# EKIVALENSI OPERATOR ISOMETRI DENGAN OPERATOR UNITER DI RUANG HILBERT

**SKRIPSI**

**OLEH**
**LYLA LUTVIA OCTAVIONA**
**NIM. 18610115**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA**
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM**
**MALANG**
**2022**

# EKIVALENSI OPERATOR ISOMETRI DENGAN OPERATOR UNITER DI RUANG HILBERT

**SKRIPSI**

**Diajukan kepada**
**Fakultas Sains dan Teknologi**
**Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang**
**untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam**
**Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh**
**LYLA LUTVIA OCTAVIONA**
**NIM. 18610115**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA**
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM**
**MALANG**
**2022**

**EKIVALENSI OPERATOR ISOMETRI DENGAN OPERATOR UNITER DI RUANG HILBERT**

**SKRIPSI**

**Oleh**
**Lyla Lutvia Octaviona**
**NIM. 18610115**

Telah Disetujui untuk Diuji

Malang, 23 Desember 2022

| Dosen Pembimbing I | Dosen Pembimbing II |
|---|---|
| Dr. Elly Susanti, M.Sc | Juhari, M.Si |
| NIP. 19741129 200012 2 005 | NIDT. 19840209 20160801 1 055 |

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

**EKIVALENSI OPERATOR ISOMETRI DENGAN OPERATOR UNITER DI RUANG HILBERT**

**SKRIPSI**

**Oleh**
**Lyla Lutvia Octaviona**
**NIM. 18610115**

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Malang, 27 Desember 2022

| | | |
|---|---|---|
| Ketua Penguji | : Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D | ............................ |
| Anggota Penguji 1 | : Intan Nisfulaila, M.Si | ............................ |
| Anggota Penguji 2 | : Dr. Elly Susanti, M.Sc | ............................ |
| Anggota Penguji 3 | : Juhari, M.Si | ............................ |

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, S.Pd, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

# PERNYATAN KEASLIAN TULISAN

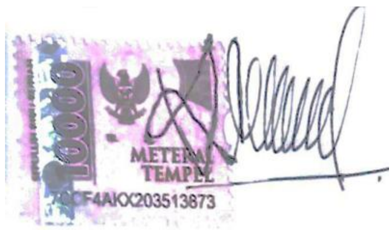
Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

| | |
|---|---|
| Nama | : Lyla Lutvia Octaviona |
| NIM | : 18610115 |
| Program Studi | : Matematika |
| Judul | : Ekivalensi Operator Isometri dengan Operator Uniter di Ruang Hilbert |

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila dikemudian hari terbukti skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 21 Desember 2022

Yang membuat pernyataan,



Lyla Lutvia Octaviona

NIM. 18610115

# MOTO

“ Day by day we have to be better and better”

## PERSEMBAHAN

*Alhamdulillah*, puji dan syukur atas kehadirat Allah SWT dengan segala limpahan rahmat serta karunia-Nya. Skripsi ini penulis persembahkan untuk Ayah Faizal Nur Efendi dan Ibu Siti Nur Kholisah yang senantiasa mendoakan kelancaran dan kemudahan dalam menyusun skripsi ini. Adikku Aliyuddin Alhuda dan Alif Al-Abasya yang selalu memberikan motivasi dan dukungan kepada penulis. Kakek dan Nenek yang senantiasa memberikan nasehat dan dukungan kepada penulis. Teman-teman seperjuangan yang selalu memberikan motivasi untuk bangkit dan berjuang bersama.

# KATA PENGANTAR

Puji dan syukur atas kehadirat Allah SWT atas segala limpahan rahmat serta karunia-Nya sehingga skripsi yang berjudul "Ekivalensi Operator Isometri dengan Operator Uniter di Ruang Hilbert" ini bisa terselesaikan dengan baik.

Skripsi ini bertujuan untuk memenuhi tugas akhir program studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Penulis menyadari terdapat kekurangan dalam menyusun penelitian ini. Dengan hormat penulis menghaturkan terima kasih kepada setiap inidividu yang senantiasa memberikan panduan dan perubahan, khususnya kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd, M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Dr. Elly Susanti, S.Pd, M.Sc, selaku dosen pembimbing I dengan sabar telah memberikan panduan dan bimbingan serta nasehat untuk penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi dengan baik.
5. Juhari, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang juga memberikan arahan dan bimbingan serta nasehat untuk penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
6. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
7. Ayah, ibu, adik, serta semua keluarga yang telah memberikan doa, motivasi, serta dukungan kepada penulis.

8. Seluruh mahasiswa angkatan 2018 yang telah memberikan motivasi dan dukungan serta informasi kepada penulis selama menyelesaikan skripsi ini.

Semoga skripsi ini bisa bermanfaat untuk seluruh pihak yang membaca penelitian ini.

Malang, 21 Desember 2022

Penulis

# DAFTAR ISI


**HALAM JUDUL** ........................................ **i**
**HALAMAN PENGAJUAN** ........................................ **ii**
**HALAMAN PERSETUJUAN** ........................................ **iii**
**HALAMAN PENGESAHAN** ........................................ **iv**
**PERNYATAN KEASLIAN TULISAN** ........................................ **iv**
**MOTO** ........................................ **vi**
**PERSEMBAHAN** ........................................ **vii**
**KATA PENGANTAR** ........................................ **viii**
**DAFTAR ISI** ........................................ **x**
**DAFTAR SIMBOL** ........................................ **xi**
**ABSTRAK** ........................................ **xiii**
**ABSTRACT** ........................................ **xiv**
**مستخلص البحث** ........................................ **xv**
**BAB I PENDAHULUAN** ........................................ **1**
1.1 Latar Belakang ........................................ 1
1.2 Rumusan Masalah ........................................ 5
1.3 Tujuan Penelitian ........................................ 5
1.4 Manfaat Penelitian ........................................ 5
1.5 Batasan Masalah ........................................ 6
1.6 Definisi Istilah ........................................ 6
**BAB II KAJIAN TEORI** ........................................ **8**
2.1 Teori Pendukung ........................................ 8
2.1.1 Keterbatasan ........................................ 8
2.1.2 Ruang Vektor (*Vector Space*) ........................................ 9
2.1.3 Ruang Bernorma (*Norm Space*) ........................................ 18
2.1.4 Kekonvergenan dan Kelengkapan ........................................ 21
2.1.5 Ruang Hasil Kali Dalam (*Inner – Product Space*) ........................................ 23
2.1.6 Ortogonalitas dan Ortonormalitas ........................................ 31
2.1.7 Ruang Hilbert (*Hilbert Space*) ........................................ 36
2.1.8 Operator *Linear* ........................................ 38
2.2 Kajian Integrasi Operator *Linear* dalam Al – Qur’an ........................................ 62
2.3. Ekivalensi Operator Isometri dengan Operator Uniter pada Ruang Hilbert ........................................ 64
**BAB III METODE PENELITIAN** ........................................ **69**
3.1 Jenis Penelitian ........................................ 69
3.2 Tahapan Penelitian ........................................ 69
**BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN** ........................................ **71**
4.1 Ekivalensi Operator Isometri dengan Operator Uniter pada Ruang Hilbert 71
**BAB V KESIMPULAN DAN SARAN** ........................................ **82**
5.1 Kesimpulan ........................................ 82
5.2 Saran ........................................ 83
**DAFTAR PUSTAKA** ........................................ **84**
**RIWAYAT HIDUP** ........................................ **86**

## DAFTAR SIMBOL

| | |
|---|---|
| $T$ | : Operator *linear* |
| $T^*$ | : Operator *adjoint* |
| $I$ | : Operator identitas |
| $\mathbb{F}$ | : Lapangan |
| $\mathbb{R}$ | : Bilangan riil |
| $\mathbb{C}$ | : Bilangan kompleks |
| $B(\mathcal{H})$ | : Ruang fungsi terbatas |
| $B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ | : Ruang operator *linear* terbatas |
| $C[a, b]$ | : Ruang fungsi kontinu |
| $d(u, v)$ | : Jarak dari $u$ ke $v$ |
| $\|f\|$ | : Norm fungsi *linear* terbatas pada $f$ |
| $inf$ | : Infimum |
| $sup$ | : Supremum |
| $\|T\|$ | : *Norm* operator *linear* terbatas |
| $u$ | : Vektor $u$ |
| $-u$ | : Invers penjumlahan $u$ |
| $\|u\|$ | : Norm $u$ |
| $\langle u, v\rangle$ | : Hasil kali dalam $u$ dan $v$ |
| $\overline{\langle u, v\rangle}$ | : *Konjugate* $u$ dan $v$ |
| $\bar{\alpha}$ | : *Konjugate* dari $\alpha$ |
| $\in$ | : Anggota |

| | |
|---|---|
| $\forall$ | : Untuk setiap |
| $\exists$ | : Terdapat |
| $\rightarrow$ | : Konvergen ke |

# ABSTRAK

Octaviona, Lyla Lutvia. 2022. **Ekivalensi Operator Isometri dengan Operator Uniter di Ruang Hilbert.** Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Dr. Elly Susanti, M.Sc. (II) Juhari, M.Si.

**Kata Kunci:** operator, operator *linear*, ruang Hilbert, ruang *linear*, operator isometri, operator uniter.

Operator merupakan pemetaan dari ruang *linear* ke ruang *linear* yang lain atau ruang *linear* ke ruang *linear* yang sama. Operator *linear* pada ruang Hilbert dibagi menjadi 4 macam, yaitu operator *adjoint*, operator *self adjoint*, operator normal, dan operator uniter. Berdasarkan penelitian sebelumnya yang dikaji oleh Faridhatun Nashikah pada tahun 2011 menjelaskan jenis operator *linear* pada ruang Hilbert beserta sifat-sifatnya, namun pada operator uniter tidak dibuktikan secara detail. Pada buku berjudul "*Operators on Hilbert Space*" karya V.S. Sunder terdapat teorema isometri *versus* uniter. Pada teorema tersebut ditemukan ekivalensi operator isometri dengan operator uniter pada Ruang Hilbert. Sehingga penelitian ini membuktikan kembali teorema isometri *versus* uniter yang dipaparkan oleh V.S. Sunder. Langkah pertama yaitu menunjukkan bahwa operator $S \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ memenuhi kelima pernyataan ekivalen merupakan operator isometri. Langkah selanjutnya, menunjukkan bahwa operator isometri $S \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ memenuhi kelima pernyataan ekivalen disebut sebagai operator uniter. Berdasarkan pembuktian tersebut, ditemukan lima pernyataan ekivalen pada operator *linear* terbatas di ruang Hilbert merupakan isometri dan lima pernyataan ekivalen pada operator isometri di ruang Hilbert merupakan operator uniter.

# ABSTRACT

Octaviona, Lyla Lutvia. 2022. **The Equivalence of Isometric Operators with Uniter Operators in Hilbert Space.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (1) Dr. Elly Susanti, M.Sc. (II) Juhari, M.Si.

**Keywords**: Hilbert space, isometry operator, linear operator, linear space, operator, unitary operator.

Operator is a mapping from linear space to another linear space or linear space to same linear space. Linear operators in the Hilbert space are divided into 4 types, namely adjoint operators, self-adjoint operators, normal operators, and uniter operators. Previous research explained the types of linear operators in Hilbert spaces and their properties, but in uniter operators it was not proven in detail. A book called "Operators on Hilbert Space" by V.S. Sunder include a theorem of isometry versus uniter. In the theorem, the equivalence of the isometric operator with the uniter operator in the Hilbert space is found, so this study re-proves the isometry versus uniter theorem presented by V.S. Sunder. The first step is to show that the operator $S \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ satisfies all five equivalent statements of isometry operators. The next step, showing that the isometric operator $S \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$satisfies all five equivalent statements is referred to as the uniter operator. Based on this proof, it was found that the finite linear operator of Hilbert's space was equivalent to isometry and the equivalent isometric operator was referred to as the uniter operator.

## مستخلص البحث

اوكافيونا،ليلة لطفيا. ٢٠٢٢.**معادلة مشغلي متساوي القياس مع المشغلين الوحديين في مساحات هيليرت**. مقال، برنامج دراسة الرياضيات ، كلية العلوم و التكنولوجيا، جامعة مولانا مالك ابراهم مالنج. المشرفة الأولي (١) الدكتور إيلي سوسنتي، الماجستير المشرفة الأولي (١١) جوهري الماجستير الحكومية مالنج

**الكلمات الرئيسية**: المشغلون *(operator)* وعامل خطي الخطية *(operator linear)* ، فضاء هلبرت ، فضاء خطي.

التشغيل *(operator)* هي تعيينات من مساحة خطية إلى مساحة خطية أخرى أو مساحة خطية إلى نفس المساحة الخطية.. تنقسم المشغلات الخطية *(operator linear)* في فضاء هيلبرت إلى 4 أنواع ، وهي المشغلون المساعدون *(operator adjoint)* والمشغلون الذاتيون *(operator self adjoint)* والمشغلون العاديون *(operator normal)* والمشغلون الوحدويون *(operator uniter)* . تمت مراجعة الأبحاث السابقة بواسطة فريدهاتون ناسيكا (2011) يشرح المشغلين الخطيين المختلفين في مساحات هيلبرت وخصائصهم ، لكن المشغلين الوحدويين لم يتم إثباتهم بالتفصيل. بعد مزيد من التحليل ، وجد المؤلفون أن هاتين الخاصيتين مذكورتان أيضًا في نظرية متساوي القياس مقابل نظرية الوحدوية المدرجة في كتاب بعنوان "Operator in Hilbert Space" لـ V.S. Sunder. . في النظرية ، وجد أن عامل متساوي القياس يعادل العامل الوحدوي في فضاء هيلبرت. لذلك يثبت هذا البحث مرة أخرى نظرية متساوي القياس مقابل نظرية الوحدوية بواسطة V.S. Sunder. الخطوة الأولى تظهر ذلكالمشغل أو العامل *(operator)* $S \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$استيفاء جميع العبارات الخمسة المكافئة هو عامل متساوي القياس.الخطوة التالية،يُطلق على إظهار أن عامل التشغيل متساوي القياس جميع العبارات المكافئة الخمسة اسم المشغل الوحدوي. استنادًا إلى إثبات التكافؤ أعلاه ، وجد أن المشغلين الخطيين المحصورين في فضاء هيلبرت مكافئون للقياسات المتساوية وأن العوامل المتساوية المكافئة تسمى المشغلين الوحدويين..

# BAB I
# PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Analisis matematika merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang mengalami perkembangan dari waktu ke waktu. Perkembangan analisis matematika bermula dari analisis klasik kemudian berkembang menjadi analisis modern. Analisis klasik membahas mengenai sistem bilangan, konvergensi barisan dan deret, kekontinuan, pendiferensialan, serta pengintegralan. Sedangkan analisis modern membahas mengenai konsep bersifat abstrak pada konsep ruang. Salah satu cabang analisis modern yang dikaji adalah analisis fungsional. Analisis fungsional merupakan studi tentang ruang bernorma (Hidayani, 2002).

Ruang bernorma merupakan pengembangan dari ruang vektor. Ruang bernorma dapat diartikan sebagai ruang vektor dengan metrik atau jarak yang didefinisikan dengan norma. Pada ruang vektor, norma diartikan sebagai metrik atau jarak yang didefinisikan dengan norma.

Ruang vektor pada lapangan $\mathbb{F}$ adalah himpunan tak-kosong $V$ dilengkapi dengan dua fungsi, yaitu penjumlahan vektor yang memetakan $V \times V$ ke $V$ dinotasikan dengan $u + v$ untuk setiap $u, v \in V$ dan perkalian skalar riil yang memetakan $\mathbb{F} \times V$ ke $V$ dinotasikan dengan $\alpha x$ untuk setiap $u, v \in V$ dan $\alpha \in \mathbb{F}$ yang memenuhi sifat – sifat ruang vektor (Rynne & Youngson, 2008).

Ruang Hasil Kali Dalam (*Inner Product Space*) merupakan ruang *linear* $V$ dengan fungsi yang memetakan setiap anggota $V \times V$ ke suatu bilangan kompleks dan memenuhi sifat – sifat ruang hasil kali dalam. Ruang hasil kali dalam yang lengkap disebut ruang Hilbert.

Pemetaan dari ruang *linear* ke ruang *linear* yang lain atau ruang *linear* ke ruang *linear* yang sama disebut operator (Gunawan, 2015). Misalkan $X$ dan $Y$ adalah dua buah ruang vektor. Suatu operator $T : X \rightarrow Y$ dikatakan operator *linear*, jika untuk setiap $u, v \in X$ dan $\alpha \in F$ dimana $F$ adalah lapangan (*field*), maka berlaku dua kondisi, yaitu $T(u + v) = Tu + Tv$ dan $T(\alpha u) = \alpha Tu$ (Bishop & Bridges, 1985).

Operator *linear* yang terbatas pada ruang Hilbert dinamakan operator *linear* pada ruang Hilbert. Operator *linear* $T : X \rightarrow Y$ dikatakan terbatas jika terdapat konstanta $M \geq 0$ sehingga untuk setiap $u \in X$ berlaku $\|T(u)\| \leq M\|u\|$. Untuk $u \neq 0$, maka berlaku $m \geq \frac{\|T(u)\|}{\|u\|}$ sedemikian sehingga untuk setiap anggota $u \in X$ pada himpunan $\left\{m : m \geq \frac{\|T(u)\|}{\|u\|}, u \neq 0\right\}$ yang terbatas di bawah dan di atas, maka diperoleh $\|T\| = sup\left\{\frac{\|T(u)\|}{\|u\|}, u \neq 0\right\}$ dengan $\|T\|$ merupakan *norm* pada operator $T$. Jika $Y = \{0\}$, maka $\|T\|$ didefinisikan dengan $\|T\| = 0$. Dengan demikian, berdasarkan persamaan $\|T(u)\| \leq M\|u\|$ untuk setiap $u \in X$ diperoleh $\|T(u)\| \geq \|T\|\|u\|$dengan $\|T\| = M$ (Kreyszig, 1978).

Himpunan semua operator *linear* terbatas dari $X$ ke $Y$ dinotasikan sebagai $B(X, Y\ )$. Pada kasus $X = Y,\ B(X, X)$ dituliskan $B(X)$ atau $B(Y)$ (Gunawan, 2015). Terdapat beberapa jenis dari operator *linear* pada ruang Hilbert, diantaranya operator *adjoint*, operator *self adjoint*, operator normal, dan operator uniter.

Operator *linear* dapat disebut sebagai transformasi *linear*. Transformasi diartikan sebagai perubahan. Pembahasan mengenai operator *linear* sering kali dihubungkan dengan konsep perpindahan (Syafnuri, Netriwatii, & Pratiwi, 2019).

Sebagaimana termuat dalam Al – Qur'an surah al – Luqman ayat 29 sebagai berikut (KEMENAG, 2022):

*"Tidakkah kamu memperhatikan, bahwa Sesungguhnya Allah memasukkan malam ke dalam siang dan memasukkan siang ke dalam malam dan Dia tundukkan matahari dan bulan masing-masing berjalan sampai kepada waktu yang ditentukan, dan Sesungguhnya Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan".*

Ayat Al – Qur'an tersebut mengajarkan kepada umat islam tentang kebesaran Allah subhanahu wata'ala. Hal ini dianalogikan dengan pergantian siang dan malam. Dia memasukkan malam kepada siang dan memasukkan siang ke dalam malam. Hal ini sebagaimana jika salah satu diantara siang dan malam masuk, maka yang lain akan pergi. Begitupun juga Allah subhanahu wa ta'ala dalam menundukkan matahari dan bulan untuk kepentingan manusia serta digunakan untuk mengambil pelajaran dan manfaat dari kebesaran Allah subhanahu wa ta'ala.

Pergantian cahaya pada siang dan malam merupakan perlakuan matahari dan bulan secara tepat mengenai bumi. Perlakuan disini diartikan sebagai operasi. Bumi diibaratkan sebagai ruang vektor yang dikenai perlakuan (operasi) dari suatu fungsi cahaya matahari dan fungsi cahaya bulan dimana masing – masing dari cahaya matahari dan cahaya bulan sama-sama mentransformasikan cahayanya terhadap bumi. Cahaya bulan diartikan sebagai pancaran radiasi matahari, sehingga perlakuan (operasi) sinar yang diberikan oleh matahari terhadap bumi berlaku juga pada bulan terhadap bumi (Hawin, 2014).

Pada penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh Gunawan (2015) mengkaji tentang salah satu jenis operator *linear* pada ruang Hilbert, yaitu operator *self adjoint*. Penelitian tersebut lebih difokuskan pada pembuktian mengenai karakteristik operator *self adjoint* pada ruang Hilbert. Pembuktian mengenai operator *self adjoint* pada ruang Hilbert lebih ditekankan pada definisi, sifat-sifat aljabar serta pernyataan ekuivalen yang termuat dalam operator *self adjoint* pada ruang Hilbert.

Selanjutnya, Nopiani, dkk. (2018) menyelidiki mengenai salah satu jenis operator *linear* pada ruang Hilbert, yaitu operator normal. Penelitian yang dilakukan oleh Nopiani dkk. lebih ditekankan pada pembuktian mengenai karakteristik operator normal pada ruang Hilbert, diantaranya terpenuhinya 3 pernyataan ekuivalen yang termuat dalam operator normal, berlakunya operator identitas $I$ pada operator normal, adanya invers operator pada operator normal, serta terbuktinya operator $T \in B(H)$ merupakan operator normal untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ yang diberikan, maka $\|T^n\| = \|T\|^n$.

Konsep mengenai operator *linear* pada ruang Hilbert juga dikaji oleh Faridhatun Nasikah (2011). Pada penelitian tersebut, Faridhatun Nasikah menjelaskan terdapat 4 jenis operator *linear* pada ruang Hilbert, diantaranya operator *adjoint*, operator *self-adjoint*, operator normal dan operator uniter. Penelitian yang dilakukan oleh Faridhatun Nasikah lebih ditekankan pada pembuktian karakteristik empat macam operator *linear*, diantaranya mengulas tentang definisi dan sifat-sifat dasar masing-masing operator *linear* pada ruang Hilbert. Akan tetapi pada penelitian  tersebut belum dijelaskan lebih detail mengenai sifat-sifat yang tercantum pada operator uniter.

Berdasarkan penelitian-penelitian di atas, penulis mendapatkan motivasi untuk melanjutkan penelitian mengenai salah satu jenis operator *linear* pada ruang Hilbert, yaitu operator uniter. Selanjutnya, penulis menganalisis sifat operator uniter yang dikaji oleh Faridhatun Nasikah (2011). Setelah menganalisis operator uniter, penulis menemukan dua sifat tersebut tertera juga pada teorema isometri *versus* uniter yang tercantum pada buku berjudul "*Operators on Hilbert Space*" karya V.S. Sunder. Pada teorema tersebut ditemukan ekivalensi operator isometri dengan operator uniter pada Ruang Hilbert. Sehingga, penelitian ini berjudul "**Ekivalensi Operator Isometri dengan Operator Uniter di Ruang Hilbert**"

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana ekivalensi operator isometri dengan operator uniter pada ruang Hilbert?

## 1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan yang ingin dicapai adalah untuk mengetahui ekivalensi operator isometri dengan operator uniter pada ruang Hilbert.

## 1.4 Manfaat Penelitian

Adapun beberapa manfaat dalam penelitian ini, yaitu

1. Manfaat bagi Penulis

   Pada penelitian ini, peneliti dapat menambah wawasan dan meningkatkan ilmu pengetahuan matematika yang telah dipelajari serta memperluas wawasan ilmu pengetahuan matematika dengan cara berfikir kritis terutama mengenai analisis matematika.

2. Manfaat bagi Pembaca

   Pembaca dapat menggunakan penelitian ini sebagai sumber referensi, informasi, serta dapat meningkatkan wawasan keilmuan mengenai operator uniter di ruang Hilbert.

## 1.5 Batasan Masalah

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka batasan masalah pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Ekivalensi operator isometri dengan operator uniter hanya dibatasi pada operator *linear* pada ruang Hilbert.

## 1.6 Definisi Istilah

Berdasarkan rumusan masalah penelitian, maka dapat diuraikan definisi istilah pada penelitian ini sebagai berikut:

1. Operator Isometri

   Operator isometri merupakan operator *linear* pada ruang Hilbert yang memiliki sifat $\|Tv\| = \|v\|$. Operator $T$ merupakan operator isometri pada ruang Hilbert dan $v$ merupakan elemen dari ruang Hilbert $\mathcal{H}$.

2. Operator Uniter

   Operator uniter merupakan operator *linear* yang terbatas pada ruang Hilbert yang memiliki sifat $TT^* = T^*T = I$. Operator $T$ merupakan operator uniter dan $T^*$ merupakan operator *adjoint* serta $I$ merupakan operator identitas pada ruang Hilbert.

3. Ekivalensi Operator

   Suatu operator dikatakan ekivalensi operator apabila memenuhi kelima pernyataan ekivalen. Kelima pernyataan tersebut ekivalen apabila terdapat hubungan antara pernyataan 1 dengan pernyataan 2 dan pernyataan 2 dengan pernyataan 3 dan pernyataan 3 dengan pernyataan 4 dan pernyataan 4 dengan pernyataan 5 dan pernyataan 5 dengan pernyataan 1.

4. Kelengkapan

   Kelengkapan didefinisikan jika untuk setiap barisan Cauchy yang diberikan memiliki suatu limit di ruang bernorma $X$ sedemikian sehingga jika $\|x_m - x_n\| \to 0$, maka $m \to \infty$ dan $n \to \infty$.

5. Ruang Hilbert

   Ruang Hilbert merupakan ruang hasil kali dalam yang lengkap dengan norma yang didefinisikan dengan hasil kali dalam. Ruang Hilbert dapat digunakan untuk menjelaskan dan menggeneralisasikan konsep pada teori operator *linear* tertentu.

# BAB II
# KAJIAN TEORI

## 2.1 Teori Pendukung

### 2.1.1 Keterbatasan

Suatu sistem aljabar yang terdiri dari himpunan tak-kosong dikatakan terbatas jika memiliki batas atas dan batas bawah (Bartle & Sherbert, 1994). Ide pokok dari batas atas dan batas bawah kerap digunakan pada fungsi dengan mempertimbangkan *range* dari fungsi tersebut. Jika suatu himpunan tak-kosong terbatas di atas, maka disebut sebagai supremum. Begitupun juga dengan suatu himpunan tak-kosong terbatas di bawah, maka disebut sebagai infimum. Berikut akan diulas lebih lanjut mengenai definisi terbatas, supremum, dan infimum.

**Definisi 2.1**

Diberikan $S$ merupakan himpunan tak-kosong dan subset $S$ dari $\mathbb{R}$, maka

1. Suatu bilangan $u \in \mathbb{R}$ disebut batas atas di $S$ jika $s \leq u$ untuk setiap $s \in S$,
2. Suatu bilangan $v \in \mathbb{R}$ disebut batas bawah di $S$ jika $v \leq s$ untuk setiap $s \in S$.

Suatu himpunan tak-kosong $S$ dikatakan terbatas di atas jika memiliki batas atas. Begitupun juga dengan himpunan tak-kosong $S$ dikatakan terbatas di bawah jika memiliki batas bawah. Jika $S$ mempunyai batas atas dan batas bawah maka disebut **terbatas** (Bartle & Sherbert, 1994)

**Definisi 2.2**

Diberikan $S$ himpunan tak-kosong dan $S$ merupakan subset dari $\mathbb{R}$, maka

1. Jika $S$ terbatas di atas, maka batas atas $u$ disebut **supremum** (batas atas terkecil) dari $S$ jika tidak terdapat bilangan yang lebih kecil daripada $u$ yang menjadi batas atas dari $S$.
2. Jika $S$ terbatas di bawah, maka batas bawah $v$ disebut **infimum** (batas bawah terbesar) dari $S$ jika tidak terdapat bilangan yang lebih besar dari $v$ yang menjadi batas bawah dari $S$ (Bartle & Sherbert, 1994)**.**

### 2.1.2 Ruang Vektor (*Vector Space*)

Pada subbab ini membahas mengenai ruang vektor berdimensi terhingga. Definisi dari ruang vektor $V$ yang elemennya disebut sebagai vektor melibatkan sebarang lapangan $F$ yang elemennya disebut sebagai skalar. Berikut akan didefinisikan ruang vektor $V$ atas lapangan $F$ beserta contohnya.

**Definisi 2.3**

Misalkan $V$ merupakan himpunan tak-kosong dengan dua operasi, yaitu penjumlahan vektor yang dinotasikan dengan jumlah $u + v$ di dalam $V$, untuk sebarang $u, v \in V$ dan perkalian skalar dinotasikan dengan hasilkali $\alpha u \in V$, untuk sebarang $u \in V$ dan $\alpha \in F$, maka $V$ disebut sebagai ruang vektor atas lapangan $F$ sedemikian sehingga untuk sebarang vektor $u, v, w \in V$ dan $\alpha, \beta \in F$ berlaku:

1. $u + v = v + u$ (komutatif penjumlahan)
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$ (asosiatif penjumlahan)
3. Terdapat $0 \in V$ maka $u + 0 = u$ (identitas penjumlahan)

4. Untuk setiap $u \in V$ terdapat $-u$ maka (invers penjumlahan)

   $u + (-u) = 0$

5. $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$ (asosiatif perkalian)

6) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ dan (distributif perkalian)

   $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

7) Untuk setiap $1 \in V$, berlaku $1u = u$ (invers perkalian)

(Halmos, 2000).

**Contoh 2.1**

Diberikan $V = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$ dimana $V$ merupakan suatu himpunan yang dilengkapi dengan perkalian dan penjumlahan skalar, sedemikian sehingga

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$k(a, b) = (ka, kb)$$

Buktikan bahwa $V$ merupakan ruang vektor.

**Penyelesaian**

Ambil sebarang vektor $u, v, w \in V$ dengan $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2),$ dan $w = (w_1, w_2)$ serta $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan keberlakuan 8 sifat pada ruang vektor.

1. Akan dibuktikan bahwa $u + v = v + u$

$$\begin{aligned} u + v &= (u_1, u_2) + (v_1, v_2) \\ &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2) \\ &= (v_1 + u_1, v_2 + u_2) \\ &= (v_1, v_2) + (u_1, u_2) \\ &= v + u \end{aligned}$$

   Dengan demikian, terbukti bahwa $u + v = v + u$.

2. Akan dibuktikan bahwa $u + (v + w) = (u + v) + w$.

$$
\begin{aligned}
u + (v + w) &= (u_1, u_2) + [(v_1, v_2) + (w_1, w_2)] \\
&= (u_1, u_2) + [v_1 + w_1, v_2 + w_2] \\
&= (u_1 + [v_1 + w_1], u_2 + [v_2 + w_2]) \\
&= ([u_1 + v_1] + w_1, [u_2 + v_2] + w_2) \\
&= (u_1 + v_1, u_2 + v_2) + (w_1, w_2) \\
&= [(u_1, u_2) + (v_1, v_2)] + (w_1, w_2) \\
&= (u + v) + w
\end{aligned}
$$

   Dengan demikian, terbukti bahwa $u + (v + w) = (u + v) + w$.

3. Akan dibuktikan bahwa terdapat $0 \in V$ dan pilih $0 = (0, 0) \in V$, sedemikian sehingga berlaku $u + 0 = u$

$$
\begin{aligned}
u + 0 &= (u_1, u_2) + (0,0) \\
&= (u_1 + 0, u_2 + 0) \\
&= (u_1, u_2) \\
&= u
\end{aligned}
$$

   Dengan demikian, terbukti bahwa $u + 0 = u$.

4. Akan dibuktikan bahwa terdapat $-u \in V$ dan pilih $-u = (-u_1, -u_2) \in V$, sedemikian sehingga berlaku $u + (-u) = 0$.

   Maka,

$$
\begin{aligned}
u + (-u) &= (u_1, u_2) + (-u_1, -u_2) \\
&= \left(u_1 + (-u_1), u_2 + (-u_2)\right) \\
&= (0,0) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

   Dengan demikian, terbukti bahwa $u + (-u) = 0$.

5. Pilih skalar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, akan dibuktikan bahwa $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$, maka

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)u &= (\alpha\beta)(u_1, u_2)\\ &= \big((\alpha\beta)u_1, (\alpha\beta)u_2\big)\\ &= \big(\alpha(\beta u_1), \alpha(\beta u_2)\big)\\ &= \alpha(\beta u_1, \beta u_2)\\ &= \alpha\big(\beta(u_1, u_2)\big)\\ &= \alpha(\beta u)\end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$.

6. Akan dibuktikan bahwa $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$, maka

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)u &= (\alpha + \beta)(u_1, u_2)\\ &= \big((\alpha + \beta)u_1, (\alpha + \beta)u_2\big)\\ &= (\alpha u_1 + \beta u_1, \alpha u_2 + \beta u_2)\\ &= (\alpha u_1, \alpha u_2) + (\beta u_1, \beta u_2)\\ &= \alpha(u_1, u_2) + \beta(u_1, u_2)\\ &= \alpha u + \beta u\end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$, maka

$$\begin{aligned}\alpha(u + v) &= \alpha\big((u_1, u_2) + (v_1, v_2)\big)\\ &= \big(\alpha(u_1, u_2) + \alpha(v_1, v_2)\big)\\ &= \big(\alpha(u) + \alpha(v)\big)\\ &= \alpha(u) + \alpha(v)\end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$.

7. Akan dibuktikan bahwa terdapat $1 \in V$, sehingga

$$1u = u$$

Pilih $1 = (1,1) \in V$, maka

$$\begin{aligned} 1u &= 1(u_1, u_2) \\ &= (1,1)(u_1, u_2) \\ &= (1)(1u_1, 1u_2) \\ &= (u_1, u_2) \\ &= u \end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $1u = u$.

Berdasarkan pembuktian (1) sampai (7), maka terbukti bahwa $V$ merupakan ruang vektor.

Perhatikan sifat-sifat pada Definsi 2.3. Sifat-sifat tersebut dibagi menjadi dua himpunan, yaitu himpunan yang pertama merupakan empat sifat pertama berhubungan dengan struktur penjumlahan pada $V$ dan himpunan yang kedua merupakan tiga sifat terakhir berhubungan dengan "tindakan" atas lapangan $F$ pada ruang vektor $V$. Selanjutnya, dengan menggunakan tiga sifat tambahan berikut akan diperoleh sifat-sifat sederhana dari suatu ruang vektor.

**Teorema 2.1**

Misalkan $V$ adalah ruang vektor dan $u$ merupakan vektor di $V$ dan $\alpha$ adalah skalar, maka:

1. $0u = 0$,
2. $\alpha 0 = 0$,
3. $(-1)u = -u$,
4. Jika $\alpha u = 0$, maka $\alpha = 0$ atau $u = 0$ (Anton & Rorres, 2004).

**Bukti**

1. Akan dibuktikan $0u = 0$.

   Perhatikan untuk $0 \in \mathbb{R}$, diperoleh

   $0u \quad = (0+0)u$ (sifat bilangan 0)

   $\quad\quad = (0u + 0u)$ (Definisi 2.3 bagian 6)

   Jadi,

   $0\imath \ = (0u + 0u)$ (1)

   Berdasarkan Definisi 2.3 bagian 4, vektor $0u$ memiliki bentuk negatif dan dinotasikan sebagai $(-0u)$. Selanjutnya, dengan menambahkan $(-0u)$ kedua ruas pada persamaan (1) diperoleh

   $0u + (-0u) \ = (0u + 0u) + (-0u)$

   $= 0u + \big(0u + (-0u)\big)$ (Definisi 2.3 bagian 2)

   $0 \quad = 0u + 0$ (Definisi 2.3 bagian 4)

   $0 \quad = 0u$ (Definisi 2.3 bagian 3)

   Jadi, terbukti $0u = 0$.

2. Akan dibuktikan bahwa $\alpha 0 = 0$, maka

   Perhatikan Persamaan berikut:

   $\alpha 0 \quad = \alpha(0+0)$ (sifat bilangan 0)

   $= (\alpha 0 + \alpha 0)$ (Definisi 2.3 bagian 6)

   $\alpha 0 + (-\alpha 0) \ = (\alpha 0 + \alpha 0) + (-\alpha 0$ (kedua ruas ditambahkan $(-\alpha 0)$)

   $= \alpha 0 + \big(\alpha 0 + (-\alpha 0)$ (Definisi 2.3 bagian 2)

   $0 \quad = \alpha 0 + 0$ (Definisi 2.3 bagian 4)

   $0 \quad = \alpha 0$ (Definisi 2.3 bagian 3)

   Jadi, terbukti $0u = 0$.

3. Akan dibuktikan bahwa $(-1)u = -u$, maka

$(-1)u = (-1)u + 0$ (Definisi 2.3 bagian 3)

$= (-1)u + \big(u + (-u)\big)$ (Definisi 2.3 bagian 4)

$= \big((-1)u + u\big) + (-u)$ (Definisi 2.3 bagian 2)

$= \big((-1)u + (1)u\big) + (-u)$ (Definisi 2.3 bagian 7)

$= u\big((-1) + 1\big) + (-u)$ (Definisi 2.3 bagian 6)

$= u(0) + (-u)$ (Definisi 2.3 bagian 4)

$= 0 + (-u)$ (sifat perkalian)

$= -u$ (Definisi 2.3 bagian 3)

Dengan demikian, terbukti bahwa $(-1)u = -u$.

4. Akan dibuktikan jika $\alpha u = 0$ maka $\alpha = 0$ atau $u = 0$.

Asumsikan bahwa $\alpha \neq 0$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan $u = 0$.

Karena $\alpha \neq 0$ maka terdapat $u - 1 \in \mathbb{R}$, sehingga diperoleh

$\alpha u = 0$

$(u-1)(\alpha u) = (u-1)\,0$ (masing-masing ruas dikalikan $(u-1)$)

$\big((u-1)u\big)\alpha = 0$ (Definisi 2.3 bagian 5)

Untuk $u^2 \neq u$, diperoleh

$(u^2 - u)\alpha = 0$ (Definisi 2.3 bagian 6)

$\frac{\alpha}{(u^2-u)} = \frac{0}{(u^2-u)}$ (masing-masing ruas dibagi $(u^2-u)$)

$\alpha = 0$ (pembagi 0)

Setelah mencantumkan definisi ruang vektor beserta contoh dan sifatnya, berikut akan dijelaskan mengenai definisi himpunan tak-kosong $A$ yang merupakan subruang dari $V$.

**Definisi 2.4**

Misalkan $V$ merupakan ruang vektor. Himpunan tak-kosong $A \subset V$ merupakan subruang dari $V$ apabila $A$ merupakan ruang vektor dibawah penjumlahan dan perkalian skalar yang didefinisikan pada $V$ (Rynne & Youngson, 2008).

Setelah mengetahui definisi himpunan tak-kosong $A \subset V$, selanjutnya akan dijelaskan hal-hal yang berhubungan dengan himpunan tak-kosong $A \subset V$.

**Definisi 2.5**

Misalkan $V$ merupakan ruang vektor. Diberikan $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\} \subset V, k \geq 1$ merupakan himpunan terhingga dan $A \subset V$ merupakan sebarang himpunan tak-kosong, maka

1. Suatu vektor $z \in V$ dikatakan kombinasi *linear* dari $S$ apabila terdapat skalar-skalar $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ dan dinyatakan dalam bentuk berikut:
$$z = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_k w_k$$
2. Himpunan $W$ dikatakan sebagai bebas *linear* apabila
$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_k w_k = 0$$
dengan skalar-skalar $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ berakibat $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$.
3. Himpunan semua kombinasi *linear* dari semua *subset* terhingga $A$ merupakan $span\, A$. Himpunan tersebut merupakan subruang dari $V$. Secara ekivalen, $span\, A$ merupakan irisan dari himpunan semua subruang $V$ yang memuat $A$.

4. Himpunan tak-kosong $A$ dikatakan bebas *linear* apabila setiap *subset* terhingga dari himpunan $A$ merupakan bebas *linear*. Jika himpunan $A$ tidak bebas *linear*, maka himpunan tersebut bergantung *linear*.
5. Jika $W$ merupakan bebas *linear* dan *span* $W = V$, maka $W$ merupakan basis $V$. Hal itu ditunjukkan jika $V$ memiliki basis terhingga, maka semua basis $V$ memiliki jumlah elemen yang sama. Jika jumlah tersebut adalah $k$, maka $V$ dikatakan sebagai dimensi $k$ atau dapat ditulis dengan $\dim V = k$. Jika $V$ tidak memiliki basis terhingga, maka $V$ dikatakan sebagai dimensi tak terhingga.
6. Jika $W$ merupakan basis $V$, maka setiap vektor $z \in V$ dapat ditulis sebagai kombinasi *linear* sebagaimana tercantum pada Definisi 2.5 bagian 1 dengan skalar-skalar $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. Skalar tersebut merupakan komponen $z$ terhadap basis $W$.
7. Himpunan $\mathbb{F}^k$merupakan ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$ dan himpunan vektor-vektor berikut:

$$\widehat{e_1} = (1,0,0, \dots, 0), \widehat{e_2} = (0,1,0, \dots, 0), \dots, \widehat{e_1} = (0,0,0, \dots, 1)$$

merupakan basis untuk $\mathbb{F}^k$. Basis tersebut dikatakan sebagai basis standar untuk $\mathbb{F}^k$ (Rynne & Youngson, 2008).

**Contoh 2.2**

Diketahui $m_1 = (1, 0, 0)$, $m_2 = (0, 1, 0), m_3 = (0, 0, 1)$.

Apakah $n = (2, 6, 4)$ merupakan kombinasi *linear* dari vektor-vektor di atas?

Diketahui $m_1 = (1, 0, 0)$, $m_2 = (0, 1, 0), m_3 = (0, 0, 1)$.

Akan ditunjukkan $n = (5,3,9)$ merupakan kombinasi *linear* dari vektor $m_1$ dan $m_2$ serta $m_3$.

Agar $n$ menjadi kombinasi *linear* dari vektor $m_1$ dan $m_2$ serta $m_3$, maka berdasarkan Definisi 2.5 bagian 1 haruslah terdapat skalar $\alpha_1$ dan $\alpha_2$ serta $\alpha_3$ sedemikian sehingga $n = \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + \alpha_3 m_3$.

Perhatikan persamaan berikut:

$n = \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + \alpha_3 m_3$

$(5, 3, 9) = \alpha_1(1, 0, 0) + \alpha_2(0, 1, 0) + \alpha_3(0, 0, 1)$ (1)

Berdasarkan persamaan (1), diperoleh

$$\alpha_1 = 5, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 9$$

Jadi, terdapat $\alpha_1 = 5$ dan $\alpha_2 = 3$ serta $\alpha_3 = 9$ sedemikian sehingga $n = \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + \alpha_3 m_3$.

Dengan demikian, $n = (5, 3, 9)$ merupakan kombinasi *linear* dari vektor-vektor $m_1 = (1, 0, 0)$ dan $m_2 = (0, 1, 0)$ serta $m_1 = (0, 0, 1)$.

### 2.1.3 Ruang Bernorma (*Norm Space*)

Pada subbab ini membahas mengenai ruang bernorma. Ruang bernorma merupakan ruang vektor dengan metrik atau jarak yang didefinisikan dengan norma dan memenuhi aksioma ruang bernorma. Berikut merupakan definisi ruang bernorma beserta hal lain yang berhubungan dengan ruang bernorma.

**Definisi 2.6**

Misalkan $X$ adalah ruang vektor atas $\mathbb{R}$, suatu norma pada $X$ merupakan suatu fungsi $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ yang memenuhi kondisi berikut untuk setiap $u, v \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$ berlaku:

1. $\|u\| \geq 0, \forall\, u \in X$
2. $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0, \forall\, u \in X$
3. $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|, \forall\, u \in X, \alpha \in \mathbb{R}$
4. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \forall\, u, v \in X$

Ruang vektor yang dilengkapi dengan norma merupakan ruang bernorma (Rynne & Youngson, 2008).

**Contoh 2.3**

Misalkan $X$ merupakan ruang vektor atas $\mathbb{R}$ dengan mendefinisikan $\|u\| = |u_1| + |u_2|$. Buktikkan bahwa $\|u\| = |u_1| + |u_2|$ adalah norma dengan $u = (u_1, u_2)$ dengan $u \in X$.

**Penyelesaian**

1. $\|u\| \geq 0$

   Misalkan $X$ merupakan ruang vektor atas $\mathbb{R}$.

   Ambil sebarang $u \in X$ dan $\|u\| = |u_1| + |u_2|$ dengan $\|u\| = |u_1| + |u_2| \geq 0$ dengan kata lain $\|u\| \geq 0$.

2. $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0,$

   Diketahui $\|u\| = 0$, akan dibuktikan $u = 0$.

   Misalkan $X$ merupakan ruang vektor atas $\mathbb{R}$, maka

   $\|u\| = 0$

   $|u_1| + |u_2| = 0$

Karena $|u_1| + |u_2| = 0$, haruslah memiliki nilai $u_1 = u_2 = 0$ dengan kata lain, nilai dari $u = 0$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\|u\| = 0$ apabila $u = 0$.

$\|u\| = 0$

$\|u\| = |u_1| + |u_2|$

$\|u\| = |0| + |0| \Leftrightarrow u = 0$

3. Akan ditunjukkan bahwa $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|$.

   Perhatikan persamaan berikut:

   $\|\alpha u\| = |\alpha u_1| + |\alpha u_2|$

   $\|\alpha u\| = |\alpha||u_1| + |\alpha||u_2|$

   $\|\alpha u\| = |\alpha|(|u_1| + |u_2|)$

   $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|$

   Jadi, terbukti bahwa $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|$.

4. Akan ditunjukkan bahwa $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

   Ambil sebarang $v \in X$ dengan $v = (v_1, v_2)$, sehingga

   $\|u + v\| = |u_1| + |v_1| + |u_2| + |v_2|$

   $\|u + v\| = |u_1| + |u_2| + |v_1| + |v_2|$

   $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$

   Karena keempat sifat pada ruang bernorma terpenuhi, maka $\|u\| = |u_1| + |u_2|$ merupakan norma pada ruang vektor $V$ atas lapangan $\mathbb{R}$.

### 2.1.4 Kekonvergenan dan Kelengkapan

Pada subbab ini membahas mengenai kekonvergenan dan kelengkapan barisan pada ruang bernorma. Berikut merupakan definisi dari kekonvergenan, kelengkapan, dan hal-hal yang berhubungan dengan kekonvergenan dan kelengkapan barisan pada ruang bernorma $X$.

**Definisi 2.7**

Diberikan $\{u_k\}$ merupakan suatu barisan pada ruang bernorma $X$. Misalkan $u \in X$. Barisan $\{u_k\}$ dapat dikatakan sebagai konvergen ke $u$ jika dan hanya jika untuk setiap $\epsilon > 0$ yang diberikan, terdapat bilangan bulat positif $N$ sedemikian sehingga,

$$k \geq N \Rightarrow \|u_k - u\|_\infty < \epsilon$$

Jika $\{u_k\}$ konvergen ke $u$, maka dapat ditulis sebagai berikut:

$$\lim_{k\to\infty} u_k = u$$

Jika barisan $\{u_k\}$ tidak konvergen untuk setiap vektor yang diberikan, maka dapat dikatakan bahwa barisan tersebut divergen (Gockenbach, 2010).

**Contoh 2.4**

Tunjukkan kekonvergenan barisan bilangan riil $x_n = \frac{n^2+2n-3}{2n^2-3n+1}$.

**Penyelesaian**

Akan ditunjukkan barisan bilangan riil $x_n = \frac{n^2+2n-3}{2n^2-3n+1}$ adalah konvergen.

Perhatikan persamaan berikut:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n-3}{2n^2-3n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}}{2-\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} - \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^2}}{\lim_{n\to\infty} 2 - \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}$$

$$= \frac{1 + 0 - 0}{2 - 0 - 0}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Karena $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n-3}{2n^2-3n+1} = \frac{1}{2}$, maka berdasarkan Definisi 2.8 barisan bilangan riil $x_n = \frac{n^2+2n-3}{2n^2-3n+1}$ konvergen ke $\frac{1}{2}$.

Setelah mengetahui definisi kekonvergenan pada ruang bernorma $X$, selanjutnya akan dijelaskan mengenai definisi kelengkapan dan hal lainnya yang berkaitan dengan kelengkapan pada ruang bernorma $X$.

**Definisi 2.8**

Suatu barisan $\{u_k\}$ pada ruang bernorma $X$ dikatakan sebagai barisan Cauchy apabila $\|u_j - u_k\| \to 0$ sedemikian sehingga $j \to \infty$ dan $k \to \infty$ (Furuta, 2001).

**Contoh 2.5**

Buktikan $Y = \left(\frac{p}{p+1}\right)$ adalah barisan Cauchy.

**Penyelesaian**

Ambil $\varepsilon > 0$ pilih $K_\varepsilon > \frac{2}{\varepsilon}$.

Sehingga jika $n, m \geq K_\varepsilon$, maka

$$\left|\frac{p}{p+1} - \frac{q}{q+1}\right| = \left|\left(1 - \frac{p}{p+1}\right) - \left(1 - \frac{q}{q+1}\right)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1}\right|$$

$$\leq \frac{1}{q+1} + \frac{1}{p+1}$$

$$< \frac{1}{q} + \frac{1}{p}$$

$$\leq \frac{1}{K_\varepsilon} + \frac{1}{K_\varepsilon}$$

$$= \frac{2}{K_\varepsilon} < \varepsilon$$

Jadi, $\left|\frac{p}{p+1} - \frac{q}{q+1}\right| = \frac{2}{K_\varepsilon} < \varepsilon$.

Karena $\frac{2}{K_\varepsilon} < \varepsilon$, maka $K_\varepsilon > \frac{2}{\varepsilon}$.

Dengan demikian, terbukti bahwa $Y = \frac{p}{p+1}$ adalah barisan Cauchy.

Setelah mengetahui definisi barisan Cauchy, berikut akan dijelaskan mengenai definisi dari kelengkapan barisan pada ruang bernorma $X$.

**Definisi 2.10**

Ruang bernorm $X$ dikatakan lengkap apabila setiap barisan Cauchy yang diberikan memiliki limit di $X$ sedemikian sehingga jika $\|u_j - u_k\| \rightarrow 0$, maka $j \rightarrow \infty$ dan $k \rightarrow \infty$ (Furuta, 2001).

### 2.1.5 Ruang Hasil Kali Dalam (*Inner – Product Space*)

Pada subbab kali ini membahas mengenai ruang hasil kali dalam. Ruang hasil kali dalam merupakan ruang vektor yang dilengkapi dengan fungsi yang memetakan anggota dari ruang tersebut ke bilangan kompleks atau bilangan riil dan memenuhi sifat – sifat tertentu. Fungsi tersebut sering dikenal sebagai hasil kali dalam (*inner – product*) pada ruang vektor tersebut. Berikut akan dijelaskan lebih lanjut mengenai definisi ruang hasil kali dalam dan hal lainnya yang berhubungan dengan ruang hasil kali dalam.

**Definisi 2.10**

Ruang hasil kali dalam merupakan ruang vektor $V$ dengan hasil kali dalam didefinisikan pada $V$. Hasil kali dalam pada $V$ merupakan suatu fungsi $\langle\cdot,\cdot\rangle$ : $V \times V \to \mathbb{R}$ sedemikian sehingga untuk setiap $u, v, w \in V$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ berlaku aksioma berikut:

1. $\langle u, u\rangle \geq 0$ (Aksioma positivitas)
2. $\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$ (Aksioma homogenitas)
3. $\langle \alpha u + \beta v, w\rangle = \alpha\langle u, w\rangle + \beta\langle v, w\rangle$ (Aksioma penjumlahan)
4. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$ (Aksioma kesimetrian)

(Rynne & Youngson, 2008).

**Contoh 2.6**

Diberikan $u, v, w \in \mathbb{R}$ dimana $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2)$. Buktikan bahwa $\langle u, v\rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$ merupakan hasil kali dalam di $\mathbb{R}$.

Ambil sembarang vektor $u, v \in \mathbb{R}$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan keberlakuan 4 sifat pada ruang hasil kali dalam.

1. Akan dibuktikan bahwa $\langle u, u\rangle \geq 0$, maka

   $$\begin{aligned}\langle u, u\rangle &= 3u_1u_1 + 2u_2u_2 \\ &= 3{u_1}^2 + 2{u_2}^2\end{aligned}$$

   Berdasarkan sifat perpangkatan, dimana ${u_i}^2$ bernilai positif untuk sebarang $i > 0$, maka

   $$\langle u, u\rangle = 3{u_1}^2 + 2{u_2}^2 \geq 0$$

   Sehingga, terbukti bahwa $\langle u, u\rangle \geq 0$.

2. Akan dibuktikan bahwa $\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$ .

   Jika $u = 0$, maka

$$\begin{aligned}\langle u,u\rangle &= 3u_1u_1 + 2u_2u_2 \\ &= 3{u_1}^2 + 2{u_2}^2 \\ &= 3\cdot 0^2 + 2\cdot 0^2 \\ &= 0+0 \\ &= 0\end{aligned}$$

Jika $\langle u,u\rangle = 0$, maka $u_1 = u_2 = 0$. Sedemikian sehingga, $u = 0$.

Sehingga, terbukti bahwa $\langle u,u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

3. Akan dibuktikan bahwa $\langle \alpha u + \beta v, w\rangle = \alpha\langle u,w\rangle + \beta\langle v,w\rangle$ maka

$$\begin{aligned}\langle \alpha u + \beta v, w\rangle &= 3\langle \alpha u_1 + \beta v_1, w_1\rangle + 2\langle \alpha u_2 + \beta v_2, w_2\rangle \\ &= 3(\alpha u_1 + \beta v_1)w_1 + 2(\alpha u_2 + \beta v_2)w_2 \\ &= (3\alpha u_1w_1 + 3\beta v_1w_1) + (2\alpha u_2w_2 + 2\beta v_2w_2) \\ &= (3\alpha u_1w_1 + 2\alpha u_2w_2) + (3\beta v_1w_1 + 2\beta v_2w_2) \\ &= \alpha(3u_1w_1 + 2u_2w_2) + \beta(3v_1w_1 + 2v_2w_2) \\ &= \alpha\langle u,w\rangle + \beta\langle v,w\rangle\end{aligned}$$

Sehingga, terbukti bahwa $\langle \alpha u + \beta v, w\rangle = \alpha\langle u,w\rangle + \beta\langle v,w\rangle$.

4. Akan dibuktikan bahwa $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$, maka

$$\begin{aligned}\langle u,v\rangle &= 3u_1v_1 + 2u_2v_2 \\ &= 3v_1u_1 + 2v_2u_2 \\ &= \langle v,u\rangle\end{aligned}$$

Dengan demikian, karena sifat pada bagian 1 sampai 4 terpenuhi, maka terbukti bahwa $\langle u,v\rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$ merupakan hasil kali dalam di $\mathbb{R}$.

Setelah mengetahui definisi ruang hasil kali dalam $X$ pada bilangan riil, selanjutnya akan dijelaskan mengenai definisi ruang hasil kali dalam $X$ pada bilangan kompleks.

**Definisi 2.11**

Ruang hasil kali dalam merupakan ruang vektor $V$ dengan hasil kali dalam didefinisikan pada $V$. Hasil kali dalam pada $V$ merupakan pemetaan $V \times V$ ke $\mathbb{C}$ sedemikian sehingga untuk setiap $u, v, w \in V$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ berlaku aksioma berikut:

1. $\langle u, u \rangle \geq 0$ (Aksioma positivitas)
2. $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$ (Aksioma homogenitas)
3. $\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$ (Aksioma penjumlahan)
4. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ (Aksioma kesimetrian)

(Rynne & Youngson, 2008).

Selanjutnya, berdasarkan Definisi 2.10 dan 2.11 diperoleh sifat-sifat ruang hasil kali dalam berikut:

**Teorema 2.2**

Misalkan $X$ merupakan ruang hasil kali dalam, maka untuk setiap $u, v, w \in X$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ berlaku sifat – sifat berikut:

1. $\langle 0, v \rangle = \langle u, 0 \rangle = 0$,
2. $\langle u, \alpha v + \beta w \rangle = \bar{\alpha} \langle u, v \rangle + \bar{\beta} \langle u, w \rangle$,
3. $\langle \alpha u + \beta v, \alpha u + \beta v \rangle = |\alpha|^2 \langle u, u \rangle + \alpha \bar{\beta} \langle u, v \rangle + \beta \bar{\alpha} \langle v, u \rangle + |\beta|^2 \langle v, v \rangle$

   (Rynne & Youngson, 2008).

**Bukti**

1. Akan dibuktikan bahwa $\langle 0, v\rangle = \langle u, 0\rangle = 0$.

   Akan ditunjukkan bahwa $\langle 0, v\rangle = 0$.

   $\langle 0, v\rangle = \langle v + (-v), v\rangle$ (Definisi 2.3 bagian 4)

   $= \langle v, v\rangle + \langle (-v), v\rangle$ (Definisi 2.3 bagian 6)

   $= \langle v, v\rangle - \langle v, v\rangle$ (Sifat perkalian)

   $= 0$ (Sifat pengurangan)

   Dengan demikian, terbukti bahwa $\langle 0, v\rangle = 0$.

   Selanjutnya, Akan ditunjukkan bahwa $\langle u, 0\rangle = 0$.

   $\langle u, 0\rangle = \langle u, u + (-u)\rangle$ (Definisi 2.3 bagian 4)

   $= \overline{\langle u + (-u), u\rangle}$ (Definisi 2.11 bagian 4)

   $= \overline{\langle u, u\rangle} + \overline{\langle (-u), u\rangle}$ (Definisi 2.3 bagian 6)

   $= \overline{\langle u, u\rangle} - \overline{\langle u, u\rangle}$ (Sifat perkalian)

   $= 0$ (Sifat pengurangan)

   Dengan demikian, terbukti bahwa $\langle u, 0\rangle = 0$.

2. Akan dibuktikan bahwa $\langle u, \alpha v + \beta w\rangle = \bar{\alpha}\langle u, v\rangle + \bar{\beta}\langle u, w\rangle$.

   $\langle u, \alpha v + \beta w\rangle = \overline{\langle \alpha v + \beta w, u\rangle}$ (Definisi 2.11 bagian 4)

   $= \bar{\alpha}\langle \overline{v, u}\rangle + \bar{\beta}\langle \overline{w, u}\rangle$ (Definisi 2.3 bagian 6)

   $= \bar{\alpha}\langle \overline{u, v}\rangle + \bar{\beta}\langle \overline{u, w}\rangle$ (Definisi 2.10 bagian 4)

   Dengan demikian, terbukti bahwa $\langle u, \alpha v + \beta w\rangle = \bar{\alpha}\langle u, v\rangle + \bar{\beta}\langle u, w\rangle$.

3. Akan dibuktikan bahwa $\langle \alpha u + \beta v, \alpha u + \beta v \rangle = |\alpha|^2 \langle u, u \rangle + \alpha\beta \langle u, v \rangle + \beta\alpha \langle v, u \rangle + |\beta|^2 \langle v, v \rangle$.

$$
\begin{aligned}
\langle \alpha u + \beta v, \alpha u + \beta v \rangle &= \langle \alpha u, \alpha u + \beta v \rangle + \langle \beta v, \alpha u + \beta v \rangle \\
&= \langle \overline{\alpha u + \beta v, \alpha u} \rangle + \langle \overline{\alpha u + \beta v, \beta v} \rangle \\
&= \langle \overline{\alpha u, \alpha u} \rangle + \langle \overline{\beta v, \alpha u} \rangle + \langle \overline{\alpha u, \beta v} \rangle \\
&\quad + \langle \overline{\beta v, \beta v} \rangle \\
&= \overline{\alpha \langle u, \alpha u \rangle} + \overline{\beta \langle v, \alpha u \rangle} + \overline{\alpha \langle u, \beta v \rangle} \\
&\quad + \overline{\beta \langle v, \beta v \rangle} \\
&= \bar{\alpha} \langle \alpha u, u \rangle + \bar{\beta} \langle \alpha u, v \rangle + \bar{\alpha} \langle \beta v, u \rangle \\
&\quad + \bar{\beta} \langle \beta v, v \rangle \\
&= \bar{\alpha}\alpha \langle u, u \rangle + \bar{\beta}\alpha \langle \alpha u, v \rangle \\
&\quad + \bar{\alpha}\beta \langle \beta v, u \rangle + \bar{\beta}\beta \langle \beta v, v \rangle
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $\langle \alpha u + \beta v, \alpha u + \beta v \rangle = |\alpha|^2 \langle u, u \rangle + \alpha\bar{\beta} \langle u, v \rangle + \beta\bar{\alpha} \langle v, u \rangle + |\beta|^2 \langle v, v \rangle$.

Pada Definisi 2.11 bagian 3 ditunjukkan bahwa ruang hasil kali dalam bersifat *linear*. Berdasarkan Teorema 2.2 dengan $\bar{\alpha}$ dan $\bar{\beta}$ merupakan *konjugate linear*. Kedua bentuk tersebut apabila berlaku bersama – sama pada ruang hasil kali dalam disebut sebagai *sesquilinear* (Kreyszig, 1978).

**Definisi 2.12**

Ruang bernorma merupakan ruang vektor yang dilengkapi dengan norma dan memenuhi persyaratan ruang bernorma yang didefinisikan pada Definisi 2.6. Ruang hasil kali dalam merupakan ruang vektor yang dilengkapi dengan hasil kali dalam. Suatu fungsi norma di ruang hasil kali dalam $(X, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ didefinisikan untuk setiap $u \in X$ yang diberikan, berlaku*:*

$$\|u\| = \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}}$$

(Debnath & Mikusinski, 2005)

Hal ini dapat dikatakan bahwa norm $\|\cdot\|$ merupakan suatu norm yang dihasilkan oleh hasil kali dalam.

**Teorema 2.3 (Ketaksamaan *Cauchy - Schwartz*)**

Misalkan $u$ dan $v$ merupakan vektor pada ruang hasil kali dalam $V$. Untuk setiap $u, v \in V$, maka

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|\|v\|$$

(Mulyono, Mansyur, Marpaung, & Simanjuntak, 2021)**.**

**Bukti**

Akan dibuktikan bahwa $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|\|v\|$.

(Kasus 1)

Misalkan $u = 0$, maka $\langle 0, v \rangle = 0$. Hal ini ekivalen dengan $\langle 0, v \rangle = \|0\|\|v\|$, maka benar bahwa $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|\|v\|$.

(Kasus 2)

Misalkan $u \neq 0$ dengan $a = \langle u, u \rangle$, $b = 2\langle u, v \rangle$, dan $c = \langle v, v \rangle$.

Jika $t \in \mathbb{R}$, maka berdasarkan Definisi 2.10 bagian 1, diperoleh

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \langle (tu + v), (tu + v) \rangle \\
&= \langle u, u \rangle t^2 + 2\langle u, v \rangle t + \langle v, v \rangle \\
&= at^2 + bt + c
\end{aligned}
$$

Karena polinom kuadratik $f(t) = at^2 + bt + c$ merupakan suatu fungsi kontinu yang bernilai positif, maka $at^2 + bt + c$ selalu berada di atas sumbu-$u$. Hal ini berarti diskriminan dari $at^2 + bt + c$ haruslah $at^2 + bt + c \leq 0$ atau ditulis sebagai berikut:

$$D = at^2 + bt + c \leq 0$$

Sehingga,

$$4\langle u, v \rangle^2 - 4\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle \leq 0$$

Atau ekivalen dengan

$$\langle u, v \rangle^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle$$

$$\langle u, v \rangle^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle \tag{1}$$

Dengan mengambil akar kuadrat kedua ruas pada persamaan (1) dan menggunakan fakta bahwa $\langle u, u \rangle$ dan $\langle v, v \rangle$ tak negatif, maka diperoleh

$$|\langle u, v \rangle| \leq \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}} \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}}$$

Berdasarkan Definisi 2.12 untuk setiap $u \in X$ yang diberikan, terdapat norm $\|\cdot\|$ pada $X$ didefinisikan dengan $\|u\| = \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}}$, maka

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

### 2.1.6 Ortogonalitas dan Ortonormalitas

Pada subbab kali ini membahas mengenai ortogonalitas dan ortonormalitas. Ortogonalitas merupakan salah satu konsep yang termuat pada ruang hasil kali dalam. Konsep tersebut erat hubungannya dengan besar sudut antara dua vektor. Berikut akan diulas lebih lanjut mengenai ortogonalitas dan ortonormalitas pada ruang hasil kali dalam $X$.

**Definisi 2.13**

Misalkan $X$ adalah ruang hasil kali dalam. Vektor $u, v \in X$ dikatakan *orthogonal*, apabila

$$\langle u, v \rangle = 0$$

(Rynne & Youngson, 2008).

**Contoh 2.7**

Diberikan himpunan $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ pada $\mathbf{R^3}$ dengan $c_1 = (0, 1, 0), c_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), c_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Tunjukkan himpunan $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ pada $\mathbf{R^3}$ merupakan himpunan *orthogonal*.

**Penyelesaian**

Diketahui himpunan $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ pada $\mathbf{R^3}$ dengan $c_1 = (0, 1, 0), c_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), c_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Akan ditunjukkan himpunan $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ pada $\mathbf{R^3}$ merupakan himpunan *orthogonal*.

Vektor-vektor di $\mathbf{R^3}$ yang dilengkapi hasil kali dalam Euclid, diperoleh

$$\langle c_1, c_2\rangle = 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\langle c_2, c_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 0 \cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\langle c_3, c_1\rangle = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot 0 + 0 \cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 = 0$$

Dengan demikian, berdasarkan Definisi 2.13 himpunan $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ pada $\mathbf{R^3}$ merupakan himpunan *orthogonal.*

Setelah mencantumkan definisi *orthogonal* pada ruang hasil kali dalam $X$, selanjutnya akan dijelaskan mengenai definisi *orthonormal* pada ruang hasil kali dalam $X$ berikut:

**Definisi 2.14**

Misalkan $X$ adalah ruang hasil kali dalam. Himpunan $\{e_1, e_2, \dots, e_k\} \subset X$ dikatakan *orthonormal* apabila untuk $1 \leq c \leq k$ diperoleh

$$\|e_c\| = 1$$

untuk $1 \leq b, c \leq k$ dengan $b \neq c$ berlaku

$$\langle e_b, e_c\rangle = 0$$

(Rynne & Youngson, 2008).

**Contoh 2.8**

Diberikan himpunan $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ pada $\mathbf{R^3}$ dengan $c_1 = (0, 1, 0), c_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), c_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Tunjukkan himpunan $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ pada $\mathbf{R^3}$ merupakan himpunan *orthonormal.*

**Penyelesaian**

Diketahui himpunan $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ pada $\mathbf{R^3}$ dengan $c_1 = (0, 1, 0), c_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), c_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Akan ditunjukkan himpunan $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ pada $\mathbf{R^3}$ merupakan himpunan *orthonormal.*

Berdasarkan Definisi 2.15, suatu himpunan dikatakan *orthonormal* apabila himpunan tersebut *orthogonal* dan memiliki norm 1.

Karena pada Contoh 2.7 telah dijelaskan bahwa himpunan $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ pada $\mathbf{R^3}$ merupakan himpunan *orthogonal,* maka pada penyelesaian berikut akan ditunjukkan bahwa himpunan tersebut memiliki norm 1.

Perhatikan persamaan berikut:

$$\|c_1\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1$$

$$\|c_2\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

$$\|c_2\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

Karena himpunan $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ pada $\mathbf{R^3}$ merupakan himpunan *orthogonal* dan memiliki norm 1, maka himpunan tersebut merupakan himpunan *orthonormal.*

Setelah mengetahui definisi *orthonormal* pada ruang hasil kali dalam $X$, selanjutnya akan dijelaskan mengenai himpunan *orthonormal* $E$ merupakan basis *orthonormal* pada ruang hasil kali dalam $X$.

**Teorema 2.4**

Misalkan $X$ merupakan ruang hasil kali dalam. Jika $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ adalah basis *orthonormal* pada $X$ dan $r$ merupakan sebarang vektor pada $X$, maka

$$r = \langle r, e_1 \rangle e_1 + \langle r, e_2 \rangle e_2 + \cdots + \langle r, e_m \rangle e_m$$

(Anton & Rorres, 2004).

**Bukti**

Diketahui $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ adalah basis *orthonormal* pada ruang hasil kali dalam $X$.

Akan ditunjukkan $r = \langle r, e_1 \rangle e_1 + \langle r, e_2 \rangle e_2 + \cdots + \langle r, e_m \rangle e_m$.

Karena $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ merupakan basis *orthonormal*, maka berdasarkan Definisi 2.5 bagian 5 untuk sebarang vektor $r \in X$ dapat direpresentasikan sebagai berikut

$$r = g_1 e_1 + g_2 e_2 + \cdots + g_m e_m$$

dengan skalar-skalar $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $g_i = \langle r, e_i \rangle$ dengan $i = 1, 2, \dots, m$.

Sehingga, untuk $e_i \in E$ diperoleh

$\langle r, e_i \rangle = \langle g_1 e_1 + g_2 e_2 + \cdots + g_m e_m, e_i \rangle$

$\langle r, e_i \rangle = g_1 \langle e_1, e_i \rangle + g_2 \langle e_2, e_i \rangle + \cdots + g_m \langle e_m, e_i \rangle$

Karena $E$ adalah himpunan *orthonormal* pada ruang hasil kali dalam $X$, maka berdasarkan Definisi 2.14 $\|e_c\| = 1$ apabila $b = c$ dan $\langle e_b, e_c \rangle = 0$ untuk $1 \leq b, c \leq k$ dengan $b \neq c$.

Sehingga, $g_i = \langle r, e_i \rangle$.

Dengan demikian, $r = \langle r, e_1 \rangle e_1 + \langle r, e_2 \rangle e_2 + \cdots + \langle r, e_m \rangle e_m$.

Setelah membuktikan bahwa himpunan $E$ merupakan basis *orthonormal*, selanjutnya akan dicantumkan teorema yang merupakan generalisasi dari Teorema *Pytagoras.*

**Teorema 2.5**

Misalkan $X$ merupakan ruang hasil kali dalam. Jika $\dim X = k$ dan $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ merupakan basis *orthonormal* untuk $X$, maka untuk setiap bilangan $\alpha_c \in \mathbb{F}$ dengan $c = 1, \dots, k$ diperoleh

$$z = \left\|\sum_{c=1}^{k} \alpha_c e_c\right\|^2 = \sum_{c=1}^{k} |\alpha_c|^2$$

(Rynne & Youngson, 2008).

**Bukti**

Diketahui $\dim X = k$ dan $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ merupakan basis *orthonormal* untuk $X$ dengan $z = \left\|\sum_{c=1}^{k} \alpha_c e_c\right\|^2$.

Akan dibuktikkan $z = \left\|\sum_{c=1}^{k} \alpha_c e_c\right\|^2 = \sum_{c=1}^{k} |\alpha_c|^2$.

Perhatikan persamaan berikut:

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{c=1}^{k} \alpha_c e_c\right\|^2 &= \langle \sum_{b=1}^{k} \alpha_b e_b, \sum_{c=1}^{k} \alpha_c e_c \rangle \\
&= \sum_{b=1}^{k} \sum_{c=1}^{k} \alpha_b \overline{\alpha_c} \langle e_b, e_c \rangle \\
&= \sum_{c=1}^{k} \alpha_c \overline{\alpha_c} \\
&= \sum_{c=1}^{k} |\alpha_c|^2
\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $z = \left\|\sum_{c=1}^{k} \alpha_c e_c\right\|^2 = \sum_{c=1}^{k} |\alpha_c|^2$.

### 2.1.7 Ruang Hilbert (*Hilbert Space*)

Pada subbab sebelumnya telah dibahas mengenai ruang hasil kali dalam (*inner – product space*). Ruang hasil kali dalam yang lengkap disebut sebagai ruang Hilbert. Berikut akan dijelaskan lebih lanjut mengenai definisi dari ruang Hilbert dan hal lainnya yang berhubungan dengan ruang Hilbert.

**Definisi 2.16**

Ruang Hilbert merupakan ruang hasil kali dalam yang lengkap (Debnath & Mikusinski, 2005).

**Contoh 2.9**

Diberikan $\ell^2 = \{u_n\}_{n=1}^{\infty} | \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 < \infty$ merupakan barisan pada ruang Hilbert dengan norm $\|u\| = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 < \infty$. Buktikan $\ell^2$ adalah barisan pada ruang Hilbert terhadap hasil kali dalam sebagai berikut:

$$\langle \tilde{u}, \tilde{v} \rangle \coloneqq \sum_{n=1}^{k} u_n \overline{v_n}$$

untuk setiap $\tilde{u} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \tilde{v} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \in \ell^2$.

**Penyelesaian:**

Diketahui $\ell^2$ merupakan barisan pada ruang Hilbert.

Akan dibuktikan bahwa $\ell^2$ merupakan barisan ruang Hilbert terhadap hasil kali dalam yang didefinisikan dengan

$$\langle \tilde{u}, \tilde{v} \rangle \coloneqq \sum_{n=1}^{k} u_n \overline{v_n}$$

untuk setiap $\tilde{u} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \tilde{v} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \in \ell^2$.

Berdasarkan Definisi 2.16 bahwa ruang Hilbert merupakan hasil kali dalam yang lengkap.

Akan ditunjukkan bahwa $\ell^2$ merupakan ruang hasil kali dalam yang lengkap.

Selanjutnya berdasarkan Definisi 2.10, ruang bernorma $X$ dikatakan lengkap apabila setiap barisan Cauchy yang diberikan memiliki suatu limit di $X$ sedemikian sehingga jika $\|x_m - x_n\| \to 0$, maka $m \to \infty$ dan $n \to \infty$.

Ambil sebarang barisan Cauchy $\tilde{u}^{(n)} \subset \ell^2$ dan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ yang diberikan, terdapat bilangan asli $N$ sehingga untuk setiap dua bilangan asli $m, n \geq N$, maka

$$\left\|\tilde{u}^{(m)} - \tilde{u}^{(n)}\right\| < \varepsilon$$

atau

$$\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|\tilde{u}^{(m)} - \tilde{u}^{(n)}\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

Oleh karena itu, jika $m, n \geq N$ untuk setiap $k \in N$ maka berlaku,

$$\left\|\tilde{u}^{(m)} - \tilde{u}^{(n)}\right\| < \varepsilon$$

Dengan demikian, untuk setiap $k \in N$, $u_k^{(n)}$merupakan barisan Cauchy.

Sehingga, dapat dikatakan bahwa $u_k^{(n)}$konvergen ke suatu bilangan $u_k$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|u_k^{(n)} - u_k\right| = 0$ dan $\lim\limits_{n\to\infty} u_k^{(n)} = u_k$

Selanjutnya, akan dibentuk barisan $\tilde{u} = \{u_k\}$ dan diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\left\|\tilde{u} - \tilde{u}^{(n)}\right\| &= \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\tilde{u}^{(m)} - \tilde{u}^{(n)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\tilde{u}^{(m)} - \tilde{u}^{(n)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon\end{aligned}$$

Hal ini berarti $\{\tilde{u}^{(n)}\}$ konvergen ke $\tilde{u}$. Dengan demikian, untuk $n \geq N$ maka

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}^{(n)}\| \leq \|\tilde{u} - \tilde{u}^{(n)}\| + \|\tilde{u}^{(n)}\| < \tag{2}$$

atau

$$\tilde{u} = \ell^2$$

Dengan demikian, berdasarkan persamaan (1) dan (2) terbukti bahwa $\ell^2$ merupakan ruang hasil kali dalam yang lengkap atau $\ell^2$ merupakan ruang Hilbert.

### 2.1.8 Operator *Linear*

Pada subbab sebelumnya telah dibahas mengenai ruang vektor, ruang metrik, ruang hasil kali dalam, ruang bernorm, dan ruang Hilbert. Pada subbab ini membahas mengenai operator *linear*. Operator *linear* merupakan suatu pemetaan dari suatu fungsi ke fungsi lainnya atau pemetaan dari ruang vektor ke ruang vektor lainnya atau pemetaan dari ruang Hilbert ke ruang Hilbert lainnya. Berikut merupakan definisi operator *linear* beserta macam – macam dari operator *linear* yang terbatas pada ruang Hilbert.

**Definisi 2.17**

Misalkan $V$ dan $W$ merupakan ruang vektor atas lapangan $F$. Diberikan operator *linear* $T \in L(V, W)$ dengan $L(V, W)$ merupakan himpunan semua operator *linear* dari $V$ ke $W$. Sedemikian sehingga untuk setiap $u, v \in V$ dan $k \in F$ yang diberikan, berlaku

1. $T(u + v) = Tu + Tv$,
2. $(kT)(v) = k(Tv)$ (Friedberg, J.Insel, & Spence, 2014).

**Contoh 2.10**

Didefinisikan $T : R^2 \to R^2$ dengan $T(b_1, b_2) = (2b_1 + b_2, b_1)$. Tunjukkan bahwa $T$ adalah *linear*.

**Penyelesaian**

Diketahui $T(b_1, b_2) = (2b_1 + b_2, b_1)$.

Akan ditunjukkan $T$ adalah *linear*.

Misalkan $a \in R$ dan $u, v \in R^2$ dengan $u = (c_1, c_2)$ dan $v = (d_1, d_2)$, maka

$$\begin{aligned} au + v &= a(c_1, c_2) + (d_1, d_2) \\ &= (ac_1, ac_2) + (d_1, d_2) \\ &= (ac_1 + d_1, ac_2 + d_2) \end{aligned}$$

Karena diketahui $T(b_1, b_2) = (2b_1 + b_2, b_1)$. dan $au + v = (ac_1 + d_1, ac_2 + d_2)$, maka

$$T(b_1, b_2) = (2(ac_1 + d_1) + ac_2 + d_2, ac_1 + d_1)$$

Jadi,

$$\begin{aligned} aT(u) + T(v) &= a(2c_1 + c_2, c_1) + (2d_1 + d_2, d_2) \\ &= (2ac_1 + ac_2 + 2d_1 + d_2, ac_1 + d_1) \\ &= a(2ac_1 + ac_2, c_1) + (2d_1 + d_2, d_1) \\ &= (2(ac_1 + d_1) + ac_2 + d_2, ac_1 + d_1) \end{aligned}$$

Dengan demikian, berdasarkan Definisi 2.17 terbukti bahwa $T$ adalah operator *linear*.

Setelah mengetahui definisi operator *linear* pada ruang vektor, selanjutnya akan dijelaskan mengenai definisi operator isometri.

**Definisi 2.18**

Misalkan $V$ dan $W$ merupakan ruang bernorma *linear*. Diberikan $T \in L(V, W)$. Jika $\|Tv\| = \|v\|$ untuk semua $v \in V$, maka $T$ disebut sebagai isometri (Rynne & Youngson, 2008).

**Contoh 2.11**

Misalkan $W$ merupakan ruang bernorm *linear*. Jika $I$ merupakan operator identitas pada $W$, maka $I$ adalah isometri.

**Penyelesaian**

Diketahui $I$ merupakan operator identitas pada ruang bernorma *linear* $W$.

Akan dibuktikan $I$ adalah isometri.

Misalkan operator identitas $I$ didefinisikan dengan $Iy = y$ untuk setiap $y \in W$.

Berdasarkan Definisi 2.13, suatu fungsi norma di ruang hasil kali dalam didefinisikan dengan $\|y\| = \langle y, y \rangle^{\frac{1}{2}}$ .

Sehingga,

$$\begin{aligned} \|y\|^2 &= \langle y, y \rangle \\ &= \langle Iy, Iy \rangle \\ &= \|Iy\|^2 \\ \|y\| &= \|Iy\| \end{aligned}$$

Karena $\|y\| = \|Iy\|$, maka berdasarkan Definisi 2.18 operator $I$ merupakan isometri.

Selanjutnya, pada definisi berikut akan dijelaskan mengenai injektif pada operator *linear*.

**Definisi 2.19**

Misalkan $V$ dan $W$ merupakan ruang vektor. Operator $T : V \to W$ dikatakan injektif apabila untuk setiap $v \in V$ dan $w \in W$, berlaku

$$Tu = Tv$$

atau

$$u = v$$

Matematikawan menggunakan istilah *one to one* untuk menunjukkan operator tersebut injektif (Axler, 2015).

**Contoh 2.12**

Misalkan $W$ merupakan ruang bernorm *linear*. Jika $I$ merupakan operator isometri pada $W$. Tunjukkan bahwa operator isometri $I$ merupakan injektif.

**Penyelesaian**

Diketahui $I$ merupakan operator isometri.

Akan dibuktikan $I$ adalah injektif.

Andaikan $x, y \in X$.

Berdasarkan Definisi 2.18, maka berlaku $\|Ix\| = \|x\|$ .

Sehingga untuk setiap $y$, maka

$$\begin{aligned} y &= Ix \\ &= (SS^*)x \\ &= S(S^*x) \\ y &= Sx \end{aligned}$$

Karena $y = Sx$, maka untuk setiap $x$ dan $y$ yang diberikan, operator $I$ tidak injektif.

Setelah mengetahui operator *linear* $T$ merupakan injektif, berikut akan dijelaskan definisi tentang operator *linear* $T$ merupakan surjektif. Sebelum menjelaskan operator *linear* $T$ merupakan surjektif, akan ditunjukkan terlebih dahulu *range* dari operator $T$.

**Definisi 2.20**

Misalkan $V$ dan $W$ merupakan ruang vektor. Diberikan operator $T : V \to W$. *Range* dari $T$ merupakan *subset* $W$ terdiri dari vektor-vektor yang berbentuk $Tv$ untuk setiap $v \in V$, sedemikian sehingga

$$\textit{range}\ T = \{Tv : v \in V\}$$

(Axler, 2015).

Setelah mengetahui *range* dari operator $T$, selanjutnya akan dijelaskan mengenai operator $T$ merupakan surjektif.

**Definisi 2.21**

Misalkan $V$ dan $W$ merupakan ruang vektor. Diberikan operator $T : V \to W$. Operator $T : V \to W$ dikatakan surjektif apabila *range* $T$ sama dengan $W$. Matematikawan menggunakan istilah *onto* untuk menunjukkan operator tersebut surjektif (Axler, 2015).

Setelah mengetahui operator *linear* $T$ merupakan surjektif, berikut akan dijelaskan definisi tentang operator *linear* $T$ merupakan terbatas.

**Contoh 2.12**

Misalkan $W$ merupakan ruang bernorm *linear*. Jika $I$ merupakan operator isometri pada $W$. Tunjukkan bahwa operator isometri $I$ merupakan surjektif.

**Penyelesaian**

Diketahui $I$ merupakan operator isometri.

Akan ditunjukkan operator isometri $I$ merupakan surjektif

Berdasarkan Definisi 2.18, maka berlaku $\|Ix\| = \|x\|$ .

Sehingga untuk setiap $y$, maka

$$
\begin{aligned}
y &= Ix \\
&= (SS^*)x \\
&= S(S^*x) \\
y &= Sx
\end{aligned}
$$

Karena $y = Sx$, maka terbukti bahwa operator $I$ adalah surjektif.

**Definisi 2.22**

Misalkan $X$ dan $Y$ merupakan ruang bernorma *linear*. Diberikan $T: X \to Y$ merupakan transformasi *linear*. $T$ dikatakan terbatas apabila terdapat bilangan positif $K$ sedemikian sehingga untuk setiap $u \in X$, berlaku

$$\|Tu\| \leq K\|u\|$$

Himpunan semua transformasi *linear* kontinu dari $X$ ke $Y$ ditunjukkan dengan $B(X, Y)$. Elemen dari $B(X, Y)$ dinamakan operator *linear* terbatas atau operator *linear*. Jika $X$ dan $Y$ merupakan ruang bernorma *linear*, maka $B(X, Y) \subseteq L(X, Y)$ (Rynne & Youngson, 2008).

**Contoh 2.15**

Operator *linear* $K: C[a,b] \rightarrow C[a,b]$ untuk setiap $s \in [a,b]$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\big(K(g)\big)(s) = \int_a^b k(s,t)g(t)dt$$

maka,

$K \in B([a,b], C[a,b])$ dan $\|K(g)\| \leq M(b-a)\|g\|$.

**Penyelesaian**

Diketahui untuk setiap $s \in [a,b]$ didefinisikan dengan $\big(K(g)\big)(s) = \int_a^b k(s,t)g(t)dt$.

Akan dibuktikan $K \in B([a,b], C[a,b])$ dan $\|K(g)\| \leq M(b-a)\|g\|$.

Sehingga,

$$\begin{aligned}
\big(K(g)\big)(s) &\leq \int_a^b |k(s,t)g(t)|dt \\
&\leq \int_a^b M\|g\|dt \\
&\leq \int_a^b M(b-a)\|g\|dt
\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $\|K(g)\| \leq M(b-a)\|g\|$.

Setelah mengetahui operator *linear* $T$ merupakan terbatas, berikut akan dijelaskan definisi tentang norm $T$.

**Definisi 2.23**

Misalkan $X$ dan $Y$ merupakan ruang bernorm *linear*. Diberikan $T \in B(X, Y)$. Norm dari $T$ didefinisikan untuk setiap $u \in X$, diperoleh

$$\|T\| = sup\{\|Tu\| : \|u\| \leq 1\}$$

(Rynne & Youngson, 2008).

**Contoh 2.16**

Jika operator *linear* $K: C_{\mathbb{F}}[0,1] \to \mathbb{F}$ merupakan operator *linear* terbatas di definisikan dengan $K(f) = f(0)$, maka $\|K\| = 1$.

Akan dibuktikan $\|K\| = 1$.

Untuk membuktikan $\|K\| = 1$, akan ditunjukkan terlebih dahulu bahwa $K(f) = f(0)$ merupakan kontinu.

Misalkan $f \to C_{\mathbb{F}}[0,1]$, maka

$$|T(f)| = |f(0)| \leq \sup\{f(x): x \in [0,1]\} = \|f\|$$

Jadi, $T$ adalah kontinu.

Karena $T$ adalah kontinu, maka untuk $f \in C_{\mathbb{C}}[0,1]$ diperoleh $|T(f)| \leq \|f\|$.

Karena $\|T\| = \inf\{k : \|Tx\| \leq k\|x\|$ untuk $x \in X\} \leq 1$.

Di sisi lain, jika $g : [0,1] \to \mathbb{C}$ didefinisikan sebagai $g(x) = 1$, maka $g \in C_{\mathbb{C}}[0,1]$ dengan $\|g\| = \sup\{|g(x)|: x \in [0,1]\} = 1$.

Sehingga,

$$|T(g)| \leq \|T\|\|g\| = \|T\|$$

Terbukti bahwa $\|K\| = 1$.

Setelah mengetahui definisi norm $T$, berikut akan dijelaskan definisi operator $T$ yang *invertible* pada ruang bernorm *linear*.

**Definisi 2.24**

Misalkan $X$ dan $Y$ merupakan ruang bernorma *linear*. Operator $T \in B(X,Y)$ dikatakan *invertible* apabila terdapat $S \in B(Y,X)$ sedemikian sehingga $ST = I_X$ dan $TS = I_Y$ dengan $S$ merupakan *invers* dari $T$ dan ditunjukkan dengan $S = T^{-1}$ (Rynne & Youngson, 2008).

Pada Definisi 2.22 dijelaskan bahwa himpunan semua transformasi *linear* kontinu dari $X$ ke $Y$ ditunjukkan dengan $B(X,Y)$. Elemen dari $B(X,Y)$ dinamakan operator *linear* terbatas atau operator *linear*. Operator *linear* yang terbatas pada ruang Hilbert disebut sebagai operator *linear* pada ruang Hilbert. Sehingga, himpunan semua operator *linear* terbatas pada ruang Hilbert $\mathcal{H}_1$ ke $\mathcal{H}_2$ ditulis dengan $B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Terdapat beberapa macam operator pada ruang Hilbert yang penting untuk dipelajari, diantaranya

**Definisi 2.25**

Misalkan $T$ merupakan operator terbatas pada ruang Hilbert $\mathcal{H}$. Operator $T^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ didefinisikan untuk setiap $x, y \in \mathcal{H}$, berlaku

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$$

Dengan kata lain, operator $T^*$ disebut sebagai operator *adjoint* terhadap operator $T$ (Debnath & Mikusinski, 2005).

**Contoh 2.18**

Misalkan $\mathcal{H}$ merupakan ruang Hilbert. Buktikan jika $I$ merupakan operator identitas pada $\mathcal{H}$, maka $I^* = I$.

**Penyelesaian**

Diketahui $I$ merupakan operator identitas pada ruang Hilbert $\mathcal{H}$. Akan dibuktikan $I^* = I$. Misalkan $r, s \in \mathcal{H}$, maka

$$
\begin{aligned}
\langle r, s \rangle &= \langle Ir, s \rangle && \text{(Diketahui)} \\
&= \langle r, I^* s \rangle && \text{(Definisi 2.25)} \\
\langle r, Is \rangle &= \langle r, I^* s \rangle
\end{aligned}
$$

Jadi, untuk setiap $s$ diperoleh $I^* = I$.

Setelah mengetahui operator *adjoint* pada ruang Hilbert, akan ditunjukkan sifat-sifat operator *adjoint* pada Teorema 2.6. Berikut merupakan aksioma yang termuat pada Lemma 2.2 :

**Lemma 2.2**

Misalkan $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ adalah ruang Hilbert. Diberikan $P, Q \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ dan $T \in B(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$, maka untuk setiap $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ berlaku:

1. $(\mu P + \lambda Q)^* = \bar{\mu} P^* + \bar{\lambda} Q^*$,
2. $(TP)^* = P^* T^*$ (Rynne & Youngson, 2008).

**Bukti**

1. Akan dibuktikan bahwa $(\mu P + \lambda Q)^* = \bar{\mu} P^* + \bar{\lambda} Q^*$.Akan ditunjukkan $\langle u, (\mu P + \lambda Q)^* v \rangle = \langle u, (\bar{\mu} P^* + \bar{\lambda} Q^*) v \rangle$ untuk setiap $u \in \mathcal{H}_1$ dan $v \in \mathcal{H}_2$, maka

$$
\begin{aligned}
\langle u, (\mu P + \lambda Q)^* v \rangle &= \langle (\bar{\mu} P^* + \bar{\lambda} Q^*) u, v \rangle \\
&= \langle (\bar{\mu} P) u, v \rangle + \langle (\bar{\lambda} Q) u, v \rangle \\
&= \langle \bar{\mu} (Pu), v \rangle + \langle \bar{\lambda} (Qu), v \rangle \\
&= \bar{\mu} \langle Pu, v \rangle + \bar{\lambda} \langle Qu, v \rangle
\end{aligned}
$$

$$= \bar{\mu}\langle u, P^*v\rangle + \bar{\lambda}\langle u, Q^*v\rangle$$

$$= \langle u, (\bar{\mu}P^* + \bar{\lambda}Q^*)v\rangle$$

Sehingga, $\langle u, (\mu P + \lambda Q)^*v\rangle = \langle u, (\bar{\mu}P^* + \bar{\lambda}Q^*)v\rangle$.

Karena $(\mu P + \lambda Q)^*v = (\bar{\mu}P^* + \bar{\lambda}Q^*)v$ untuk setiap $v \in \mathcal{H}_2$ yang diberikan, maka terbukti bahwa $(\mu P + \lambda Q)^* = \bar{\mu}P^* + \bar{\lambda}Q^*$.

2. Akan dibuktikan bahwa $(PT)^* = T^*P^*$. Akan ditunjukkan bahwa $\langle (PT)^*v, u\rangle = \langle (T^*P^*)v, u\rangle$ untuk setiap $u \in \mathcal{H}_1$ dan $v \in \mathcal{H}_2$ Diperoleh,

$$\langle u, (PT)^*v\rangle = \langle (PT)u, v\rangle$$

$$= \langle Pu, v\rangle\langle Tu, v\rangle$$

$$= \langle Tu, v\rangle\langle Pu, v\rangle$$

$$= \langle u, T^*v\rangle\langle u, P^*v\rangle$$

$$= \langle u, (T^*P^*)v\rangle$$

Sehingga, $\langle u, (PT)^*v\rangle = \langle u, (T^*P^*)v\rangle$.

Karena $(PT)^*v = (T^*P^*)v$ untuk sebarang $v$ yang diberikan, maka terbukti bahwa $(PT)^* = T^*P^*$.

Setelah mengetahui definisi operator *adjoint* dan aksioma pada operator *adjoint*, selanjutnya akan dijelaskan sifat-sifat operator *adjoint.*

**Teorema 2.6**

Misalkan $\mathcal{H}_1$ dan $\mathcal{H}_2$ adalah ruang Hilbert. Diberikan $T \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, maka berlaku aksioma berikut:

1. $(T^*)^* = T$,
2. $\|T\|^2 = \|T^*T\|$,
3. Suatu fungsi $f: B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \to B(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ didefinisikan dengan $f(Q) = Q^*$ kontinu,

4. $\|T^*\| = \|T\|$ (Rynne & Youngson, 2008).

**Bukti**

1. Akan dibuktikan bahwa $(T^*)^* = T$.

   Ambil sebarang $u \in \mathcal{H}_1$ dan $v \in \mathcal{H}_2$, maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

   $$\begin{aligned} \langle u, (T^*)^* v\rangle &= \langle T^* u, v\rangle \\ &= \overline{\langle v, T^* u\rangle} \\ &= \overline{\langle Tu, v\rangle} \\ &= \langle v, Tu\rangle \end{aligned}$$

   Sehingga, diperoleh $\langle v, (T^*)^* u\rangle = \langle v, Tu\rangle$.

   Karena $(T^*)^* u = Tu$ untuk sebarang $u \in \mathcal{H}_1$, maka terbukti bahwa $(T^*)^* = T$.

2. Akan dibuktikan bahwa $\|T^*T\| = \|T\|^2$

   Ambil sebarang $u \in \mathcal{H}_1$ dengan $\|u\| = 1$, berlaku

   $$\begin{aligned} \|Tu\|^2 &= \langle Tu, Tu\rangle \\ &= \langle T^*Tu, u\rangle \\ &\leq \|T^*Tu\|\|u\| \\ &\leq \|T^*T\|\|u\|\|u\| \\ &= \|T^*T\|\|u\|^2 \end{aligned}$$

   Karena, $\|Tu\|^2 = \|T^*T\|\|u\|^2$. Untuk sebarang $u \in \mathcal{H}_1$ yang diberikan, berakibat $\|T\|^2 = \|T^*T\|$.

   Dengan demikian, terbukti bahwa $\|T\|^2 = \|T^*T\|$.

3. Akan dibuktikan bahwa $f$ kontinu.

   Suatu fungsi $f: B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \rightarrow B(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ didefinisikan dengan $f(Q) = Q^*$ adalah kontinu.

   Misalkan $\varepsilon > 0$ dan $\delta = \varepsilon$ maka $\|P - Q\| < \delta$. Sehingga,

   $$\begin{aligned} \|f(P) - f(Q)\| &= \|P^* - Q^*\| \\ &= \|(P - Q)^*\| \\ &= \|P - Q\| \end{aligned}$$

   Karena $\|f(P) - f(Q)\| = \|P - Q\|$ dimana $\|P - Q\| < \delta$, hal ini berarti $\|f(P) - f(Q)\| < \varepsilon$. Dengan demikian, berdasarkan Teorema 2.6 bagian 2, maka $f$ adalah kontinu.

4. Ambil sebarang $u \in \mathcal{H}_1$ dengan $\|u\| = 1$, maka diperoleh

   $$\begin{aligned} \|T^*u\|^2 &= \langle T^*u, T^*u \rangle \\ &= \langle u, TT^*u \rangle \\ &\leq \|u\|\|TT^*u\| \\ &\leq \|u\|\|T\|\|T^*u\| \end{aligned}$$

   Dengan demikian, dapat ditulis sebagai berikut:

   $$\|T^*u\|^2 \leq \|T\|\|T^*u\|\|u\| \qquad (1)$$

   Jika $\|T^*u\| > 0$, maka dengan membagi kedua ruas dengan $\|T^*u\|$ pada ketaksamaan (1) diperoleh ketaksamaan berikut:

   $$\|T^*u\| \leq \|T\|\|u\| \qquad (2)$$

   Jika $\|T^*u\| = 0$, maka berdasarkan Definisi 2.23 didefinisikan dengan $T^*$ merupakan terbatas. Berdasarkan Teorema 2.6 bagian 3 dijelaskan bahwa $T^*$ merupakan ketaksamaan yang memiliki sifat kontinu.

Selanjutnya, dengan menggunakan ketaksamaan (2) diperoleh ketaksamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \|T\|\|u\| &\geq \|T^*u\| \\ &\leq \|T^*\|\|u\| \\ \|T\| &\leq \|T^*\| \end{aligned}$$

Dengan demikian, dapat ditulis sebagai berikut:

$$\|T\| \leq \|T^*\|$$

Selanjutnya, dengan mengganti $T$ dengan $T^*$ pada ketaksamaan (3) dapat diperoleh ketaksamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \|T^* &\leq \|T^{**}\| \\ &= \|T\| \end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $\|T^*\| = \|T\|$.

Setelah mencantumkan definisi operator *adjoint* beserta sifat-sifatnya, selanjutnya akan diulas mengenai operator *self-adjoint* beserta sifat-sifatnya.

**Definisi 2.26**

Jika $\mathcal{H}$ adalah ruang Hilbert dan operator $T \in B(\mathcal{H})$, maka $T$ merupakan operator *self* - *adjoint* apabila $T = T^*$ (Rynne & Youngson, 2008).

**Contoh 2.19**

Misalkan $\mathcal{H}$ adalah ruang Hilbert. Diberikan operator $S, T \in B(\mathcal{H})$ merupakan operator *self-adjoint.* Tunjukkan bahwa $ST$ merupakan operator *self-adjoint* jika dan hanya jika $ST = TS$.

**Penyelesaian**

Diketahui bahwa $ST$ merupakan operator *self-adjoint.*

Karena $ST$ merupakan operator *self-adjoint,* maka berdasarkan Definisi 2.26 diperoleh

$$ST = (ST)^*$$

Akan ditunjukkan $ST = TS$.

Perhatikan persamaan berikut:

$$\begin{aligned} ST &= (ST)^* && \text{(Definisi 2.26)} \\ &= T^*S^* && \text{(Lemma 2.2)} \\ ST &= TS && \text{(Definisi 2.26)} \end{aligned}$$

Setelah mengetahui definisi operator *self adjoint* pada ruang Hilbert, selanjutnya akan dijelaskan mengenai sifat-sifat operator *self-adjoint* pada ruang Hilbert.

**Lemma 2.3**

Misalkan $\mathcal{H}$ adalah ruang Hilbert. Diberikan $T \in B(\mathcal{H})$,

1. $T^*T$ dan $TT^*$ adalah operator *self adjoint.*
2. $T = R + iS$ dimana $R$ dan $S$ adalah operator *self-adjoint* (Debnath & Mikusinski, 2005).

**Bukti**

1. Akan dibuktikan $T^*T$ dan $TT^*$ adalah operator *self adjoint*.

   Akan ditunjukkan $T^*T$ adalah operator *self adjoint*.

   Berdasarkan Lemma 2.1 bagian 2, maka

   $$\begin{aligned} (T^*T)^* &= T^*(T^*)^* \\ &= T^*T \end{aligned}$$

Dengan demikian, $(T^*T)^* = T^*T$.

Berdasarkan Definisi 2.26, jika $\mathcal{H}$ merupakan ruang Hilbert dan $T \in B(\mathcal{H})$, maka $T$ merupakan operator *self adjoint* apabila $T = T^*$.

Sehingga, terbukti bahwa $T^*T$ merupakan operator *self adjoint*.

Selanjutnya, akan ditunjukkan $TT^*$ adalah operator *self adjoint*.

Berdasarkan Lemma 2.1 bagian 2, maka

$$(TT^*)^* = (T^*)^*T^*$$
$$TT^*$$

Dengan demikian, $(TT^*)^* = TT^*$.

Berdasarkan Definisi 2.26, maka $T$ merupakan operator *self adjoint*.

Sehingga, terbukti bahwa $TT^*$ merupakan operator *self adjoint*.

2. Akan dibuktikan $T = R + iS$ dimana $R$ dan $S$ adalah operator *self-adjoint*.

Misalkan $R = \frac{1}{2}(T + T^*)$ dan $S = \frac{1}{2i}(T - T^*)$, maka

$$\begin{aligned} R + iS &= \frac{1}{2}(T + T^*) + i\frac{1}{2i}(T - T^*) \\ &= \frac{1}{2}(T + T^*) + \frac{1}{2}(T - T^*) \\ &= \frac{1}{2}(T + T^* + T - T^*) \\ &= \frac{1}{2}(2T) = T \end{aligned}$$

Jadi, $R + iS = T$.

Akan dibuktikan $T = R + iS$ dimana $R$ dan $S$ adalah operator *self-adjoint*.

Akan ditunjukkan $T^*T$ adalah operator *self adjoint*.

Berdasarkan Lemma 2.1 bagian 2, maka

$$\begin{aligned}(T^*T)^* &= T^*(T^*)^*\\ &= T^*T\end{aligned}$$

Dengan demikian, $(T^*T)^* = T^*T$.

Karena $(T^*T)^* = T^*T$, maka berdasarkan Definisi 2.26 $T$ merupakan operator *self adjoint*.

Sehingga, terbukti bahwa $T^*T$ merupakan operator *self adjoint*.

Selanjutnya, akan ditunjukkan $TT^*$ adalah operator *self adjoint*.

Perhatikan Lemma 2.1 bagian 2, jika diberikan $T \in B(\mathcal{H})$, maka

$$\begin{aligned}(TT^*)^* &= (T^*)^*T^*\\ &= TT^*\end{aligned}$$

Dengan demikian, $(TT^*)^* = TT^*$.

Berdasarkan Definisi 2.26, jika $\mathcal{H}$ merupakan ruang Hilbert dan $T \in B(\mathcal{H})$, maka $T$ merupakan operator *self adjoint* apabila $T = T^*$.

Sehingga, terbukti bahwa $TT^*$ merupakan operator *self adjoint*.

Selanjutnya, akan dibuktikan $T = R + iS$ dimana $R$ dan $S$ adalah operator *self-adjoint*.

Misalkan $R = \frac{1}{2}(T + T^*)$ dan $S = \frac{1}{2i}(T - T^*)$, maka

$$\begin{aligned}R + iS &= \frac{1}{2}(T + T^*) + i\frac{1}{2i}(T - T^*)\\ &= \frac{1}{2}(T + T^*) + \frac{1}{2}(T - T^*)\\ &= \frac{1}{2}(T + T^* + T - T^*)\\ &= \frac{1}{2}(2T) = T\end{aligned}$$

Jadi, $R + iS = T$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $R$ adalah operator *self adjoint.*

Misalkan $R = \frac{1}{2}(T + T^*)$ dengan $T \in B(\mathcal{H})$, maka

$$R^* = \left(\frac{1}{2}(T + T^*)\right)^*$$
$$R^* = \frac{1}{2}(T^* + (T^*)^*)$$
$$R^* = \frac{1}{2}(T^* + T)$$

Jadi, $R^* = \frac{1}{2}(T^* + T)$. Sedemikian sehingga, $R = R^*$.

Sehingga berdasarkan Definisi 2.26, $R$ adalah operator *self adjoint*.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $S$ adalah operator *self adjoint.*

Misalkan $S = \frac{1}{2i}(T - T^*)$ dengan $T \in B(\mathcal{H})$, maka

$$S^* = \left(\frac{1}{2i}(T - T^*)\right)^*$$
$$S^* = -\frac{1}{2i}(T^* - (T^*)^*)$$
$$S^* = -\frac{1}{2i}(T^* - T)$$
$$S^* = \frac{1}{2i}(T - T^*)$$

Jadi, $S^* = \frac{1}{2i}(T - T^*)$. Sedemikian sehingga, $S = S^*$.

Sehingga berdasarkan Definisi 2.26, $S$ adalah operator *self adjoint*.

Setelah mencantumkan definisi operator *self adjoint* beserta sifat-sifatnya, selanjutnya akan diulas mengenai operator normal beserta sifat-sifatnya.

**Definisi 2.27**

Jika $\mathcal{H}$ adalah ruang Hilbert dan operator $T \in B(\mathcal{H})$, maka $T$ merupakan operator normal apabila $TT^* = T^*T$ (Rynne & Youngson, 2008).

**Contoh 2.20**

Misalkan $l^2$ merupakan barisan pada ruang Hilbert $\mathcal{H}$. Diberikan operator *linear* terbatas $T: l^2 \to l^2$ didefinisikan dengan $T(a_1, a_2, , \dots) = (a_2, a_3, \dots)$ dan $T^*(a_1, a_2, , \dots) = (0, a_1, a_2, \dots)$. Tunjukkan bahwa operator $T$ adalah operator normal.

**Penyelesaian**

Diketahui operator $T: l^2 \to l^2$ didefinisikan dengan $T(a_1, a_2, , \dots) = (a_2, a_3, \dots)$ dan $T^*(a_1, a_2, , \dots) = (0, a_1, a_2, \dots)$.

Akan ditunjukkan $T(a_1, a_2, , \dots) = (a_2, a_3, \dots)$ dan $T^*(a_1, a_2, , \dots) = (0, a_1, a_2, \dots)$ memenuhi $TT^* = T^*T$.

Perhatikan persamaan berikut:

$$
\begin{aligned}
\langle TT^*a, a\rangle &= \langle Ta, a\rangle\langle T^*a, a\rangle \\
&= \langle (a_2, a_3, \dots), (a_1, a_2, \dots)\rangle\langle (0, a_1, \dots), (a_1, a_2, \dots)\rangle \\
&= \langle (a_2\overline{a_1}, a_3\overline{a_2}, \dots)(a_1\overline{a_2}, a_2\overline{a_3}, \dots)\rangle\langle (a_1\overline{a_2}, \dots)(a_2\overline{a_1}, \dots)\rangle \\
&= \langle (a_1\overline{a_2}, a_2\overline{a_3}, \dots)(a_2\overline{a_1}, a_3\overline{a_2}, \dots)\rangle\langle (a_2\overline{a_1}, \dots)(a_1\overline{a_2}, \dots)\rangle \\
&= \langle (0, a_1, \dots), (a_1, a_2, \dots)\rangle\langle (a_2, a_3, \dots), (a_1, a_2, \dots)\rangle \\
&= \langle T^*a, a\rangle\langle Ta, a\rangle \\
&= \langle T^*Ta, a\rangle
\end{aligned}
$$

Jadi, untuk setiap $a$ diperoleh $TT^* = T^*T$.

Setelah mengetahui definisi operator normal pada ruang Hilbert, selanjutnya akan dijelaskan mengenai ekivalensi operator *linear* terbatas dengan operator normal pada ruang Hilbert.

**Teorema 2.7**

Misalkan $\mathcal{H}$ adalah ruang Hilbert dan operator $T \in B(\mathcal{H})$. Pernyataan berikut ekivalen:

1. $T$ operator normal,
2. $T^*$ operator normal,
3. $\|T(u)\| = \|T^*(u)\|$ (Darmawijaya, 2007).

**Bukti**

1. $(1 \Longrightarrow 2)$

   Diketahui $T$ merupakan operator normal.

   Akan dibuktikan $T^*$ merupakan operator normal.

   Karena $T$ adalah operator normal, maka berdasarkan Definisi 2.27 berlaku $TT^* = T^*T$.

   Sehingga, berdasarkan Teorema 2.6 bagian 1 diperoleh $TT^* = T^{**}T^*$ dan $T^*T = T^*T^{**}$.

   Dengan demikian, $T^{**}T^* = T^*T^{**}$.

   Jadi, terbukti bahwa $T^*$ merupakan operator normal.

2. $(2 \Longrightarrow 3)$

   Diketahui $T^*$ merupakan operator normal.

   Akan dibuktikan $\|T(u)\| = \|T^*(u)\|$.

   Perhatikan persamaan berikut ini:

$$\|Tu\|^2 = \langle Tu, Tu \rangle \quad \text{(Definisi 2.13)}$$

$$= \langle u, T^*Tu \rangle \quad \text{(Definisi 2.25)}$$

$$= \langle u, TT^*u \rangle \quad \text{(Definisi 2.26)}$$

$= \langle T^*u, T^*u \rangle$

$= \|T^*(u)\|^2$ (Definisi 2.13)

Dengan demikian, terbukti bahwa $\|T(u)\| = \|T^*(u)\|$.

3. $(3 \Rightarrow 1)$

Diketahui $\|T(u)\| = \|T^*(u)\|$.

Akan dibuktikan $T$ merupakan operator normal.

Perhatikan persamaan berikut

$\|T(u)\| = \|T^*(u)\|$ (Diketahui)

$\|T(u)\|^2 = \|T^*(u)\|^2$

$0 = \|T(u)\|^2 - \|T^*(u)\|^2$

$= \langle Tu, Tu \rangle - \langle T^*u, T^*u \rangle$ (Teorema 2.13)

$= \langle T^*Tu, u \rangle - \langle TT^*u, u \rangle$ (Definisi 2.25)

$= \langle TT^*u, u \rangle - \langle TT^*u, u \rangle$ (Definisi 2.26)

$= \langle TT^*u - TT^*u, u \rangle$

$= \langle (TT^* - TT^*)u, u \rangle$ (Definisi 2.3 bagian 6)

Sehingga, $TT^* - TT^* = 0$.

Karena $u$ merupakan sebarang vektor di $\mathcal{H}$, maka dengan memilih $u$ sebagai vektor taknol di $\mathcal{H}$, haruslah $(TT^* - TT^*)u$ merupakan vektor nol di $\mathcal{H}$. Hal ini berarti $TT^* - TT^*$ haruslah operator nol pada $\mathcal{H}$.

Dengan demikian, $TT^* = TT^*$ atau $T$ merupakan operator normal.

Setelah mengetahui definisi operator normal beserta hal lainnya yang berkaitan dengan operator normal pada ruang Hilbert, selanjutnya akan dijelaskan mengenai definisi operator uniter pada ruang Hilbert.

**Definisi 2.28**

Misalkan $\mathcal{H}_1$dan $\mathcal{H}_2$ adalah ruang Hilbert dan $T \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ maka $T$ dikatakan operator uniter jika dan hanya jika $TT^* = T^*T = I$ (Rynne & Youngson, 2008).

Setelah mengetahui definisi operator uniter pada ruang Hilbert, selanjutnya akan dijelaskan mengenai sifat-sifat operator uniter pada ruang Hilbert.

**Teorema 2.8**

Misalkan $\mathcal{H}$ merupakan ruang Hilbert. Diberikan $T, S \in B(\mathcal{H})$, maka

1. $T^*T = I$ jika dan hanya jika $T$ adalah isometri.
2. $S$ merupakan uniter jika dan hanya jika $S$ adalah isometri dari $\mathcal{H}$ *onto* $\mathcal{H}$ (Rynne & Youngson, 2008).

**Bukti**

1. Akan dibuktikan bahwa $T^*T = I$ jika dan hanya jika $T$ adalah isometri.

   (⇒)

   Diketahui bahwa $T^*T = I$.

   Akan ditunjukkan $T$ adalah isometri.

   Perhatikan persamaan berikut:

   $$\begin{aligned} \|Tx\|^2 &= \langle Tx, Tx \rangle && \text{(Definisi 2.13)} \\ &= \langle x, T^*Tx \rangle && \text{(Definisi 2.17)} \\ &= \langle x, Ix \rangle && \text{(Diketahui)} \\ &= \langle x, x \rangle \\ \|Tx\|^2 &= \|x\|^2 && \text{(Definisi 2.13)} \end{aligned}$$

   Jadi,

   $$\|Tx\|^2 = \|x\|^2 \tag{1}$$

Selanjutnya, dengan mengambil akar kuadrat kedua ruas pada persamaan (1) diperoleh $\|Tx\| = \|x\|$.

Karena $\|Tx\| = \|x\|$, maka berdasarkan Definisi 2.18 terbukti $T$ adalah isometri.

($\Leftarrow$)

Diketahui bahwa $T$ adalah isometri.

Akan ditunjukkan $T^*T = I$.

Karena $T$ adalah isometri, maka berdasarkan Definisi 2.18 berlaku $\|Tx\| = \|x\|$.

$$\|Tx\| = \|x\| \tag{2}$$

Selanjutnya, dengan mengambil pangkat kuadrat kedua ruas pada persamaan (2) diperoleh

$$\|Tx\|^2 = \|x\|^2$$

Perhatikan persamaan berikut:

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 &= \|x\|^2 \\ \langle Tx, Tx\rangle &= \langle x, x\rangle && \text{(Definisi 2.13)} \\ \langle x, T^*Tx\rangle &= \langle x, Ix\rangle && \text{(Definisi 2.25)} \end{aligned}$$

Dengan demikian, $\langle x, T^*Tx\rangle = \langle x, Ix\rangle$.

Jadi, untuk setiap $x$ diperoleh $T^*T = I$.

Sehingga, terbukti bahwa $T^*T = I$ jika dan hanya jika $T$ adalah isometri.

2. $S$ merupakan operator uniter jika dan hanya jika $S$ adalah isometri dari $\mathcal{H}$ *onto* $\mathcal{H}$.

   ($\Rightarrow$)

   Diketahui bahwa $S$ merupakan uniter.

Berdasarkan Definisi 2.28, operator *linear* terbatas $S$ pada ruang Hilbert $\mathcal{H}$ dikatakan operator uniter apabila $SS^* = S^*S = I$.

Berdasarkan Teorema 2.8 bagian 1, $S^*S = I$ dengan $S$ merupakan operator *linear* terbatas pada ruang Hilbert $\mathcal{H}$ jika dan hanya jika $S$ adalah isometri.

Karena $SS^* = S^*S = I$ dan $S^*S = I$ dengan $S$ adalah isometri, selanjutnya akan ditunjukkan bahwa operator isometri $S$ memetakan $\mathcal{H}$ *onto* $\mathcal{H}$.

Ambil sebarang $y \in \mathcal{H}$, maka

$$
\begin{aligned}
y &= Iy \\
&= (SS^*)y && \text{(Teorema 2.8 bagian 1)} \\
&= S(S^*y) && \text{(Definisi 2.17 bagian 2)} \\
&= Sx && \text{(Definisi 2.21)}
\end{aligned}
$$

Karena $y = Sx$, maka berdasarkan Definisi 2.21 operator isometri $S$ memetakan $\mathcal{H}$ *onto* $\mathcal{H}$.

($\Leftarrow$)

Diketahui operator $S$ adalah isometri dari $\mathcal{H}$ *onto* $\mathcal{H}$.

Berdasarkan Teorema 2.8 bagian 1, $S^*S = I$ dengan $S$ merupakan operator *linear* terbatas pada ruang Hilbert $\mathcal{H}$ jika dan hanya jika $S$ adalah isometri.

Akan ditunjukkan operator $S$ merupakan uniter.

Misalkan $x, y \in \mathcal{H}$.

Jika $y \in \mathcal{H}$, maka terdapat $x \in \mathcal{H}$ sedemikian sehingga berdasarkan Definisi 2.21, diperoleh

$$Sx = y$$

Ambil sebarang $x \in \mathcal{H}$, maka

$$
\begin{aligned}
x &= Ix \\
&= (S^*S)x && \text{(Teorema 2.8 bagian 1)} \\
&= S^*(Sx) && \text{(Definisi 2.17 bagian 2)} \\
&= S^*y && \text{(Definisi 2.21)}
\end{aligned}
$$

Jadi,

$$x = S^*y \tag{3}$$

Sehingga, dengan menggunakan Definisi 2.24 dan persamaan (3) diperoleh

$$
\begin{aligned}
Sx &= y && \text{(Definisi 2.21)} \\
S(S^*y) &= y && \text{(Persamaan (3))} \\
(SS^*)(y) &= y && \text{(Definisi 2.17 bagian 2)} \\
(SS^*)(y) &= Iy
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, untuk setiap $y$ yang diberikan, diperoleh

$$SS^* = I \tag{4}$$

Selanjutnya, dengan menggunakan Definisi 2.28 dan Teorema 2.8 bagian 1 serta persamaan (4) terbukti bahwa $S$ adalah uniter.

## 2.2 Kajian Integrasi Operator *Linear* dalam Al – Qur’an

Integrasi Al – Qur’an dengan operator *linear* yang dibahas pada pendahuluan dalam bab I berkaitan dengan perpindahan. Jika dihubungkan dengan pembahasan mengenai pergantian siang dan malam yang termuat dalam Al – Qur’an surah al – Luqman ayat 29, maka tentu saja relevan dengan Al – Qur’an surah Al – Imran ayat 27 berikut (KEMENAG, 2022):

“*Engkau masukkan malam ke dalam siang dan Engkau masukkan siang ke dalam malam. Engkau keluarkan yang hidup dari yang mati, dan Engkau keluarkan yang mati dari yang hidup. Dan Engkau beri rezki siapa yang Engkau kehendaki tanpa hisab (batas)*".

Menurut Syaikh Abu Bakar Jabir Al-Jazairi dalam tafsir al-qur’an al-aisar makna yang terkandung dalam ayat tersebut, yaitu Allah memasukkan siang ke dalam malam hingga tak tersisa lagi waktu siang, Dia - pun memasukkan waktu malam ke dalam waktu siang hingga tak tersisa lagi waktu malam. Allah Ta’ala mengeluarkan yang hidup dari yang mati, seperti manusia berasal dari sperma dan tumbuhan dari sebutir biji. Dan mengeluarkan yang mati dari yang hidup, seperti sperma dari manusia yang hidup dan telur dari ayam betina. Orang kafir yang mati (jiwanya) dari orang mukmin yang hidup (jiwanya), begitu juga sebaliknya. Ini semua termasuk fenomena Rububiyah (kemahapenciptaan) Allah subhanahu wa ta’ala yang menuntut adanya pengesaan *Uluhiyah*-Nya (Jazairi, 2007, hal. 68-69).

Pada kajian teori, pokok bahasan inti integrasi Al – Qur’an tertuju pada ruang Hilbert. Hal ini dikarenakan suatu operator linier yang terbatas pada ruang Hilbert juga dinamakan operator pada ruang Hilbert. Operator linier sendiri merupakan pemetaan suatu vektor ke vektor lainnya atau pemetaan ruang Hilbert ke ruang Hilbert lainnya. Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa jika ruang Hilbert yang di dalamnya terdapat hasil kali dalam dan dihubungkan dengan Al – Qur’an surah al – Imran ayat 27 mengenai himpunan orang-orang kafir yang mati (jiwanya) dan himpunan orang-orang mukmin yang hidup (jiwanya), maka akan relevan dengan ayat tersebut.

## 2.3. Ekivalensi Operator Isometri dengan Operator Uniter pada Ruang Hilbert

Berikut akan disampaikan mengenai ekivalensi operator uniter dengan operator isometri pada ruang Hilbert. Pada subbab ini lebih difokuskan kepada hal-hal yang berkaitan dengan ekivalensi operator isometri dengan operator uniter pada ruang Hilbert.

Sebelum menjelaskan mengenai ekivalensi operator isometri dengan operator uniter pada ruang Hilbert, terlebih dahulu dijelaskan mengenai hal-hal yang berhubungan dengan ekivalensi operator *linear* terbatas dengan operator isometri pada ruang Hilbert.

**Definisi 2.13**

Misalkan $X$ adalah ruang hasil kali dalam. vektor $u, v \in X$ dikatakan *orthogonal*, apabila

$$\langle u, v \rangle = 0$$

(Rynne & Youngson, 2008).

**Definisi 2.14**

Misalkan $X$ adalah ruang hasil kali dalam. Himpunan $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \subset X$ dikatakan *orthonormal* apabila untuk $1 \leq i \leq k$ diperoleh

$$\|e_c\| = 1$$

untuk $1 \leq b, c \leq k$ dengan $b \neq c$ berlaku

$$\langle e_b, e_c \rangle = 0$$

(Rynne & Youngson, 2008).

**Teorema 2.4**

Misalkan $X$ merupakan ruang hasil kali dalam. Jika $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ adalah basis *orthonormal* pada $X$ dan $r$ merupakan sebarang vektor pada $X$, maka

$$r = \langle r, e_1 \rangle e_1 + \langle r, e_2 \rangle e_2 + \cdots + \langle r, e_m \rangle e_m$$

(Anton & Rorres, 2004).

**Teorema 2.5**

Misalkan $X$ merupakan ruang hasil kali dalam. Jika $\dim X = k$ dan $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ merupakan basis *orthonormal* untuk $X$, maka untuk setiap bilangan $\alpha_c \in \mathbb{F}$ dengan $c = 1, \dots, k$ diperoleh

$$z = \left\| \sum_{c=1}^{k} \alpha_c e_c \right\|^2 = \sum_{c=1}^{k} |\alpha_c|^2$$

(Rynne & Youngson, 2008).

**Definisi 2.18**

Misalkan $V$ dan $W$ merupakan ruang bernorm *linear*. Diberikan $T \in L(V, W)$. Jika $\|Tv\| = \|v\|$ untuk semua $v \in V$, maka $T$ disebut sebagai isometri (Rynne & Youngson, 2008).

**Definisi 2.20**

Misalkan $V$ dan $W$ merupakan ruang vektor. Operator $T : V \to W$ dikatakan injektif apabila untuk setiap $v \in V$ dan $w \in W$, berlaku

$$Tu = Tv$$

atau

$$u = v$$

Matematikawan menggunakan istilah *one to one* untuk menunjukkan operator tersebut injektif (Axler, 2015).

**Definisi 2.21**

Misalkan $V$ dan $W$ merupakan ruang vektor. Diberikan operator $T : V \rightarrow W$. *Range* dari $T$ merupakan *subset* $W$ terdiri dari vektor-vektor yang berbentuk $Tv$ untuk setiap $v \in V$, sedemikian sehingga

$$\textit{range } T = \{Tv : v \in V\}$$

(Axler, 2015).

**Definisi 2.22**

Misalkan $V$ dan $W$ merupakan ruang vektor. Diberikan operator $T : V \rightarrow W$. Operator $T : V \rightarrow W$ dikatakan surjektif apabila *range* $T$ sama dengan $W$. Matematikawan menggunakan istilah *onto* untuk menunjukkan operator tersebut surjektif (Axler, 2015).

**Definisi 2.24**

Misalkan $X$ dan $Y$ merupakan ruang bernorma *linear*. Operator $T \in B(X, Y)$ dikatakan *invertible* apabila terdapat $S \in B(Y, X)$ sedemikian sehingga $ST = I_X$ dan $TS = I_Y$ dengan $S$ merupakan *invers* dari $T$ dan ditunjukkan dengan $S = T^{-1}$ (Rynne & Youngson, 2008).

**Definisi 2.28**

Misalkan $\mathcal{H}_1$dan $\mathcal{H}_2$ adalah ruang Hilbert dan $T \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ maka $T$ dikatakan operator uniter jika dan hanya jika $TT^* = T^*T = I$ (Rynne & Youngson, 2008).

**Teorema 2.8**

Misalkan $\mathcal{H}$ merupakan ruang *Hilbert*. Diberikan $T, S \in B(\mathcal{H})$, maka

1. $T^*T = I$ jika dan hanya jika $T$ adalah isometri.
2. $S$ merupakan uniter jika dan hanya jika $S$ adalah isometri dari $\mathcal{H}$ *onto* $\mathcal{H}$ (Rynne & Youngson, 2008).

Setelah menjelaskan mengenai hal-hal yang berhubungan dengan ekivalensi operator isometri dengan operator uniter pada ruang Hilbert, berikut merupakan ekivalensi operator isometri dengan operator uniter pada Ruang Hilbert.

**Sifat 1**

Misalkan $\mathcal{H}$ dan $\mathcal{K}$ merupakan ruang Hilbert. Kelima pernyataan berikut ekivalen pada operator $S \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$:

1. Jika $\{e_i : i \in I\}$ adalah merupakan himpunan *orthonormal* di $\mathcal{H}$, maka $\{Se_i : i \in I\}$ adalah himpunan *orthonormal* di $\mathcal{K}$.
2. Terdapat basis *orthonormal* $\{e_i : i \in I\}$ untuk $\mathcal{H}$ sedemikian sehingga $\{Se_i : i \in I\}$ adalah himpunan *orthonormal* di $\mathcal{K}$,
3. $\langle S(x), S(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ untuk semua $u, v \in \mathcal{H}$,
4. $\|S(x)\| = \|x\|$ untuk semua $u \in \mathcal{H}$,
5. $S^*S = I_{\mathcal{H}}$.

Operator $S \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ yang memenuhi kelima pernyataan ekivalen diatas disebut sebagai isometri.

**Sifat 2**

Misalkan $\mathcal{H}$ dan $\mathcal{K}$ merupakan ruang Hilbert. Kelima pernyataan berikut ekivalen pada operator isometri $S \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$:

1. Jika $\{e_i : i \in I\}$ adalah basis *orthonormal* untuk $\mathcal{H}$, maka $\{Se_i : i \in I\}$ adalah basis *orthonormal* untuk $\mathcal{K}$,
2. Terdapat himpunan *orthonormal* $\{e_i : i \in I\}$ di $\mathcal{H}$ sedemikian sehingga $\{Se_i : i \in I\}$ adalah basis *orthonormal* untuk $\mathcal{K}$,
3. $SS^* = I_{\mathcal{K}}$,
4. $S$ merupakan *invertible*,
5. $S$ memetakan $\mathcal{H}$ *onto* $\mathcal{K}$.

Operator isometri $S \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ yang memenuhi kelima pernyataan ekivalen diatas disebut sebagai uniter.

# BAB III
# METODE PENELITIAN

## 3.1 Jenis Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah deskriptif kualitatif. Penelitian yang dilakukan merupakan penelitian kepustakaan (*library research*) dimana peneliti tersebut mengumpulkan data serta informasi melalui berbagai sumber seperti buku-buku, jurnal, artikel dan referensi lainnya yang sesuai dengan penelitian.

## 3.2 Tahapan Penelitian

Setelah memahami definisi dan konsep dasar yang digunakan untuk penelitian, selanjutnya peneliti melakukan langkah-langkah penulisan skripsi, yaitu mendeskripsikan ekivalensi operator isometri dengan operator uniter sebagai berikut:

1. Menunjukkan bahwa Operator $S \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ yang memenuhi kelima pernyataan ekivalen disebut sebagai operator isometri.
   1) Jika $\{e_i : i \in I\}$ adalah merupakan himpunan *orthonormal* di $\mathcal{H}$, maka terdapat basis $orthonormal$ $\{e_i : i \in I\}$ untuk $\mathcal{H}$,
   2) Jika basis *orthonormal* $\{e_i : i \in I\}$ untuk $\mathcal{H}$ , maka $\langle S(x), S(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ untuk semua $x, y \in \mathcal{H}$,
   3) Jika $\langle S(x), S(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ untuk semua $x, y \in \mathcal{H}$, maka $\|S(x)\| = \|x\|$ untuk semua $x \in \mathcal{H}$,
   4) Jika $\|S(x)\| = \|x\|$ untuk semua $x \in \mathcal{H}$, maka $S^*S = I_{\mathcal{H}}$,

5) Jika $S^*S = I_{\mathcal{H}}$, maka maka $\{Se_i : i \in I\}$ adalah himpunan *orthonormal* di $\mathcal{K}$.

2. Menunjukkan bahwa Operator $S \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ yang memenuhi kelima pernyataan ekivalen disebut sebagai operator isometri.

1) Jika $\{e_i : i \in I\}$ adalah basis *orthonormal* untuk $\mathcal{H}$, maka $\{Se_i : i \in I\}$ adalah basis *orthonormal* untuk $\mathcal{K}$,

2) Jika terdapat himpunan *orthonormal* $\{e_i : i \in I\}$ di $\mathcal{H}$, maka $SS^* = I_{\mathcal{K}}$

3) $SS^* = I_{\mathcal{K}}$, maka $S$ merupakan *invertible*

4) $S$ merupakan *invertible*, maka $S$ memetakan $\mathcal{H}$ *onto* $\mathcal{K}$

5) $S$ memetakan $\mathcal{H}$ *onto* $\mathcal{K}$, , maka $\{Se_i : i \in I\}$ adalah basis *orthonormal* untuk $\mathcal{K}$.

# BAB IV
# HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dilakukan pembahasan mengenai pembuktian dari ekivalensi operator isometri dengan operator uniter pada ruang Hilbert yang termuat pada Teorema 4.1 dan 4.2.

## 4.1 Ekivalensi Operator Isometri dengan Operator Uniter pada Ruang Hilbert

Operator *linear* terbatas $S$ yang memenuhi Definisi 2.18 disebut sebagai operator isometri dan operator isometri $S$ yang memenuhi Definisi 2.28 disebut sebagai operator uniter. Berikut akan dilakukan pembuktian mengenai operator *linear* terbatas $S$ yang memetakan ruang Hilbert $\mathcal{H}$ ke ruang Hilbert $\mathcal{K}$ memenuhi kelima pernyataan ekivalen disebut sebagai isometri serta operator isometri $S$ yang memetakan ruang Hilbert $\mathcal{H}$ ke ruang Hilbert $\mathcal{K}$ memenuhi kelima pernyataan ekivalen disebut sebagai uniter.

**Teorema 4.1**

Misalkan $\mathcal{H}$ dan $\mathcal{K}$ merupakan ruang Hilbert. Kelima pernyataan berikut ekivalen pada operator $S \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$:

1. Jika $\{e_i : i \in I\}$ adalah merupakan himpunan *orthonormal* di $\mathcal{H}$, maka $\{Se_i : i \in I\}$ adalah himpunan *orthonormal* di $\mathcal{K}$.
2. Terdapat basis *orthonormal* $\{e_i : i \in I\}$ untuk $\mathcal{H}$ sedemikian sehingga $\{Se_i : i \in I\}$ adalah himpunan *orthonormal* di $\mathcal{K}$,
3. $\langle S(x), S(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ untuk semua $x, y \in \mathcal{H}$,
4. $\|S(x)\| = \|x\|$ untuk semua $x \in \mathcal{H}$,
5. $S^*S = I_{\mathcal{H}}$.

Operator $S \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ yang memenuhi kelima pernyataan ekivalen di atas disebut sebagai isometri (Furuta, 2001).

**Bukti**

1. $(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2})$

   Diketahui $\{e_i : i \in I\}$ merupakan himpunan *orthonormal* di $\mathcal{H}$ dan $\{Se_i : i \in I\}$ adalah himpunan *orthonormal* di $\mathcal{K}$.

   Akan dibuktikan basis *orthonormal* $\{e_i : i \in I\}$ pada $\mathcal{H}$ sedemikian sehingga $\{Se_i : i \in I\}$ adalah himpunan *orthonormal* di $\mathcal{K}$.

   Karena $\{e_i : i \in I\}$ merupakan himpunan *orthonormal* di $\mathcal{H}$, maka berdasarkan Definisi 2.14 untuk $i = j$ berlaku $\|e_i\| = 1$.

   Berdasarkan Teorema 2.4, himpunan *orthonormal* $\{e_i : i \in I\}$ di $\mathcal{H}$ untuk setiap vektor $x \in \mathcal{H}$ direpresentasikan sebagai berikut:

   $$x = \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i \rangle e_i$$

   Dengan $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ merupakan basis *orthonormal* di $\mathcal{H}$.

   Sehingga, pada himpunan *orthonormal* $\{e_i : i \in I\}$ di $\mathcal{H}$ terdapat basis *orthonormal* $\{e_i : i \in I\}$ pada $\mathcal{H}$ sedemikian sehingga $\{Se_i : i \in I\}$ adalah himpunan *orthonormal* di $\mathcal{K}$.

2. $(\mathbf{2} \rightarrow \mathbf{3})$

   Diketahui basis *orthonormal* $\{e_i : i \in I\}$ untuk $\mathcal{H}$ sedemikian sehingga $\{Se_i : i \in I\}$ adalah himpunan *orthonormal* di $\mathcal{K}$.

   Karena $\{e_i : i \in I\}$ merupakan basis *orthonormal* $\{e_i : i \in I\}$ untuk $\mathcal{H}$, maka berdasarkan Teorema 2.4 diperoleh

$$x = \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i \rangle e_i$$

Akan dibuktikan $\langle S(x), S(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ untuk setiap $x, y \in \mathcal{H}$.

Perhatikan :

$$\langle Sx, Sy \rangle \quad = \langle S \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i \rangle e_i , S \sum_{j=1}^{k} \langle y, e_j \rangle e_j \rangle \qquad \text{(Teorema 2.4)}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \langle x, e_i \rangle \overline{\langle y, e_j \rangle} \langle Se_i, Se_j \rangle \qquad \text{(Teorema 2.2)}$$

Karena $\{Se_i : i \in I\}$ merupakan himpunan *orthonormal* di $\mathcal{K}$, maka berdasarkan Definisi 2.14 untuk $i = j$ dengan $1 \leq i \leq k$ berlaku $\|Se_i\| = 1$.

Sehingga, diperoleh

$$\langle S(x), S(y) \rangle \ = \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i \rangle \overline{\langle y, e_i \rangle}$$

$$= \langle x, y \rangle$$

Jadi, terbukti $\langle Sx, Sy \rangle = \langle x, y \rangle$ untuk setiap $x, y \in \mathcal{H}$.

**3.** $(\mathbf{3} \rightarrow \mathbf{4})$

Diketahui $\langle Sx, Sy \rangle = \langle x, y \rangle$ untuk setiap $x, y \in \mathcal{H}$.

Akan dibuktikan $\|Sx\| = \|x\|$ untuk setiap $x \in \mathcal{H}$.

Misalkan $x = y$, maka $\langle Sx, Sy \rangle = \langle x, y \rangle$ direpresentasikan sebagai berikut:

$$\langle Sx, Sx \rangle = \langle x, x \rangle$$

Selanjutnya, dengan menggunakan Definisi 2.18 diperoleh

$$\|Sx\|^2 = \|x\|^2 \qquad (1)$$

Dengan mengambil akar kuadrat masing-masing ruas pada persamaan (1) diperoleh persamaan berikut:

$$\|Sx\| = \|x\|$$

Jadi, terbukti $\|Sx\| = \|x\|$ untuk setiap $x \in \mathcal{H}$.

**4.** $(\mathbf{4} \rightarrow \mathbf{5})$

Diketahui $\|Sx\| = \|x\|$ untuk setiap $x \in \mathcal{H}$.

Karena $\|Sx\| = \|x\|$, maka berdasarkan Definisi 2.18, operator *linear* terbatas $S$ merupakan operator isometri.

Akan dibuktikan $S^*S = I_{\mathcal{H}}$.

Karena operator *linear* terbatas $S$ merupakan operator isometri, maka berdasarkan Teorema 2.8 bagian 1 diperoleh $S^*S = I_{\mathcal{H}}$.

Jadi, terbukti bahwa $S^*S = I_{\mathcal{H}}$.

**5.** $(\mathbf{5} \rightarrow \mathbf{1})$

Diketahui $S^*S = I_{\mathcal{H}}$.

Akan dibuktikan $\{Se_i : i \in I\}$ merupakan himpunan *orthonormal* di $\mathcal{K}$.

Jika $\{e_i : i \in I\}$ merupakan himpunan *orthonormal* di $\mathcal{H}$, maka berdasarkan Definisi 2.14 untuk $i = j$ dengan $1 \leq i \leq k$, diperoleh

$$\|e_i\| = 1$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} \langle Se_i, Se_j\rangle &= \langle e_i, S^*Se_j\rangle && \text{(Definisi 2.29)} \\ &= \langle e_i, Ie_j\rangle && \text{(Diketahui)} \\ &= \langle e_i, e_j\rangle \end{aligned}$$

Karena $\{e_i : i \in I\}$ merupakan himpunan *orthonormal* di $\mathcal{H}$, maka berdasarkan Definisi 2.14 untuk $i = j$ dengan $1 \leq i \leq k$, diperoleh

$$\langle Se_i, Se_i \rangle = \langle e_i, e_i \rangle$$

$$= \|e_i\|^2 \quad \text{(Definisi 2.13)}$$

$$= 1 \quad \text{(Definisi 2.14)}$$

$$\|Se_i\|^2 = 1$$

Karena $\langle Se_i, Se_i \rangle = \|Se_i\|^2 = 1$, maka berdasarkan Definisi 2.14 $\{Se_i : i \in I\}$ merupakan himpunan *orthonormal* di $\mathcal{K}$.

Karena $(\mathbf{1} \to \mathbf{2} \to \mathbf{3} \to \mathbf{4} \to \mathbf{5} \to \mathbf{1})$ Saling ekivalen, maka operator $S \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ disebut sebagai isometri.

Setelah mengetahui bahwa operator *linear* terbatas $S$ yang memetakan ruang Hilbert $\mathcal{H}$ ke ruang Hilbert $\mathcal{K}$ merupakan operator isometri, selanjutnya akan dibuktikan bahwa operator isometri $S$ yang memetakan ruang Hilbert $\mathcal{H}$ ke ruang Hilbert $\mathcal{K}$ memenuhi kelima pernyataan ekivalen disebut sebagai uniter.

**Teorema 4.2**

Misalkan $\mathcal{H}$ dan $\mathcal{K}$ merupakan ruang Hilbert. Kelima pernyataan berikut ekivalen pada operator isometri $S \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$:

1. Jika $\{e_i : i \in I\}$ adalah basis *orthonormal* untuk $\mathcal{H}$, maka $\{Se_i : i \in I\}$ adalah basis *orthonormal* untuk $\mathcal{K}$,
2. Terdapat himpunan *orthonormal* $\{e_i : i \in I\}$ di $\mathcal{H}$ sedemikian sehingga $\{Se_i : i \in I\}$ adalah basis *orthonormal* untuk $\mathcal{K}$,
3. $SS^* = I_{\mathcal{K}}$,
4. $S$ merupakan *invertible,*
5. $S$ memetakan $\mathcal{H}$ *onto* $\mathcal{K}$.

Operator isometri $S \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ yang memenuhi kelima pernyataan ekivalen diatas disebut sebagai uniter (Furuta, 2001).

**Bukti**

1. $(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2})$

   Diketahui $\{e_i : i \in I\}$ merupakan basis *orthonormal* untuk $\mathcal{H}$ dan $\{Se_i : i \in I\}$ adalah basis *orthonormal* untuk $\mathcal{K}$.

   Akan dibuktikan terdapat himpunan *orthonormal* $\{e_i : i \in I\}$ di $\mathcal{H}$ sedemikian sehingga $\{Se_i : i \in I\}$ adalah basis *orthonormal* untuk $\mathcal{K}$.

   Karena $\{e_i : i \in I\}$ merupakan basis *orthonormal* untuk $\mathcal{H}$, maka berdasarkan Teorema 2.4 basis *orthonormal* $\{e_i : i \in I\}$ untuk $\mathcal{H}$ merupakan basis untuk $\mathcal{H}$ yang memenuhi persyaratan himpunan *orthonormal* di $\mathcal{H}$. Sedemikian sehingga, untuk setiap vektor $x \in \mathcal{H}$ dapat direpresentasikan sebagai berikut:

   $$x = \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i \rangle e_i$$

   Dengan demikian, pada basis *orthonormal* $\{e_i : i \in I\}$ untuk $\mathcal{H}$ terdapat himpunan *orthonormal* di $\mathcal{H}$ sedemikian sehingga $\{Se_i : i \in I\}$ adalah basis *orthonormal* di $\mathcal{K}$.

2. $(\mathbf{2} \rightarrow \mathbf{3})$

   Diketahui terdapat himpunan *orthonormal* $\{e_i : i \in I\}$ di $\mathcal{H}$ sedemikian sehingga $\{Se_i : i \in I\}$ adalah basis *orthonormal* untuk $\mathcal{K}$.

   Akan dibuktikkan $SS^* = I_{\mathcal{K}}$.

   Karena $\{Se_i : i \in I\}$ merupakan basis *orthonormal* untuk $\mathcal{K}$, maka berdasarkan Teorema 2.4 untuk vektor $y \in \mathcal{K}$, diperoleh

   $$y = \sum_{i=1}^{k} \langle y, Se_i \rangle Se_i$$

   Perhatikan persamaan dibawah ini untuk vektor $y \in \mathcal{K}$, diperoleh

$$SS^*y \quad = SS^*\left(\sum_{i=1}^{k}\langle y, Se_i\rangle Se_i\right) \qquad \text{(Teorema 2.16)}$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\langle y, Se_i\rangle SS^*Se_i$$

Karena operator $S$ merupakan isometri, maka berdasarkan Teorem 2.6 bagian 2 operator $S$ merupakan uniter.

Sehingga, jika operator $S$ merupakan uniter, maka berdasarkan Definisi 2.32 berlaku $SS^* = S^*S = I$.

Dengan demikian,

$$SS^*y \quad = \sum_{i=1}^{k}\langle y, Se_i\rangle Se_i$$

$$= y \qquad \text{(Teorema 2.16)}$$

$$= Iy$$

Jadi, terbukti $SS^* = I_{\mathcal{K}}$ untuk setiap $y$.

**3.** $(\mathbf{3} \rightarrow \mathbf{4})$

Diketahui $SS^* = I_{\mathcal{K}}$.

Akan dibuktikan operator isometri $S$ merupakan *invertible*.

Ambil sebarang $y \in \mathcal{K}$, maka

$$y \ = Iy$$

$$= (SS^*)y \qquad \text{(Diketahui)}$$

$$= S(S^*y) \qquad \text{(Definisi 2.20)}$$

Jadi, $y = S(S^*y)$.

Jika operator isometri $S$ memetakan $S^*y \in \mathcal{H}$ ke $y \in \mathcal{K}$ dimana ruang Hilbert $\mathcal{H}$ sebagai *domain* dari $S$ dan ruang Hilbert $\mathcal{K}$ sebagai *range* dari $S$, maka berdasarkan Definisi 2.24 diperoleh $y = S(S^*y)$.

Selain itu, apabila *inverse image* dari $y \in \mathcal{K}$ ditunjukkan dengan $S^{-1}y$, maka

$$S^{-1}y = S^*y$$

Dengan demikian, untuk $y \in \mathcal{K}$ diperoleh

$$S^{-1} = S^*$$

Karena diketahui $SS^* = I_{\mathcal{K}}$ dan $S^{-1} = S^*$, maka berdasarkan Definisi 2.28 operator isometri $S$ merupakan *invertible.*

**4.** $(\mathbf{4} \rightarrow \mathbf{5})$

Diketahui operator isometri $S$ merupakan *invertible*.

Karena operator isometri $S$ merupakan *invertible*, maka operator tersebut memenuhi sifat yang tercantum pada Definisi 2.28 dimana untuk operator isometri $S \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ terdapat $S^{-1} \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ sedemikian sehingga $SS^{-1} = I_{\mathcal{K}}$

Akan dibuktikkan operator isometri $S$ memetakan $\mathcal{H}$ *onto* $\mathcal{K}$.

Ambil sebarang $y \in \mathcal{K}$, maka terdapat $x \in \mathcal{H}$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} y &= Iy \\ &= (SS^{-1})y && \text{(Diketahui)} \\ &= S(S^{-1}y) && \text{(Definisi 2.20)} \\ &= Sx && \text{(Definisi 2.23)} \end{aligned}$$

Karena $y = Sx$, maka berdasarkan Definisi 2.21 operator isometri $S$ merupakan surjektif atau operator tersebut memetakan $\mathcal{H}$ *onto* $\mathcal{K}$.

**5.** $(\mathbf{5} \rightarrow \mathbf{1})$

Diketahui operator isometri $S$ memetakan $\mathcal{H}$ *onto* $\mathcal{K}$.

Karena operator isometri $S$ memetakan $\mathcal{H}$ *onto* $\mathcal{K}$ atau surjektif, maka operator tersebut memenuhi persyaratan yang tercantum pada Definisi 2.24.

Jika $\{e_i : i \in I\}$ adalah basis *orthonormal* untuk $\mathcal{H}$, akan dibuktikan $\{Se_i : i \in I\}$ adalah basis *orthonormal* untuk $\mathcal{K}$.

Ambil sebarang $y \in \mathcal{K}$, maka terdapat $x \in \mathcal{H}$ sedemikian sehingga berdasarkan Definisi 2.24 diperoleh $Sx = y$.

Sehingga,

$$\|y\|^2 = \|Sx\|^2 \quad \text{(Definisi 2.24)}$$

$$= \|x\|^2 \quad \text{(Definisi 2.21)}$$

$$= \langle x, x\rangle \quad \text{(Definisi 2.13)}$$

$$= \langle \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i\rangle e_i, \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i\rangle e_i\rangle \quad \text{(Definisi 2.15)}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i\rangle \overline{\langle x, e_i\rangle}\, \langle e_i, e_i\rangle \quad \text{(Teorema 2.2 bagian 2)}$$

Karena $\{e_i : i \in I\}$ merupakan basis *orthonormal* untuk $\mathcal{H}$, maka berdasarkan pembuktian **(1 → 2)** terdapat himpunan *orthonormal* di $\mathcal{H}$.

Sedemikian sehingga, berdasarkan Definisi 2.14 untuk $i = j$ dengan $1 \leq i \leq k$, diperoleh

$$\|e_i\| = 1$$

Dengan demikian,

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i \rangle \overline{\langle x, e_i \rangle}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} |\langle x, e_i \rangle|^2 \qquad \text{(Teorema 2.17)}$$

Jadi,

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{k} |\langle x, e_i \rangle|^2 \qquad (1)$$

Karena $\|y\|^2 = \|Sx\|^2 = \|x\|^2$, maka

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{k} |\langle y, Se_i \rangle|^2$$

Berdasarkan Teorema 2.17, $\{Se_i : i \in I\}$ adalah basis *orthonormal* untuk $\mathcal{K}$. Karena $(\mathbf{1} \to \mathbf{2} \to \mathbf{3} \to \mathbf{4} \to \mathbf{5} \to \mathbf{1})$ Saling ekivalen, maka operator isometri $S \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ disebut sebagai uniter.

Pada bab sebelumnya telah dijelaskan mengenai salah satu ayat Al-Qur'an yang berkaitan dengan konsep transformasi *linear* (operator *linear*). Pada Al-Qur'an surah Al-Luqman ayat 29 secara implisit menjelaskan mengenai operator *linear*. Konsep operator *linear* apabila diilustrasikan secara geometri membentuk suatu perpindahan. Konsep tersebut diartikan sebagai perpindahan yang dilakukan operator $S$ terhadap ruang berdimensi $n$ atau disimbolkan dengan $(R^n)$ ke ruang berdimensi $m$ atau disimbolkan dengan $(R^m)$ dengan $m = n$.

Sehingga, pada ayat 29 Surah Al-Luqman menjelasakan mengenai perubahan cahaya siang dan malam yang merupakan perlakuan dari matahari dan bulan terhadap bumi, di mana cahaya bulan tersebut merupakan pancaran dari matahari yang menyebabkan perlakuan (operasi) sinar yang diberikan matahari terhadap bumi dan berlaku pula pada bulan terhadap bumi. Bumi diibaratkan sebagai ruang vektor yang mendapat perlakuan (operasi) dari fungsi cahaya matahari dan fungsi cahaya bulan, di mana keduanya sama-sama mentransformasikan cahayanya terhadap bumi.

# BAB V
# KESIMPULAN DAN SARAN

## 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan definisi yang diberikan mengenai ekivalensi operator isometri dengan operator uniter di ruang Hilbert, sehingga berdasarkan pembahasan yang telah dipaparkan didapatkan kesimpulan bahwa untuk mengetahui ekivalensi operator isometri dengan operator uniter di ruang Hilbert, akan ditunjukkan terlebih dahulu lima pernyataan operator *linear* terbatas di ruang Hilbert yang saling ekivalen, maka operator tersebut merupakan isometri. Kelima pernyataan tersebut diantaranya, (1) jika $\{e_i : i \in I\}$ merupakan himpunan *orthonormal* di $\mathcal{H}$, maka $\{Se_i : i \in I\}$ adalah himpunan *orthonormal di* $\mathcal{K}$, (2) terdapat basis *orthonormal* $\{e_i : i \in I\}$ untuk $\mathcal{H}$ sedemikian sehingga $\{Se_i : i \in I\}$ adalah himpunan *orthonormal* di $\mathcal{K}$, (3) $\langle S(x), S(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ untuk semua $u, v \in \mathcal{H}$, (4) $\|S(x)\| = \|x\|$ untuk semua $u \in \mathcal{H}$, (5) $S^*S = I_{\mathcal{H}}$ merupakan isometri. Selanjutnya, operator isometri yang memenuhi kelima pernyataan ekivalen berikut merupakan uniter. Kelima pernyataan tersebut diantaranya, (1) jika $\{e_i : i \in I\}$ adalah basis *orthonormal* untuk $\mathcal{H}$, maka $\{Se_i : i \in I\}$ adalah basis *orthonormal* untuk $\mathcal{K}$, (2) terdapat himpunan *orthonormal* $\{e_i : i \in I\}$ di $\mathcal{H}$ sedemikian sehingga $\{Se_i : i \in I\}$ adalah basis *orthonormal* untuk $\mathcal{K}$, (3) $SS^* = I_{\mathcal{K}}$, (4) $S$ merupakan *invertible*, (5) $S$ memetakan $\mathcal{H}$ *onto* $\mathcal{K}$.

## 5.2 Saran

Skripsi ini diharapkan dapat menjadi sarana pembelajaran serta informasi bagi pembaca mengenai operator uniter di ruang Hilbert. Skripsi ini hanya terbatas pada operator uniter di ruang Hilbert. Diharapkan untuk penelitian selanjutnya dapat mengembangkan sifat operator *linear* tak terbatas pada ruang lain.

## DAFTAR PUSTAKA


Anton, H., & Rorres, C. (2004). *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi Edisi Delapan Jilid I.* Jakarta: Erlangga.

Axler, S. (2015). *Linear Algebra Done Right Third Edition.* San Francisco, CA, USA: Springer.

Bartle, & Sherbert. (1994). *Introducton to Real Analysis.* Singapure: John Willey & Son.INC.

Bishop, E., & Bridges, D. (1985). *Constructive Analysis.* New York Tokyo: Springer - Verlag Berlin Heidelberg.

Darmawijaya, S. (2007). *Seri Analisis Matematika Pengantar Analisis Abstrak.* Yogyakarta: UGM.

Debnath, L., & Mikusinski, P. (2005). *Introduction to Hilbert Spaces with Applications Third Editions.* San Diego New York Boston: Elsevier Academic Press.

Friedberg, S. H., J.Insel, A., & Spence, L. E. (2014). *Linear Algebra Fourth Edition.* Upper Saddle River, New Jersey: Pearson Education, Inc.

Furuta, T. (2001). *Invitation to Linear Operators (From Matrices to Bounded Linear Operators on a Hilbert Space).* New York: CRC Press Taylor & Francis Group.

Gockenbach, M. S. (2010). *Finite-Dimensional Linear Algebra.* Boca Raton: CRC Press Taylor & Francis Group.

Goffman, C., & Pedrick, G. (1965). *First Course in Functional Analysis.* Englewood Clift: Prentice - Hall,Inc.

Gunawan. (2015). Operator *Self Adjoint* pada Ruang HIlbert. *Jurnal UJMC*, 21.

Halmos, P. R. (2000). *Finite - Dimensional Vector Space.* New York: Springer.

Hawin, K. (2014). *Transformasi Linier pada Perluasan Lapangan.* Malang: Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.

Hidayani, F. (2002). *Ruang Vektor Topologi* . Yogyakarta: Jurusan Matematika Fakultas MIPA UGM.

Hunter, J. K., & Nachtergaele, B. (2000). *Applied Analysis.* Davis: Department of Mathematics, university of California.

Jazairi, A. . (2007). *Tafsir Al - Qur'an Al - aisar.* Jakarta: Darus Sunnah Press.

Kato, T. (1995). *Perturbation Theory for Linear Operator.* Verlag Berlin Heidelberg New York: Springer Science and Business Media.

KEMENAG. (2022). Diambil kembali dari https://quran.kemenag.go.id/

Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications.* Singapura: Republic of Singapore.

Mulyono, Mansyur, A., Marpaung, B., & Simanjuntak, S. (2021). *Aljabar Linier*. Jakarta: Bintang Visitama Publisher.

Reddy, B. D. (1997). *Introductory Functional Analysis With Applications to Boundary Values Problems and Finite Elements.* Verlag - New york: Spinger.

Rynne, B. P., & Youngson, M. A. (2008). *Linear Functional Analysis Second Edition.* New York: Springer.

Rynne, B. P., & Youngson, M. A. (2008). *Linear Functional Analysis Second Edition.* New York: Springer.

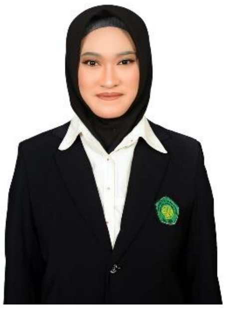
Sen, R. (2013). *A First Course in Functional Analysis Theory and Applications.* New York: ANTHEM PRESS.

Seymour Lipschitz, P., & Marc Lipson, P. (2006). *Schaum's Outlines Aljabar Linear Edisi Ketiga.* Surabaya: Penerbit Erlangga.

Stein, E. M., & Shakarchi, R. (2005). *Real Analysis Measure Theory, Integration, & HIlbert Spaces.* Princeton: Princeton University Press.

Syafnuri, R. A., Netriwatii, & Pratiwi, D. D. (2019, januari). Modul Transformasi Linear dengan Model Pembelaaran Knisley. hal. 8.

## RIWAYAT HIDUP



Lyla Lutvia Octaviona, lahir di Banyuwangi, 19 Oktober 1999. Tinggal di Sidodadi, Kecamatan Wongsorejo, Kabupaten Banyuwangi. Anak pertama dari pasangan Bapak Faizal Nur Efendi dan Ibu Siti Nur Kholisah. Penulis menempuh Pendidikan Dasar di SDN I Bajulmati dan lulus pada tahun 2012. Selanjutnya, penulis menempuh pendidikan menengah pertama di MTs Al-Kautsar Banyuwangi dan lulus pada tahun 2015. Selanjutnya, penulis menempuh pendidikan menengah atas di MAU Amanatul Ummah Program Madrasah Bertaraf International (MBI) Mojokerto dan lulus pada tahun 2018. Selanjutnya menempuh pendidikan perguruan tinggi di program studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada tahun 2018.

Selama menempuh pendidikan Menengah Atas di MAU Amanatul Ummah Program Madrasah Bertaraf International (MBI) Mojokerto, penulis aktif mengikuti organisasi WIsSNU (Wahana Inspirasi Santri Nurul Ummah) pada Tahun 2016-2017. Selama menempuh pendidikan perguruan tinggi di program studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, penulis aktif mengikuti komunitas guru Qanda (2018-2019) dan mengikuti berbagai macam *online course* yang diselenggarakan oleh perusahaan startup di bidang digital.

**KEMENTERIAN AGAMA RI**
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI**
**MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG**
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

**BUKTI KONSULTASI SKRIPSI**

| | |
|---|---|
| Nama | : Lyla Lutvia Octaviona |
| NIM | : 18610115 |
| Fakultas / Jurusan | : Sains dan Teknologi / Matematika |
| Judul Skripsi | : Ekivalensi Operator Isometri dengan Operator Uniter di Ruang Hilbert |
| Pembimbing I | : Dr. Elly Susanti, M.Sc |
| Pembimbing II | : Juhari, M.Si |

| No | Tanggal | Hal | Tanda Tangan |
|---|---|---|---|
| 1. | 16 FEBRUARI 2022 | KONSULTASI BAB 1 | 1. |
| 2. | 28 FEBRUARI 2022 | KONSULTASI BAB 1 | 2. |
| 3. | 13 MARET 2022 | KONSULTASI BAB 2 | 3. |
| 4. | 24 MARET 2022 | KONSULTASI BAB 2 | 4. |
| 5. | 1 APRIL 2022 | KONSULTASI BAB 1 | 5. |
| 6. | 19 APRIL 2022 | REVISI BAB 2 | 6. |
| 7. | 10 MEI 2022 | KONSULTASI BAB 2 | 7. |
| 8. | 30 MEI 2022 | KONSULTASI BAB 2 | 8. |
| 9. | 26 JUNI 2022 | KONSULTASI BAB 3 | 9. |
| 10. | 3 JULI 2022 | KONSULTASI KAJIAN AGAMA | 10. |
| 11. | 5 JULI 2022 | KONSULTASI BAB 4 | 11. |
| 12. | 2 SEPTEMBER 2022 | KONSULTASI BAB 4 | 12. |
| 13. | 22 SEPTEMBER 2022 | KONSULTASI BAB 4 | 13. |
| 14. | 1 OKTOBER 2022 | KONSULTASI BAB 5 | 14. |
| 15. | 15 OKTOBER 2022 | REVISI KAJIAN AGAMA | 15. |
| 16. | 10 NOVEMBER 2022 | KONSULTASI BAB 4,5 | 16. |
| 17. | 20 NOVEMBER 2022 | KONSULTASI KAJIAN AGAMA | 17. |
| 18 | 6 DESEMBER 2022 | KONSULTASI BAB 4,5 | 18. |
| | 10 DESEMBER 2022 | KONSULTASI BAB 5 | 19. |
| 20 | 17 DESEMBER 2022 | REVISI KAJIAN AGAMA | 20. |

Malang, 27 Desember 2022
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 197411292000122005