

**ANALISIS DINAMIK PENYEBARAN VIRUS SARS-COV2
MODEL SEIHR DENGAN PENGOBATAN
DAN VAKSINASI**

SKRIPSI

**OLEH
FITROTUN NISA'
NIM. 18610085**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022**

**ANALISIS DINAMIK PENYEBARAN VIRUS SARS-COV2
MODEL SEIHR DENGAN PENGOBATAN
DAN VAKSINASI**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Fitrotun Nisa'
NIM. 18610085**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022**

**ANALISIS DINAMIK PENYEBARAN VIRUS SARS-COV2
MODEL SEIHR DENGAN PENGOBATAN
DAN VAKSINASI**

SKRIPSI

**Oleh
Fitrotun Nisa'
NIM. 18610085**

Telah Diperiksa dan Disetujui Untuk Diuji

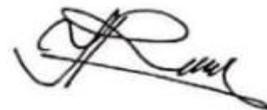
Malang, 26 Desember 2022

Dosen Pembimbing I



**Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si.
NIP. 19770521 200501 2 004**

Dosen Pembimbing II



**Erna Herawati, M.Pd.
NIDT. 19760723 20180201 2 222**

**Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika**




**Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005**

**ANALISIS DINAMIK PENYEBARAN VIRUS SARS-COV2
MODEL SEIHR DENGAN PENGOBATAN
DAN VAKSINASI**

SKRIPSI

**Oleh
Fitrotun Nisa'
NIM. 18610085**

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 28 Desember 2022

Ketua Penguji : Juhari, M.Si.

Anggota Penguji 1 : Dr. Heni Widayani, M.Si.

Anggota Penguji 2 : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si.

Anggota Penguji 3 : Erna Herawati, M.Pd



Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP-19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Fitrotun Nisa'

NIM : 18610085

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Analisis Dinamik Penyebaran Virus SARS-COV2 Model SEIHR dengan Pengobatan dan Vaksinasi.

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar – benar merupakan hasil karya sendiri. Bukan merupakan pengambilan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi menerima atas perbuatan tersebut.

Malang, 28 Desember 2022
Yang membuat pernyataan,

A handwritten signature in black ink is written over a yellow rectangular stamp. The stamp contains the text '1000' vertically on the left, the Garuda Pancasila emblem in the center, and 'METERAI TEMPEL' and '7803EAKX203513456' at the bottom.

Fitrotun Nisa'
NIM. 18610085

MOTO

“Sungguh atas kehendak Allah semua ini terwujud, tidak ada kekuatan kecuali dengan pertolongan Allah”

(Q.S. Al-Khaf :39)

“Andalkan Tuhanmu dalam setiap langkahmu, bukan dirimu”

(Habib Novel Alydrus)

“Success is not final, failure is not fatal; it is the courage to continue that counts”

(Sir Winston Churchill)

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Kedua orang tua penulis Bapak Yasin dan Ibu Fatmi, yang senantiasa selalu memberi do'a, dukungan, motivasi dan kasih sayang yang tak terhingga kepada penulis untuk selalu semangat dalam menyelesaikan pendidikan.

Kakak Nur Hidayat, Lilis Pujiani, yang telah memberikan dukungan, semangat, dorongan dan nasihat kepada penulis.

Serta diri sendiri, yang telah kuat berdiri tegak, berjuang dan bertahan dalam menggapai cita – cita hingga dapat menyelesaikan skripsi ini.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji dan syukur bagi Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, hidayah, dan inayahnya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul “Analisis Dinamik Penyebaran Virus SARS-COV2 Model SEIHR dengan Pengobatan dan Vaksinasi”. Shalawat serta salam senantiasa terlimpahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah menuntun umat manusia dari zaman Jahiliyah menuju ke zaman keselamatan.

Penyusunan skripsi ini tidak terlepas dari bimbingan, arahan dan sumbangan pemikiran dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dengan segala hormat penulis menyampaikan terimakasih yang sebesar – besarnya kepada :

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, nasihat, motivasi serta do'a kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
5. Erna Herawati, M.Pd, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, nasihat, motivasi serta do'a kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
6. Juhari, M.Si, selaku ketua penguji dalam ujian skripsi yang telah memberi bimbingan, nasihat, motivasi serta do'a kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
7. Dr. Heni Widayani, M.Si, selaku anggota penguji dalam ujian skripsi yang telah memberi bimbingan, nasihat, motivasi serta do'a kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
8. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim

9. Orang tua dan seluruh keluarga yang telah memberikan do'a, nasehat, dan motivasi kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
10. Seluruh teman – teman Aksioma angkatan 2018, terimakasih atas segala pengalaman berharga selama menuntut ilmu bersama.

Semoga segala yang telah diberikan kepada penulis mendapatkan balasan terbaik dari Allah SWT. Penulis berharap skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis pada khususnya dan bagi para pembaca pada umumnya.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 28 Desember 2022

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGAJUAN	ii
HALAMAN PERSETUJUAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	v
MOTO	vi
PERSEMBAHAN	vii
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR SIMBOL	xiv
DAFTAR LAMPIRAN	xv
ABSTRAK	xvi
ABSTRACT	xvii
مستخلص البحث	xviii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Manfaat Penelitian	5
1.5 Batasan Masalah	5
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	7
2.1 Teori Pendukung	7
2.1.1 Model SMUEIHR	7
2.1.2 Model SARS-COV2 pada populasi SEIHR	8
2.1.3 Sifat Dasar Model SEIHR	14
2.1.4 Persamaan Diferensial	16
2.1.5 Analisis Dinamik	18
2.1.6 Kontrol Optimal	31
2.2 Kajian Integrasi Topik Dengan Al-Quran	34
BAB III METODE PENELITIAN	37
3.1 Jenis Penelitian	37
3.2 Data dan Sumber Data	37
3.3 Tahapan Penelitian	37
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	39
4.1 Analisis Dinamik Model SEIHR	39
4.1.1 Titik Keseimbangan	39
4.1.2 Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)	44
4.1.3 Analisis Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan	47
4.1.4 Kontrol Optimal	51
4.2 Simulasi Model SEIHR Tanpa Kontrol dan Dengan Kontrol	58
4.2.1 Simulasi Model dalam Kondisi Bebas Penyakit	58
4.2.2 Simulasi Model dalam Kondisi Endemik	62
4.3 Upaya Pencegahan Virus SARS-COV2 dalam Prespektif Islam ...	67

BAB V PENUTUP.....	69
5.1 Kesimpulan.....	69
5.2 Saran untuk Penelitian Lanjutan	71
DAFTAR PUSTAKA.....	72
LAMPIRAN	75
RIWAYAT HIDUP	76

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Nilai Awal Variabel Model Matematika SEIHR.....	11
Tabel 2.2	Nilai Awal Parameter Model Matematika SEIHR	12
Tabel 2.3	Jenis Kestabilan Titik kesetimbangan Sistem Linier	24
Tabel 2.4	Routh Array	26

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Diagram Kompartemen Model SMUEIHR	7
Gambar 2.2	Diagram Kompartemen Model SEIHR	8
Gambar 4.1	Model Populasi SEIHR Dengan Variabel Kontrol	52
Gambar 4.2	Grafik Solusi Populasi Saat $R_0 < 1$ Tanpa Kontrol.....	59
Gambar 4.3	Grafik Dinamika Populasi saat $R_0 < 1$ dengan Kontrol	61
Gambar 4.4	Grafik Dinamika Populasi saat $R_0 > 1$ Tanpa Kontrol.....	63
Gambar 4.5	Grafik Dinamika Populasi saat $R_0 > 1$ dengan Kontrol	64
Gambar 4.6	Simulasi Kontrol $\theta_1, \theta_2,$ dan θ_3	66

DAFTAR SIMBOL

N	: Total populasi
$S(t)$: Populasi individu rentan pada waktu ke- t
$E(t)$: Populasi individu terpapar pada waktu ke- t
$I(t)$: Populasi individu terinfeksi dan isolasi mandiri di rumah pada waktu ke- t
$H(t)$: Populasi individu terinfeksi dan dirawat di rumah sakit pada waktu ke- t
$R(t)$: Populasi individu yang sembuh pada waktu ke- t .
π	: Laju kematian alami
μ	: Laju Kematian alami
μ_I	: Laju kematian karena virus di lingkungan terinfeksi
μ_H	: Laju kematian karena virus di lingkungan rumah sakit
ϵ	: Laju individu yang terpapar
γ	: Laju individu terinfeksi yang isolasi mandiri di rumah
τ	: Laju individu terinfeksi yang dirawat di rumah sakit
α	: Laju individu yang sembuh secara alami setelah terinfeksi
β	: Laju individu yang sembuh setelah dirawat di rumah sakit
$\theta_1(t)$: Pengobatan untuk individu yang terinfeksi
$\theta_2(t)$: Pengobatan untuk individu yang dirawat di rumah sakit
$\theta_3(t)$: Vaksinasi untuk individu yang rentan
A_1	: Bobot biaya populasi individu terinfeksi yang melakukan isolasi mandiri
A_2	: Bobot biaya populasi individu terinfeksi yang dirawat di rumah sakit
A_3	: Bobot biaya kontrol pengobatan populasi individu yang terinfeksi
A_4	: Bobot biaya kontrol pengobatan populasi individu yang dirawat di rumah sakit
A_5	: Bobot biaya vaksinasi untuk populasi individu yang rentan

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1 Tabel Data Publik Kasus Covid-19 Provinsi Jawa Timur Mei – Juli 2021	75
--	----

ABSTRAK

Nisa', Fitrotun, 2022. **Analisis Dinamik Penyebaran Virus SARS-COV2 Model SEIHR dengan Pengobatan dan Vaksinasi**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing (1) : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si. (2) : Erna Herawati, M.Pd.

Kata Kunci: Analisis Dinamik, Model Matematika SEIHR, Bilangan Reproduksi Dasar, Titik kesetimbangan, Kontrol Optimal, Prinsip Maksimum Pontryagin

Pada penelitian ini dibahas mengenai analisis dinamik model penyebaran virus SARS-COV2 pada Populasi SEIHR, kemudian dilanjutkan simulasi numerik dengan kontrol optimal pengobatan dan vaksinasi. Penelitian ini dilakukan untuk merepresentasikan perilaku penyebaran SARS-COV dengan membagi populasi manusia menjadi lima subpopulasi yaitu *Susceptible* (S), *Exposed* (E), *Infected* (I), *Hospitalized* (H), dan *Recovered* (R). Analisis dinamik dilakukan dengan menentukan titik kesetimbangan, analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan, dan bilangan reproduksi dasar (R_0). Kemudian dilanjutkan menentukan kondisi optimal dengan memberikan kontrol yaitu pengobatan untuk populasi *Infected* (θ_1), pengobatan untuk populasi *Hospitalized* (θ_2), dan vaksinasi untuk populasi *Susceptible* (θ_3). Penyelesaian kontrol optimal pada penyebaran virus SARS-COV2 dilakukan menggunakan prinsip maksimum Pontryagin. Prinsip ini diterapkan untuk memperoleh kondisi optimal dan juga memperoleh persamaan *state* dan *co-state*, kemudian disimulasikan menggunakan metode Runge-Kutta orde 4. Hasil dari analisis dinamik didapatkan dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit (E_0) dan titik kesetimbangan endemik (E_1). Pada penelitian ini titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat tidak stabil dan titik kesetimbangan endemik bersifat stabil asimtotik lokal. Bilangan reproduksi dasar bernilai $R_0 > 1$. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa pemberian kontrol θ_1, θ_2 , dan θ_3 dapat meminimalkan jumlah populasi *Infected*, *Hospitalized*, sehingga dapat disimpulkan bahwa pemberian pengobatan untuk individu terinfeksi dan di rawat di rumah sakit serta pemberian vaksinasi untuk individu rentan efektif mengurangi penyebaran virus SARS-COV2.

ABSTRACT

Nisa', Fitrotun, 2022. **The Dynamic Analysis of the SARS-COV2 Virus Spread in the SEIHR Model with Treatment and vaccinaton.** Thesis. Departement of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors (1) : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si. (2) : Erna Herawati, M.Pd.

Keywords: Dynamic Analysis, Mathematical Model of SEIHR, Basic Reproduction Number, Equilibrium Point, Optimal Control, Pontryagin Maximum Principle.

This study discussed the dynamic analysis of the SARS-COV2 virus spread in the SEIHR population, then proceed with numerical simulations with optimal control treatment and vaccination. This study was conducted to represent the behavior of the spread of SARS-COV2 divides the human population into five subpopulations, namely Susceptible (S), Exposed (E), Infected (I), Hospitalized (H), and Recovered (R). Dinamic analysis is carried out by determining the equilibrium point, local stability analysis of the equilibrium point, and the basic reproduction number (R_0). Then proceed determining the optimal condition by giving controls, namely treatment applied on the Infected population (θ_1), treatment applied on the Hospitalized population (θ_2), and vaccination applied on the Susceptible population (θ_3). The solution of the optimal control of the spread SARS-COV2 virus was conducted using Pontryagin maximum principle. This principle is applied to obtain optimal condition and also to get the state and co-state equations, which are then simulated using the Runge-Kutta method of fourth order. The result of the dynamic analysis obtained two equilibrium point, namely the disease-free equilibrium point (E_0) and the endemic point (E_1). The disease-free equilibrium point is unstabil and the endemic equilibrium point is locally asymptotically sTabel. The basic reproduction number $R_0 > 1$. The numerical simulation result indicated that implementation of controller θ_1, θ_2 , and θ_3 can minimize the number of Infected and Hospitalized populations. So it can be concluded that providing treatment to infected and hospitalized individuals and providing vaccination for susceptible individuals is effectively reduces the spread of the SARS-COV2 virus.

مستخلص البحث

النساء، فطرة، 2022. التحليل الديناميكي لانتشار فيروس SARS-COV2 في نموذج SEIHR مع العلاج والتطعيم. البحث العلمي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك ابراهيم الإسلامية الحكومية مالانغ. المشرفة: (1) آري كوسومستوتي، المجستير، (2) إرناهير اواتي، المجستير.

الكلمات المفتاحية: التحليل الديناميكي، النموذج الرياضي SEIHR، الأرقام الاستنساخ الأساسي، نقطة التوازن، التحكم المثلي، مبادئ بونترياغين *Pontryagin* الأقصى.

تتناقش هذه الدراسة التحليل الديناميكي لنموذج انتشار فيروس SARS-COV2 في مجتمع SEIHR، ثم تا الشروع في عمليات المحاكاة العددية مع التحكم الأمثل في العلاج والتحصين. أجريت هذه الدراسة لتمثيل سلوك انتشار SARS-COV2 عن تقسيم السكان البشريين إلى خمس مجموعات سكانية فرعية ب، هذا هو حساسة (S)، مكشوفة (E)، مصابة (I)، قي المستنقي (H)، وتعافى (R). يتم إجراء التحليل الديناميكي عن طريق تحديد النقطة التوازن وتحليل الاستقرار المحلي نقطة التوازن ورقم التكاثر الأساسي (R_0). ثم انتقل إلى تحديد الظروف المثلى من خالات توفير التحكم وهي علاج السكان المصابين (θ_1)، علاج السكان المستنقي (θ_2)، وتطعيم السكان المعرضين للإصابة (θ_3). تم الانتهاء من السيطرة المثلى على انتشار فيروس SARS-COV2 باستخدام مبدأ *Pontryagin* الأقصى. فهذه المبادئ مطبقة لتحصيل الأحوال الأمثلية وتحصيل تنابه *state* و *co-state*، مما أجري باستخدام طريقة *Runge-Kutta orde 4*. حصلت نتائج هذه التحليل الديناميكي على نقطتين هما النقطة جالية من الأمراض (E_0)، ونقطة متوطنة (E_1). نقطة الاتوازن خالية من الأمراض غير مستقرة ونقطة التوازن المستوطنة مستقرة محليا. رقم الاستنساخ الأساسي هو $R_0 >$ 1. نتائج المحاكاة العددية يوضح أن إعطاء التحكم θ_1 ، θ_2 و θ_3 يمكن أن يقلل من عدد السكان المصابين والمقيمين في المستشفى، لذلك يمكن الاستنتاج أن إعطاء العلاج للأفراد المصابين ودخول المستشفى وإعطاء اللقاحات للإصابة فعال في الحد من انتشار فيروس SARS-CoV2.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Coronavirus disease (SARS-COV2) adalah penyakit infeksi yang disebabkan oleh *Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus 2* (SARS-CoV-2) atau sering disebut virus corona. Penyakit ini menyebar di udara dan menjangkiti populasi manusia sehat. Akibatnya, populasi manusia terkluster menjadi 5 populasi yakni populasi manusia yang rentan *Susceptible S*, populasi manusia yang terpapar *Exposed E*, populasi manusia yang terinfeksi *Infected I*, populasi manusia yang dirawat di rumah sakit *Hospitalized H*, populasi manusia yang sembuh *Recovered R*. Selanjutnya, interaksi antar variabel diekspresikan oleh kinerja semua parameter yang terlibat di dalam model, yang secara umum meliputi parameter kelahiran alami, laju kematian di setiap populasi, dan laju infeksi antar populasi. Model yang digunakan di dalam penelitian ini adalah model Mumbu & Hugo (2020) dengan beberapa modifikasi yang dilakukan yakni, dilibatkannya analisis efektivitas pengobatan dan vaksinasi sebagai parameter kontrol penyebaran SARS-COV2 dalam setiap populasi SEIHR.

Parameter kontrol pengobatan dan vaksinasi berdasarkan paparan di atas adalah untuk mengurangi penyebaran penyakit SARS-COV2 di setiap populasi atau variabel model dalam penelitian ini. Penelitian yang dirujuk meliputi: penelitian Shaikh & Chen, dkk. (2020) yang mengembangkan model *Susceptible – Exposed – Infected – Asymptomatic Infected – Recovered* (SEIAR) pada penyebaran COVID-19 di India dan Korea secara numerik. Hasil dari penelitian tersebut menunjukkan bahwa bilangan reproduksi dasar $R_0 = 2$ mendeskripsikan

satu individu yang terinfeksi dapat menghasilkan dua individu yang terinfeksi dan setelah dilakukan regulasi *lockdown* laju penyebaran berkurang. Penelitian Ivorra dkk. (2020) dengan model *Susceptible – Exposed – Infected – Hospitalized – Recovered – Death*, secara numerik melakukan simulasi yang diarahkan pada pengaturan nilai bilangan reproduksi dasar dari $R_0 = 4.2$ menjadi R_0 di bawah 1 yang berhubungan dengan keberhasilan tindakan pencegahan. Penelitian (Mumbu & Hugo, 2020) dengan data di Tanzania memformulasikan model matematika penularan SARS-COV2 antara manusia dengan kompartemen *Susceptible – Masked – Unmasked – Exposed – Infected – Hospitalized – Recovered* (SEIHR). Penelitian (Mumbu & Hugo, 2020) diarahkan pada analisis pentingnya penggunaan masker dan tindakan rawat inap di rumah sakit untuk individu yang terinfeksi sebagai upaya tindakan preventif untuk menurunkan laju populasi terinfeksi dan *hospitalized*.

Penyakit yang menimpa seseorang terkadang dianggap suatu musibah, sehingga untuk menghindarinya sebaiknya dilakukan langkah pencegahan.

Rasullullah SAW bersabda :

وَعَنْ أُسَامَةَ بْنِ زَيْدٍ رَضِيَ اللَّهُ عَنْهُ عَنِ النَّبِيِّ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ قَالَ: إِذَا سَمِعْتُمْ
الطَّاعُونَ بِأَرْضٍ، فَلَا تَدْخُلُوهَا، وَإِذَا وَقَعَ بِأَرْضٍ، وَأَنْتُمْ فِيهَا، فَلَا تَخْرُجُوا مِنْهَا (رواه
البخاري ومسلم)

Artinya : “Dari Usamah Bin Zaid RA dari Nabi SAW yang bersabda: Apabila kalian mendengar ada wabah di suatu daerah, maka jangan memasuki daerah tersebut. Dan, apabila wabah terjadi di suatu daerah sedangkan kalian sedang berada di dalamnya, jangan keluar dari daerah tersebut ”(HR. Bukhari dan Muslim).

Makna hadist tersebut secara tekstual yakni tentang larangan meninggalkan suatu negara yang terkena wabah dan larangan memasuki negara tersebut. Asbabul nuzul hadis tersebut adalah tatkala negara Syam dilanda wabah

mematikan yakni penyakit Thaur. Kemudian menerapkan (pembatasan sosial) *lockdown* di negara Syam yang terjangkit wabah tersebut serta pada saat itu terdapat pertemuan antar bangsawan di Syam untuk kepentingan pemerintahan, Rasulullah melarang pertemuan tersebut dengan menyerukan hadis yang demikian (Firdaus, 2020).

Setelah dilakukan kajian pada hadis tersebut, asbabul wurud serta syarah hadis tersebut sangat relevan dengan situasi pandemi saat ini yaitu berkenaan dengan aturan pembatasan sosial di negara terjangkit SARS-COV2, dimana beberapa daerah di Indonesia mempraktikkan sistem PSBB (Pembatasan Sosial Berskala Besar) sebagai upaya membatasi ruang gerak sosial untuk memutus mata rantai penyebaran Covid19 (Hairi, 2020). Perubahan sosial yang diterapkan di Indonesia serupa dengan kebijakan yang diberlakukan kota Syam dikala terjangkit wabah Thaur dimana pemerintahan Syam melarang keras dilaksanakannya kegiatan yang mengundang banyak menimbulkan kerumunan. Oleh sebab itu, Islam sangat menyarankan untuk setiap individu harus hati-hati untuk menjaga jarak dari setiap orang, tempat atau benda yang mungkin menyebar.

Berdasarkan paparan di atas, penelitian ini menggunakan kaidah sebagai berikut: pertama, model merujuk pada (Mumbu & Hugo, 2020) dengan modifikasi bahwa keterlibatan variabel *Masked* dan *Unmasked* direduksi, untuk selanjutnya diarahkan sebagai parameter kontrol yang dikenakan di variabel *Infected*, *Hospitalized* dan *Susceptible*. Kedua, analisis diarahkan pada dinamika semua variabel model dengan kaidah sistem dinamik menuju analisis kestabilan lokal dengan memanfaatkan eksistensi bilangan reproduksi dasar. Simulasi model matematika dikerjakan dengan perubahan nilai-nilai parameter.

Manfaat secara umum dari penelitian ini adalah mendapatkan analisis secara komprehensif berdasarkan simulasi yang dilakukan pada penyebaran penyakit SARS-COV2 yang diarahkan pada regulasi tindakan pencegahan, mereduksi penyebaran penyakit antar individu dalam populasi *Susceptible*, *Exposed*, *Infected*, *Hospitalized*, dan *Recovered* dengan pengobatan dan vaksinasi sebagai parameter kontrol yang diletakkan pada variabel *Infected*, *Hospitalized* dan *Susceptible*. Analisis juga melibatkan tingkat efektivitas kinerja parameter kontrol pada model yang dianalisis.

1.2 Rumusan Masalah

Dari latar belakang yang telah diuraikan diatas, maka rumusan permasalahan pada penenilitian adalah sebagai berikut

1. Bagaimana analisis dinamik model matematika penyebaran virus SARS-COV2 dengan melibatkan parameter kontrol pengobatan dan vaksinasi ?
2. Bagaimana simulasi model matematika penyebaran virus SARS-COV2 dengan melibatkan parameter kontrol pengobatan dan vaksinasi dengan menggunakan metode Runge Kutta Orde 4 ?

1.3 Tujuan Penelitian

1. Mengetahui analisis dinamik model matematika penyebaran virus SARS-COV2 dengan melibatkan parameter kontrol pengobatan dan vaksinasi.
2. Mengetahui hasil simulasi model matematika penyebaran virus SARS-COV2, dengan melibatkan parameter kontrol pengobatan dan vaksinasi dengan menggunakan metode Runge Kutta Orde 4.

1.4 Manfaat Penelitian

1. Melalui analisis dinamik model matematika yang melibatkan parameter kontrol pengobatan dan vaksinasi dapat menjadi salah satu acuan dalam memahami penyebaran virus SARS-COV2.
2. Dengan mengetahui simulasi model matematika penyebaran virus SARS-COV2 dengan melibatkan parameter kontrol, dapat digunakan sebagai referensi untuk strategi dalam pengendalian penyebaran virus SARS-COV2.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini dibatasi oleh ruang lingkup sebagai berikut :

1. Populasi dibagi menjadi lima yaitu populasi individu rentan (*Susceptible*), populasi individu terpapar (*Exposed*), populasi individu terinfeksi (*Infected*), populasi individu yang di rawat di rumah sakit (*Hospitalized*), populasi individu yang sembuh (*Recovered*).
2. Faktor kontrol berupa parameter pengobatan dan vaksinasi dikenakan pada variabel *Infected*, *Hospitalized* dan *Susceptible* .
3. Diasumsikan tidak ada migrasi individu keluar atau masuk dari lingkungan pengamatan.
4. Diasumsikan bahwa individu yang mendapatkan pengobatan adalah hanya individu yang terinfeksi dan individu yang dirawat di rumah.
5. Diasumsikan bahwa individu yang diberikan vaksinasi adalah individu yang rentan tetular virus SARS-COV2.

6. Diasumsikan notasi parameter kontrol yang digunakan sebagai berikut :

θ_1 adalah pengobatan untuk individu yang terinfeksi (*Infected*),

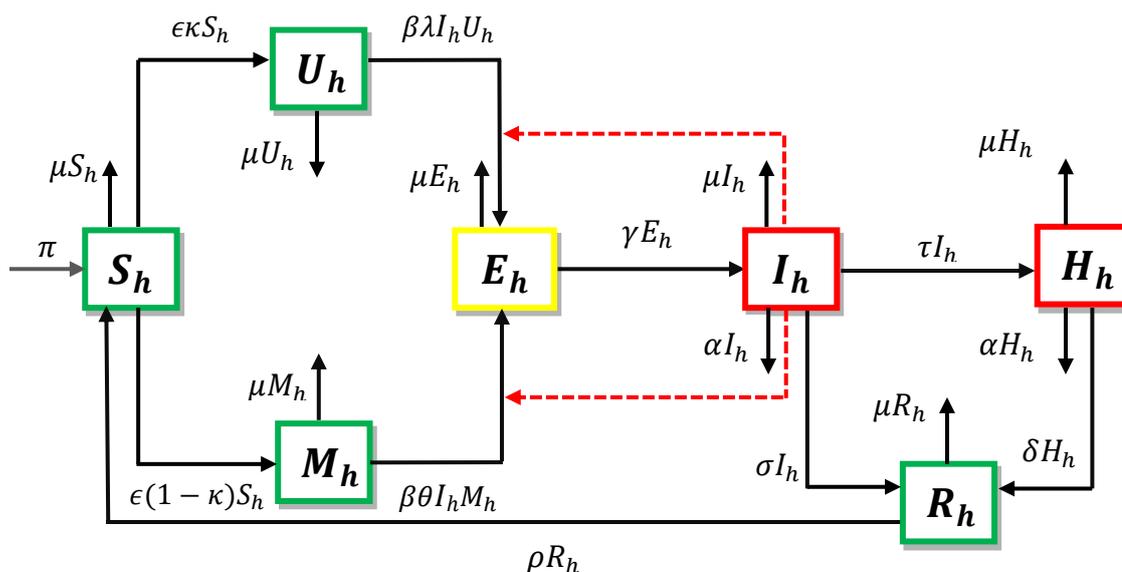
θ_2 adalah penanganan untuk individu yang dirawat di rumah sakit
(*Infected*),

θ_3 adalah vaksinasi untuk individu yang rentan (*Susceptible*).

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Teori Pendukung

2.1.1 Model SMUEIHR

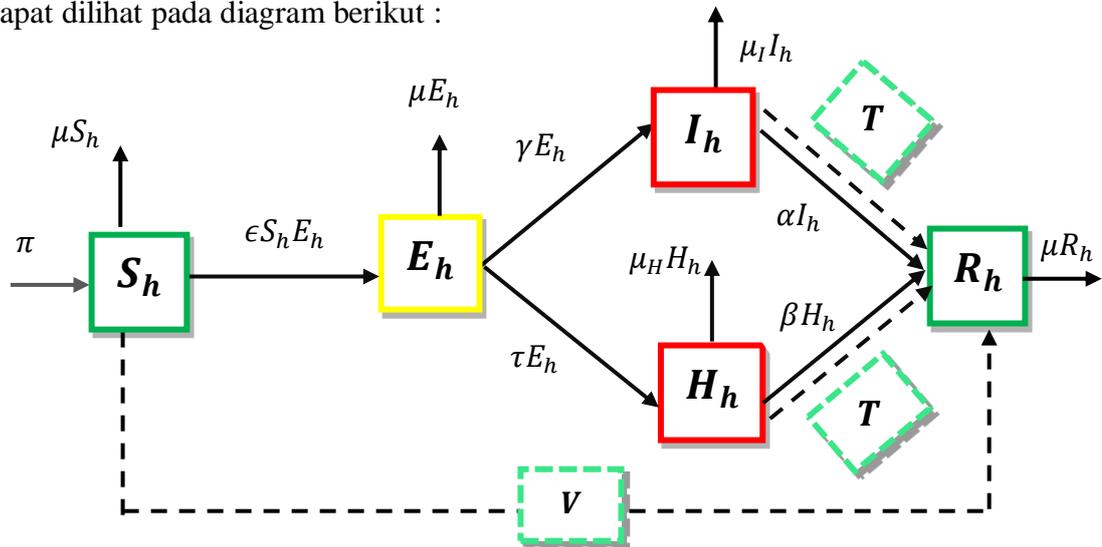


Gambar 2. 1 Diagram Kompartemen Model SMUEIHR

Pada penelitian (Mumbu & Hugo, 2020), model yang terdiri dari 7 subpopulasi yaitu *Susceptible*, *Masked*, *Unmasked*, *Exposed*, *Infected*, *Hospitalized*, *Recovered* (SMUEIHR) yang diformulasikan dengan melibatkan populasi individu. *Susceptible* (S_h) adalah individu yang rentan terinfeksi penyakit, *Masked* (M_h) dan *Unmasked* (U_h) adalah individu yang menggunakan masker dan tidak menggunakan masker. *Exposed* (E_h) yaitu Individu yang mungkin telah tertular penyakit tetapi belum dapat menularkan penyakit. *Infected* (I_h) yaitu individu yang terinfeksi dan dapat menularkan penyakit. *Hospitalized* (H_h) yaitu individu yang membutuhkan perawatan dan pelayanan yang mendukung. *Recovered* (R_h) yaitu individu yang telah sembuh, dimana kelas R akan masuk ke kelas S ketika kekebalannya hilang.

2.1.2 Model SARS-COV2 pada populasi SEIHR

Model SARS-COV2 pada penelitian ini melibatkan variabel SEIHR yang didefinisikan sebagai lima subpopulasi individu dalam suatu ekosistem, yang dapat dilihat pada diagram berikut :



Gambar 2.2 Diagram Kompartemen Model SEIHR

Diagram di atas memiliki lima variabel terikat yang digunakan dalam penyebaran SARS-COV2 adalah model SEIHR (*Susceptibel-Exposed-Infected-Hospitalized-Recovered*) yang diformulasikan dengan melibatkan populasi individu. *Susceptible* (S_h) adalah populasi individu yang rentan terinfeksi atau tertular penyakit, *Exposed* (E_h) yakni populasi individu yang telah menunjukkan gejala terpapar virus SARS-COV2. *Infected* (I_h) yakni populasi individu yang terinfeksi dan dapat menularkan penyakit. *Hospitalized* (H_h) populasi individu terinfeksi yang dirawat di rumah sakit. *Recovered* (R_h) populasi individu yang sehat baik setelah mendapat perawatan medis atau isolasi mandiri di rumah. Sementara itu parameter yang terlibat meliputi: π adalah laju kelahiran, μ adalah laju kematian alami, ϵ adalah laju individu rentan yang terpapar virus, γ sebagai laju populasi yang terinfeksi virus dengan melakukan karantina mandiri di rumah,

μ_I adalah laju kematian individu karena virus di lingkungan *Infected*, τ sebagai laju individu terinfeksi yang dirawat di rumah sakit, μ_H adalah laju kematian individu karena virus di lingkungan *Hospitalized*, α sebagai laju individu yang sembuh setelah terinfeksi dengan melakukan karantina mandiri di rumah, β sebagai laju individu yang sembuh setelah dirawat di rumah sakit.

Berdasarkan Gambar 2.1 di atas akan dijelaskan penurunan model sebagai berikut **Pertama, persamaan pertumbuhan populasi *Susceptible*.**

Populasi *Susceptible* mengalami penambahan karena adanya laju kelahiran alami sebesar π , sehingga dapat dinyatakan. Selanjutnya populasi *Susceptible* mengalami pengurangan selanjutnya karena laju kematian alami sebesar μ . Selanjutnya populasi *Susceptible* mengalami pengurangan karena adanya laju individu yang terpapar sebesar ϵ , Sehingga diperoleh persamaan pada kompartemen *Susceptible* (S_h) sebagai berikut :

$$\frac{dS_h}{dt} = \pi - (\mu + \epsilon E_h)S_h \quad (2.1)$$

Kedua, persamaan pertumbuhan populasi *Exposed*.

Populasi *Exposed* mengalami penambahan karena adanya laju individu yang terpapar virus sebesar ϵ . Selanjutnya populasi *Exposed* ini mengalami pengurangan berikutnya karena kematian alami sebesar μ . Kemudian populasi *Exposed* ini mengalami pengurangan berikutnya disebabkan laju individu terinfeksi sebesar γ . Selanjutnya populasi *Exposed* ini mengalami pengurangan berikutnya disebabkan laju individu terinfeksi yang dirawat di rumah sakit sebesar τ . Sehingga diperoleh persamaan pada kompartemen *Exposed* (E_h) adalah sebagai berikut :

$$\frac{dE_h}{dt} = \epsilon S_h E_h - (\mu + \gamma + \tau) E_h \quad (2.2)$$

Ketiga, persamaan pertumbuhan populasi *Infected*.

Populasi *Infected* mengalami penambahan karena adanya manusia yang terinfeksi sebesar γ . Populasi *Infected* mengalami pengurangan selanjutnya disebabkan adanya kematian karena virus dilingkungan *infected* sebesar μ_I . Selanjutnya populasi *Infected* mengalami pengurangan karena laju individu sembuh setelah terinfeksi sebesar α . Dengan demikian diperoleh persamaan pada kompartemen *Infected* (I_h) adalah sebagai berikut :

$$\frac{dI_h}{dt} = \gamma E_h - (\mu_I + \alpha) I_h \quad (2.3)$$

Keempat, persamaan pertumbuhan populasi *Hospitalized*.

Populasi *Hospitalized* mengalami penambahan karena adanya individu terinfeksi yang dirawat dirumah sakit sebesar τ , selanjutnya mengalami pengurangan disebabkan adanya laju kematian karena virus di lingkungan *hospitalized* sebesar μ_H . Kemudian populasi *Hospitalized* mengalami pengurangan karena laju individu yang sembuh setelah dirawat dirumah sakit β , dengan demikian diperoleh persamaan pada kompartemen H_h adalah sebagai berikut :

$$\frac{dH_h}{dt} = \tau E_h - (\mu_H + \beta) H_h \quad (2.4)$$

Kelima, persamaan pertumbuhan populasi *Recovered*.

Populasi *Recovered* mengalami penambahan karena adanya laju individu yang sembuh setelah terinfeksi sebesar α , selanjutnya mengalami penambahan karena adanya laju individu yang sembuh setelah dirawat di rumah sakit sebesar β , kemudian populasi *Recovered* mengalami pengurangan karena adanya kematian

alami populasi individu sebesar μ , dengan demikian diperoleh persamaan pada kompartemen R_h adalah sebagai berikut :

$$\frac{dR_h}{dt} = \sigma I_h + \delta H_h - \mu R_h \quad (2.5)$$

Berdasarkan faktor – faktor diatas maka diperoleh sistem persamaan differensial untuk model matematika SEIHR sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{dS_h}{dt} &= \pi - (\epsilon E_h + \mu) S_h \\ \frac{dE_h}{dt} &= \epsilon S_h E_h - (\gamma + \tau + \mu) E_h \\ \frac{dI_h}{dt} &= \gamma E_h - (\mu_I + \alpha) I_h \\ \frac{dH_h}{dt} &= \tau E_h - (\mu_H + \beta) H_h \\ \frac{dR_h}{dt} &= \alpha I_h + \beta H_h - \mu R_h \end{aligned} \quad (2.6)$$

Nilai awal dari variabel dan parameter yang digunakan antara lain dituliskan pada Tabel 2.1 dan Tabel 2.2. Nilai awal diperoleh dari rata – rata data Covid-19 Provinsi Jawa Timur (infocovid19.jatimprov.go.id) pada bulan Mei 2021 – Juli 2021

Tabel 2.1 Nilai Awal Variabel Model Matematika SEIHR

No.	Notasi	Definisi	Nilai
1.	$S(0)$	Subpopulasi Individu rentan pada waktu $t = 0$ di Jawa Timur	39.764.734 jiwa
2.	$E(0)$	Subpopulasi individu terpapar virus SARS-COV2 pada waktu $t = 0$ di Jawa Timur	829.797 Jiwa
3.	$I(0)$	Subpopulasi individu terinfeksi pada waktu $t = 0$ di Jawa Timur	147.977 jiwa
4.	$H(0)$	Subpopulasi individu terinfeksi yang dirawat di rumah sakit pada waktu $t = 0$ di Jawa Timur	1.022 jiwa
5.	$R(0)$	Subpopulasi individu yang sembuh pada waktu $t = 0$ di Jawa Timur	135.259 jiwa

Sumber : www.infocovid19.jatimprov.go.id

Tabel 2.2 Nilai Awal Parameter Model Matematika SEIHR

No	Parameter	Definisi	Nilai	Satuan	Sumber
1.	N_h	Jumlah Populasi penduduk Jawa Timur Tahun 2021	40.878.789	Jiwa Perhari	bit.ly/jatim-bps-go-id
2.	π	Laju kelahiran alami	0.0125	Jiwa Perhari	(Armadani, 2021)
3.	μ	Laju kematian alami	0.0002	Jiwa Perhari	Infocovid19.Jatimpro.go.id
4.	μ_I	Laju kematian di lingkungan terinfeksi	0.001	Jiwa Perhari	Infocovid19.jatimprov.go.id
5.	μ_H	Laju kematian di rumah sakit	0.004	Jiwa Perhari	Infocovid19.Jatimprov.go.id
6.	ϵ	Laju individu yang terpapar	0.5944	Jiwa Perhari	(Mumbu & Hugo, 2020)
7.	τ	Laju individu yang dirawat di rumah sakit	0.003	Jiwa Perhari	(Mumbu & Hugo, 2020)
8.	γ	Laju individu terinfeksi	0.02857	Jiwa Perhari	(Mumbu & Hugo, 2020)
9.	α	Laju individu yang sembuh setelah terinfeksi	0.36	Jiwa Perhari	(Mumbu & Hugo, 2020)
10.	β	Laju individu yang sembuh setelah dirawat di rumah sakit	0.58	Jiwa Perhari	(Mumbu & Hugo, 2020)

Sumber : www.infocovid19.jatimprov.go.id, <https://jatim.bps.go.id> & (Mumbu & Hugo, 2020)

Laju Kematian alami pada populasi manusia (μ, μ_I, μ_H) dapat dihitung dengan menggunakan rumus *Crude Death Rate* (Angka Kematian Dasar) yang dinyatakan sebagai :

$$\text{Crude Death Rate (CRD)} = \frac{D}{P} \times 1000$$

dimana :

D = Jumlah Kematian dalam satu tahun (infocovid19.jatimprov.go.id, 2021)

P = Jumlah seluruh penduduk di suatu wilayah dalam satu tahun

1000 = Konstanta

Perhitungan nilai parameter laju kematian alami (μ, μ_I, μ_H) dapat dilakukan dengan cara sebagai berikut :

- a. Parameter laju kematian alami (μ)

$$CDR = \frac{D}{P} \times 1000$$

$$\Leftrightarrow \frac{2446}{40.878.789} \times 1000$$

$$\Leftrightarrow 0,0598$$

Berdasarkan hasil di atas, laju kematian alami di tahun tersebut sebesar 0,0598 per seribu jiwa. Kemudian untuk menemukan laju kematian alami perhari, maka 0,0598 dibagi dengan 365 sehingga diperoleh nilai 0,002. Artinya laju kematian alami pada tahun tersebut sebesar 0,0002 perhari.

- b. Parameter laju kematian alami populasi *Infected* (μ_I)

$$CDR = \frac{D}{P} \times 1000$$

$$\Leftrightarrow \frac{20673}{40.878.789} \times 1000$$

$$\Leftrightarrow 0,5057$$

Berdasarkan hasil di atas, laju kematian alami di tahun tersebut sebesar 0,5057 per seribu jiwa. Kemudian untuk menemukan laju kematian alami perhari, maka 0,5057 dibagi dengan 365 sehingga diperoleh nilai 0,001. Artinya laju kematian alami pada tahun tersebut sebesar 0,001 perhari.

- c. Parameter laju kematian alami populasi *Hospitalized* (μ_H)

$$CDR = \frac{D}{P} \times 1000$$

$$\Leftrightarrow \frac{56380}{40.878.789} \times 1000$$

$$\Leftrightarrow 1,3792$$

Berdasarkan hasil di atas, laju kematian alami di tahun tersebut sebesar 1,3792 per seribu jiwa. Kemudian untuk menemukan laju kematian alami perhari, maka 1,3792 dibagi dengan 365 sehingga diperoleh nilai 0,004. Artinya laju kematian alami pada tahun tersebut sebesar 0,004 perhari.

Berdasarkan perhitungan tersebut diperoleh nilai parameter laju kematian alami (μ), laju kematian alami populasi *Infected* (μ_I), laju kematian alami populasi *Hospitalized* (μ_H) masing-masing sebesar 0,0002; 0,001 dan 0,004.

2.1.3 Sifat Dasar Model SEIHR

Berdasarkan (Tadesse Ega, 2015) dan (Asamoah, 2017), populasi secara biologi sangat berarti jika solusi globalnya ditemukan dalam daerah invariant.

Teorema 2.1 Himpunan solusi $\{S_h(t), E_h(t), I_h(t), H_h(t), R_h(t)\}$ dari model sistem persamaan (2.7) adalah terbatas pada daerah yang positif ϕ .

Bukti : andaikan bahwa daerah yang positif

$\phi = \{S_h(t), E_h(t), I_h(t), H_h(t), R_h(t)\} \in R_+^5$ untuk $\forall t \geq 0$. Pada waktu (t),

persamaan (2.6) total populasi manusia sebagai berikut

$$N_h(t) = S_h(t) + E_h(t) + I_h(t) + H_h(t) + R_h(t) \quad (2.7)$$

Jika kita persamaan (2.7) didiferensialkan pada waktu ke t maka

$$\frac{dN_h}{dt} = \frac{dS_h}{dt} + \frac{dE_h}{dt} + \frac{dI_h}{dt} + \frac{dH_h}{dt} + \frac{dR_h}{dt} \quad (2.8)$$

Kemudian, dengan mensubstitusikan persamaan (2.6) ke (2.8)

$$\begin{aligned}
\frac{dN_h}{dt} &= [\pi - (\epsilon E_h + \mu)S_h] + [\epsilon S_h E_h - (\mu + \gamma + \tau)E_h] + [\gamma E_h - (\mu_l + \alpha)I_h] \\
&\quad + [\tau E_h - (\mu_l + \beta)H_h] + [\alpha I_h + \beta H_h - \mu R_h] \\
\frac{dN_h}{dt} &= \pi - [S_h(t) + E_h(t) + I_h(t) + H_h(t) + R_h(t)]\mu \\
\frac{dN_h}{dt} &= \pi - \mu N_h(t) \tag{2.9}
\end{aligned}$$

Selanjutnya pertidaksamaan (2.9) diintegrasikan terhadap N dan t , sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\int \frac{dN_h(t)}{\pi - \mu N_h(t)} &= \int dt \\
-\frac{1}{\mu} \ln|\pi - \mu N_h(t)| &= (t + A), A \in \mathbb{R} \\
\frac{1}{\mu} \ln|\pi - \mu N_h(t)| &= -(t + A) \\
\ln|\pi - \mu N_h(t)| &= -\mu(t + A) \\
\pi - \mu N_h(t) &= e^{-\mu(t+A)} \\
\pi - \mu N_h(t) &= e^{-\mu t} e^{-\mu A}
\end{aligned}$$

dimana $e^{-\mu A} = C$

$$\pi - \mu N_h(t) = C e^{-\mu t}$$

Jika $N_h(t) = N(0) \Rightarrow t = 0$. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}
\pi - \mu N_h(0) &= C \\
(\pi - \mu N_h(t)) &= (\pi - \mu N_h(0)) e^{-\mu t} \\
\frac{\pi}{\mu} - N_h(t) &= \frac{(\pi - \mu N_h(0))}{\mu} e^{-\mu t} \\
\frac{\pi}{\mu} - \frac{(\pi - \mu N_h(0))}{\mu} e^{-\mu t} &= N_h(t)
\end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{\mu} - \frac{(\pi - \mu N_h(0))}{\mu} e^{-\mu t} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} (N_h(t))$$

Mengakibatkan bahwa

$$0 \leq N_h(t) \leq \frac{\pi}{\mu}$$

Maka dapat disimpulkan bahwa semua solusi di persamaan model (2.6),

diperoleh daerah yang diberikan oleh himpunan berikut :

$$\phi = \left\{ [S_h(t); E_h(t); I_h(t); H_h(t); R_h(t)] \in R_+^5 : 0 \leq N_h(t) \leq \frac{\pi}{\mu} \right\}$$

untuk $\{[S_h(0), E_h(0), I_h(0), H_h(0), R_h(0)] \geq 0\} \in \phi$.

2.1.4 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas suatu fungsi (Ross, 1984). Persamaan diferensial berdasarkan turunan variable terbagi menjadi dua macam yaitu : persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial biasa merupakan turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas.

Persamaan diferensial biasa orde n berbentuk : $F(t, y, \dot{y}, \dots, (\dot{y})^n) = 0$.

Suatu persamaan diferensial biasa linear orde ke n dikatakan linier jika memenuhi kaidah penulisan sebagai berikut :

$$P_0 y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + \dots + P_{n-1} \dot{y} + P_n y = F(t) \quad (2.10)$$

dengan P_i untuk $i = 0, 1, \dots, n$ merupakan konstanta dan $F(t)$ adalah fungsi yang bergantung terhadap variabel x yang kontinu pada interval terbuka I (Maya, 2014).

Ciri-ciri dari persamaan diferensial linear sebagai berikut :

- a. Variabel tak bebas dan turunannya berderajat satu
- b. Tidak ada perkalian antara variabel-variabel tak bebas, dan turunannya
- c. Variabel tak bebas maupun turunanannya bukan termasuk fungsi transenden: trigonometri, eksponensial, logaritma.

Apabila suatu persamaan diferensial tidak memiliki ciri-ciri tersebut maka dinamakan persamaan diferensial nonlinear. Sistem persamaan diferensial adalah kumpulan beberapa persamaan differensial (Ross, 1984). Secara matematis, sistem persamaan diferensial dapat ditulis dalam bentuk:

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \quad (2.11)$$

Dengan

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}; \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

dengan x_1, x_2, \dots, x_n adalah variabel terikat dan t adalah variabel bebas, sehingga $\frac{dx_n}{dt}$ yakni turunan fungsi x_n terhadap t dan f_n adalah fungsi yang tergantung pada variabel x_1, x_2, \dots, x_n dan t (Kartono, 2012). Penyelesaian sistem persamaan differensial bisa ditemukan dengan analitik atau numerik. Apabila penyelesaian tidak mungkin diselesaikan secara analitik maupun numerik, maka dapat menggunakan analisis kualitatif dengan cara mengecek kestabilan titik kesetimbangan untuk mengetahui perilaku dari sistem tersebut (Manaqib et al., 2019).

Suatu sistem persamaan diferensial dikatakan linear jika sistem tersebut terdiri dari lebih dari satu persamaan linear yang saling terkait. Sedangkan sistem persamaan diferensial dikatakan nonlinear apabila sistem tersebut terdiri dari dua atau lebih persamaan nonlinear yang saling terkait (Boyce & DiPrima, 2001). Salah satu contoh dari bentuk sistem persamaan diferensial adalah model matematika SEIHR yaitu sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\frac{dS_h}{dt} &= \pi - (\epsilon E_h + \mu)S_h \\ \frac{dE_h}{dt} &= \epsilon S_h E_h - (\gamma + \tau + \mu)E_h \\ \frac{dI_h}{dt} &= \gamma E_h - (\mu_I + \alpha)I_h \\ \frac{dH_h}{dt} &= \tau E_h - (\mu_H + \beta)H_h \\ \frac{dR_h}{dt} &= \alpha I_h + \beta H_h - \mu R_h\end{aligned}\tag{2.13}$$

Dengan S, E, I, H, R adalah variabel terikat dan t adalah variabel bebas, sehingga dapat dapat dinyatakan dengan $S(t), E(t), I(t), H(t)$ dan $R(t)$.

2.1.5 Analisis Dinamik

Analisis perilaku suatu sistem persamaan diferensial pada model matematika dilakukan dengan melakukan analisis dinamik. Analisis perilaku dinamik dilakukan untuk mengetahui valid atau tidaknya suatu model matematika. Kestabilan pada model matematika dapat dilakukan dengan analisis pada titik kesetimbangan, selanjutnya dengan menghitung nilai eigen dari persamaan model matematika akan diketahui jenis kestabilannya (Boyce dan Di Prima, 2001).

a. Linierisasi

Linierisasi adalah proses pendekatan persamaan diferensial non-linier dengan persamaan linier untuk membantu memahami persamaan diferensial non-linier (Boyce & DiPrima, 2001). Berikut linierisasi yang dilakukan pada sistem (2.14) dan dapat dimisalkan dengan,

$$\begin{aligned}\frac{dS_h}{dt} &= \pi - (\epsilon E_h + \mu)S_h = f_1(S, E, I, H, R) \\ \frac{dE_h}{dt} &= \epsilon S_h E_h - (\gamma + \tau + \mu)E_h = f_2(S, E, I, H, R) \\ \frac{dI_h}{dt} &= \gamma E_h - (\mu_l + \alpha)I_h = f_3(S, E, I, H, R) \\ \frac{dH_h}{dt} &= \tau E_h - (\mu_H + \beta)H_h = f_4(S, E, I, H, R) \\ \frac{dR_h}{dt} &= \alpha I_h + \beta H_h - \mu R_h = f_5(S, E, I, H, R)\end{aligned}\tag{2.14}$$

Kemudian, terdapat $(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0)$ yang merupakan titik kesetimbangan dari sistem persamaan non-linier (2.14). Karena itu dilakukan pendekatan disekitar titik $(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0)$ dengan mengekspansi menurut deret Taylor untuk menghilangkan suku tak linier. Misalkan, digunakan titik kesetimbangan $(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0) = (0,324; 0; 0; 0; 0)$. Berikut linierisasi pada sistem persamaan (2.14),

$$\begin{aligned}f_1(S, E, I, H, R) &\approx f_1(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0) + \frac{\delta f_1}{\delta S}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0)(S - S_0) \\ &\quad + \frac{\delta f_1}{\delta E}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0)(E - E_0) \\ &\quad + \frac{\delta f_1}{\delta I}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0)(I - I_0) \\ &\quad + \frac{\delta f_1}{\delta R}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0)(R - R_0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\delta f_1}{\delta H}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0)(R - R_0) \\
f_2(S, E, I, H, R) & \approx f_2(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0) + \frac{\delta f_2}{\delta S}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0)(S - S_0) \\
& + \frac{\delta f_2}{\delta E}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0)(E - E_0) \\
& + \frac{\delta f_2}{\delta I}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0)(I - I_0) \\
& + \frac{\delta f_2}{\delta R}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0)(H - H_0) \\
& + \frac{\delta f_2}{\delta H}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0)(R - R_0) \\
f_3(S, E, I, H, R) & \approx f_3(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0) + \frac{\delta f_3}{\delta S}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0)(S - S_0) \\
& + \frac{\delta f_3}{\delta E}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0)(E - E_0) \\
& + \frac{\delta f_3}{\delta I}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0)(I - I_0) \tag{2.15} \\
& + \frac{\delta f_3}{\delta R}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0)(H - H_0) \\
& + \frac{\delta f_3}{\delta H}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0)(R - R_0) \\
f_4(S, E, I, H, R) & \approx f_4(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0) + \frac{\delta f_4}{\delta S}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0)(S - S_0) \\
& + \frac{\delta f_4}{\delta E}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0)(E - E_0) \\
& + \frac{\delta f_4}{\delta I}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0)(I - I_0) \\
& + \frac{\delta f_4}{\delta R}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0)(H - H_0) \\
& + \frac{\delta f_4}{\delta H}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0)(R - R_0) \\
f_5(S, E, I, H, R) & \approx f_5(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0) + \frac{\delta f_5}{\delta S}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0)(S - S_0) \\
& + \frac{\delta f_5}{\delta E}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0)(E - E_0) \\
& + \frac{\delta f_5}{\delta I}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0)(I - I_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\delta f_5}{\delta R}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0)(H - H_0) \\
& + \frac{\delta f_5}{\delta H}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0)(R - R_0)
\end{aligned}$$

Selanjutnya, sistem persamaan (2.15) dapat ditulis ke dalam bentuk matriks yaitu,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = A_0 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} \text{ dimana } A = \begin{pmatrix} f_{1(S)} & f_{1(E)} & f_{1(I)} & f_{1(H)} & f_{1(R)} \\ f_{2(S)} & f_{2(E)} & f_{2(I)} & f_{2(H)} & f_{2(R)} \\ f_{3(S)} & f_{3(E)} & f_{3(I)} & f_{3(H)} & f_{3(R)} \\ f_{4(S)} & f_{4(E)} & f_{4(I)} & f_{4(H)} & f_{4(R)} \\ f_{5(S)} & f_{5(E)} & f_{5(I)} & f_{5(H)} & f_{5(R)} \end{pmatrix}$$

Atau

$$\begin{aligned}
& A_0 \\
& = \begin{pmatrix} -\epsilon E_0 - \mu & -\epsilon S_0 & 0 & 0 & 0 \\ \epsilon E_0 & \epsilon S_0 - \mu - \gamma - \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu_I - \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \tau & 0 & -\mu_H - \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & -\mu \end{pmatrix} \quad (2.16)
\end{aligned}$$

Matriks A_0 (2.16) adalah matriks Jacobi yang berukuran 5x5. Jumlah persamaan pada sistem persamaan diferensial dalam model matematika yang digunakan berperan penting dalam menentukan ukuran matriks Jacobi. Matriks Jacobi ini dapat digunakan untuk menghitung kestabilan dari model matematika yang digunakan (Hadiningsih, 2010).

b. Titik Keseimbangan

Titik keseimbangan suatu sistem adalah titik keseimbangan yang membuat tidak terjadi perubahan terhadap waktu (Sulisti, dkk 2014). Suatu sistem persamaan diferensial orde satu $\dot{x} = f(x)$, yang terdapat solusi, dengan nilai awal $x(0) = x_0$. Suatu vektor \bar{x} yang memenuhi $f(\bar{x}) = 0$ disebut titik

kesetimbangan (Boyce et al., 2017). Yang berarti nilai titik kesetimbangan dapat diperoleh dengan melakukan substitusi ke titik lainnya.

Titik kesetimbangan terdiri dari dua jenis yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Titik kesetimbangan bebas penyakit adalah titik kesetimbangan dimana tidak terjadi infeksi penyakit. Sedangkan titik kesetimbangan endemik yaitu titik kesetimbangan dimana terja di infeksi dalam sebuah populasi individu. Misalkan diberikan sistem persamaan diferensial nonlinear berikut :

$$\dot{x} = 6x + x^2 - 3xy$$

$$\dot{y} = -3y + xy$$

Berdasarkan definisi (Boyce et al., 2017) maka $\dot{y} = 0$

$$-3y + xy = 0$$

$$y(-3 + x) = 0$$

Sehingga diperoleh $y = 0$ dan $x = 3$. Substitusikan $y = 0$ ke persamaan $\dot{x} = 0$ maka diperoleh

$$6x + x^2 - 3x(0) = 0$$

$$x(6 + x) = 0$$

$$x = 0 \text{ atau } x = -6$$

saat $x = 3$, diperoleh

$$6(3) + (3)^2 - 3(3)(y) = 0$$

$$18 + 9 = 9y$$

$$27 = 9y$$

$$y = 3$$

Maka diperoleh titik kesetimbangan dari sistem persamaan diferensial yakni $(-6,0)$ dan $(3,3)$.

c. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Jika A adalah matriks $n \times n$, maka sebuah vektor tak nol x dinamakan vektor eigen (*eigen vector*) dari A apabila Ax adalah sebuah kelipatan skalar dari x , maka dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$Ax = \lambda x \quad (2.17)$$

Skalar λ disebut nilai eigen (*eigen value*) dari A dan x disebut sebagai vektor eigen yang bergantung dengan λ . Kemudian, nilai eigen dapat diperoleh dengan persamaan (2.17). lalu, dapat dituliskan kembali $Ax = \lambda x$ sebagai berikut (Waluya, 2006)

$$(\lambda I - A)x = 0 \quad (2.18)$$

Dengan I adalah matriks identitas, untuk mendapatkan nilai eigen dari λ , maka perlu dicari solusi bukan nol dari persamaan (2.18) jika dan hanya jika

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (2.19)$$

Persamaan polinomial terhadap variable λ dapat diperoleh berdasarkan persamaan (2.19). Skalar λ yang memenuhi persamaan karakteristik yang tak lain adalah nilai eigen dari A .

d. Sifat Kestabilan Titik Kesetimbangan

Sifat kestabilan titik kesetimbangan dapat digunakan untuk mengetahui penyelesaian sistem persamaan diferensial. Penyelesaian kestabilan titik kesetimbangan dapat diselesaikan secara analitik maupun numerik. Secara

umum titik kesetimbangan memiliki beberapa syarat yaitu sebagai berikut (Boyce & Diprima, 2001),

Tabel 2.3 Jenis Kestabilan Titik kesetimbangan Sistem Linier

Nilai Eigen	Jenis Titik kesetimbangan (x^*, y^*)	Kestabilan Titik kesetimbangan
$\lambda_{1,2} > 0$	Titik simpul (node)	Tidak stabil
$\lambda_{1,2} < 0$	Titik simpul (node)	Stabil asimtotik
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Titik Pelana (Saddle)	Tidak Stabil
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Tidak bintang (Star)	Tidak Stabil
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Titik Simpul (Node)	Stabil asimtotik
$\lambda_{1,2} = k \pm bi$	Titik Spiral	
$k > 0$		Tidak Stabil
$k < 0$		Stabil asimtotik
$k = 0$	Titik pusat (Center)	Stabil

e. Kriteria Routh – Hurwitz

Untuk beberapa masalah, mungkin sulit untuk mengamati stabilitas pada titik kesetimbangan karena bentuk asli dari nilai eigen adalah kompleks dan cukup sulit untuk menentukan bagian realnya. Oleh karena itu, digunakan suatu metode yang dapat menentukan bagian real dari nilai eigen untuk mengidentifikasi jenis kestabilan pada titik setimbang. Salah satunya adalah metode Routh-Hurwitz. Apakah bagian real dari nilai eigen tersebut bernilai positif atau negatif. Sehingga titik kesetimbangan tersebut dapat ditentukan kestabilannya (Hahn, 1967).

Diberikan suatu sistem persamaan karakteristik dalam bentuk polinomial sebagai berikut (Keshet, 2005) :

$$P(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0 \quad (2.20)$$

jika persamaan (2.20) mempunyai bagian real negatif maka,

$$\frac{a_1}{a_0} > 0, \frac{a_2}{a_0} > 0, \dots, \frac{a_n}{a_0} > 0 \quad (2.21)$$

Dimana $a_0 = 1$ dan $a_n \neq 0$ dengan $n = 1, 2, \dots, n$ adalah bilangan real.

Persamaan (2.20) dapat ditulis dalam bentuk Matriks Hurwitz (H) yang berbentuk bujur sangkar berukuran $n \times n$ sebagai berikut:

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \dots & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & a_n \end{bmatrix}$$

Determinan Hurwitz tingkat ke- k , dinotasikan dengan Δ_k , $k = 1, 2, \dots, n$.

Determinan tersebut ditulis dalam bentuk matriks Hurwitz sebagai berikut :

$$\Delta_1 = [a_1]$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_n = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \dots & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & a_n \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik (2.20) memiliki bagian real negatif jika hanya jika pertidaksamaan (2.21) dipenuhi dan $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_n > 0$ (Grantmacher, 1959).

Sehingga dapat dikatakan berdasarkan kriteria kestabilan *Hurwitz* tersebut bahwa sistem persamaan karakteristik (2.20) stabil.

Persamaan (2.20) dapat ditulis dalam bentuk *Routh Array* (Runtun-Routh), yang ditulis dalam bentuk tabel, sebagai berikut (Morris, 1962) :

Tabel 2. 4 Routh Array

λ^n	a_0	a_2	a_4		a_6	...	0
λ^{n-1}	a_1	a_3	a_5		a_7	...	0
λ^{n-2}	b_1	b_2	b_3		0	...	0
λ^{n-3}	c_1	c_2	c_3		0	...	0
λ^{n-4}	d_1	d_2	d_3		0	...	0
\vdots	\vdots	\vdots					
λ^2	f_1	f_3					
λ^1	g_1						
λ^0	h_1						

Perhatikan bahwa, tabel pada baris pertama dan kedua berasal dari persamaan karakteristik (2.3). Baris ketiga kebawah mengikuti pola dari rumus berikut:

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} & b_2 &= \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} & b_n &= \frac{a_1 a_{2n} - a_0 a_{2n+1}}{a_1} \\
 c_1 &= \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} & c_2 &= \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1} & c_n &= \frac{b_1 a_{2n+1} - a_1 a_{n+1}}{b_1} \\
 d_1 &= \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1} & d_2 &= \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1} & d_n &= \frac{c_1 b_{n+1} - b_1 c_{n+1}}{c_1} \\
 &\vdots & & & &
 \end{aligned}$$

Pola tersebut tetap dilakukan, sampai semua koefisien diperoleh dan membentuk matriks setengah piramida terbalik. Dapat ditunjukkan bahwa kriteria kestabilan *Routh* identik dengan kriteria kestabilan *Hurwitz*. Perhatikan pernyataan berikut,

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, c_1 = \frac{b_1 b_2 - b_0 b_3}{b_1} = \frac{\Delta_3}{\Delta_2 / \Delta_1} = \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \dots \quad (2.23)$$

Kriteria kestabilan *Routh* dapat ditulis sebagai berikut:

1. Persamaan karakteristik (2.20) memiliki akar bernilai negatif atau berupa bilangan real negatif, jika semua koefisien dari kolom pertama Tabel 2.4 bernilai positif.
2. Jika terdapat satu atau lebih koefisien kolom pertama dari Tabel 2.3, maka sistem tersebut tidak stabil.

Berikut ini kasus untuk orde lima ($n = 5$) yang dapat dibentuk dari kriteria kestabilan Hurwitz :

Sistem orde lima persamaan karakteristik mempunyai bentuk,

$$a_0\lambda^5 + a_1\lambda^4 + a_2\lambda^3 + a_3\lambda^2 + a_4\lambda^1 + a_5 = 0 \quad (2.24)$$

Kriteria Hurwitz orde lima berdasarkan (Joseph J. Distefano, 1990) sebagai berikut :

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_1 & a_5 & a_4 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 \end{vmatrix} \quad (2.25)$$

$$\Delta_1 = a_1 > 0,$$

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0,$$

$$\Delta_3 = a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) + a_0 a_1 a_5 - a_1^2 a_4 > 0$$

$$\Delta_4 = a_4(a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 + 2(a_0 a_1 a_5) - a_1^2 a_4) + a_0 a_2 a_3 a_5 - a_1 a_2^2 a_5 - a_0^2 a_5^2 > 0$$

$$\Delta_5 = a_5(a_4(a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 + 2(a_0 a_1 a_5) - a_1^2 a_4) + a_0 a_2 a_3 a_5 - a_1 a_2^2 a_5 - a_0^2 a_5^2) > 0$$

Berdasarkan (Wiggers et al., 1914) kondisi stabil asimtotik pada sistem orde lima ketika semua bagian akar real negatif jika dan hanya jika memenuhi syarat sebagai berikut :

$$a_i > 0 \text{ untuk } i = 0,1,2,3,4,5$$

$$\text{dan } \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \Delta_5 > 0$$

f. Matriks Generasi Selanjutnya

Pendekatan matriks generasi selanjutnya didasarkan pada pengamatan karakteristik bilangan reproduksi dasar dengan mengasumsikan bahwa penularan penyakit terjadi pada keturunan. Pada saat lahir individu baru yang juga terinfeksi. Ini berarti bahwa proses infeksi dikaitkan dengan proses demografis dari generasi yang terus terinfeksi (Boyce & Dprima, 2001). Epidemologi dapat terjadi karena jumlah generasi berikutnya melonjak. Berikut ini langkah – langkah penerapan matriks generasi selanjutnya :

1. Persamaan diferensial biasa dibuat sedemikian hingga n kompartemen pertama dari sistem persamaan diferensial biasa sesuai dengan kompartemen terinfeksi. Sistem persamaan diferensial dapat ditulis seperti berikut :

$$\begin{aligned}x'_k &= f_k(x, y) \\ y'_k &= g_j(x, y)\end{aligned}\tag{2.26}$$

2. Persamaan pada rumus kanan dapat dipisah menjadi

$$\begin{aligned}x'_k &= f_k(x, y) - V_k(x, y) & k = 1, 2, \dots, n \\ y'_k &= f_k(x, y) & j = 1, 2, \dots, n\end{aligned}\tag{2.27}$$

Dengan $F_k(x, y)$ merupakan tingkat kemunculan infeksi pada kompartemen k dan $V_k(x, y)$ merupakan transisi lainnya yaitu kelahiran, perkembangan, kematian, penyakit dan kesembuhan. Diasumsikan $y' = g(0, y)$ mempunyai titik kesetimbangan $\epsilon_{0,j} = (0, y_0)$ sehingga semua keadaan dengan nilai awal berbentuk $(0, y)$ mendekati $(0, y_0)$ maka didapatkan

$$F = \frac{\partial F_k(x, y)}{\partial x_j}, \quad V = \frac{\partial V_k(x, y)}{\partial x_j}\tag{2.28}$$

Dimana $F_k(x, y)$ dan $V_k(x, y)$ merupakan linierisasi dari bentuk persamaan (2.27) disekitar titik kesetimbangan, sehingga matriks k didefinisikan sebagai (Martcheva, 2015).

$$k = FV^{-1} \quad (2.29)$$

g. Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Bilangan reproduksi dasar adalah ambang batas penularan penyakit yang diakibatkan oleh individu terinfeksi dalam suatu populasi rentan yang terinfeksi, yang dinotasikan dengan R_0 (Driessche, 2017). Bilangan reproduksi berfungsi untuk menentukan apakah suatu daerah terjadi endemik atau tidak. Parameter R_0 mempunyai mempunyai nilai ambang batas 1. Berikut salah satu diantara kemungkinan kondisi yang akan terjadi (Blyuss & Kyrychko, 2005):

1. Apabila $R_0 < 1$, maka penyakit diperkirakan akan hilang.
2. Apabila $R_0 > 1$, maka penyakit akan meningkat menjadi wabah.
3. Apabila $R_0 = 1$, penyakit akan menetap (endemik).

Bilangan reproduksi dasar dapat ditentukan dengan mencari radius spectral atau nilai eigen terbesar dari suatu matriks yang disebut *Next Generation Matrix*. Radius spektral dari matriks A ditentukan sebagai maksimum dari nilai mutlak nilai eigen matrik A :

$$\rho(A) = \sup|\lambda|, \lambda \in \sigma(A)$$

Dimana $\sigma(A)$ adalah himpunan nilai eigen dari A . Sehingga bilangan reproduksi dasar dapat didefinisikan *eigen value* positif terbesar dari matriks generasi selanjutnya yang dinyatakan sebagai berikut :

$$R_0 = \rho(FV^{-1}) \quad (2.30)$$

Dimana ρ adalah *eigen value* dominan (Martcheva, 2015). Apabila $R_0 < 1$, maka titik kesetimbangan bebas penyakit adalah satu – satunya titik kesetimbangan, dan bersifat stabil asimtotik lokal. Dan jika $R_0 > 1$ maka terdapat dua titik kesetimbangan : titik kesetimbangan bebas penyakit, dan titik kesetimbangan endemik, dimana titik kesetimbangan endemik bersifat stabil asimtotik lokal. (Martcheva, 2015)

Analisis terhadap kondisi ambang batas dibutuhkan untuk mendapati parameter apa saja yang harus dikendalikan agar tidak terjadi endemik. Berikut analisis untuk memperoleh nilai R_0 agar tidak terjadi endemik sebagai berikut :

1. Memilih semua nilai yang menunjukkan infeksi dan perubahan populasi dari sistem persamaan.
2. Melakukan linearisasi yang direpresentasikan dengan suatu matriks Jacobian (J). Linearisasi dilakukan pada kompartemen yang terinfeksi saat titik kesetimbangan bebas penyakit.
3. Melakukan dekomposisi terhadap matriks Jacobi (J) menjadi matriks Transmisi (F) dan matriks Transisi (V). Matriks Transisi merupakan suatu matriks dengan dengan entri yang menggambarkan terjadinya sebuah infeksi baru. Matriks transmisi merupakan suatu matriks dengan entri yang menggambarkan adanya suatu perubahan pada populasi yang terinfeksi.
4. Menghitung R_0 dengan $R_0 = \rho(FV^{-1})$.

2.1.6 Kontrol Optimal

Kontrol optimal merupakan model optimasi untuk menentukan nilai parameter kontrol yang digunakan dalam sistem dinamik agar fungsi kendala (*constrain*) terpenuhi dengan tujuan memaksimalkan dan meminimumkan fungsi objektif (Lewis et al., 2012). Fungsi objektif meliputi parameter kontrol $u(t)$ dan variabel state $x(t)$ yang akan dioptimalkan. Secara umum, persamaan masalah kontrol optimal dirumuskan sebagai berikut :

Maksimum

$$G(t) = L(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} M(x(t), u(t), t) dt \quad (2.31)$$

dengan kendala $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$

Dengan kondisi awal $x(t_0) = x_0$, kondisi akhir $x(t_f) = x_f$ dan fungsi control $u(t)$ bergantung waktu t . Perlu diketahui bahwa L, M dan f adalah fungsi skalar, sedangkan t_0 adalah waktu awal dan t_f adalah waktu akhir pemberian kontrol. Diperlukan metode lain yaitu Metode Prinsip Maksimum Pontryagin untuk menyelesaikan masalah kontrol optimal yang sifatnya nonlinier (Lewis et al., 2012). Sebagai contoh, dipaparkan penelitian (Mandal et al., 2020) yang menjelaskan tentang pembahasan kontrol optimal beserta proses hitungannya sebagai berikut :

1. Merujuk pada penelitian (Mandal et al., 2020) Masalah kontrol optimal yang dirumuskan sebagai berikut :

$$\min_{M \in \Omega} J(M) = \int_0^{t_f} [\zeta_1 I(t) + \zeta_2 M(t)] dt$$

dimana ζ_1 menunjukkan jumlah populasi *infected* dan ζ_2 menunjukkan kebijakan terkait *lockdown*.

2. Menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin dalam memperoleh kondisi yang dibutuhkan saat kontrol optimal. Didefinisikan fungsi lagrangian sebagai berikut :

$$L(I, M) = \zeta_1 I(t) + \zeta_2 M(t)$$

Dengan fungsi Hamilton yang didefinisikan sebagai:

$$H(I, M, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$$

$$= L(I, M) + \lambda_1(t) \frac{dS}{dt} + \lambda_2(t) \frac{dE}{dt} + \lambda_3(t) \frac{dQ}{dt} + \lambda_4(t) \frac{dI}{dt} + \lambda_5(t) \frac{dR}{dt}$$

3. Menentukan nilai maksimum dari fungsi Hamilton terhadap variabel kontrol sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta H}{\delta M} \right) = \frac{d}{dt} (\zeta_2 + (\lambda_5 - \lambda_1)pS) = -\dot{\lambda}_1 pS - \lambda_1 p\dot{S} + \dot{\lambda}_5 pS + \lambda_5 p\dot{S} \\ &= kE((\lambda_5 - \lambda_1) - o\lambda_1)pS + (A - kSE + b_1Q - oS)(\lambda_5 - \lambda_1) + poS\lambda_5 \end{aligned}$$

4. Menentukan fungsi Hamilton dengan melakukan turunan kedua dikarenakan parameter M belum eksplisit sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2}{d^2t} \left(\frac{\delta H}{\delta M} \right) = [k(E(\dot{\lambda}_2 - \dot{\lambda}_1) + (\lambda_2 - \lambda_1)\dot{E}) - o\dot{\lambda}_1]pS \\ &\quad + (kSE(\lambda_2 - \lambda_1) - o\lambda_1)p\dot{S} + (A - k(SE + \dot{E}S) + b_1\dot{Q} - o\dot{S}) \\ &\quad (\lambda_5 - \lambda_1)p + (A - kSE + b_1Q - oS)(\dot{\lambda}_5 - \dot{\lambda}_1)p + poS\dot{\lambda}_5 + po\dot{S}\lambda_5 \end{aligned}$$

dimana $k = \beta(1 - \rho_1)(1 - \rho_2)$

5. Menentukan parameter kontrol dengan menggunakan persamaan *state* dan *co-state* sehingga dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\frac{d^2}{d^2t} \left(\frac{\delta H}{\delta M} \right) = \phi_1(t)M(t) + \phi_2(t) = 0$$

Kemudian diperoleh penyelesaian kontrol singular sebagai berikut :

$$M_{singular}(t) = -\frac{\phi_2(t)}{\phi_1(t)}$$

dengan $\phi_1(t) \neq 0$ dan $\alpha \leq -\frac{\phi_2(t)}{\phi_1(t)} \neq b$.

6. Menentukan kondisi kontrol optimal pada interval nontrivial sebagai berikut :

$$\text{Jika } \frac{\partial H}{\partial M} < 0 \text{ maka } M^*(t) = b$$

$$\text{Jika } \frac{\partial H}{\partial M} > 0 \text{ maka } M^*(t) = b$$

$$\text{Jika } \frac{\partial H}{\partial M} = 0 \text{ maka } M_{singular}(t) = -\frac{\phi_2(t)}{\phi_1(t)}$$

Sehingga kontrol optimal dipenuhi oleh $\phi_1(t) < 0$ dan $\alpha \leq -\frac{\phi_2(t)}{\phi_1(t)} \leq b$

Prinsip Maksimum Pontryagin

Prinsip Maksimum Pontryagin yaitu suatu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah kontrol optimal yang umumnya bersifat nonlinier. Berikut adalah langkah – langkah menyelesaikan kontrol optimal dengan prinsip maksimum pontryagin (Naidu, 2002).

1. Membentuk fungsi Hamilton

$$\begin{aligned} H(x, (t), u(t), \lambda(t), t) \\ = M(x(t), u(t), \lambda(t), t) + \lambda'(t)f(x(t).u(t).\lambda(t).t) \end{aligned}$$

2. Menentukan nilai maksimum H terhadap semua vektor kontrol

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

Kemudian diperoleh nilai dari kontrol optimal $u^*(t)$ yang memungkinkan dengan

$$u^*(t) = h(x^*(t), \lambda^*(t), t)$$

3. Sehingga didapatkan fungsi Hamilton optimal H^* dengan menggunakan $u^*(t)$ yang dihasilkan pada langkah 2, yaitu

$$H^*(t)(x^*(t), h(x^*(t), \lambda^*(t), t), \lambda^*(t), t) = H^*(x^*(t), \lambda^*(t), t)$$

4. Menghitung persamaan *state* dan *costatonya*

$$x^*(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad \text{dan} \quad \lambda^*(t) = \frac{\partial H}{\partial x}$$

Kondisi awal x_0 dan kondisi akhir x_f , sehingga didapatkan

$$\left[H^* + \frac{\partial S}{\partial t} \right]_{t_f} \delta t_f + \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right) - \lambda^*(t) \right]_{t_f}' \delta x_f = 0$$

5. Substitusikan semua hasil yang didapatkan di langkah 4 ke persamaan $u^*(t)$ yang terdapat pada langkah ke 2, kemudian diperoleh kontrol optimalnya.

2.2 Kajian Integrasi Topik Dengan Al-Quran

Islam merupakan agama yang telah mengatur segala aspek yang berhubungan dengan kehidupan manusia, salah satu aspek yang menjadi perhatian adalah kesehatan, karena kesehatan merupakan nikmat Tuhan yang tak ternilai harganya. Di masa pandemi virus corona yang penyebarannya begitu masif, maka dibutuhkan langkah pencegahan agar tidak terinfeksi virus ini. Jadi sebagai manusia kita perlu mensyukuri nikmat kesehatan yang diberikan oleh Allah SWT. Selain itu kita harus senantiasa bersabar, berdoa dan tetap memohon ridha-Nya dan mengimani bahwa wabah yang terjadi saat ini merupakan takdir yang telah Allah SWT tetapkan sebelum manusia diciptakan. Sebagaimana dalam QS. At-Taghabun ayat 11 yang Artinya: "Tidak ada suatu musibah pun menimpa seseorang kecuali

dengan izin Allah; dan barangsiapa yang beriman kepada Allah niscaya Dia akan memberi petunjuk kepada hatinya. Dan Allah Maha Mengetahui segala sesuatu.”

Menurut pandangan Quraish Shihab yaitu tidak ada bencana yang menimpa, baik berkaitan dengan urusan dunia, maupun agama, kecuali atas izin Allah (penciptaan sebab dan faktor – faktor bagi terjadinya sesuatu. Ia adalah sistem dan hukum – hukum alam yang diciptakan-Nya bagi terjadinya sesuatu. Manusia dapat memanfaatkan untuk kepentingan diri sendirinya), yakni melalui sistem yang telah ditetapkan-Nya dan yang selalu dibawah kontrol dan pengawasan Allah. Barangsiapa yang kufur kepada Allah, maka Allah akan membiarkan hatinya dalam kesesatan dan siapa yang beriman dan percaya bahwa tidak ada yang terjadi kecuali atas izin Allah, niscaya Allah akan memberikan petunjuk hatinya sehingga dari saat kesaat ia akan semakin percaya serta tabah menghadapi musibah yang menimpanya sambil mencari sebab – sebabnya agar jangan terulang serta semakin meningkat pula amal – amal baiknya. Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu. Karena itu, sabar dan tabahlah menghadapi cobaan serta lakukan intropeksi dan taatlah kepada Allah di setiap tempat dan waktu. Karena itu setiap muslim hendaknya berusaha memahami hukum – hukum alam dan memanfaatkannya (Shihab, 2016).

Ibnu Abbas menafsirkan bahwa Allah memberikan hidayah yang mutlak kepada hatinya, membukanya untuk menyingkap hakikat ‘laduni’ yang tersembunyi, serta menghubungkannya dengan segala sumber dari segala arah kejadian. Sehingga, dia dapat melihatnya bahwa di sana penciptaannya dan puncaknya. Oleh karena itu, dia menjadi tenang, stabil, dan damai. Kemudian dia mengetahuinya dengan suatu pengetahuan yang menghubungkannya kepada kaidah

umum dan universal. Sehingga, dia tidak membutuhkan lagi penglihatan dan pandangan yang bersifat parsial yang biasanya sering salah dan terbatas. Oleh karena itu potongan ayat yang datang setelah-nya adalah, “...*Allah Maha Mengetahui segala sesuatu* “. Jadi petunjuk itu merupakan hidayah kepada orang yang diberikan petunjuk oleh diri-Nya, ketika imannya benar-benar jujur dan sah. Sehingga, dia pun berhak mendapatkan anugerah Allah berupa lenyapnya tirai dan tersingkapnya rahasia- rahasia “dengan batasan tertentu” (Abbas).

Oleh itu sebagai umat muslim dalam menyikapi ujian harus selalu sabar, pasrah dan tawaqqal kepada Allah. Salah satu langkah pencegahan agar tidak terinfeksi dengan menerapkan sistem karantina yakni memisahkan seseorang yang terinfeksi covid dari seseorang yang sehat agar mengurangi resiko penularan. Sebagaimana pada Shahih Bukhari 5330: *Abu Salamah bin Abdurrahman berkata: saya mendengar Abu Hurairah dari Nabi S.A beliau bersabda: “Janganlah kalian mencampurkan antara yang sakit dengan yang sehat”* (Bukhari). Asbabul wurud dari hadist ini adalah saat unta para kaum Badui terjangkit penyakit menular dan dikhawatirkan akan menular ke manusia, Rasulullah menyerukan untuk menjauhi unta tersebut dan memisahkan kandang unta antara yang terpapar dan unta yang sehat serta memerintahkan para pemiliknya untuk tidak mendatangnya (Al-‘Asqalani, 2017). Menurut kementerian kesehatan karantina atau isolasi merupakan cara yang efisien untuk mencegah penularan penyakit (Rahmah, 2020).

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini menggunakan penelitian kualitatif. Menurut (Lexy J. Moleong, 2019) Penelitian kualitatif adalah penelitian yang bermaksud untuk memahami fenomena tentang apa yang dialami oleh subjek penelitian misalnya perilaku, persepsi, motivasi, tindakan, dll, secara holistik, dan dengan cara deskripsi dalam bentuk kata – kata dan bahasa, pada suatu konteks khusus yang alamiah dan dengan memanfaatkan berbagai metode. Pada penelitian akan dilakukan analisis dinamik pada model matematika SEIHR.

3.2 Data dan Sumber Data

Data dan sumber data merupakan tahapan penulis yang mendukung penelitian. Pada tahap ini, penulis mencari berbagai informasi yang berkaitan dengan topik penelitian. Informasi dapat diperoleh dari buku, jurnal atau artikel, website resmi atau sumber lain yang relevan. Kemudian, data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder yaitu data kasus harian COVID-19 di Jawa Timur dari bulan Mei 2021 – Juli 2021 yang bersumber dari website resmi COVID-19 Jawa Timur (infocovid19.jatimprov.go.id) pada tahun 2021.

3.3 Tahapan Penelitian

Langkah – langkah atau tahapan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Analisis dinamik model penyebaran virus SARS-COV2 pada populasi SEIHR

- a. Menentukan titik kesetimbangan bebas penyakit. Pada tahap ini model penyebaran virus SARS-COV2 dalam kondisi setimbang artinya tidak ada laju penularan penyakit dalam populasi.
 - b. Menentukan bilangan reproduksi dasar pada model matematika SEIHR. Untuk menentukan bilangan reproduksi dasar dengan menyusun matriks Jacobi terlebih dahulu dengan melakukan pelinieran. Selanjutnya akan diperoleh akar persamaan karakteristik dan nilai eigen maksimum. Nilai eigen maksimum tersebut akan menjadi bilangan reproduksi dasar.
 - c. Menentukan titik kesetimbangan endemik. Untuk menentukan titik kesetimbangan endemik, model penyebaran virus SARS-COV2 dalam kondisi terdapat penyakit dalam populasi.
 - d. Menganalisis kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit. Analisis kestabilan dilakukan dengan melihat nilai eigen yang diperoleh dari bilangan reproduksi dasar.
 - e. Menganalisis kestabilan titik kesetimbangan endemik. Analisis kestabilan dilakukan dengan melihat nilai eigen yang diperoleh dari bilangan reproduksi dasar.
2. Simulasi model SEIHR penyebaran SARS-COV2
- Simulasi numerik menggunakan sistem *Ordinary-Differential Equations*⁴⁵. Persamaan state akan diselesaikan menggunakan skema maju Rungge Kutta orde 4 dan persamaan Co-State akan diselesaikan menggunakan skema mundur Rungge Kutta orde 4 (Rodrigues, 2014).
- a. Melakukan simulasi dengan melibatkan parameter kontrol.
 - b. Melakukan simulasi tanpa melibatkan parameter kontrol.

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Analisis Dinamik Model SEIHR

4.1.1 Titik Keseimbangan

Pada penelitian ini model yang disajikan pada sistem persamaan (2.6) akan dikaji pada dua kondisi, yakni kondisi bebas penyakit dan kondisi endemik. Oleh karena itu dalam kajian titik keseimbangan penelitian ini akan mengeksplorasi pada dua titik keseimbangan yakni titik keseimbangan bebas penyakit dan titik keseimbangan endemik. Kedua analisis titik keseimbangan mengasumsikan tidak ada perubahan semua populasi terhadap waktu. Artinya perubahan populasinya dianggap konstan, yaitu: $\frac{dS}{dt} = 0$, $\frac{dE}{dt} = 0$, $\frac{dI}{dt} = 0$, $\frac{dH}{dt} = 0$, dan $\frac{dR}{dt} = 0$. Pada masalah bebas penyakit diasumsikan ($I = 0$) yang selanjutnya nilai ini disubstitusikan pada semua persamaan (2.6), selanjutnya dilakukan iterasi untuk mendapatkan nilai *Susceptible*, *Exposed*, *Infected*, *Hospitalized* dan *Recovered* secara berturut-turut. Di lain pihak pada masalah endemik diasumsikan bahwa banyaknya populasi terinfeksi ($I \neq 0$). Sehingga iterasi dijalankan dengan menghitung banyaknya populasi terinfeksi terlebih dahulu yang selanjutnya proses iterasi dilanjutkan untuk mendapatkan nilai semua variabel yang lain secara berturut-turut.

Dari paparan di atas, masalah perhitungan titik keseimbangan bebas penyakit dan endemik pada penelitian ini didasarkan pada model Mumbu & Hugo (2020), sebagai berikut:

$$\frac{dS_h}{dt} = \pi - (\epsilon E_h + \mu)S_h = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{dE_h}{dt} = \epsilon S_h E_h - (\gamma + \tau + \mu)E_h = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{dI_h}{dt} = \gamma E_h - (\mu_I + \alpha) I_h = 0 \quad (4.3)$$

$$\frac{dH_h}{dt} = \tau E_h - (\mu_H + \beta) H_h = 0 \quad (4.4)$$

$$\frac{dR_h}{dt} = \alpha I_h + \beta H_h - \mu R_h = 0 \quad (4.5)$$

Pada bagian ini akan dikaji terlebih dahulu analisis titik kesetimbangan bebas penyakit sebagai berikut:

a. Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Titik kesetimbangan bebas penyakit adalah titik kesetimbangan pada saat tidak ada individu yang terinfeksi penyakit dalam populasi. Maka agar memenuhi titik kesetimbangan bebas penyakit, maka tidak ada satupun individu yang terinfeksi sehingga $I_h = 0$. Ambil persamaan (4.3) sebagai tahap awal untuk memperoleh titik kesetimbangan, maka diperoleh :

$$\begin{aligned} \gamma E_h - (\mu_I + \alpha) I_h &= 0 \\ \Leftrightarrow \gamma E_h - (\mu_I + \alpha) 0 &= 0 \\ \Leftrightarrow \gamma E_h &= 0 \\ \Leftrightarrow E_h &= 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Kemudian substitusikan persamaan (4.6) ke persamaan (4.4), sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \tau E_h - (\mu_H + \beta) H_h &= 0 \\ \Leftrightarrow \tau(0) - (\mu_H + \beta) H_h &= 0 \\ \Leftrightarrow -(\mu_H + \beta) H_h &= 0 \\ \Leftrightarrow H_h &= 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Kemudian substitusikan $I_h = 0$ dan $H_h = 0$ ke persamaan (4.5), sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
& \alpha I_h + \beta H_h - \mu R_h = 0 \\
& \Leftrightarrow \alpha(0) + \beta(0) - \mu R_h = 0 \\
& \Leftrightarrow -\mu R_h = 0 \\
& \Leftrightarrow R_h = 0
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Kemudian substitusikan persamaan (4.6) dan persamaan (4.1), sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
& \pi - (\epsilon E h + \mu) S_h = 0 \\
& \Leftrightarrow \pi - (\epsilon(0) + \mu) S_h = 0 \\
& \Leftrightarrow \pi - \mu S_h = 0 \\
& \Leftrightarrow S_h = \frac{\pi}{\mu}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Sehingga diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit dari sistem (2.6) yaitu

$$E_0(S_h^0, E_h^0, I_h^0, H_h^0, R_h^0) = \left(\frac{\pi}{\mu}, 0, 0, 0, 0 \right) \tag{4.10}$$

Persamaan (4.10) berlaku untuk setiap $\frac{\pi}{\mu} \neq 0$. Berikutnya dianalisis titik

kesetimbangan endemik sebagai berikut:

b. Titik Kesetimbangan Endemik

Titik kesetimbangan endemik menunjukkan kondisi di mana terdapat penyebaran penyakit dalam populasi. Artinya, dalam suatu populasi terdapat individu yang terinfeksi penyakit. Sehingga pada kondisi ini, populasi $S \neq 0, E \neq 0, I \neq 0, H \neq 0, R \neq 0$. Sehingga proses iterasi dilakukan secara runtut mulai dari variabel *Susceptible* dilanjutkan pada variable *Exposed*, *Infected*, *Hospitalized*, dan *Recovered*. Berdasarkan persamaan (4.2) diperoleh

$$\begin{aligned}
& \epsilon S_h E h - (\gamma + \tau + \mu) E h = 0 \\
& \Leftrightarrow (\epsilon S_h - (\gamma + \tau + \mu)) E h = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \epsilon S_h - (\gamma + \tau + \mu) = 0 \\
&\Leftrightarrow S_h = \frac{\gamma + \tau + \mu}{\epsilon} \tag{4.11}
\end{aligned}$$

Selanjutnya, substitusikan persamaan (4.11) dari persamaan (4.1) diperoleh :

$$\begin{aligned}
&\pi - (\epsilon E_h + \mu) S_h = 0 \\
&\Leftrightarrow \pi - \epsilon E_h S_h - \mu S_h = 0 \\
&\Leftrightarrow \pi - \epsilon E_h \left(\frac{\gamma + \tau + \mu}{\epsilon} \right) - \mu \left(\frac{\gamma + \tau + \mu}{\epsilon} \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow -\epsilon E_h \left(\frac{\gamma + \tau + \mu}{\epsilon} \right) = \mu \left(\frac{\gamma + \tau + \mu}{\epsilon} \right) - \pi \\
&\Leftrightarrow E_h = \frac{\pi \epsilon - \gamma \mu - \tau \mu - \mu^2}{(\gamma + \tau + \mu) \epsilon} \tag{4.12}
\end{aligned}$$

Selanjutnya, substitusikan persamaan (4.12) dari persamaan (4.3) diperoleh :

$$\begin{aligned}
&\gamma E_h - (\mu_I + \alpha) I_h = 0 \\
&\Leftrightarrow \gamma \left(\frac{\pi \epsilon - \gamma \mu - \tau \mu - \mu^2}{(\gamma + \tau + \mu) \epsilon} \right) - (\mu_I + \alpha) I_h = 0 \\
&\Leftrightarrow I_h = \frac{\gamma (\pi \epsilon - \gamma \mu - \tau \mu - \mu^2)}{\epsilon (\gamma + \tau + \mu) (\mu_I + \alpha)} \tag{4.13}
\end{aligned}$$

Selanjutnya, substitusikan persamaan (4.12) dari persamaan (4.4) diperoleh :

$$\begin{aligned}
&\tau E_h - (\mu_H + \beta) H_h = 0 \\
&\Leftrightarrow \tau \left(\frac{\pi \epsilon - \gamma \mu - \tau \mu - \mu^2}{(\gamma + \tau + \mu) \epsilon} \right) - (\mu_H + \beta) H_h = 0 \\
&\Leftrightarrow H_h = \frac{(\pi \epsilon - \gamma \mu - \tau \mu - \mu^2) \tau}{\epsilon (\gamma + \tau + \mu) (\mu_H + \beta)} \tag{4.14}
\end{aligned}$$

Selanjutnya, substitusikan persamaan (4.13) dan persamaan (4.14) ke persamaan (4.5) diperoleh :

$$\alpha I_h + \beta H_h - \mu R_h$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \alpha \left(\frac{\gamma(\pi\epsilon - \gamma\mu - \tau\mu - \mu^2)}{\epsilon(\gamma + \tau + \mu)(\mu_I + \alpha)} \right) + \beta \left(\frac{(\pi\epsilon - \gamma\mu - \tau\mu - \mu^2)\tau}{\epsilon(\gamma + \tau + \mu)(\mu_H + \beta)} \right) - \mu R_h = 0 \\
&\Leftrightarrow -\mu R_h = -\alpha \left(\frac{\gamma(\pi\epsilon - \gamma\mu - \tau\mu - \mu^2)}{\epsilon(\gamma + \tau + \mu)(\mu_I + \alpha)} \right) - \beta \left(\frac{(\pi\epsilon - \gamma\mu - \tau\mu - \mu^2)\tau}{\epsilon(\gamma + \tau + \mu)(\mu_H + \beta)} \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow R_h = \frac{(\alpha\gamma(\mu_H + \beta) + \beta\tau(\mu_I + \alpha))(\pi\epsilon - \gamma\mu - \tau\mu - \mu^2)}{\epsilon\mu(\gamma + \tau + \mu)(\mu_I + \alpha)(\mu_H + \beta)} \quad (4.15)
\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (4.11), (4.12), (4.13), (4.14), dan (4.15) diperoleh titik kesetimbangan endemik $E_1(S_h^*, E_h^*, I_h^*, H_h^*, R_h^*)$ di mana:

$$\begin{aligned}
S_h^* &= \frac{\gamma + \tau + \mu}{\epsilon} \\
E_h^* &= \frac{\pi\epsilon - \gamma\mu - \tau\mu - \mu^2}{(\gamma + \tau + \mu)\epsilon} \\
I_h^* &= \frac{\gamma(\pi\epsilon - \gamma\mu - \tau\mu - \mu^2)}{\epsilon(\gamma + \tau + \mu)(\mu_I + \alpha)} \\
H_h^* &= \frac{(\pi\epsilon - \gamma\mu - \tau\mu - \mu^2)\tau}{\epsilon(\gamma + \tau + \mu)(\mu_H + \beta)} \\
R_h^* &= \frac{(\alpha\gamma(\mu_H + \beta) + \beta\tau(\mu_I + \alpha))(\pi\epsilon - \gamma\mu - \tau\mu - \mu^2)}{\epsilon\mu(\gamma + \tau + \mu)(\mu_I + \alpha)(\mu_H + \beta)} \quad (4.16)
\end{aligned}$$

dengan syarat eksistensi

$$\pi\epsilon - \gamma\mu - \tau\mu - \mu^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \pi\epsilon \geq \mu(\gamma - \tau - \mu)$$

4.1.2 Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Selanjutnya menentukan bilangan reproduksi dasar R_0 pada sistem persamaan (2.6) dengan menentukan nilai eigen maksimum yang diperoleh dari Matriks Generasi Selanjutnya. Langkah – langkah menentukan bilangan reproduksi dasar sistem (2.6) antara lain :

1. Menentukan persamaan yang menunjukkan terjadinya kasus terinfeksi dan perubahan dalam kelas individu terinfeksi. Pada sistem persamaan (2.6), subsistem yang terinfeksi adalah E, I, H dengan titik kesetimbangan bebas penyakit $E_0 = \left(\frac{\pi}{\mu}, 0, 0, 0, 0\right)$ digunakan untuk menentukan bilangan reproduksi dasar.

$$\frac{dE}{dt} = \epsilon S_h E_h - (\mu + \tau + \gamma) E_h$$

$$\frac{dI}{dt} = \gamma E_h - (\mu_I + \alpha) I_h$$

$$\frac{dH}{dt} = \tau E_h - (\mu_H + \beta) H_h$$

2. Menentukan linierisasi terhadap subsistem terinfeksi yang direpresentasikan dengan Matriks Jacobi (J) sebagai berikut

$$J = \begin{bmatrix} \frac{dE}{dE} & \frac{dE}{dI} & \frac{dE}{dH} \\ \frac{dI}{dE} & \frac{dI}{dI} & \frac{dI}{dH} \\ \frac{dH}{dE} & \frac{dH}{dI} & \frac{dH}{dH} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} \epsilon S_h - (\mu + \tau + \gamma) & 0 & 0 \\ \gamma & -(\mu_I + \alpha) & 0 \\ \tau & 0 & -(\mu_H + \beta) \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Lalu substitusikan titik kesetimbangan bebas penyakit $E_0 = \left(\frac{\pi}{\mu}, 0, 0, 0, 0\right)$ ke dalam persamaan (4.17), sehingga diperoleh

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\pi\epsilon}{\mu} - (\mu + \tau + \gamma) & 0 & 0 \\ \gamma & -(\mu_I + \alpha) & 0 \\ \tau & 0 & -(\mu_H + \beta) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

3. Melakukan dekomposisi Matriks Jacobi (J) menjadi $J = \mathcal{F} - \mathcal{V}$, dengan \mathcal{F} matriks tranmisi sebagai laju penambahan jumlah individu terinfeksi dan \mathcal{V} matriks transisi sebagai laju penurunan jumlah infeksi yakni sebagai berikut:

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \frac{\pi\epsilon}{\mu} & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} (\mu + \tau + \gamma) & 0 & 0 \\ -\gamma & (\mu_I + \alpha) & 0 \\ -\tau & 0 & (\mu_H + \beta) \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Hitung \mathcal{V}^{-1} ,

$$\mathcal{V}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu + \tau + \gamma} & 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{(\mu + \tau + \gamma)(\mu_I + \alpha)} & \frac{1}{(\mu_I + \alpha)} & 0 \\ \frac{\gamma\tau}{(\mu + \tau + \gamma)(\mu_H + \beta)} & 0 & \frac{1}{(\mu_H + \beta)} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

4. Hitung R_0 dengan menentukan $R_0 = \rho(\mathcal{F}\mathcal{V}^{-1})$

Bersasarkan pada persamaan (4.19) dan (4.21) didapatkan matriks generasi selanjutnya (K), yaitu:

$$K = \mathcal{F}\mathcal{V}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\pi\epsilon}{\mu} & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu + \tau + \gamma} & 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{(\mu + \tau + \gamma)(\mu_I + \alpha)} & \frac{1}{(\mu_I + \alpha)} & 0 \\ \frac{\gamma\tau}{(\mu + \tau + \gamma)(\mu_H + \beta)} & 0 & \frac{1}{(\mu_H + \beta)} \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{\epsilon\pi}{\mu(\mu + \tau + \gamma)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, nilai yang digunakan sebagai bilangan reproduksi dasar adalah radius spektral atau nilai eigen absolut dominan dari matriks K yaitu $R_0 = \rho(\mathcal{F}\mathcal{V}^{-1})$, nilai eigen absolut dominan dari matriks $K = \mathcal{F}\mathcal{V}^{-1}$ dapat diperoleh dari persamaan berikut :

$$\det|\lambda I - \mathcal{F}\mathcal{V}^{-1}| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\epsilon\pi}{\mu(\mu + \tau + \gamma)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{array}{ccc} \lambda - \frac{\epsilon\pi}{\mu(\mu + \tau + \gamma)} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{array} \right| = 0$$

Sehingga diperoleh persamaan polinomial pangkat tiga sebagai berikut

$$\left(\lambda - \frac{\epsilon\pi}{\mu(\mu + \tau + \gamma)} \right) \lambda^2 = 0$$

Dari persamaan karakteristik matriks K didapatkan nilai eigen absolut dominan yaitu

$$\lambda_1 = \frac{\epsilon\pi}{\mu(\mu + \tau + \gamma)}, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$$

Sehingga, bilangan reproduksi dasar yang didapatkan dari nilai eigen absolut dominan adalah

$$R_0 = \frac{\epsilon\pi}{\mu(\mu + \tau + \gamma)} \quad (4.22)$$

Ketika $R_0 > 1$ maka titik kesetimbangan endemik eksis

4.1.3 Analisis Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan

a. Analisis Kestabilan Titik kesetimbangan Bebas Penyakit

Analisis kestabilan titik kesetimbangan dilakukan berdasarkan nilai eigen yang diperoleh dari matriks Jacobian dari sistem (2.6) dengan metode linierisasi sekitar titik kesetimbangan bebas penyakit $E_0 = \left(\frac{\pi}{\mu}, 0,0,0,0\right)$. Matriks Jacobi hasil

linieritas dari model matematika SEIHR sebagai berikut:

$$J_{(E_0)} = \begin{bmatrix} \frac{dS_h}{dS_h} & \frac{dS_h}{dE_h} & \frac{dS_h}{dI_h} & \frac{dS_h}{dH_h} & \frac{dS_h}{dR_h} \\ \frac{dS_h}{dE_h} & \frac{dE_h}{dE_h} & \frac{dI_h}{dE_h} & \frac{dH_h}{dE_h} & \frac{dR_h}{dE_h} \\ \frac{dE_h}{dE_h} & \frac{dE_h}{dE_h} & \frac{dE_h}{dE_h} & \frac{dE_h}{dE_h} & \frac{dE_h}{dE_h} \\ \frac{dS_h}{dE_h} & \frac{dE_h}{dE_h} & \frac{dI_h}{dE_h} & \frac{dH_h}{dE_h} & \frac{dR_h}{dE_h} \\ \frac{dI_h}{dE_h} & \frac{dI_h}{dE_h} & \frac{dI_h}{dE_h} & \frac{dI_h}{dE_h} & \frac{dI_h}{dE_h} \\ \frac{dS_h}{dE_h} & \frac{dE_h}{dE_h} & \frac{dI_h}{dE_h} & \frac{dH_h}{dE_h} & \frac{dR_h}{dE_h} \\ \frac{dH_h}{dE_h} & \frac{dH_h}{dE_h} & \frac{dH_h}{dE_h} & \frac{dH_h}{dE_h} & \frac{dH_h}{dE_h} \\ \frac{dS_h}{dE_h} & \frac{dE_h}{dE_h} & \frac{dI_h}{dE_h} & \frac{dH_h}{dE_h} & \frac{dR_h}{dE_h} \\ \frac{dR_h}{dE_h} & \frac{dR_h}{dE_h} & \frac{dR_h}{dE_h} & \frac{dR_h}{dE_h} & \frac{dR_h}{dE_h} \\ \frac{dS_h}{dE_h} & \frac{dE_h}{dE_h} & \frac{dI_h}{dE_h} & \frac{dH_h}{dE_h} & \frac{dR_h}{dE_h} \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh,

$$J_{(E_0)} = \begin{pmatrix} -\epsilon E - \mu & -\epsilon S & 0 & 0 & 0 \\ \epsilon E & \epsilon S - \mu - \tau - \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu_I - \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \tau & 0 & -\mu_H - \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & -\mu \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

Kemudian substitusikan nilai titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu

$E_0 \left(\frac{\pi}{\mu}, 0,0,0,0\right)$ ke matriks (4.23) sehingga diperoleh matriks Jacobi sebagai berikut:

$$J_{(E_0)} = \begin{pmatrix} -\mu & -\epsilon\pi/\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon\pi/\mu - \mu - \tau - \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu_I - \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \tau & 0 & -\mu_H - \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & -\mu \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

Nilai eigen matriks $J_{(E_0)}$ diperoleh dari perhitungan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
& |\det(\lambda I - J_{(E_0)})| = 0 \\
& \Leftrightarrow \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\mu & \epsilon\pi/\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon\pi/\mu - \mu - \tau - \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu_I - \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \tau & 0 & -\mu_H - \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & -\mu \end{bmatrix} \right| = 0 \\
& \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda + \mu & \epsilon\pi/\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - \epsilon\pi/\mu + \mu + \tau + \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & \lambda + \mu_I + \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 & \lambda + \mu_H + \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & -\beta & \lambda + \mu \end{bmatrix} \quad (4.25)
\end{aligned}$$

Untuk memperoleh nilai determinan matriks $n \times n$, maka dapat menggunakan metode ekspansi kofaktor dari matriks (4.25) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
& (\lambda + \mu) \begin{vmatrix} \lambda + \mu & \epsilon\pi/\mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - \epsilon\pi/\mu + \mu + \tau + \gamma & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & \lambda + \mu_I + \alpha & 0 \\ 0 & -\tau & 0 & \lambda + \mu_H + \beta \end{vmatrix} = 0 \\
& (\lambda + \mu)(\lambda + \mu_H + \beta) \begin{vmatrix} \lambda + \mu & \epsilon\pi/\mu & 0 \\ 0 & \lambda - \epsilon\pi/\mu + \mu + \tau + \gamma & 0 \\ 0 & -\gamma & \lambda + \mu_I + \alpha \end{vmatrix} = 0 \\
& (\lambda + \mu)(\lambda + \mu_H + \beta)(\lambda + \mu_I + \alpha) \begin{vmatrix} \lambda + \mu & \epsilon\pi/\mu \\ 0 & \lambda - \epsilon\pi/\mu + \mu + \tau + \gamma \end{vmatrix} = 0 \\
& (\lambda + \mu)(\lambda + \mu_H + \beta)(\lambda + \mu_I + \alpha)(\lambda - \epsilon\pi/\mu + \mu + \tau + \gamma)(\lambda + \mu) = 0 \quad (4.26)
\end{aligned}$$

Setelah diperoleh determinan matrik (4.26), maka dapat ditentukan nilai eigen sebagai berikut :

$$\lambda_1 = -\mu$$

$$\lambda_2 = -(\mu_H + \beta)$$

$$\lambda_3 = -(\mu_I + \alpha)$$

$$\lambda_4 = \epsilon\pi/\mu - (\mu + \tau + \gamma) = 1/\mu - (\epsilon\pi - (\mu + \tau + \gamma)) = \frac{\mu + \tau + \gamma}{\mu} (R_0 - 1)$$

$$\lambda_5 = -\mu$$

Stabil lokal ketika $R_0 - 1 < 0 \Leftrightarrow R_0 < 1$

Selanjutnya akan dihitung nilai eigen dari determinan matrik (4.26) dengan menggunakan parameter pada Tabel 2.2 dengan nilai sehingga diperoleh

$$\lambda_1 = -0.000200000000000000$$

$$\lambda_2 = -0.5840000000000000$$

$$\lambda_3 = -0.3610000000000000$$

$$\lambda_4 = 37.27930000000000$$

$$\lambda_5 = -0.000200000000000000$$

Berdasarkan hasil tersebut dapat diketahui bahwa terdapat nilai eigen yang memiliki satu akar real positif yaitu $\lambda_4 > 0$ dan empat akar real negatif $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_5 < 0$. Dengan demikian, sifat titik kesetimbangan bebas penyakit pada populasi SEIHR adalah tidak stabil. Berikutnya dilakukan analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan endemik sebagai berikut :

b. Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik

Analisis kestabilan titik kesetimbangan endemik dilakukan berdasarkan nilai eigen yang diperoleh dari matriks Jacobi dengan metode linierisasi disekitar titik kesetimbangan endemik $E_1(S_h^*, E_h^*, I_h^*, H_h^*, R_h^*)$ sehingga diperoleh :

$$J_{(E_1)} = \begin{bmatrix} \frac{dS_h}{dS_h} & \frac{dS_h}{dE_h} & \frac{dS_h}{dI_h} & \frac{dS_h}{dH_h} & \frac{dS_h}{dR_h} \\ \frac{dE_h}{dS_h} & \frac{dE_h}{dE_h} & \frac{dE_h}{dI_h} & \frac{dE_h}{dH_h} & \frac{dE_h}{dR_h} \\ \frac{dI_h}{dS_h} & \frac{dI_h}{dE_h} & \frac{dI_h}{dI_h} & \frac{dI_h}{dH_h} & \frac{dI_h}{dR_h} \\ \frac{dH_h}{dS_h} & \frac{dH_h}{dE_h} & \frac{dH_h}{dI_h} & \frac{dH_h}{dH_h} & \frac{dH_h}{dR_h} \\ \frac{dR_h}{dS_h} & \frac{dR_h}{dE_h} & \frac{dR_h}{dI_h} & \frac{dR_h}{dH_h} & \frac{dR_h}{dR_h} \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh,

$$J_{(E_1)} = \begin{pmatrix} -\epsilon E - \mu & -\epsilon S & 0 & 0 & 0 \\ \epsilon E & \epsilon S - \mu - \tau - \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu_I - \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \tau & 0 & -\mu_H - \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & -\mu \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

Kemudian substitusikan nilai titik kesetimbangan endemik yaitu $E_1(S_h^*, E_h^*, I_h^*, H_h^*, R_h^*)$ ke dalam sistem (4.28) sehingga diperoleh

$$J_{(E_1)} = \begin{pmatrix} \omega - \mu & -\mu - \tau - \gamma & 0 & 0 & 0 \\ -\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu_I - \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \tau & 0 & -\mu_H - \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & -\mu \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

Dimana

$$\omega = -\frac{\pi\epsilon - \mu^2 - \mu\tau - \mu\gamma}{\mu + \tau + \gamma}$$

Nilai eigen matrik $J_{(E_1)}$ diperoleh dari persamaan berikut

$$\det(\lambda I - J_{(E_1)}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \omega - \mu & -\mu - \tau - \gamma & 0 & 0 & 0 \\ -\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu_I - \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \tau & 0 & -\mu_H - \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & -\mu \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda - \omega + \mu & \mu + \tau + \gamma & 0 & 0 & 0 \\ \omega & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & \lambda + \mu_I + \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 & \lambda + \mu_H + \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & -\beta & \lambda + \mu \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda + \mu)(\lambda + \mu_H + \beta) \begin{vmatrix} \lambda - \omega + \mu & \mu + \tau + \gamma & 0 \\ \omega & \lambda & 0 \\ 0 & -\gamma & \lambda + \mu_I + \alpha \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda + \mu)(\lambda + \mu_H + \beta)(\lambda + \mu_I + \alpha) \begin{vmatrix} \lambda - \omega + \mu & \mu + \tau + \gamma \\ \omega & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda + \mu)(\lambda + \mu_H + \beta)(\lambda + \mu_I + \alpha)(\lambda^2 + \lambda(\mu - \omega) - \omega(\mu + \tau + \gamma)) = 0 \quad (4.30)$$

Setelah diperoleh determinan matrik (4.30), maka dapat ditentukan nilai eigen sebagai berikut :

$$\lambda_1 = -\mu$$

$$\lambda_2 = -(\mu_H + \beta)$$

$$\lambda_3 = -(\mu_I + \alpha)$$

$$\lambda_{5,4} = \frac{\omega - \mu \pm \sqrt{(\mu - \omega)^2 + 4\omega(\mu + \tau + \gamma)}}{2}$$

Selanjutnya akan dihitung nilai eigen dari determinan matrik (4.30) dengan menggunakan nilai – nilai parameter pada Tabel 2.2, sehingga diperoleh

$$\lambda_1 = -0.000200000000000000$$

$$\lambda_2 = -0.5840000000000000$$

$$\lambda_3 = -0.3610000000000000$$

$$\lambda_4 = -0.0378024761730768$$

$$\lambda_5 = -0.198033217826923$$

Berdasarkan hasil tersebut dapat diketahui bahwa semua nilai eigen memiliki bagian real negatif. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa sifat titik kesetimbangan endemik pada populasi SEIHR adalah stabil asimtotik.

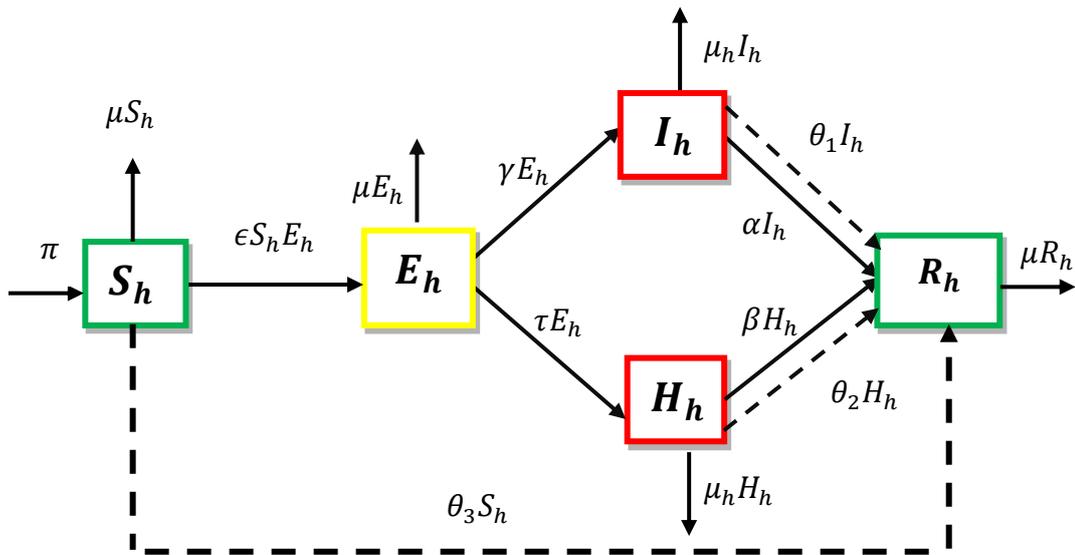
4.1.4 Kontrol Optimal

Dalam masalah kontrol optimal ini bertujuan untuk meminimalkan jumlah biaya dengan meminimalkan jumlah populasi individu yang terinfeksi (*Infected*) dan populasi individu yang di rawat di rumah sakit (*Hospitalized*) dengan biaya kontrol pengobatan dan vaksinasi yang optimal pada interval waktu $[0, t_f]$.

Variabel kontrol yang diterapkan pada model tersebut adalah:

1. $\theta_1(t)$ adalah pengobatan untuk populasi individu terinfeksi (I)
2. $\theta_2(t)$ adalah penanganan untuk populasi individu dirawat di rumah sakit (H)
3. $\theta_3(t)$ adalah vaksinasi untuk populasi individu rentan (S)

Sehingga bentuk model matematika penyebaran virus SARS-COV2 dengan variabel kontrol dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 4.1 Model Populasi SEIHR Dengan Variabel Kontrol

Model persamaanya dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 \frac{dS_h}{dt} &= \pi - (\epsilon E_h + \mu)S_h - \theta_3 S_h \\
 \frac{dE_h}{dt} &= \epsilon S_h E_h - (\gamma + \tau + \mu)E_h \\
 \frac{dI_h}{dt} &= \gamma E_h - (\mu_I + \alpha)I_h - \theta_1 I_h \\
 \frac{dH_h}{dt} &= \tau E_h - (\mu_H + \beta)H_h - \theta_2 H_h \\
 \frac{dR_h}{dt} &= \alpha I_h + \beta H_h - \mu R_h + \theta_1 I_h + \theta_2 H_h + \theta_3 S_h
 \end{aligned}
 \tag{4.31}$$

Berdasarkan artikel rujukan (Luo et al., 2021) dan (Kar & Jana, 2013) fungsi tujuan sebagai berikut:

$$J(\theta_1, \theta_2) = \min \int_0^{t_f} [A_1 I_h(t) + A_2 H_h(t) + A_3 \theta_1^2(t) + A_4 \theta_2^2(t) + A_5 \theta_3^2(t)] dt \quad (4.32)$$

Dengan t_f adalah waktu akhir. Fungsi di dalam integral diekspresikan sebagai persamaan Lagrangian masalah kontrol optimal yaitu :

$$(I, H, \theta_1, \theta_2) = A_1 I_h(t) + A_2 H_h(t) + A_3 \theta_1^2(t) + A_4 \theta_2^2(t) + A_5 \theta_3^2(t)$$

Dengan fungsi tujuan yang menginterpretasikan banyaknya populasi individu yang terinfeksi $A_1 I_h(t)$ dan populasi yang terinfeksi yang dirawat di rumah sakit $A_2 I_h(t)$ dimana A_1 dan A_2 sebagai variabel bobot. A_3 , A_4 , dan A_5 sebagai variabel bobot pengobatan untuk individu yang terinfeksi ($\theta_1(t)$), pengobatan untuk individu yang dirawat di rumah sakit ($\theta_2(t)$), dan vaksinasi untuk individu yang rentan ($\theta_3(t)$), Berdasarkan persamaan (4.32) maka dihitung ekspresi persamaan Hamiltonian berupa penjumlahan antara sistem persamaan (4.31) dengan pengali *Lagrange* atau variabel co-state yakni $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ sebagai berikut :

$$\begin{aligned} H(L, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) &= L(I, H, \theta_1, \theta_2) + \lambda_1(t) \frac{dS_h}{dt} + \lambda_2(t) \frac{dE_h}{dt} + \lambda_3(t) \frac{dI_h}{dt} + \lambda_4(t) \frac{dH_h}{dt} + \lambda_5(t) \frac{dR_h}{dt} \\ &= A_1 I_h(t) + A_2 H_h(t) + A_3 \theta_1^2(t) + A_4 \theta_2^2(t) + A_5 \theta_3^2(t) \\ &\quad + \lambda_1 [\pi - (\epsilon E_h + \mu) S_h - \theta_3 S_h] + \lambda_2 [\epsilon S_h E_h - (\gamma + \tau + \mu) E_h] \\ &\quad + \lambda_3 [\gamma E_h - (\mu_I + \alpha) I_h - \theta_1 I_h] \\ &\quad + \lambda_4 [\tau E_h - (\mu_H + \beta) H_h - \theta_2 H_h] \\ &\quad + \lambda_5 [\alpha I_h + \beta H_h - \mu R_h + \theta_1 I_h + \theta_2 H_h + \theta_3 S_h] \end{aligned}$$

agar mendapatkan kondisi Hamiltonian yang maksimal, maka harus dipenuhi syarat stationer sebagai berikut:

$$\frac{\partial H}{\partial \theta_1} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2A_3\theta_1^*(t) - \lambda_3 I_h + \lambda_5 I_h = 0$$

$$\Leftrightarrow \theta_1^*(t) = \frac{(\lambda_3 - \lambda_5)I_h}{2A_3}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \theta_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2A_4\theta_2^*(t) - \lambda_4 H_h + \lambda_5 H_h = 0$$

$$\Leftrightarrow \theta_2^*(t) = \frac{(\lambda_4 - \lambda_5)H_h}{2A_4}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \theta_3} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2A_5\theta_3^*(t) - \lambda_1 S_h + \lambda_5 S_h = 0$$

$$\Leftrightarrow \theta_3^*(t) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_5)S_h}{2A_5}$$

Untuk kontrol pertama yaitu pengobatan pada individu yang terinfeksi dengan kondisi batas variabel kontrol $0 \leq \theta_1(t) \leq 1$, sehingga diperoleh kemungkinan yang optimal sebagai berikut :

$$\theta_1^* = \begin{cases} 0 & \text{jika } \frac{(\lambda_3 - \lambda_5)I_h}{2A_3} \leq 0 \\ \frac{(\lambda_3 - \lambda_5)I_h}{2A_3} & \text{jika } 0 < \frac{(\lambda_3 - \lambda_5)I_h}{2A_3} < 1 \\ 1 & \text{jika } \frac{(\lambda_3 - \lambda_5)I_h}{2A_3} \geq 1 \end{cases}$$

Maka diperoleh persamaan kontrol optimal sebagai berikut:

$$\theta_1^*(t) = \min \left\{ \frac{(\lambda_3 - \lambda_5)I_h}{2A_3}, 1 \right\} \quad (4.33)$$

Untuk kontrol kedua yaitu pengobatan pada individu yang dirawat di rumah sakit dengan kondisi batas variabel kontrol $0 \leq \theta_2(t) \leq 1$, sehingga diperoleh kemungkinan yang optimal sebagai berikut :

$$\theta_2^* = \begin{cases} 0 & \text{jika } \frac{(\lambda_4 - \lambda_5)H_h}{2A_4} \leq 0 \\ \frac{(\lambda_4 - \lambda_5)H_h}{2A_4} & \text{jika } 0 < \frac{(\lambda_4 - \lambda_5)H_h}{2A_4} < 1 \\ 1 & \text{jika } \frac{(\lambda_4 - \lambda_5)H_h}{2A_4} \geq 1 \end{cases}$$

Maka diperoleh persamaan kontrol optimal sebagai berikut:

$$\theta_2^*(t) = \min \left\{ \frac{(\lambda_4 - \lambda_5)H_h}{2A_4}, 1 \right\} \quad (4.34)$$

Untuk kontrol ketiga yaitu vaksinasi pada individu yang rentan dengan kondisi batas parameter kontrol $0 \leq \theta_3(t) \leq 1$, sehingga diperoleh kemungkinan yang optimal sebagai berikut :

$$\theta_3^* = \begin{cases} 0 & \text{jika } \frac{(\lambda_1 - \lambda_5)S_h}{2A_5} \leq 0 \\ \frac{(\lambda_1 - \lambda_5)S_h}{2A_5} & \text{jika } 0 < \frac{(\lambda_1 - \lambda_5)S_h}{2A_5} < 1 \\ 1 & \text{jika } \frac{(\lambda_1 - \lambda_5)S_h}{2A_5} \geq 1 \end{cases}$$

Maka diperoleh persamaan kontrol optimal sebagai berikut:

$$\theta_3^*(t) = \min \left\{ \frac{(\lambda_1 - \lambda_5)S_h}{2A_5}, 1 \right\} \quad (4.35)$$

Kemudian syarat yang diperlukan untuk memperoleh kondisi optimal yaitu dengan menentukan persamaan *state* dan persamaan *co-state*. Berikut persamaan *state* dari Hamiltonian adalah:

$$\frac{dS_h}{dt} = \pi - (\epsilon E_h + \mu)S_h - \theta_3 S_h$$

$$\frac{dE_h}{dt} = \epsilon S_h E_h - (\gamma + \tau + \mu) E_h$$

$$\frac{dI_h}{dt} = \gamma E_h - (\mu_I + \alpha) I_h - \theta_1 I_h$$

$$\frac{dH_h}{dt} = \tau E_h - (\mu_H + \beta) H_h - \theta_2 H_h$$

$$\frac{dR_h}{dt} = \alpha I_h + \beta H_h - \mu R_h + \theta_1 I_h + \theta_2 H_h + \theta_3 S_h$$

Sedangkan persamaan *co-state* adalah sebagai berikut:

$$\dot{\lambda}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial S_h} = -\lambda_1(-\epsilon E_h - \mu) - \lambda_2 \epsilon E_h - \lambda_5 \theta_3$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial E_h} = \lambda_1 \epsilon S_h - \lambda_2(\epsilon S_h - \gamma - \tau - \mu) - \lambda_3 \gamma - \lambda_4 \tau$$

$$\dot{\lambda}_3(t) = -\frac{\partial H}{\partial I_h} = -A_1 - \lambda_3(-\mu_I - \alpha - \theta_1) - \lambda_5(\alpha + \theta_1)$$

$$\dot{\lambda}_4(t) = -\frac{\partial H}{\partial H_h} = -A_2 - \lambda_4(-\mu_H - \beta - \theta_2) - \lambda_5(\beta + \theta_2)$$

$$\dot{\lambda}_5(t) = -\frac{\partial H}{\partial R_h} = \lambda_5 \mu$$

dengan kondisi transversal $\lambda(t_f) = 0$

Selanjutnya setelah menentukan persamaan *state* dan persamaan *co-state*, maka perlu dilakukan substitusi $\theta_1^*(t), \theta_2^*(t)$, dan $\theta_3^*(t)$ yang telah didapatkan ke dalam persamaan *state* dan *co-state*. Maka diperoleh sistem persamaan yang optimal sebagai berikut :

$$\frac{dS_h}{dt} = \pi - (\epsilon E_h + \mu) S_h - \min \left\{ \frac{(\lambda_1 - \lambda_5) S_h}{2A_5}, 1 \right\}$$

$$\frac{dE_h}{dt} = \epsilon S_h E_h - (\gamma + \tau + \mu) E_h$$

$$\frac{dI_h}{dt} = \gamma E_h - (\mu_I + \alpha) I_h - \min \left\{ \frac{(\lambda_3 - \lambda_5) I_h}{2A_3}, 1 \right\} I_h$$

$$\frac{dH_h}{dt} = \tau E_h - (\mu_H + \beta)H_h - \min\left\{\frac{(\lambda_4 - \lambda_5)H_h}{2A_4}, 1\right\}H_h$$

$$\begin{aligned} \frac{dR_h}{dt} = & \alpha I_h + \beta H_h - \mu R_h + \min\left\{\frac{(\lambda_3 - \lambda_5)I_h}{2A_3}, 1\right\}I_h + \min\left\{\frac{(\lambda_4 - \lambda_5)H_h}{2A_4}, 1\right\}H_h \\ & + \min\left\{\frac{(\lambda_1 - \lambda_5)S_h}{2A_5}, 1\right\} \end{aligned}$$

$$\dot{\lambda}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial S_h} = -\lambda_1(-\epsilon E_h - \mu) - \lambda_2 \epsilon E_h - \lambda_5 \min\left\{\frac{(\lambda_1 - \lambda_5)S_h}{2A_5}, 1\right\}$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial E_h} = \lambda_1 \epsilon S_h - \lambda_2(\epsilon S_h - \gamma - \tau - \mu) - \lambda_3 \gamma - \lambda_4 \tau$$

$$\dot{\lambda}_3(t) = -\frac{\partial H}{\partial I_h} = -A_1 - \lambda_3(-\mu_I - \alpha - \theta_1) - \lambda_5 \left(\alpha + \min\left\{\frac{(\lambda_3 - \lambda_5)I_h}{2A_3}, 1\right\} \right)$$

$$\dot{\lambda}_4(t) = -\frac{\partial H}{\partial H_h} = -A_2 - \lambda_4(-\mu_H - \beta - \theta_1) - \lambda_5 \left(\beta + \min\left\{\frac{(\lambda_4 - \lambda_5)H_h}{2A_4}, 1\right\} \right)$$

$$\dot{\lambda}_5(t) = -\frac{\partial H}{\partial R_h} = \lambda_5 \mu$$

Berdasarkan uraian di atas, untuk mendapatkan nilai optimal perlu menyelesaikan persamaan *state* dan *co-state* yang berbentuk persamaan diferensial nonlinier. Karena sistem persamaan differensial nonlinier sulit diselesaikan dengan analitik, maka akan diselesaikan dengan metode numerik. Proses Simulasi Numerik akan diselesaikan menggunakan bantuan ode45 di *software* Matlab. Persamaan *state* akan diselesaikan menggunakan skema maju Rungge Kutta orde 4 dan persamaan *Co-State* akan diselesaikan menggunakan skema mundur Rungge Kutta orde 4.

4.2 Simulasi Model SEIHR Tanpa Kontrol dan Dengan Kontrol

4.2.1 Simulasi Model dalam Kondisi Bebas Penyakit

Simulasi model matematika SEIHR dalam keadaan bebas penyakit dapat dilakukan saat bilangan reproduksi dasarnya $R_0 < 1$. Artinya penyebaran penyakit dalam populasi akan semakin berkurang dan akan kemudian menghilang. Sehingga jenis kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakitnya akan stabil asimtotik lokal. Saat melakukan simulasi diperlukan nilai awal dan parameter. Dalam situasi bebas penyakit diasumsikan bahwa tidak ada migrasi individu keluar atau masuk dari populasi lingkungan pengamatan.

Total populasi sebesar $N = 40878789$ (sesuai Tabel 2.2). Pada sistem persamaan (2.6) tidak memuat variabel N yaitu total populasi, dimana $N = S + E + I + H + R$. Sehingga pada simulasi ini digunakan nilai awal berskala 0 sampai 1. Cara menuntukan nilai awal tersebut adalah dengan membagi setiap subpopulasi dengan total populasi, yakni:

$$S(0) = \frac{S_h}{N}; E(0) = \frac{E_h}{N}; I(0) = \frac{I_h}{N}; H(0) = \frac{H_h}{N}; R(0) = \frac{R_h}{N}$$

Berdasarkan Tabel 2.2 diperoleh nilai awal sebagai berikut:

$$S(0) = 0.9727; E(0) = 0.0203; I(0) = 0.0036; H(0) = 0.00003; R(0) = 0.0033$$

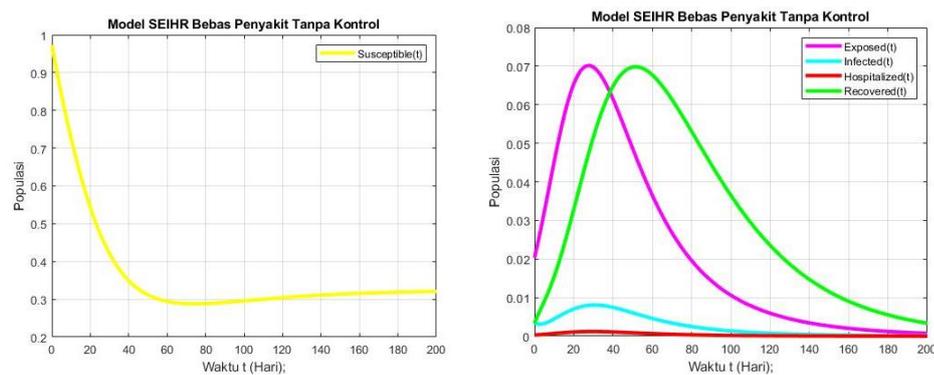
Adapun nilai parameter yang digunakan merupakan persekitaran nilai parameter-parameter yang disajikan pada Tabel 2.2. Hal ini dikarenakan setelah melakukan analisis kestabilan bebas dengan menggunakan parameter Tabel 2.2, titik kesetimbangan bebas penyakitnya bersifat tidak stabil. Sehingga agar sifat titik kesetimbangan bersifat stabil lokal, maka perlu menggunakan parameter – parameter baru dipersekitaran nilai parameter yang terdapat pada Tabel 2.2. Berdasarkan hal tersebut, maka dinyatakan secara rinci dituliskan sebagai berikut :

$$\pi = 0.0125; \mu_H = 0.004; \mu_I = 0.001; \mu = 0.037; \alpha = 0.36; \epsilon = 0.2;$$

$$\tau = 0.005; \gamma = 0.03; \beta = 0.58$$

Dari parameter diatas dapat dihasilkan nilai $R_0 = 0.7288187067 \times 10^5$, maka dapat diketahui bahwa $R_0 < 1$ sehingga berada dalam kondisi bebas penyakit stabil asimtotik lokal. Selanjutnya dilakukan simulasi dalam kondisi bebas penyakit menggunakan model SEIHR tanpa parameter kontrol dan dengan parameter kontrol. Pertama akan dilakukan terlebih dahulu simulasi model SEIHR dalam kondisi bebas penyakit tanpa kontrol sebagai berikut :

a. Hasil Simulasi SEIHR Tanpa Kontrol dalam Kondisi bebas penyakit

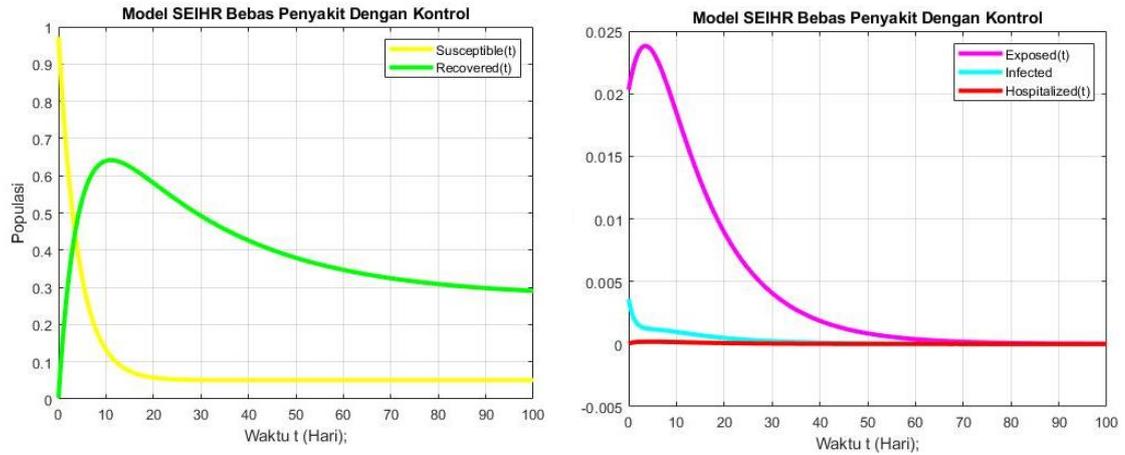


Gambar 4.2 Grafik Solusi Populasi Saat $R_0 < 1$ Tanpa Kontrol

Berdasarkan Gambar 4.2 dapat diketahui, bahwa jumlah populasi *Susceptible* pada hari pertama mengalami kenaikan sebesar 0.9727 jiwa, kenaikan ini disebabkan karena adanya penurunan populasi *Exposed*, *Infected*, *Hospitalized* dan *Recovered*. Kemudian pada hari berikutnya menurun mendekati titik kesetimbangan. Pada grafik solusi saat $R_0 < 1$ tanpa kontrol tersebut menggambarkan adanya perbedaan yang cukup signifikan pada banyaknya populasi *Susceptible* dengan populasi lainnya. Penurunan populasi *Susceptible* disebabkan karena tidak adanya interaksi langsung populasi *Exposed*, *Infected*,

Hospitalized dan *Recovered*. Interaksi langsung ini tidak dapat terjadi karena populasi *Exposed*, *Infected*, *Hospitalized* dan *Recovered* jumlahnya konstan. Jumlah populasi *Exposed* dengan nilai awal 0.0203 jiwa mengalami kenaikan sebesar 0.07 jiwa dalam kurun waktu 1 sampai 20 hari, kenaikan disebabkan karena adanya penurunan populasi *Infected*, dan *Hospitalized*. Kemudian mengalami penurunan hingga dalam kondisi setimbang. Penurunan ini disebabkan populasi *Exposed* tidak ada interaksi langsung dengan populasi *Infected* dan *Hospitalized*. Pada *Infected* mengalami kenaikan dengan nilai awal 0.0036 menjadi 0.008 jiwa dan mengalami penurunan. Dari kurva *Infected* diketahui bahwa kenaikan tidak begitu tinggi dikarenakan tidak adanya individu terinfeksi. Begitu juga pada populasi *Hospitalized* berada dalam keadaan setimbang, hal ini dikarenakan tidak ada interaksi dengan individu yang terinfeksi sehingga tidak ada individu yang dirawat di rumah sakit. Jumlah populasi *Recovered* mengalami kenaikan dengan nilai awal sebesar 0.0033 jiwa menjadi 0.07 jiwa kemudian berangsur menurun hingga mendekati nol, penurunan ini disebabkan karena tidak adanya interaksi langsung antara populasi *Infected*, *Hospitalized*, *Susceptible* dengan populasi *Recovered*. Dapat disimpulkan bahwa kurva solusi cenderung ke titik kesetimbangan bebas penyakit ketika $R_0 < 1$ dengan titik kesetimbangan $(0,324; 0; 0; 0; 0)$. Selain itu, kondisi $R_0 < 1$ tanpa kontrol pengobatan dan vaksinasi menunjukkan bahwa tidak ada penyebaran virus SARS-COV2 pada populasi SEIHR, sehingga penyebaran Virus SARS-COV2 akan semakin berkurang dan menghilang.

b. Hasil Simulasi SEIHR dengan Kontrol dalam Kondisi Bebas Penyakit



Gambar 4.3 Grafik Dinamika Populasi saat $R_0 < 1$ dengan Kontrol

Dari gambar 4.3 diberikan parameter kontrol pengobatan $\theta_1 = 0.7$, $\theta_2 = 0.24$, dan vaksinasi $\theta_3 = 0.12$ dapat diketahui bahwa, populasi *Susceptible* mengalami kenaikan sebesar 0.9727 jiwa hal ini dikarenakan semakin banyaknya orang sehat yang rentan. Kemudian mengalami penurunan hingga konstan di titik 0.05 jiwa karena terdapat laju interaksi dengan populasi *Exposed*, kematian alami serta disebabkan adanya kontrol vaksinasi yang diberikan pada populasi *Susceptible*. Pada populasi *Exposed* mengalami kenaikan sebesar 0.0238 jiwa kemudian mengalami penurunan karena terdapat interaksi dengan laju populasi *Infected* dan *Hospitalized* dan terdapat kematian alami pada populasi tersebut. Pada populasi *Infected* mengalami kenaikan sebesar 0.0036 jiwa karena terdapat laju populasi *Exposed* menjadi populasi *Infected*, kemudian mengalami penurunan dikarenakan adanya kematian alami, populasi *Infected* yang sembuh setelah melakukan isolasi mandiri, serta adanya kontrol pengobatan. Pada populasi *Hospitalized* mengalami kenaikan sebesar 0.00018 jiwa dalam kurun waktu 1 sampai 4 hari karena terdapat laju populasi *Exposed* menjadi populasi *Hospitalized*.

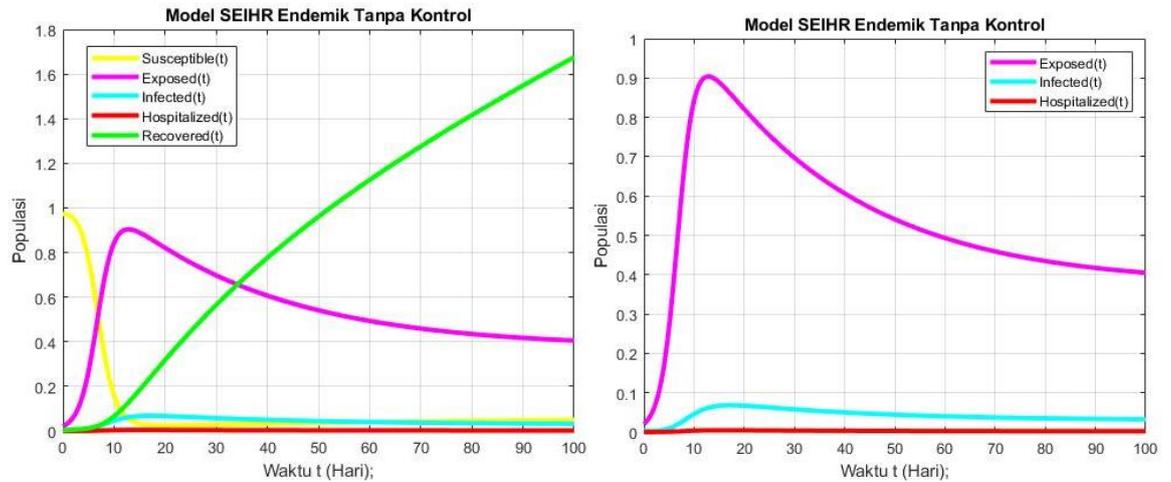
Kemudian populasi *Hospitalized* menurun karena laju populasi yang di rawat di rumah sakit sembuh, kematian alami, serta adanya kontrol dan vaksinasi. Pada populasi *Recovered* mengalami kenaikan sebesar 0.64 jiwa karena terdapat populasi *Infected* dan *Hospitalized* yang mendapatkan pengobatan kemudian menjadi sembuh serta populasi *Susceptible* yang mendapatkan vaksinasi menjadi sembuh. Dapat disimpulkan bahwa vaksinasi pada populasi *Susceptible*, pengobatan pada populasi *Infected* dan *Hospitalized* dalam kondisi endemik mampu meminimalisir penyebaran virus SARS-COV2 terkhusus pada populasi *Susceptible*, *Exposed*, dan *Hospitalized* sehingga populasi *Recovered* menjadi meningkat.

4.2.2 Simulasi Model dalam Kondisi Endemik

Simulasi model matematika SEIHR dalam kondisi endemik dapat dilakukan saat bilangan reproduksi $R_0 > 1$. Maka akan terjadi penyebaran penyakit dalam suatu populasi sehingga terdapat peningkatan infeksi dalam kurun waktu ke waktu hingga wabah menjadi endemik. Kestabilan endemik dikatakan stabil asimtotik lokal jika $R_0 > 1$. Nilai awal untuk setiap subpopulasi yang digunakan pada simulasi ketika endemik sama dengan nilai awal yang digunakan ketika simulasi bebas penyakit.

Nilai parameter simulasi model SEIHR dalam kondisi endemik terdapat pada Tabel 2.2. Berdasarkan nilai parameter tersebut dapat dihasilkan nilai $R_0 = 1.17917847 \times 10^3$, maka dapat diketahui bahwa titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik lokal dan virus SARS-COV2 menjadi endemik. Selanjutnya akan dilakukan simulasi dalam kondisi endemik tanpa parameter kontrol dan dengan parameter kontrol, sebagai berikut :

a. Hasil Simulasi SEIHR Tanpa Kontrol dalam Kondisi Endemik

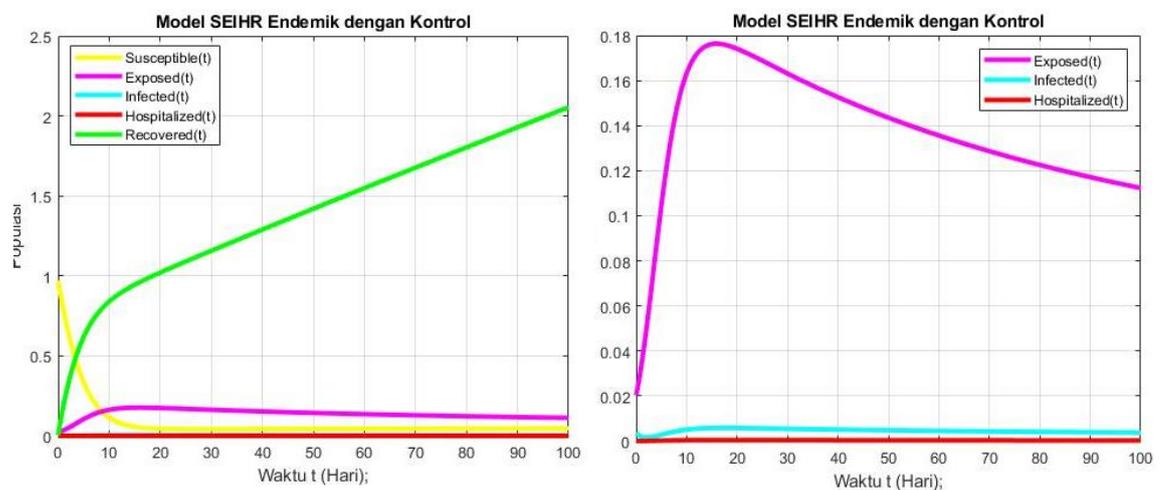


Gambar 4.4 Grafik Dinamika Populasi saat $R_0 > 1$ Tanpa Kontrol

Berdasarkan gambar 4.4 dapat diketahui bahwa pada jumlah populasi *Susceptible* mengalami penurunan jumlah individu dari 0.9727 jiwa menjadi 0.025 jiwa dalam kurun waktu 1 sampai 15 hari, kemudian terus menurun dalam kondisi konstan. Penurunan ini disebabkan karena adanya laju individu yang terpapar dan kematian alami. Pada populasi *Exposed* mengalami kenaikan jumlah populasi sebesar 0.9 jiwa dalam kurun waktu 1 sampai 12 hari, kemudian menurun hingga hari ke-100. Hal ini disebabkan populasi *Exposed* mengalami masa inkubasi karena terpapar oleh virus SARS-COV2, dan kematian alami. Pada populasi *Infected* mengalami kenaikan yang mulanya 3×10^{-3} jiwa menjadi 0.068 jiwa dalam kurun waktu 1 sampai 16 hari, hal ini dikarenakan individu terpapar telah menjadi individu yang terinfeksi setelah melewati masa inkubasi. Kemudian mengalami penurunan dari hari ke-17 sampai hari ke-100 dikarenakan adanya kematian alami dan tingkat kesembuhan pada individu yang terinfeksi. Pada populasi *Hospitalized* mengalami kenaikan sebesar 4.5×10^{-3} dan menurun dan berada dalam keadaan

konstan, penurunsn ini disebabkan individu yang sembuh dan kematian alami. Pada populasi *Recovered* mengalami kenaikan secara drastis sebesar 1.675 jiwa hingga waktu ke-100 hari yang disebabkan oleh kesembuhan dari individu terinfeksi, dirawat di rumah sakit. Dapat disimpulkan bahwa simulasi tersebut dapat menunjukkan perubahan jumlah populasi pada kondisi endemik dan terjadi penyebaran virus SARS-COV2 dalam suatu populasi sehingga dapat menyebabkan wabah atau endemik.

b. Hasil Simulasi SEIHR Dengan Kontrol dalam Kondisi Endemik

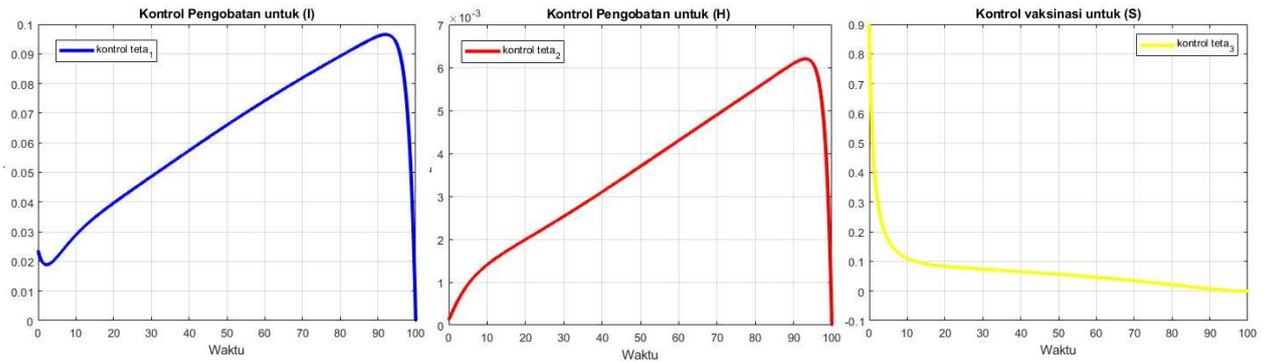


Gambar 4.5 Grafik Dinamika Populasi saat $R_0 > 1$ dengan Kontrol

Dari gambar 4.3 diberikan parameter kontrol $\theta_1 = 0.7$, $\theta_2 = 0.24$, dan vaksinasi $\theta_3 = 0.12$ dapat diketahui bahwa pada populasi *Susceptible* mengalami penurunan yang signifikan pada hari ke-0 dengan jumlah populasi awal sebesar 0.9727 jiwa. Kemudian menurun dan konstan pada hari ke-20 sampai hari ke-100 di titik 0.062 jiwa. Hal ini disebabkan oleh adanya laju populasi *Exposed*, kematian alami, dan kontrol pengobatan pada populasi *Susceptible*. Pada populasi *Exposed* mengalami puncak kenaikan sebesar 0.1764 jiwa hal ini disebabkan oleh adanya

laju populasi *Susceptible* menjadi populasi *Exposed*. Kemudian mengalami penurunan dan konstan menuju nol, hal ini karena adanya laju populasi *Exposed* menjadi populasi *Infected* dan *Hospitalized*, dan kematian alami. Pada populasi *Infected* mengalami kenaikan dengan jumlah populasi 0.0058 jiwa pada hari ke-0 hingga hari ke-16 karena terdapat laju individu terpapar yang terinfeksi, kemudian mengalami penurunan dan konstan pada nilai nol, hal ini karena populasi individu terinfeksi sembuh setelah melakukan isolasi secara mandiri di rumah, kematian alami, dan kontrol pengobatan pada populasi *Infected*. Pada populasi *Hospitalized* mengalami puncak kenaikan sebesar 0.0004 jiwa pada hari ke-16 karena terdapat individu terpapar yang dirawat di rumah sakit. Kemudian menurun dan konstan di nol pada karena populasi *Hospitalized* yang sembuh, kematian alami, kontrol pengobatan pada populasi *Hospitalized*. Pada populasi *Recovered* mengalami kenaikan secara drastis hingga jumlah populasi pada hari ke-100 mencapai 2.05 jiwa. Hal ini dikarenakan semakin banyaknya jumlah individu yang telah sembuh dari populasi *Infected*, *Hospitalized* dan kontrol pengobatan untuk populasi individu *Infected*. Perhatikan bahwa perubahan jumlah populasi pada setiap kompartemen menunjukkan terjadinya penyebaran penyakit dalam populasi. Kesimpulannya, saat $R_0 > 1$ dengan kontrol pengobatan pada populasi *Infected* dan *Hospitalized* dan vaksinasi pada populasi *Susceptible* pada kondisi endemik berpengaruh untuk meminimalisir penyebaran virus SARS-COV2.

Untuk hasil simulasi numerik dari kontrol pengobatan untuk populasi *infected* (θ_1), pengobatan untuk populasi *Hospitalized* (θ_2) dan vaksinasi untuk populasi *Susceptible* (θ_2) adalah sebagai berikut:



Gambar 4.6 Simulasi Kontrol θ_1 , θ_2 , dan θ_3

Gambar 4.6 merupakan hasil simulasi numerik dari kontrol pengobatan dan vaksinasi. Berdasarkan hasil simulasi numerik tersebut, kurva kontrol pengobatan untuk populasi rentan (θ_1) menunjukkan nilai 0.023 di hari pertama kemudian naik maksimum sebesar 0.096 kemudian menurun di hari terakhir yang artinya diberikan pengobatan yang maksimum agar seorang yang terinfeksi agar mempercepat penyembuhan dengan diberikan pengobatan secara mandiri di rumah.

Sedangkan pada kurva pengobatan untuk populasi yang dirawat di rumah sakit (θ_2) menunjukkan nilai 0.0002 pada hari pertama kemudian naik dengan nilai maksimum sebesar 0.006 kemudian menurun hingga hari terakhir yang artinya jumlah individu terinfeksi yang di rawat di rumah sakit diberikan kontrol pengobatan agar mempercepat proses penyembuhan pasien yang terinfeksi. Kemudian pada kurva kontrol vaksinasi pada populasi rentan (θ_3) menunjukkan nilai di angka 0.9 dihari pertama kemudian menurun hingga hari terakhir, hal ini karena pada jumlah individu yang rentan masih sangat tinggi sehingga harus diberikan kontrol agar mengurangi penyebaran virus SARS-COV2.

Berdasarkan hasil uraian yang telah diperoleh sebelumnya, dapat dinyatakan bahwa bentuk kontrol pengobatan untuk individu rentan, pengobatan untuk individu yang dirawat di rumah sakit, serta vaksinasi untuk individu rentan mampu mengurangi jumlah populasi individu yang terinfeksi dan jumlah individu yang dirawat di rumah sakit. Keefektifan tiga kontrol ini selain dapat meminimumkan jumlah populasi individu yang rentan dan individu yang dirawat di rumah sakit, tetapi juga dapat meminimumkan biaya dalam pemberian kontrol tersebut.

4.3 Upaya Pencegahan Virus SARS-COV2 dalam Prespektif Islam

Virus SARS-COV2 adalah salah satu jenis *Tha'un* atau wabah penyakit menular yang ditimpakan kepada suatu kaum untuk menjadi ujian dan peringatan bagi ummat manusia, agar mereka sadar dan kembali taat kepada Allah dan Rasul-Nya. Sekaligus virus SARS-Cov2 merupakan takdir dan ujian keimanan bagi Hamba-Nya. Berdasarkan pada Q.S At-Taghabun ayat 11 bahwa tidak ada orang yang mendapatkan ujian atau musibah kecuali atas izin Allah dan siapa yang beriman kepada Allah akan diberi ketenangan atau petunjuk pada hatinya. Hal ini terdapat keterkaitan bahwa dengan beriman kepada Allah dan menyerahkan segala urusan hanya kepada Allah dapat memberikan ketenangan dan kedamaian kepada manusia. Semakin kuat keimanan seseorang, semakin besar pula ketenangan yang dirasakannya sehingga jiwanya diliputi kebahagiaan setiap saat. Maka sebagai seorang muslim bertawaqqal dan bersandarkan kepada Allah, kerana sesuatu yang terjadi atas kehendak-Nya.

Berdasarkan Hadist Nabi yang menjelaskan tentang *Tha'un* atau Wabah yang diriwayatkan oleh Imam Bukhari dan Imam Muslim. Salah satu cara untuk menangani penyakit menular atau *Tha'un* yaitu dengan *lockdown* atau isolasi mandiri, termasuk *stay at home*. Larangan Rasulullah SAW untuk tidak keluar rumah atau tidak masuk pada daerah yang terkena wabah agar tidak tertular dan menularkan orang lain. Keluar rumah diperbolehkan jika ada kepentingan tertentu dan mendesak, itupun harus hati-hati, menggunakan masker, dan menjaga jarak dengan orang lain atau *social distancing*. Semua cara-cara tersebut merupakan bentuk penghindaran diri dari menularnya wabah, sebagaimana petunjuk hadis Nabi.

Selain itu, pencegahan diri agar tidak terpapar virus SARS-COV2 dengan melakukan pengobatan bagi orang yang sakit. Sebagaimana hadist yang diriwayatkan oleh Sunan Abu Daud 3376: Telah menceritakan kepada kami Muhammad bin 'Ubadah Al-Wasithi telah menceritakan kepada kami Yazid bin Harun telah mengabarkan kepada kami Isma'il bin 'Ayyasy dari Tsa'labah bin Muslim dari Abu Imran Al-Anshari dari Ummu Ad-Darda ia berkata: Rasulullah bersabda: Artinya: "*Sesungguhnya Allah telah menurunkan penyakit dan obat, dan menjadikan bagi setiap penyakit terdapat obatnya, maka berobatlah dan jangan berobat dengan sesuatu yang haram!*". Pada hadist ini berkaitan dengan anjuran untuk berobat bagi yang sakit (Mardiana, 2021). Hadist lain yang memerintahkan kepada seorang mukmin untuk berobat ialah hadist yang terdapat dalam kitab *Musnad Ahmad* yang diriwayatkan dari Syarik yakni: *Telah menceritakan kepada kami Ibn Ziyad yakni al-Mutallib bin Ziyad Telah menceritakan kepada kami Ziyad bin 'Ilqah dari Usamah bin Syarik bahwa Rasullullah saw bersabda: "Berobatlah kalian wahai hamba Allah, karena Allah 'azza wajalla tidak pernah menurunkan penyakit, kecuali juga menurunkan obatnya kecuali kematian dan kepikunan".* Pada hadist ini juga diketahui bahwa penyakit yang tidak ada obatnya adalah kematian dan kepikunan.

BAB V PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan tujuan dan hasil pembahasan pada bab sebelumnya, maka diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Berdasarkan analisis dinamik model matematika penyebaran SARS-COV2 pada populasi SEIHR (*Susceptible– Exposed – Infected – Hospitalized – Recovered*) dengan kontrol pengobatan untuk populasi *Infected* dan *Hospitalized* dan vaksinasi untuk populasi *Susceptible* diperoleh :
 - a. Titik kesetimbangan bebas penyakit menghasilkan 1 titik tetap sebagai berikut

$$E_0(S_h^0, E_h^0, I_h^0, H_h^0, R_h^0) = \left(\frac{\pi}{\mu}, 0, 0, 0, 0\right)$$

Titik kesetimbangan bebas penyakit ini bersifat tidak stabil berdasarkan hasil perhitungan kriteria Routh-Hurwitz dan nilai eigennya.

- b. Titik kesetimbangan endemik menghasilkan 6 titik tetap sebagai

$$E_1(S_h^*, E_h^*, I_h^*, H_h^*, R_h^*)$$

$$S_h^* = \frac{\gamma + \tau + \mu}{\epsilon}$$

$$E_h^* = \frac{\pi\epsilon - \gamma\mu - \tau\mu - \mu^2}{(\gamma + \tau + \mu)\epsilon}$$

$$I_h^* = \frac{\gamma(\pi\epsilon - \gamma\mu - \tau\mu - \mu^2)}{\epsilon(\gamma + \tau + \mu)(\mu_I + \alpha)}$$

$$H_h^* = \frac{(\pi\epsilon - \gamma\mu - \tau\mu - \mu^2)\tau}{\epsilon(\gamma + \tau + \mu)(\mu_H + \beta)}$$

$$R_h^* = \frac{(\alpha\gamma(\mu_H + \beta) + \beta\tau(\mu_I + \alpha))(\pi\epsilon - \gamma\mu - \tau\mu - \mu^2)}{\epsilon\mu(\gamma + \tau + \mu)(\mu_I + \alpha)(\mu_H + \beta)}$$

Titik kesetimbangan endemik bersifat stabil asimtotik lokal berdasarkan hasil perhitungan kriteria Routh-Hurwitz dan nilai eigennya.

- c. Bilangan reproduksi dasar yang diperoleh adalah $R_0 = 1.17917847 \times 10^3 > 1$. Sehingga penyakit SARS-COV2 dapat menjadi wabah atau akan terjadi endemik.
- d. Untuk mengurangi jumlah populasi individu rentan dan meminimumkan biaya yang dikeluarkan, diberikan variabel kontrol pengobatan dan vaksinasi. Diperoleh kontrol optimal yang diperoleh untuk model SEIHR dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin yaitu :

$$\theta_1^*(t) = \min \left\{ \frac{(\lambda_3 - \lambda_5)I_h}{2A_3}, 1 \right\}$$

$$\theta_2^*(t) = \min \left\{ \frac{(\lambda_4 - \lambda_5)H_h}{2A_4}, 1 \right\}$$

$$\theta_3^*(t) = \min \left\{ \frac{(\lambda_1 - \lambda_5)S_h}{2A_5}, 1 \right\}$$

2. Berdasarkan hasil simulasi numerik model matematika SEIHR penyebaran virus SARS-COV2 sebelum dan setelah diberi kontrol berupa pengobatan untuk populasi *Infected* dan *Hospitalized*, dan vaksinasi untuk populasi *Susceptible* dapat meminimalkan jumlah populasi individu *Infected*, *Hospitalized*, *Susceptible* serta meminimalkan biaya yang dikeluarkan.

5.2 Saran untuk Penelitian Lanjutan

Pada penelitian ini telah membahas model matematika pada penyebaran virus SARS-COV2 pada populasi SEIHR (*Susceptible, Exposed, Infected, Hospitalized, Recovered*) yang melibatkan parameter kontrol pengobatan dikenakan populasi *Infected* dan *Hospitalized* dan vaksinasi pada populasi *Susceptible*. Pada penelitian selanjutnya diharapkan dapat dilakukan modifikasi model penyebaran virus SARS-COV2 dengan penambahan parameter kontrol lain berupa parameter jaga jarak, memakai masker, mencuci tangan dengan sabun, dan menjahui kerumunan kepada individu yang rentan terinfeksi. Dengan demikian dapat diketahui upaya paling efektif dalam mengurangi penyebaran virus SARS-COV2 serta dapat diketahui biaya yang paling minimal yang dikeluarkan untuk pengontrol.

DAFTAR PUSTAKA

- Abbas, I. (n.d.). At-Taghabun-Tafsir Sayyid Qutub. In *tafsir Fi Zhilail-Qur'an XI: Vol. Juz XXVII*.
- Al-'Asqalani, S. I. (2017). *Asbabul Wurud Hadis*. Riyad : Darul Asimah.
- Asamoah, J. K. K., Oduro, F. T., Bonyah, E., & Seidu, B. (2017). Modelling of Rabies Transmission Dynamics Using Optimal Control Analysis. *Journal of Applied Mathematics*.
- Blyuss, K. B., & Kyrychko, Y. N. (2005). On a basic model of a two-disease epidemic. *Applied Mathematics and Computation*, 160(1), 177–187.
- Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2001). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems (7th Edition)*. New York : John Wiley & Sons Inc.
- Boyce, W. E., DiPrima, R. C., & Meade, D. B. (2017). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. (11th Editi). Hoboken : John Wiley & Sons.
- Driessche, P. van den. (2017). Reproduction numbers of infectious disease models. *Infectious Disease Modelling*, 2(3), 288–303.
- Firdaus, F. (2020). Virus Corona Dalam Perspektif Sunnah. *Jurnal Al-Mubarak: Jurnal Kajian Al-Qur'an dan Tafsir*, 5(1), 13–29. <https://doi.org/10.47435/al-mubarak.v5i1.292>
- Grantmacher, F. R. (1959). The Theory of Matrices. In *The Theory of Matrices*. Chelsea Publishing Company. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-99234-6>
- Hadiningsih, A. Y. (2010). *Kajian Model Epidemi SIR Deterministik dan Stokastik Pada Waktu Diskrit*. Surabaya : Jurusan Matematika ITS.
- Hahn, W. (1967). *Stability of Motion*. Springer-Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-50085-5>
- Hairi, P. J. (2020). Implikasi Hukum Pembatasan Sosial Berskala Besar Terkait Pencegahan COVID-19. *Info Singkat Bidang Hukum*, 12(April), 1–6.
- Ivorra, B., Ferrández, M. R., Vela-Pérez, M., & Ramos, A. M. (2020). Mathematical modeling of the spread of the coronavirus disease 2019 (COVID-19) taking into account the undetected infections. The case of China. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 88, 105303.
- Joseph J. Distefano, A. R. S. & I. J. W. (1990). *Feedback and Control System DiStefano_Schaum_Ch01-09.pdf* (hal. 1–6).
- Kar, T. K., & Jana, S. (2013). A theoretical study on mathematical modelling of an infectious disease with application of optimal control. *BioSystems*, 111(1), 37–50. <https://doi.org/10.1016/j.biosystems.2012.10.003>

- Kartono. (2012). *Persamaan Diferensial Biasa Model Matematika Fenomena Perubahan*. Yogyakarta : Graha Ilmu.
- Keshet, L. E. (2005). Mathematical models in biology. In *Mathematical Biosciences* (Vol. 96, Nomor 1). SIAM.
- Lewis, F. L., Vrabie, D., & Syrmos, V. L. (2012). Optimal control. In *John Wiley & Sons*.
- Lexy J. Moleong, D. M. A. (2019). Metodologi Penelitian Kualitatif (Edisi Revisi). *PT. Remaja Rosda Karya*, 3(2), 1–46.
<https://doi.org/10.1016/j.carbpol.2013.02.055>
- Luo, Y., Zhang, F., Liu, Y., & Gao, S. (2021). Analysis and optimal control of a Huanglongbing mathematical model with resistant vector. *Infectious Disease Modelling*, 6, 782–804. <https://doi.org/10.1016/j.idm.2021.05.004>
- Manaqib, M., Fauziah, I., & Mujiyanti, M. (2019). Mathematical Model for MERS-COV Disease Transmission with Medical Mask Usage and Vaccination. *InPrime: Indonesian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 1(2), 97–109.
<https://doi.org/10.15408/inprime.v1i2.13553>
- Mandal, M., Jana, S., Nandi, S. K., Khatua, A., Adak, S., & Kar, T. K. (2020). A model based study on the dynamics of COVID-19: Prediction and control. *Chaos, Solitons and Fractals*, 136, 109889.
- Mardiana, D. (2021). Rasulullah Saw. dan Pencegahan Wabah Covid-19: Studi Tematik Hadis-hadis Penyakit Menular. *Jurnal Penelitian Ilmu Ushuluddin*, 1(3), 147–167.
- Martcheva, M. (2015). Chapter 2: Introduction to Epidemic Modeling” in An Introduction to Mathematical Epidemiology. *An Introduction to Mathematical Epidemiology*, 9–31.
- Maya, R. (2014). *Diktat Kuliah Persamaan Diferensial Biasa*. Bandung : UIN Sunan Gunung Djati.
- Morris, J. (1962). The Routh and Routh-Hurwitz Stability Criteria. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, 34 No.1(January), 25–27.
<https://doi.org/10.1108/eb033509>
- Mumbu, A. rahman J., & Hugo, A. K. (2020). Mathematical modelling on COVID-19 transmission impacts with preventive measures: a case study of Tanzania. *Journal of Biological Dynamics*, 14(1), 748–766.
<https://doi.org/10.1080/17513758.2020.1823494> To
- Naidu, D. S. (2002). *Optimal Control Systems*. New York : CRC Press.
- Putri, N. W., & Rahmah, S. P. (2020). Edukasi Kesehatan untuk Isolasi Mandiri dalam Upaya Penanganan COVID-19. 1(6), 547–553.
- Rodrigues, H. S. F. (2014). *Optimal Control and Numerical Optimization Applied*

to *Epidemiological Models*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1401.7390>

- Ross, S. L. (1984). *Differential Equations 3rd edition* (Third Edit). New York : John Willey & Sons, Inc.
- Shaikh, A. S., Shaikh, I. N., & Nisar, K. S. (2020). A mathematical model of COVID-19 using fractional derivative: outbreak in India with dynamics of transmission and control. *Advances in Difference Equations*, 373(1).
- Shihab, M. Q. (2016). Tafsir Al-Lubab (Kajian Metodologi Tafsir Kontemporer). *Nur El Islam*, 3(1), 196–212.
- Tadesse Ega, T. (2015). Modeling the Dynamics of Rabies Transmission with Vaccination and Stability Analysis. *Applied and Computational Mathematics*, 4(6), 409–419.
- Waluya, S. B. (2006). *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta : Graha Ilmu.
- Wiggers, S. L., Pedersen, P., & Tracts, S. (1914). *Routh – Hurwitz-Liénard – Chipart Criteria*.

LAMPIRAN

Lampiran 1 Tabel Data Publik Kasus Covid-19 Provinsi Jawa Timur Mei – Juli 2021

Sumber : <https://infocovid19.jatimprov.go.id>

No	Tanggal	Data Konfirmasi					Data Suspek dan Probable						
		Konfirmasi	Sembuh	Meninggal	Meninggal Covid	Meninggal Alami	Suspek	Probabel	Diisolasi	Discarded	Meninggal	RS Rujukan	Karantina Mandiri
1	5/1/2021	147977	135259	10722	9366	1356	7075	1020	3811	67806	1481	820	439
2	5/2/2021	148183	135469	10749	9388	1361	7054	1023	3784	67891	1483	827	388
3	5/3/2021	148398	135729	10772	9407	1365	7079	1024	3812	68004	1484	845	416
4	5/4/2021	148688	135971	10803	9435	1368	7130	1022	3859	68099	1460	870	432
5	5/5/2021	148959	136203	10834	9462	1372	7167	1023	3890	69292	1461	907	435
6	5/6/2021	149214	136458	10859	9482	1377	7180	1025	4076	69408	1456	912	437
7	5/7/2021	149446	136744	10881	9502	1379	7194	1026	4091	69528	1463	917	442
8	5/8/2021	149671	136956	10904	9521	1383	7132	1029	4042	69655	1467	866	434
9	5/9/2021	149901	137155	10921	9536	1385	7136	1032	4040	69723	1468	875	421
10	5/10/2021	150107	137375	10943	9552	1391	7165	1033	4068	69893	1470	879	440
11	5/11/2021	150364	137569	10976	9584	1392	7184	1035	4087	69998	1474	902	434
12	5/12/2021	150612	137805	10999	9605	1394	7116	1033	4019	70125	1475	872	400
13	5/13/2021	150760	137961	11010	9614	1396	7090	1033	3993	69568	1474	846	431
14	5/14/2021	150901	138134	11027	9630	1397	7165	1033	4068	69763	1475	817	382
15	5/15/2021	151084	138366	11052	9651	1401	7034	1033	3939	69703	1319	802	371
16	5/16/2021	151248	138530	11070	9668	1402	7025	1033	3929	69781	1320	777	387
17	5/17/2021	151450	138809	11097	9691	1406	7003	963	3907	67683	1323	767	390
18	5/18/2021	151677	139044	11119	9711	1408	7014	3161	3916	70528	1429	746	393
19	5/19/2021	151931	139254	11148	9737	1411	7007	1036	3908	70637	1430	738	402
20	5/20/2021	152190	139501	11167	9756	1411	6986	1038	3896	70728	1426	719	457
21	5/21/2021	152434	139688	11184	9771	1413	6973	1039	3881	70812	1428	693	399
22	5/22/2021	152667	139897	11199	9785	1414	6975	1040	3882	70954	1429	678	410
23	5/23/2021	152895	140097	11216	9802	1414	6978	974	3884	71016	1431	688	400
24	5/24/2021	153122	140309	11237	9821	1416	6964	1044	3871	71082	1427	681	399
25	5/25/2021	153339	140498	11263	9845	1418	6989	1046	3895	71174	1431	674	417
26	5/26/2021	153596	140634	11285	9865	1420	6813	1045	3885	70149	1431	652	421
27	5/27/2021	153814	140826	11310	9889	1421	5758	1050	3893	70217	1431	654	432
28	5/28/2021	154060	141040	11331	9908	1423	5779	1053	3911	70114	1431	670	434
29	5/29/2021	154315	141253	11350	9926	1424	5742	1053	3876	70369	1435	635	420
30	5/30/2021	154532	141428	11369	9945	1424	5728	1050	3863	70433	1437	615	409
31	5/31/2021	154781	141655	11398	9971	1427	5704	1049	3841	70542	1438	599	407
32	6/1/2021	155006	141839	11424	9995	1429	5735	1012	3872	70309	1438	616	424
33	6/2/2021	155245	142055	11452	10019	1433	5733	1044	3872	70302	1438	608	413
34	6/3/2021	155505	142270	11478	10044	1434	5801	1047	3940	70747	1497	637	454
35	6/4/2021	155806	142536	11506	10071	1435	5855	1043	3992	70841	1416	674	468
36	6/5/2021	156050	142777	11530	10091	1439	5872	1045	4008	70918	1501	685	480
37	6/6/2021	156326	142928	11553	10111	1442	5847	1045	3983	70993	1504	673	452
38	6/7/2021	156627	143142	11583	10140	1443	5865	1047	4000	71067	1505	683	458
39	6/8/2021	157016	143396	11620	10174	1446	5879	1047	4015	71143	1506	775	466
40	6/9/2021	157417	143619	11653	10203	1450	5926	1047	4062	71220	1507	695	506
41	6/10/2021	157842	143867	11689	10235	1454	5953	1049	4089	71302	1509	715	502
42	6/11/2021	158283	144130	11725	10266	1459	5957	1053	4093	71392	1508	727	475
43	6/12/2021	158841	144339	11756	10296	1460	6028	1056	4162	71448	1505	680	508
44	6/13/2021	159059	144556	11791	10328	1463	5997	1064	4133	71567	1506	742	506
45	6/14/2021	159464	144863	11825	10359	1466	5986	971	4122	71679	1508	793	491
46	6/15/2021	159972	145118	11870	10401	1469	6097	969	4232	71787	1509	779	571
47	6/16/2021	160663	145381	11923	10451	1472	6075	976	4211	71902	1510	772	551
48	6/17/2021	161385	145728	11981	10504	1477	6098	1071	4232	72023	1512	800	529
49	6/18/2021	162116	146143	12024	10545	1482	6175	1070	4310	72189	1510	755	551
50	6/19/2021	162809	146491	12074	10586	1488	6311	1076	4467	72303	1512	828	532
51	6/20/2021	163548	146881	12127	10636	1491	6316	1077	4448	72395	1513	910	572
52	6/21/2021	164267	147272	12187	10692	1495	6358	1011	4490	72494	1514	948	554
53	6/22/2021	165013	147660	12231	10728	1503	9407	1025	4680	72720	1514	1036	687
54	6/23/2021	165886	148100	12295	10780	1515	9618	885	4891	72720	1514	1158	790
55	6/24/2021	166831	148520	12352	10830	1522	9687	895	4960	73508	1516	1215	793
56	6/25/2021	167806	149032	12414	10886	1528	9787	873	5059	74601	1516	1340	817
57	6/26/2021	168795	149613	12470	11033	1437	10026	787	5299	77708	1517	1215	1066
58	6/27/2021	169684	150137	12534	11082	1452	9996	921	5196	77896	1519	1224	909
59	6/28/2021	170765	150721	12609	11145	1464	10149	911	5358	78015	1520	1344	1051
60	6/29/2021	171830	151343	12706	11228	1478	10414	916	5614	78152	1368	1419	1166
61	6/30/2021	173033	152042	12799	11311	1488	10518	810	5717	78242	1372	1447	1177
62	7/1/2021	174430	152913	12882	11382	1500	10684	8417	8795	78207	1403	1485	1260
63	7/2/2021	175818	153727	12976	11466	1510	11012	919	6208	78805	1377	1634	1464
64	7/3/2021	177257	154487	13072	11551	1521	11000	909	6196	78749	1309	1472	1428
65	7/4/2021	178725	155288	13173	11638	1535	10964	922	6111	79183	1379	1445	1356
66	7/5/2021	180268	156275	13291	11739	1552	11046	919	6193	79272	1327	1561	1414
67	7/6/2021	182076	157467	13423	11858	1565	11244	930	6210	78674	1330	1616	1422
68	7/7/2021	184624	158640	13601	12481	1120	11159	930	6112	76722	1390	1750	1484
69	7/8/2021	187175	160086	13795	12185	1610	11355	932	6309	76890	1336	1735	1508
70	7/9/2021	189705	162029	14013	12376	1637	11350	946	6301	80137	1346	1615	1379
71	7/10/2021	191942	163420	14236	12562	1674	11526	956	6472	80408	1352	1485	1421
72	7/11/2021	194361	165034	14527	12835	1692	11659	961	6603	80562	1357	1978	1507
73	7/12/2021	197103	166703	14698	12988	1718	11796	885	6754	78364	1363	2060	1579
74	7/13/2021	203372	168834	14877	13140	1745	12195	971	7132	80913	1364	2165	1773
75	7/14/2021	210460	170630	15108	13335	1762	12316	981	7077	80296	1362	2193	1738
76	7/15/2021	218990	172565	15324	13542	1782	12718	990	7654	81378	1368	2288	1894
77	7/16/2021	226522	174855	15656	13814	1842	12727	1017	7767	81707	1381	2230	1904
78	7/17/2021	234442	177522	15919	14045	1874	12682	1010	7760	82004	1384	2227	1866
79	7/18/2021	239168	180508	16252	14319	1933	12744	1007	7876	82272	1386	2132	1785
80	7/19/2021	243592	183377	16596	14635	1961	12843	1008	7981	83542	1395	2103	1815
81	7/20/2021	249246	185945	16864	14861	2003	12984	1020	8126	83720	1405	2147	1866
82	7/21/2021	253105	188911	17207	15160	2047	12854	1022	7746	81602	1410	1786	1813
83	7/22/2021	259730	192067	17486	15407	2079	12920	1031	7961	84483	1416	1726	1930
84	7/23/2021	266642	196124	17829	15727	2102	12914	1024	7960	84689	1419	1731	2028
85	7/24/2021	272341	200591	18195	16033	2162	12952	1021	8041	84860	1427	1752	2015
86	7/25/2021	277104	205238	18513	16311	2202	12913	1016	8050	85472	1429	1767	1937
87	7/26/2021	280261	209663										

RIWAYAT HIDUP



Fitrotun Nisa yang akrab dipanggil Pipit, lahir di Tuban pada tanggal 01 Januari 2000. Anak kedua dari dua bersaudara dari Bapak Yasin dan Ibu bernama Fatmi, seta merupakan adik dari Nur Hidayat. Bertempat tinggal di Dusun Boan, Desa Kebomlati, Kecamatan Plumpang, Kabupaten Tuban, Jawa Timur. Pendidikan yang pernah ditempuh yaitu Pendidikan TK-PKK Kebomlati (2005-2006). Pendidikan tingkat dasar ditempuh di SDN Kebomlati dan lulus pada tahun 2012. Kemudian pada tingkat menengah pertama ditempuh di MTs Islamiyah Kebomlati dan lulus pada tahun 2015. Pada tingkat menengah atas melanjutkan di SMA Negeri 1 Tuban lulus pada tahun 2018. Selanjutnya pada tahun 2018 penulis melanjutkan ke tingkat perguruan tinggi di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil program studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Fitrotun Nisa'
NIM : 18610985
Fakultas / Program Studi : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Analisis Dinamik Penyebaran Virus SARS-COV2 Model SEIHR dengan Pengobatan dan Vaksinasi
Pembimbing I : Ari Kusumastusi, M.Pd., M.Si
Pembimbing II : Erna Herawati, M.Pd

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	01 Maret 2022	Konsultasi Bab I dan II	1.
2.	19 April 2022	Konsultasi Kajian Agama	2.
3.	27 Mei 2022	Konsultasi Revisi Bab I, II dan III	3.
4.	31 Mei 2022	Konsultasi Revisi Kajian Agama	4.
5.	31 Mei 2022	ACC Seminar Proposal	5.
6.	07 Juni 2022	Konsultasi Bab IV	6.
7.	30 September 2022	Konsultasi Bab V	7.
8.	05 Oktober 2022	Konsultasi Revisi Bab IV dan V	8.
9.	22 November 2022	Konsultasi Kajian Agama	9.
10.	28 November 2022	Konsultasi Revisi Kajian Agama	10.
11.	29 November 2022	ACC Seminar Hasil	11.
12.	09 Desember 2022	Konsultasi Revisi Bab IV dan V	12.
13.	15 Desember 2022	ACC Bab IV dan V	13.
14.	16 Desember 2022	ACC Kajian Integrasi	14.
15.	19 Desember 2022	ACC Matriks Revisi Seminar Hasil	15.
16.	21 Desember 2022	ACC Sidang Skripsi	16.
17.	28 Desember 2022	ACC Keseluruhan	17.

Malang, 28 Desember 2022
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Ely Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005