JUMLAH JARAK EKSENTRIK PADA DIGRAF CAYLEY DARI GRUP DIHEDRAL-$2n$

SKRIPSI

OLEH:
NAZLA AYUNI BANAT
NIM. 17610021

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022

JUMLAH JARAK EKSENTRIK PADA DIGRAF CAYLEY DARI GRUP DIHEDRAL-$2n$

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
NAZLA AYUNI BANAT
NIM. 17610021

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2022

JUMLAH JARAK EKSENTRIK PADA DIGRAF CAYLEY DARI GRUP DIHEDRAL-$2n$

SKRIPSI

Oleh
Nazla Ayuni Banat
NIM. 17610021

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Malang, 26 Desember 2022

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Mohammad Nafie Jauhari, M.Si	Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si
NIDT. 19870218 20160801 1 056	NIP. 19770521 200501 2 004

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

JUMLAH JARAK EKSENTRIK PADA DIGRAF CAYLEY DARI GRUP DIHEDRAL-$2n$

SKRIPSI

Oleh
Nazla Ayuni Banat
NIM. 17610021

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Malang, 28 Desember 2022

Ketua Penguji	: Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph. D	....
Anggota Penguji 1	: Muhammad Khudzaifah, M.Si	....
Anggota Penguji 2	: Mohammad Nafie Jauhari, M.Si	....
Anggota Penguji 3	: Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Nazla Ayuni Banat

NIM : 17610021

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Jumlah Jarak Eksentrik pada Digraf Cayley dari Grup Dihedral-$2n$

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perilaku tersebut.

Malang, 28 Desember 2022

Yang membuat pernyataan,

Nazla Ayuni Banat

NIM. 17610021

MOTO

“Keajaiban adalah nama lain dari Kerja keras”

PERSEMBAHAN

بسم الله الرحمن الرحيم

Puji Syukur kepada Allah Swt atas segala nikmat dan pertolongan yang telah diberikan hingga terselesaikannya skripsi ini. Tak lupa skripsi ini penulis persembahkan kepada ibunda tercinta, adik, calon imam, juga seluruh keluarga besar yang selalu memberikan semangat dan dukungan baik secara fisik, moral dan spiritual. Serta untuk teman-teman penulis yang senantiasa memberikan dukungan selama masa perkuliahan hingga pengerjaan skripsi ini.

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, hidayah serta karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang dijadikan sebagai salah satu tugas akhir serta syarat untuk memperoleh gelar sarjana matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Selama penulisan skripsi ini penulis menyadari bahwa tidak dapat menyelesaikan skripsi ini tanpa adanya bimbingan, semangat, doa dan motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terimakasih kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Mohammad Nafie Jauhari, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang selalu memberikan arahan serta bimbingan kepada penulis.
5. Ari Kusumatuti, M.Pd., M.Si, selaku dosen pembimbing II yang selalu memberikan arahan dan semangat kepada penulis.
6. Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph. D., selaku ketua penguji pada sidang skripsi.
7. Muhammad Khudzaifah, M.Si, selaku anggota penguji 1 pada sidang skripsi.
8. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
9. Orang tua tercinta yang senantiasa memberikan dukungan, kasih sayang, doa dan semangat kepada penulis.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang membutuhkan dan mohon maaf jika terdapat kekurangan dalam penulisan.

Malang, 28 Desember 2022

Nazla Ayuni Banat

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL .... **i**
HALAMAN PENGAJUAN .... **ii**
HALAMAN PERSETUJUAN .... **iii**
HALAMAN PENGESAHAN .... **iv**
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN .... **v**
MOTO .... **vi**
PERSEMBAHAN .... **vii**
KATA PENGANTAR .... **viii**
DAFTAR ISI .... **x**
DAFTAR TABEL .... **xii**
DAFTAR GAMBAR .... **xiii**
ABSTRAK .... **xiv**
ABSTRACT .... **xv**
مستخلص البحث .... **xvi**
BAB I PENDAHULUAN **1**
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 3
1.3 Tujuan Penelitian 3
1.4 Manfaat Penelitian 3
1.5 Definisi Istilah 4
BAB II KAJIAN TEORI **6**
2.1 Teori Pendukung 6
2.1.1 Grup 6
2.1.2 Grup Dihedral 7
2.1.3 Graf 8
2.1.4 Digraf 9
2.1.5 Derajat Titik 9
2.1.6 Jalan dan Lintasan 10
2.1.7 Graf Terhubung 11
2.1.8 Digraf Cayley 11
2.1.9 Eksentrisitas Titik 13
2.1.10 Jarak pada Graf 13
2.1.11 Jumlah Jarak Eksentrik 14
2.2 Kajian Integrasi Jumlah Jarak Eksentrik dengan Al-Quran 15
2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung 16
BAB III METODE PENELITIAN **18**
3.1 Jenis Penelitian 18
3.2 Pra Penelitian 18
3.3 Tahapan Penelitian 18
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN **20**
4.1 Jumlah Jarak Eksentrik dari $\overrightarrow{\boldsymbol{Cay}}\,(\boldsymbol{D_{2n}}, \boldsymbol{S})\ \forall \boldsymbol{n} \in \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \dots, \mathbf{8}$ 20
4.1.1 Jumlah Jarak Eksentrik pada $\overrightarrow{\boldsymbol{Cay}}(\boldsymbol{D_6}, \boldsymbol{S})$ 20
4.1.2 Jumlah Jarak Eksentrik pada $\overrightarrow{\boldsymbol{Cay}}(\boldsymbol{D_8}, \boldsymbol{S})$ 23
4.1.3 Jumlah Jarak Eksentrik pada $\overrightarrow{\boldsymbol{Cay}}(\boldsymbol{D_{10}}, \boldsymbol{S})$ 27

4.1.4 Jumlah Jarak Eksentrik pada $\overrightarrow{Cay}(D_{12}, S)$ 33
4.1.5 Jumlah Jarak Eksentrik pada $\overrightarrow{Cay}(D_{14}, S)$ 39
4.1.6 Jumlah Jarak Eksentrik pada $\overrightarrow{Cay}(D_{16}, S)$ 47
4.2 Jumlah Jarak Eksentrik pada $\overrightarrow{Cay}(D_{2n}, S)$ 57
4.2.1 Pola Eksentrisitas Titik pada $\overrightarrow{Cay}(D_{2n}, S)$ 57
4.2.2 Pola Jarak Titik pada $\overrightarrow{Cay}(D_{2n}, S)$ 57
BAB V PENUTUP 71
5.1 Kesimpulan 71
5.2 Saran untuk Penelitian Lanjutan 71
DAFTAR PUSTAKA 72
RIWAYAT HIDUP 73

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Tabel Cayley 8
Tabel 2.2 Tabel Cayley dari Grup D_6 12
Tabel 4.1 Tabel $\overrightarrow{Cay}(D_6, S)$ 20
Tabel 4.2 Tabel $\overrightarrow{Cay}(D_8, S)$ 23
Tabel 4.3 Tabel $\overrightarrow{Cay}(D_{10}, S)$ 28
Tabel 4.4 Tabel $\overrightarrow{Cay}(D_{12}, S)$ 33
Tabel 4.5 Tabel $\overrightarrow{Cay}(D_{14}, S)$ 39
Tabel 4.6 Tabel $\overrightarrow{Cay}(D_{16}, S)$ 47

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Graf G 9
Gambar 2.2 Digraf D 9
Gambar 2.3 Graf L 13
Gambar 2.4 Graf M 13
Gambar 2.5 Graf N 13
Gambar 2.6 $\overrightarrow{Cay}(D_6, S)$ 13
Gambar 2.7 Graf O 14
Gambar 4.1 $\overrightarrow{Cay}(D_6, S)$ 21
Gambar 4.2 $\overrightarrow{Cay}(D_8, S)$ 24
Gambar 4.3 $\overrightarrow{Cay}(D_{10}, S)$ 28
Gambar 4.4 $\overrightarrow{Cay}(D_{12}, S)$ 34
Gambar 4.5 $\overrightarrow{Cay}(D_{14}, S)$ 40
Gambar 4.6 $\overrightarrow{Cay}(D_{16}, S)$ 48

ABSTRAK

Banat, Nazla Ayuni. 2022. **Jumlah Jarak Eksentrik pada Digraf Cayley dari Grup Dihedral**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si. (II) Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si.

Kata kunci: jumlah jarak eksentrik, digraf, digraf Cayley, grup dihedral

Digraf Cayley $\overrightarrow{Cay}(\mathbb{G}, S)$ adalah graf berarah yang dibentuk dari suatu grup yang berhingga $(\mathbb{G},*)$ dengan himpunan titik $V = \mathbb{G}$ dan himpunan sisi berarah $E = \{(g, gs): g \in \mathbb{G},\ s \in S\}$. Misalkan untuk g_1 dan g_2 di G, terdapat sisi berarah dari g_1 ke g_2 jika dan hanya jika $g_1 s = g_2$ untuk suatu $s \in S$. Dengan kata lain $\overrightarrow{Cay}(\mathbb{G}, S)$ di peroleh dari graf $Cay(\mathbb{G}, S)$ dengan memberi arah pada setiap sisinya. Misal G adalah graf terhubung, jumlah jarak eksentrik dari graf G didefinisikan sebagai $\xi^{ds}(G) = \sum_{u \in V(G)} e(u)D(u)$, dimana $e(u)$ merupakan eksentrisitas titik u di G dan $D(u)$ merupakan jumlah titik u di G.

Tujuan dari penelitian ini adalah memperoleh rumus jumlah jarak eksentrik pada digraf Cayley dari grup dihedral $\overrightarrow{Cay}(\mathbb{G}, S)$. Langkah untuk mencari rumus Jumlah jarak eksentrik pada $\overrightarrow{Cay}(\mathbb{G}, S)$ dengan mencari eksentrisitas setiap titik pada $\overrightarrow{Cay}(\mathbb{G}, S)$ dan mencari jumlah jarak setiap titik pada $\overrightarrow{Cay}(\mathbb{G}, S)$ sehingga diperoleh rumus jumlah jarak eksentrik pada $\overrightarrow{Cay}(\mathbb{G}, S)$ adalah sebagai berikut

$$\xi^{ds}\left(\overrightarrow{Cay}(D_{2n})\right) = \begin{cases} \dfrac{n^4 + 5n^3 - n^2 - 5n}{2}, & n \text{ ganjil } \geq 3, n \in \mathbb{N} \\ \dfrac{n^4 + 6n^3 + 4n^2 - 8n}{2}, & n \text{ genap} \geq 4, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

ABSTRACT

Banat, Nazla Ayuni. 2022. **On the Eccentric-Distance Sum of Cayley Digraph of Dihedral-$2n$ Group.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisor: (I) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si. (II) Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si.

Keyword: eccentric-distance sum, digraph, Cayley digraph, dihedral group.

Cayley digraph $\overrightarrow{Cay}(\mathbb{G}, S)$ is directed graph formed from a finite group $(\mathbb{G},*)$ with a set of vertices $V = \mathbb{G}$ and a set of directed edges $E = \{(g, gs): g \in \mathbb{G},\ s \in S\}$. Suppose that for g_1 and g_2 in G, there are directed edges from g_1 to g_2 if and only if $g_1 s = g_2$ for some $s \in S$. In other words $\overrightarrow{Cay}(\mathbb{G}, S)$ is obtained from the graph $Cay(\mathbb{G}, S)$ by giving direction to each edge. Let G be a connected graph, the sum of the eccentric distances of a graph G is defined as $\xi^{ds}(G) = \sum_{u \in V(G)} e(u)D(u)$, where $e(u)$ is the eccentricity of point u in G and $D(u)$ is the distance sum of u in G.

The purpose of this research if to find a formula of eccentric-distance sum of Cayley digraph of dihedral group $\overrightarrow{Cay}(\mathbb{G}, S)$. Steps to find the formula for the sum of the eccentric distances on $\overrightarrow{Cay}(\mathbb{G}, S)$ are by finding the eccentricity of each vertices on $\overrightarrow{Cay}(\mathbb{G}, S)$ and looking for the sum of the distances for each vertices on $\overrightarrow{Cay}(\mathbb{G}, S)$ to obtain the formula for the sum of the eccentric distances at $\overrightarrow{Cay}(\mathbb{G}, S)$ is as follows

$$\xi^{ds}\left(\overrightarrow{Cay}(D_{2n})\right) = \begin{cases} \dfrac{n^4 + 5n^3 - n^2 - 5n}{2}, & n \text{ odd } \geq 3, n \in \mathbb{N} \\ \dfrac{n^4 + 6n^3 + 4n^2 - 8n}{2}, & n \text{ even} \geq 4, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

مستخلص البحث

بنات، نزلى عيوني. ٢٠٢٢. مجموع المســافات اللامركزية على كايلي ديغراف من مجموعة ثنائية الســطوح.البحث الجامعي. قسـم الرياضـيات ،كلية العلوم والتكنولوجيا ، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسـلامية الحكومية مالانج. المشـرف : (١) محمد نافع جوهري، الماجيستير (٢) أري كوسوماأستوتي، الماجستير

الكلمات المفتاحية: مجموع المسافات اللامتراكزة ، الديغراف ،كايلي ديغراف ، المجموعة ثنائية السطوح

كايلي ديغراف $\overrightarrow{Cay}(\mathbb{G},S)$ هو رسم بياني موجه يتكون من مجموعة محدودة $(\mathbb{G},*)$ مع مجموعة من النقاط $V=\mathbb{G}$ ومجموعة الحواف الموجهة $E=\{(g,gs):g\in\mathbb{G},\ s\in S\}$. على سبيل المثال ل g_1 و g_2 في G،هناك حواف موجهة من g_1 الى g_2 إذا وفقط إذا كانت $g_1s=g_2$ بعض $s\in S$. بعبارة أخرى ، يتم الحصول على $\overrightarrow{Cay}(\mathbb{G},S)$ ، من الرسم البياني $Cay(\mathbb{G},S)$، بإعطاء اتجاه لكل حافة. لنفترض أن G هو رسم بياني متصل ، ومجموع المسافات اللامتراكزة للرسم البياني G مُعرَّف على أنه $\xi^{ds}(G)=\sum_{u\in V(G)}e(u)D(u)$. $e(u)$ هو الانحراف المركزي للنقطة u في G و $D(u)$ هو عدد نقاط u في G.

الغرض من هذا البحث هو الحصول على صيغة مجموع المسافات اللامتراكزة على كايلي ديغراف من مجموعة ثنائي السطوح $\overrightarrow{Cay}(\mathbb{G},S)$. خطوات لإيجاد صيغة مجموع المسافات اللامتراكزة على $\overrightarrow{Cay}(\mathbb{G},S)$ بإيجاد الانحراف المركزي لكل رأس على $\overrightarrow{Cay}(\mathbb{G},S)$ للحصول على صيغة مجموع المسافات اللامتراكزة في $\overrightarrow{Cay}(\mathbb{G},S)$) على النحو التالي

$$\xi^{ds}\left(\overrightarrow{Cay}(D_{2n})\right)=\begin{cases}\dfrac{n^4+5n^3-n^2-5n}{2}, & n \text{ الفردية } \geq 3, n\in\mathbb{N}\\ \dfrac{n^4+6n^3+4n^2-8n}{2}, & n \text{ حتى } \geq 4, n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam kehidupan sehari-hari matematika memiliki banyak manfaat juga memiliki cabang ilmu yang banyak. Salah satu cabang ilmu matematika adalah teori graf. Teori Graf banyak dimanfaatkan di kehidupan sehari-hari, seperti dalam pengaturan arus lalu lintas, arus listrik, pengaturan lampu lalu lintas, pengaturan jadwal, pemancaran radio, dan masih banyak lainnya.

Graf $G = (V, E)$ merupakan pasangan terurut yang terdiri dari dua himpunan berhingga, dengan himpunan V merupakan himpunan titik-titik dan himpunan E merupakan himpunan sisi, sedemikian sehingga setiap sisi menghubungkan dua titik yang disebut dengan titik akhir dari sisi (Tikasari, 2013). Banyaknya unsur yang ada di $V(G)$ disebut order dari G dan banyaknya unsur yang ada di $E(G)$ disebut dengan ukuran dari G (Fatimah, 2014).

Graf yang memiliki sisi yang menghubungkan dua titik dan mempunyai arah dari titik awal i ke titik lainnya j dinamakan dengan digraf (Kreyszig, 2002). Digraf merupakan himpunan pasangan (V, E) di mana V merupakan himpunan tak kosong yang disebut titik, dan E merupakan himpunan pasangan terurut (u, v) yang mempunyai arah dari u ke v, dari titik-titik (u, v) di V disebut dengan busur (Chartrand dkk, 2016).

Teori graf ini menjelaskan bahwa terdapat hubungan antara titik-titik tertentu seperti pada kehidupan yang berkaitan dengan manusia yang selalu terhubung dengan yang lain atau *habluminannas*, seorang muslim tidak akan lengkap tanpa adanya keseimbangan antara *habluminallah* dan *habluminannas*. Seperti firman Allah Swt dalam surat Al Baqarah ayat 213 yang artinya sebagai berikut:

"*Manusia itu adalah umat yang satu. (setelah timbul perselisihan), maka Allah mengutus para nabi, sebagai pemberi peringatan, dan Allah menurunkan bersama mereka Kitab yang benar, untuk memberi keputusan di antara manusia tentang perkara yang mereka perselisihkan. Tidaklah berselisih tentang Kitab itu melainkan orang yang telah didatangkan kepada mereka Kitab, yaitu setelah datang kepada mereka keterangan-keterangan yang nyata, karena dengki antara mereka sendiri. Maka Allah memberi petunjuk orang-orang yang beriman kepada kebenaran tentang hal yang mereka perselisihkan itu dengan kehendak-Nya. Dan Allah selalu memberi petunjuk orang yang dikehendaki-Nya kepada jalan yang lurus*"

Berdasarkan firman Allah di atas, mengacu pada Tafsir Ibnu Katsir manusia dulunya adalah umat yang bersatu dalam keimanan lalu mereka bertikai paham sehingga sebagian dari mereka beriman dan sebagian yang lain kafir, Allah mengutus para nabi untuk membawa kabar gembira bagi mereka yang beriman dan akan masuk surga, dan peringatan bagi orang-orang kafir akan masuk neraka.

Graf Cayley merupakan salah satu dari bentuk gabungan dari graf dan grup. Arthur Cayley merupakan ilmuwan matematika yang memperkenalkan graf Cayley. Misalkan $\mathbb{G}$ adalah grup berhingga dan S merupakan subhimpunan dari $\mathbb{G}$ yang tidak memuat elemen identitas yang dijadikan sebagai sisi pada suatu graf (Okal dkk, 2019).

Jarak antara titik u dan v, ditulis dengan $d(u, v)$ adalah panjang lintasan terpendek dari titik u ke titik v dan jumlah jarak titik u dinotasikan dengan $D(u)$ adalah jumlah jarak antara titik u dengan semua titik yang berbeda di G (Padmapriya & Mathad, 2017). Eksentrisitas titik u pada graf G ditulis dengan $e(u)$ merupakan jarak terjauh antara titik u ke sebarang titik di G sehingga $e(u) = d(u, v)$, di mana v merupakan titik eksentrik. Sedangkan jumlah jarak eksentrik dari suatu graf G merupakan perkalian dari eksentrisitas titik dengan jumlah dari semua jarak yang dapat dinotasikan dengan

$$\xi^{ds}(G) = \sum_{u \in V(G)} e(u)D(u)$$

(Padmapriya & Mathad, 2017).

Permasalahan yang ada mengenai jumlah jarak eksentrik dari suatu graf adalah menentukan pola umum dari jumlah jarak eksentrik pada digraf Cayley dari grup dihedral. Padmapriya dan Mathad (2017) menganalisis dan membuktikan bentuk umum dari jumlah jarak eksentrik dari berbagai macam graf salah satunya adalah graf roda. Maka mengacu pada penelitian tersebut, penulis tertarik untuk mengembangkan kajian tentang jumlah jarak eksentrik pada digraf Cayley dari grup dihedral. Berdasarkan uraian di atas, penulis memilih judul dari penelitian ini adalah "Jumlah Jarak Eksentrik pada Digraf Cayley dari Grup Dihedral-$2n$"

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini yaitu bagaimana menentukan rumus jumlah jarak eksentrik pada digraf Cayley dari grup dihedral-$2n$?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini yaitu untuk mendeskripsikan rumus jumlah jarak eksentrik pada digraf Cayley dari grup dihedral-$2n$.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah dapat memperkaya informasi dalam perkembangan teori graf tentang jumlah jarak eksentrik pada digraf Cayley dari grup dihedral yang nantinya juga dapat dijadikan sebagai bahan rujukan untuk penelitian selanjutnya.

1.5 Definisi Istilah

Untuk menghindari kesalahpahaman dalam penafsiran istilah maka dalam penelitian ini perlu adanya batasan-batasan pengertian sebagai berikut:

1. Grup $(G,*)$ adalah jika G himpunan tak kosong dan $*$ merupakan operasi biner di G yang memenuhi aksioma-aksioma grup.
2. Grup dihedral-$2n$ adalah suatu grup yang anggotanya simetri yang beraturan dari segi n dinotasikan dengan D_{2n} di mana untuk setiap $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ dengan komposisi " $\circ$ " yang memenuhi aksioma-aksioma grup.
3. Graf adalah himpunan terurut yang terdiri dari dua himpunan berhingga (kumpulan yang memiliki banyak elemen berhingga), dengan himpunan V merupakan himpunan titik-titik yang disebut titik dan himpunan E merupakan himpunan yang menguhubungkan garis-garis yang disebut sisi, sedemikian hingga setiap sisi menghubungkan dua titik yang disebut dengan titik akhir dari sisi. Dapat dituliskan dengan $G = (V, E)$.
4. Digraf merupakan himpunan pasangan (V, E) di mana V merupakan himpunan tak kosong yang disebut titik, dan E merupakan himpunan pasangan terurut (u, v) yang mempunyai arah dari u ke v, dari titik-titik (u, v) di V disebut busur..
5. Digraf Cayley dinotaskan dengan $\overrightarrow{Cay}(\mathbb{G}, S)$ sebagai graf berarah yang dibentuk dari suatu grup yang berhingga $(\mathbb{G},*)$ dengan himpunan titik $V = \mathbb{G}$ dan himpunan sisi berarah $E = \{(g, gs): g \in \mathbb{G},\ s \in S\}$. Misalkan untuk g_1 dan g_2 di G, terdapat sisi berarah dari g_1 ke g_2 jika dan hanya jika $g_1 s = g_2$

suatu $s \in S$. Dengan kata lain $\overrightarrow{Cay}(\mathbb{G}, S)$ di peroleh dari graf $Cay(\mathbb{G}, S)$ dengan memberi arah pada setiap sisinya.

6. Eksentrisitas titik $e(v)$ merupakan jarak maksimal antara titik v ke sembarang titik di graf G yang dinotasikan dengan $e(v) = \max\{d(u, v) | u \in V(G)\}$.
7. Jumlah jarak eksentrik adalah eksentrik titik yang dikalikan dengan jumlah jarak semua titik di G.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

Pada suatu penelitian membutuhkan beberapa teori untuk dijadikan bahan referensi dalam penelitiannya. Berikut ini merupakan kumpulan teori yang memudahkan untuk memahami dalam proses penelitian ini.

2.1.1 Grup

Suatu sistem aljabar $(G,*)$ dikatakan grup jika G merupakan himpunan tak kosong dan $*$ merupakan operasi biner di G yang memenuhi sifat-sifat berikut.

1. Operasi $*$ bersifat tertutup di G
2. Operasi $*$ bersifat Asosiatif

$$(a * b) * c = a * (b * c), \forall a, b, c \in G$$

3. G memiliki unsur Identitas (I)

$$e * a = a * e = a, \forall a \in G$$

4. Setiap unsur G memiliki invers

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e, \forall a \in G$$

(Irawan, 2018).

Contoh 2.1

Sistem aljabar $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup karena memenuhi aksioma grup, sebagai berikut:

1. Untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$, maka $(a + b) \in \mathbb{Z}$. Dalam hal ini menyatakan bahwa jumlah dari dua bilangan bulat juga bulat. Maka operasi + tertutup di $\mathbb{Z}$.

2. Untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$, maka $a + (b + c) = (a + b) + c$. Sehingga operasi $+$ sifat asosiatif di $\mathbb{Z}$.
3. Terdapat unsur identitas (I) yaitu $0 \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $a + 0 = 0 + a = a$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$.
4. Untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$, terdapat a^{-1} yaitu $(-a) \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$. Unsur $(-a)$ adalah invers dari a.

2.1.2 Grup Dihedral

Grup dihedral-$2n$ merupakan himpunan simetri-simetri dari segi-n beraturan yang dinotasikan dengan D_{2n}, di mana untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq 3$ dengan operasi komposisi "$\circ$" yang memenuhi aksioma-aksioma grup (Dummit & Foote, 2004).

Grup dihedral D_{2n} merupakan komposisi dari rotasi dan refleksi. Sehingga dapat dituliskan sebagai berikut:

$$D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^n, s, sr, sr^2, \dots, sr^n\}.$$

Grup dihedral memiliki beberapa tetapan yang berlaku pada unsur-unsur dari grup dihedral-$2n$, yaitu:

1. $\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\} = < r >$ dan $\{s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\} = < r, s >$
2. $r^n = s^2 = 1$ dan 1 adalah elemen identitas.
3. $s \neq r^i$ untuk semua i, $i = 1, 2, \dots, n$
4. $sr^i \neq sr^j$ untuk semua $0 \leq i, j \leq n - 1$ dengan $i \neq j$, jadi

   $$D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$$

   Yaitu setiap elemen dapat dituliskan secara tunggal dalam bentuk $s^k r^i$ untuk $k = 0$ atau $k = 1$ dan $0 \leq i \leq n - 1$

5. $sr^i = r^{-i}s$

(Irawan, 2018).

Contoh 2.2

Diberikan grup dihedral-6 (D_6)

karena $6 = 2 \times 3$ maka $n = 3$ dan unsur-unsur yang terdapat pada D_6 sbagai berikut:

$$D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$$

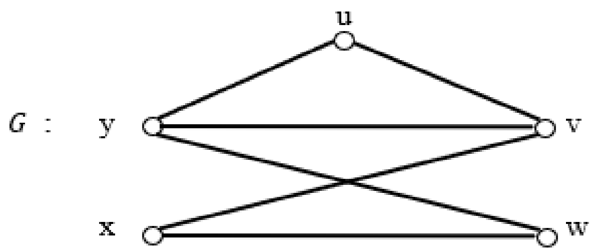
Dengan menggunakan sifat-sifat grup dihedral, maka hasil operasi setiap unsur dengan unsur lainnya di grup dihedral-6 dapat disajikan dalam tabel cayley berikut:

Tabel 2.1 Tabel Cayley

$\circ$	1	r	r^2	s	sr	sr^2
1	1	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	sr
r^2	r^2	1	r	sr	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	1	r	r^2
sr	sr	sr^2	s	r^2	1	r
sr^2	sr^2	s	sr	r	r^2	1

2.1.3 Graf

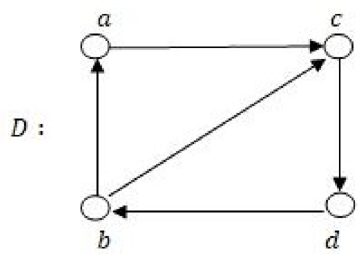
Graf $G = (V, E)$ merupakan pasangan terurut yang terdiri dari dua himpunan berhingga, dengan himpunan V merupakan himpunan titik-titik dan himpunan E merupakan himpunan sisi, sedemikian sehingga setiap sisi menghubungkan dua titik disebut dengan titik akhir dari sisi (Tikasari, 2013). Banyaknya unsur yang ada di $V(G)$ disebut order dari G dan banyaknya unsur yang ada di $E(G)$ disebut dengan ukuran dari G (Fatimah, 2014). Sebagai contoh, graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{u, v, w, x, y\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{(u, v), (u, y), (v, x), (v, y), (w, x), (w, y)\}$.



Gambar 2.1 Graf G

2.1.4 Digraf

Suatu graf yang memiliki sisi atau titik yang menghubungkan dua titik dan mempunyai arah dari titik awal i ke titik lainnya j maka dinamakan dengan digraf (Kreyszig, 2002). Digraf merupakan himpunan pasangan (V, E) di mana V merupakan himpunan tak kosong yang disebut titik, dan E merupakan himpunan pasangan terurut (u, v) yang mempunyai arah dari u ke v, dari titik-titik (u, v) di V disebut busur (Chartrand dkk, 2016). Berikut merupakan contoh dari digraf.



Gambar 2.2 Digraf D

2.1.5 Derajat Titik

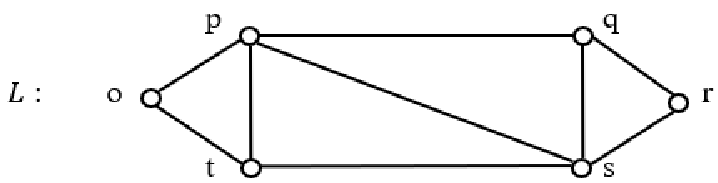
Derajat titik v pada graf G dinotasikan dengan deg G (v) atau bisa ditulis dengan $\deg(v)$ yang merupakan banyaknya titik di G yang bisa terhubung langsung dengan v (Nurhidayat, 2013). Titik terasing merupakan titik yang derajatnya 0 dan titik ujung merupakan titik yang berderajat 1. Jika semua titik di

G terdapat derajat terbesar maka disebut dengan derajat maksimum ditulis dengan $\Delta(G)$. Sebaliknya, jika dari semua titik di G terdapat derajat terkecil maka disebut dengan derajat minimum yang ditulis dengan $\delta(G)$. Maka dari itu, jika v adalah titik pada graf G dengan order n, maka $0 \leq \delta(G) \leq \deg v \leq \Delta(G) \leq n-1$ (Chartrand dkk, 2016). Berdasarkan Gambar 2.1, maka diperoleh bahwa $\deg u = \deg w = \deg x = 2$ dan $\deg v = \deg y = 3$. Jadi, $\delta(G) = 2$ dan $\Delta(G) = 3$.

2.1.6 Jalan dan Lintasan

Suatu jalan W dari titik u ke titik v dari suatu graf G, dinotasikan dengan $u - v$, merupakan barisan berhingga yang berselang-seling yang dimulai dengan titik u dan diakhiri dengan titik v sehingga membentuk $W: u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n = v$ dengan $e_i = (v_{i-1}, v_i)\ \forall i = 1,2,3,\dots,n$ merupakan sisi pada graf G dan n merupakan panjang dari W. Jika $v_0 \neq v_n$, maka W disebut jalan terbuka. Sedangkan jika $v_0 = v_n$ maka W disebut dengan jalan tertutup. Jalan terbuka yang semua titiknya berbeda maka disebut lintasan (Abdussakir dkk, 2009).

Sebagai contoh perhatikan graf L pada Gambar 2.3 sebagai berikut:

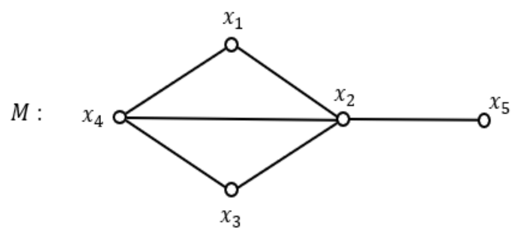


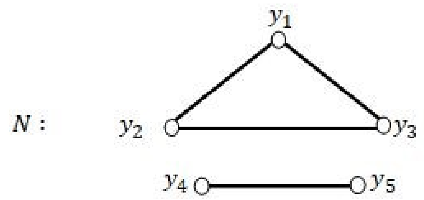
Gambar 2.3 Gra$f$ L

Berdasarkan Gambar 2.3, maka jalan $W_1 = o, p, q, r, s, p, t, o$ dan jalan $W_2 = o, p, q, r, s, p, t$ merupakan jalan di L. Jalan W_1 merupakan jalan yang tertutup dan jalan W_2 merupakan jalan yang terbuka.Jalan W_1 mempunyai panjang 7 dan jalan W_2 mempunyai panjang 6.Jalan $W_3 = o, p, q, r, s, t$ adalah lintasan di L karena semua titiknya berbeda.

2.1.7 Graf Terhubung

Misalkan graf G memiliki titik u dan v yang berbeda. Suatu graf G dikatakan terhubung jika untuk setiap titik u dan v terdapat lintasan $u - v$ pada graf G. Begitu pun sebaliknya graf G dikatakan graf yang tak terhubung jika dua titik berbeda titik u dan titik v pada graf G tidak terdapat lintasan $u - v$ (Abdussakir dkk, 2009). Sebagai contoh perhatikan graf M pada gambar 2.4 merupakan graf yang terhubung dan graf N pada gambar 2.5 merupakan graf tak terhubung sebagai berikut:





Gambar 2.4 Graf M

Gambar 2.5 Graf N

2.1.8 Digraf Cayley

Digraf cayley merupakan graf Cayley yang memiliki arah. Arthur Cayley merupakan ilmuwan matematika yang memperkenalkan graf Cayley. Misalkan $\mathbb{G}$ adalah grup berhingga dan S merupakan subhimpunan dari $\mathbb{G}$ yang tidak memuat elemen identitas yang dijadikan sisi pada graf yang dinotasikan dengan $Cay(\mathbb{G}, S)$ sedemikian sehingga:

1. Untuk setiap elemen di G merupakan himpunan titik dari $Cay(\mathbb{G}, S)$ sehingga banyaknya elemen di G sama dengan banyaknya titik pada graf $Cay(\mathbb{G}, S)$.
2. Diberikan (g, h) merupakan sisi di graf Cayley jika dan hanya jika $g^{-1}h \in S$ atau $h^{-1}g \in S$ dengan $I_{\mathbb{G}} \notin S$

Tidak adanya elemen identitas pada S mengakibatkan graf $Cay(\mathbb{G}, S)$ tidak memuat loop (Okal dkk, 2019).

Digraf Cayley dinotaskan dengan $\overrightarrow{Cay}(\mathbb{G}, S)$ sebagai graf berarah yang dibentuk dari suatu grup yang berhingga $(\mathbb{G},*)$ dengan himpunan titik $V = \mathbb{G}$ dan himpunan sisi berarah $E = \{(g, gs): g \in \mathbb{G},\ s \in S\}$. Misalkan untuk g_1 dan g_2 di G, terdapat sisi berarah dari g_1 ke g_2 jika dan hanya jika $g_1 s = g_2$ untuk suatu $s \in S$. Dengan kata lain $\overrightarrow{Cay}(\mathbb{G}, S)$ di peroleh dari graf $Cay(\mathbb{G}, S)$ dengan memberi arah pada setiap sisinya (Okal dkk, 2019).

Contoh 2.3

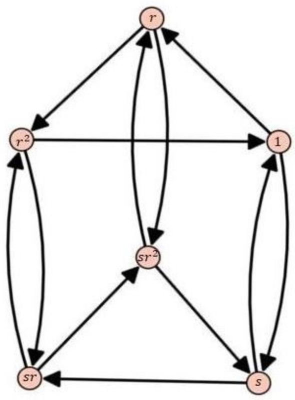
Untuk membangun digraf Cayley dari Grup Dihedral-6 di mana $n = 3$, terlebih dahulu diketahui elemen-elemen dari grup dihedral-6 (D_6) yaitu $\{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Didapatkan tabel Cayley dari D_6 seperti berikut:

Tabel 2.2 Tabel Cayley dari Grup D_6

$\circ$	1	r	r^2	s	sr	sr^2
1	1	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	sr
r^2	r^2	1	r	sr	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	1	r	r^2
sr	sr	sr^2	s	r^2	1	r

sr^2	sr^2	s	sr	r	r^2	1

Selanjutnya dengan menggunakan tabel Cayley tersebut maka dapat diperoleh digraf Cayley dari grup dihedral-6 (D_6) sebagai berikut:



Gambar 2.6 $\overrightarrow{Cay}(D_6, S)$

2.1.9 Eksentrisitas Titik

Eksentrisitas titik $e(v)$ merupakan jarak maksimal antara titik v ke sembarang titik di graf G yang dinotasikan dengan

$$(v) = \max\{d(u, v)|u \in V(G)\}.$$

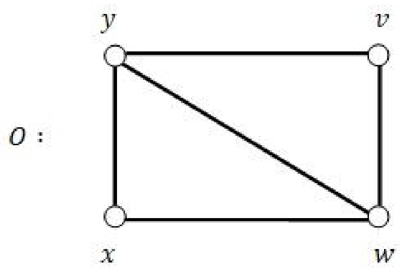
(Alqesmah dkk, 2021). Eksentrisitas maksimal pada graf G disebut dengan diameter yang ditulis dengan $diam(G)$, sedangkan eksentrisitas minimal pada graf G disebut dengan radius yang ditulis dengan $rad(G)$ (Umilasari, 2015). Suatu titik $v \in V(G)$ dengan $e(v) = rad(v)$ maka disebut dengan *center* atau pusat G. Himpunan semua titik pusat dapat disebut dengan *center* atau pusat pada G (Kreyszig, 2002).

2.1.10 Jarak Pada Graf

Jarak antara dua titik u dan v pada graf G yang terhubung sehingga terdapat lintasan antara $u - v$ yang dilambangkan dengan $d(u, v)$, merupakan jumlah sisi pada lintasan terpendek yang menghubungkan antara titik u dan v (Alqesmah dkk, 2021). Jumlah jarak u pada graf G dinotasikan dengan $D(u)$ adalah merupakan jumlah jarak dari titik u ke semua titik pada graf G dapat dituliskan sebagai berikut:

$$D(u) = \sum_{v \in V(G)} d(u, v)$$

(Padmapriya & Mathad, 2017). Ditunjukkan suatu graf G pada Gambar 2.7 sebagai berikut:



Gambar 2.7 Graf O

Berdasarkan pada Gambar 2.7 maka diperoleh jarak $d(y, v) = 1$ karena panjang minimum dari lintasan $y - v$ adalah 1 begitupun dengan $d(y, w) = d(y, x) = 1$.

2.1.11 Jumlah Jarak Eksentrik

Jumlah jarak eksentrik dapat digunakan untuk memprediksi sifat biologis dan fisik dalam aktivitas struktur dan menampilkan aktivitas biologi dan aktivitas fisik (Padmapriya & Mathad, 2017).

Jumlah jarak eksentrik dari suatu graf G adalah eksentrisitas titik yang dikalikan dengan jumlah jarak semua titik di G. Jumlah jarak eksentrik dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$\xi^{ds}(G) = \sum_{u \in V(G)} e(u) D(u)$$

di mana $e(u)$ adalah eksentrisitas titik u di G dan $D(u)$ adalah jumlah jarak dari titik u ke semua titik di G (Padmapriya & Mathad, 2017).

2.2 Kajian Integrasi Jumlah Jarak Eksentrik dengan Al-Quran

Salah satu kajian dari beberapa ilmu matematika mengenai materi graf di mana dalam graf terdapat jumlah jarak eksentrik yang merupakan eksentrik titik yang dikalikan dengan jumlah jarak semua titik pada graf. Di mana eksentrik merupakan jarak maksimal antara titik ke sembarang titik pada suatu graf. Dalam islam titik-titik yang terhubung pada suatu graf dapat diintepretasikan dengan hubungan dengan manusia-manusia atau *habluminannas* yang mana setiap manusia saling membutuhkan ketika saudaranya lagi kesusahan maka sebagai saudara yang lain untuk saling membantu dengan menyedekahkan harta yang dimilikinya merupakan bentuk intepretasi dari sebuah eksentrisitas pada suatu graf dan banyaknya harta yang dipinjamkan ataupun disedekahkan antara manusia satu dengan yang lainnya berbeda-beda dengan semakin besar atau maksimal harta yang kita pinjamkan maupun sedekahkan ke banyak orang maka akan semakin banyak juga nikmat yang diberikan Allah kepada kita merupakan bentuk intepretasi dari Jumlah jarak Eksentrik. Seperti firman Allah Swt yang ada dalam Al Baqarah ayat 245 yang artinya:

"*Barangsiapa meminjami Allah dengan pinjaman yang baik maka Allah melipatgandakan ganti kepadanya dengan banyak. Allah menahan dan melapangkan (rezeki) dan kepada-Nyalah kamu dikembalikan.*"

Dijelaskan juga dalam kitab tafsir Jalalain yang mana Orang yang bersedia memberi pinjaman kepada Allah yaitu dengan menafkahkan hartanya di jalan Allah dengan pinjaman yang baik dan ikhlas maka Allah akan menggandakan pembayarannya (hingga berlipat-lipat) mulai dari sepuluh sampai tujuh ratus lebih sebagaimana yang akan kita temui nanti dan Allah akan menyempitkan atau menahan rezeki orang yang dikehendaki-Nya, juga menjadi cobaan dan kepada-Nya kamu dikembalikan di akhirat dengan jalan kebangkitan dari mati dan akan dibalas segala amal perbuatan.

2.3 Kajian Topik Dengan Teori Pendukung

Digraf Cayley merupakan graf Cayley yang memiliki arah. Arthur Cayley merupakan ilmuwan matematika yang memperkenalkan graf Cayley. Misalkan $\mathbb{G}$ adalah grup berhingga dan S merupakan subhimpunan dari $\mathbb{G}$ yang tidak memuat elemen identitas yang dijadikan sisi pada graf yang dinotasikan dengan $Cay(\mathbb{G}, S)$ sedemikian sehingga:

1. Untuk setiap elemen di G merupakan himpunan titik dari $Cay(\mathbb{G}, S)$ sehingga banyaknya elemen di G sama dengan banyaknya titik pada graf $Cay(\mathbb{G}, S)$.
2. Diberikan (g, h) merupakan sisi di graf Cayley jika dan hanya jika $g^{-1}h \in S$ atau $h^{-1}g \in S$ dengan $I_{\mathbb{G}} \notin S$

Tidak adanya elemen identitas pada S mengakibatkan graf $Cay(\mathbb{G}, S)$ tidak memuat loop (Okal dkk, 2019).

Digraf Cayley dinotaskan dengan $\overrightarrow{Cay}(\mathbb{G}, S)$ sebagai graf berarah yang dibentuk dari suatu grup yang berhingga $(\mathbb{G}, *)$ dengan himpunan titik $V = \mathbb{G}$ dan himpunan sisi berarah $E = \{(g, gs): g \in \mathbb{G},\ s \in S\}$. Misalkan untuk g_1 dan g_2 di G, terdapat sisi berarah dari g_1 dan g_2 jika dan hanya jika $g_1 s = g_2$ dengan $s \in S$. Dengan kata lain $\overrightarrow{Cay}(\mathbb{G}, S)$ di peroleh dari graf $Cay(\mathbb{G}, S)$ dengan memberi arah pada setiap sisinya (Okal dkk, 2019).

Jumlah jarak eksentrik adalah eksentrik titik yang dikalikan dengan jumlah jarak semua titik di G. Di mana eksentrik merupakan jarak maksimal antara titik ke sembarang titik pada suatu graf (Alqesmah dkk, 2021). Pada penelitian Kurfia (2017) terdahulu jumlah jarak eksentrik pada suatu graf komplemen graf invers dari grup dihedral pada penelitiannya memperoleh pola rumus umum dari jumlah jarak eksentrik pada suatu graf invers grup dihedral. Penelitian lain juga dilakukan tentang jumlah jarak eksentrik graf dari latis himpunan kuasa oleh Safitri (2018) yang memperoleh pola rumus umum jumlah jarak eksentrik pada graf dari latis himpunan kuasa.

Jumlah jarak eksentrik dapat digunakan untuk membuat pola umum dari jumlah jarak eksentrik pada digraf Cayley dari grup dihedral. Perhitungan untuk menentukan pola umum dengan mencari tiap-tiap nilai eksentrik pada digraf Cayley dari grup dihedral dan juga mencari jumlah jarak tiap graf pada digraf Cayley dari grup dihedral dengan begitu setiap perhitungan nilai eksentrik dibuat pola umumnya begitupun dengan jumlah jarak pada suatu graf tersebut dengan begitu untuk hasil dari pola jumlah jarak eksentrik pada digraf Cayley dari grup dihedral juga menggunakan cara yang sama maka akan ditemukan pola umum jumlah jarak eksentrik pada digraf Cayley dari grup dihedral.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini menggunakan kualitatif. Jenis penelitian yang menggunakan pengumpulan data dengan mengadakan studi penelaahan buku-buku, jurnal maupun hasil penelitian.

3.2 Pra Penelitian

Proses pada penelitian ini diawali dengan memahami landasan teori yang berkaitan dengan topik penelitian sebagai acuan dasar dalam penelitan ini dengan cara studi penelaahan buku-buku teori graf, jurnal tentang jumlah jarak eksentrik maupun hasil penelitian yang sesuai dengan topik yaitu tentang jumlah jarak eksentrik juga digraf cayley dari grup dihedral.

3.3 Tahapan Penelitian

Adapun tahapan penelitian dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menentukan jumlah jarak eksentrik dari digraf Cayley dari grup dihedral-$2n$, untuk $n \in \{3, 4, 5, \dots, 8\}$.
2. Mencari nilai eksentrisitas titik pada digraf Cayley dari Grup dihedral-$2n$, untuk $n \in \mathrm{N}\ \forall n \geq 3$.
3. Mencari jumlah jarak masing-masing titik pada digraf Cayley dari grup dihedral-$2n$, untuk $n \in \mathrm{N}\ \forall n \geq 3$.
4. Mencari nilai jumlah jarak eksentrik pada digraf Cayley dari grup dihedral-$2n$, untuk $n \in \mathrm{N}\ \forall n \geq 3$.

5. Menentukan jumlah jarak eksentrik pada digraf Cayley dari grup dihedral-$2n$, untuk $n \in \mathrm{N}$ $\forall n \geq 3$.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Jumlah Jarak Eksentrik dari $\overrightarrow{Cay}(D_{2n}, S)$ $\forall n \in \{3, 4, 5, \dots, 8\}$

Akan membahas tentang jumlah jarak eksentrik dari $\overrightarrow{Cay}(D_{2n}, S)$ dengan $n \in \{3, 4, 5, \dots, 8\}$ untuk memudahkan mencari jumlah jarak eksentrik pada digraf Cayley dari grup dihedral $D_{2n}, n \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq 3$.

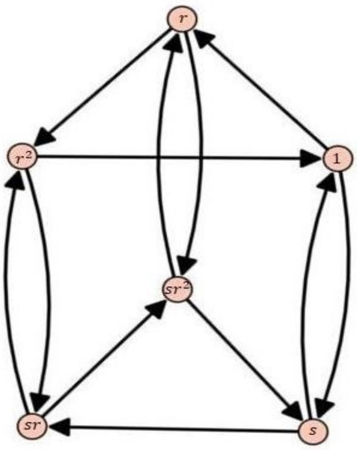
4.1.1 Jumlah Jarak Eksentrik pada $\overrightarrow{Cay}(D_6, S)$

Untuk menentukan digraf cayley dari grup dihedral-6 di mana $n = 3$, terlebih dahulu ditentukan elemen-elemen dari grup dihedral-6 (D_6) yaitu $\{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Sehingga diperoleh tabel Cayley sebagai berikut:

Tabel 4.1 Tabel $\overrightarrow{Cay}(D_6, S)$

$\circ$	1	r	r^2	s	sr	sr^2
1	1	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	sr
r^2	r^2	1	r	sr	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	1	r	r^2
sr	sr	sr^2	s	r^2	1	r
sr^2	sr^2	s	sr	r	r^2	1

Selanjutnya dengan menggunakan tabel Cayley tersebut maka dapat diperoleh $\overrightarrow{Cay}(D_6, S)$ sebagai berikut:



Gambar 4.1 $\overrightarrow{Cay}(D_6, S)$

Berdasarkan Gambar 4.1, maka dapat dicari eksentrisitas titik $e(u)$ pada digraf Cayley dari grup dihedral (D_6) untuk setiap $u \in V\left(\overrightarrow{Cay}(D_6, S)\right)$. Eksentrisitas dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$e(1) = \max\{\, d(1, r), d(1, r^2), d(1, s), d(1, sr), d(1, sr^2)\}$$

$$= \max\{1, 2, 1, 2, 2\}$$

$$= 2$$

$$e(r) = \max\{\, d(r, 1), d(r, r^2), d(r, s), d(r, sr), d(r, sr^2)\}$$

$$= \max\{2, 1, 2, 1, 2\}$$

$$= 2$$

$$e(r^2) = \max\{\, d(r^2, 1), d(r^2, r), d(r^2, s), d(r^2, sr), d(r^2, sr^2)\}$$

$$= \max\{1, 2, 2, 2, 1\}$$

$$= 2$$

$$e(s) = \max\{\, d(s, 1), d(s, r), d(s, r^2), d(s, sr), d(s, sr^2)\}$$

$$= \max\{1, 2, 2, 2, 1\}$$

$$= 2$$

$$e(sr) = \max\{\, d(sr, 1), d(sr, r), d(sr, r^2), d(sr, s), d(sr, sr^2)\}$$

$= \max\{2, 1, 2, 1, 2\}$

$= 2$

$e(sr^2) = \max\{\, d(sr^2, 1), d(sr^2, r), d(sr^2, r^2), d(sr^2, s), d(sr^2, sr)\}$

$= \max\{2, 2, 1, 2, 1\}$

$= 2$

Dapat disimpulkan bahwa $e(u) = 2\ \forall u \in V\big(\overrightarrow{Cay}(D_6, S)\big)$. berdasarkan Gambar 4.1 dapat dicari jumlah jarak masing-masing titik pada $\overrightarrow{Cay}(D_6, S)$. Jumlah jarak titik $u \in V\big(\overrightarrow{Cay}(D_6, S)\big)$ adalah sebagai berikut:

$D(1) = d(1, r) + d(1, r^2) + d(1, s) + d(1, sr) + d(1, sr^2)$

$= 1 + 2 + 1 + 2 + 2$

$= 8$

$D(r) = d(r, 1) + d(r, r^2) + d(r, s) + d(r, sr) + d(r, sr^2)$

$= 2 + 1 + 2 + 1 + 2$

$= 8$

$D(r^2) = d(r^2, 1) + d(r^2, r) + d(r^2, s) + d(r^2, sr) + d(r^2, sr^2)$

$= 1 + 2 + 2 + 2 + 1$

$= 8$

$D(s) = d(s, 1) + d(s, r) + d(s, r^2) + d(s, sr) + d(s, sr^2)$

$= 1 + 2 + 2 + 2 + 1$

$= 8$

$D(sr) = d(sr, 1) + d(sr, r) + d(sr, r^2) + d(sr, s) + d(sr, sr^2)$

$= 2 + 1 + 2 + 1 + 2$

$= 8$

$D(sr^2) = d(sr^2, 1) + d(sr^2, r) + d(sr^2, r^2) + d(sr^2, s) + d(sr^2, sr)$

$= 2 + 2 + 1 + 2 + 1$

$= 8$

Setelah diketahui eksentrisitas dan jumlah jarak masing-masing titik dari $\overrightarrow{Cay}(D_6, S)$, maka dapat dilakukan perhitungan jumlah jarak eksentriknya yaitu:

$$\xi^{ds}\left(\overrightarrow{Cay}(D_6)\right) = \sum_{u\in V(\overrightarrow{Cay}(D_6))} e(u)D(u)$$

$$= \big(e(1)D(1)\big) + \big(e(r)D(r)\big) + \big(e(r^2)D(r^2)\big) + \big(e(s)D(s)\big) + \big(e(sr)D(sr)\big) + \big(e(sr^2)D(sr^2)\big)$$

$$= \big(2(8)\big) + \big(2(8)\big) + \big(2(8)\big) + \big(2(8)\big) + \big(2(8)\big) + \big(2(8)\big)$$

$$= 96$$

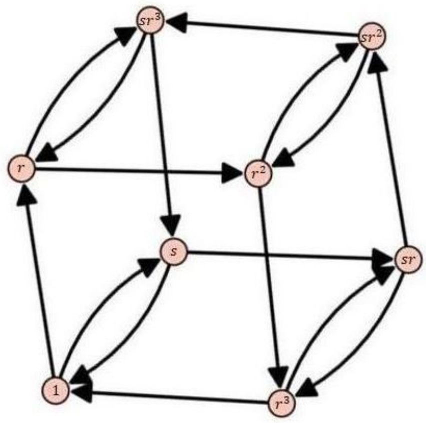
4.1.2 Jumlah Jarak Eksentrik pada $\overrightarrow{Cay}(D_8, S)$

Untuk menentukan digraf cayley dari grup dihedral-8 di mana $n = 4$, terlebih dahulu ditentukan elemen-elemen dari grup dihedral-8 (D_8) yaitu $\{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. Sehingga diperoleh tabel Cayley sebagai berikut:

Tabel 4.2 Tabel $\overrightarrow{Cay}(D_8, S)$

$\circ$	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
1	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
r	r	r^2	r^3	1	sr^3	s	sr	sr^2
r^2	r^2	r^3	1	r	sr^2	sr^3	s	sr
r^3	r^3	1	r	r^2	sr	sr^2	sr^3	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	1	r	r^2	r^3
sr	sr	sr^2	sr^3	s	r^3	1	r	r^2
sr^2	sr^2	sr^3	s	sr	r^2	r^3	1	r
sr^3	sr^3	s	sr	sr^2	r	r^2	r^3	1

Selanjutnya dengan menggunakan tabel Cayley tersebut maka dapat diperoleh $\overrightarrow{Cay}(D_8, S)$ sebagai berikut:



Gambar 4.2 $\overrightarrow{Cay}(D_8, S)$

Berdasarkan Gambar 4.2, maka dapat dicari eksentrisitas titik $e(u)$ pada digraf Cayley dari grup dihedral (D_8) untuk setiap $u \in V\big(\overrightarrow{Cay}(D_8, S)\big)$. Eksentrisitas dapat dijabarkan sebagai berikut:

$e(1) = \max\{\, d(1, r), d(1, r^2), d(1, r^3), d(1, s), d(1, sr), d(1, sr^2),$

$d(1, sr^3)\}$

$= \max\{1, 2, 3, 1, 2, 3, 2\}$

$= 3$

$e(r) = \max\{\, d(r, 1), d(r, r^2), d(r, r^3), d(r, s), d(r, sr), d(r, sr^2),$

$d(r, sr^3)\}$

$= \max\{3, 1, 2, 2, 1, 2, 3\}$

$= 3$

$e(r^2) = \max\{\, d(r^2, 1), d(r^2, r), d(r^2, r^3), d(r^2, s), d(r^2, sr), d(r^2, sr^2),$

$d(r^2, sr^3)\}$

$= \max\{2, 3, 1, 3, 2, 1, 2\}$

$= 3$

$$e(r^3) = \max\{\, d(r^3,1), d(r^3,r), d(r^3,r^2), d(r^3,s), d(r^3,sr), d(r^3,sr^2),$$
$$d(r^3,sr^3)\}$$
$$= \max\{1, 2, 3,2, 3, 2, 1\}$$
$$= 3$$

$$e(s) = \max\{\, d(s,1), d(s,r), d(s,r^2), d(s,r^3), d(s,sr), d(s,sr^2),$$
$$d(s,sr^3)\}$$
$$= \max\{1, 2, 3, 2, 3, 2, 1\}$$
$$= 3$$

$$e(sr) = \max\{\, d(sr,1), d(sr,r), d(sr,r^2), d(sr,r^3), d(sr,s), d(sr,sr^2),$$
$$d(sr,sr^3)\}$$
$$= \max\{2, 1, 2, 3, 1, 3, 2\}$$
$$= 3$$

$$e(sr^2) = \max\{\, d(sr^2,1), d(sr^2,r), d(sr^2,r^2), d(sr^2,r^3), d(sr^2,s),$$
$$d(sr^2,sr), d(sr^2,sr^3)\}$$
$$= \max\{3, 2, 1, 2, 2, 1, 3\}$$
$$= 3$$

$$e(sr^3) = \max\{\, d(sr^3,1), d(sr^3,r), d(sr^3,r^2), d(sr^3,r^3), d(sr^3,s),$$
$$d(sr^3,sr), d(sr^3,sr^2)\}$$
$$= \max\{2, 3, 2, 1, 3, 2, 1\}$$
$$= 3$$

Dapat disimpulkan bahwa $e(u) = 3\ \forall u \in V\big(\overrightarrow{Cay}(D_8,S)\big)$. Berdasarkan Gambar 4.2 dapat dicari jumlah jarak masing-masing titik pada $\overrightarrow{Cay}(D_8,S)$. Jumlah jarak titik $u \in V\big(\overrightarrow{Cay}(D_8,S)\big)$ adalah sebagai berikut:

$D(1) = d(1, r) + d(1, r^2) + d(1, r^3) + d(1, s) + d(1, sr) + d(1, sr^2) + d(1, sr^3)$

$= 1 + 2 + 3 + 1 + 2 + 3 + 2$

$= 14$

$D(r) = d(r, 1) + d(r, r^2) + d(r, r^3) + d(r, s) + d(r, sr) + d(r, sr^2) + d(r, sr^3)$

$= 3 + 1 + 2 + 2 + 1 + 2 + 3$

$= 14$

$D(r^2) = d(r^2, 1) + d(r^2, r) + d(r^2, r^3) + d(r^2, s) + d(r^2, sr) + d(r^2, sr^2) + d(r^2, sr^3)$

$= 2 + 3 + 1 + 3 + 2 + 1 + 2$

$= 14$

$D(r^3) = d(r^3, 1) + d(r^3, r) + d(r^3, r^2) + d(r^3, s) + d(r^3, sr) + d(r^3, sr^2) + d(r^3, sr^3)$

$= 1 + 2 + 3 + 2 + 3 + 2 + 1$

$= 14$

$D(s) = d(s, 1) + d(s, r) + d(s, r^2) + d(s, r^3) + d(s, sr) + d(s, sr^2) + d(s, sr^3)$

$= 1 + 2 + 3 + 2 + 3 + 2 + 1$

$= 14$

$D(sr) = d(sr, 1) + d(sr, r) + d(sr, r^2) + d(sr, r^3) + d(sr, s) + d(sr, sr^2) + d(sr, sr^3)$

$= 2 + 1 + 2 + 3 + 1 + 3 + 2$

$= 14$

$D(sr^2) = d(sr^2, 1) + d(sr^2, r) + d(sr^2, r^2) + d(sr^2, r^3) + d(sr^2, s) + d(sr^2, sr) + d(sr^2, sr^3)$

$= 3 + 2 + 1 + 2 + 2 + 1 + 3$

$= 14$

$D(sr^3) = d(sr^3, 1) + d(sr^3, r) + d(sr^3, r^2) + d(sr^3, r^3) + d(sr^3, s) + d(sr^3, sr) + d(sr^3, sr^2)$

$= 2 + 3 + 2 + 1 + 3 + 2 + 1$

$= 14$

Setelah diketahui eksentrisitas dan jumlah jarak masing-masing titik dari $\overrightarrow{Cay}(D_8, S)$, maka dapat dilakukan perhitungan jumlah jarak eksentriknya yaitu:

$$\xi^{ds}\left(\overrightarrow{Cay}(D_8)\right) = \sum_{u \in V(\overrightarrow{Cay}(D_8))} e(u)D(u)$$

$$= \big(e(1)D(1)\big) + \big(e(r)D(r)\big) + \big(e(r^2)D(r^2)\big) + \big(e(r^3)D(r^3)\big) + \big(e(s)D(s)\big) + \big(e(sr)D(sr)\big) + \big(e(sr^2)D(sr^2)\big) + \big(e(sr^3)D(sr^3)\big)$$

$$= \big(3(14)\big) + \big(3(14)\big) + \big(3(14)\big) + \big(3(14)\big) + \big(3(14)\big) + \big(3(14)\big) + \big(3(14)\big) + \big(3(14)\big)$$

$$= 336$$

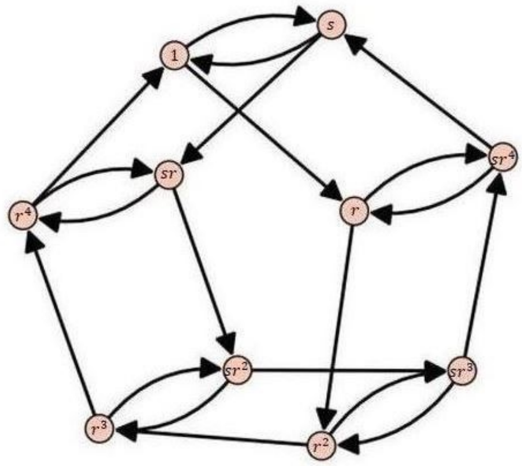
4.1.3 Jumlah Jarak Eksentrik pada $\overrightarrow{Cay}(D_{10}, S)$

Untuk menentukan digraf cayley dari grup dihedral-10 di mana $n = 5$, terlebih dahulu ditentukan elemen-elemen dari grup dihedral-10 (D_{10}) yaitu $\{1, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$. Sehingga diperoleh tabel Cayley sebagai berikut:

Tabel 4.3 Tabel $\overrightarrow{Cay}(D_{10}, S)$

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
1	1	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r	r	r^2	r^3	r^4	1	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3
r^2	r^2	r^3	r^4	1	r	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2
r^3	r^3	r^4	1	r	r^2	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr
r^4	r^4	1	r	r^2	r^3	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	1	r	r^2	r^3	r^4
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s	r^4	1	r	r^2	r^3
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr	r^3	r^4	1	r	r^2
sr^3	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2	r^2	r^3	r^4	1	r
sr^4	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3	r	r^2	r^3	r^4	1

Selanjutnya dengan menggunakan tabel Cayley tersebut maka dapat diperoleh $\overrightarrow{Cay}(D_{10}, S)$ sebagai berikut:



Gambar 4.3 $\overrightarrow{Cay}(D_{10}, S)$

Berdasarkan Gambar 4.3, maka dapat dicari eksentrisitas titik $e(u)$ pada digraf Cayley dari grup dihedral (D_{10}) untuk setiap $u \in V\left(\overrightarrow{Cay}(D_{10}, S)\right)$. Eksentrisitas dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
e(1) &= \max\{\, d(1,r), d(1,r^2), d(1,r^3), d(1,r^4), d(1,s), d(1,sr),\\
&\quad d(1,sr^2), d(1,sr^3), d(1,sr^4)\}\\
&= \max\{1,2,3,3,1,2,3,3,2\}\\
&= 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e(r) &= \max\{\, d(r,1), d(r,r^2), d(r,r^3), d(r,r^4), d(r,s), d(r,sr),\\
&\quad d(r,sr^2), d(r,sr^3), d(r,sr^4)\}\\
&= \max\{3,1,2,3,2,1,2,3,3\}\\
&= 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e(r^2) &= \max\{\, d(r^2,1), d(r^2,r), d(r^2,r^3), d(r^2,r^4), d(r^2,s), d(r^2,sr),\\
&\quad d(r^2,sr^2), d(r^2,sr^3), d(r^2,sr^4)\}\\
&= \max\{3,3,1,2,3,2,1,2,3\}\\
&= 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e(r^3) &= \max\{\, d(r^3,1), d(r^3,r), d(r^3,r^2), d(r^3,r^4), d(r^3,s), d(r^3,sr),\\
&\quad d(r^3,sr^2), d(r^3,sr^3), d(r^3,sr^4)\}\\
&= \max\{2,3,3,1,3,3,2,1,2\}\\
&= 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e(r^4) &= \max\{\, d(r^4,1), d(r^4,r), d(r^4,r^2), d(r^4,r^3), d(r^4,s), d(r^4,sr),\\
&\quad d(r^4,sr^2), d(r^4,sr^3), d(r^4,sr^4)\}\\
&= \max\{1,2,3,3,2,3,3,2,1\}\\
&= 3
\end{aligned}$$

$e(s) = \max\{\, d(s,1), d(s,r), d(s,r^2), d(s,r^3), d(s,r^4), d(s,sr),$

$d(s,sr^2), d(s,sr^3), d(s,sr^4)\}$

$= \max\{1, 2, 3, 3, 2, 3, 3, 2, 1\}$

$= 3$

$e(sr) = \max\{\, d(sr,1), d(sr,r), d(sr,r^2), d(sr,r^3), d(sr,r^4), d(sr,s),$

$d(sr,sr^2), d(sr,sr^3), d(sr,sr^4)\}$

$= \max\{2, 1, 2, 3, 3, 1, 3, 3, 2\}$

$= 3$

$e(sr^2) = \max\{\, d(sr^2,1), d(sr^2,r), d(sr^2,r^2), d(sr^2,r^3), d(sr^2,r^4),$

$d(sr^2,s), d(sr^2,sr), d(sr^2,sr^3), d(sr^2,sr^4)\}$

$= \max\{3, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 3, 3\}$

$= 3$

$e(sr^3) = \max\{\, d(sr^3,1), d(sr^3,r), d(sr^3,r^2), d(sr^3,r^3), d(sr^3,r^4),$

$d(sr^3,s), d(sr^3,sr), d(sr^3,sr^2), d(sr^3,sr^4)\}$

$= \max\{3, 3, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 3\}$

$= 3$

$e(sr^4) = \max\{\, d(sr^4,1), d(sr^4,r), d(sr^4,r^2), d(sr^4,r^3), d(sr^4,r^4),$

$d(sr^4,s), d(sr^4,sr), d(sr^4,sr^2), d(sr^4,sr^3)\}$

$= \max\{2, 3, 3, 2, 1, 3, 3, 2, 1\}$

$= 3$

Dapat disimpulkan bahwa $e(u) = 3\ \forall u \in V\left(\overrightarrow{Cay}(D_{10}, S)\right)$. Berdasarkan Gambar 4.3 dapat dicari jumlah jarak masing-masing titik pada $\overrightarrow{Cay}(D_{10}, S)$. Jumlah jarak titik $u \in V\left(\overrightarrow{Cay}(D_{10}, S)\right)$ adalah sebagai berikut:

$$D(1) = d(1,r) + d(1,r^2) + d(1,r^3) + d(1,r^4) + d(1,s) + d(1,sr) + d(1,sr^2) + d(1,sr^3) + d(1,sr^4)$$
$$= 1 + 2 + 3 + 3 + 1 + 2 + 3 + 3 + 2$$
$$= 20$$

$$D(r) = d(r,1) + d(r,r^2) + d(r,r^3) + d(r,r^4) + d(r,s) + d(r,sr) + d(r,sr^2) + d(r,sr^3) + d(r,sr^4)$$
$$= 3 + 1 + 2 + 3 + 2 + 1 + 2 + 3 + 3$$
$$= 20$$

$$D(r^2) = d(r^2,1) + d(r^2,r) + d(r^2,r^3) + d(r^2,r^4) + d(r^2,s) + d(r^2,sr) + d(r^2,sr^2) + d(r^2,sr^3) + d(r^2,sr^4)$$
$$= 3 + 3 + 1 + 2 + 3 + 2 + 1 + 2 + 3$$
$$= 20$$

$$D(r^3) = d(r^3,1) + d(r^3,r) + d(r^3,r^2) + d(r^3,r^4) + d(r^3,s) + d(r^3,sr) + d(r^3,sr^2) + d(r^3,sr^3) + d(r^3,sr^4)$$
$$= 2 + 3 + 3 + 1 + 3 + 3 + 2 + 1 + 2$$
$$= 20$$

$$D(r^4) = d(r^4,1) + d(r^4,r) + d(r^4,r^2) + d(r^4,r^3) + d(r^4,s) + d(r^4,sr) + d(r^4,sr^2) + d(r^4,sr^3) + d(r^4,sr^4)$$
$$= 1 + 2 + 3 + 3 + 2 + 3 + 3 + 2 + 1$$
$$= 20$$

$$D(s) = d(s,1) + d(s,r) + d(s,r^2) + d(s,r^3) + d(s,r^4) + d(s,sr) + d(s,sr^2) + d(s,sr^3) + d(s,sr^4)$$
$$= 1 + 2 + 3 + 3 + 2 + 3 + 3 + 2 + 1$$
$$= 20$$

$$D(sr) = d(sr,1) + d(sr,r) + d(sr,r^2) + d(sr,r^3) + d(sr,r^4) +$$

$$d(sr,s) + d(sr,sr^2) + d(sr,sr^3) + d(sr,sr^4)$$

$$= 2 + 1 + 2 + 3 + 3 + 1 + 3 + 3 + 2$$

$$= 20$$

$$D(sr^2) = d(sr^2,1) + d(sr^2,r) + d(sr^2,r^2) + d(sr^2,r^3) + d(sr^2,r^4) +$$

$$d(sr^2,s) + d(sr^2,sr) + d(sr^2,sr^3) + d(sr^2,sr^4)$$

$$= 3 + 2 + 1 + 2 + 3 + 2 + 1 + 3 + 3$$

$$= 20$$

$$D(sr^3) = d(sr^3,1) + d(sr^3,r) + d(sr^3,r^2) + d(sr^3,r^3) + d(sr^3,r^4) +$$

$$d(sr^3,s) + d(sr^3,sr) + d(sr^3,sr^2) + d(sr^3,sr^4)$$

$$= 3 + 3 + 2 + 1 + 2 + 3 + 2 + 1 + 3$$

$$= 20$$

$$D(sr^4) = d(sr^4,1) + d(sr^4,r) + d(sr^4,r^2) + d(sr^4,r^3) + d(sr^4,r^4) +$$

$$d(sr^4,s) + d(sr^4,sr) + d(sr^4,sr^2) + d(sr^4,sr^3)$$

$$= 2 + 3 + 3 + 2 + 1 + 3 + 3 + 2 + 1$$

$$= 20$$

Setelah diketahui eksentrisitas dan jumlah jarak masing-masing titik dari $\overrightarrow{Cay}(D_{10},S)$, maka dapat dilakukan perhitungan jumlah jarak eksentriknya yaitu:

$$\xi^{ds}\left(\overrightarrow{Cay}(D_{10})\right) = \sum_{u\in V(\overrightarrow{Cay}(D_{10}))} e(u)D(u)$$

$$= \big(e(1)D(1)\big) + \big(e(r)D(r)\big) + \big(e(r^2)D(r^2)\big) +$$

$$\big(e(r^3)D(r^3)\big) + \big(e(r^4)D(r^4)\big) + \big(e(s)D(s)\big) +$$

$$\big(e(sr)D(sr)\big) + \big(e(sr^2)D(sr^2)\big) + \big(e(sr^3)D(sr^3)\big) +$$

$$\big(e(sr^4)D(sr^4)\big)$$

$$= (3(20)) + (3(20)) + (3(20)) + (3(20)) + (3(20)) +$$
$$(3(20)) + (3(20)) + (3(20)) + (3(20)) + (3(20))$$
$$= 600$$

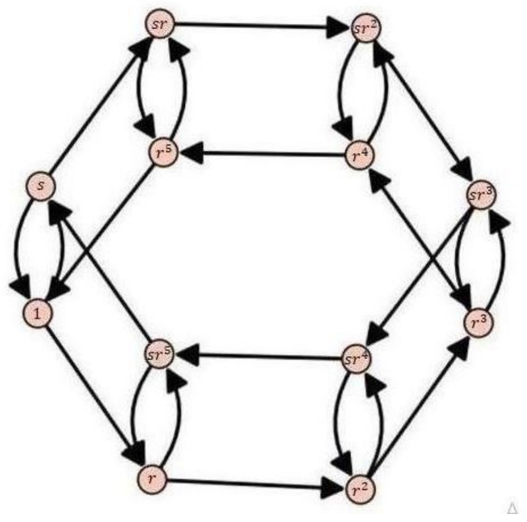
4.1.4 Jumlah Jarak Eksentrik pada $\overrightarrow{Cay}(D_{12}, S)$

Untuk menentukan digraf cayley dari grup dihedral-12 di mana $n = 6$, terlebih dahulu ditentukan elemen-elemen dari grup dihedral-12 (D_{12}) yaitu $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$. Sehingga diperoleh tabel Cayley sebagai berikut:

Tabel 4.4 Tabel $\overrightarrow{Cay}(D_{12}, S)$

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3
r^3	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2
r^4	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr
r^5	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2
sr^4	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r
sr^5	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1

Selanjutnya dengan menggunakan tabel Cayley tersebut maka dapat diperoleh $\overrightarrow{Cay}(D_{12}, S)$ sebagai berikut:



Gambar 4.4 $\overrightarrow{Cay}(D_{12}, S)$

Berdasarkan Gambar 4.4, maka dapat dicari eksentrisitas titik $e(u)$ pada digraf Cayley dari grup dihedral (D_{12}) untuk setiap $u \in V(\overrightarrow{Cay}(D_{12}, S))$. Eksentrisitas dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$e(1) = \max\{ d(1,r), d(1,r^2), d(1,r^3), d(1,r^4), d(1,r^5), d(1,s), d(1,sr), d(1,sr^2), d(1,sr^3), d(1,sr^4), d(1,sr^5)\}$$
$$= \max\{3, 4, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 4, 3, 2\}$$
$$= 4$$

$$e(r) = \max\{ d(r,1), d(r,r^2), d(r,r^3), d(r,r^4), d(r,r^5), d(r,s), d(r,sr), d(r,sr^2), d(r,sr^3), d(r,sr^4), d(r,sr^5)\}$$
$$= \max\{1, 3, 4, 3, 2, 2, 1, 2, 3, 4, 3\}$$
$$= 4$$

$$e(r^2) = \max\{ d(r^2,1), d(r^2,r), d(r^2,r^3), d(r^2,r^4), d(r^2,r^5), d(r^2,s), d(r^2,sr), d(r^2,sr^2), d(r^2,sr^3), d(r^2,sr^4), d(r^2,sr^5)\}$$
$$= \max\{2, 1, 3, 4, 3, 3, 2, 1, 2, 3, 4\}$$
$$= 4$$

$$e(r^3) = \max\{\, d(r^3,1), d(r^3,r), d(r^3,r^2), d(r^3,r^4), d(r^3,r^5), d(r^3,s), d(r^3,sr), d(r^3,sr^2), d(r^3,sr^3), d(r^3,sr^4), d(r^3,sr^5)\}$$

$$= \max\{3,2,1,3,4,4,3,2,1,2,3\}$$

$$= 4$$

$$e(r^4) = \max\{\, d(r^4,1), d(r^4,r), d(r^4,r^2), d(r^4,r^3), d(r^4,r^5), d(r^4,s), d(r^4,sr), d(r^4,sr^2), d(r^4,sr^3), d(r^4,sr^4), d(r^4,sr^5)\}$$

$$= \max\{4,3,2,1,3,3,4,3,2,1,2\}$$

$$= 4$$

$$e(r^5) = \max\{\, d(r^5,1), d(r^5,r), d(r^5,r^2), d(r^5,r^3), d(r^5,r^4), d(r^5,s), d(r^5,sr), d(r^5,sr^2), d(r^5,sr^3), d(r^5,sr^4), d(r^5,sr^5)\}$$

$$= \max\{1,4,3,2,1,2,3,4,3,2,1\}$$

$$= 4$$

$$e(s) = \max\{\, d(s,1), d(s,r), d(s,r^2), d(s,r^3), d(s,r^4), d(s,r^5), d(s,sr), d(s,sr^2), d(s,sr^3), d(s,sr^4), d(s,sr^5)\}$$

$$= \max\{1,2,3,4,3,2,1,2,3,4,3\}$$

$$= 4$$

$$e(sr) = \max\{\, d(sr,1), d(sr,r), d(sr,r^2), d(sr,r^3), d(sr,r^4), d(sr,r^5), d(sr,s), d(sr,sr^2), d(sr,sr^3), d(sr,sr^4), d(sr,sr^5)\}$$

$$= \max\{2,1,2,3,4,3,3,1,2,3,4\}$$

$$= 4$$

$$e(sr^2) = \max\{\, d(sr^2,1), d(sr^2,r), d(sr^2,r^2), d(sr^2,r^3), d(sr^2,r^4), d(sr^2,r^5), d(sr^2,s), d(sr^2,sr), d(sr^2,sr^3), d(sr^2,sr^4), d(sr^2,sr^5)\}$$

$$= \max\{3,2,1,2,3,4,4,3,1,2,3\}$$

$= 4$

$e(sr^3) = \max\{ d(sr^3, 1), d(sr^3, r), d(sr^3, r^2), d(sr^3, r^3), d(sr^3, r^4),$

$d(sr^3, r^5), d(sr^3, s), d(sr^3, sr), d(sr^3, sr^2), d(sr^3, sr^4),$

$d(sr^3, sr^5)\}$

$= \max\{4, 3, 2, 1, 2, 3, 3, 4, 3, 1, 2\}$

$= 4$

$e(sr^4) = \max\{ d(sr^4, 1), d(sr^4, r), d(sr^4, r^2), d(sr^4, r^3), d(sr^4, r^4),$

$d(sr^4, r^5), d(sr^4, s), d(sr^4, sr), d(sr^4, sr^2), d(sr^4, sr^3),$

$d(sr^4, sr^5)\}$

$= \max\{3, 4, 3, 2, 1, 2, 2, 3, 4, 3, 1\}$

$= 4$

$e(sr^5) = \max\{ d(sr^5, 1), d(sr^5, r), d(sr^5, r^2), d(sr^5, r^3), d(sr^5, r^4),$

$d(sr^5, r^5), d(sr^5, s), d(sr^5, sr), d(sr^5, sr^2), d(sr^5, sr^3),$

$d(sr^5, sr^4)\}$

$= \max\{2, 3, 4, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 4, 3\}$

$= 4$

Dapat disimpulkan bahwa $e(u) = 4\ \forall u \in V\left(\overrightarrow{Cay}(D_{12}, S)\right)$. Berdasarkan Gambar 4.4 dapat dicari jumlah jarak masing-masing titik pada $\overrightarrow{Cay}(D_{12}, S)$. Jumlah jarak titik $u \in V\left(\overrightarrow{Cay}(D_{12}, S)\right)$ adalah sebagai berikut:

$D(1) = d(1, r) + d(1, r^2) + d(1, r^3) + d(1, r^4) + d(1, r^5) + d(1, s) +$

$d(1, sr) + d(1, sr^2) + d(1, sr^3) + d(1, sr^4) + d(1, sr^5)$

$= 3 + 4 + 3 + 2 + 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2$

$= 28$

$$D(r) = d(r,1) + d(r,r^2) + d(r,r^3) + d(r,r^4) + d(r,r^5) + d(r,s) + d(r,sr) + d(r,sr^2) + d(r,sr^3) + d(r,sr^4) + d(r,sr^5)$$

$$= 1 + 3 + 4 + 3 + 2 + 2 + 1 + 2 + 3 + 4 + 3$$

$$= 28$$

$$D(r^2) = d(r^2,1) + d(r^2,r) + d(r^2,r^3) + d(r^2,r^4) + d(r^2,r^5) + d(r^2,s) + d(r^2,sr) + d(r^2,sr^2) + d(r^2,sr^3) + d(r^2,sr^4) + d(r^2,sr^5)$$

$$= 2 + 1 + 3 + 4 + 3 + 3 + 2 + 1 + 2 + 3 + 4$$

$$= 28$$

$$D(r^3) = d(r^3,1) + d(r^3,r) + d(r^3,r^2) + d(r^3,r^4) + d(r^3,r^5) + d(r^3,s) + d(r^3,sr) + d(r^3,sr^2) + d(r^3,sr^3) + d(r^3,sr^4) + d(r^3,sr^5)$$

$$= 3 + 2 + 1 + 3 + 4 + 4 + 3 + 2 + 1 + 2 + 3$$

$$= 28$$

$$D(r^4) = d(r^4,1) + d(r^4,r) + d(r^4,r^2) + d(r^4,r^3) + d(r^4,r^5) + d(r^4,s) + d(r^4,sr) + d(r^4,sr^2) + d(r^4,sr^3) + d(r^4,sr^4) + d(r^4,sr^5)$$

$$= 4 + 3 + 2 + 1 + 3 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 + 2$$

$$= 28$$

$$D(r^5) = d(r^5,1) + d(r^5,r) + d(r^5,r^2) + d(r^5,r^3) + d(r^5,r^4) + d(r^5,s) + d(r^5,sr) + d(r^5,sr^2) + d(r^5,sr^3) + d(r^5,sr^4) + d(r^5,sr^5)$$

$$= 1 + 4 + 3 + 2 + 1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1$$

$$= 28$$

$D(s) = d(s,1) + d(s,r) + d(s,r^2) + d(s,r^3) + d(s,r^4) + d(s,r^5) +$

$d(s,sr) + d(s,sr^2) + d(s,sr^3) + d(s,sr^4) + d(s,sr^5)$

$= 1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 + 2 + 3 + 4 + 3$

$= 28$

$D(sr) = d(sr,1) + d(sr,r) + d(sr,r^2) + d(sr,r^3) + d(sr,r^4) +$

$d(sr,r^5) + d(sr,s) + d(sr,sr^2) + d(sr,sr^3) + d(sr,sr^4) +$

$d(sr,sr^5)$

$= 2 + 1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 3 + 1 + 2 + 3 + 4$

$= 28$

$D(sr^2) = d(sr^2,1) + d(sr^2,r) + d(sr^2,r^2) + d(sr^2,r^3) + d(sr^2,r^4) +$

$d(sr^2,r^5) + d(sr^2,s) + d(sr^2,sr) + d(sr^2,sr^3) +$

$d(sr^2,sr^4) + d(sr^2,sr^5)$

$= 3 + 2 + 1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 3 + 1 + 2 + 3$

$= 28$

$D(sr^3) = d(sr^3,1) + d(sr^3,r) + d(sr^3,r^2) + d(sr^3,r^3) + d(sr^3,r^4) +$

$d(sr^3,r^5) + d(sr^3,s) + d(sr^3,sr) + d(sr^3,sr^2) +$

$d(sr^3,sr^4) + d(sr^3,sr^5)$

$= 4 + 3 + 2 + 1 + 2 + 3 + 3 + 4 + 3 + 1 + 2$

$= 28$

$D(sr^4) = d(sr^4,1) + d(sr^4,r) + d(sr^4,r^2) + d(sr^4,r^3) + d(sr^4,r^4) +$

$d(sr^4,r^5) + d(sr^4,s) + d(sr^4,sr) + d(sr^4,sr^2) +$

$d(sr^4,sr^3) + d(sr^4,sr^5)$

$= 3 + 4 + 3 + 2 + 1 + 2 + 2 + 3 + 4 + 3 + 1$

$= 28$

$D(sr^5) = d(sr^5, 1) + d(sr^5, r) + d(sr^5, r^2) + d(sr^5, r^3) + d(sr^5, r^4) + d(sr^5, r^5) + d(sr^5, s) + d(sr^5, sr) + d(sr^5, sr^2) + d(sr^5, sr^3) + d(sr^5, sr^4)$

$= 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 3$

$= 28$

Setelah diketahui eksentrisitas dan jumlah jarak masing-masing titik dari $\overrightarrow{Cay}(D_{12}, S)$, maka dapat dilakukan perhitungan jumlah jarak eksentriknya yaitu:

$\xi^{ds}\left(\overrightarrow{Cay}(D_{12})\right) = \sum_{u \in V(\overrightarrow{Cay}(D_{12}))} e(u)D(u)$

$= \big(e(1)D(1)\big) + \big(e(r)D(r)\big) + \big(e(r^2)D(r^2)\big) + \big(e(r^3)D(r^3)\big) + \big(e(r^4)D(r^4)\big) + \big(e(r^5)D(r^5)\big) + \big(e(s)D(s)\big) + \big(e(sr)D(sr)\big) + \big(e(sr^2)D(sr^2)\big) + \big(e(sr^3)D(sr^3)\big) + \big(e(sr^4)D(sr^4)\big) + \big(e(sr^5)D(sr^5)\big)$

$= \big(4(28)\big) + \big(4(28)\big) + \big(4(28)\big) + \big(4(28)\big) + \big(4(28)\big) + \big(4(28)\big) + \big(4(28)\big) + \big(4(28)\big) + \big(4(28)\big) + \big(4(28)\big) + \big(4(28)\big) + \big(4(28)\big)$

$= 1344$

4.1.5 Jumlah Jarak Eksentrik pada $\overrightarrow{Cay}(D_{14}, S)$

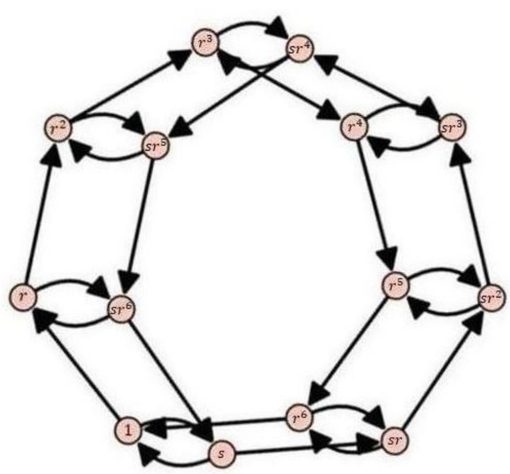
Untuk menentukan digraf cayley dari grup dihedral-14 di mana $n = 7$, terlebih dahulu ditentukan elemen-elemen dari grup dihedral-14 (D_{14}) yaitu $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$. Sehingga diperoleh tabel Cayley sebagai berikut:

Tabel 4.5 Tabel $\overrightarrow{Cay}(D_{14}, S)$

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6

1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^3	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3
r^4	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2
r^5	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr
r^6	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3
sr^4	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2
sr^5	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r
sr^6	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1

Selanjutnya dengan menggunakan tabel Cayley tersebut maka dapat diperoleh $\overrightarrow{Cay}(D_{14}, S)$ sebagai berikut:



Gambar 4.5 $\overrightarrow{Cay}(D_{14}, S)$

Berdasarkan Gambar 4.5, maka dapat dicari eksentrisitas titik $e(u)$ pada digraf Cayley dari grup dihedral (D_{14}) untuk setiap $u \in V(\overrightarrow{Cay}(D_{14}, S))$. Eksentrisitas dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
e(1) &= \max\{\, d(1,r), d(1,r^2), d(1,r^3), d(1,r^4), d(1,r^5), d(1,r^6), d(1,s), \\
&\quad d(1,sr), d(1,sr^2), d(1,sr^3), d(1,sr^4), d(1,sr^5), d(1,sr^6)\} \\
&= \max\{1, 2, 3, 4, 4, 3, 1, 2, 3, 4, 4, 3, 2\} \\
&= 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e(r) &= \max\{\, d(r,1), d(r,r^2), d(r,r^3), d(r,r^4), d(r,r^5), d(r,r^6), d(r,s), \\
&\quad d(r,sr), d(r,sr^2), d(r,sr^3), d(r,sr^4), d(r,sr^5), d(r,sr^6)\} \\
&= \max\{3, 1, 2, 3, 4, 4, 2, 1, 2, 3, 4, 4, 3\} \\
&= 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e(r^2) &= \max\{\, d(r^2,1), d(r^2,r), d(r^2,r^3), d(r^2,r^4), d(r^2,r^5), d(r^2,r^6), \\
&\quad d(r^2,s), d(r^2,sr), d(r^2,sr^2), d(r^2,sr^3), d(r^2,sr^4), d(r^2,sr^5), \\
&\quad d(r^2,sr^6)\} \\
&= \max\{4, 3, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 4\} \\
&= 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e(r^3) &= \max\{\, d(r^3,1), d(r^3,r), d(r^3,r^2), d(r^3,r^4), d(r^3,r^5), d(r^3,r^6), \\
&\quad d(r^3,s), d(r^3,sr), d(r^3,sr^2), d(r^3,sr^3), d(r^3,sr^4), d(r^3,sr^5), \\
&\quad d(r^3,sr^6)\} \\
&= \max\{4, 4, 3, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4\} \\
&= 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e(r^4) &= \max\{\, d(r^4,1), d(r^4,r), d(r^4,r^2), d(r^4,r^3), d(r^4,r^5), d(r^4,r^6), \\
&\quad d(r^4,s), d(r^4,sr), d(r^4,sr^2), d(r^4,sr^3), d(r^4,sr^4), d(r^4,sr^5), \\
&\quad d(r^4,sr^6)\}
\end{aligned}$$

$= \max\{3, 4, 4, 3, 1, 2, 4, 4, 3, 2, 1, 2, 3\}$

$= 4$

$e(r^5) = \max\{\, d(r^5, 1), d(r^5, r), d(r^5, r^2), d(r^5, r^3), d(r^5, r^4), d(r^5, r^6),$

$d(r^5, s), d(r^5, sr), d(r^5, sr^2), d(r^5, sr^3), d(r^5, sr^4), d(r^5, sr^5),$

$d(r^5, sr^6)\}$

$= \max\{2, 3, 4, 4, 3, 1, 3, 4, 4, 3, 2, 1, 2\}$

$= 4$

$e(r^6) = \max\{\, d(r^6, 1), d(r^6, r), d(r^6, r^2), d(r^6, r^3), d(r^6, r^4), d(r^6, r^5),$

$d(r^6, s), d(r^6, sr), d(r^6, sr^2), d(r^6, sr^3), d(r^6, sr^4), d(r^6, sr^5),$

$d(r^6, sr^6)\}$

$= \max\{1, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 1\}$

$= 4$

$e(s) = \max\{\, d(s, 1), d(s, r), d(s, r^2), d(s, r^3), d(s, r^4), d(s, r^5), d(s, r^6),$

$d(s, sr), d(s, sr^2), d(s, sr^3), d(s, sr^4), d(s, sr^5), d(s, sr^6)\}$

$= \max\{1, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 1\}$

$= 4$

$e(sr) = \max\{\, d(sr, 1), d(sr, r), d(sr, r^2), d(sr, r^3), d(sr, r^4), d(sr, r^5),$

$d(sr, r^6), d(sr, s), d(sr, sr^2), d(sr, sr^3), d(sr, sr^4), d(sr, sr^5),$

$d(sr, sr^6)\}$

$= \max\{2, 1, 2, 3, 4, 4, 3, 1, 3, 4, 4, 3, 2\}$

$= 4$

$e(sr^2) = \max\{\, d(sr^2, 1), d(sr^2, r), d(sr^2, r^2), d(sr^2, r^3), d(sr^2, r^4),$

$d(sr^2, r^5), d(sr^2, r^6), d(sr^2, s), d(sr^2, sr), d(sr^2, sr^3),$

$d(sr^2, sr^4), d(sr^2, sr^5), d(sr^2, sr^6)\}$

$$= \max\{3, 2, 1, 2, 3, 4, 4, 2, 1, 3, 4, 4, 3\}$$

$$= 4$$

$$e(sr^3) = \max\{\, d(sr^3, 1), d(sr^3, r), d(sr^3, r^2), d(sr^3, r^3), d(sr^3, r^4),$$

$$d(sr^3, r^5), d(sr^3, r^6), d(sr^3, s), d(sr^3, sr), d(sr^3, sr^2),$$

$$d(sr^3, sr^4), d(sr^3, sr^5), d(sr^3, sr^6)\}$$

$$= \max\{4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 3, 4, 4\}$$

$$= 4$$

$$e(sr^4) = \max\{\, d(sr^4, 1), d(sr^4, r), d(sr^4, r^2), d(sr^4, r^3), d(sr^4, r^4),$$

$$d(sr^4, r^5), d(sr^4, r^6), d(sr^4, s), d(sr^4, sr), d(sr^4, sr^2),$$

$$d(sr^4, sr^3), d(sr^4, sr^5), d(sr^4, sr^6)\}$$

$$= \max\{4, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 3, 4\}$$

$$= 4$$

$$e(sr^5) = \max\{\, d(sr^5, 1), d(sr^5, r), d(sr^5, r^2), d(sr^5, r^3), d(sr^5, r^4),$$

$$d(sr^5, r^5), d(sr^5, r^6), d(sr^5, s), d(sr^5, sr), d(sr^5, sr^2),$$

$$d(sr^5, sr^3), d(sr^5, sr^4), d(sr^5, sr^6)\}$$

$$= \max\{3, 4, 4, 3, 2, 1, 2, 4, 4, 3, 2, 1, 3\}$$

$$= 4$$

$$e(sr^6) = \max\{\, d(sr^6, 1), d(sr^6, r), d(sr^6, r^2), d(sr^6, r^3), d(sr^6, r^4),$$

$$d(sr^6, r^5), d(sr^6, r^6), d(sr^6, s), d(sr^6, sr), d(sr^6, sr^2),$$

$$d(sr^6, sr^3), d(sr^6, sr^4), d(sr^6, sr^5)\}$$

$$= \max\{2, 3, 4, 4, 3, 2, 1, 3, 4, 4, 3, 2, 1\}$$

$$= 4$$

Dapat disimpulkan bahwa $e(u) = 4\ \forall u \in V(\overrightarrow{Cay}(D_{14}, S))$. Berdasarkan Gambar 4.5 dapat dicari jumlah jarak masing-masing titik pada $\overrightarrow{Cay}(D_{14}, S)$. Jumlah jarak titik $u \in V(\overrightarrow{Cay}(D_{14}, S))$ adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
D(1) &= d(1,r) + d(1,r^2) + d(1,r^3) + d(1,r^4) + d(1,r^5) + d(1,r^6) + \\
&\quad d(1,s) + d(1,sr) + d(1,sr^2) + d(1,sr^3) + d(1,sr^4) + \\
&\quad d(1,sr^5) + d(1,sr^6) \\
&= 1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 3 + 1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 3 + 2 \\
&= 36
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D(r) &= d(r,1) + d(r,r^2) + d(r,r^3) + d(r,r^4) + d(r,r^5) + d(r,r^6) + \\
&\quad d(r,s) + d(r,sr) + d(r,sr^2) + d(r,sr^3) + d(r,sr^4) + \\
&\quad d(r,sr^5) + d(r,sr^6) \\
&= 3 + 1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 2 + 1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 3 \\
&= 36
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D(r^2) &= d(r^2,1) + d(r^2,r) + d(r^2,r^3) + d(r^2,r^4) + d(r^2,r^5) + \\
&\quad d(r^2,r^6) + d(r^2,s) + d(r^2,sr) + d(r^2,sr^2) + d(r^2,sr^3) + \\
&\quad d(r^2,sr^4) + d(r^2,sr^5) + d(r^2,sr^6) \\
&= 4 + 3 + 1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 + 2 + 3 + 4 + 4 \\
&= 36
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D(r^3) &= d(r^3,1) + d(r^3,r) + d(r^3,r^2) + d(r^3,r^4) + d(r^3,r^5) + \\
&\quad d(r^3,r^6) + d(r^3,s) + d(r^3,sr) + d(r^3,sr^2) + d(r^3,sr^3) + \\
&\quad d(r^3,sr^4) + d(r^3,sr^5) + d(r^3,sr^6) \\
&= 4 + 4 + 3 + 1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 + 2 + 3 + 4 \\
&= 36
\end{aligned}$$

$$D(r^4) = d(r^4,1) + d(r^4,r) + d(r^4,r^2) + d(r^4,r^3) + d(r^4,r^5) + d(r^4,r^6) + d(r^4,s) + d(r^4,sr) + d(r^4,sr^2) + d(r^4,sr^3) + d(r^4,sr^4) + d(r^4,sr^5) + d(r^4,sr^6)$$

$$= 3 + 4 + 4 + 3 + 1 + 2 + 4 + 4 + 3 + 2 + 1 + 2 + 3$$

$$= 36$$

$$D(r^5) = d(r^5,1) + d(r^5,r) + d(r^5,r^2) + d(r^5,r^3) + d(r^5,r^4) + d(r^5,r^6) + d(r^5,s) + d(r^5,sr) + d(r^5,sr^2) + d(r^5,sr^3) + d(r^5,sr^4) + d(r^5,sr^5) + d(r^5,sr^6)$$

$$= 2 + 3 + 4 + 4 + 3 + 1 + 3 + 4 + 4 + 3 + 2 + 1 + 2$$

$$= 36$$

$$D(r^6) = d(r^6,1) + d(r^6,r) + d(r^6,r^2) + d(r^6,r^3) + d(r^6,r^4) + d(r^6,r^5) + d(r^6,s) + d(r^6,sr) + d(r^6,sr^2) + d(r^6,sr^3) + d(r^6,sr^4) + d(r^6,sr^5) + d(r^6,sr^6)$$

$$= 1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 3 + 2 + 3 + 4 + 4 + 3 + 2 + 1$$

$$= 36$$

$$D(s) = d(s,1) + d(s,r) + d(s,r^2) + d(s,r^3) + d(s,r^4) + d(s,r^5) + d(s,r^6) + d(s,sr) + d(s,sr^2) + d(s,sr^3) + d(s,sr^4) + d(s,sr^5) + d(s,sr^6)$$

$$= 1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 3 + 2 + 3 + 4 + 4 + 3 + 2 + 1$$

$$= 36$$

$$D(sr) = d(sr,1) + d(sr,r) + d(sr,r^2) + d(sr,r^3) + d(sr,r^4) + d(sr,r^5) + d(sr,r^6) + d(sr,s) + d(sr,sr^2) + d(sr,sr^3) + d(sr,sr^4) + d(sr,sr^5) + d(sr,sr^6)$$

$$= 2 + 1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 3 + 1 + 3 + 4 + 4 + 3 + 2$$

$= 36$

$$D(sr^2) = d(sr^2,1) + d(sr^2,r) + d(sr^2,r^2) + d(sr^2,r^3) + d(sr^2,r^4) + d(sr^2,r^5) + d(sr^2,r^6) + d(sr^2,s) + d(sr^2,sr) + d(sr^2,sr^3) + d(sr^2,sr^4) + d(sr^2,sr^5) + d(sr^2,sr^6)$$

$= 3 + 2 + 1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 2 + 1 + 3 + 4 + 4 + 3$

$= 36$

$$D(sr^3) = d(sr^3,1) + d(sr^3,r) + d(sr^3,r^2) + d(sr^3,r^3) + d(sr^3,r^4) + d(sr^3,r^5) + d(sr^3,r^6) + d(sr^3,s) + d(sr^3,sr) + d(sr^3,sr^2) + d(sr^3,sr^4) + d(sr^3,sr^5) + d(sr^3,sr^6)$$

$= 4 + 3 + 2 + 1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 + 3 + 4 + 4$

$= 36$

$$D(sr^4) = d(sr^4,1) + d(sr^4,r) + d(sr^4,r^2) + d(sr^4,r^3) + d(sr^4,r^4) + d(sr^4,r^5) + d(sr^4,r^6) + d(sr^4,s) + d(sr^4,sr) + d(sr^4,sr^2) + d(sr^4,sr^3) + d(sr^4,sr^5) + d(sr^4,sr^6)$$

$= 4 + 4 + 3 + 2 + 1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 + 3 + 4$

$= 36$

$$D(sr^5) = d(sr^5,1) + d(sr^5,r) + d(sr^5,r^2) + d(sr^5,r^3) + d(sr^5,r^4) + d(sr^5,r^5) + d(sr^5,r^6) + d(sr^5,s) + d(sr^5,sr) + d(sr^5,sr^2) + d(sr^5,sr^3) + d(sr^5,sr^4) + d(sr^5,sr^6)$$

$= 3 + 4 + 4 + 3 + 2 + 1 + 2 + 4 + 4 + 3 + 2 + 1 + 3$

$= 36$

$$D(sr^6) = d(sr^6,1) + d(sr^6,r) + d(sr^6,r^2) + d(sr^6,r^3) + d(sr^6,r^4) + d(sr^6,r^5) + d(sr^6,r^6) + d(sr^6,s) + d(sr^6,sr) + d(sr^6,sr^2) + d(sr^6,sr^3) + d(sr^6,sr^4) + d(sr^6,sr^5)$$

$= 2 + 3 + 4 + 4 + 3 + 2 + 1 + 3 + 4 + 4 + 3 + 2 + 1$

$= 36$

Setelah diketahui eksentrisitas dan jumlah jarak masing-masing titik dari $\overrightarrow{Cay}(D_{14}, S)$, maka dapat dilakukan perhitungan jumlah jarak eksentriknya yaitu:

$$\xi^{ds}\left(\overrightarrow{Cay}(D_{14})\right) = \sum_{u \in V(\overrightarrow{Cay}(D_{14}))} e(u)D(u)$$

$$= \left(e(1)D(1)\right) + \left(e(r)D(r)\right) + \left(e(r^2)D(r^2)\right) + \left(e(r^3)D(r^3)\right) + \left(e(r^4)D(r^4)\right) + \left(e(r^5)D(r^5)\right) + \left(e(r^6)D(r^6)\right) + \left(e(s)D(s)\right) + \left(e(sr)D(sr)\right) + \left(e(sr^2)D(sr^2)\right) + \left(e(sr^3)D(sr^3)\right) + \left(e(sr^4)D(sr^4)\right) + \left(e(sr^5)D(sr^5)\right) + \left(e(sr^6)D(sr^6)\right)$$

$$= \left(4(36)\right) + \left(4(36)\right) + \left(4(36)\right) + \left(4(36)\right) + \left(4(36)\right) + \left(4(36)\right) + \left(4(36)\right) + \left(4(36)\right) + \left(4(36)\right) + \left(4(36)\right) + \left(4(36)\right) + \left(4(36)\right) + \left(4(36)\right) + \left(4(36)\right)$$

$$= 2016$$

4.1.6 Jumlah Jarak Eksentrik pada $\overrightarrow{Cay}(D_{16}, S)$

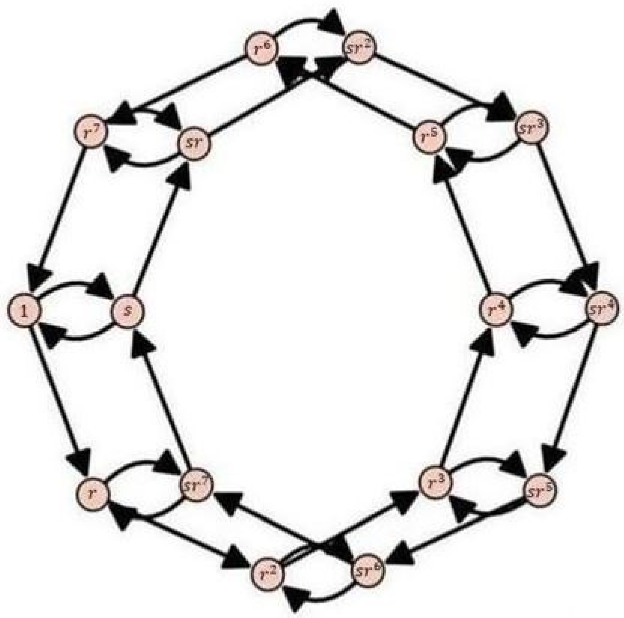
Untuk menentukan digraf cayley dari grup dihedral-16 di mana $n = 8$, terlebih dahulu ditentukan elemen-elemen dari grup dihedral-16 (D_{16}) yaitu $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$. Sehingga diperoleh tabel Cayley sebagai berikut:

Tabel 4.6 Tabel $\overrightarrow{Cay}(D_{16}, S)$

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5

r^3	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^4	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3
r^5	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2
r^6	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr
r^7	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^4	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3
sr^5	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2
sr^6	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r
sr^7	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1

Selanjutnya dengan menggunakan tabel Cayley tersebut maka dapat diperoleh $\overrightarrow{Cay}(D_{16}, S)$ sebagai berikut:



Gambar 4.6 $\overrightarrow{Cay}(D_{16}, S)$

Berdasarkan Gambar 4.6, maka dapat dicari eksentrisitas titik $e(u)$ pada digraf Cayley dari grup dihedral (D_{16}) untuk setiap $u \in V(\overrightarrow{Cay}(D_{16}, S))$. Eksentrisitas dapat dijabarkan sebagai berikut:

$e(1) = \max\{ d(1,r), d(1,r^2), d(1,r^3), d(1,r^4), d(1,r^5), d(1,r^6),$
$d(1,r^7), d(1,s), d(1,sr), d(1,sr^2), d(1,sr^3), d(1,sr^4), d(1,sr^5),$
$d(1,sr^6), d(1,sr^7)\}$
$= \max\{1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2\}$
$= 5$

$e(r) = \max\{ d(r,1), d(r,r^2), d(r,r^3), d(r,r^4), d(r,r^5), d(r,r^6),$
$d(r,r^7), d(r,s), d(r,sr), d(r,sr^2), d(r,sr^3), d(r,sr^4), d(r,sr^5),$
$d(r,sr^6), d(r,sr^7)\}$
$= \max\{3, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3\}$
$= 5$

$e(r^2) = \max\{ d(r^2,1), d(r^2,r), d(r^2,r^3), d(r^2,r^4), d(r^2,r^5), d(r^2,r^6),$
$d(r^2,r^7), d(r^2,s), d(r^2,sr), d(r^2,sr^2), d(r^2,sr^3), d(r^2,sr^4),$
$d(r^2,sr^5), d(r^2,sr^6), d(r^2,sr^7)\}$
$= \max\{4, 3, 1, 2, 3, 4, 5, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4\}$
$= 5$

$e(r^3) = \max\{ d(r^3,1), d(r^3,r), d(r^3,r^2), d(r^3,r^4), d(r^3,r^5), d(r^3,r^6),$
$d(r^3,r^7), d(r^3,s), d(r^3,sr), d(r^3,sr^2), d(r^3,sr^3), d(r^3,sr^4),$
$d(r^3,sr^5), d(r^3,sr^6), d(r^3,sr^7)\}$
$= \max\{5, 4, 3, 1, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5\}$
$= 5$

$$e(r^4) = \max\{\, d(r^4,1), d(r^4,r), d(r^4,r^2), d(r^4,r^3), d(r^4,r^5), d(r^4,r^6), d(r^4,r^7), d(r^4,s), d(r^4,sr), d(r^4,sr^2), d(r^4,sr^3), d(r^4,sr^4), d(r^4,sr^5), d(r^4,sr^6), d(r^4,sr^7)\}$$

$$= \max\{4, 5, 4, 3, 1, 2, 3, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4\}$$

$$= 5$$

$$e(r^5) = \max\{\, d(r^5,1), d(r^5,r), d(r^5,r^2), d(r^5,r^3), d(r^5,r^4), d(r^5,r^6), d(r^5,r^7), d(r^5,s), d(r^5,sr), d(r^5,sr^2), d(r^5,sr^3), d(r^5,sr^4), d(r^5,sr^5), d(r^5,sr^6), d(r^5,sr^7)\}$$

$$= \max\{3, 4, 5, 4, 3, 1, 2, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3\}$$

$$= 5$$

$$e(r^6) = \max\{\, d(r^6,1), d(r^6,r), d(r^6,r^2), d(r^6,r^3), d(r^6,r^4), d(r^6,r^5), d(r^6,r^7), d(r^6,s), d(r^6,sr), d(r^6,sr^2), d(r^6,sr^3), d(r^6,sr^4), d(r^6,sr^5), d(r^6,sr^6), d(r^6,sr^7)\}$$

$$= \max\{2, 3, 4, 5, 4, 3, 1, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2\}$$

$$= 5$$

$$e(r^7) = \max\{\, d(r^7,1), d(r^7,r), d(r^7,r^2), d(r^7,r^3), d(r^7,r^4), d(r^7,r^5), d(r^7,r^6), d(r^7,s), d(r^7,sr), d(r^7,sr^2), d(r^7,sr^3), d(r^7,sr^4), d(r^7,sr^5), d(r^7,sr^6), d(r^7,sr^7)\}$$

$$= \max\{1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1\}$$

$$= 5$$

$$e(s) = \max\{\, d(s,1), d(s,r), d(s,r^2), d(s,r^3), d(s,r^4), d(s,r^5), d(s,r^6), d(s,r^7), d(s,sr), d(s,sr^2), d(s,sr^3), d(s,sr^4), d(s,sr^5), d(s,sr^6), d(s,sr^7)\}$$

$$= \max\{1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1\}$$

$$= 5$$

$$e(sr) = \max\{\, d(sr,1), d(sr,r), d(sr,r^2), d(sr,r^3), d(sr,r^4), d(sr,r^5), d(sr,r^6), d(sr,r^7), d(sr,s), d(sr,sr^2), d(sr,sr^3), d(sr,sr^4), d(sr,sr^5), d(sr,sr^6), d(sr,sr^7)\}$$

$$= \max\{2,1,2,3,4,5,4,3,1,3,4,5,4,3,2\}$$

$$= 5$$

$$e(sr^2) = \max\{\, d(sr^2,1), d(sr^2,r), d(sr^2,r^2), d(sr^2,r^3), d(sr^2,r^4), d(sr^2,r^5), d(sr^2,r^6), d(sr^2,r^7), d(sr^2,s), d(sr^2,sr), d(sr^2,sr^3), d(sr^2,sr^4), d(sr^2,sr^5), d(sr^2,sr^6), d(sr^2,sr^7)\}$$

$$= \max\{3,2,1,2,3,4,5,4,2,1,3,4,5,4,3\}$$

$$= 5$$

$$e(sr^3) = \max\{\, d(sr^3,1), d(sr^3,r), d(sr^3,r^2), d(sr^3,r^3), d(sr^3,r^4), d(sr^3,r^5), d(sr^3,r^6), d(sr^3,r^7), d(sr^3,s), d(sr^3,sr), d(sr^3,sr^2), d(sr^3,sr^4), d(sr^3,sr^5), d(sr^3,sr^6), d(sr^3,sr^7)\}$$

$$= \max\{4,3,2,1,2,3,4,5,3,2,1,3,4,5,4\}$$

$$= 5$$

$$e(sr^4) = \max\{\, d(sr^4,1), d(sr^4,r), d(sr^4,r^2), d(sr^4,r^3), d(sr^4,r^4), d(sr^4,r^5), d(sr^4,r^6), d(sr^4,r^7), d(sr^4,s), d(sr^4,sr), d(sr^4,sr^2), d(sr^4,sr^3), d(sr^4,sr^5), d(sr^4,sr^6), d(sr^4,sr^7)\}$$

$$= \max\{5,4,3,2,1,2,3,4,4,3,2,1,3,4,5\}$$

$$= 5$$

$$e(sr^5) = \max\{\, d(sr^5,1), d(sr^5,r), d(sr^5,r^2), d(sr^5,r^3), d(sr^5,r^4), d(sr^5,r^5), d(sr^5,r^6), d(sr^5,r^7), d(sr^5,s), d(sr^5,sr), d(sr^5,sr^2), d(sr^5,sr^3), d(sr^5,sr^4), d(sr^5,sr^6), d(sr^5,sr^7)\}$$

$= \max\{4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 5, 4, 3, 2, 1, 3, 4\}$

$= 5$

$e(sr^6) = \max\{\, d(sr^6, 1), d(sr^6, r), d(sr^6, r^2), d(sr^6, r^3), d(sr^6, r^4),$

$d(sr^6, r^5), d(sr^6, r^6), d(sr^6, r^7), d(sr^6, s), d(sr^6, sr),$

$d(sr^6, sr^2), d(sr^6, sr^3), d(sr^6, sr^4), d(sr^6, sr^5), d(sr^6, sr^7)\}$

$= \max\{3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 3\}$

$= 5$

$e(sr^7) = \max\{\, d(sr^7, 1), d(sr^7, r), d(sr^7, r^2), d(sr^7, r^3), d(sr^7, r^4),$

$d(sr^7, r^5), d(sr^7, r^6), d(sr^7, r^7), d(sr^7, s), d(sr^7, sr),$

$d(sr^7, sr^2), d(sr^7, sr^3), d(sr^7, sr^4), d(sr^7, sr^5), d(sr^7, sr^6)\}$

$= \max\{2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1\}$

$= 5$

Dapat disimpulkan bahwa $e(u) = 5\ \forall u \in V\left(\overrightarrow{Cay}(D_{15}, S)\right)$. Berdasarkan Gambar 4.6 dapat dicari jumlah jarak masing-masing titik pada $\overrightarrow{Cay}(D_{16}, S)$. Jumlah jarak titik $u \in V\left(\overrightarrow{Cay}(D_{16}, S)\right)$ adalah sebagai berikut:

$D(1) = d(1, r) + d(1, r^2) + d(1, r^3) + d(1, r^4) + d(1, r^5) + d(1, r^6) +$

$d(1, r^7) + d(1, s) + d(1, sr) + d(1, sr^2) + d(1, sr^3) +$

$d(1, sr^4) + d(1, sr^5) + d(1, sr^6) + d(1, sr^7)$

$= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2$

$= 46$

$D(r) = d(\mathrm{r}, 1) + d(\mathrm{r}, r^2) + d(\mathrm{r}, r^3) + d(\mathrm{r}, r^4) + d(\mathrm{r}, r^5) + d(\mathrm{r}, r^6) +$

$d(\mathrm{r}, r^7) + d(\mathrm{r}, s) + d(\mathrm{r}, sr) + d(\mathrm{r}, sr^2) + d(\mathrm{r}, sr^3) + d(\mathrm{r}, sr^4) +$

$d(\mathrm{r}, sr^5) + d(\mathrm{r}, sr^6) + d(\mathrm{r}, sr^7)$

$$= 3 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 2 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3$$

$$= 46$$

$$D(r^2) = d(r^2, 1) + d(r^2, r) + d(r^2, r^3) + d(r^2, r^4) + d(r^2, r^5) +$$
$$d(r^2, r^6) + d(r^2, r^7) + d(r^2, s) + d(r^2, sr) + d(r^2, sr^2) +$$
$$d(r^2, sr^3) + d(r^2, sr^4) + d(r^2, sr^5) + d(r^2, sr^6) + d(r^2, sr^7)$$
$$= 4 + 3 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 3 + 2 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4$$
$$= 46$$

$$D(r^3) = d(r^3, 1) + d(r^3, r) + d(r^3, r^2) + d(r^3, r^4) + d(r^3, r^5) +$$
$$d(r^3, r^6) + d(r^3, r^7) + d(r^3, s) + d(r^3, sr) + d(r^3, sr^2) +$$
$$d(r^3, sr^3) + d(r^3, sr^4) + d(r^3, sr^5) + d(r^3, sr^6) + d(r^3, sr^7)$$
$$= 5 + 4 + 3 + 1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 3 + 2 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$
$$= 46$$

$$D(r^4) = d(r^4, 1) + d(r^4, r) + d(r^4, r^2) + d(r^4, r^3) + d(r^4, r^5) +$$
$$d(r^4, r^6) + d(r^4, r^7) + d(r^4, s) + d(r^4, sr) + d(r^4, sr^2) +$$
$$d(r^4, sr^3) + d(r^4, sr^4) + d(r^4, sr^5) + d(r^4, sr^6) + d(r^4, sr^7)$$
$$= 4 + 5 + 4 + 3 + 1 + 2 + 3 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 2 + 3 + 4$$
$$= 46$$

$$D(r^5) = d(r^5, 1) + d(r^5, r) + d(r^5, r^2) + d(r^5, r^3) + d(r^5, r^4) +$$
$$d(r^5, r^6) + d(r^5, r^7) + d(r^5, s) + d(r^5, sr) + d(r^5, sr^2) +$$
$$d(r^5, sr^3) + d(r^5, sr^4) + d(r^5, sr^5) + d(r^5, sr^6) + d(r^5, sr^7)$$
$$= 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 1 + 2 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 2 + 3$$
$$= 46$$

$$D(r^6) = d(r^6,1) + d(r^6,r) + d(r^6,r^2) + d(r^6,r^3) + d(r^6,r^4) + d(r^6,r^5) + d(r^6,r^7) + d(r^6,s) + d(r^6,sr) + d(r^6,sr^2) + d(r^6,sr^3) + d(r^6,sr^4) + d(r^6,sr^5) + d(r^6,sr^6) + d(r^6,sr^7)$$

$$= 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 1 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 2$$

$$= 46$$

$$D(r^7) = d(r^7,1) + d(r^7,r) + d(r^7,r^2) + d(r^7,r^3) + d(r^7,r^4) + d(r^7,r^5) + d(r^7,r^6) + d(r^7,s) + d(r^7,sr) + d(r^7,sr^2) + d(r^7,sr^3) + d(r^7,sr^4) + d(r^7,sr^5) + d(r^7,sr^6) + d(r^7,sr^7)$$

$$= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

$$= 46$$

$$D(s) = d(s,1) + d(s,r) + d(s,r^2) + d(s,r^3) + d(s,r^4) + d(s,r^5) + d(s,r^6) + d(s,r^7) + d(s,sr) + d(s,sr^2) + d(s,sr^3) + d(s,sr^4) + d(s,sr^5) + d(s,sr^6) + d(s,sr^7)$$

$$= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

$$= 46$$

$$D(sr) = d(sr,1) + d(sr,r) + d(sr,r^2) + d(sr,r^3) + d(sr,r^4) + d(sr,r^5) + d(sr,r^6) + d(sr,r^7) + d(sr,s) + d(sr,sr^2) + d(sr,sr^3) + d(sr,sr^4) + d(sr,sr^5) + d(sr,sr^6) + d(sr,sr^7)$$

$$= 2 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 1 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2$$

$$= 46$$

$$D(sr^2) = d(sr^2,1) + d(sr^2,r) + d(sr^2,r^2) + d(sr^2,r^3) + d(sr^2,r^4) + d(sr^2,r^5) + d(sr^2,r^6) + d(sr^2,r^7) + d(sr^2,s) + d(sr^2,sr) + d(sr^2,sr^3) + d(sr^2,sr^4) + d(sr^2,sr^5) + d(sr^2,sr^6) + d(sr^2,sr^7)$$

$= 3 + 2 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 2 + 1 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3$

$= 46$

$D(sr^3) = d(sr^3, 1) + d(sr^3, r) + d(sr^3, r^2) + d(sr^3, r^3) + d(sr^3, r^4) +$

$d(sr^3, r^5) + d(sr^3, r^6) + d(sr^3, r^7) + d(sr^3, s) + d(sr^3, sr) +$

$d(sr^3, sr^2) + d(sr^3, sr^4) + d(sr^3, sr^5) + d(sr^3, sr^6) +$

$d(sr^3, sr^7)$

$= 4 + 3 + 2 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 3 + 2 + 1 + 3 + 4 + 5 + 4$

$= 46$

$D(sr^4) = d(sr^4, 1) + d(sr^4, r) + d(sr^4, r^2) + d(sr^4, r^3) + d(sr^4, r^4) +$

$d(sr^4, r^5) + d(sr^4, r^6) + d(sr^4, r^7) + d(sr^4, s) + d(sr^4, sr) +$

$d(sr^4, sr^2) + d(sr^4, sr^3) + d(sr^4, sr^5) + d(sr^4, sr^6) +$

$d(sr^4, sr^7)$

$= 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 3 + 2 + 1 + 3 + 4 + 5$

$= 46$

$D(sr^5) = d(sr^5, 1) + d(sr^5, r) + d(sr^5, r^2) + d(sr^5, r^3) + d(sr^5, r^4) +$

$d(sr^5, r^5) + d(sr^5, r^6) + d(sr^5, r^7) + d(sr^5, s) + d(sr^5, sr) +$

$d(sr^5, sr^2) + d(sr^5, sr^3) + d(sr^5, sr^4) + d(sr^5, sr^6) +$

$d(sr^5, sr^7)$

$= 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 2 + 3 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 3 + 4$

$= 46$

$D(sr^6) = d(sr^6, 1) + d(sr^6, r) + d(sr^6, r^2) + d(sr^6, r^3) + d(sr^6, r^4) +$

$d(sr^6, r^5) + d(sr^6, r^6) + d(sr^6, r^7) + d(sr^6, s) + d(sr^6, sr) +$

$d(sr^6, sr^2) + d(sr^6, sr^3) + d(sr^6, sr^4) + d(sr^6, sr^5) +$

$d(sr^6, sr^7)$

$$= 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 2 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 3$$

$$= 46$$

$$D(sr^7) = d(sr^7, 1) + d(sr^7, r) + d(sr^7, r^2) + d(sr^7, r^3) + d(sr^7, r^4) + d(sr^7, r^5) + d(sr^7, r^6) + d(sr^7, r^7) + d(sr^7, s) + d(sr^7, sr) + d(sr^7, sr^2) + d(sr^7, sr^3) + d(sr^7, sr^4) + d(sr^7, sr^5) + d(sr^7, sr^6)$$

$$= 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

$$= 46$$

Setelah diketahui eksentrisitas dan jumlah jarak masing-masing titik dari $\overrightarrow{Cay}(D_{16}, S)$, maka dapat dilakukan perhitungan jumlah jarak eksentriknya yaitu:

$$\xi^{ds}\left(\overrightarrow{Cay}(D_{16})\right) = \sum_{u \in V(\overrightarrow{Cay}(D_{16}))} e(u)D(u)$$

$$= \big(e(1)D(1)\big) + \big(e(r)D(r)\big) + \big(e(r^2)D(r^2)\big) + \big(e(r^3)D(r^3)\big) + \big(e(r^4)D(r^4)\big) + \big(e(r^5)D(r^5)\big) + \big(e(r^6)D(r^6)\big) + \big(e(r^7)D(r^7)\big) + \big(e(s)D(s)\big) + \big(e(sr)D(sr)\big) + \big(e(sr^2)D(sr^2)\big) + \big(e(sr^3)D(sr^3)\big) + \big(e(sr^4)D(sr^4)\big) + \big(e(sr^5)D(sr^5)\big) + \big(e(sr^6)D(sr^6)\big) + \big(e(sr^7)D(sr^7)\big)$$

$$= \big(5(46)\big) + \big(5(46)\big) + \big(5(46)\big) + \big(5(46)\big) + \big(5(46)\big) + \big(5(46)\big) + \big(5(46)\big) + \big(5(46)\big) + \big(5(46)\big) + \big(5(46)\big) + \big(5(46)\big) + \big(5(46)\big) + \big(5(46)\big) + \big(5(46)\big) + \big(5(46)\big) + \big(5(46)\big)$$

$$= 3680$$

4.2 Jumlah Jarak Eksentrik pada $\overrightarrow{Cay}(D_{2n},S)$

Akan membahas tentang pola jumlah jarak eksentrik dari $\overrightarrow{Cay}\ (D_{2n},S), n \in \mathrm{N}$ $\forall n \geq 3$. Dengan mencari eksentrisitas titik dan juga jumlah jarak masing-masing titik dari $\overrightarrow{Cay}\ (D_{2n},S), n \in \mathrm{N}\ \forall n \geq 3$.

4.2.1 Pola Eksentrisitas titik pada $\overrightarrow{Cay}(D_{2n},S)$

	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$
$e(1)$	2	3	3	4	4	5
$e(r)$	2	3	3	4	4	5
$e(r^2)$	2	3	3	4	4	5
$e(r^3)$	$-$	3	3	4	4	5
$e(r^4)$	$-$	$-$	3	4	4	5
$e(r^5)$	$-$	$-$	$-$	4	4	5
$e(r^6)$	$-$	$-$	$-$	$-$	4	5
$e(r^7)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	5
$e(s)$	2	3	3	4	4	5
$e(sr)$	2	3	3	4	4	5
$e(sr^2)$	2	3	3	4	4	5
$e(sr^3)$	$-$	3	3	4	4	5
$e(sr^4)$	$-$	$-$	3	4	4	5
$e(sr^5)$	$-$	$-$	$-$	4	4	5
$e(sr^6)$	$-$	$-$	$-$	$-$	4	5
$e(sr^7)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	5

Dari tabel tersebut diperoleh dugaan

$$e(u) = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2}, \text{jika } n \text{ ganjil } \forall u \in V\left(\overrightarrow{Cay}(D_{2n},S)\right) \\ \dfrac{n+2}{2}, \text{jika } n \text{ genap } \forall u \in V\left(\overrightarrow{Cay}(D_{2n},S)\right) \end{cases}$$

4.2.2 Pola Jarak Titik pada $\overrightarrow{Cay}(D_{2n},S)$

	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$
$D(1)$	8	14	20	28	36	46
$D(r)$	8	14	20	28	36	46
$D(r^2)$	8	14	20	28	36	46
$D(r^3)$	$-$	14	20	28	36	46
$D(r^4)$	$-$	$-$	20	28	36	46
$D(r^5)$	$-$	$-$	$-$	28	36	46
$D(r^6)$	$-$	$-$	$-$	$-$	36	46
$D(r^7)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	46

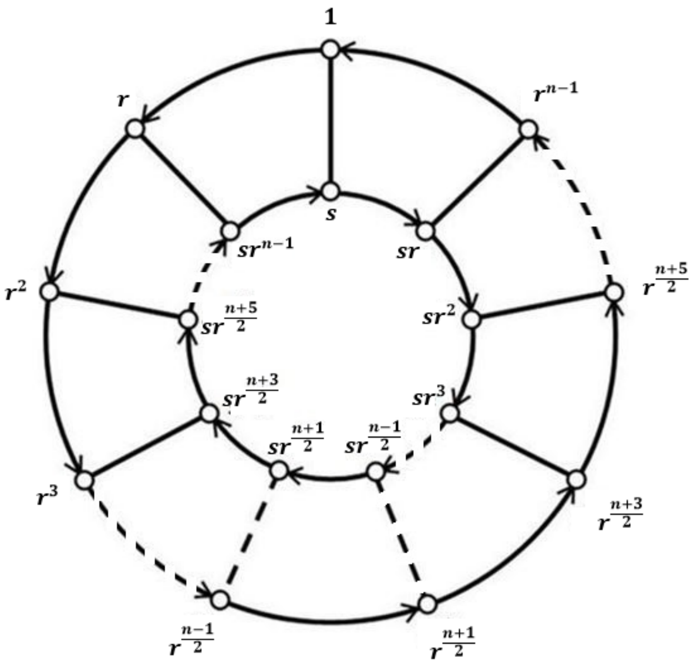
$D(s)$	8	14	20	28	36	46
$D(sr)$	8	14	20	28	36	46
$D(sr^2)$	8	14	20	28	36	46
$D(sr^3)$	−	14	20	28	36	46
$D(sr^4)$	−	−	20	28	36	46
$D(sr^5)$	−	−	−	28	36	46
$D(sr^6)$	−	−	−	−	36	46
$D(sr^7)$	−	−	−	−	−	46

Dari tabel tersebut diperoleh dugaan

$$D(u) = \begin{cases} \dfrac{n^2+4n-5}{2}, \text{ jika } n \text{ ganjil } \forall u \in V\left(\overrightarrow{Cay}(D_{2n}, S)\right) \\ \dfrac{n^2+4n-4}{2}, \text{ jika } n \text{ genap } \forall u \in V\left(\overrightarrow{Cay}(D_{2n}, S)\right) \end{cases}$$

Lemma 1

$\overrightarrow{Cay}(D_{2n}, S)$ dengan n bilangan ganjil $n \geq 3$ dan $S = \{r, s\}$ berbentuk sebagai berikut:



Bukti:

1. $r^i \circ r = r^{i+1} \in V(\overrightarrow{Cay}(D_{2n}, S))$ untuk $i = 0, 1, 2, \ldots, n$

maka $(r^i, r^{i+1}) \in E(\overrightarrow{Cay}(D_{2n}, S))$.

2. $r^i \circ s = sr^{-i} = sr^{n-i} \in V(\overrightarrow{Cay}(D_{2n}, S))$ untuk $i = 0, 1, 2, \dots, n$

   maka $(r^i, sr^{n-i}) \in E(\overrightarrow{Cay}(D_{2n}, S))$.

3. $sr^i \circ r = sr^{i+1} \in V(\overrightarrow{Cay}(D_{2n}, S))$ untuk $i = 0, 1, 2, \dots, n$

   maka $(sr^i, sr^{i+1}) \in E(\overrightarrow{Cay}(D_{2n}, S))$.

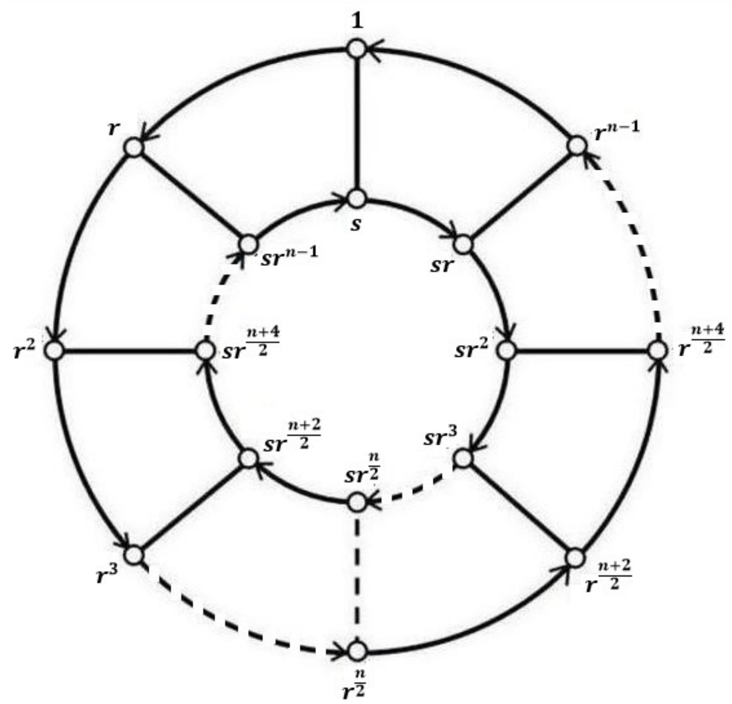
4. $sr^i \circ s = r^{-i}s \circ s = r^{-i} = r^{n-i} \in V(\overrightarrow{Cay}(D_{2n}, S))$ untuk $i = 0, 1, 2, \dots, n$

   maka $(sr^i, r^{n-i}) \in E(\overrightarrow{Cay}(D_{2n}, S))$.

Terbukti.

Lemma 2

$\overrightarrow{Cay}(D_{2n}, S)$ dengan n bilangan genap $n > 3$ dan $S = \{r, s\}$ berbentuk sebagai berikut:



Bukti:

1. $r^i \circ r = r^{i+1} \in V(\overrightarrow{Cay}(D_{2n}, S))$ untuk $i = 0, 1, 2, \dots, n$

maka $(r^i, r^{i+1}) \in E(\overrightarrow{Cay}(D_{2n}, S))$.

2. $r^i \circ s = sr^{-i} = sr^{n-i} \in V(\overrightarrow{Cay}(D_{2n}, S))$ untuk $i = 0, 1, 2, \dots, n$

   maka $(r^i, sr^{n-i}) \in E(\overrightarrow{Cay}(D_{2n}, S))$.

3. $sr^i \circ r = sr^{i+1} \in V(\overrightarrow{Cay}(D_{2n}, S))$ untuk $i = 0, 1, 2, \dots, n$

   maka $(sr^i, sr^{i+1}) \in E(\overrightarrow{Cay}(D_{2n}, S))$.

4. $sr^i \circ s = r^{-i}s \circ s = r^{-i} = r^{n-i} \in V(\overrightarrow{Cay}(D_{2n}, S))$ untuk $i = 0, 1, 2, \dots, n$

   maka $(sr^i, r^{n-i}) \in E(\overrightarrow{Cay}(D_{2n}, S))$.

Terbukti.

Eksentrisitas titik pada $\overrightarrow{Cay}(D_{2n}, S)$ dengan n bilangan ganjil

Berdasarkan lemma 1, maka dapat dicari eksentrisitas titik $e(u)$ pada $\overrightarrow{Cay}(D_{2n}, S)$. Misalkan $\left\{1, r, r^2, r^3, \dots, r^{\frac{n-1}{2}}, r^{\frac{n+1}{2}}, r^{\frac{n+3}{2}}, r^{\frac{n+5}{2}}, \dots, r^{n-1}\right\}$ disebut lingkaran luar dan $\left\{s, sr, sr^2, sr^3, \dots, sr^{\frac{n-1}{2}}, sr^{\frac{n+1}{2}}, sr^{\frac{n+3}{2}}, sr^{\frac{n+5}{2}}, \dots, sr^{n-1}\right\}$ disebut lingkaran dalam. Berikut eksentrisitas titik pada $\overrightarrow{Cay}(D_{2n}, S)$.

$$\begin{aligned}
e(1) = \max\Big\{& d(1,r), d(1,r^2), d(1,r^3), \dots, d\left(1, r^{\frac{n-1}{2}}\right), d\left(1, r^{\frac{n+1}{2}}\right), \\
& d\left(1, r^{\frac{n+3}{2}}\right), d\left(1, r^{\frac{n+5}{2}}\right), \dots, d(1, r^{n-1}), d(1,s), d(1,sr), d(1,sr^2), \\
& d(1,sr^3), \dots, d\left(1, sr^{\frac{n-1}{2}}\right), d\left(1, sr^{\frac{n+1}{2}}\right), d\left(1, sr^{\frac{n+3}{2}}\right), \\
& d\left(1, sr^{\frac{n+5}{2}}\right), \dots, d(1, sr^{n-1})\Big\} \\
= \max\Big\{& 1, 2, 3, \dots, \tfrac{n-1}{2}, \tfrac{n+1}{2}, \tfrac{n+1}{2}, \tfrac{n-1}{2}, \dots, 3, 1, 2, 3, 4, \dots, \tfrac{n+1}{2}, \tfrac{n+1}{2}, \tfrac{n-1}{2}, \\
& \tfrac{n-3}{2}, \dots, 2\Big\} \\
= {} & \frac{n+1}{2}
\end{aligned}$$

$$e(s) = \max\Big\{d(s,1), d(s,r), d(s,r^2), d(s,r^3), \dots, d\left(s, r^{\frac{n-1}{2}}\right), d\left(s, r^{\frac{n+1}{2}}\right),$$

$$d\left(s, r^{\frac{n+3}{2}}\right), d\left(s, r^{\frac{n+5}{2}}\right), \dots, d(s, r^{n-1}), d(s, sr), d(s, sr^2),$$

$$d(s, sr^3), \dots, d\left(s, sr^{\frac{n-1}{2}}\right), d\left(s, sr^{\frac{n+1}{2}}\right), d\left(s, sr^{\frac{n+3}{2}}\right),$$

$$d\left(s, sr^{\frac{n+5}{2}}\right), \dots, d(s, sr^{n-1})\Big\}$$

$$= \max\Big\{1, 2, 3, 4, \dots, \tfrac{n+1}{2}, \tfrac{n+1}{2}, \tfrac{n-1}{2}, \tfrac{n-3}{2}, \dots, 2, 1, 2, 3, \dots, \tfrac{n-1}{2}, \tfrac{n+1}{2}, \tfrac{n+1}{2},$$

$$\tfrac{n-1}{2}, \dots, 3\Big\}$$

$$= \tfrac{n+1}{2}$$

Karena digraf Cayley adalah graf transitif, maka eksentristitas titik lain analog dengan $e(1)$ dan $e(s)$. Jadi, eksentrik titik untuk n ganjil pada digraf Cayley dari grup dihedral-$2n$ adalah sebagai berikut:

$$\overrightarrow{Cay}(D_{2n}, S) = \frac{n+1}{2}$$

Eksentrisitas titik pada $\overrightarrow{Cay}(D_{2n}, S)$ dengan n bilangan genap

Berdasarkan lemma 2, maka dapat dicari eksentrisitas titik $e(u)$ pada $\overrightarrow{Cay}(D_{2n}, S)$. Misalkan $\left\{1, r, r^2, r^3, \dots, r^{\frac{n}{2}}, r^{\frac{n+2}{2}}, r^{\frac{n+4}{2}}, \dots, r^{n-1}\right\}$ disebut lingkaran luar dan $\left\{s, sr, sr^2, sr^3, \dots, sr^{\frac{n}{2}}, sr^{\frac{n+2}{2}}, sr^{\frac{n+4}{2}}, \dots, sr^{n-1}\right\}$ disebut lingkaran dalam. Berikut eksentrisitas titik pada $\overrightarrow{Cay}(D_{2n}, S)$.

$$e(1) = \max\Big\{d(1,r), d(1,r^2), d(1,r^3), \dots, d\left(1, r^{\frac{n}{2}}\right), d\left(1, r^{\frac{n+2}{2}}\right),$$

$$d\left(1, r^{\frac{n+4}{2}}\right), \dots, d(1, r^{n-1}), d(1, s), d(1, sr), d(1, sr^2),$$

$$d(1, sr^3), \dots, d\left(1, sr^{\frac{n}{2}}\right), d\left(1, sr^{\frac{n+2}{2}}\right), d\left(1, sr^{\frac{n+4}{2}}\right), \dots, d(1, sr^{n-1})\Big\}$$

$$= \max\Big\{1, 2, 3, \dots, \tfrac{n}{2}, \tfrac{n+2}{2}, \tfrac{n}{2}, \dots, 3, 1, 2, 3, 4, \dots, \tfrac{n+2}{2}, \tfrac{n}{2}, \tfrac{n-2}{2}, \dots, 2\Big\}$$

$= \frac{n+2}{2}$

$e(s) = \max\Big\{d(s,1), d(s,r), d(s,r^2), d(s,r^3), \dots, d\left(s, r^{\frac{n}{2}}\right),$

$d\left(s, r^{\frac{n+2}{2}}\right), d\left(s, r^{\frac{n+4}{2}}\right), \dots, d(s, r^{n-1}), d(s, sr), d(s, sr^2),$

$d(s, sr^3), \dots, d\left(s, sr^{\frac{n}{2}}\right), d\left(s, sr^{\frac{n+2}{2}}\right),$

$d\left(s, sr^{\frac{n+4}{2}}\right), \dots, d(s, sr^{n-1})\Big\}$

$= \max\left\{1, 2, 3, 4, \dots, \frac{n+2}{2}, \frac{n}{2}, \frac{n-2}{2}, \dots, 2, 1, 2, 3, \dots, \frac{n}{2}, \frac{n+2}{2}, \frac{n}{2}, \dots, 3\right\}$

$= \frac{n+2}{2}$

Karena digraf Cayley adalah graf transitif, maka eksentristitas titik lain analog dengan $e(1)$ dan $e(s)$. Jadi, eksentrik titik untuk n genap pada digraf Cayley dari grup dihedral-$2n$ adalah sebagai berikut:

$$\overrightarrow{Cay}(D_{2n}, S) = \frac{n+2}{2}$$

Jumlah Jarak pada $\overrightarrow{Cay}(D_{2n}, S)$ dengan n bilangan ganjil

$D(1) = d(1,r) + d(1,r^2) + d(1,r^3) + \cdots + d\left(1, r^{\frac{n-1}{2}}\right) + d\left(1, r^{\frac{n+1}{2}}\right) +$

$d\left(1, r^{\frac{n+3}{2}}\right) + d\left(1, r^{\frac{n+5}{2}}\right) + \cdots + d(1, r^{n-1}) + d(1,s) + d(1,sr) +$

$d(1, sr^2) + d(1, sr^3) + \cdots + d\left(1, sr^{\frac{n-1}{2}}\right) + d\left(1, sr^{\frac{n+1}{2}}\right) +$

$d\left(1, sr^{\frac{n+3}{2}}\right) + d\left(1, sr^{\frac{n+5}{2}}\right) + \cdots + d(1, sr^{n-1})$

$= 1 + 2 + 3 + \cdots + \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2} + \frac{n-1}{2} + \cdots + 3 + 1 + 2 + 3 + 4 +$

$\cdots + \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2} + \frac{n-1}{2} + \frac{n-3}{2} + \cdots + 2$

$$= 1 + 2 + 3 + \cdots + \tfrac{n-1}{2} + \tfrac{n+1}{2} + 3 + \cdots + \tfrac{n-1}{2} + \tfrac{n+1}{2} + 1 + 2 + 3 + 4 +$$

$$\cdots + \tfrac{n+1}{2} + 2 + \cdots + \tfrac{n-3}{2} + \tfrac{n-1}{2} + \tfrac{n+1}{2}$$

$$= \underbrace{1 + 2 + 3 + \cdots + \tfrac{n-1}{2} + \tfrac{n+1}{2}}_{a} + \underbrace{3 + \cdots + \tfrac{n-1}{2} + \tfrac{n+1}{2}}_{b} +$$

$$\underbrace{1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + \tfrac{n+1}{2}}_{c} + \underbrace{2 + \cdots + \tfrac{n-3}{2} + \tfrac{n-1}{2} + \tfrac{n+1}{2}}_{d}$$

Dengan menggunakan rumus jumlah suku ke-n maka

$$a = \frac{\frac{n+1}{2}}{2}\left(1 + \frac{n+1}{2}\right)$$

$$= \frac{n+1}{4}\left(\frac{n+3}{2}\right)$$

$$= \frac{n^2+4n+3}{8}$$

$$b = \frac{n^2+4n+3}{8} - 3$$

$$= \frac{n^2+4n-21}{8}$$

$$c = \frac{n^2+4n+3}{8}$$

$$d = \frac{n^2+4n+3}{8} - 1$$

$$= \frac{n^2+4n-5}{8}$$

Jadi

$$a + b + c + d$$

$$\frac{n^2 + 4n + 3}{8} + \frac{n^2 + 4n - 21}{8} + \frac{n^2 + 4n + 3}{8} + \frac{n^2 + 4n - 5}{8}$$

Jumlah jarak pada $\overrightarrow{Cay}(D_{2n}, S)$ dengan n bilangan ganjil

$$D(1) = \frac{n^2+4n+3}{8} + \frac{n^2+4n-21}{8} + \frac{n^2+4n+3}{8} + \frac{n^2+4n-5}{8}$$

$$= \frac{4n^2+16n-20}{8}$$

$$= \frac{n^2+4n-5}{2}$$

$$D(s) = d(s,1) + d(s,r) + d(s,r^2) + d(s,r^3) + \cdots + d\left(s, r^{\frac{n}{2}}\right) +$$

$$d\left(s, r^{\frac{n+2}{2}}\right) + d\left(s, r^{\frac{n+4}{2}}\right) + \cdots + d(s, r^{n-1}) + d(s, sr) + d(s, sr^2) +$$

$$d(s, sr^3) + \cdots + d\left(s, sr^{\frac{n}{2}}\right) + d\left(s, sr^{\frac{n+2}{2}}\right) + d\left(s, sr^{\frac{n+4}{2}}\right) + \cdots +$$

$$d(s, sr^{n-1})$$

$$= 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2} + \frac{n-1}{2} + \frac{n-3}{2} + \cdots + 2 + 1 + 2 + 3 +$$

$$\cdots + \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2} + \frac{n-1}{2} + \cdots + 3$$

$$= 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + \frac{n+1}{2} + 2 + \cdots + \frac{n-3}{2} + \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2} + 1 + 2 + 3 +$$

$$\cdots + \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2} + 3 + \cdots + \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2}$$

$$= \underbrace{1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + \frac{n+1}{2}}_{a} + \underbrace{2 + \cdots + \frac{n-3}{2} + \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2}}_{b} +$$

$$\underbrace{1 + 2 + 3 + \cdots + \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2}}_{c} + \underbrace{3 + \cdots + \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2}}_{d}$$

Dengan menggunakan rumus jumlah suku ke-n maka

$$a = \frac{\frac{n+1}{2}}{2}\left(1 + \frac{n+1}{2}\right)$$

$$= \frac{n+1}{4}\left(\frac{n+3}{2}\right)$$

$$= \frac{n^2+4n+3}{8}$$

$$b = \frac{n^2+4n+3}{8} - 1$$

$$= \frac{n^2+4n-5}{8}$$

$$c = \frac{n^2+4n+3}{8}$$

$d = \frac{n^2+4n+3}{8} - 3$

$= \frac{n^2+4n-21}{8}$

Jadi

$$a + b + c + d$$

$$\frac{n^2 + 4n + 3}{8} + \frac{n^2 + 4n - 5}{8} + \frac{n^2 + 4n + 3}{8} + \frac{n^2 + 4n - 21}{8}$$

Jumlah jarak pada $\overrightarrow{Cay}(D_{2n}, S)$ dengan n bilangan ganjil

$D(s) = \frac{n^2+4n+3}{8} + \frac{n^2+4n-5}{8} + \frac{n^2+4n+3}{8} + \frac{n^2+4n-21}{8}$

$= \frac{4n^2+16n-20}{8}$

$= \frac{n^2+4n-5}{2}$

Karena digraf Cayley adalah graf transitif, maka jumlah jarak lain analog dengan $D(1)$ dan $D(s)$. Jadi, jumlah jarak untuk n ganjil pada digraf Cayley dari grup dihedral-$2n$ adalah sebagai berikut:

$$\overrightarrow{Cay}(D_{2n}, S) = \frac{n^2 + 4n - 5}{2}$$

Jumlah Jarak pada $\overrightarrow{Cay}(D_{2n}, S)$ dengan n bilangan genap

$D(1) = d(1, r) + d(1, r^2) + d(1, r^3) + \cdots + d\left(1, r^{\frac{n}{2}}\right) + d\left(1, r^{\frac{n+2}{2}}\right) + d\left(1, r^{\frac{n+4}{2}}\right) + \cdots + d(1, r^{n-1}) + d(1, s) + d(1, sr) + d(1, sr^2) + d(1, sr^3) + \cdots + d\left(1, sr^{\frac{n}{2}}\right) + d\left(1, sr^{\frac{n+2}{2}}\right) + d\left(1, sr^{\frac{n+4}{2}}\right) + \cdots + d(1, sr^{n-1})$

$= 1 + 2 + 3 + \cdots + \frac{n}{2} + \frac{n+2}{2} + \frac{n}{2} + \cdots + 3 + 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + \frac{n+2}{2} + \frac{n}{2} + \frac{n-2}{2} + \cdots + 2$

$$= 1 + 2 + 3 + \cdots + \frac{n}{2} + \frac{n+2}{2} + 3 + \cdots + \frac{n}{2} + 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + \frac{n+2}{2} +$$

$$2 + \cdots + \frac{n-2}{2} + \frac{n}{2}$$

$$= \underbrace{1 + 2 + 3 + \cdots + \frac{n}{2}}_{a} + \frac{n+2}{2} + \underbrace{3 + \cdots + \frac{n}{2}}_{b} + \underbrace{1 + 2 + 3 + 4 + \cdots +}_{c} \frac{n+2}{2} +$$

$$\underbrace{2 + \cdots + \frac{n-2}{2} + \frac{n}{2}}_{d}$$

Dengan menggunakan rumus jumlah suku ke-n maka

$$a = \frac{\frac{n}{2}}{2}\left(1 + \frac{n}{2}\right)$$

$$= \frac{n}{4}\left(\frac{n+2}{2}\right)$$

$$= \frac{n^2+2n}{8}$$

$$b = \frac{n^2+2n}{8} - 3$$

$$= \frac{n^2+2n-24}{8}$$

$$c = \frac{n^2+2n}{8}$$

$$d = \frac{n^2+2n}{8} - 1$$

$$= \frac{n^2+2n-8}{8}$$

Jadi

$$a + \frac{n+2}{2} + b + c + \frac{n+2}{2} + d$$

Jumlah jarak pada $\overrightarrow{Cay}(D_{2n}, S)$ dengan n bilangan genap

$$D(1) = \frac{n^2+2n}{8} + \frac{n+2}{2} + \frac{n^2+2n-24}{8} + \frac{n^2+2n}{8} + \frac{n+2}{2} + \frac{n^2+2n-8}{8}$$

$$= \frac{4n^2+8n-32}{8} + \frac{2n+4}{2}$$

$$= \frac{4n^2+8n-32+8n+16}{8}$$

$$= \frac{4n^2+16n-16}{8}$$

$$= \frac{n^2+4n-4}{2}$$

$$D(s) = d(s,1) + d(s,r) + d(s,r^2) + d(s,r^3) + \cdots + d\left(s, r^{\frac{n}{2}}\right) +$$

$$d\left(s, r^{\frac{n+2}{2}}\right) + d\left(s, r^{\frac{n+4}{2}}\right) + \cdots + d(s, r^{n-1}) + d(s, sr) + d(s, sr^2) +$$

$$d(s, sr^3) + \cdots + d\left(s, sr^{\frac{n}{2}}\right) + d\left(s, sr^{\frac{n+2}{2}}\right) + d\left(s, sr^{\frac{n+4}{2}}\right) + \cdots +$$

$$d(s, sr^{n-1})$$

$$= 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + \frac{n+2}{2} + \frac{n}{2} + \frac{n-2}{2} + \cdots + 2 + 1 + 2 + 3 + \cdots + \frac{n}{2} +$$

$$\frac{n+2}{2} + \frac{n}{2} + \cdots + 3$$

$$= 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + \frac{n+2}{2} + 2 + \cdots + \frac{n-2}{2} + \frac{n}{2} + 1 + 2 + 3 + \cdots + \frac{n}{2} +$$

$$\frac{n+2}{2} + 3 + \cdots + \frac{n}{2}$$

$$= \underbrace{1 + 2 + 3 + 4 + \cdots}_{a} + \frac{n+2}{2} + \underbrace{2 + \cdots + \frac{n-2}{2} + \frac{n}{2}}_{b} +$$

$$\underbrace{1 + 2 + 3 + \cdots + \frac{n}{2}}_{c} + \frac{n+2}{2} + \underbrace{3 + \cdots + \frac{n}{2}}_{d}$$

Dengan menggunakan rumus jumlah suku ke-n maka

$$a = \frac{\frac{n}{2}}{2}\left(1 + \frac{n}{2}\right)$$

$$= \frac{n}{4}\left(\frac{n+2}{2}\right)$$

$$= \frac{n^2+2n}{8}$$

$$b = \frac{n^2+2n}{8} - 1$$

$$= \frac{n^2+2n-8}{8}$$

$$c = \frac{n^2+2n}{8}$$

$$d = \frac{n^2+2n}{8} - 3$$

$$= \frac{n^2+2n-24}{8}$$

Jadi

$$a + \frac{n+2}{2} + b + c + \frac{n+2}{2} + d$$

Jumlah jarak pada $\overrightarrow{Cay}(D_{2n}, S)$ dengan n bilangan genap

$$D(s) = \frac{n^2+2n}{8} + \frac{n+2}{2} + \frac{n^2+2n-8}{8} + \frac{n^2+2n}{8} + \frac{n+2}{2} + \frac{n^2+2n-24}{8}$$

$$= \frac{4n^2+8n-32}{8} + \frac{2n+4}{2}$$

$$= \frac{4n^2+8n-32+8n+16}{8}$$

$$= \frac{4n^2+16n-16}{8}$$

$$= \frac{n^2+4n-4}{2}$$

Karena digraf Cayley adalah graf transitif, maka jumlah jarak lain analog dengan $D(1)$ dan $D(s)$. Jadi, jumlah jarak untuk n genap pada digraf Cayley dari grup dihedral-$2n$ adalah sebagai berikut:

$$\overrightarrow{Cay}(D_{2n}, S) = \frac{n^2+4n-4}{2}$$

Teorema 4.1 Pola Jumlah Jarak Eksentrik pada $\overrightarrow{Cay}(D_{2n}, S)$

$$\xi^{ds}\left(\overrightarrow{Cay}(D_{2n})\right) = \begin{cases} \dfrac{n^4+5n^3-n^2-5n}{2}, & n \text{ ganjil } \geq 3, n \in \mathbb{N} \\ \dfrac{n^4+6n^3+4n^2-8n}{2}, & n \text{ genap} \geq 4, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Bukti

Berdasarkan definisi jumlah jarak eksentrik

$$\xi^{ds}(G) = \sum_{u \in V(G)} e(u)D(u)$$

Jadi,

$$\xi^{ds}\left(\overrightarrow{Cay}(D_{2n})\right) = \sum_{u \in V\left(\overrightarrow{Cay}(D_{2n})\right)} e(u)D(u)$$

Sehingga diperoleh dari rumus perkalian jumlah titik eksentrik dengan jumlah jarak suatu digraf Cayley dari grup dihedral-$2n$

untuk $n =$ Ganjil, $n \geq 3$

$$\xi^{ds}\left(\overrightarrow{Cay}(D_{2n})\right) = \sum_{u \in V\left(\overrightarrow{Cay}(D_{2n})\right)} \left(\frac{n+1}{2} \times \frac{n^2+4n-5}{2}\right)$$

artinya $\left(\frac{n+1}{2} \times \frac{n^2+4n-5}{2}\right) + \left(\frac{n+1}{2} \times \frac{n^2+4n-5}{2}\right) + \cdots$ sebanyak jumlah digraf cayley dari grup dihedral-$2n$ atau bisa dikalikan dengan $2n$ sehingga diperoleh:

$$\xi^{ds}\left(\overrightarrow{Cay}(D_{2n})\right) = 2n\left(\frac{n+1}{2} \times \frac{n^2+4n-5}{2}\right)$$

$$= 2n\left(\frac{n^3+4n^2-5n+n^2+4n-5}{4}\right)$$

$$= 2n\left(\frac{n^3+5n^2-n-5}{4}\right)$$

$$= n\left(\frac{n^3+5n^2-n-5}{2}\right)$$

$$= \frac{n^4+5n^3-n^2-5n}{2}$$

untuk $n =$ Genap, $n \geq 4$

$$\xi^{ds}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{Cay}}(\boldsymbol{D_{2n}})\right) = \sum_{u \in V\left(\overrightarrow{\boldsymbol{Cay}}(\boldsymbol{D_{2n}})\right)} \left(\frac{n+2}{2} \times \frac{n^2+4n-4}{2}\right)$$

$$= 2n\left(\frac{n+2}{2} \times \frac{n^2+4n-4}{2}\right)$$

$$= 2n\left(\frac{n^3+4n^2-4n+2n^2+8n-8}{4}\right)$$

$$= 2n\left(\frac{n^3+6n^2+4n-8}{4}\right)$$

$$= n\left(\frac{n^3+6n^2+4n-8}{2}\right)$$

$$= \frac{n^4+6n^3+4n^2-8n}{2}$$

Terbukti.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan, maka dapat diambil kesimpulan bahwa untuk menentukan rumus jumlah jarak eksentrik pada digraf cayley dari grup dihedral-$2n$ adalah dengan mencari nilai eksentrisitas titik pada $\overrightarrow{Cay}(\mathbb{G}, S)$ lalu mencari jumlah jarak masing-masing titik pada $\overrightarrow{Cay}(\mathbb{G}, S)$ setelah diketahui masing-masing eksentrisitas titik dan jumlah jarak masing-masing titik maka dapat dicari jumlah jarak eksentrik pada $\overrightarrow{Cay}(\mathbb{G}, S)$. Dapat disimpulkan bahwa jumlah jarak eksentrik pada $\overrightarrow{Cay}(\mathbb{G}, S)$ adalah sebagai berikut:

$$\xi^{ds}\left(\overrightarrow{Cay}(D_{2n})\right) = \begin{cases} \dfrac{n^4 + 5n^3 - n^2 - 5n}{2}, & n \text{ ganjil } \geq 3, n \in \mathbb{N} \\ \dfrac{n^4 + 6n^3 + 4n^2 - 8n}{2}, & n \text{ genap} \geq 4, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

5.2 Saran untuk Penelitian Lanjutan

Pada penelitian ini hanya membahas jumlah jarak eksentrik pada digraf Cayley dari grup dihedral-$2n$.Untuk penelitian selanjutnya, penulis berharap kepada pembaca untuk mengembangkan mencari jumlah jarak eksentik pada graf yang lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Almahally, Imam Jalaluddin & Imam Jalaluddin As-Syuyutti.(1990). *Tafsir Jalalalain*. Jilid I Bandung: Sinar Baru.

Al-Qur'an dan Terjemahnya. (2019). Kementrian Agama RI.

Abdussakir, Azizah, N.N., & Nofandika, F. F. 2009. *Teori Graf Topik Dasar untuk Tugas Akhir/Skripsi*. Malang: UIN-Maliki Press.

Alqesmah, A., Saleh, A., Rangarajan, R., Yurttas Gunes, A., & Cangul, I. (2021). Distance Eccentric Connectivity Index of Graphs. *Kyungpook Mathematical Journal*, *61*(1).

Chartrand, G., Lesniak, L., & Zhang, P. 2016. *Graphs and Digraphs Sixth Edition*. Boca Raton: CRC Press.

Dummit, D. S., & Foote, R. M. (2004). *Abstract algebra* (Vol. 3). Hoboken: Wiley.

Fatimah, S. (2014). Dekomposisi Kmm-(Anti) Ajaib dari Cn [Km]. *Gamatika*, *5*(1).

Irawan, W. H. (2018). *Hand Out Struktur Aljabar I*. Malang: UIN Maliki.

Kreyszig, E. (2002). *Advanced Engineering Mathematics*. Vice President and Publisher: Laurie Rosatone.

Kurfia, M. A. (2017). *Eccentric-distance sum pada komplemen graf invers grup dihedral* (Doctoral dissertation, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim).

Nurhidayat, A. (2013). Grup Automorfisme Graf Helm, graf Helm Tertutup, dan Graf Buku. *Mathunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, *1*(5).

Okal, M., Kiftiah, M., & Fran, F. (2019). Graf Cayley pada S_n. *Bimaster: Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya*, *8*(1), 21-28.

Padmapriya, P., & Mathad, V. (2017). The eccentric-distance sum of some graphs. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications (EJGTA)*, *5*(1), 51-62.

Safitri, E. R. (2018). *Eccentric-distance sum pada graf dari latis himpunan kuasa* (Doctoral dissertation, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim).

Tikasari, A. (2013). Pelabelan Sisi Ajaib dan Sisi Ajaib Super pada Graf kipas, Graf Tangga, Graf Prisma, Graf Lintasan, Graf sikel, dan Graf Buku. *Mathunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, *1*(5).

Umilasari, R. (2015). *Bilangan dominasi jarak dua pada graf-graf hasil operasi korona dan comb* (Doctoral dissertation, Institut Teknologi Sepuluh Nopember).

RIWAYAT HIDUP

Nazla Ayuni Banat, biasa dipanggil Nazla, lahir di Madiun pada tanggal 01 Maret 1999. Bertempat tinggal di Dusun Pandansari RT 08 RW 02 Desa Jetis Kecamatan Dagangan Kabupaten Madiun. Anak pertama dari dua bersaudara, putri dari bapak almarhum Ahmad Shodiqin dan ibu Eni Yuli Wastuti serta kakak dari Taghrid Iman.

Mulai menempuh pendidikan dasar di SDN 1 Prambon pada tahun 2006 hingga 2012, menempuh pendidikan menengah pertama di MTsN Sewulan pada tahun 2012 hingga 2014, dan menempuh pendidikan mengenah atas pada tahun 2014 hingga 2017. Selanjutnya pada tahun 2017 melanjutkan pendidikan di Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang. Selama menempuh pendidikan di perguruan tinggi, penulis memiliki kegiatan di luar kampus yaitu menjadi tentor privat dari salah satu lembaga bimbingan belajar. Penulis dapat dihubungi melalui email:
nazlaayuni99gmail.com

KEMENTRIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama	: Nazla Ayuni Banat
NIM	: 17610021
Fakultas/Jurusan	: Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi	: Jumlah Jarak Eksentrik pada Digraf Cayley dari Grup Dihedral-$2n$
Pembimbing I	: Mohammad Nafie Jauhari, M.Si
Pembimbing II	: Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	5 Maret 2022	Bimbingan Bab I, II, dan III	1
2	9 April 2022	Revisi Bab I, II, dan III	2
3	21 April 2022	Bimbingan Kajian Agama Bab I dan II	3
4	26 April 2022	Revisi Kajian Agama Bab I dan II	4
5	12 Mei 2022	ACC Pendaftaran Seminar Proposal	5
6	2 Agustus 2022	Bimbingan Setelah Seminar Proposal	6
7	3 Oktober 2022	Revisi Bab IV	7
8	25 November 2022	ACC Pendaftaran Seminar Hasil	8
9	19 Desember 2022	Bimbingan Setelah Seminar Hasil	9
10	21 Desember 2022	ACC Semua Bab untuk Disidangkan	10
11	28 Desember 2022	ACC Skripsi untuk syarat Yudisium	11

Malang, 28 Desember 2022
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP.19741129 200012 2 005