INDEKS GINI DERAJAT PADA GRAF UNIT DARI RING BILANGAN BULAT MODULO

SKRIPSI

OLEH
MOH. ISYHAR MAHBUBI
NIM. 18610023

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022

INDEKS GINI DERAJAT PADA GRAF UNIT DARI RING BILANGAN BULAT MODULO

SKRIPSI

Diajukan kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Moh. Isyhar Mahbubi
NIM 18610023

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022

INDEKS GINI DERAJAT PADA GRAF UNIT DARI RING BILANGAN BULAT MODULO

SKRIPSI

Oleh
Moh. Isyhar Mahbubi
NIM. 18610023

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji

Malang, 19 Desember 2022

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Mohammad Nafie Jauhari, M.Si	Erna Herawati, M.Pd
NIDT. 19870218 20160801 1 056	NIDT. 19760723 20180201 2 222

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

INDEKS GINI DERAJAT PADA GRAF UNIT DARI RING BILANGAN BULAT MODULO

SKRIPSI

Oleh
Moh. Isyhar Mahbubi
NIM. 18610023

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 26 Desember 2022

Ketua Penguji	: Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D	....
Anggota Penguji I	: Dr. Wahyu Henky Irawan, M.Pd	....
Anggota Penguji II	: Mohammad Nafie Jauhari, M.Si	....
Anggota Penguji III	: Erna Herawati, M.Pd	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Moh. Isyhar Mahbubi
NIM	: 18610023
Program Studi	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Indeks Gini Derajat pada Graf Unit dari Ring Bilangan Bulat Modulo

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber kutipan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dibuktukan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan saya tersebut.

Malang, 26 Desember 2022
Yang membuat pernyataan,

Moh. Isyhar Mahbubi
NIM. 18610023

MOTO

"A côté de la difficulté est, certes, une facilité!"

(*Qs. Asy-Syarḥ:6*)

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Umar dan Ibunda Dewi Zulaikah serta adik Sayyidah Roihah Zanjabila yang telah senantiasa memberi dukungan berupa doa, motivasi, atau materi kepada penulis hingga dapat menyelesaikan Pendidikan di tingkat perguruan tinggi.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala Puji Bagi Allah SWT atas limpahan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan draf skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Salawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah menuntun manusia dari jalan gelap gulita menuju jalan terang benderang yaitu agama Islam.

Pada penyusunan draf skripsi ini, penulis mendapatkan banyak bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu, penulis mengucapkan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada :

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Mohammad Nafie Jauhari, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan banyak bimbingan, arahan, dan motivasi kepada penulis.
5. Erna Herawati, M.Pd, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan banyak bimbingan, arahan, dan motivasi kepada penulis.
6. Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D, selaku ketua penguji yang telah banyak memberikan nasihat dan masukan yang membangun kepada penulis.
7. Dr. Wahyu Henky Irawan, M.Pd, selaku anggota penguji I yang telah banyak memberikan nasihat dan masukan yang membangun kepada penulis.
8. Seluruh dosen Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan ilmu dan bimbingan.
9. Orang tua, adik dan seluruh keluarga yang selalu memberikan doa, semangat, dan motivasi demi keberhasilan penulis.

10. Seluruh mahasiswa Program Studi Matematika angkatan 2018 Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Semoga Allah SWT melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Penulis berharap semoga proposal skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan pembaca.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 26 Desember 2022

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

ABSTRAK

Mahbubi, Moh. Isyhar. 2022. **Indeks Gini Derajat pada Graf Unit dari Ring Bilangan Bulat Modulo**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si (2) Erna Herawati, M.Pd

Kata Kunci : Indeks Gini Derajat, Graf Unit, Ring Bilangan Bulat Modulo

Misalkan R suatu ring dengan unsur kesatuan, $e \in R$ suatu unsur kesatuan, dan $U(R)$ adalah suatu himpunan anggota unit dari R ($U(R) = \{x \in R | x \cdot y = e, y \in R\}$). Graf unit $G(R)$ adalah graf dengan semua elemen R sebagai titik dan dua titik yang berbeda, x dan y, terhubung langsung jika dan hanya jika $x + y \in U(R)$. Indeks gini derajat pada graf H merupakan jumlah dari selisih dua derajat titik sebarang pada graf H yang dibagi dengan perkalian antara jumlah titik dan rata-rata derajat titik pada graf H atau:

$$GD(H) = \sum_{\substack{u,v \in V(H) \\ u \neq v}} \frac{|deg(u) - deg(v)|}{n^2 \mathbb{E}[D^*(H)]}$$

dengan $deg(u)$ dan $deg(v)$ masing-masing adalah derajat titik u dan v pada graf H, n adalah kardinalitas dari himpunan titik di H, dan $\mathbb{E}[D^*(H)]$ adalah rata-rata derajat titik pada graf H. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan formula indeks gini derajat pada graf unit dari ring bilangan bulat modulo $3p$ dengan p bilangan prima dengan cara menentukan unit pada ring bilangan bulat modulo $3p$ dan derajat titik pada graf unit dari ring bilangan bulat modulo $3p$. Hasil penelitian ini adalah sebagai berikut:

$$GD\left(G(\mathbb{Z}_{3p})\right) = \begin{cases} 0 & ; p = 2 \\ \dfrac{1}{24} & ; p = 3 \\ \dfrac{p+2}{3p(3p-1)} & ; p > 3 \end{cases}$$

ABSTRACT

Mahbubi, Moh. Isyhar. 2022. **Degree Gini Index on the Unit Graph of the Ring of Integers Modulo**. Thesis. Mathematic Study Program, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisors: (I) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si (II) Erna Herawati, M.Pd

Keywords : Degree Gini Index, Unit Graph, Ring Integer Modulo

Let R be a ring with unity, $e \in R$ be a unity, and $U(R)$ is a set of units in R ($U(R) = \{x \in R | x \cdot y = e, y \in R\}$). The unit graph $G(R)$ is a graph with all of elements in R as the vertices and two distinct vertices, x and y, are adjacent if and only if $x + y \in U(R)$. The degree gini index of a graph H is the sum of the difference of any two degrees on a graph H which divided by the multiple of the number and the mean of the degrees on a graph H or:

$$GD(H) = \sum_{\substack{u,v \in V(H) \\ u \neq v}} \frac{|deg(u) - deg(v)|}{n^2 \mathbb{E}[D^*(H)]}$$

where $deg(u)$ and $deg(v)$ is the degree of u and v on a graph H respectively, n is the cardinality of the set of vertices on a graph H, and $\mathbb{E}[D^*(H)]$ is a mean of the degrees on a graph H. This research aims to determine the formula of the degree gini index on the unit graph of the integer ring modulo $3p$ with p is a prime number by determining the units in the integer ring modulo $3p$ and the degrees of on the unit graph of the integer ring modulo $3p$. The result of this research is as follow:

$$GD\left(G(\mathbb{Z}_{3p})\right) = \begin{cases} 0 & ; p = 2 \\ \dfrac{1}{24} & ; p = 3 \\ \dfrac{p+2}{3p(3p-1)} & ; p > 3 \end{cases}$$

مستخلص البحث

محبوبي ، محمد اشهار. ٢٠٢٢. **مؤشر *Gini* الدرجات على الرسم البياني القلوب من حلقة عدد صحيحة مودولو**. البحث الجامعي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف الأول: محمد نافع جوهري، الماجستير، والمشرفة الثانية: إيرنا هيراواتي، الماجستير

الكلمات المفتاحية : مؤشر *Gini* الدرجات, الرسم البياني القلوب, حلقة العدد الصحيحة مودولو

لتكن R حلقة مع العنصر الحيادي بالنسبة إلى الضرب و $e \in R$ عنصر الحيادي بالنسبة إلى الضرب و $U(R)$ مجموعة العناصر القلوبة في R ($U(R) = \{x \in R | x \cdot y = e, y \in R\}$). الرسم البياني القلوب $G(R)$ هو رسم بياني الذي يحتوى العناصر R كقمة الرأس و الرأسان المختلفان, x و y, يتصلان مباشران إذا وفقط إذا $x + y \in U(R)$. مؤشر *Gini* الدرجات للرسم البياني H هو مجموع فرق أي الدرجتان في الرسم البياني H الذي يقسم بالضرب بين عدد العناصر و معدل الدرجات في الرسم البياني H أو:

$$GD(H) = \sum_{\substack{u,v \in V(H) \\ u \neq v}} \frac{|deg(u) - deg(v)|}{n^2 \mathbb{E}[D^*(H)]}$$

حيث كل من $deg(u)$ و $deg(v)$ هو درجة u و v في الرسم البياني H و n هو عدد العناصر في المجموعة الرؤوس في الرسم البياني H و $\mathbb{E}[D^*(H)]$ هو معدل الدرجات في الرسم البياني H. تهدف هذه الدراسة لتحديد صيغة مؤشر *Gini* الدرجات على الرسم البياني القلوب للحلقة العدد الصحيحة مودولو $3p$ ب p هو عدد الأولي بكيفية تحديد العناصر القلوبة في الحلقة العدد الصحيحة مودولو $3p$ و تحديد الدرجات في الرسم البياني القلوب للحلقة العدد الصحيحة مودولو $3p$. والنتيجة هذه الدراسة هي كالتالي:

$$GD\left(G(\mathbb{Z}_{3p})\right) = \begin{cases} 0 & ; p = 2 \\ \dfrac{1}{24} & ; p = 3 \\ \dfrac{p+2}{3p(3p-1)} & ; p > 3 \end{cases}$$

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ilmu matematika yang saat ini banyak mengalami perkembangan ialah teori graf. Teori graf diperkenalkan pertama kali pada tahun 1736 oleh ilmuwan dari Swiss bernama Leonard Euler, dalam upaya menyelesaikan masalah jembatan Konigsberg yang terkenal di Eropa melalui pembuktian sederhana dengan memodelkan masalah tersebut ke dalam graf. Penemuan Euler tentang teori graf belum menunjukkan perkembangan selama bertahun-tahun hingga pada tahun 1847, G.R. Kirchoff berhasil mengembangkan teori pohon untuk menyelesaikan persoalan jaringan listrik. Pada tahun 1857, A. Coyley menggunakan teori pohon untuk menjelaskan hidrokarbon. Mulai pada era Kirchoff dan Coyley, pembahasan teori graf berkembang luas hingga sekarang (Rahayuningsih, 2018). Pesatnya perkembangan teori graf ini tidak terlepas dari peranannya dalam penyelesaian permasalahan berbagai aplikasi yang luas, seperti transpotasi, riset operasi, ilmu komputer, dan lain-lain. Teori graf juga berperan dalam penyelesaian permasalahan kehidupan sehari-hari, seperti struktur organisasi, jaringan listrik, peta, dan penjadwalan mata kuliah (Fitria, 2020).

Allah SWT berfirman dalam surat al-Baqarah ayat 269 yang artinya (Kemenag, 2002):

"*Dia (Allah) menganugerahkan hikmah kepada siapa yang Dia kehendaki. Barang siapa yang dianugerahi hikmah, sesungguhnya dia telah diberi kebaikan yang banyak. Dan tidak ada yang dapat mengambil pelajaran (darinya) kecuali Ulul Albab (orang-orang yang mempunyai akal sehat)*" *(Qs. Al-Baqarah:269).*

Ayat tersebut menunjukkan betapa pentingnya menuntut ilmu. Orang yang mempunyai akal sehat (*Ulul Albab*) tentunya dapat mengambil pelajaran dari ilmu yang diperoleh, sehingga ilmu tersebut dapat bermanfaat bagi diri sendiri dan orang lain. Kemudian, ilmu tersebut juga dapat menambah rasa takwa kepada Allah SWT. Salah satu ilmu yang bermanfaat dalam kehidupan sehari-hari ialah teori graf sebagaimana yang telah dijelaskan kegunaannya pada paragraf sebelumnya.

Suatu Graf G merupakan pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah suatu himpunan tak kosong dan berhingga dari unsur yang bernama titik atau simpul, sedangkan E adalah suatu himpunan yang memasangkan dua unsur pada V (mungkin kosong) bernama sisi. Himpunan V dan E pada graf G dapat ditulis dengan himpunan $V(G)$ dan $E(G)$. Misalkan x dan y adalah titik pada graf G, serta misalkan xy adalah sisi pada G, maka dikatakan x dan y adalah titik yang saling terhubung langsung. Banyaknya titik pada G yang terhubung langsung dengan titik x disebut dengan derajat titik pada x dan disimbolkan dengan $deg(x)$ (Chartrand dkk, 2016).

Salah satu bahasan pada teori graf yang banyak dikaji saat ini ialah indeks topologi. Indeks topologi atau indeks konektivitas adalah suatu bilangan riil yang terkait dengan graf yang diperoleh dengan aturan tertentu dan tidak merubah keisomorfisan graf. Ide dari bahasan indeks topologi adalah untuk dapat membandingkan graf dengan kriteria tertentu (Domicolo & Mahmoud, 2020). Pada ilmu kimia, indeks topologi juga digunakan sebagai metode untuk menganalisis nilai matematis dan menyelidiki beberapa sifat fisiokimia suatu struktur molekul. Hal ini bertujuan untuk menghindari eksperimen laboratorium yang mahal dan memakan waktu (Wazzan & Saleh, 2021).

Ada berbagai macam indeks topologi. Salah satunya yang akan diteliti pada penelitian ini adalah indeks gini derajat. Indeks gini derajat merupakan turunan dari indeks gini. Indeks gini sangat dikenal pada ilmu ekonomi sebagai suatu indikator yang mengukur derajat ketidakmerataan distribusi penduduk. Pada tahun 2017, Balaji dan Mahmoud memperkenalkan *distance-based Gini index for rooted trees* atau indeks gini berbasis jarak pada graf pohon berakar. Kemudian Domicolo dan Mahmoud (2020) memperkenalkan *degree-based Gini index for graphs* atau indeks gini berbasis derajat pada graf yang kemudian bisa disingkat istilahnya menjadi indeks gini derajat. Indeks gini derajat mengubah variabel pada indeks gini ke dalam bentuk derajat pada graf.

Misalkan graf tak kosong $H = (V, E)$, dengan $n = |V|$. Misalkan u dan v adalah sebarang titik pada graf H. Rata-rata derajat titik pada graf H dinotasikan dengan $\mathbb{E}[D^*(H)]$ dan didefinisikan sebagai

$$\mathbb{E}[D^*(H)] = \frac{1}{n} \sum_{x \in V(H)} deg(x)$$

Indeks gini derajat pada graf H didefinisikan sebagai

$$GD(H) = \sum_{\substack{u,v \in V(H) \\ u \neq v}} \frac{|deg(u) - deg(v)|}{n^2 \mathbb{E}[D^*(H)]}$$

(Domicolo & Mahmoud, 2020).

Topik tentang indeks gini derajat pada graf tergolong baru. Oleh karena itu, belum banyak penelitian yang membahas indeks tersebut. Salah satu penelitian tersebut ialah artikel dari Domicolo, dkk. (2019). Judul artikel tersebut adalah *The degree Gini index of several classes of random trees and their poissonized counterparts—an evidence for a duality theory*.

Suatu ring R adalah himpunan tak kosong dengan operasi biner penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\cdot)$ yang memenuhi kondisi-kondisi berupa grup abelian pada operasi penjumlahan, tertutup dan asosiatif pada operasi perkalian, serta distributif pada operasi perkalian terhadap operasi penjumlahan. Apabila operasi perkalian pada R bersifat komutatif, maka R disebut ring komutatif. Kemudian apabila R memliki unsur identitas pada operasi perkalian, maka R disebut ring dengan unsur kesatuan (Gilbert & Gilbert, 2015).

Graf yang akan diteliti pada penelitian ini adalah graf unit. Misalkan R adalah suatu ring dengan unsur kesatuan dan $U(R)$ adalah suatu himpunan anggota unit dari R $(U(R) = \{x \in R | x \cdot y = e, y \in R\})$. Graf unit dari R, yang dinotasikan dengan $G(R)$, adalah graf yang titik-titiknya adalah semua elemen pada ring R dan dua titik yang berbeda x dan y terhubung langsung jika dan hanya jika $x + y \in U(R)$ (Ashrafi dkk., 2010). Graf unit masih menjadi bahasan yang menarik bagi peneliti sampai saat ini. Penelitian tentang graf unit di antaranya adalah penelitian tentang radius graf unit dari ring (Li & Su, 2021) dan penelitian tentang graf garis dari ring yang berasosiasi dengan ring komutatif hingga (Pranjali dkk., 2021). Kemudian juga terdapat penelitian tentang indeks jarak derajat dan resiprok indeks jarak derajat pada graf unit ring bilangan bulat modulo p (Anugrahanti, 2020).

Berdasarkan beberapa informasi dan penelitian yang telah disebutkan, penelitian mengenai indeks gini derajat dapat diperluas dan digabungkan dengan graf unit. Oleh karena itu, untuk membedakan dengan penelitian sebelumnya, peneliti akan melakukan penelitian indeks gini derajat pada graf unit ring bilangan bulat modulo. Sehingga, judul dari penelitian ini adalah "Indeks Gini Derajat pada Graf Unit dari Ring Bilangan Bulat Modulo".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana menentukan formula dari indeks gini derajat pada graf unit dari ring bilangan bulat modulo.

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, maka tujuan penelitian ini adalah mengetahui formula dari indeks gini derajat pada graf unit dari ring bilangan bulat modulo.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan mampu memberikan informasi tentang graf unit dari ring bilangan bulat modulo. Kemudian dapat dicari formula indeks gini indeks gini derajat pada graf unit dari ring bilangan bulat modulo.

1.5 Batasan Masalah

Penelitian ini memfokuskan pembahasannya pada graf unit dari ring bilangan bulat modulo $3p$ atau dapat ditulis $\mathbb{Z}_{3p}$ dengan p adalah bilangan prima. Pada penelitian ini, nilai p yang digunakan adalah $p = 2,3,5,7,11$ supaya mendapatkan formula indeks gini derajat secara menyeluruh.

BAB II
KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

2.1.1 Graf

1. Pengertian

Suatu Graf G merupakan pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah suatu himpunan tak kosong dan berhingga dari unsur yang bernama *titik* atau *simpul*, sedangkan E adalah suatu himpunan yang memasangkan dua unsur pada V (mungkin kosong) bernama *sisi*. Himpunan V dan E pada graf G dapat ditulis dengan himpunan $V(G)$ dan $E(G)$. Sisi $\{x, y\}$ pada G juga dapat dinotasikan dengan xy atau yx (Chartrand dkk., 2016).

Banyaknya titik pada $V(G)$ disebut dengan order dari graf G dan disimbolkan dengan $p(G)$. Sedangkan banyaknya sisi pada $E(G)$ disebut dengan ukuran (*size*) dari graf G dan disimbolkan dengan $q(G)$. Apabila graf yang dimaksud adalah graf G, maka cukup disimbolkan dengan p dan q (Abdussakir dkk., 2009).

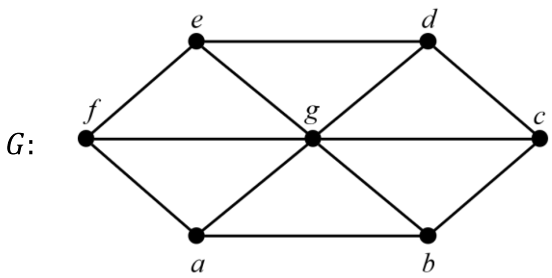
Contoh:

Misalkan terdapat graf G yang memuat himpunan $V(G)$ dan $E(G)$ sebagai berikut.

$V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

$E(G) = \{ab, af, ag, bc, bg, cd, cg, de, dg, ef, eg, fg\}$

Maka graf G memiliki $p = 7$, ukuran $q = 12$, dan dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 2.1 Graf $\boldsymbol{G}$ Berorder 7

2. Terhubung Langsung dan Terkait Langsung

Misalkan x dan y adalah titik pada suatu graf G. Apabila xy adalah suatu sisi di G, maka x dan y merupakan titik-titik yang terhubung langsung. Dua titik yang saling terhubung langsung dikatakan saling bertetangga. Himpunan tetangga pada titik x disebut lingkungan x atau lingkungan terbuka x dan disimbolkan dengan $N_G(x)$ atau $N(x)$ jika graf G diketahui. Jika $N(x) \cup \{x\}$, maka himpunan tersebut dinamakan lingkungan tertutup x dan disimbolkan dengan $N[x]$. Jika terdapat $z \in G$ sedemikian hingga xy dan yz adalah sisi yang berbeda di G, maka xy dan yz merupakan sisi-sisi yang terhubung langsung. Kemudian titik x dan sisi xy dikatakan saling terkait langsung (Chartrand dkk, 2016).

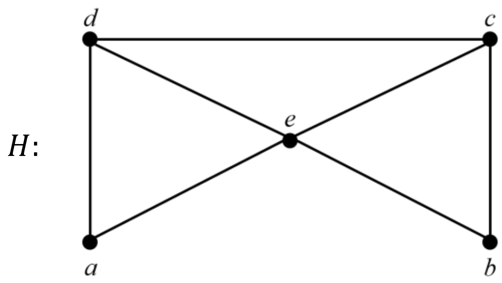
Pada Gambar 2.1, dapat diketahui pada graf G bahwa titik a terhubung langsung dengan titik b, d, dan e. Sehingga $N(a) = \{b, d, e\}$ dan $N[a] = \{a, b, d, e\}$. Sisi ab juga dikatakan terhubung langsung dengan sisi ad, ae, bc, dan bd. Kemudian titik a dan sisi ab saling terkait langsung, begitu juga dengan titik a dan sisi ad.

3. Derajat Titik

Misalkan G suatu graf dan x adalah titik pada graf G. Derajat titik x pada graf G adalah banyaknya titik di G yang terhubung langsung dengan x dan disimbolkan dengan $deg_G(x)$. Apabila G hanya memuat satu graf, maka simbol $deg_G(x)$ dapat ditulis dengan $deg(x)$. Derajat $deg(x)$ merupakan kardinalitas dari himpunan $N(x)$. Titik yang memiliki derajat 0 disebut titik terisolasi, dan titik yang memiliki derajat 1 disebut titik terakhir atau daun (Abdussakir dkk, 2009).

Contoh:

Misalkan terdapat graf H yang memuat himpunan $V(H) = \{a, b, c, d, e\}$ dan $E(H) = \{ad, ae, bc, be, cd, ce, de\}$ sebagai berikut.



Gambar 2.2 Graf ***H*** Berorder 5

Pada Gambar 2.2, dapat diketahui derajat dari titik-titik pada graf H ialah

$deg(a) = 2$ $\quad$ $deg(c) = 3$ $\quad$ $deg(e) = 4$

$deg(b) = 2$ $\quad$ $deg(d) = 3$

4. Graf Terhubung

Misalkan x dan y adalah titik pada suatu graf G. Jalan (*walk*) $x - y$ pada graf G ialah suatu barisan berhingga berselang-seling

$$W: x = y_0, e_1, y_1, e_2, y_2, \ldots, e_n, y_n = y$$

antara titik dan sisi, yang diawali dan diakhiri dengan titik, dengan

$$e_i = y_{i-1}y_i \qquad i = 1,2,3,4, \ldots, n$$

ialah sisi pada G. Titik y_0 merupakan titik awal, titik y_n merupakan titik akhir, titik $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ merupakan titik internal, dan n merupakan panjang dari W.

Jalan W dikatakan jalan terbuka jika titik awal dan titik akhirnya berbeda. Apabila sama, maka jalan W dikatakan jalan tertutup. Jalan yang tidak memiliki sisi dikatakan jalan trivial. Jalan W yang semua sisinya berbeda dinamakan trail. Jalan terbuka yang titik internalnya berbeda dinamakan lintasan (Abdussakir dkk, 2009).

Misalkan x dan y adalah titik yang berbeda pada graf G. Titik x dan y dikatakan terhubung apabila terdapat suatu lintasan $x - y$ di G. Apabila untuk setiap titik x dan y pada G terhubung, maka G dikatakan graf terhubung. Dengan kata lain, G dikatakan graf terhubung apabila untuk setiap titik x dan y terdapat lintasan $x - y$ di G (Abdussakir dkk, 2009).

2.1.2 Ring

1. Pengertian

Misalkan R himpunan tak kosong dengan operasi biner penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\cdot)$. R disebut sebagai ring atau gelanggang jika kedua operasinya memenuhi kondisi berikut

a. Himpunan R dengan operasi penjumlahan $(R, +)$ bersifat tertutup.

   Misalkan $p, q \in R$, maka berlaku $p + q \in R$.

b. Himpunan $(R, +)$ bersifat asosiatif.

   Misalkan $p, q, r \in R$, maka berlaku $p + (q + r) = (p + q) + r$.

c. Himpunan $(R, +)$ memuat unsur identitas, yakni 0.

   Misalkan $p \in R$, maka berlaku $p + 0 = 0 + p = p$.

d. Himpunan $(R, +)$ memiliki unsur invers.

   Misalkan $p \in R$, unsur inversnya ialah $-p$ sehingga,

   $p + (-p) = (-p) + p = 0$.

e. Himpunan $(R, +)$ bersifat komutatif.

Misalkan $p, q \in R$, maka berlaku $p + q = q + p$.

f. Himpunan R dengan operasi perkalian $(R,\cdot)$ bersifat tertutup.

Misalkan $p, q \in R$, maka berlaku $p \cdot q \in R$.

g. Himpunan $(R,\cdot)$ bersifat asosiatif.

Misalkan $p, q, r \in R$, maka berlaku $p \cdot (q \cdot r) = (p \cdot q) \cdot r$.

h. Himpunan $(R,\cdot)$ bersifat distributif terhadap operasi penjumlahan.

Misalkan $p, q, r \in R$, maka berlaku $p \cdot (q + r) = p \cdot q + p \cdot r$ dan,

$(p + q) \cdot r = p \cdot r + q \cdot r$.

(Gilbert & Gilbert, 2015).

Contoh:

Misalkan terdapat himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ yang memiliki operasi biner penjumlahan dan operasi perkalian, himpunan $(\mathbb{Z}, +,\cdot)$ merupakan ring. Bukti:

a. Misalkan $m, n \in \mathbb{Z}$, maka $m + n \in \mathbb{Z}$, sehingga himpunan $\mathbb{Z}$ dengan operasi penjumlahan $(\mathbb{Z}, +)$ bersifat tertutup.

b. Misalkan $m, n, o \in \mathbb{Z}$, maka $m + (n + o) = (m + n) + o$, sehingga himpunan $(\mathbb{Z}, +)$ bersifat asosiatif.

c. Misalkan $m \in \mathbb{Z}$, maka terdapat unsur identitas pada himpunan $(\mathbb{Z}, +)$, yaitu 0, sehingga $m + 0 = 0 + m = m$.

d. Misalkan $m \in \mathbb{Z}$, maka terdapat unsur invers pada himpunan $(\mathbb{Z}, +)$, yaitu $-m$, sehingga $m + (-m) = (-m) + m = 0$.

e. Misalkan $m, n \in \mathbb{Z}$, maka $m + n = n + m$, sehingga himpunan $(\mathbb{Z}, +)$ bersifat komutatif.

f. Misalkan $m, n \in \mathbb{Z}$, maka $m \cdot n \in \mathbb{Z}$, sehingga himpunan $\mathbb{Z}$ dengan operasi perkalian $(\mathbb{Z},\cdot)$ bersifat tertutup.

g. Misalkan $m, n, o \in \mathbb{Z}$, maka $m \cdot (n \cdot o) = (m \cdot n) \cdot o$, sehingga himpunan $(\mathbb{Z},\cdot)$ bersifat asosiatif.

h. Misalkan $m, n, o \in \mathbb{Z}$, maka $m \cdot (n + o) = m \cdot n + m \cdot o$ dan $(m + n) \cdot o = m \cdot o + n \cdot o$, sehingga himpunan $(\mathbb{Z},\cdot)$ bersifat distributif terhadap operasi penjumlahan.

2. Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan

Misalkan R suatu ring. R dikatakan ring komutatif jika operasi perkalian bersifat komutatif. Sehingga untuk setiap $p, q \in R$, berlaku $p \cdot q = q \cdot p$. Kemudian R dikatakan ring dengan unsur kesatuan apabila terdapat unsur $e \in R$ sedemikian hingga $p \cdot e = e \cdot p$, untuk setiap $p \in R$. Unsur e ini disebut dengan unsur kesatuan atau unitas. Ring yang memiliki sifat komutatif jika operasi perkalian dan unsur kesatuan disebut dengan ring komutatif dengan unsur kesatuan (Gilbert & Gilbert, 2015).

2.1.3 Indeks Gini Derajat

1. Indeks Gini

Indeks gini adalah ukuran ketidaksamaan distribusi yang bergantung pada kurva lorentz. Kurva lorentz adalah kurva ekonomi yang mengukur ketimpangan pendapatan sebagai distribusi kumulatif pendapatan atau kekayaan pada suatu wilayah atau negara. Indeks gini berkisar dari skala 0 – 1. Konsep indeks gini diperkenalkan pertama kali pada tahun 1912 oleh ilmuwan bernama Corrado Gini di bukunya yang berjudul *Variabilita e Mutabilita*. Misalkan $X_1, \ldots, X_n$ adalah sampel observasi dengan rata-rata μ, indeks gini didefinisikan dengan

$$G_n = \frac{\sum_{1 \le i \le j \le n} \left| X_j - X_i \right|}{n^2 \mu}$$

(Domicolo & Mahmoud, 2020).

2. Indeks Gini Derajat

Indeks gini derajat pada graf tak kosong H adalah pengembangan dari indeks gini pada teori graf berbasis derajat titik yang didefinisikan dengan

$$GD(H) = \sum_{\substack{u,v \in V(H) \\ u \neq v}} \frac{|deg(u) - deg(v)|}{n^2 \mathbb{E}[D^*(H)]}$$

dengan $deg(u)$ dan $deg(v)$ masing-masing adalah derajat titik u dan v pada graf H, n adalah kardinalitas dari himpunan titik di H, dan $\mathbb{E}[D^*(H)]$ adalah rata-rata derajat titik pada graf H yang didefinisikan dengan

$$\mathbb{E}[D^*(H)] = \sum_{v \in V(H)} \frac{deg(v)}{n}$$

(Domicolo & Mahmoud, 2020).

Contoh:

Pada Gambar 2.2, derajat masing-masing titik pada graf H adalah $deg(a) = 2$, $deg(b) = 2$, $deg(c) = 3$, $deg(d) = 3$, dan $deg(e) = 4$. Sehingga nilai dari indeks gini derajat pada graf H adalah

$$GD(H) = \sum_{\substack{u,v \in V(H) \\ u \neq v}} \frac{|deg(u) - deg(v)|}{n^2 \mathbb{E}[D^*(H)]}$$

$$= (|deg(a) - deg(b)| + |deg(a) - deg(c)| + |deg(a) - deg(d)| +$$

$$|deg(a) - deg(e)| + |deg(b) - deg(c)| + |deg(b) - deg(d)| +$$

$$|deg(b) - deg(e)| + |deg(c) - deg(d)| + |deg(c) - deg(e)| +$$

$$|deg(d) - deg(e)|) \frac{1}{n^2 \mathbb{E}[D^*(H)]}$$

$$= (|2-2| + |2-3| + |2-3| + |2-4| + |2-3| + |2-3| +$$

$$|2-4| + |3-3| + |3-4| + |3-4|) \frac{1}{5^2 \left(\frac{2+2+3+3+4}{5}\right)}$$

$$= \frac{0+1+1+2+1+1+2+0+1+1}{5 \cdot 14}$$

$$= \frac{1}{7}$$

2.1.4 Graf Unit

Misalkan R suatu ring dengan unsur kesatuan dan $x \in R$. Unsur x disebut unit pada R jika terdapat $y \in R$ dan unsur kesatuan $e \in R$ sedemikian hingga $x \cdot y = y \cdot x = e$. Himpunan semua unit pada R dilambangkan dengan $U(R)$. Graf unit pada R adalah graf sederhana dengan semua anggota R sebagai titik dan dua titik yang berbeda, x dan y, terhubung langsung jika dan hanya jika $x + y \in U(R)$ (Ashrafi dkk., 2010).

Contoh:

Misalkan ring $\mathbb{Z}_6$. Himpunan unit dari ring $\mathbb{Z}_6$ atau $U(\mathbb{Z}_6)$ dapat diperoleh menggunakan tabel Cayley sebagai berikut

Tabel 2.1 Tabel Cayley Himpunan Unit Ring $\mathbb{Z}_6$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

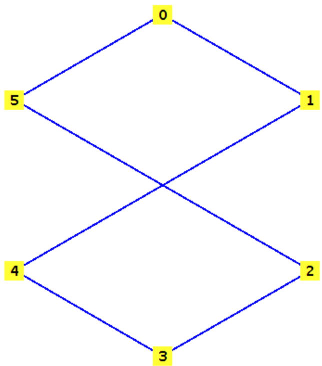
Jadi himpunan unit ring $\mathbb{Z}_6$ adalah $U(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{1}, \bar{5}\}$.

Kemudian akan dibentuk graf unit $\mathbb{Z}_6$ dengan terlebih dahulu menentukan sisinya

Tabel 2.2 Tabel Pasangan Sisi Graf Unit Ring $\mathbb{Z}_6$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

Berdasarkan Tabel 2.2, diperoleh sisi-sisi pada graf unit dari ring $\mathbb{Z}_6$ adalah $E(G(\mathbb{Z}_6)) = \{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{1}, \bar{4}), (\bar{2}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{5}), (\bar{3}, \bar{4})\}$. Sehingga graf unit ring $\mathbb{Z}_6$ dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 2.3 Graf Unit dari Ring $\mathbb{Z}_6$

2.1.5 Keterbagian

Definisi 2.1

Misalkan x dan y adalah suatu bilangan bulat, dengan $x \neq 0$. Bilangan x dikatakan membagi y jika terdapat bilangan bulat k sedemikian hingga $y = xk$ dan dinotasikan dengan $x|y$. Notasi $x|y$ dapat dibaca dengan "x pembagi y", "x faktor dari y", atau "y kelipatan dari x" (Gilbert & Gilbert, 2015).

Contoh:

$7|42$, karena terdapat $6 \in \mathbb{Z}$ sedemikian hingga $42 = 7 \cdot 6$.

Teorema 2.1

Untuk $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$ berlaku

1. Jika $x|y$, maka $x|yz$, untuk $\forall z \in \mathbb{Z}$; $x \neq 0$
2. Jika $x|y$ dan $y|z$, maka $x|z$; $x \neq 0, y \neq 0$
3. Jika $x|y$ dan $x|z$, maka $x|y \pm z$; $x \neq 0$
4. Jika $x|y$ dan $x|z$, maka $x|(ym \pm zn)$; untuk setiap $m, n \in \mathbb{Z}$ dan $x \neq 0$

(Irawan dkk, 2014).

Definisi 2.2

Misalkan y dan z adalah suatu bilangan bulat, dengan $y \neq 0$ dan $z \neq 0$.

Bilangan bulat x disebut pembagi persekutuan terbesar atau *greatest common divisor* dari y dan z, jika berlaku:

1. $x > 0$
2. $x|y$ dan $x|z$
3. Misalkan p bilangan bulat, jika $p|y$ dan $p|z$, maka $p|x$.

Pembagi persekutuan terbesar x dari y dan z dinotasikan dengan $x = (y, z)$ (Irawan dkk, 2014).

2.1.6 Kongruensi

Definisi 2.3

Misalkan n suatu bilangan bulat positif dan $n > 1$. Untuk suatu bilangan bulat x dan y, x kongruen dengan y modulo n jika dan hanya jika $x - y$ adalah kelipatan dari n. Pernyataan x kongruen dengan y modulo n dinotasikan dengan $x \equiv y \pmod{n}$ (Gilbert & Gilbert, 2015). Dengan demikian, $x \equiv y \pmod{n}$ jika dan hanya jika n membagi $x - y$ sehingga $x \equiv y\ (\mathrm{mod}\ n)$ ekivalen dengan $x - y = nq$ atau $x + y = nq$, untuk suatu $q \in \mathbb{Z}$.

Contoh:

$39 \equiv 3\ (mod\ 4)$ karena $(39 - 3)$ terbagi oleh 4 atau 4 membagi $(39 - 3)$.

2.1.7 Kongruensi Linier

Definisi 2.4

Misalkan $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ adalah suatu sistem residu lengkap modulo n. Banyaknya selesaian dari $f(x) \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ n)$ adalah banyaknya s_i yang memenuhi $f(s_i) \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ n)$. (Irawan dkk, 2014).

Contoh:

$f(x) = 2x + 4 \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3)$

Untuk $x = 0$, maka $f(0) = 2.0 + 4 = 4 \not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3)$, jadi 0 bukan selesaian.

Untuk $x = 1$, maka $f(0) = 2.1 + 4 = 6 \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3)$, jadi 1 adalah selesaian.

Untuk $x = 2$, maka $f(0) = 2.2 + 4 = 8 \not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3)$, jadi 2 bukan selesaian.

Sehingga $f(x) = 2x + 3 \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3)$ mempunyai satu selesaian yakni $x \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 3)$.

Teorema 2.3 (Sistem Kongruensi Linier)

Misalkan $a, b, c, d, e, f, n \in \mathbb{Z}$ dengan $n > 0$, sedemikian hingga $(\Delta, n) = 1$, dimana $\Delta = ad - bc$. Maka sistem kongruensi:

$ax + by \equiv e\ (\mathrm{mod}\ n)$

$cx + dy \equiv f\ (\mathrm{mod}\ n)$

Mempunyai penyelesaian tunggal modulo n yang diberikan oleh:

$x \equiv \overline{\Delta}(de - bf)\ (\mathrm{mod}\ n)$

$y \equiv \overline{\Delta}(af - ce)\ (\mathrm{mod}\ n)$

dengan $\overline{\Delta}$ adalah invers dari Δ modulo n.

2.2 Kajian Agama

Allah SWT menciptakan alam semesta dengan sebaik-baik ciptaan. Semua yang ada di alam semesta seperti langit, bumi, dan makhluk hidup diatur sedemikian rupa oleh Allah SWT supaya saling sinkron dan saling memberikan manfaat. Maka dari itu, Allah SWT menciptakan alam semesta dan seisinya dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, serta dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdussakir, 2007). Sebagaimana yang telah difirmankan oleh Allah SWT dalam surat al-Qamar ayat 49 yang artinya:

"Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran" (Qs. Al-Qamar:49).

Dalam tafsir Al Misbah, ayat ini menunjukkan bahwa tidak ada satupun ciptaan Allah SWT yang sia-sia. Semuanya diberi potensi yang sesuai dan dengan ukuran atau kadar yang cukup untuk melaksanakan fungsinya, dan saling berkaitan untuk menunjang keseimbangan. Sebagai manusia yang *ulul albab*, patutnya kita memperhatikan fenomena matematika alam tersebut. Hingga pada akhirnya, timbul suatu kesadaran bahwa di balik fenomena tersebut terdapat tanda-tanda kekuasaan Allah SWT yang perlu dirawat dan dimanfaatkan untuk kesejahteraan manusia.

Matematika sebagai ilmu hitung menganut penalaran deduktif. Penalaran deduktif ialah pola berpikir yang didasarkan pada kebenaran-kebenaran yang secara umum terbukti benar. Meskipun demikian, ahli matematika juga memperhatikan ilham, dugaan, pengalaman, daya cipta, rasa, dan fenomena dalam mengembangkan matematika. Kesimpulan dari pengembangan itu akan diterima setelah ditetapkan atau dibuktikan melalui penalaran logis (Abdussakir, 2007). Salah satu bentuk dugaan dalam matematika ialah pola indeks topologi pada graf. Graf memiliki karakteristik yang unik pada setiap jenisnya, seperti banyaknya derajat pada setiap titik, jarak antar titik pada graf, dan lain sebagainya, Kemudian pada graf tersebut dicari informasi menggunakan indeks topologi untuk mencari nilai matematis pada graf. Karakteristik pada graf tersebut menjadikan indeks topologi yang diperoleh membentuk sebuah pola. Pola indeks topologi tersebut dapat digunakan sebagai panduan untuk mencari indeks topologi pada graf yang memiliki titik atau sisi yang jumlahnya banyak.

Proses membentuk pola indeks topologi merupakan salah satu bentuk dari mengembangkan akal yang telah dianugerahkan oleh Allah SWT. Allah SWT berfirman dalam surat al-Muddatsir ayat 55 yang artinya:

“Maka barang siapa menghendaki, niscaya dia mengambil pelajaran daripadanya (al- Quran)” (Qs. Al-Muddatsir:55).

Pada ayat ini, Allah SWT mengendaki hambanya untuk mengambil pelajaran dari apa yang ada di sekitarnya dengan memaksimalkan pikiran yang telah dianugerahkannya. Berpikir sendiri memiliki manfaat dapat membebaskan seseorang dari belenggu “sihir”, dalam artian yang disihir adalah akal yang tidak digunakan untuk berpikir. Akibatnya akal tersebut menjadi lumpuh, ia tidak mampu memahami kebenaran yang sederhana, dan tidak dapat membangkitkan kesadaran untuk memahami peristiwa luar biasa yang terjadi di sekitarnya (Nisa, 2020).

2.3 Kajian Topik Dengan Teori Pendukung

Pembahasan “Indeks Gini Derajat pada Graf Unit dari Ring Bilangan Bulat Modulo” ini didukung oleh beberapa teori pendukung seperti graf unit dan indeks gini derajat pada graf. Graf unit adalah graf yang titiknya adalah semua elemen pada suatu ring, misalkan ring dengan unsur kesatuan R, dan kedua titik yang berbeda, x dan y, terhubung langsung jika dan hanya jika $x + y \in U(R)$ dengan $U(R) = \{x \in R | x \cdot y = e, y \in R\}$ (Ashrafi dkk., 2010). Graf unit dibuat untuk menghasilkan suatu gambar graf yang mempunyai pola pada masing-masing titik dan sisinya. Sehingga dari setiap titik dan sisi di graf unit $\mathbb{Z}_{3p}$ untuk p bilangan prima akan terbentuk suatu data yang berupa derajat masing-masing titik. Selanjutnya terdapat indeks gini derajat. Indeks gini derajat adalah indeks pada suatu graf, misalkan graf H, yang didefinisikan sebagai

$$GD(H) = \sum_{\substack{u,v \in V \\ u \neq v}} \frac{|deg(u) - deg(v)|}{n^2 \mathbb{E}[D^*(G)]}$$

dengan $deg(u)$ dan $deg(v)$ masing-masing adalah derajat titik u dan v pada graf H, n adalah kardinalitas dari himpunan titik di H, dan $\mathbb{E}[D^*(H)]$ adalah rata-rata derajat titik-titik pada H (Domicolo & Mahmoud, 2020). Indeks gini derajat digunakan untuk menghimpun unit dan derajat titik yang selanjutnya akan dihitung dengan menggunakan rumus indeks gini derajat sehingga dari setiap graf unit $\mathbb{Z}_{3p}$ untuk p bilangan prima akan diperoleh suatu proposisi dari indeks gini derajat. Sehingga pola yang diperoleh dari graf unit dan indeks gini derajat akan membentuk suatu dugaan yang dapat dibuktikan dengan menggunakan teorema pendukung sebagai pembuktian dari dugaan yang telah dihasilkan.

BAB III
METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Metode yang digunakan pada penelitian ini menggunakan studi literatur atau kajian pustaka, yakni proses pengumpulan data ataupun informasi dengan mengkaji berbagai macam sumber literatur seperti buku, artikel, dan skripsi yang menjelaskan mengenai teori graf dan struktur aljabar yang berhubungan dengan topik penelitian.

3.2 Pra Penelitian

Proses penelitian diawali dengan mencari literatur utama yang dijadikan rujukan penelitian. Literatur utama berupa jurnal oleh Carly Domicolo, dkk pada tahun 2020 yang membahas tentang indeks gini derajat pada graf. Kemudian literatur utama yang dipakai adalah jurnal oleh Nahid Ashrafi, dkk pada tahun 2010 yang meneliti tentang graf unit yang berasosiasi dengan ring. Setelah mencari literatur utama, proses selanjutnya adalah mengumpulkan literatur pendukung yang berkaitan dengan topik penelitian. Literatur pendukung tersebut meliputi graf, ring, indeks gini derajat, graf unit serta memilih beberapa sumber ayat dalam al-Quran yang dapat diintegrasikan dengan topik penelitian ini.

3.3 Tahapan Penelitian

Penelitian ini menggunakan $p \in \{2,3,5,7,11\}$ untuk menduga formula dari indeks gini derajat pada graf unit $\mathbb{Z}_{3p}$. Tahapan penelitian yang dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menentukan indeks gini derajat pada graf unit dari ring bilangan bulat modulo $\mathbb{Z}_{3p}$, dengan $p \in \{2,3,5,7,11\}$ untuk memunculkan dugaan.
2. Menentukan himpunan unit pada ring bilangan bulat modulo $3p$.
3. Menentukan derajat titik pada graf unit dari ring bilangan bulat modulo $3p$.
4. Menyusun proposisi terkait indeks gini derajat pada ring bilangan bulat modulo $3p$.

BAB IV
PEMBAHASAN

Bab ini membahas tentang formula indeks gini derajat pada graf unit dari ring $\mathbb{Z}_{3p}$ dengan p bilangan prima. Penentuan pola dimulai dengan melakukan percobaan nilai indeks gini derajat pada graf unit dari ring $\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_9, \mathbb{Z}_{15}, \mathbb{Z}_{21}$, dan $\mathbb{Z}_{33}$, kemudian membuktikan dugaan yang diperoleh pada percobaan sebelumnya sehingga diperoleh proposisi yang mendukung terbentuknya formula, dan yang terakhir adalah integrasi agama yang berkaitan dengan hasil penelitian.

4.1 Indeks Gini Derajat pada Graf Unit dari Ring $\mathbb{Z}_{3p}, p \in \{2, 3, 5, 7, 11\}$

Pada subbab ini, akan dibahas penentuan indeks gini derajat pada graf unit dari ring $\mathbb{Z}_{3p}$ dengan p bilangan prima yang nantinya akan dihasilkan pola dan dugaan dan akan dibuktikan pada subbab berikutnya. Percobaan ini menggunakan ring $\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_9, \mathbb{Z}_{15}, \mathbb{Z}_{21}$, dan $\mathbb{Z}_{33}$ untuk menentukan formula tersebut.

4.1.1. Indeks Gini Derajat pada Graf Unit dari Ring $\mathbb{Z}_6$

Ring $\mathbb{Z}_6$ atau ring bilangan bulat modulo 6 mempunyai elemen berupa $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$, dan $\bar{5}$. Berdasarkan definisi graf unit, maka semua elemen pada ring $\mathbb{Z}_6$ tersebut adalah titik-titik pada graf unit dari ring $\mathbb{Z}_6$ atau $G(\mathbb{Z}_6)$. Selanjutnya akan ditentukan himpunan unit dari ring $\mathbb{Z}_6$ menggunakan tabel Cayley terhadap operasi perkalian sebagai berikut.

Tabel 4.1 Tabel Cayley Himpunan Unit Ring $\mathbb{Z}_6$

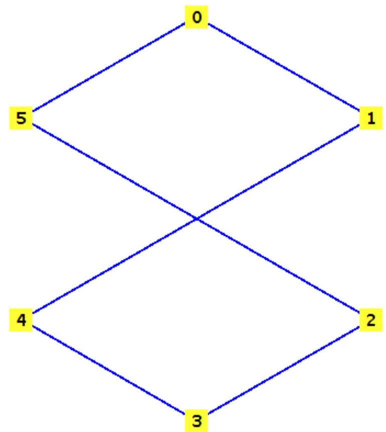
$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Berdasarkan Tabel 4.1, diperoleh himpunan unit dari ring $\mathbb{Z}_6$ adalah $U(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{1}, \bar{5}\}$. Dua elemen pada graf unit–misalkan x dan y–dikatakan terhubung langsung jika dan hanya jika $x + y$ adalah unit dari ring. Sehingga akan ditunjukkan sisi pada graf unit dari ring $\mathbb{Z}_6$ menggunakan tabel Cayley terhadap operasi penjumlahan sebagai berikut.

Tabel 4.2 Tabel Pasangan Sisi Graf Unit Ring $\mathbb{Z}_6$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

Berdasarkan Tabel 4.2, diperoleh sisi-sisi pada graf unit dari ring $\mathbb{Z}_6$ adalah $E\big(G(\mathbb{Z}_6)\big) = \{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{1}, \bar{4}), (\bar{2}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{5}), (\bar{3}, \bar{4})\}$ sebanyak enam sisi, sehingga graf unit dari ring $\mathbb{Z}_6$ atau $G(\mathbb{Z}_6)$ dapat dibentuk sebagai berikut:



Gambar 4.1 Graf $\boldsymbol{G}(\mathbb{Z}_6)$

Berdasarkan Gambar 4.1, diperoleh derajat titik-titik pada graf $G(\mathbb{Z}_6)$ adalah:

$$deg(\bar{0}) = 2 \qquad deg(\bar{2}) = 2 \qquad deg(\bar{4}) = 2$$

$$deg(\bar{1}) = 2 \qquad deg(\bar{3}) = 2 \qquad deg(\bar{5}) = 2$$

Selanjutnya misalkan $n = \left|V\left(G(\mathbb{Z}_6)\right)\right| = 6$, berdasarkan data derajat titik tersebut diperoleh rata-rata derajat titik pada $G(\mathbb{Z}_6)$ sebagai berikut:

$$\mathbb{E}\left[D^*\left(G(\mathbb{Z}_6)\right)\right] = \sum_{v \in V\left(G(\mathbb{Z}_6)\right)} \frac{\deg(v)}{n} = \frac{2+2+2+2+2+2}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

Sehingga indeks gini derajat pada graf $G(\mathbb{Z}_6)$ dapat dihitung sebagai berikut:

$$GD\left(G(\mathbb{Z}_6)\right) = \sum_{\substack{u,v \in V\left(G(\mathbb{Z}_6)\right) \\ u \neq v}} \frac{|deg(u) - deg(v)|}{n^2 \mathbb{E}\left[D^*\left(G(\mathbb{Z}_6)\right)\right]}$$

$$= (|2-2| + |2-2| + |2-2| + |2-2| + |2-2| + |2-2| +$$

$$|2-2| + |2-2| + |2-2| + |2-2| + |2-2| + |2-2| +$$

$$|2-2| + |2-2| + |2-2| \frac{1}{6^2 \cdot 2}$$

$$= \frac{0}{72}$$

$$= 0$$

4.1.2. Indeks Gini Derajat pada Graf Unit dari Ring $\mathbb{Z}_9$

Ring $\mathbb{Z}_9$ atau ring bilangan bulat modulo 9 mempunyai elemen berupa $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}$, dan $\bar{8}$. Berdasarkan definisi graf unit, maka semua elemen pada ring $\mathbb{Z}_9$ tersebut adalah titik-titik pada graf unit dari ring $\mathbb{Z}_9$ atau $G(\mathbb{Z}_9)$. Selanjutnya akan ditentukan himpunan unit menggunakan tabel Cayley terhadap operasi perkalian.

Tabel 4.3 Tabel Cayley Himpunan Unit Ring $\mathbb{Z}_9$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{7}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{3}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

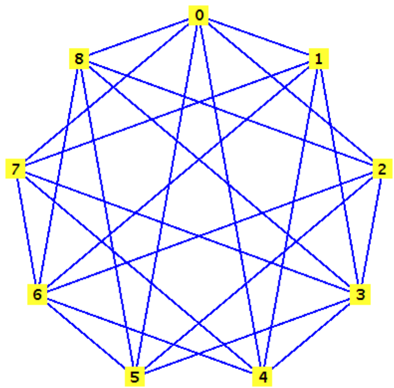
Berdasarkan Tabel 4.3, diperoleh himpunan unit dari ring $\mathbb{Z}_9$ adalah $U(\mathbb{Z}_9) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{8}\}$. Dua elemen pada graf unit–misalkan *x* dan *y*–dikatakan terhubung langsung jika dan hanya jika *x* + *y* adalah unit dari ring. Sehingga akan ditunjukkan sisi pada graf unit dari ring $\mathbb{Z}_9$ menggunakan tabel Cayley terhadap operasi penjumlahan sebagai berikut.

Tabel 4.4 Tabel Pasangan Sisi Graf Unit Ring $\mathbb{Z}_9$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{7}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{8}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$

Berdasarkan Tabel 4.4, diperoleh sisi-sisi pada graf unit dari ring $\mathbb{Z}_9$ adalah $E(G(\mathbb{Z}_9)) = \{(\bar{0},\bar{1}),\ (\bar{0},\bar{2}),\ (\bar{0},\bar{4}),\ (\bar{0},\bar{5}),\ (\bar{0},\bar{7}),\ (\bar{0},\bar{8}),\ (\bar{1},\bar{3}),\ (\bar{1},\bar{4}),$ $(\bar{1},\bar{6}), (\bar{1},\bar{7}), (\bar{2},\bar{3}), (\bar{2},\bar{5}), (\bar{2},\bar{6}), (\bar{2},\bar{8}), (\bar{3},\bar{4}), (\bar{3},\bar{5}), (\bar{3},\bar{7}), (\bar{3},\bar{8}), (\bar{4},\bar{6}), (\bar{4},\bar{7}),$

$(\bar{5},\bar{6}),(\bar{5},\bar{8}),(\bar{6},\bar{7}),(\bar{6},\bar{8})\}$ sebanyak 24 sisi, sehingga graf unit dari ring $\mathbb{Z}_9$ atau $G(\mathbb{Z}_9)$ dapat dibentuk sebagai berikut:



Gambar 4.2 Graf $\boldsymbol{G}(\mathbb{Z}_9)$

Berdasarkan Gambar 4.2, diperoleh derajat titik-titik pada graf $G(\mathbb{Z}_9)$ adalah:

$deg(\bar{0}) = 6$	$deg(\bar{3}) = 6$	$deg(\bar{6}) = 6$
$deg(\bar{1}) = 5$	$deg(\bar{4}) = 5$	$deg(\bar{7}) = 5$
$deg(\bar{2}) = 5$	$deg(\bar{5}) = 5$	$deg(\bar{8}) = 5$

Selanjutnya misalkan $n = |V(G(\mathbb{Z}_9))| = 9$, berdasarkan data derajat titik tersebut diperoleh rata-rata derajat titik pada $G(\mathbb{Z}_9)$ sebagai berikut:

$$\mathbb{E}[D^*(G(\mathbb{Z}_9))] = \sum_{v\in V(G(\mathbb{Z}_9))} \frac{\deg(v)}{n}$$

$$= \frac{6+5+5+6+5+5+6+5+5}{9}$$

$$= \frac{48}{9}$$

Sehingga indeks gini derajat pada graf $G(\mathbb{Z}_9)$ dapat dihitung sebagai berikut:

$$GD\big(G(\mathbb{Z}_9)\big) = \sum_{\substack{u,v\in V(G(\mathbb{Z}_9))\\ u\neq v}} \frac{|deg(u)-deg(v)|}{n^2\mathbb{E}\big[D^*\big(G(\mathbb{Z}_9)\big)\big]}$$

$$= (|6-5|+|6-5|+|6-6|+|6-5|+|6-5|+|6-6|+ |6-5|+|6-5|+|5-5|+|5-6|+|5-5|+|5-5|+ |5-6|+|5-5|+|5-5|+|5-6|+|5-5|+|5-5|+ |5-6|+|5-5|+|5-5|+|6-5|+|6-5|+|6-6|+ |6-5|+|6-5|+|5-5|+|5-6|+|5-5|+|5-5|+ |5-6|+|5-5|+|5-5|+|6-5|+|6-5|+|5-5|) \frac{1}{9^2\cdot\frac{48}{9}}$$

$$= (1+1+0+1+1+0+1+1+0+1+0+0+1+0+ 0+1+0+0+1+0+0+1+1+0+1+1+0+1+ 0+0+1+0+0+1+1+0)\frac{1}{9\cdot 48}$$

$$= \frac{18}{432}$$

$$= \frac{1}{24}$$

4.1.3. Indeks Gini Derajat pada Graf Unit dari Ring $\mathbb{Z}_{15}$

Ring $\mathbb{Z}_{15}$ atau ring bilangan bulat modulo 15 mempunyai elemen berupa $\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{6},\bar{7},\bar{8},\bar{9},\overline{10},\overline{11},\overline{12},\overline{13}$, dan $\overline{14}$. Berdasarkan definisi graf unit, maka semua elemen pada ring $\mathbb{Z}_{15}$ tersebut adalah titik-titik pada graf unit dari ring $\mathbb{Z}_{15}$ atau $G(\mathbb{Z}_{15})$. Selanjutnya akan ditentukan himpunan unit menggunakan tabel Cayley terhadap operasi perkalian.

Tabel 4.5 Tabel Cayley Himpunan Unit Ring $\mathbb{Z}_{15}$

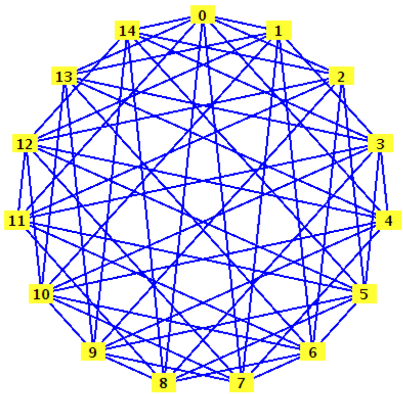
$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\overline{14}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$	$\overline{7}$	$\overline{9}$	$\overline{11}$	$\overline{13}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{12}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{12}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{9}$	$\overline{13}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{10}$	$\overline{14}$	$\overline{3}$	$\overline{7}$	$\overline{11}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$
$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{3}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{3}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{3}$	$\overline{9}$
$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{14}$	$\overline{6}$	$\overline{13}$	$\overline{5}$	$\overline{12}$	$\overline{4}$	$\overline{11}$	$\overline{3}$	$\overline{10}$	$\overline{2}$	$\overline{9}$	$\overline{1}$	$\overline{8}$
$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{1}$	$\overline{9}$	$\overline{2}$	$\overline{10}$	$\overline{3}$	$\overline{11}$	$\overline{4}$	$\overline{12}$	$\overline{5}$	$\overline{13}$	$\overline{6}$	$\overline{14}$	$\overline{7}$
$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{3}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{3}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{3}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$
$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$
$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{7}$	$\overline{3}$	$\overline{14}$	$\overline{10}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{13}$	$\overline{9}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$	$\overline{12}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$
$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$
$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{13}$	$\overline{11}$	$\overline{9}$	$\overline{7}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{14}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{14}$	$\overline{0}$	$\overline{14}$	$\overline{13}$	$\overline{12}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Berdasarkan Tabel 4.1, diperoleh himpunan unit dari ring $\mathbb{Z}_{15}$ adalah $U(\mathbb{Z}_{15}) = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{14}\}$. Dua elemen pada graf unit–misalkan *x* dan *y*–dikatakan terhubung langsung jika dan hanya jika *x* + *y* adalah unit dari ring. Sehingga akan ditunjukkan sisi pada graf unit dari ring $\mathbb{Z}_{15}$ menggunakan tabel Cayley terhadap operasi penjumlahan sebagai berikut.

Tabel 4.6 Tabel Pasangan Sisi Graf Unit Ring $\mathbb{Z}_{15}$

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{8}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$
$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$
$\overline{10}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$
$\overline{11}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$
$\overline{12}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
$\overline{13}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$
$\overline{14}$	$\overline{14}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$

Berdasarkan Tabel 4.6, diperoleh sisi-sisi pada graf unit dari ring $\mathbb{Z}_{15}$ adalah $E(G(\mathbb{Z}_{15})) = \{(\bar{0},\bar{1}), (\bar{0},\bar{2}), (\bar{0},\bar{4}), (\bar{0},\bar{7}), (\bar{0},\bar{8}), (\bar{0},\overline{11}), (\bar{0},\overline{13}), (\bar{0},\overline{14})$, $(\bar{1},\bar{3})$, $(\bar{1},\bar{6})$, $(\bar{1},\bar{7})$, $(\bar{1},\overline{10})$, $(\bar{1},\overline{12})$, $(\bar{1},\overline{13})$, $(\bar{2},\bar{5})$, $(\bar{2},\bar{6})$, $(\bar{2},\bar{9})$, $(\bar{2},\overline{11})$, $(\bar{2},\overline{12})$, $(\bar{2},\overline{14})$, $(\bar{3},\bar{4})$, $(\bar{3},\bar{5})$, $(\bar{3},\bar{8})$, $(\bar{3},\overline{10})$, $(\bar{3},\overline{11})$, $(\bar{3},\overline{13})$, $(\bar{3},\overline{14})$, $(\bar{4},\bar{9})$, $(\bar{4},\bar{9})$, $(\bar{4},\overline{10})$, $(\bar{4},\overline{12})$, $(\bar{5},\bar{6})$, $(\bar{5},\bar{8})$, $(\bar{5},\bar{9})$, $(\bar{5},\overline{11})$, $(\bar{5},\overline{12})$, $(\bar{5},\overline{14})$, $(\bar{6},\bar{7})$, $(\bar{6},\bar{8})$, $(\bar{6},\overline{10})$, $(\bar{6},\overline{11})$, $(\bar{6},\overline{13})$, $(\bar{7},\bar{9})$, $(\bar{7},\overline{10})$, $(\bar{7},\overline{12})$, $(\bar{8},\bar{9})$, $(\bar{8},\overline{11})$, $(\bar{8},\overline{14})$, $(\bar{9},\overline{10}), (\bar{9},\overline{13}), (\bar{9},\overline{14}), (\overline{10},\overline{12}), (\overline{10},\overline{13}), (\overline{11},\overline{12}), (\overline{12},\overline{14})\}$ sebanyak 56 sisi, sehingga graf unit dari ring $\mathbb{Z}_{15}$ atau $G(\mathbb{Z}_{15})$ dapat dibentuk sebagai berikut:



Gambar 4.3 Graf $\boldsymbol{G}(\mathbb{Z}_{\mathbf{15}})$

Berdasarkan Gambar 4.1, diperoleh derajat titik-titik pada graf $G(\mathbb{Z}_{15})$ adalah:

$deg(\bar{0}) = 8$	$deg(\bar{3}) = 8$	$deg(\bar{6}) = 8$	$deg(\bar{9}) = 8$	$deg(\overline{12}) = 8$
$deg(\bar{1}) = 7$	$deg(\bar{4}) = 7$	$deg(\bar{7}) = 7$	$deg(\overline{10}) = 8$	$deg(\overline{13}) = 7$
$deg(\bar{2}) = 7$	$deg(\bar{5}) = 8$	$deg(\bar{8}) = 7$	$deg(\overline{11}) = 7$	$deg(\overline{14}) = 7$

Selanjutnya misalkan $n = |V(G(\mathbb{Z}_{15}))| = 15$, berdasarkan data derajat titik tersebut diperoleh rata-rata derajat titik pada $G(\mathbb{Z}_{15})$ sebagai berikut:

$$\mathbb{E}\left[D^*\big(G(\mathbb{Z}_{15})\big)\right] = \sum_{v\in V(G(\mathbb{Z}_{15}))} \frac{\deg(v)}{n}$$

$$= \frac{8+7+7+8+7+8+8+7+7+8+8+7+8+7+7}{15}$$

$$= \frac{112}{15}$$

Sehingga indeks gini derajat pada graf $G(\mathbb{Z}_{15})$ dapat dihitung sebagai berikut:

$$GD\big(G(\mathbb{Z}_{15})\big) = \sum_{\substack{u,v\in V(G(\mathbb{Z}_{15}))\\ u\neq v}} \frac{|deg(u)-deg(v)|}{n^2\mathbb{E}\left[D^*\big(G(\mathbb{Z}_{15})\big)\right]}$$

$$= (|8-7|+|8-7|+|8-8|+|8-7|+|8-8|+|8-8|+$$

$$|8-7|+|8-7|+|8-8|+|8-8|+|8-7|+|8-8|+$$

$$|8-7|+|8-7|+|7-7|+|7-8|+|7-7|+|7-8|+$$

$$|7-8|+|7-7|+|7-7|+|7-8|+|7-8|+|7-7|+$$

$$|7-8|+|7-7|+|7-7|+|7-8|+|7-7|+|7-8|+$$

$$|7-8|+|7-7|+|7-7|+|7-8|+|7-8|+|7-7|+$$

$$|7-8|+|7-7|+|7-7|+|8-7|+|8-8|+|8-8|+$$

$$|8-7|+|8-7|+|8-8|+|8-8|+|8-7|+|8-8|+$$

$$|8-7|+|8-7|+|7-8|+|7-8|+|7-7|+|7-7|+$$

$$|7-8|+|7-8|+|7-7|+|7-8|+|7-7|+|7-7|+$$

$$|8-8|+|8-7|+|8-7|+|8-8|+|8-8|+|8-7|+$$

$$|8-8|+|8-7|+|8-7|+|8-7|+|8-7|+|8-8|+$$

$$|8-8|+|8-7|+|8-8|+|8-7|+|8-7|+|7-7|+$$

$$|7-8|+|7-8|+|7-7|+|7-8|+|7-7|+|7-7|+$$

$$|7-8|+|7-8|+|7-7|+|7-8|+|7-7|+|7-7|+$$

$$|8-8|+|8-7|+|8-8|+|8-7|+|8-7|+|8-7|+$$

$$|8-8|+|8-7|+|8-7|+|7-8|+|7-7|+|7-7|+$$

$$|8-7|+|8-7|+|7-7|)\frac{1}{15^2\cdot\frac{112}{15}}$$

$$=(1+1+0+1+0+0+1+1+0+0+1+0+1+1+$$

$$0+1+0+1+1+0+0+1+1+0+1+0+0+1+$$

$$0+1+1+0+0+1+1+0+1+0+0+1+0+0+$$

$$1+1+0+0+1+0+1+1+1+1+1+0+1+1+$$

$$0+1+0+0+0+1+1+0+0+1+0+1+1+1+$$

$$1+0+0+1+0+1+1+0+1+1+0+1+0+0+$$

$$1+1+0+1+0+0+0+1+0+1+1+1+0+1+$$

$$1+1+0+0+1+1+0)\frac{1}{15\cdot 112}$$

$$=\frac{56}{1680}$$

$$=\frac{1}{30}$$

4.1.4. Indeks Gini Derajat pada Graf Unit dari Ring $\mathbb{Z}_{21}$

Ring $\mathbb{Z}_{21}$ atau ring bilangan bulat modulo 21 mempunyai elemen berupa $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}$, dan $\overline{20}$. Berdasarkan definisi graf unit, maka semua elemen pada ring $\mathbb{Z}_{21}$ tersebut adalah titik-titik pada graf unit dari ring $\mathbb{Z}_{21}$ atau $G(\mathbb{Z}_{21})$. Selanjutnya akan ditentukan himpunan unit menggunakan tabel Cayley terhadap operasi perkalian.

Tabel 4.7 Tabel Cayley Himpunan Unit Ring $\mathbb{Z}_{21}$

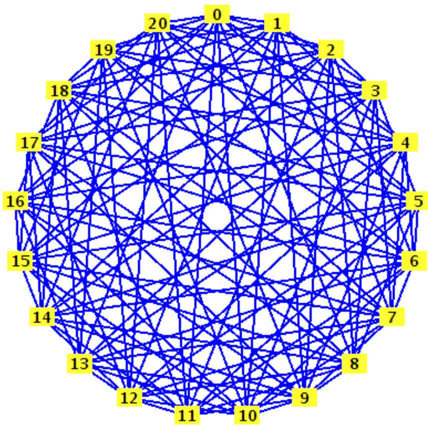
$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\overline{14}$	$\overline{16}$	$\overline{18}$	$\overline{20}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$	$\overline{7}$	$\overline{9}$	$\overline{11}$	$\overline{13}$	$\overline{15}$	$\overline{17}$	$\overline{19}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{12}$	$\overline{15}$	$\overline{18}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{12}$	$\overline{15}$	$\overline{18}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{12}$	$\overline{15}$	$\overline{18}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{12}$	$\overline{16}$	$\overline{20}$	$\overline{3}$	$\overline{7}$	$\overline{11}$	$\overline{15}$	$\overline{19}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{10}$	$\overline{14}$	$\overline{18}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{9}$	$\overline{13}$	$\overline{17}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{15}$	$\overline{20}$	$\overline{4}$	$\overline{9}$	$\overline{14}$	$\overline{19}$	$\overline{3}$	$\overline{8}$	$\overline{13}$	$\overline{18}$	$\overline{2}$	$\overline{7}$	$\overline{12}$	$\overline{17}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{11}$	$\overline{16}$
$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{18}$	$\overline{3}$	$\overline{9}$	$\overline{15}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{18}$	$\overline{3}$	$\overline{9}$	$\overline{15}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{18}$	$\overline{3}$	$\overline{9}$	$\overline{15}$
$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{14}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{14}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{14}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{14}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{14}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{14}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{14}$
$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{16}$	$\overline{3}$	$\overline{11}$	$\overline{19}$	$\overline{6}$	$\overline{14}$	$\overline{1}$	$\overline{9}$	$\overline{17}$	$\overline{4}$	$\overline{12}$	$\overline{20}$	$\overline{7}$	$\overline{15}$	$\overline{2}$	$\overline{10}$	$\overline{18}$	$\overline{5}$	$\overline{13}$
$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{18}$	$\overline{6}$	$\overline{15}$	$\overline{3}$	$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{18}$	$\overline{6}$	$\overline{15}$	$\overline{3}$	$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{18}$	$\overline{6}$	$\overline{15}$	$\overline{3}$	$\overline{12}$
$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{20}$	$\overline{9}$	$\overline{19}$	$\overline{8}$	$\overline{18}$	$\overline{7}$	$\overline{17}$	$\overline{6}$	$\overline{16}$	$\overline{5}$	$\overline{15}$	$\overline{4}$	$\overline{14}$	$\overline{3}$	$\overline{13}$	$\overline{2}$	$\overline{12}$	$\overline{1}$	$\overline{11}$
$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{1}$	$\overline{12}$	$\overline{2}$	$\overline{13}$	$\overline{3}$	$\overline{14}$	$\overline{4}$	$\overline{15}$	$\overline{5}$	$\overline{16}$	$\overline{6}$	$\overline{17}$	$\overline{7}$	$\overline{18}$	$\overline{8}$	$\overline{19}$	$\overline{9}$	$\overline{20}$	$\overline{10}$
$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{3}$	$\overline{15}$	$\overline{6}$	$\overline{18}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{3}$	$\overline{15}$	$\overline{6}$	$\overline{18}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{3}$	$\overline{15}$	$\overline{6}$	$\overline{18}$	$\overline{9}$
$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{13}$	$\overline{5}$	$\overline{18}$	$\overline{10}$	$\overline{2}$	$\overline{15}$	$\overline{7}$	$\overline{20}$	$\overline{12}$	$\overline{4}$	$\overline{17}$	$\overline{9}$	$\overline{1}$	$\overline{14}$	$\overline{6}$	$\overline{19}$	$\overline{11}$	$\overline{3}$	$\overline{16}$	$\overline{8}$
$\overline{14}$	$\overline{0}$	$\overline{14}$	$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{14}$	$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{14}$	$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{14}$	$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{14}$	$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{14}$	$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{14}$	$\overline{7}$
$\overline{15}$	$\overline{0}$	$\overline{15}$	$\overline{9}$	$\overline{3}$	$\overline{18}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{15}$	$\overline{9}$	$\overline{3}$	$\overline{18}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{15}$	$\overline{9}$	$\overline{3}$	$\overline{18}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$
$\overline{16}$	$\overline{0}$	$\overline{16}$	$\overline{11}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{17}$	$\overline{12}$	$\overline{7}$	$\overline{2}$	$\overline{18}$	$\overline{13}$	$\overline{8}$	$\overline{3}$	$\overline{19}$	$\overline{14}$	$\overline{9}$	$\overline{4}$	$\overline{20}$	$\overline{15}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$
$\overline{17}$	$\overline{0}$	$\overline{17}$	$\overline{13}$	$\overline{9}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$	$\overline{18}$	$\overline{14}$	$\overline{10}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{19}$	$\overline{15}$	$\overline{11}$	$\overline{7}$	$\overline{3}$	$\overline{20}$	$\overline{16}$	$\overline{12}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$
$\overline{18}$	$\overline{0}$	$\overline{18}$	$\overline{15}$	$\overline{12}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{18}$	$\overline{15}$	$\overline{12}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{18}$	$\overline{15}$	$\overline{12}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$
$\overline{19}$	$\overline{0}$	$\overline{19}$	$\overline{17}$	$\overline{15}$	$\overline{13}$	$\overline{11}$	$\overline{9}$	$\overline{7}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{20}$	$\overline{18}$	$\overline{16}$	$\overline{14}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{20}$	$\overline{0}$	$\overline{20}$	$\overline{19}$	$\overline{18}$	$\overline{17}$	$\overline{16}$	$\overline{15}$	$\overline{14}$	$\overline{13}$	$\overline{12}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Berdasarkan Tabel 4.3, diperoleh himpunan unit dari ring $\mathbb{Z}_{21}$ adalah $U(\mathbb{Z}_{21}) = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}\}$. Dua elemen pada graf unit–misalkan *x* dan *y*–dikatakan terhubung langsung jika dan hanya jika *x* + *y* adalah unit dari ring. Sehingga akan ditunjukkan sisi pada graf unit dari ring $\mathbb{Z}_{21}$ menggunakan tabel Cayley terhadap operasi penjumlahan sebagai berikut.

Tabel 4.8 Tabel Pasangan Sisi Graf Unit Ring $\mathbb{Z}_{21}$

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{8}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$
$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$
$\overline{10}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$
$\overline{11}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$
$\overline{12}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
$\overline{13}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$
$\overline{14}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$
$\overline{15}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$
$\overline{16}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$
$\overline{17}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$
$\overline{18}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$
$\overline{19}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$
$\overline{20}$	$\overline{20}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$

Berdasarkan Tabel 4.4, diperoleh sisi-sisi pada graf unit dari ring $\mathbb{Z}_{21}$ sebanyak 120 sisi seperti pada Lampiran 1, sehingga graf unit dari ring $\mathbb{Z}_{21}$ atau $G(\mathbb{Z}_{21})$ dapat dibentuk sebagai berikut:



Gambar 4.4 Graf $\boldsymbol{G}(\mathbb{Z}_{21})$

Berdasarkan Gambar 4.2, diperoleh derajat titik-titik pada graf $G(\mathbb{Z}_{21})$ adalah:

$deg(\bar{0}) = 12$	$deg(\bar{7}) = 12$	$deg(\overline{14}) = 12$
$deg(\bar{1}) = 11$	$deg(\bar{8}) = 11$	$deg(\overline{15}) = 12$
$deg(\bar{2}) = 11$	$deg(\bar{9}) = 12$	$deg(\overline{16}) = 11$
$deg(\bar{3}) = 12$	$deg(\overline{10}) = 11$	$deg(\overline{17}) = 11$
$deg(\bar{4}) = 11$	$deg(\overline{11}) = 11$	$deg(\overline{18}) = 12$
$deg(\bar{5}) = 11$	$deg(\overline{12}) = 12$	$deg(\overline{19}) = 11$
$deg(\bar{6}) = 12$	$deg(\overline{13}) = 11$	$deg(\overline{20}) = 11$

Selanjutnya misalkan $n = \left|V\left(G(\mathbb{Z}_{21})\right)\right| = 21$, berdasarkan data derajat titik tersebut diperoleh rata-rata derajat titik pada $G(\mathbb{Z}_{21})$ sebagai berikut:

$$\mathbb{E}\left[D^*\left(G(\mathbb{Z}_{21})\right)\right] = \sum_{v \in V\left(G(\mathbb{Z}_{21})\right)} \frac{\deg(v)}{n}$$

$$= \frac{12 + 11 + 11 + 12 + 11 + 11 + 12 + 12 + 11 + 12 +}{21} +$$

$$\frac{11 + 11 + 12 + 11 + 12 + 12 + 11 + 11 + 12 + 11 + 11}{21}$$

$$= \frac{240}{21}$$

Sehingga indeks gini derajat pada graf $G(\mathbb{Z}_{21})$ dapat dihitung sebagai berikut:

$$GD\left(G(\mathbb{Z}_{21})\right) = \sum_{\substack{u,v \in V\left(G(\mathbb{Z}_{21})\right) \\ u \neq v}} \frac{|deg(u) - deg(v)|}{n^2 \mathbb{E}\left[D^*\left(G(\mathbb{Z}_{21})\right)\right]}$$

$$\vdots$$

$$= \frac{108}{5040}$$

$$= \frac{3}{140}$$

Proses perhitungan indeks gini derajat pada graf $G(\mathbb{Z}_{21})$ selengkapnya pada Lampiran 1.

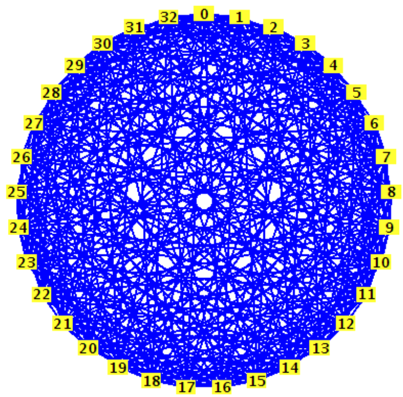
4.1.5. Indeks Gini Derajat pada Graf Unit dari Ring $\mathbb{Z}_{33}$

Ring $\mathbb{Z}_{33}$ atau ring bilangan bulat modulo 33 mempunyai elemen berupa $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{4}$, $\overline{5}$, $\overline{6}$, $\overline{7}$, $\overline{8}$, $\overline{9}$, $\overline{10}$, $\overline{11}$, $\overline{12}$, $\overline{13}$, $\overline{14}$, $\overline{15}$, $\overline{16}$, $\overline{17}$, $\overline{18}$, $\overline{19}$, $\overline{20}$, $\overline{21}$, $\overline{22}$, $\overline{23}$, $\overline{24}$, $\overline{25}$, $\overline{26}$, $\overline{27}$, $\overline{28}$, $\overline{29}$, $\overline{30}$, $\overline{31}$, dan $\overline{32}$. Berdasarkan definisi graf unit, maka semua elemen pada ring $\mathbb{Z}_{33}$ tersebut adalah titik-titik pada graf unit dari ring $\mathbb{Z}_{33}$ atau $G(\mathbb{Z}_{33})$. Selanjutnya akan ditentukan himpunan unit menggunakan tabel Cayley terhadap operasi perkalian.

Tabel 4.9 Tabel Cayley Himpunan Unit Ring $\mathbb{Z}_{33}$

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\overline{14}$	$\overline{16}$	$\overline{18}$	$\overline{20}$	$\overline{22}$	$\overline{24}$	$\overline{26}$	$\overline{28}$	$\overline{30}$	$\overline{32}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$	$\overline{7}$	$\overline{9}$	$\overline{11}$	$\overline{13}$	$\overline{15}$	$\overline{17}$	$\overline{19}$	$\overline{21}$	$\overline{23}$	$\overline{25}$	$\overline{27}$	$\overline{29}$	$\overline{31}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{12}$	$\overline{15}$	$\overline{18}$	$\overline{21}$	$\overline{24}$	$\overline{27}$	$\overline{30}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{12}$	$\overline{15}$	$\overline{18}$	$\overline{21}$	$\overline{24}$	$\overline{27}$	$\overline{30}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{12}$	$\overline{15}$	$\overline{18}$	$\overline{21}$	$\overline{24}$	$\overline{27}$	$\overline{30}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{12}$	$\overline{16}$	$\overline{20}$	$\overline{24}$	$\overline{28}$	$\overline{32}$	$\overline{3}$	$\overline{7}$	$\overline{11}$	$\overline{15}$	$\overline{19}$	$\overline{23}$	$\overline{27}$	$\overline{31}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{10}$	$\overline{14}$	$\overline{18}$	$\overline{22}$	$\overline{26}$	$\overline{30}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{9}$	$\overline{13}$	$\overline{17}$	$\overline{21}$	$\overline{25}$	$\overline{29}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{15}$	$\overline{20}$	$\overline{25}$	$\overline{30}$	$\overline{2}$	$\overline{7}$	$\overline{12}$	$\overline{17}$	$\overline{22}$	$\overline{27}$	$\overline{32}$	$\overline{4}$	$\overline{9}$	$\overline{14}$	$\overline{19}$	$\overline{24}$	$\overline{29}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{11}$	$\overline{16}$	$\overline{21}$	$\overline{26}$	$\overline{31}$	$\overline{3}$	$\overline{8}$	$\overline{13}$	$\overline{18}$	$\overline{23}$	$\overline{28}$
$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{18}$	$\overline{24}$	$\overline{30}$	$\overline{3}$	$\overline{9}$	$\overline{15}$	$\overline{21}$	$\overline{27}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{18}$	$\overline{24}$	$\overline{30}$	$\overline{3}$	$\overline{9}$	$\overline{15}$	$\overline{21}$	$\overline{27}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{18}$	$\overline{24}$	$\overline{30}$	$\overline{3}$	$\overline{9}$	$\overline{15}$	$\overline{21}$	$\overline{27}$
$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{14}$	$\overline{21}$	$\overline{28}$	$\overline{2}$	$\overline{9}$	$\overline{16}$	$\overline{23}$	$\overline{30}$	$\overline{4}$	$\overline{11}$	$\overline{18}$	$\overline{25}$	$\overline{32}$	$\overline{6}$	$\overline{13}$	$\overline{20}$	$\overline{27}$	$\overline{1}$	$\overline{8}$	$\overline{15}$	$\overline{22}$	$\overline{29}$	$\overline{3}$	$\overline{10}$	$\overline{17}$	$\overline{24}$	$\overline{31}$	$\overline{5}$	$\overline{12}$	$\overline{19}$	$\overline{26}$
$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{16}$	$\overline{24}$	$\overline{32}$	$\overline{7}$	$\overline{15}$	$\overline{23}$	$\overline{31}$	$\overline{6}$	$\overline{14}$	$\overline{22}$	$\overline{30}$	$\overline{5}$	$\overline{13}$	$\overline{21}$	$\overline{29}$	$\overline{4}$	$\overline{12}$	$\overline{20}$	$\overline{28}$	$\overline{3}$	$\overline{11}$	$\overline{19}$	$\overline{27}$	$\overline{2}$	$\overline{10}$	$\overline{18}$	$\overline{26}$	$\overline{1}$	$\overline{9}$	$\overline{17}$	$\overline{25}$
$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{18}$	$\overline{27}$	$\overline{3}$	$\overline{12}$	$\overline{21}$	$\overline{30}$	$\overline{6}$	$\overline{15}$	$\overline{24}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{18}$	$\overline{27}$	$\overline{3}$	$\overline{12}$	$\overline{21}$	$\overline{30}$	$\overline{6}$	$\overline{15}$	$\overline{24}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{18}$	$\overline{27}$	$\overline{3}$	$\overline{12}$	$\overline{21}$	$\overline{30}$	$\overline{6}$	$\overline{15}$	$\overline{24}$
$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{20}$	$\overline{30}$	$\overline{7}$	$\overline{17}$	$\overline{27}$	$\overline{4}$	$\overline{14}$	$\overline{24}$	$\overline{1}$	$\overline{11}$	$\overline{21}$	$\overline{31}$	$\overline{8}$	$\overline{18}$	$\overline{28}$	$\overline{5}$	$\overline{15}$	$\overline{25}$	$\overline{2}$	$\overline{12}$	$\overline{22}$	$\overline{32}$	$\overline{9}$	$\overline{19}$	$\overline{29}$	$\overline{6}$	$\overline{16}$	$\overline{26}$	$\overline{3}$	$\overline{13}$	$\overline{23}$
$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{22}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{22}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{22}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{22}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{22}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{22}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{22}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{22}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{22}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{22}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{22}$
$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{24}$	$\overline{3}$	$\overline{15}$	$\overline{27}$	$\overline{6}$	$\overline{18}$	$\overline{30}$	$\overline{9}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{24}$	$\overline{3}$	$\overline{15}$	$\overline{27}$	$\overline{6}$	$\overline{18}$	$\overline{30}$	$\overline{9}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{24}$	$\overline{3}$	$\overline{15}$	$\overline{27}$	$\overline{6}$	$\overline{18}$	$\overline{30}$	$\overline{9}$	$\overline{21}$
$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{13}$	$\overline{26}$	$\overline{6}$	$\overline{19}$	$\overline{32}$	$\overline{12}$	$\overline{25}$	$\overline{5}$	$\overline{18}$	$\overline{31}$	$\overline{11}$	$\overline{24}$	$\overline{4}$	$\overline{17}$	$\overline{30}$	$\overline{10}$	$\overline{23}$	$\overline{3}$	$\overline{16}$	$\overline{29}$	$\overline{9}$	$\overline{22}$	$\overline{2}$	$\overline{15}$	$\overline{28}$	$\overline{8}$	$\overline{21}$	$\overline{1}$	$\overline{14}$	$\overline{27}$	$\overline{7}$	$\overline{20}$
$\overline{14}$	$\overline{0}$	$\overline{14}$	$\overline{28}$	$\overline{9}$	$\overline{23}$	$\overline{4}$	$\overline{18}$	$\overline{32}$	$\overline{13}$	$\overline{27}$	$\overline{8}$	$\overline{22}$	$\overline{3}$	$\overline{17}$	$\overline{31}$	$\overline{12}$	$\overline{26}$	$\overline{7}$	$\overline{21}$	$\overline{2}$	$\overline{16}$	$\overline{30}$	$\overline{11}$	$\overline{25}$	$\overline{6}$	$\overline{20}$	$\overline{1}$	$\overline{15}$	$\overline{29}$	$\overline{10}$	$\overline{24}$	$\overline{5}$	$\overline{19}$
$\overline{15}$	$\overline{0}$	$\overline{15}$	$\overline{30}$	$\overline{12}$	$\overline{27}$	$\overline{9}$	$\overline{24}$	$\overline{6}$	$\overline{21}$	$\overline{3}$	$\overline{18}$	$\overline{0}$	$\overline{15}$	$\overline{30}$	$\overline{12}$	$\overline{27}$	$\overline{9}$	$\overline{24}$	$\overline{6}$	$\overline{21}$	$\overline{3}$	$\overline{18}$	$\overline{0}$	$\overline{15}$	$\overline{30}$	$\overline{12}$	$\overline{27}$	$\overline{9}$	$\overline{24}$	$\overline{6}$	$\overline{21}$	$\overline{3}$	$\overline{18}$
$\overline{16}$	$\overline{0}$	$\overline{16}$	$\overline{32}$	$\overline{15}$	$\overline{31}$	$\overline{14}$	$\overline{30}$	$\overline{13}$	$\overline{29}$	$\overline{12}$	$\overline{28}$	$\overline{11}$	$\overline{27}$	$\overline{10}$	$\overline{26}$	$\overline{9}$	$\overline{25}$	$\overline{8}$	$\overline{24}$	$\overline{7}$	$\overline{23}$	$\overline{6}$	$\overline{22}$	$\overline{5}$	$\overline{21}$	$\overline{4}$	$\overline{20}$	$\overline{3}$	$\overline{19}$	$\overline{2}$	$\overline{18}$	$\overline{1}$	$\overline{17}$
$\overline{17}$	$\overline{0}$	$\overline{17}$	$\overline{1}$	$\overline{18}$	$\overline{2}$	$\overline{19}$	$\overline{3}$	$\overline{20}$	$\overline{4}$	$\overline{21}$	$\overline{5}$	$\overline{22}$	$\overline{6}$	$\overline{23}$	$\overline{7}$	$\overline{24}$	$\overline{8}$	$\overline{25}$	$\overline{9}$	$\overline{26}$	$\overline{10}$	$\overline{27}$	$\overline{11}$	$\overline{28}$	$\overline{12}$	$\overline{29}$	$\overline{13}$	$\overline{30}$	$\overline{14}$	$\overline{31}$	$\overline{15}$	$\overline{32}$	$\overline{16}$
$\overline{18}$	$\overline{0}$	$\overline{18}$	$\overline{3}$	$\overline{21}$	$\overline{6}$	$\overline{24}$	$\overline{9}$	$\overline{27}$	$\overline{12}$	$\overline{30}$	$\overline{15}$	$\overline{0}$	$\overline{18}$	$\overline{3}$	$\overline{21}$	$\overline{6}$	$\overline{24}$	$\overline{9}$	$\overline{27}$	$\overline{12}$	$\overline{30}$	$\overline{15}$	$\overline{0}$	$\overline{18}$	$\overline{3}$	$\overline{21}$	$\overline{6}$	$\overline{24}$	$\overline{9}$	$\overline{27}$	$\overline{12}$	$\overline{30}$	$\overline{15}$
$\overline{19}$	$\overline{0}$	$\overline{19}$	$\overline{5}$	$\overline{24}$	$\overline{10}$	$\overline{29}$	$\overline{15}$	$\overline{1}$	$\overline{20}$	$\overline{6}$	$\overline{25}$	$\overline{11}$	$\overline{30}$	$\overline{16}$	$\overline{2}$	$\overline{21}$	$\overline{7}$	$\overline{26}$	$\overline{12}$	$\overline{31}$	$\overline{17}$	$\overline{3}$	$\overline{22}$	$\overline{8}$	$\overline{27}$	$\overline{13}$	$\overline{32}$	$\overline{18}$	$\overline{4}$	$\overline{23}$	$\overline{9}$	$\overline{28}$	$\overline{14}$
$\overline{20}$	$\overline{0}$	$\overline{20}$	$\overline{7}$	$\overline{27}$	$\overline{14}$	$\overline{1}$	$\overline{21}$	$\overline{8}$	$\overline{28}$	$\overline{15}$	$\overline{2}$	$\overline{22}$	$\overline{9}$	$\overline{29}$	$\overline{16}$	$\overline{3}$	$\overline{23}$	$\overline{10}$	$\overline{30}$	$\overline{17}$	$\overline{4}$	$\overline{24}$	$\overline{11}$	$\overline{31}$	$\overline{18}$	$\overline{5}$	$\overline{25}$	$\overline{12}$	$\overline{32}$	$\overline{19}$	$\overline{6}$	$\overline{26}$	$\overline{13}$
$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{21}$	$\overline{9}$	$\overline{30}$	$\overline{18}$	$\overline{6}$	$\overline{27}$	$\overline{15}$	$\overline{3}$	$\overline{24}$	$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{21}$	$\overline{9}$	$\overline{30}$	$\overline{18}$	$\overline{6}$	$\overline{27}$	$\overline{15}$	$\overline{3}$	$\overline{24}$	$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{21}$	$\overline{9}$	$\overline{30}$	$\overline{18}$	$\overline{6}$	$\overline{27}$	$\overline{15}$	$\overline{3}$	$\overline{24}$	$\overline{12}$
$\overline{22}$	$\overline{0}$	$\overline{22}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{22}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{22}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{22}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{22}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{22}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{22}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{22}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{22}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{22}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{22}$	$\overline{11}$
$\overline{23}$	$\overline{0}$	$\overline{23}$	$\overline{13}$	$\overline{3}$	$\overline{26}$	$\overline{16}$	$\overline{6}$	$\overline{29}$	$\overline{19}$	$\overline{9}$	$\overline{32}$	$\overline{22}$	$\overline{12}$	$\overline{2}$	$\overline{25}$	$\overline{15}$	$\overline{5}$	$\overline{28}$	$\overline{18}$	$\overline{8}$	$\overline{31}$	$\overline{21}$	$\overline{11}$	$\overline{1}$	$\overline{24}$	$\overline{14}$	$\overline{4}$	$\overline{27}$	$\overline{17}$	$\overline{7}$	$\overline{30}$	$\overline{20}$	$\overline{10}$
$\overline{24}$	$\overline{0}$	$\overline{24}$	$\overline{15}$	$\overline{6}$	$\overline{30}$	$\overline{21}$	$\overline{12}$	$\overline{3}$	$\overline{27}$	$\overline{18}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{24}$	$\overline{15}$	$\overline{6}$	$\overline{30}$	$\overline{21}$	$\overline{12}$	$\overline{3}$	$\overline{27}$	$\overline{18}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{24}$	$\overline{15}$	$\overline{6}$	$\overline{30}$	$\overline{21}$	$\overline{12}$	$\overline{3}$	$\overline{27}$	$\overline{18}$	$\overline{9}$
$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{25}$	$\overline{17}$	$\overline{9}$	$\overline{1}$	$\overline{26}$	$\overline{18}$	$\overline{10}$	$\overline{2}$	$\overline{27}$	$\overline{19}$	$\overline{11}$	$\overline{3}$	$\overline{28}$	$\overline{20}$	$\overline{12}$	$\overline{4}$	$\overline{29}$	$\overline{21}$	$\overline{13}$	$\overline{5}$	$\overline{30}$	$\overline{22}$	$\overline{14}$	$\overline{6}$	$\overline{31}$	$\overline{23}$	$\overline{15}$	$\overline{7}$	$\overline{32}$	$\overline{24}$	$\overline{16}$	$\overline{8}$
$\overline{26}$	$\overline{0}$	$\overline{26}$	$\overline{19}$	$\overline{12}$	$\overline{5}$	$\overline{31}$	$\overline{24}$	$\overline{17}$	$\overline{10}$	$\overline{3}$	$\overline{29}$	$\overline{22}$	$\overline{15}$	$\overline{8}$	$\overline{1}$	$\overline{27}$	$\overline{20}$	$\overline{13}$	$\overline{6}$	$\overline{32}$	$\overline{25}$	$\overline{18}$	$\overline{11}$	$\overline{4}$	$\overline{30}$	$\overline{23}$	$\overline{16}$	$\overline{9}$	$\overline{2}$	$\overline{28}$	$\overline{21}$	$\overline{14}$	$\overline{7}$
$\overline{27}$	$\overline{0}$	$\overline{27}$	$\overline{21}$	$\overline{15}$	$\overline{9}$	$\overline{3}$	$\overline{30}$	$\overline{24}$	$\overline{18}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{27}$	$\overline{21}$	$\overline{15}$	$\overline{9}$	$\overline{3}$	$\overline{30}$	$\overline{24}$	$\overline{18}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{27}$	$\overline{21}$	$\overline{15}$	$\overline{9}$	$\overline{3}$	$\overline{30}$	$\overline{24}$	$\overline{18}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$
$\overline{28}$	$\overline{0}$	$\overline{28}$	$\overline{23}$	$\overline{18}$	$\overline{13}$	$\overline{8}$	$\overline{3}$	$\overline{31}$	$\overline{26}$	$\overline{21}$	$\overline{16}$	$\overline{11}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{29}$	$\overline{24}$	$\overline{19}$	$\overline{14}$	$\overline{9}$	$\overline{4}$	$\overline{32}$	$\overline{27}$	$\overline{22}$	$\overline{17}$	$\overline{12}$	$\overline{7}$	$\overline{2}$	$\overline{30}$	$\overline{25}$	$\overline{20}$	$\overline{15}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$
$\overline{29}$	$\overline{0}$	$\overline{29}$	$\overline{25}$	$\overline{21}$	$\overline{17}$	$\overline{13}$	$\overline{9}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$	$\overline{30}$	$\overline{26}$	$\overline{22}$	$\overline{18}$	$\overline{14}$	$\overline{10}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{31}$	$\overline{27}$	$\overline{23}$	$\overline{19}$	$\overline{15}$	$\overline{11}$	$\overline{7}$	$\overline{3}$	$\overline{32}$	$\overline{28}$	$\overline{24}$	$\overline{20}$	$\overline{16}$	$\overline{12}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$
$\overline{30}$	$\overline{0}$	$\overline{30}$	$\overline{27}$	$\overline{24}$	$\overline{21}$	$\overline{18}$	$\overline{15}$	$\overline{12}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{30}$	$\overline{27}$	$\overline{24}$	$\overline{21}$	$\overline{18}$	$\overline{15}$	$\overline{12}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{30}$	$\overline{27}$	$\overline{24}$	$\overline{21}$	$\overline{18}$	$\overline{15}$	$\overline{12}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$
$\overline{31}$	$\overline{0}$	$\overline{31}$	$\overline{29}$	$\overline{27}$	$\overline{25}$	$\overline{23}$	$\overline{21}$	$\overline{19}$	$\overline{17}$	$\overline{15}$	$\overline{13}$	$\overline{11}$	$\overline{9}$	$\overline{7}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{32}$	$\overline{30}$	$\overline{28}$	$\overline{26}$	$\overline{24}$	$\overline{22}$	$\overline{20}$	$\overline{18}$	$\overline{16}$	$\overline{14}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{32}$	$\overline{0}$	$\overline{32}$	$\overline{31}$	$\overline{30}$	$\overline{29}$	$\overline{28}$	$\overline{27}$	$\overline{26}$	$\overline{25}$	$\overline{24}$	$\overline{23}$	$\overline{22}$	$\overline{21}$	$\overline{20}$	$\overline{19}$	$\overline{18}$	$\overline{17}$	$\overline{16}$	$\overline{15}$	$\overline{14}$	$\overline{13}$	$\overline{12}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Berdasarkan Tabel 4.9, diperoleh himpunan unit dari ring $\mathbb{Z}_{33}$ adalah $U(\mathbb{Z}_{33}) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}, \overline{23}, \overline{25}, \overline{26}, \overline{28}, \overline{29}, \overline{31}, \overline{32}\}$. Dua elemen pada graf unit–misalkan *x* dan *y*–dikatakan terhubung langsung jika dan hanya jika *x* + *y* adalah unit dari ring. Sisi pada graf unit dari ring $\mathbb{Z}_{33}$ ditunjukkan menggunakan tabel Cayley terhadap operasi penjumlahan seperti pada Lampiran 2. Sehingga diperoleh sisi-sisi pada graf unit dari ring $\mathbb{Z}_{33}$ sebanyak 320 sisi seperti pada Lampiran 3, sehingga graf unit dari ring $\mathbb{Z}_{33}$ atau $G(\mathbb{Z}_{33})$ dapat dibentuk sebagai berikut:



Gambar 4.5 Graf $\boldsymbol{G(\mathbb{Z}_{33})}$

Berdasarkan Gambar 4.5, diperoleh derajat titik-titik pada graf $G(\mathbb{Z}_{33})$ adalah:

$deg(\bar{0}) = 20$	$deg(\overline{11}) = 20$	$deg(\overline{22}) = 20$
$deg(\bar{1}) = 19$	$deg(\overline{12}) = 20$	$deg(\overline{23}) = 19$
$deg(\bar{2}) = 19$	$deg(\overline{13}) = 19$	$deg(\overline{24}) = 20$
$deg(\bar{3}) = 20$	$deg(\overline{14}) = 19$	$deg(\overline{25}) = 19$
$deg(\bar{4}) = 19$	$deg(\overline{15}) = 20$	$deg(\overline{26}) = 19$
$deg(\bar{5}) = 19$	$eg(\overline{16}) = 19$	$deg(\overline{27}) = 20$

$deg(\bar{6}) = 20$	$deg(\overline{17}) = 19$	$deg(\overline{28}) = 19$
$deg(\bar{7}) = 19$	$deg(\overline{18}) = 20$	$deg(\overline{29}) = 19$
$deg(\bar{8}) = 19$	$deg(\overline{19}) = 19$	$deg(\overline{30}) = 20$
$deg(\bar{9}) = 20$	$deg(\overline{20}) = 19$	$deg(\overline{31}) = 19$
$deg(\overline{10}) = 19$	$deg(\overline{21}) = 20$	$deg(\overline{32}) = 19$

Selanjutnya misalkan $n = \left|V\left(G(\mathbb{Z}_{33})\right)\right| = 33$, berdasarkan data derajat titik tersebut diperoleh rata-rata derajat titik pada $G(\mathbb{Z}_{33})$ sebagai berikut:

$$\mathbb{E}\left[D^*\left(G(\mathbb{Z}_{33})\right)\right] = \sum_{v\in V\left(G(\mathbb{Z}_{33})\right)} \frac{\deg(v)}{n}$$

$$= \frac{20+19+19+20+19+19+20+19+19+20}{33} +$$

$$\frac{19+20+20+19+19+20+19+19+20+19}{33} +$$

$$\frac{19+20+20+19+20+19+19+20+19+19}{33} +$$

$$\frac{20+19+19}{33}$$

$$= \frac{640}{33}$$

Sehingga indeks gini derajat pada graf $G(\mathbb{Z}_{33})$ dapat dihitung sebagai berikut:

$$GD\left(G(\mathbb{Z}_{33})\right) = \sum_{\substack{u,v\in V\left(G(\mathbb{Z}_{33})\right) \\ u\neq v}} \frac{|deg(u) - deg(v)|}{n^2\mathbb{E}\left[D^*\left(G(\mathbb{Z}_{33})\right)\right]}$$

$$\vdots$$

$$= \frac{260}{21120}$$

$$= \frac{13}{1056}$$

Proses perhitungan indeks gini derajat pada graf $G(\mathbb{Z}_{21})$ selengkapnya pada Lampiran 3.

4.2. Indeks Gini Derajat pada Graf Unit dari Ring $\mathbb{Z}_{3p}$

Pada subbab ini, akan ditunjukkan proposisi yang berkaitan dengan formula indeks gini derajat pada graf unit dari ring $\mathbb{Z}_{3p}$, dengan p adalah bilangan prima. Pertama, diperlukan data-data pendukung yang diperoleh dari perhitungan-perhitungan pada subbab sebelumnya. Data-data tersebut antara lain himpunan unit pada ring $\mathbb{Z}_{3p}$, derajat titik pada graf unit dari ring $\mathbb{Z}_{3p}$, dan indeks gini derajat pada graf unit dari ring $\mathbb{Z}_{3p}$. Data-data tersebut nantinya akan menghasilkan susunan pola sehingga diperoleh suatu dugaan atau konjektur. Selanjutnya dugaan tersebut dibuktikan sehingga diperoleh proposisi yang mendukung pernyataan dugaan tersebut.

Berdasarkan perhitungan tabel Cayley perkalian pada ring $\mathbb{Z}_{3p}$ dengan $p = 2, 3, 5, 7,$ dan 11 yang telah dilakukan, diperoleh himpunan unit sebagai berikut.

Tabel 4.10 Himpunan Unit pada Ring $\mathbb{Z}_{3p}$ dengan $\boldsymbol{p = 2, 3, 5, 7}$, dan $\mathbf{11}$

p	$U(\mathbb{Z}_{3p})$
2	$U(\mathbb{Z}_6) = \{\overline{1}, \overline{5}\}$
3	$U(\mathbb{Z}_9) = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{8}\}$
5	$U(\mathbb{Z}_{15}) = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{14}\}$
7	$U(\mathbb{Z}_{21}) = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}\}$
11	$U(\mathbb{Z}_{33}) = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}, \overline{23}, \overline{25}, \overline{26}, \overline{28}, \overline{29}, \overline{31}, \overline{33}\}$

Sehingga diperoleh dugaan bahwa $U(\mathbb{Z}_{3p}) = \left\{x \in \mathbb{Z}_{3p} \middle| x \notin \{\bar{0}, \bar{p}, \overline{2p}, \overline{3n}; n = 1,2, \dots, p-1\}\right\}$.

Perhatikan bahwa anggota ring $\mathbb{Z}_{3p}$ adalah $\mathbb{Z}_{3p} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{3p-1}\}$.

Untuk $x = \bar{0}$, diperoleh $\bar{0} \cdot y = y \cdot \bar{0} = \bar{0} \neq \bar{1}, \forall y \in \mathbb{Z}_{3p}$. Jadi, $\bar{0} \notin U(\mathbb{Z}_{3p})$.

Selanjutnya untuk $x \neq \bar{0}$, $x \in U(\mathbb{Z}_{3p})$ jika dan hanya jika terdapat $y \in \mathbb{Z}_{3p}$ sedemikian hingga $xy = 1$, dengan kata lain $xy \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3p)$ memiliki solusi.

Berdasarkan definisi 2.3, terdapat $s \in \mathbb{Z}$ sedemikian hingga

$xy \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3p) \Leftrightarrow xy - 1 = (3p)s \Leftrightarrow xy - (3p)s = 1$

Misalkan $t \in \mathbb{Z}$ dengan $t = (x, 3p) \Leftrightarrow t|x$ dan $t|3p$

$$\Leftrightarrow t|xy - (3p)s$$

$$\Leftrightarrow t|1$$

Berdasarkan definisi 2.1, terdapat $k \in \mathbb{Z}$ sedemikian hingga $1 = tk \Leftrightarrow t = 1$ atau $t = -1$. Untuk $t = 1$, diperoleh $(x, 3p) = 1$.

Oleh karena itu, $x \in U(\mathbb{Z}_{3p})$ hanya dipenuhi jika dan hanya jika $(x, 3p) = 1$.

Untuk $x = \bar{p}$, diperoleh $(x, 3p) = p \neq 1$ sehingga $x \notin U(\mathbb{Z}_{3p})$.

Untuk $x = \overline{2p}$, diperoleh $(x, 3p) = p \neq 1$ sehingga $x \notin U(\mathbb{Z}_{3p})$.

Untuk $x = \overline{3n}; n \in \{1,2, \dots, p-1\}$, diperoleh $(x, 3p) = 3 \neq 1$ sehingga $x \notin U(\mathbb{Z}_{3p})$.

Faktor dari $3p$ adalah 1, 3 dan p.

Jika $x \in \mathbb{Z}_{3p}$ dengan $x \notin \{\overline{3n}; n = 1,2, \dots, p-1\} \cup \{\bar{0}, \bar{p}, \overline{2p}\}$, maka $(x, 3p) = 1$.

Sehingga $(x, 3p) = 1$, $\forall x \notin \{\overline{3n}; n = 1,2, \dots, p-1\} \cup \{\bar{0}, \bar{p}, \overline{2p}\}$ dan terbukti bahwa

$$U(\mathbb{Z}_{3p}) = \left\{x \in \mathbb{Z}_{3p} \middle| x \notin \{\bar{0}, \overline{\ }, \overline{2p}, \overline{3n}; n = 1,2, \dots, p-1\}\right\}.$$

Proposisi 4.1

Misalkan p bilangan prima. Himpunan unit dari ring $\mathbb{Z}_{3p}$ adalah:

$$U(\mathbb{Z}_{3p}) = \left\{x \in \mathbb{Z}_{3p} \middle| x \notin \{\overline{0}, \overline{p}, \overline{2p}, \overline{3n}; n = 1,2, \dots, p-1\}\right\}$$

Akibat Proposisi 4.1

Misalkan p bilangan prima dan $p \neq 3$. Kardinalitas dari himpunan bukan unit dan himpunan unit dari ring $\mathbb{Z}_{3p}$ adalah:

$$\left|\mathbb{Z}_{3p} \backslash U(\mathbb{Z}_{3p})\right| = p + 2$$

$$\left|U(\mathbb{Z}_{3p})\right| = 2p - 2$$

Bukti:

Berdasarkan lemma 4.1, anggota himpunan bukan unit dari ring $\mathbb{Z}_{3p}$ adalah $\overline{0}, \overline{p}, \overline{2p}, \overline{3n}; n \in \{1,2, \dots, p-1\}$. Jumlah anggota bukan unit dari ring $\mathbb{Z}_{3p}$ adalah:

$$\begin{aligned} \left|\mathbb{Z}_{3p} \backslash U(\mathbb{Z}_{3p})\right| &= |\overline{0}| + |\overline{p}| + |\overline{2p}| + |\overline{3n}| \\ &= 1 + 1 + 1 + (p-1) \\ &= 3 + p - 1 \\ &= p + 2 \end{aligned}$$

Kardinalitas dari himpunan unit dari ring $\mathbb{Z}_{3p}$ dapat diperoleh dengan mengurangkan kardinalitas ring $\mathbb{Z}_{3p}$ dan kardinalitas himpunan bukan unit dari ring $\mathbb{Z}_{3p}$, sehingga:

$$\left|U(\mathbb{Z}_{3p})\right| = \left|\mathbb{Z}_{3p}\right| - \left|\mathbb{Z}_{3p} \backslash U(\mathbb{Z}_{3p})\right| = 3p - (p+2) = 3p - p - 2 = 2p - 2. \blacksquare$$

Kemudian, berdasarkan perhitungan graf unit pada ring $\mathbb{Z}_{3p}$ dengan $p = 2, 3, 5, 7,$ dan 11 yang telah dilakukan, diperoleh pula pola derajat titik sebagai berikut.

Tabel 4.11 Pola Derajat Titik pada Graf Unit dari Ring $\mathbb{Z}_{3p}$

p	$deg(v), v \in U(\mathbb{Z}_{3p})$	$deg(v), v \notin U(\mathbb{Z}_{3p})$
2	2	2
3	5	6
5	7	8
7	11	12
11	19	20

Sehingga diperoleh dugaan bahwa untuk setiap $v \in V\left(G(\mathbb{Z}_{3p})\right)$ dan $p > 3$, $deg(v) = 2p - 3$, untuk $v \in U(\mathbb{Z}_{3p})$ dan $deg(v) = 2p - 2$, untuk $v \notin U(\mathbb{Z}_{3p})$.

Misalkan $V\left(G(\mathbb{Z}_{3p})\right)$ dibagi menjadi beberapa himpunan, yakni:

$V_1 = \{\bar{0}, \bar{3}, \dots, \overline{3(p-1)}\} = \{v \in \mathbb{Z}_{3p}; v \equiv 0 \text{ (mod 3)}\}$, dengan $|V_1| = p$,

$V_2 = \{\bar{1}, \bar{4}, \dots, \overline{3p-2}\} = \{v \in \mathbb{Z}_{3p}; v \equiv 1 \text{ (mod 3)}\}$, dengan $|V_2| = p$,

$V_3 = \{\bar{2}, \bar{5}, \dots, \overline{3p-1}\} = \{v \in \mathbb{Z}_{3p}; v \equiv 2 \text{ (mod 3)}\}$, dengan $|V_3| = p$, dan

$W_1 = \{\bar{0}, \bar{p}, \overline{2p}\} = \{v \in \mathbb{Z}_{3p}; v \equiv 0 \text{ (mod } p)\}$ dengan $|W_1| = 3$.

Pada graf unit $G(\mathbb{Z}_{3p})$, $v \in V\left(G(\mathbb{Z}_{3p})\right)$ tidak terhubung langsung dengan $w \in V\left(G(\mathbb{Z}_{3p})\right)$ jika dan hanya jika

$v + w \in \left\{\bar{0}, \bar{p}, \overline{2p}, \overline{3n}; n \in \{1,2, \dots, p-1\}\right\}$

$\Leftrightarrow v + w = x$, untuk suatu $x \in \left\{\bar{0}, \bar{p}, \overline{2p}, \overline{3n}; n \in \{1,2, \dots, p-1\}\right\}$

$\Leftrightarrow v + w \equiv 0 \text{ (mod 3)}$ dan $v + w \equiv 0 \text{ (mod } p)$

Kasus 1, $v \in V_1$ dan $v \in W_1$

Jika $v \in V_1$ dan $v \in W_1$, maka $v = \bar{0}$.

Misalkan $g \equiv 0 (\text{mod } 3)$ dengan $g \neq v$, diperoleh $v + g \equiv 0 (\text{mod } 3) \Leftrightarrow g \equiv 0 (\text{mod } 3)$ dengan solusi sebanyak $p - 1$ titik.

Misalkan $h \equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$ dengan $h \neq v$, diperoleh $v + h \equiv 0(\mathrm{mod}\, p) \Leftrightarrow h \equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$ dengan solusi sebanyak 2 titik.

Sehingga terdapat $p + 1$ titik yang tidak terhubung langsung dengan $v = \bar{0}$.

Dengan demikian, $deg(\bar{0}) = 3p - (p + 1) - 1 = 2p - 2$.

Kasus 2, $v \in V_1$ dan $v \notin W_1$

Jika $v \in V_1$ dan $v \notin W_1$, maka $v \equiv 0(\mathrm{mod}\, 3)$ dengan $v \neq 0$, dan $v \not\equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$.

Misalkan $g \in \mathbb{Z}_{3p}$ dengan $g \neq v$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{array}{rl} v + g \equiv 0(\mathrm{mod}\, 3) & \\ v \equiv 0(\mathrm{mod}\, 3) & \\ \hline g \equiv 0(\mathrm{mod}\, 3) & - \end{array}$$

Maka v tidak terhubung langsung dengan $g \equiv 0(\mathrm{mod}\, 3)$ sebanyak $p - 1$ titik.

Kemudian misalkan $h \equiv j(\mathrm{mod}\, p)$ dengan $h \neq v$, untuk suatu $j \in \{0,1, \dots, p - 1\}$.

Karena $v \not\equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$, maka v dapat ditulis $v \equiv i(\mathrm{mod}\, p)$, untuk suatu $i \in \{1,2, \dots, p - 1\}$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} v + h \equiv 0(\mathrm{mod}\, p) &\Leftrightarrow (v + h) + 0 = pn, \text{ untuk suatu } n \in \{1,2,3\} \\ &\Leftrightarrow 0 + (i + j) = pn \\ &\Leftrightarrow j = pn - i \\ &\Leftrightarrow j = p - i \text{ atau } j = 2p - i \text{ atau } j = 3p - i \end{aligned}$$

Maka v tidak terhubung langsung dengan $h \equiv j(\mathrm{mod}\, p)$ sebanyak 3 titik.

Sehingga terdapat $p + 2$ titik yang tidak terhubung langsung dengan $v \equiv 0(\mathrm{mod}\, 3)$ dimana $v \neq 0$, dan $v \not\equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$.

Dengan demikian, $deg(v) = 3p - (p + 2) = 2p - 2$.

Kasus 3, $v \in V_2$ dan $v \in W_1$

Jika $v \in V_2$ dan $v \in W_1$, maka $v \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $v \equiv 0(\text{mod } p)$

Misalkan $g \in \mathbb{Z}_{3p}$ dengan $g \neq v$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{array}{r} v + g \equiv 0(\text{mod } 3) \\ v \equiv 1(\text{mod } 3) \\ \hline g \equiv -1(\text{mod } 3) \end{array} -$$

Maka v tidak terhubung langsung dengan $g \equiv -1(\text{mod } 3) \Leftrightarrow g \equiv 2(\text{mod } 3)$ sebanyak p titik.

Kemudian misalkan $h \in \mathbb{Z}_{3p}$ dengan $h \neq v$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{array}{r} v + h \equiv 0(\text{mod } p) \\ v \equiv 0(\text{mod } p) \\ \hline h \equiv 0(\text{mod } p) \end{array} -$$

Maka v tidak terhubung langsung dengan $h \equiv 0(\text{mod } p)$ sebanyak 2 titik.

Sehingga terdapat $p + 2$ titik yang tidak terhubung langsung dengan $v \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $v \equiv 0(\text{mod } p)$.

Dengan demikian, $deg(v) = 3p - (p + 2) = 2p - 2$.

Kasus 4, $v \in V_2$ dan $v \notin W_1$

Jika $v \in V_2$ dan $v \notin W_1$, maka $v \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $v \not\equiv 0(\text{mod } p)$

Berdasarkan Kasus 3, v tidak terhubung langsung dengan $g \equiv 2(\text{mod } 3)$ sebanyak p titik.

Kemudian berdasarkan Kasus 2, $v \equiv i(\text{mod } p)$, untuk suatu $i \in \{1,2, \dots, p - 1\}$, tidak terhubung langsung dengan $h \equiv j(\text{mod } p)$ dimana $j = p - i$ atau $j = 2p - i$ atau $j = 3p - i$.

Sehingga terdapat $p + 3$ titik yang tidak terhubung langsung dengan $v \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $v \not\equiv 0(\text{mod } p)$.

Dengan demikian, $deg(v) = 3p - (p + 3) = 2p - 3$.

Kasus 5, $v \in V_3$ dan $v \in W_1$

Jika $v \in V_3$ dan $v \in W_1$, maka $v \equiv 2(\text{mod } 3)$ dan $v \equiv 0(\text{mod } p)$

Misalkan $g \in \mathbb{Z}_{3p}$ dengan $g \neq v$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{array}{r} v + g \equiv 0(\text{mod } 3) \\ v \equiv 2(\text{mod } 3) \\ \hline g \equiv -2(\text{mod } 3) \end{array} -$$

Maka v tidak terhubung langsung dengan $g \equiv -2(\text{mod } 3) \Leftrightarrow g \equiv 1(\text{mod } 3)$ sebanyak p titik.

Kemudian berdasarkan Kasus 3, v tidak terhubung langsung dengan $h \equiv 0(\text{mod } p)$ sebanyak 2 titik.

Sehingga terdapat $p + 2$ titik yang tidak terhubung langsung dengan $v \equiv 2(\text{mod } 3)$ dan $v \equiv 0(\text{mod } p)$.

Dengan demikian, $deg(v) = 3p - (p + 2) = 2p - 2$.

Kasus 6, $v \in V_3$ dan $v \notin W_1$

Jika, $v \in V_3$ dan $v \notin W_1$, maka $v \equiv 2(\text{mod } 3)$ dan $v \not\equiv 0(\text{mod } p)$.

Berdasarkan Kasus 5, v tidak terhubung langsung dengan $g \equiv 1(\text{mod } 3)$ sebanyak p titik.

Kemudian berdasarkan Kasus 2, $v \equiv i(\text{mod } p)$, untuk suatu $i \in \{1,2, \dots, p - 1\}$, tidak terhubung langsung dengan $h \equiv j(\text{mod } p)$ dimana $j = p - i$ atau $j = 2p - i$ atau $j = 3p - i$.

Sehingga terdapat $p + 3$ titik yang tidak terhubung langsung dengan $v \equiv 2(\text{mod } 3)$ dan $v \not\equiv 0(\text{mod } p)$.

Dengan demikian, $deg(v) = 3p - (p + 3) = 2p - 3$.

Berdasarkan perhitungan yang telah dilakukan, v pada Kasus 1, 2, 3, dan 5 merupakan anggota $U(\mathbb{Z}_{3p})$ dan $deg(v) = 2p - 3$. Sedangkan v pada Kasus 4 dan 6 bukan merupakan anggota $U(\mathbb{Z}_{3p})$ dan $deg(v) = 2p - 2$. Sehingga diperoleh

$$deg(v) = \begin{cases} 2p - 3; \ v \in U(\mathbb{Z}_{3p}) \\ 2p - 2; \ v \notin U(\mathbb{Z}_{3p}). \end{cases}$$

Proposisi 4.2

Misalkan $v \in V\left(G(\mathbb{Z}_{3p})\right)$, dengan p bilangan prima dan $p > 3$,

$$deg(v) = \begin{cases} 2p - 3; \ v \in U(\mathbb{Z}_{3p}) \\ 2p - 2; \ v \notin U(\mathbb{Z}_{3p}) \end{cases}$$

Berdasarkan perhitungan indeks gini derajat pada graf unit pada ring $\mathbb{Z}_{3p}$ dengan $p = 2, 3, 5, 7,$ dan 11 yang telah dilakukan, diperoleh pola indeks gini derajat sebagai berikut.

Tabel 4.12 Pola Indeks Gini Derajat pada Graf Unit dari Ring $\mathbb{Z}_{3p}$

p	$GD\left(G(\mathbb{Z}_{3p})\right)$
2	0
3	$\frac{1}{24}$
5	$\frac{1}{30}$
7	$\frac{3}{140}$
11	$\frac{13}{1056}$

Sehingga diperoleh dugaan bahwa $GD\left(G(\mathbb{Z}_{3p})\right) = \frac{p+2}{3p(3p-1)}$ dengan $p > 3$.

Berdasarkan Akibat Proposisi 4.1 dan Proposisi 4.2 diperoleh jumlah anggota himpunan unit dari ring $\mathbb{Z}_{3p}$ sebanyak $2p - 2$ dan derajat masing-masing anggota pada graf unit adalah $\deg(x) = 2p - 3, x \in U(\mathbb{Z}_{3p})$. Kemudian jumlah anggota himpunan bukan unit dari ring $\mathbb{Z}_{3p}$ sebanyak $p + 2$ dan derajat masing-masing anggota pada graf unit adalah $\deg(x) = 2p - 2, x \notin U(\mathbb{Z}_{3p})$. Sehingga rata-rata derajat pada graf unit dari ring $\mathbb{Z}_{3p}$ adalah

$$\mathbb{E}\left[D^*\left(G(\mathbb{Z}_{3p})\right)\right] = \sum_{v \in V\left(G(\mathbb{Z}_{3p})\right)} \frac{\deg(v)}{n}$$

$$= \frac{(2p-3)(2p-2) + (2p-2)(p+2)}{3p}$$

$$= \frac{4p^2 - 10p + 6 + 2p^2 + 2p - 4}{3p}$$

$$= \frac{6p^2 - 8p + 2}{3p}$$

Selanjutnya indeks gini derajat pada graf unit dari ring $\mathbb{Z}_{3p}$ adalah

$$GD\left(G(\mathbb{Z}_{3p})\right) = \sum_{\substack{x,y \in V\left(G(\mathbb{Z}_{3p})\right) \\ x \neq y}} \frac{|deg(x) - deg(y)|}{n^2 \mathbb{E}\left[D^*\left(G(\mathbb{Z}_{3p})\right)\right]}$$

$$= \sum_{\substack{x,y \in U(\mathbb{Z}_{3p}) \\ x \neq y}} \frac{|deg(x) - deg(y)|}{n^2 \mathbb{E}\left[D^*\left(G(\mathbb{Z}_{3p})\right)\right]} + \sum_{\substack{x,y \notin U(\mathbb{Z}_{3p}) \\ x \neq y}} \frac{|deg(x) - deg(y)|}{n^2 \mathbb{E}\left[D^*\left(G(\mathbb{Z}_{3p})\right)\right]}$$

$$+ \sum_{\substack{x \in U(\mathbb{Z}_{3p}) \\ y \notin U(\mathbb{Z}_{3p})}} \frac{|deg(x) - deg(y)|}{n^2 \mathbb{E}\left[D^*\left(G(\mathbb{Z}_{3p})\right)\right]}$$

$$= (2p-2)^2 \frac{|(2p-3) - (2p-3)|}{n^2 \mathbb{E}\left[D^*\left(G(\mathbb{Z}_{3p})\right)\right]}$$

$$+ (p+2)^2 \frac{|(2p-2) - (2p-2)|}{n^2 \mathbb{E}\left[D^*\left(G(\mathbb{Z}_{3p})\right)\right]}$$

$$+ \sum_{\substack{x \in U(\mathbb{Z}_{3p}) \\ y \notin U(\mathbb{Z}_{3p})}} \frac{|(2p-3)-(2p-2)|}{n^2 \mathbb{E}\left[D^*\left(G(\mathbb{Z}_{3p})\right)\right]}$$

$$= (2p-2)^2 \frac{0}{n^2 \mathbb{E}\left[D^*\left(G(\mathbb{Z}_{3p})\right)\right]} + (p+2)^2 \frac{0}{n^2 \mathbb{E}\left[D^*\left(G(\mathbb{Z}_{3p})\right)\right]}$$

$$+ \sum_{\substack{x \in U(\mathbb{Z}_{3p}) \\ y \notin U(\mathbb{Z}_{3p})}} \frac{|-1|}{n^2 \mathbb{E}\left[D^*\left(G(\mathbb{Z}_{3p})\right)\right]}$$

$$= \sum_{\substack{x \in U(\mathbb{Z}_{3p}) \\ y \notin U(\mathbb{Z}_{3p})}} \frac{1}{n^2 \mathbb{E}\left[D^*\left(G(\mathbb{Z}_{3p})\right)\right]}$$

$$= (2p-2)(p+2) \frac{1}{(3p)^2 \frac{6p^2-8p+2}{3p}}$$

$$= (2p^2+2p-4) \frac{1}{(3p)6p^2-8p+2}$$

$$= \frac{(2p^2+2p-4)1}{(3p)6p^2-8p+2}$$

$$= \frac{p^2+p-2}{(3p)3p^2-4p+1}$$

$$= \frac{(p+2)(p-1)}{(3p)(3p-1)(p-1)}$$

$$= \frac{(p+2)}{3p(3p-1)}.$$

Proposisi 4.3

Misalkan p bilangan prima dan $p > 3$. Indeks gini derajat pada graf unit dari ring $\mathbb{Z}_{3p}$ adalah:

$$GD\left(G(\mathbb{Z}_{3p})\right) = \frac{p+2}{3p(3p-1)}$$

4.3. Integrasi Agama

Kajian teori graf dalam al-Quran dapat ditunjukkan pada al-Quran surah al-Qamar ayat 49. Allah SWT menciptakan alam semesta dengan perhitungan yang tepat dan teratur. Walhasil, segala sesuatu yang diciptakan Allah dapat melakukan fungsinya menurut kadar dan ukurannya. Bintang-bintang yang bergerak mengitari galaksi, planet-planet yang beredar memutari bintang, dan satelit-satelit yang berputar mengelilingi planet menunjukkan betapa luar biasanya Allah SWT dalam menciptakan pola pergerakan yang sulit. Selain itu, Allah SWT juga menciptakan suatu objek berpola yang berkaitan dengan makhluk hidup, seperti sarang lebah yang berbentuk heksagonal, sarang laba-laba, bentuk pohon, dan lain-lain. Bentuk-bentuk tersebut diciptakan secara matematis dan terstruktur sehingga dapat dimanfaatkan secara maksimal oleh makhluk hidup. Hal ini menunjukkan bahwa objek ciptaan Allah SWT memiliki pola yang matematis dan terstruktur. Oleh karena itu, sebagai manusia yang berakal atau *Ulul Albab*, hendaknya dapat mengambil pelajaran dalam penciptaan Allah SWT tersebut sebagaimana yang telah tercantum dalam al-Quran surah al-Baqarah ayat 269 yang berbunyi.

"*Dia (Allah) memberikan hikmah kepada siapa yang Dia kehendaki. Barang siapa yang diberi hikmah, sesungguhnya dia telah diberi kebaikan yang banyak. Dan tidak ada yang dapat mengambil pelajaran kecuali orang-orang yang mempunyai akal sehat (Ulul Albab)*" *(Qs. Al-Baqarah:269).*

Pelajaran atau ilmu yang diperoleh dapat bermanfaat bagi diri sendiri dan orang lain. Bagi diri sendiri, penciptaan Allah SWT tersebut dapat menumbuhkan rasa syukur dan takwa sehingga yakin akan kebesaran Allah SWT. Bagi orang lain, pelajaran tersebut dapat dilakukan dengan melakukan penelitian dan mengembangkan ilmu tersebut bagi kemanfaatan orang lain. Salah satu bentuk pelajaran tersebut adalah pada penelitian ini yang membahas pola indeks gini derajat pada graf unit. Pola tersebut membuktikan bahwasannya Allah SWT menciptakan segala sesuatu dengan ukuran yang tepat dan menunjukkan kebesaran Allah SWT dalam penciptaan-Nya.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan uraian pada pembahasan, dapat diambil kesimpulan berupa teorema bahwa formula indeks gini derajat pada graf unit dari ring $\mathbb{Z}_{3p}$ dengan p bilangan prima adalah:

$$GD\left(G(\mathbb{Z}_{3p})\right) = \begin{cases} 0 & ; p = 2 \\ \dfrac{1}{24} & ; p = 3 \\ \dfrac{p+2}{3p(3p-1)} & ; p > 3 \end{cases}$$

5.2 Saran

Penelitian ini membahas masalah tentang indeks gini derajat pada graf unit dari ring $\mathbb{Z}_{3p}$ dengan dengan p bilangan prima. Penulis mengharapkan pada penelitian selanjutnya untuk membahas masalah tentang indeks gini derajat pada graf lain.

DAFTAR RUJUKAN

Abdussakir, Azizah, N. N., & Nofandika, F. F. (2009). *Teori Graf: Topik Dasar untuk Tugas Akhir/Skripsi*. Malang: UIN-Malang Press.

Abdussakir. (2007). *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN-Malang Press.

Anugrahanti, W. (2020). *Indeks Jarak Derajat dan Resiprok Indeks Jarak Derajat pada Graf Unit Gelanggang Komutatif Dengan Unsur Kesatuan*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Ashrafi, N., Maimani, H. R., Pournaki, M. R., & Yassemi, S. (2010). Unit graphs associated with rings. *Communications in Algebra*, *38*(8), 2851-2871.

Balaji, H., & Mahmoud, H. (2017). The Gini index of random trees with an application to caterpillars. *Journal of Applied Probability*, *54*(3), 701–709.

Chartrand, G., Lesniak, L., & Zhang, P. (2016). *Graphs & Digraphs Sixth Edition*. Boca Raton: CRC Press.

Domicolo, C., & Mahmoud, H. (2020). Degree-Based Gini Index for Graphs. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, *34*(2), 157-171.

Domicolo, C., Zhang, P., & Mahmoud, H. (2019). The degree Gini index of several classes of random trees and their poissonized counterparts---an evidence for a duality theory. *Journal of Stochastic Analysis*, *3*(4).

Fitria, R. (2020). *Spektrum Graf Teratur (Regular Graphs) dengan Menggunakan Matriks Sirkulan*. Skripsi tidak dipublikasikan. Medan: Universitas Negeri Medan.

Gilbert, L., & Gilbert, J. (2015). *Elements of Modern Algebra Eighth Edition*. Stamford: Nelson Education, Ltd.

Irawan, W. H., Hijriyah, N., & Habibi, A. R. (2014). *Pengantar Teori Bilangan*. Malang: UIN-Malang Press.

Kemenag. (2002). *Al-Quran Kemenag* (1st ed.). LPMQ. https://quran.kemenag.go.id/

Pranjali, Kumar, A., & Sharma, P. (2021). Line graph of unit graphs associated with finite commutative rings. *Proyecciones*, *40*(4), 919-926.

Li, Z., & Su, H. (2021). The radius of unit graphs of rings. *AIMS Mathematics*, *6*(10), 11508-11515.

Nisa, L. (2020). *Kemampuan Penalaran Siswa dalam Memecahkan Masalah Program Linear Ditinjau dari Kemampuan Matematika Kelas XI SMAN 1 Tulungagung Tahun Ajaran 2019/2020.* Skripsi tidak dipublikasikan. Tulungagung: UIN Sayyid Ali Rahmatullah Tulungagung.

Rahayuningsih, S. (2018). *Teori Graph dan Penerapannya*. Malang: Universias Wisnuwardhana Press.

Shihab, M. Q. (2002). *Tafsir Al Mishbah: Pesan, Kesan, dan Keserasian al-Qur'an*. Jakarta: Lentera Hati.

Wazzan, S., & Saleh, A. (2021). Locating and Multiplicative Locating Indices of Graphs with QSPR Analysis. *Journal of Mathematics*, *2021*.

LAMPIRAN

Lampiran 1 Sisi dan Indeks Gini Derajat pada $G(\mathbb{Z}_{21})$

Sisi-sisi pada graf unit dari ring $\mathbb{Z}_{21}$ adalah $E\big(G(\mathbb{Z}_{21})\big) = \{(\bar{0},\bar{1}), (\bar{0},\bar{2}), (\bar{0},\bar{4}), \big(\bar{0},\bar{5}\big), (\bar{0},\bar{8}), (\bar{0},\overline{10}), (\bar{0},\overline{11}), (\bar{0},\overline{13}), (\bar{0},\overline{16}), (\bar{0},\overline{17}), (\bar{0},\overline{19}), (\bar{0},\overline{20}), (\bar{1},\bar{3}), (\bar{1},\bar{4}), (\bar{1},\bar{7}), (\bar{1},\bar{9}), (\bar{1},\overline{10}), (\bar{1},\overline{12}), \big(\bar{1},\overline{15}\big), (\bar{1},\overline{16}), (\bar{1},\overline{18}), (\bar{1},\overline{19}), (\bar{2},\bar{3}), (\bar{2},\bar{6}), (\bar{2},\bar{8}), (\bar{2},\bar{9}), (\bar{2},\overline{11}), (\bar{2},\overline{14}), \big(\bar{2},\overline{15}\big), (\bar{2},\overline{17}), (\bar{2},\overline{18}), (\bar{2},\overline{20}), \big(\bar{3},\bar{5}\big), (\bar{3},\bar{7}), (\bar{3},\bar{8}), (\bar{3},\overline{10}), (\bar{3},\overline{13}), (\bar{3},\overline{14}), (\bar{3},\overline{16}), (\bar{3},\overline{17}), (\bar{3},\overline{19}), (\bar{3},\overline{20}), (\bar{4},\bar{6}), (\bar{4},\bar{7}), (\bar{4},\bar{9}), (\bar{4},\overline{12}), (\bar{4},\overline{13}), \big(\bar{4},\overline{15}\big), (\bar{4},\overline{16}), (\bar{4},\overline{18}), (\bar{4},\overline{19}), \big(\bar{5},\bar{6}\big), \big(\bar{5},\bar{8}\big), \big(\bar{5},\overline{11}\big), \big(\bar{5},\overline{12}\big), \big(\bar{5},\overline{14}\big), \big(\bar{5},\overline{15}\big), \big(\bar{5},\overline{17}\big), \big(\bar{5},\overline{18}\big), \big(\bar{5},\overline{20}\big), (\bar{6},\bar{7}), (\bar{6},\overline{10}), (\bar{6},\overline{11}), (\bar{6},\overline{13}), (\bar{6},\overline{14}), (\bar{6},\overline{16}), (\bar{6},\overline{17}), (\bar{6},\overline{19}), (\bar{6},\overline{20}), (\bar{7},\bar{9}), (\bar{7},\overline{10}), (\bar{7},\overline{12}), (\bar{7},\overline{13}), \big(\bar{7},\overline{15}\big), (\bar{7},\overline{16}), (\bar{7},\overline{18}), (\bar{7},\overline{19}), (\bar{8},\bar{9}), (\bar{8},\overline{11}), (\bar{8},\overline{12}), (\bar{8},\overline{14}), \big(\bar{8},\overline{15}\big), (\bar{8},\overline{17}), (\bar{8},\overline{18}), (\bar{9},\overline{10}), (\bar{9},\overline{11}), (\bar{9},\overline{13}), (\bar{9},\overline{14}), (\bar{9},\overline{16}), (\bar{9},\overline{17}), (\bar{9},\overline{20}), (\overline{10},\overline{12}), (\overline{10},\overline{13}), \big(\overline{10},\overline{15}\big), (\overline{10},\overline{16}), (\overline{10},\overline{19}), (\overline{11},\overline{12}), (\overline{11},\overline{14}), \big(\overline{11},\overline{15}\big), (\overline{11},\overline{18}), (\overline{11},\overline{20}), (\overline{12},\overline{13}), (\overline{12},\overline{14}), (\overline{12},\overline{17}), (\overline{12},\overline{19}), (\overline{12},\overline{20}), (\overline{13},\overline{16}), (\overline{13},\overline{18}), (\overline{13},\overline{19}), \big(\overline{14},\overline{15}\big), (\overline{14},\overline{17}), (\overline{14},\overline{18}), (\overline{14},\overline{20}), \big(\overline{15},\overline{16}\big), \big(\overline{15},\overline{17}\big), \big(\overline{15},\overline{19}\big), (\overline{16},\overline{18}), (\overline{17},\overline{20}), (\overline{18},\overline{19}), (\overline{18},\overline{20})\}$.

Indeks Gini Derajat pada Graf $G(\mathbb{Z}_{21})$ adalah sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
GD\big(G(\mathbb{Z}_{21})\big) &= \sum_{\substack{u,v\in V(G(\mathbb{Z}_{21}))\\ u\neq v}} \frac{|deg(u)-deg(v)|}{n^2\mathbb{E}\big[D^*\big(G(\mathbb{Z}_{21})\big)\big]} \\
&= (|12-11| + |12-11| + |12-12| + |12-11| + |12-11| + \\
&\quad |12-12| + |12-12| + |12-11| + |12-12| + |12-11| + \\
&\quad |12-11| + |12-12| + |12-11| + |12-12| + |12-12| + \\
&\quad |12-11| + |12-11| + |12-12| + |12-11| + |12-11| + \\
&\quad |11-11| + |11-12| + |11-11| + |11-11| + |11-12| + \\
&\quad |11-12| + |11-11| + |11-12| + |11-11| + |11-11| + \\
&\quad |11-12| + |11-11| + |11-12| + |11-12| + |11-11| + \\
&\quad |11-11| + |11-12| + |11-11| + |11-11| + |11-12| + \\
&\quad |11-11| + |11-11| + |11-12| + |11-12| + |11-11| + \\
&\quad |11-12| + |11-11| + |11-11| + |11-12| + |11-11| + \\
&\quad |11-12| + |11-12| + |11-11| + |11-11| + |11-12| + \\
&\quad |11-11| + |11-11| + |12-11| + |12-11| + |12-12| + \\
&\quad |12-12| + |12-11| + |12-12| + |12-11| + |12-11| + \\
&\quad |12-12| + |12-11| + |12-12| + |12-12| + |12-11| + \\
&\quad |12-11| + |12-12| + |12-11| + |12-11| + |11-11| + \\
&\quad |11-12| + |11-12| + |11-11| + |11-12| + |11-11| + \\
&\quad |11-11| + |11-12| + |11-11| + |11-12| + |11-12| + \\
&\quad |11-11| + |11-11| + |11-12| + |11-11| + |11-11| +
\end{aligned}
$$

$$|11-12|+|11-12|+|11-11|+|11-12|+|11-11|+$$
$$|11-11|+|11-12|+|11-11|+|11-12|+|11-12|+$$
$$|11-11|+|11-11|+|11-12|+|11-11|+|11-11|+$$
$$|12-12|+|12-11|+|12-12|+|12-11|+|12-11|+$$
$$|12-12|+|12-11|+|12-12|+|12-12|+|12-11|+$$
$$|12-11|+|12-12|+|12-11|+|12-11|+|12-11|+$$
$$|12-12|+|12-11|+|12-11|+|12-12|+|12-11|+$$
$$|12-12|+|12-12|+|12-11|+|12-11|+|12-12|+$$
$$|12-11|+|12-11|+|11-12|+|11-11|+|11-11|+$$
$$|11-12|+|11-11|+|11-12|+|11-12|+|11-11|+$$
$$|11-11|+|11-12|+|11-11|+|11-11|+|12-11|+$$
$$|12-11|+|12-12|+|12-11|+|12-12|+|12-12|+$$
$$|12-11|+|12-11|+|12-12|+|12-11|+|12-11|+$$
$$|11-11|+|11-12|+|11-11|+|11-12|+|11-12|+$$
$$|11-11|+|11-11|+|11-12|+|11-11|+|11-11|+$$
$$|11-12|+|11-11|+|11-12|+|11-12|+|11-11|+$$
$$|11-11|+|11-12|+|11-11|+|11-11|+|12-11|+$$
$$|12-12|+|12-12|+|12-11|+|12-11|+|12-12|+$$
$$|12-11|+|12-11|+|11-12|+|11-12|+|11-11|+$$
$$|11-11|+|11-12|+|11-11|+|11-11|+|12-12|+$$
$$|12-11|+|12-11|+|12-12|+|12-11|+|12-11|+$$
$$|12-11|+|12-11|+|12-12|+|12-11|+|12-11|+$$
$$|11-11|+|11-12|+|11-11|+|11-11|+|11-12|+$$
$$|11-11|+|11-11|+|12-11|+|12-11|+|11-11|)$$

$$\frac{1}{21^2 \cdot \frac{240}{21}}$$

$$= (1+1+0+1+1+1+0+0+1+0+1+1+0+1+0+$$
$$0+1+1+0+1+1+0+1+0+0+1+1+0+1+0+$$
$$0+1+0+1+1+0+0+1+0+0+1+0+0+1+1+$$
$$0+1+0+0+1+0+1+1+0+0+1+0+0+1+1+$$
$$0+0+1+0+1+1+0+1+0+0+1+1+0+1+1+$$
$$0+1+1+0+1+0+0+1+0+1+1+0+0+1+0+$$
$$0+1+1+0+1+0+0+1+0+1+1+0+0+1+0+$$
$$0+0+1+0+1+1+0+1+0+0+1+1+0+1+1+$$
$$1+0+1+1+0+1+0+0+1+1+0+1+1+1+0+$$
$$0+1+0+1+1+0+0+1+0+0+1+1+0+1+0+$$
$$0+1+1+0+1+1+0+1+0+1+1+0+0+1+0+$$
$$0+1+0+1+1+0+0+1+0+0+1+0+0+1+1+$$
$$0+1+1+1+1+0+0+1+0+0+0+1+1+0+1+$$
$$1+1+1+0+1+1+0+1+0+0+1+0+0+1+1+$$

$$0)\ \frac{1}{21^2 \cdot \frac{240}{21}}$$

$$= \frac{108}{5040}$$

$$= \frac{3}{140}$$

Lampiran 2 Tabel Pasangan Sisi Graf Unit Ring $\mathbb{Z}_{33}$

·	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{8}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$
$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$
$\overline{10}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$
$\overline{11}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$
$\overline{12}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
$\overline{13}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$
$\overline{14}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$
$\overline{15}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$
$\overline{16}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$
$\overline{17}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$
$\overline{18}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$
$\overline{19}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$
$\overline{20}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$
$\overline{21}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$
$\overline{22}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$
$\overline{23}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$
$\overline{24}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$
$\overline{25}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$
$\overline{26}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$
$\overline{27}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$
$\overline{28}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$
$\overline{29}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$
$\overline{30}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$
$\overline{31}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$
$\overline{32}$	$\overline{32}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$

Lampiran 3 Sisi dan Indeks Gini Derajat pada $G(\mathbb{Z}_{33})$

Sisi-sisi pada graf unit dari ring $\mathbb{Z}_{21}$ adalah $E(G(\mathbb{Z}_{33})) = \{(\overline{0},\overline{1}), (\overline{0},\overline{2}), (\overline{0},\overline{4}),$ $(\overline{0},\overline{5}), (\overline{0},\overline{7}), (\overline{0},\overline{8}), (\overline{0},\overline{10}), (\overline{0},\overline{13}), (\overline{0},\overline{14}), (\overline{0},\overline{16}), (\overline{0},\overline{17}), (\overline{0},\overline{19}), (\overline{0},\overline{20}),$ $(\overline{0},\overline{23}), (\overline{0},\overline{25}), (\overline{0},\overline{26}), (\overline{0},\overline{28}), (\overline{0},\overline{29}), (\overline{0},\overline{31}), (\overline{0},\overline{32}), (\overline{1},\overline{3}), (\overline{1},\overline{4}), (\overline{1},\overline{6}),$ $(\overline{1},\overline{7}), (\overline{1},\overline{9}), (\overline{1},\overline{12}), (\overline{1},\overline{13}), (\overline{1},\overline{15}), (\overline{1},\overline{16}), (\overline{1},\overline{18}), (\overline{1},\overline{19}), (\overline{1},\overline{22}), (\overline{1},\overline{24}),$ $(\overline{1},\overline{25}), (\overline{1},\overline{27}), (\overline{1},\overline{28}), (\overline{1},\overline{30}), (\overline{1},\overline{31}), (\overline{2},\overline{3}), (\overline{2},\overline{5}), (\overline{2},\overline{6}), (\overline{2},\overline{8}), (\overline{2},\overline{11}),$ $(\overline{2},\overline{12}), (\overline{2},\overline{14}), (\overline{2},\overline{15}), (\overline{2},\overline{17}), (\overline{2},\overline{18}), (\overline{2},\overline{21}), (\overline{2},\overline{23}), (\overline{2},\overline{24}), (\overline{2},\overline{26}), (\overline{2},\overline{27}),$ $(\overline{2},\overline{29}), (\overline{2},\overline{30}), (\overline{2},\overline{32}), (\overline{3},\overline{4}), (\overline{3},\overline{5}), (\overline{3},\overline{7}), (\overline{3},\overline{10}), (\overline{3},\overline{11}), (\overline{3},\overline{13}), (\overline{3},\overline{14}),$ $(\overline{3},\overline{16}), (\overline{3},\overline{17}), (\overline{3},\overline{20}), (\overline{3},\overline{22}), (\overline{3},\overline{23}), (\overline{3},\overline{25}), (\overline{3},\overline{26}), (\overline{3},\overline{28}), (\overline{3},\overline{29}), (\overline{3},\overline{31}),$ $(\overline{3},\overline{32}), (\overline{4},\overline{6}), (\overline{4},\overline{9}), (\overline{4},\overline{10}), (\overline{4},\overline{12}), (\overline{4},\overline{13}), (\overline{4},\overline{15}), (\overline{4},\overline{16}), (\overline{4},\overline{19}), (\overline{4},\overline{21}),$ $(\overline{4},\overline{22}), (\overline{4},\overline{24}), (\overline{4},\overline{25}), (\overline{4},\overline{27}), (\overline{4},\overline{28}), (\overline{4},\overline{30}), (\overline{4},\overline{31}), (\overline{5},\overline{8}), (\overline{5},\overline{9}), (\overline{5},\overline{11}),$ $(\overline{5},\overline{12}), (\overline{5},\overline{14}), (\overline{5},\overline{15}), (\overline{5},\overline{18}), (\overline{5},\overline{20}), (\overline{5},\overline{21}), (\overline{5},\overline{23}), (\overline{5},\overline{24}), (\overline{5},\overline{26}), (\overline{5},\overline{27}),$ $(\overline{5},\overline{29}), (\overline{5},\overline{30}), (\overline{5},\overline{32}), (\overline{6},\overline{7}), (\overline{6},\overline{8}), (\overline{6},\overline{10}), (\overline{6},\overline{11}), (\overline{6},\overline{13}), (\overline{6},\overline{14}), (\overline{6},\overline{17}),$ $(\overline{6},\overline{19}), (\overline{6},\overline{20}), (\overline{6},\overline{22}), (\overline{6},\overline{23}), (\overline{6},\overline{25}), (\overline{6},\overline{26}), (\overline{6},\overline{28}), (\overline{6},\overline{29}), (\overline{6},\overline{31}), (\overline{6},\overline{32}),$ $(\overline{7},\overline{9}), (\overline{7},\overline{10}), (\overline{7},\overline{12}), (\overline{7},\overline{13}), (\overline{7},\overline{16}), (\overline{7},\overline{18}), (\overline{7},\overline{19}), (\overline{7},\overline{21}), (\overline{7},\overline{22}), (\overline{7},\overline{24}),$ $(\overline{7},\overline{25}), (\overline{7},\overline{27}), (\overline{7},\overline{28}), (\overline{7},\overline{30}), (\overline{7},\overline{32}), (\overline{8},\overline{9}), (\overline{8},\overline{11}), (\overline{8},\overline{12}), (\overline{8},\overline{15}), (\overline{8},\overline{17}),$ $(\overline{8},\overline{18}), (\overline{8},\overline{20}), (\overline{8},\overline{21}), (\overline{8},\overline{23}), (\overline{8},\overline{24}), (\overline{8},\overline{26}), (\overline{8},\overline{27}), (\overline{8},\overline{29}), (\overline{8},\overline{30}), (\overline{8},\overline{32}),$ $(\overline{9},\overline{10}), (\overline{9},\overline{11}), (\overline{9},\overline{14}), (\overline{9},\overline{16}), (\overline{9},\overline{17}), (\overline{9},\overline{19}), (\overline{9},\overline{20}), (\overline{9},\overline{22}), (\overline{9},\overline{23}), (\overline{9},\overline{25}),$ $(\overline{9},\overline{26}), (\overline{9},\overline{28}), (\overline{9},\overline{29}), (\overline{9},\overline{31}), (\overline{9},\overline{32}), (\overline{10},\overline{13}), (\overline{10},\overline{15}), (\overline{10},\overline{16}), (\overline{10},\overline{18}),$ $(\overline{10},\overline{19}), (\overline{10},\overline{21}), (\overline{10},\overline{22}), (\overline{10},\overline{24}), (\overline{10},\overline{25}), (\overline{10},\overline{27}), (\overline{10},\overline{28}), (\overline{10},\overline{30}),$ $(\overline{10},\overline{31}), (\overline{11},\overline{12}), (\overline{11},\overline{14}), (\overline{11},\overline{15}), (\overline{11},\overline{17}), (\overline{11},\overline{18}), (\overline{11},\overline{20}), (\overline{11},\overline{21}),$ $(\overline{11},\overline{23}), (\overline{11},\overline{24}), (\overline{11},\overline{26}), (\overline{11},\overline{27}), (\overline{11},\overline{29}), (\overline{11},\overline{30}), (\overline{11},\overline{32}), (\overline{12},\overline{13}),$ $(\overline{12},\overline{14}), (\overline{12},\overline{16}), (\overline{12},\overline{17}), (\overline{12},\overline{19}), (\overline{12},\overline{20}), (\overline{12},\overline{22}), (\overline{12},\overline{23}), (\overline{12},\overline{25}),$ $(\overline{12},\overline{26}), (\overline{12},\overline{28}), (\overline{12},\overline{29}), (\overline{12},\overline{31}), (\overline{13},\overline{15}), (\overline{13},\overline{16}), (\overline{13},\overline{18}), (\overline{13},\overline{19}),$ $(\overline{13},\overline{21}), (\overline{13},\overline{22}), (\overline{13},\overline{24}), (\overline{13},\overline{25}), (\overline{13},\overline{27}), (\overline{13},\overline{28}), (\overline{13},\overline{30}), (\overline{14},\overline{15}),$ $(\overline{14},\overline{17}), (\overline{14},\overline{18}), (\overline{14},\overline{20}), (\overline{14},\overline{21}), (\overline{14},\overline{23}), (\overline{14},\overline{24}), (\overline{14},\overline{26}), (\overline{14},\overline{27}),$ $(\overline{14},\overline{29}), (\overline{14},\overline{32}), (\overline{15},\overline{16}), (\overline{15},\overline{17}), (\overline{15},\overline{19}), (\overline{15},\overline{20}), (\overline{15},\overline{22}), (\overline{15},\overline{23}),$ $(\overline{15},\overline{25}), (\overline{15},\overline{26}), (\overline{15},\overline{28}), (\overline{15},\overline{31}), (\overline{15},\overline{32}), (\overline{16},\overline{18}), (\overline{16},\overline{19}), (\overline{16},\overline{21}),$ $(\overline{16},\overline{22}), (\overline{16},\overline{24}), (\overline{16},\overline{25}), (\overline{16},\overline{27}), (\overline{16},\overline{30}), (\overline{16},\overline{31}), (\overline{17},\overline{18}), (\overline{17},\overline{20}),$ $(\overline{17},\overline{21}), (\overline{17},\overline{23}), (\overline{17},\overline{24}), (\overline{17},\overline{26}), (\overline{17},\overline{29}), (\overline{17},\overline{30}), (\overline{17},\overline{32}), (\overline{18},\overline{19}),$ $(\overline{18},\overline{20}), (\overline{18},\overline{22}), (\overline{18},\overline{23}), (\overline{18},\overline{25}), (\overline{18},\overline{28}), (\overline{18},\overline{29}), (\overline{18},\overline{31}), (\overline{18},\overline{32}),$ $(\overline{19},\overline{21}), (\overline{19},\overline{22}), (\overline{19},\overline{24}), (\overline{19},\overline{27}), (\overline{19},\overline{28}), (\overline{19},\overline{30}), (\overline{19},\overline{31}), (\overline{20},\overline{21}),$ $(\overline{20},\overline{23}), (\overline{20},\overline{26}), (\overline{20},\overline{27}), (\overline{20},\overline{29}), (\overline{20},\overline{30}), (\overline{20},\overline{32}), (\overline{21},\overline{22}), (\overline{21},\overline{25}),$ $(\overline{21},\overline{26}), (\overline{21},\overline{28}), (\overline{21},\overline{29}), (\overline{21},\overline{31}), (\overline{21},\overline{32}), (\overline{22},\overline{24}), (\overline{22},\overline{25}), (\overline{22},\overline{27}),$ $(\overline{22},\overline{28}), (\overline{22},\overline{30}), (\overline{22},\overline{31}), (\overline{23},\overline{24}), (\overline{23},\overline{26}), (\overline{23},\overline{27}), (\overline{23},\overline{29}), (\overline{23},\overline{30}),$ $(\overline{24},\overline{25}), (\overline{24},\overline{26}), (\overline{24},\overline{28}), (\overline{24},\overline{29}), (\overline{24},\overline{32}), (\overline{25},\overline{27}), (\overline{25},\overline{28}), (\overline{25},\overline{31}),$ $(\overline{26},\overline{27}), (\overline{26},\overline{30}), (\overline{26},\overline{32}), (\overline{27},\overline{29}), (\overline{27},\overline{31}), (\overline{27},\overline{32}), (\overline{28},\overline{30}), (\overline{28},\overline{31}),$ $(\overline{29},\overline{30}), (\overline{29},\overline{32}), (\overline{30},\overline{31}), (\overline{30},\overline{32})\}$.

Indeks Gini Derajat pada Graf $G(\mathbb{Z}_{33})$ adalah sebagai berikut:

$$GD\big(G(\mathbb{Z}_{33})\big) = \sum_{\substack{u,v \in V\left(G(\mathbb{Z}_{33})\right) \\ u \neq v}} \frac{|deg(u) - deg(v)|}{n^2 \mathbb{E}\left[D^*\big(G(\mathbb{Z}_{33})\big)\right]}$$

$$\begin{aligned}
&= (|20-19| + |20-19| + |20-20| + |20-19| + |20-19| + \\
&\quad |20-20| + |20-19| + |20-19| + |20-20| + |20-19| + \\
&\quad |20-20| + |20-20| + |20-19| + |20-19| + |20-20| + \\
&\quad |20-19| + |20-19| + |20-20| + |20-19| + |20-19| + \\
&\quad |20-20| + |20-20| + |20-19| + |20-20| + |20-19| + \\
&\quad |20-19| + |20-20| + |20-19| + |20-19| + |20-20| + \\
&\quad |20-19| + |20-19| + |19-19| + |19-20| + |19-19| + \\
&\quad |19-19| + |19-20| + |19-19| + |19-19| + |19-20| + \\
&\quad |19-19| + |19-20| + |19-20| + |19-19| + |19-19| + \\
&\quad |19-20| + |19-19| + |19-19| + |19-20| + |19-19| + \\
&\quad |19-19| + |19-20| + |19-20| + |19-19| + |19-20| + \\
&\quad |19-19| + |19-19| + |19-20| + |19-19| + |19-19| + \\
&\quad |19-20| + |19-19| + |19-19| + |19-20| + |19-19| + \\
&\quad |19-19| + |19-20| + |19-19| + |19-19| + |19-20| + \\
&\quad |19-19| + |19-20| + |19-20| + |19-19| + |19-19| + \\
&\quad |19-20| + |19-19| + |19-19| + |19-20| + |19-19| + \\
&\quad |19-19| + |19-20| + |19-20| + |19-19| + |19-20| + \\
&\quad |19-19| + |19-19| + |19-20| + |19-19| + |19-19| + \\
&\quad |19-20| + |19-19| + |19-19| + |20-19| + |20-19| + \\
&\quad |20-20| + |20-19| + |20-19| + |20-20| + |20-19| + \\
&\quad |20-20| + |20-20| + |20-19| + |20-19| + |20-20| + \\
&\quad |20-19| + |20-19| + |20-20| + |20-19| + |20-19| + \\
&\quad |20-20| + |20-20| + |20-19| + |20-20| + |20-19| + \\
&\quad |20-19| + |20-20| + |20-19| + |20-19| + |20-20| + \\
&\quad |20-19| + |20-19| + |19-19| + |19-20| + |19-19| + \\
&\quad |19-19| + |19-20| + |19-19| + |19-20| + |19-20| + \\
&\quad |19-19| + |19-19| + |19-20| + |19-19| + |19-19| + \\
&\quad |19-20| + |19-19| + |19-19| + |19-20| + |19-20| + \\
&\quad |19-19| + |19-20| + |19-19| + |19-19| + |19-20| + \\
&\quad |19-19| + |19-19| + |19-20| + |19-19| + |19-19| + \\
&\quad |19-20| + |19-19| + |19-19| + |19-20| + |19-19| + \\
&\quad |19-20| + |19-20| + |19-19| + |19-19| + |19-20| + \\
&\quad |19-19| + |19-19| + |19-20| + |19-19| + |19-19| + \\
&\quad |19-20| + |19-20| + |19-19| + |19-20| + |19-19| + \\
&\quad |19-19| + |19-20| + |19-19| + |19-19| + |19-20| + \\
&\quad |19-19| + |19-19| + |20-19| + |20-19| + |20-20| + \\
&\quad |20-19| + |20-20| + |20-20| + |20-19| + |20-19| +
\end{aligned}$$

$$|20-20| + |20-19| + |20-19| + |20-20| + |20-19| +$$
$$|20-19| + |20-20| + |20-20| + |20-19| + |20-20| +$$
$$|20-19| + |20-19| + |20-20| + |20-19| + |20-19| +$$
$$|20-20| + |20-19| + |20-19| + |19-19| + |19-20| +$$
$$|19-19| + |19-20| + |19-20| + |19-19| + |19-19| +$$
$$|19-20| + |19-19| + |19-19| + |19-20| + |19-19| +$$
$$|19-19| + |19-20| + |19-20| + |19-19| + |19-20| +$$
$$|19-19| + |19-19| + |19-20| + |19-19| + |19-19| +$$
$$|19-20| + |19-19| + |19-19| + |19-20| + |19-19| +$$
$$|19-20| + |19-20| + |19-19| + |19-19| + |19-20| +$$
$$|19-19| + |19-19| + |19-20| + |19-19| + |19-19| +$$
$$|19-20| + |19-20| + |19-19| + |19-20| + |19-19| +$$
$$|19-19| + |19-20| + |19-19| + |19-19| + |19-20| +$$
$$|19-19| + |19-19| + |20-19| + |20-20| + |20-20| +$$
$$|20-19| + |20-19| + |20-20| + |20-19| + |20-19| +$$
$$|20-20| + |20-19| + |20-19| + |20-20| + |20-20| +$$
$$|20-19| + |20-20| + |20-19| + |20-19| + |20-20| +$$
$$|20-19| + |20-19| + |20-20| + |20-19| + |20-19| +$$
$$|19-20| + |19-20| + |19-19| + |19-19| + |19-20| +$$
$$|19-19| + |19-19| + |19-20| + |19-19| + |19-19| +$$
$$|19-20| + |19-20| + |19-19| + |19-20| + |19-19| +$$
$$|19-19| + |19-20| + |19-19| + |19-19| + |19-20| +$$
$$|19-19| + |19-19| + |20-20| + |20-19| + |20-19| +$$
$$|20-20| + |20-19| + |20-19| + |20-20| + |20-19| +$$
$$|20-19| + |20-20| + |20-20| + |20-19| + |20-20| +$$
$$|20-19| + |20-19| + |20-20| + |20-19| + |20-19| +$$
$$|20-20| + |20-19| + |20-19| + |20-19| + |20-19| +$$
$$|20-20| + |20-19| + |20-19| + |20-20| + |20-19| +$$
$$|20-19| + |20-20| + |20-20| + |20-19| + |20-20| +$$
$$|20-19| + |20-19| + |20-20| + |20-19| + |20-19| +$$
$$|20-20| + |20-19| + |20-19| + |19-19| + |19-20| +$$
$$|19-19| + |19-19| + |19-20| + |19-19| + |19-19| +$$
$$|19-20| + |19-20| + |19-19| + |19-20| + |19-19| +$$
$$|19-19| + |19-20| + |19-19| + |19-19| + |19-20| +$$
$$|19-19| + |19-19| + |19-20| + |19-19| + |19-19| +$$
$$|19-20| + |19-19| + |19-19| + |19-20| + |19-20| +$$
$$|19-19| + |19-20| + |19-19| + |19-19| + |19-20| +$$
$$|19-19| + |19-19| + |19-20| + |19-19| + |19-19| +$$
$$|20-19| + |20-19| + |20-20| + |20-19| + |20-19| +$$
$$|20-20| + |20-20| + |20-19| + |20-20| + |20-19| +$$
$$|20-19| + |20-20| + |20-19| + |20-19| + |20-20| +$$

$$
\begin{aligned}
&|20-19|+|20-19|+|19-19|+|19-20|+|19-19|+\\
&|19-19|+|19-20|+|19-20|+|19-19|+|19-20|+\\
&|19-19|+|19-19|+|19-20|+|19-19|+|19-19|+\\
&|19-20|+|19-19|+|19-19|+|19-20|+|19-19|+\\
&|19-19|+|19-20|+|19-20|+|19-19|+|19-20|+\\
&|19-19|+|19-19|+|19-20|+|19-19|+|19-19|+\\
&|19-20|+|19-19|+|19-19|+|20-19|+|20-19|+\\
&|20-20|+|20-20|+|20-19|+|20-20|+|20-19|+\\
&|20-19|+|20-20|+|20-19|+|20-19|+|20-20|+\\
&|20-19|+|20-19|+|19-19|+|19-20|+|19-20|+\\
&|19-19|+|19-20|+|19-19|+|19-19|+|19-20|+\\
&|19-19|+|19-19|+|19-20|+|19-19|+|19-19|+\\
&|19-20|+|19-20|+|19-19|+|19-20|+|19-19|+\\
&|19-19|+|19-20|+|19-19|+|19-19|+|19-20|+\\
&|19-19|+|19-19|+|20-20|+|20-19|+|20-20|+\\
&|20-19|+|20-19|+|20-20|+|20-19|+|20-19|+\\
&|20-20|+|20-19|+|20-19|+|20-19|+|20-20|+\\
&|20-19|+|20-19|+|20-20|+|20-19|+|20-19|+\\
&|20-20|+|20-19|+|20-19|+|19-20|+|19-19|+\\
&|19-19|+|19-20|+|19-19|+|19-19|+|19-20|+\\
&|19-19|+|19-19|+|20-19|+|20-19|+|20-20|+\\
&|20-19|+|20-19|+|20-20|+|20-19|+|20-19|+\\
&|19-19|+|19-20|+|19-19|+|19-19|+|19-20|+\\
&|19-19|+|19-19|+|19-20|+|19-19|+|19-19|+\\
&|19-20|+|19-19|+|19-19|+|20-19|+|20-19|+\\
&|20-20|+|20-19|+|20-19|+|19-19|+|19-20|+\\
&|19-19|+|19-19|+|19-20|+|19-19|+|19-19|+\\
&|20-19|+|20-19|+|19-19|+|19-20|+|19-19|+\\
&|19-19|+|20-19|+|20-19|+|19-19|)\frac{1}{33^2\cdot\frac{640}{33}}\\
=&(1+1+0+1+1+0+1+1+0+1+0+0+1+1+0+\\
&1+1+0+1+1+0+0+1+0+1+1+0+1+1+0+\\
&1+1+0+1+0+0+1+0+0+1+0+1+1+0+0+\\
&1+0+0+1+0+0+1+1+0+1+0+0+1+0+0+\\
&1+0+0+1+0+0+1+0+0+1+0+1+1+0+0+\\
&1+0+0+1+0+0+1+1+0+1+0+0+1+0+0+\\
&1+0+0+1+1+0+1+1+0+1+0+0+1+1+0+\\
&1+1+0+1+1+0+0+1+0+1+1+0+1+1+0+\\
&1+1+0+1+0+0+1+0+1+1+0+0+1+0+0+\\
&1+0+0+1+1+0+1+0+0+1+0+0+1+0+0+
\end{aligned}
$$

$$1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 +$$
$$1 + 1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 1 + 0 +$$
$$1 + 0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 +$$
$$1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 0 +$$
$$1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 +$$
$$1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 +$$
$$1 + 1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 +$$
$$1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 +$$
$$1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 +$$
$$1 + 1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 1 + 1 +$$
$$0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 1 +$$
$$0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 +$$
$$1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 +$$
$$1 + 1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 +$$
$$1 + 0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 +$$
$$1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 +$$
$$1 + 1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 +$$
$$1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 +$$
$$1 + 0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 +$$
$$1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 +$$
$$1 + 1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 1 + 0 +$$
$$1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 1 +$$
$$0 + 1 + 1 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 1 + 0 +$$
$$1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 +$$
$$1 + 0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 +$$
$$1 + 1 + 0) \frac{1}{33 \cdot 640}$$
$$= \frac{260}{21120}$$
$$= \frac{13}{1056}$$

RIWAYAT HIDUP

Moh. Isyhar Mahbubi lahir di Kabupaten Kediri pada tanggal 22 April 1999. Beralamat di Jalan Madura, No. 23A, RT/RW 001/003, Kelurahan Mangkujayan, Kec./Kab. Ponorogo, anak sulung dari dua bersaudara, yakni dari pasangan Bapak Umar dan Ibu Dewi Zulaikah.

Penulis telah menempuh pendidikan formal mulai dari TK Muslimat 01 Ponorogo dan lulus pada tahun 2006. Kemudian penulis menempuh pendidikan dasar di SDN 1 Mangkujayan Ponorogo dan lulus pada tahun 2012. Selanjutnya penulis melanjutkan pendidikan menengah pertama dan atas di Yayasan Pondok Pesantren Darul Huda Ponorogo. yakni di MTS Darul Huda pada tahun 2012 – 2015 dan MA Darul Huda pada tahun 2015 – 2018. Selama menempuh pendidikan di perguruan tinggi, penulis pernah menjadi asisten laboratorium praktikum analisis numerik I pada tahun 2021 dan tim soal Kompetisi Matematika Nasional UIN Malang pada tahun 2020.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Moh. Isyhar Mahbubi
NIM : 18610023
Fakultas / Program Studi : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Indeks Gini Derajat pada Graf Unit dari Ring Bilangan Bulat Modulo
Pembimbing I : Mohammad Nafie Juhari, M.Si.
Pembimbing II : Erna Herawati, M.Pd.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	26 April 2022	Konsultasi Judul dan Bab I	1.
2.	6 Juni 2022	Konsultasi Bab II dan III	2.
3.	9 Juni 2022	Konsultasi Revisi Bab I, II, dan III	3.
4.	14 Juni 2022	Konsultasi Kajian Agama	4.
5.	5 Agustus 2022	ACC Seminar Proposal	5.
6.	16 September 2022	Konsultasi Bab IV dan V	6.
7.	30 September 2022	Konsultasi Revisi Bab IV dan V	7.
8.	14 Oktober 2022	Konsultasi Revisi Bab IV dan V	8.
9.	28 Oktober 2022	Konsultasi Kajian Agama	9.
10.	1 November 2022	Konsultasi Revisi Kajian Agama	10.
11.	9 November 2022	ACC Seminar Hasil	11.
12.	16 November 2022	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	12.
13.	2 Desember 2022	Konsultasi Kajian Agama	13.
14.	26 Desember 2022	ACC Keseluruhan	14.

Malang, 26 Desember 2022
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

KEMENTERIAN AGAMA REPUBLIK INDONESIA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
JURUSAN MATEMATIKA

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005