y^2 + 0.2 \ Y^3} \right. \right. \\
 & \left. \left. + 0.0090 + 0.018 \ Y^2 \right) \right) / \left((0.5 + Y^2) \left(1 \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{0.5 + Y^2} \left(3.333333333 \ Y \left(0.15 \ Y + 0.3 \ Y^3 \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - \frac{0.216 \ (-0.934 + 1.1 \ Y) \ Y \ (0.5 + Y^2)}{-0.428 \ Y + 0.45 + 0.9 \ Y^2 + 0.2 \ Y^3} + 0.0090 + 0.018 \ Y^2 \right) \right) \right) \\
 & \left. + \frac{4.400000000 \ Y}{0.5 + Y^2} - 3 - 0.666666667 \ Y \right)
 \end{aligned}$$

> solve({H}, {Y});

$$\begin{aligned}
 & \{Y = 0.4060283114 \}, \{Y = 1.465547186 \}, \{Y = 0.7548863420 + 1.021020278 \ I\}, \{Y \\
 & = 0.009337753344 + 0.5427448251 \ I\}, \{Y = -3.119452780 \}, \{Y = \\
 & -5.740570908 \}, \{Y = 0.009337753344 - 0.5427448251 \ I\}, \{Y = 0.7548863420 \\
 & - 1.021020278 \ I\}
 \end{aligned}$$

Lampiran 4: Perhitungan Penentuan Nilai Y dengan Parameter III

> `restart : with(linalg) : with(LinearAlgebra) :`

> `r := 1; d[1] := 0.1; b[1] := 1; c[1] := 1; m[1] := 0.6; k[1] := 1; d[2] := 0.06; alpha := 0.6; n := 2; d[3] := 1; d[4] := 0.3; m[2] := 0.7; k[2] := 0.5; k[3] := 1; beta := 1.1; eta := 0.1;`

`r := 1`
`d1 := 0.1`
`b1 := 1`
`c1 := 1`
`m1 := 0.6`
`k1 := 1`
`d2 := 0.06`
`alpha := 0.6`
`n := 2`
`d3 := 1`
`d4 := 0.3`
`m2 := 0.7`
`k2 := 0.5`
`k3 := 1`
`beta := 1.1`
`eta := 0.1`

>
$$H := \left(\alpha m_1 Y \left(c_1 Y d_4 k_2 + c_1 Y^3 d_4 k_3 - \left(m_2 n \left(-r b_1 + b_1 c_1 Y + b_1 d_2 + d_1 c_1 Y + d_1 d_2 \right) \alpha Y d_4 \left(k_2 + k_3 Y^2 \right) \right) \right) / \left(\alpha Y m_2 n b_1 + \alpha d_1 Y m_2 n - \beta m_2 Y n b_1 + n d_4 b_1 k_2 + n d_4 b_1 k_3 Y^2 + d_3 d_4 b_1 k_2 + d_3 d_4 b_1 k_3 Y^2 + \eta Y n b_1 k_2 + \eta Y^3 n b_1 k_3 \right) + d_2 d_4 k_2 + d_2 d_4 k_3 Y^2 \right) n \Bigg/ \left(d_4^2 \left(k_2 + k_3 Y^2 \right) b_1 \begin{pmatrix} k_1 \\ \end{pmatrix} \right. \\ \left. + \frac{1}{d_4 \left(k_2 + k_3 Y^2 \right) b_1} \left(Y \left(c_1 Y d_4 k_2 + c_1 Y^3 d_4 k_3 - \left(m_2 n \left(-r b_1 + b_1 c_1 Y + b_1 d_2 + d_1 c_1 Y + d_1 d_2 \right) \alpha Y d_4 \left(k_2 + k_3 Y^2 \right) \right) \right) / \left(\alpha Y m_2 n b_1 + \alpha d_1 Y m_2 n - \beta m_2 Y n b_1 + n d_4 b_1 k_2 + n d_4 b_1 k_3 Y^2 + d_3 d_4 b_1 k_2 + d_3 d_4 b_1 k_3 Y^2 + \eta Y n b_1 k_2 + \eta Y^3 n b_1 k_3 \right) + d_2 d_4 k_2 + d_2 d_4 k_3 Y^2 \right) \right) \right) + \frac{\beta m_2 Y n}{d_4 \left(k_2 + k_3 Y^2 \right)} - n - d_3 - \frac{\eta Y n}{d_4}$$

$$\begin{aligned}
H := & \left(8.000000000 \ Y \left(0.15 \ Y + 0.3 \ Y^3 - \frac{0.252 \ (-0.934 + 1.1 \ Y) \ Y \ (0.5 + Y^2)}{-0.516 \ Y + 0.45 + 0.9 \ Y^2 + 0.2 \ Y^3} \right. \right. \\
& \left. \left. + 0.0090 + 0.018 \ Y^2 \right) \right) / \left((0.5 + Y^2) \left(1 \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{0.5 + Y^2} \left(3.333333333 \ Y \left(0.15 \ Y + 0.3 \ Y^3 \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \frac{0.252 \ (-0.934 + 1.1 \ Y) \ Y \ (0.5 + Y^2)}{-0.516 \ Y + 0.45 + 0.9 \ Y^2 + 0.2 \ Y^3} + 0.0090 + 0.018 \ Y^2 \right) \right) \right) \\
& \left. + \frac{5.133333333 \ Y}{0.5 + Y^2} - 3 - 0.666666667 \ Y \right)
\end{aligned}$$

> solve({H}, {Y});

$$\begin{aligned}
& \{Y = 0.3204733251 \}, \{Y = 1.796440652 \}, \{Y = 0.7959861736 + 0.9895914018 \ I\}, \{Y \\
& = 0.01992694650 + 0.5282621527 \ I\}, \{Y = -3.303991014 \}, \{Y = \\
& -5.904749203 \}, \{Y = 0.01992694650 - 0.5282621527 \ I\}, \{Y = 0.7959861736 \\
& - 0.9895914018 \ I\}
\end{aligned}$$

Lampiran 5: M-File untuk Simulasi Kasus I

```

clc; clear all; close all;
format short

initial_X=0.5;
initial_H=0.5;
initial_Z=0.5;
initial_W=0.5;
ymax=1;

% Simulasi 1
t1=200;
[t,Y]=ode45(@simulasiTIKA1,[0:0.01:t1],[initial_X;initial_H;initial_Z;initial_W]);
Xsol=Y(:,1); Hsol=Y(:,2); Zsol=Y(:,3); Wsol=Y(:,4);

figure(1);
title('Simulasi Model Ketika m2=0,5');hold on;
plot(t,Xsol,'b-.','LineWidth',2);
plot(t,Hsol,'k-.','LineWidth',2);
plot(t,Zsol,'g-.','LineWidth',2);
plot(t,Wsol,'r-.','LineWidth',2);hold off;
grid on; xlabel('Time');
ylabel('Population');
axis([-0.01 200 -0.01 ymax]);
legend('Prey Remaja','Prey Dewasa','Predator Remaja','Predator Dewasa');

function modell=simulasiTIKA1(~,Y)
modell=zeros(4,1);
X=Y(1); H=Y(2); Z=Y(3); W=Y(4);
r=1; b=1; d=0.1; m=0.6; k=1;
c=1; a=0.5;
u=0.5;
l=1;
v=0.06;
n=2;
p=1;
s=0.1;
q=0.3;
alpha=0.6;
beta=1.1;

dK1=(r*H) - (b*X) - (d*X) - ((m*X*W)/(k+X));
dK2=(b*X) - (c*H^2) - ((a*H*W)/(u+(l*H^2))) - (v*H);
dK3=((alpha*m*X*W)/(k+X)) + ((beta*a*H*W)/(u+(l*H^2))) - (n*Z) - (p*Z) - (s*H*W);
dK4=(n*Z) - (q*W);

modell=[dK1;dK2;dK3;dK4];
end

```

Lampiran 6: M-File untuk Simulasi Kasus II

```

clc; clear all; close all;
format short

initial_X=0.5;
initial_H=0.5;
initial_Z=0.5;
initial_W=0.5;
ymax=1;

% Simulasi 1
t1=200;
[t,Y]=ode45(@simulasiTIKA1,[0:0.01:t1],[initial_X;initial_H;initial_Z;initial_W]);
Xsol=Y(:,1); Hsol=Y(:,2); Zsol=Y(:,3); Wsol=Y(:,4);

figure(1);
title('Simulasi Model Ketika m2=0,6');hold on;
plot(t,Xsol,'b-.','LineWidth',2);
plot(t,Hsol,'k-.','LineWidth',2);
plot(t,Zsol,'g-.','LineWidth',2);
plot(t,Wsol,'r-.','LineWidth',2);hold off;
grid on; xlabel('Time');
ylabel('Population');
axis([-0.01 200 -0.01 ymax]);
legend('Prey Remaja','Prey Dewasa','Predator Remaja','Predator Dewasa');

function modell=simulasiTIKA1(~,Y)
modell=zeros(4,1);
X=Y(1); H=Y(2); Z=Y(3); W=Y(4);
r=1; b=1; d=0.1; m=0.6; k=1;
c=1; a=0.6;
u=0.5;
l=1;
v=0.06;
n=2;
p=1;
s=0.1;
q=0.3;
alpha=0.6;
beta=1.1;

dK1=(r*H) - (b*X) - (d*X) - ((m*X*W)/(k+X));
dK2=(b*X) - (c*H^2) - ((a*H*W)/(u+(l*H^2))) - (v*H);
dK3=((alpha*m*X*W)/(k+X)) + ((beta*a*H*W)/(u+(l*H^2))) - (n*Z) - (p*Z) - (s*H*W);
dK4=(n*Z) - (q*W);

modell=[dK1;dK2;dK3;dK4];
end

```

Lampiran 7: M-File untuk Simulasi Kasus III

```

clc; clear all; close all;
format short

initial_X=0.5;
initial_H=0.5;
initial_Z=0.5;
initial_W=0.5;
ymax=1;

% Simulasi 1
t1=200;
[t,Y]=ode45(@simulasiTIKA1,[0:0.01:t1],[initial_X;initial_H;initial_Z;initial_W]);
Xsol=Y(:,1); Hsol=Y(:,2); Zsol=Y(:,3); Wsol=Y(:,4);

figure(1);
title('Simulasi Model Ketika m2=0,7');hold on;
plot(t,Xsol,'b-.','LineWidth',2);
plot(t,Hsol,'k-.','LineWidth',2);
plot(t,Zsol,'g-.','LineWidth',2);
plot(t,Wsol,'r-.','LineWidth',2);hold off;
grid on; xlabel('Time');
ylabel('Population');
axis([-0.01 200 -0.01 ymax]);
legend('Prey Remaja','Prey Dewasa','Predator Remaja','Predator Dewasa');

function model1=simulasiTIKA1(~,Y)
model1=zeros(4,1);
X=Y(1); H=Y(2); Z=Y(3); W=Y(4);
r=1; b=1; d=0.1; m=0.6; k=1;
c=1; a=0.7;
u=0.5;
l=1;
v=0.06;
n=2;
p=1;
s=0.1;
q=0.3;
alpha=0.6;
beta=1.1;

dK1=(r*H)-(b*X)-(d*X)-((m*X*W)/(k+X));
dK2=(b*X)-(c*H^2)-((a*H*W)/(u+(l*H^2)))-(v*H);
dK3=((alpha*m*X*W)/(k+X))+((beta*a*H*W)/(u+(l*H^2)))-(n*Z)-(p*Z)-(s*H*W);
dK4=(n*Z)-(q*W);

model1=[dK1;dK2;dK3;dK4];
end

```

Lampiran 8: M-File untuk Simulasi Dimana Menunjukkan Perlu Adanya Bifurkasi

```

clc; clear all; close all;
format short

initial_X=0.5;
initial_H=0.5;
initial_Z=0.5;
initial_W=0.5;
ymax=1;

% Simulasi 1
t1=200;
[t,Y]=ode45(@simulasiTIKA1,[0:1:t1],[initial_X;initial_H;initial_Z
;initial_W]);
Xsol=Y(:,1); Hsol=Y(:,2); Zsol=Y(:,3); Wsol=Y(:,4);

figure(1);
title('Simulasi Model Ketika m2=0,7');hold on;
plot(t,Xsol,'b-.','LineWidth',2);
plot(t,Hsol,'k-.','LineWidth',2);
plot(t,Zsol,'g-.','LineWidth',2);
plot(t,Wsol,'r-.','LineWidth',2);hold off;
grid on; xlabel('Time');
ylabel('Population');
axis([-0.01 200 -0.01 ymax]);
legend('Prey Remaja','Prey Dewasa','Predator Remaja','Predator
Dewasa');

function model1=simulasiTIKA1(~,Y)
model1=zeros(4,1);
X=Y(1); H=Y(2); Z=Y(3); W=Y(4);
r=1.6; b=1; d=0.1; m=0.8; k=1;
c=1; a=0.8;
u=0.5;
l=1;
v=0.06;
n=2;
p=1;
s=0.1;
q=0.3;
alpha=0.3;
beta=1;

dK1=(r*H) - (b*X) - (d*X) - ((m*X*W)/(k+X));
dK2=(b*X) - (c*H^2) - ((a*H*W)/(u+(l*H^2))) - (v*H);
dK3=((alpha*m*X*W)/(k+X)) + ((beta*a*H*W)/(u+(l*H^2))) - (n*Z) - (p*Z) -
(s*H*W);
dK4=(n*Z) - (q*W);

model1=[dK1;dK2;dK3;dK4];
end

```

RIWAYAT HIDUP



Hayati Fi Rohmatika, biasa dipanggil Tika, lahir pada tanggal 21 Maret 1998 di Kabupaten Lamongan. Penulis tinggal di Kecamatan Paciran, Kabupaten Lamonga. Anak pertama dari empat bersaudara dari pasangan Bapak Abdul Salam dan Ibu Sittin.

Penulis menempuh pendidikan dasar di MI Al-Muhtadi Sendangagung Paciran dan lulus pada tahun 2010, kemudian pendidikan menengah pertama di MTs Al-Muhtadi Sendangagung Paciran dan lulus pada tahun 2013. Kemudian melanjutkan pendidikan menengah atas di MA Tarbiyatut Tholabah Kranji Paciran dan lulus pada tahun 2016. Tahun 2018 penulis melanjutkan studi S1 di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang diterima pada program studi matematika, Fakultas Sains dan Teknologi. Selama menjadi mahasiswa, penulis cukup berperan aktif pada komunitas tahfidz dan Bahasa arab matematika UIN Malang (Al-Farazi).

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertandatangan dibawah ini:

Nama : Hayati Fi Rohmatika.
NIM : 18610064.
Program Studi : Matematika.
Fakultas : Sains dan Teknologi.
Judul Skripsi : Analisis Model *Prey-Predator* Dengan Struktur Umur
Dan Perilaku *Anti-Predator*.

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 28 Desember 2022
Yang membuat pernyataan,



Hayati Fi Rohmatika
NIM. 18610064