

**SOLUSI NUMERIK MODEL MATEMATIKA VIBRASI
DAWAI YANG DIKENAI MASSA MENGGELINDING DI
SEPANJANG DAWAI MENGGUNAKAN METODE ADAMS-
BASHFORTH-MOULTON (ABM)**

SKRIPSI

**OLEH
YUNIA MEGA PRATIWI
NIM. 18610079**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022**

**SOLUSI NUMERIK MODEL MATEMATIKA VIBRASI
DAWAI YANG DIKENAI MASSA MENGGELINDING DI
SEPANJANG DAWAI MENGGUNAKAN METODE ADAMS-
BASHFORTH-MOULTON (ABM)**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Yunia Mega Pratiwi
NIM. 18610079**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022**

**SOLUSI NUMERIK MODEL MATEMATIKA VIBRASI
DAWAI YANG DIKENAI MASSA MENGGELINDING DI
SEPANJANG DAWAI MENGGUNAKAN METODE ADAMS-
BASHFORTH-MOULTON (ABM)**

SKRIPSI

**Oleh
Yunia Mega Pratiwi
NIM. 18610079**

Telah Diperiksa dan Disetujui Untuk Diuji

Malang, 8 Desember 2022

Dosen Pembimbing I



Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si
NIP. 19770521 200501 2 004

Dosen Pembimbing II



Mohammad Nafie Jauhari, M.Si
NIDT. 19870218 20160801 1 056

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

**SOLUSI NUMERIK MODEL MATEMATIKA VIBRASI
DAWAI YANG DIKENAI MASSA MENGGELINDING DI
SEPANJANG DAWAI MENGGUNAKAN METODE ADAMS-
BASHFORTH-MOULTON (ABM)**

SKRIPSI

**Oleh
Yunia Mega Pratiwi
NIM. 18610079**

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 16 Desember 2022

Ketua Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si

Anggota Penguji I : Dr. Heni Widayani, M.Si

Anggota Penguji II : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si

Anggota Penguji III : Mohammad Nafie Jauhari, M.Si



Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Yunia Mega Pratiwi

NIM : 18610079

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Solusi Numerik Model Matematika Vibrasi Dawai yang
Dikenai Massa Menggelinding di Sepanjang Dawai
Menggunakan Metode Adams-Bashforth-Moulton (ABM)

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar- benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 16 Desember 2022

Yang membuat pernyataan,



Yunia Mega Pratiwi

NIM. 18610079

MOTTO DAN PERSEMBAHAN

“Apapun yang baik menurut kita, selalu ada yang lebih baik menurut Allah SWT.
Tetaplah sabar dan janganlah berburuk sangka”

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Dua orang paling berharga dalam hidup penulis, Bapak Suyuti dan Ibu Mujiyah yang senantiasa memberikan cinta dan kasih sayang yang tiada batas, selalu memberikan doa dan dukungan kepada penulis dalam mengejar impian dan kesuksesan. Kakak dan keponakan penulis yang selalu menjadi motivasi untuk menyelesaikan perkuliahan. Serta Teman-teman yang selalu membantu dan memberikan semangat dalam perkuliahan hingga skripsi ini selesai.

KATA PENGANTAR

Puji syukur terhadap Allah SWT karena berkat limpahan rahmat, taufik, hidayah, dan inayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul “Solusi Numerik Model Matematika Vibrasi Dawai yang Dikenai Massa Menggelinding di Sepanjang Dawai Menggunakan Metode Adams-Bashforth-Moulton (ABM)”. Sholawat serta salam selalu tercurahkan kepada Rasulullah SAW. Aamiin.

Ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan arahan, bimbingan, semangat, serta motivasi selama penelitian.
5. Mohammad Nafie Jauhari, M.Si, selaku dosen pembimbing II sekaligus dosen wali penulis yang telah memberikan arahan, bimbingan, serta motivasi dalam perkuliahan.
6. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua penguji dalam ujian skripsi yang telah memberikan saran untuk penyempurnaan skripsi penulis.
7. Dr. Heni Widayani, M.Si, selaku anggota penguji dalam ujian skripsi yang telah memberikan saran untuk penyempurnaan skripsi penulis.

8. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
9. Bapak Suyuti dan Ibu Mujiyah atas cinta dan kebahagiaan yang telah diberikan untuk penulis serta doa yang telah dipanjatkan dan dukungan untuk segera menyelesaikan skripsi ini.
10. Seluruh mahasiswa angkatan 2018, terutama teman-teman dekat penulis yang berkenan memberikan informasi dan semangat dalam proses penyelesaian skripsi ini.
11. *Last but not least, I wanna thank me. I wanna thank me for believing in me, I wanna thank me for doing all this hard work, I wanna thank me for having no days off, I wanna thank me for never quitting.*

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi pembaca dan penulis.

Malang, 16 Desember 2022

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGAJUAN	ii
HALAMAN PERSETUJUAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	v
MOTTO DAN PERSEMBAHAN	vi
KATA PENGANTAR	vii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR TABEL	xi
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR SIMBOL	xiii
DAFTAR LAMPIRAN	xiv
ABSTRAK	xv
ABSTRACT	xvi
مستخلص البحث	xvii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah	5
1.3 Tujuan Penelitian.....	6
1.4 Manfaat Penelitian.....	6
1.5 Batasan Masalah	7
1.6 Definisi Istilah	8
BAB II KAJIAN PUSTAKA	9
2.1 Teori Pendukung	9
2.1.1 Model Vibrasi Dawai (Janah & Kusumastuti,2021).....	9
2.1.2 Model Vibrasi Dawai (Janah & Kusumastuti,2021)Terrevisi...	40
2.1.3 Penelitian Rujukan	48
2.1.4 Metode Adams-Bashforth-Moulton (ABM) Orde Empat.....	53
2.1.5 Metode Runge-Kutta Orde Empat	54
2.1.6 Analisis Nilai <i>Error</i> (Galat).....	56
2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Quran/Hadits.....	57
2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung.....	58
BAB III METODE PENELITIAN	59
3.1 Jenis Penelitian	59
3.2 Pra Penelitian.....	59
3.3 Tahapan Penelitian	60
BAB IV PEMBAHASAN	62
4.1 Solusi Numerik dengan ABM untuk Model Vibrasi Dawai.....	62
4.1.1 Input Tiga Nilai Awal pada ABM menggunakan RK orde 4....	64
4.1.2 Hasil Solusi Numerik Metode ABM Orde 4.....	67
4.1.3 Perbandingan Solusi RK dan ABM.....	75
4.2 Analisis Galat Sejati Metode ABM terhadap Solusi Eksaknya.....	79
4.2.1 Analisis Galat Persamaan $y(t)$	79
4.2.2 Analisis Galat Persamaan $\theta(t)$	83
4.3 Simulasi dan Interpretasi Solusi Numerik Variasi Parameter	86
4.3.1 Solusi Numerik $y(t)$ dengan Variasi Parameter m_b	87

4.3.2 Uji Sensitivitas Solusi $y(t)$ pada m_b	90
4.3.3 Solusi Numerik $\theta(t)$ Variasi Parameter r pada $m_b = 10$	92
4.3.4 Uji Sensitivitas Solusi $\theta(t)$ Parameter r pada $m_b = 10$	95
4.3.5 Solusi Numerik $\theta(t)$ Variasi Parameter r pada $m_b = 20$	99
4.3.6 Uji Sensitivitas Solusi $\theta(t)$ Parameter r pada $m_b = 20$	102
BAB V PENUTUP	106
5.1 Kesimpulan	106
5.2 Saran untuk Penelitian Selanjutnya	108
DAFTAR PUSTAKA	109
LAMPIRAN	111
RIWAYAT HIDUP	114

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Daftar Parameter	12
Tabel 4.1	Nilai Awal Persamaan $y(t)$	65
Tabel 4.2	Nilai Awal Persamaan $\theta(t)$	67
Tabel 4.3	Perbandingan Nilai Persamaan $y_2(t)$ metode RK dan ABM	76
Tabel 4.4	Perbandingan Nilai Persamaan $y_1(t)$ metode RK dan ABM	77
Tabel 4.5	Perbandingan Nilai Persamaan $\theta_2(t)$ metode RK dan ABM	77
Tabel 4.6	Perbandingan Nilai Persamaan $\theta_1(t)$ metode RK dan ABM	78
Tabel 4.7	Nilai Galat pada Persamaan $y_2(t)$	80
Tabel 4.8	Nilai Galat pada Persamaan $y_2(t)$	80
Tabel 4.9	Nilai Galat pada Persamaan $\theta(t)$	84
Tabel 4.10	Nilai Galat pada Persamaan $\theta(t)$	84
Tabel 4.11	Nilai Awal Persamaan $y(t)$ Variasi parameter m_b	87
Tabel 4.12	Perbandingan Solusi $y_2(t)$ Variasi Parameter m_b	91
Tabel 4.13	Perbandingan Solusi $y_1(t)$ Variasi Parameter m_b	92
Tabel 4.14	Nilai Awal Persamaan $\theta(t)$ Variasi Parameter r pada $m_b = 10$	93
Tabel 4.15	Perbandingan Solusi $\theta_2(t)$ Variasi Parameter r pada $m_b = 10$	97
Tabel 4.16	Perbandingan Solusi $\theta_1(t)$ Variasi Parameter r pada $m_b = 10$	98
Tabel 4.17	Nilai Awal Persamaan $\theta(t)$ Variasi Parameter r pada $m_b = 20$	99
Tabel 4.18	Perbandingan Solusi $\theta_2(t)$ Variasi Parameter r pada $m_b = 20$	103
Tabel 4.19	Perbandingan Solusi $\theta_1(t)$ Variasi parameter r pada $m_b = 20$	105

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Ilustrasi Vibrasi Dawai.....	10
Gambar 2.2	Ilustrasi Massa Berhenti di $\frac{1}{2}$ dari Panjang Dawai.....	10
Gambar 2.3	Ilustrasi Massa Berhenti di $\frac{1}{4}$ dari Panjang Dawai.....	11
Gambar 2.4	Ilustrasi Massa Berhenti di $\frac{1}{8}$ dari Panjang Dawai.....	11
Gambar 2.5	Sudut Putar Bola.....	15
Gambar 2.6	Ilustrasi Gaya Dorong di Partisi pada L yakni di l	17
Gambar 2.7	Ilustrasi Gaya Gesek	17
Gambar 2.8	Ilustrasi Simpangan Dawai di Partisi pada L yakni di l	19
Gambar 2.9	Ilustrasi Peregangan di Sisi Kiri.....	20
Gambar 2.10	Ilustrasi Peregangan di Sisi Kanan.....	22
Gambar 2.11	Ilustrasi Gaya Tegangan pada Dawai.....	23
Gambar 2.12	Ilustrasi Gaya Berat	28
Gambar 2.13	Ilustrasi Gaya Pegas	29
Gambar 2.14	Ilustrasi Batang Digantung pada Pegas di Setiap Ujungnya.....	49
Gambar 4.1	Grafik $y(t)$ di $t \in [0,10]$	70
Gambar 4.2	Grafik $y(t)$ di $t \in [0,120]$	70
Gambar 4.3	Grafik $\theta(t)$ di $t \in [0,10]$	73
Gambar 4.4	Grafik $\theta(t)$ di $t \in [0,120]$	74
Gambar 4.5	Perbandingan Grafik Solusi $y_2(t)$ metode RK dan ABM	75
Gambar 4.6	Perbandingan Grafik Solusi $y_1(t)$ metode RK dan ABM	75
Gambar 4.7	Perbandingan Grafik Solusi $\theta_2(t)$ metode RK dan ABM	75
Gambar 4.8	Perbandingan Grafik Solusi $\theta_1(t)$ metode RK dan ABM	75
Gambar 4.9	Grafik Solusi $y(t)$ Metode ABM di $t \in [0,120]$	79
Gambar 4.10	Grafik Solusi Eksak $y(t)$ di $t \in [0,120]$	79
Gambar 4.11	Grafik Pertumbuhan Galat $y(t)$	82
Gambar 4.12	Grafik Solusi $\theta(t)$ Metode ABM di $t \in [0,120]$	83
Gambar 4.13	Grafik Solusi Eksak $\theta(t)$ di $t \in [0,120]$	83
Gambar 4.14	Grafik Pertumbuhan dari Galat $y(t)$	86
Gambar 4.15	Grafik $y(t)$ Variasi Parameter m_b di $t \in [0,10]$	89
Gambar 4.16	Grafik $y(t)$ Variasi Parameter m_b di $t \in [0,120]$	89
Gambar 4.17	Perbandingan Grafik $y_2(t)$ Variasi Parameter m_b	94
Gambar 4.18	Perbandingan Grafik $y_1(t)$ Variasi Parameter m_b	94
Gambar 4.19	Grafik $\theta(t)$ Variasi Parameter r pada $m_b = 10$ di $t \in [0,10]$	94
Gambar 4.20	Grafik $\theta(t)$ Variasi Parameter r pada $m_b = 10$ di $t \in [0,120]$	95
Gambar 4.21	Perbandingan Grafik $\theta_2(t)$ Variasi Parameter r pada $m_b = 10$...	96
Gambar 4.22	Perbandingan Grafik $\theta_1(t)$ Variasi parameter r pada $m_b = 10$	98
Gambar 4.23	Grafik $\theta(t)$ Variasi Parameter r pada $m_b = 20$ di $t \in [0,10]$	103
Gambar 4.24	Grafik $\theta(t)$ Variasi Parameter r pada $m_b = 20$ di $t \in [0,120]$	103
Gambar 4.25	Perbandingan Grafik $\theta_2(t)$ Variasi Parameter r pada $m_b = 20$...	103
Gambar 4.26	Perbandingan Grafik $\theta_1(t)$ Variasi Parameter r pada $m_b = 20$...	104

DAFTAR SIMBOL

Simbol- simbol yang digunakan pada penelitian ini memiliki makna sebagai berikut :

y	: Lendutan dawai
θ	: Sudut lendutan dawai
A	: Luas penampang dawai
E	: Modulus elastisitas (tingkat kelenturan dawai saat dikenai massa)
l	: Panjang dawai
k_p	: Konstanta tingkat kepegasan vibrasi dawai
m_d	: Massa dawai
m_b	: Massa benda
μ_k	: Koefisien gaya gesek dawai
v	: Kecepatan benda menggelinding
η	: Koefisien viskositas (koefisien kekentalan fluida/udara)
r	: Jari-jari benda
g	: Gaya gravitasi
Fr	: Energi potensial dorong
δ	: Suku redaman viskos
λ	: Permisalan dari $\frac{4 k_p}{m_d}$
α	: Permisalan dari $\frac{(-\frac{l}{2}F_r + \frac{l}{2}\mu_k m_b g + \frac{l}{2}k_p \eta v)}{(\frac{2}{5}m_b r^2 + \frac{1}{3}m_d l^2)}$
β	: Permisalan dari $\frac{l m_b g}{2(\frac{2}{5}m_b r^2 + \frac{1}{3}m_d l^2)}$
γ	: Permisalan dari $\frac{2 k_p l^2}{(\frac{2}{5}m_b r^2 + \frac{1}{3}m_d l^2)}$

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Hasil Solusi $y(t)$ Variasi Parameter m_b	111
Lampiran 2. Hasil Solusi $\theta(t)$ Variasi Parameter r pada $m_b = 10$	112
Lampiran 3. Hasil Solusi $\theta(t)$ Variasi Parameter r pada $m_b = 20$	113

ABSTRAK

Pratiwi, Yunia Mega. 2022. **Solusi Numerik Model Matematika Vibrasi Dawai yang Dikenai Massa Menggelinding di Sepanjang Dawai Menggunakan Metode Adams-Bashforth-Moulton (ABM)**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si. (II) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si

Kata kunci: Model Vibrasi Dawai dengan Massa Menggelinding; Adams-Bashforth-Moulton orde 4, Lentutan $y(t)$, Sudut Lentutan $\theta(t)$, Analisis Sensitivitas Model

Penelitian ini difokuskan pada solusi numerik menggunakan metode ABM untuk mendapatkan lentutan dawai $y(t)$ dan sudut lentutan dawai $\theta(t)$ dari model vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai yang telah direvisi dari Janah dan Kusumastuti (2021). Solusi numerik dilakukan dengan menentukan 3 nilai awal menggunakan Runge-Kutta orde 4 yang digunakan untuk mengevaluasi nilai prediktor dan korektor pada metode ABM orde 4. Hasil numerik untuk $y(t)$ dan $\theta(t)$ diarahkan pada analisis galat dengan eksaknya. Selanjutnya dilakukan simulasi dan interpretasi penyelesaian numerik model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa yang menggelinding di sepanjang dawai dengan variasi parameter untuk mengetahui seberapa sensitif model terhadap m_b dan r . Grafik solusi numerik model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai menggunakan metode ABM orde 4 menunjukkan bahwa pergerakan lentutan dawai pada grafik $y(t)$ dan sudut lentutan dawai $\theta(t)$ tetap stabil terhadap waktu t . Hal ini ditunjukkan dengan nilai maksimum kecepatan lentutan dawai $\dot{y} = 0,50282216$ dan lentutan dawai $y = 0,08663981$ sedangkan nilai minimum $\dot{y} = 0,00003245$ dan $y = 0,08663981$ pada rentang waktu $t \in [0,120]$. Sedangkan pada grafik $\theta(t)$ ditunjukkan dengan nilai maksimum kecepatan sudut lentutan dawai $\dot{\theta} = 1.19503142$ dan sudut lentutan dawai $\theta = 0.15099725$ sedangkan nilai minimum $\dot{\theta} = 0.00000032$ dan $\theta = 0.00000010$ pada rentang waktu $t \in [0,120]$.

ABSTRACT

Pratiwi, Yunia Mega. 2022. **Numerical Solution to a Mathematical Model of Vibration of a String Subjected to a Mass Rolling Along the String Using the Adams-Bashforth-Moulton (ABM) Method.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si. (II) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si

Keywords: Model of Vibration of Strings with Rolling Mass; Adams-Bashforth-Moulton of order 4, Deflection, Deflection Angle, Analysis of Model Sensitivity

This research is focused on the numerical solutions using the 4th order ABM method to obtain the deflection of the $y(t)$ strings and the deflection angle of the $\theta(t)$ strings from the revised wire vibration model subjected to rolling mass along the strings from Janah and Kusumastuti (2021). The numerical solution is carried out by determining the initial three values using Runge-Kutta of order 4 which is used to evaluate the predictor and corrector values in the 4th order ABM method. Numerical results for $y(t)$ and $\theta(t)$ are directed at error analysis with their exact. Furthermore, simulation and interpretation of numerical solution of mathematical models of vibration of strings that are subjected to a mass that rolls along the strings with variations in parameters to find out how sensitive the model is to m_b and r is performed. The graph of the numerical solution of the mathematical model of the vibration of the strings subjected to the rolling mass along the strings using the 4th order ABM method shows that the deflection movement of the strings on the graph of $y(t)$ and the deflection angle of the string $\theta(t)$ remain stable against the time t . It is intended with the maximum value of string deflection speed $\dot{y} = 0.50282216$ and string deflection $y = 0.08663981$ while the minimum values are $\dot{y} = 0.00003245$ and $y = 0.08663981$ on time range $t \in [0, 0.120]$. Whereas in the graph $\theta(t)$ it is indicated by the maximum value of the string deflection speed $\dot{\theta} = 1.19503142$ and the string deflection $\theta = 0.15099725$ while the minimum values $\dot{\theta} = 0.00000032$ and $\theta = 0.00000010$ in the time range $t \in [0, 0.120]$.

مستخلص البحث

براتبوي، يونيا ميجا. ٢٠٢٢. الحلول العددية للنماذج الرياضية لاهتزاز الأوتار المعرضة الكتلة المتداولة على طول الأوتار باستخدام طريقة *Adams-Bashforth-Moulton (ABM)*. البحث العلمي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرفة: (١) آري كوسومستوتي، الماجستير، (٢) محمد نافع جوهرى، الماجستير

الكلمات المفتاحية: نموذج اهتزاز الأوتار ذات الكتلة المتداولة ؛ *Adams-Bashforth-Moulton* ترتيب ٤، الانحراف $y(t)$ ، زاوية الانحراف $\theta(t)$ ، تحليل حساسية النموذج

يركز هذا البحث على الحلول العددية باستخدام طريقة *ABM* للحصول على انحراف سلاسل $y(t)$ وزاوية انحراف سلاسل $\theta(t)$ من نموذج اهتزاز الأوتار المعرضة لكتلة المتداولة على طول الأوتار المنقحة من جانبه و كوسومستوتي (٢٠٢١). تم تنفيذ الحل العددي عن طريق تحديد ٣ قيم أولية باستخدام *Runge-Kutta* من الترتيب ٤ والذي تم استخدامه لتقييم قيم المتنبئ والمصحح على طريقة *ABM* من الدرجة الرابعة. يتم توجيه النتائج العددية ل $y(t)$ و $\theta(t)$ إلى تحليل الأخطاء التكرارية. ثم ، محاكاة وتفسير الإكمال العددي للنماذج الرياضية لاهتزاز الأوتار التي تتعرض للكتلة التي تتدحرج على طول الأوتار مع اختلافات المعلمات لمعرفة مدى حساسية النموذج m_b و r . يوضح الرسم البياني للحل العددي للنموذج الرياضي لاهتزاز الأوتار المعرضة للكتلة المتداولة على طول الأوتار باستخدام طريقة *ABM* أن حركة انحراف الأوتار على الرسم البياني $y(t)$ وزاوية انحراف السلسلة $\theta(t)$ تظل مستقرة مقابل الوقت t . هذا مقصود مع الحد الأقصى لقيمة انحراف السلسلة $\dot{y} = 0.50282216$ و $y = 0.08663981$ و بينما الحد الأدنى للقيمة هو $\dot{y} = 0.00003245$ و $y = 0.08663981$ على النطاق الزمني $t \in [0.120]$. بينما في الرسم البياني يتم تناول $\theta(t)$ مع القيم القصوى $\dot{\theta} = 1.19503142$ و $\theta = 0.15099725$ في حين أن القيم الدنيا $\dot{\theta} = 0.00000032$ و $\theta = 0.00000010$ في النطاق الزمني $t \in [0.120]$.

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Firman Allah SWT QS. *Al-Baqarah* Ayat 31-32 yang artinya:

“Dan Dia ajarkan kepada Adam nama-nama (benda) semuanya, kemudian Dia perlihatkan kepada para Malaikat, seraya berfirman, “Sebutkan kepada-Ku nama semua benda ini, jika kamu yang benar!” (31).

Mereka menjawab, “Mahasuci Engkau, tidak ada yang kami ketahui selain apa yang telah Engkau ajarkan kepada kami. Sungguh, Engkaulah Yang Maha Mengetahui, Maha bijaksana” (32).”

Menurut Tafsir Ibnu Katsir dijelaskan bahwa keutamaan Adam yang diberikan oleh Allah SWT berupa ilmu tentang segala sesuatu. Kemudian para malaikat memberikan sanjungan kepada Allah SWT dengan membersihkan dari pengetahuan yang dikuasai oleh seseorang dari ilmu-Nya, kecuali menurut apa yang dikehendaki-Nya sehingga para malaikat tidak mengetahui apa pun kecuali apa yang telah diajarkan oleh Allah SWT (Abdullah, 2004). Begitu pula dengan manusia yang memiliki potensi untuk memperoleh ilmu dan mengembangkan ilmunya atas izin Allah SWT. Dalam memanfaatkan ilmu tersebut manusia dapat menemukan solusi atas permasalahan yang dihadapinya dengan berbagai strategi.

Diilhami dari ayat di atas, penelitian ini berupaya untuk mengeksplorasi fenomena terjadinya gelombang, yang terjadi pada dawai yang bervibrasi akibat dikenai massa yang menggeling di atasnya. Untuk kasus ini, maka formulasi model matematika diharapkan mampu mendeskripsikan fenomena yang dimaksud. Model matematika bertugas untuk menjembatani masalah sehingga bisa diinterpretasi oleh berbagai disiplin ilmu sehingga dapat dimanfaatkan untuk berbagai keperluan. Peran model matematika ini berupaya untuk menerjemahkan

permasalahan dalam bentuk persamaan diferensial (Ndi, 2018). Beberapa model matematika yang dirujuk dalam penelitian ini difokuskan pada eksplorasi tentang fenomena gelombang sepanjang dawai dengan massa menggeling di atasnya yang disajikan dalam model matematika pada penelitian Janah dan Kusumastuti tahun 2021 dan penelitian McKenna tahun 1999. Kedua model ini memiliki tingkat kesamaan dalam hal asumsi dan variabel model yakni membahas tentang bagaimana lendutan dawai $y(t)$ dan sudut lendutan dawai $\theta(t)$ saat dikenai massa yang menggeling di sepanjang dawai yang lentur dengan ketinggian yang sama pada kedua ujung dawai.

Pada penelitian Janah dan Kusumastuti tahun 2021 melibatkan beberapa energi yang terjadi pada benda dan dawai. Energi yang terlibat adalah energi potensial dorong (Ep_r), energi potensial gesek (Ep_k), energi potensial tegangan (Ep_T), energi potensial pegas (Ep_p), energi potensial berat (Ep_w), energi kinetik benda (Ek_b), dan energi kinetik dawai (Ek_d). Parameter yang terlibat pada penelitian ini adalah luas penampang dawai (A), panjang dawai (l), massa dawai (m_d) mendefinisikan perkalian antara massa jenis (ρ) dan satuan panjang dawai (l), massa benda (m_b) mendefinisikan perkalian antara massa jenis (ρ) dan volume benda, koefisien gaya gesek dawai (μ_k), kecepatan benda yang berjalan di sepanjang dawai (v), koefisien kekentalan udara (η), modulus elastisitas dawai (E), dan konstanta pegas dawai (k_p). Dalam permasalahan vibrasi dawai tersebut diperkirakan bahwa dawai yang digunakan lentur, berada di posisi kesetimbangan dan dikenai massa benda (m_b) yang menggeling di sepanjang dawai. Dengan menggunakan asumsi-asumsi dasar yang terkait, (Janah & Kusumastuti, 2021) menghasilkan suatu persamaan diferensial biasa orde dua.

Sementara itu penelitian Janah dan Kusumastuti juga mempertimbangkan penelitian McKenna pada tahun 1999 yang membahas tentang perbaikan model runtuhnya Jembatan Gantung Tacoma yang telah dimodelkan oleh Lazer dan McKenna pada tahun 1990. Pemodelan tersebut melibatkan beberapa energi yang terjadi pada dawai yaitu energi kinetik (Ek) dan energi potensial (Ep). Energi kinetik yang terlibat pada dawai yaitu energi kinetik translasi dawai ($Ek_{T(dawai)}$) dan energi kinetik dawai ($Ek_{R(dawai)}$). Sedangkan untuk energi potensialnya yakni energi potensial berat benda ($Ep_w(benda)$) dan energi potensial pegas benda ($Ep_p(benda)$). Pada penelitian tersebut melibatkan beberapa parameter yaitu (k_p) merupakan konstanta pegas, (m_b) merupakan massa benda, (m_d) merupakan massa dawai, (λ) sebagai amplitudo, (μ) sebagai frekuensi, dan (g) merupakan gaya gravitasi. Model matematika yang telah dikonstruksi pada penelitian tersebut merupakan dua persamaan diferensial biasa orde dua untuk $y(t)$ dan $\theta(t)$.

Penelitian ini diarahkan pada penyelesaian secara numerik dari model matematika penelitian Janah dan Kusumastuti tahun 2021 yang telah direvisi dengan mengacu asumsi dasar pada penelitian McKenna tahun 1999. Perbaikan model tersebut dilakukan pada energi potensial pada dawai. Pada penelitian McKenna tahun 1999, energi potensial yang bekerja pada dawai hanya menggunakan energi potensial berat benda ($Ep_w(benda)$) dan energi potensial pegas benda ($Ep_p(benda)$). Sehingga revisi pada model untuk kasus vibrasi dawai yang dikenai massa menggeling mengabaikan energi potensial tegangan dawai ($Ep_{T(dawai)}$) dengan asumsi bahwa kontribusi yang tidak terlalu mempengaruhi $y(t)$ dan $\theta(t)$. Revisi berikutnya adalah melibatkan suku redaman viskos kecil yakni $\delta\dot{\theta}$ dan $\delta\dot{y}$.

Solusi Numerik merupakan solusi dalam menyelesaikan permasalahan yang diformulasikan secara matematis dengan operasi hitungan (Triatmodjo, 2002). Solusi Numerik dari model tersebut dikerjakan menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton (ABM). Metode ABM adalah metode yang penggunaannya tanpa mencari turunan fungsinya dahulu tetapi langsung menggunakan persamaan *predictor-corrector*. Langkah pertama yang dilakukan yaitu dengan menyelesaikan persamaan diferensial dari model matematika menggunakan Runge-Kutta orde empat dengan tujuan memperoleh nilai awal. Langkah kedua adalah mengevaluasi pada *predictor* menggunakan persamaan *corrector* melalui metode ABM orde empat (Apriadi, Prihandono, & Novianti, 2014). Metode ABM juga termasuk keluarga metode *multi-step*. Metode *multi-step* biasa disebut dengan metode *predictor-corrector* dikarenakan dalam penyelesaiannya menggunakan persamaan *predictor* dan persamaan *corrector*. Metode ini pada penyelesaian persamaan diferensial biasa menggunakan beberapa titik yang telah diketahui (Conte & Boor, 1993). Selanjutnya penelitian ini diarahkan pada analisis *error* (galat) metode ABM orde empat terhadap eksaknya pada model matematika yang dimaksud. *Error* ini didapatkan dengan menghitung selisih dua nilai berurutan pada hitung persamaan $y(t)$ dan pada hitung persamaan $\theta(t)$ secara terpisah dan menampilkan grafik pertumbuhan *error* pada $y(t)$ dan $\theta(t)$. Selanjutnya dilakukan analisis sensitifitas model dengan variasi parameter massa bola dan jari-jari bola.

Beberapa referensi telah dirujuk pada penelitian ini. Pertama, penelitian yang telah dilakukan oleh Utami dan Kusumastuti pada tahun 2021 yang membahas tentang simulasi numerik dari model matematika vibrasi dawai *flying fox* menggunakan metode ABM orde empat pada persamaan diferensial biasa orde dua.

Tahapan pelaksanaan metode ABM juga merujuk pada buku karangan Conte dan Boor tahun 1993. Kedua, penelitian yang membahas tentang model matematika vibrasi dawai juga dilakukan Sari dan Kusumastuti pada tahun 2018. Pada penelitian tersebut diadopsi tentang bagaimana membahas strategi menghitung galat. Strategi dalam perhitungan galat juga merujuk pada buku karangan Djodihardjo tahun 2000.

Berdasarkan paparan di atas, penelitian ini menjadi penting dilakukan karena teknologi kedawaian banyak diterapkan pada berbagai macam kegiatan manusia. Sehingga penjelasan secara teoritis dan matematis sangat diperlukan dalam memahami regulasi vibrasi di sepanjang dawai dengan berbagai macam variasinya. Khususnya untuk mengetahui perilaku model matematika melalui solusi numeriknya, maka masalah vibrasi dawai yang dikenai massa menggeling di sepanjang dawai dapat memberikan kontribusi penjelasan yang logis dan realistis tentang telah valid atau tidaknya untuk menjelaskan masalah secara kontekstual.

Sehingga penelitian ini mengangkat sebuah judul “Solusi Numerik Model Matematika Vibrasi Dawai yang Dikenai Massa Menggelinding di Sepanjang Dawai Menggunakan Metode Adams-Bashforth-Moulton (ABM).”

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas maka rumusan masalah yang dapat diambil pada penelitian ini adalah:

1. Bagaimana Solusi Numerik Model Matematika Vibrasi Dawai yang Dikenai Massa Menggelinding di Sepanjang Dawai Menggunakan Metode Adams-Bashforth-Moulton (ABM)?

2. Bagaimana analisis pertumbuhan galat metode Adams-Bashforth-Moulton (ABM) terhadap eksaknya pada model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai?
3. Bagaimana simulasi dan interpretasi dari solusi numerik untuk model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai dengan variasi parameter massa bola dan jari-jari bola?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian yang dapat diambil dari penelitian ini adalah:

1. Untuk mengetahui Solusi Numerik Model Matematika Vibrasi Dawai yang Dikenai Massa Menggelinding di Sepanjang Dawai Menggunakan Metode Adams-Bashforth-Moulton (ABM).
2. Untuk mengetahui analisis pertumbuhan galat metode Adams-Bashforth-Moulton (ABM) terhadap eksaknya pada model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai.
3. Untuk mengetahui simulasi dan interpretasi solusi numerik untuk model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai dengan variasi parameter massa bola dan jari-jari bola.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang dapat diambil dari penelitian ini adalah:

1. Untuk menambah pengetahuan tentang solusi numerik dengan metode Adams-Bashforth-Moulton (ABM) orde empat untuk model matematika

vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai, sehingga dapat dilakukan simulasi dengan berbagai kejadian lainnya.

2. Untuk mengetahui hasil dari analisis profil grafik dari Solusi Numerik Model Matematika Vibrasi Dawai yang Dikenai Massa Menggelinding di Sepanjang Dawai Menggunakan Metode Adams-Bashforth-Moulton (ABM) orde empat.

1.5 Batasan Masalah

Untuk mengarahkan agar penelitian ini tidak menyimpang dari tujuan yang diinginkan, maka perlu adanya batasan masalah sebagai berikut:

1. Model matematika yang digunakan adalah model matematika yang dikonstruksi oleh (Janah & Kusumastuti, 2021) yang direvisi dengan mempertimbangkan energi yang bekerja pada benda dan dawai:

$$\ddot{y} = -\delta \dot{y} - \lambda y + \frac{(m_b + m_d)g}{m_d} - Fr$$

dan

$$\ddot{\theta} = -\delta \dot{\theta} - \alpha \sin \theta - \beta \cos \theta - \gamma \cos \theta \sin \theta$$

Dengan memperhatikan bahwa

$$\lambda = \frac{4 k_p}{m_d}; \alpha = \frac{(-\frac{l}{2}F_r + \frac{l}{2}\mu_k m_b g + \frac{l}{2}k_p \eta v)}{(\frac{2}{5}m_b r^2 + \frac{1}{3}m_d l^2)}; \beta = \frac{l m_b g}{2(\frac{2}{5}m_b r^2 + \frac{1}{3}m_d l^2)}; \gamma = \frac{2 k_p l^2}{(\frac{2}{5}m_b r^2 + \frac{1}{3}m_d l^2)}$$

Dengan $y(t)$ merupakan lendutan dawai dan $\theta(t)$ merupakan sudut lendutan dawai

2. Parameter yang terlibat pada model merujuk pada Janah dan Kusumastuti tahun 2021 dan McKenna tahun 1999.

3. Profil grafik solusi numerik dari berbagai kejadian dilakukan dengan perubahan parameter berupa massa benda (m_b) pada persamaan $y(t)$ dan parameter berupa jari-jari benda (r) pada persamaan $\theta(t)$
4. Solusi numerik untuk model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa menggeling di sepanjang dawai menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton (ABM), dengan analisis pertumbuhan galat terhadap eksaknya disajikan dalam grafik galat.

1.6 Definisi Istilah

Definisi istilah yang digunakan dalam penelitian ini dapat dituliskan sebagai berikut:

Model Matematika : Keadaan sederhana yang menggambarkan suatu fenomena dalam bentuk matematika

Galat : Nilai *error* atau nilai kesalahan

Vibrasi : Gerakan bolak balik di titik setimbang

Simulasi : Penggambaran sesuatu yang mirip dengan keadaan sesungguhnya

Metode : Langkah atau cara yang dilakukan secara teratur yang digunakan untuk mencapai tujuan yang dikehendaki

Solusi Numerik : Solusi dalam menyelesaikan permasalahan yang diformulasikan secara matematis dengan operasi hitungan

Dawai : Kawat yang halus yang terbuat dari berbagai jenis bahan dan memiliki elastisitas sesuai dengan jenis bahan yang menyusunnya

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Teori Pendukung

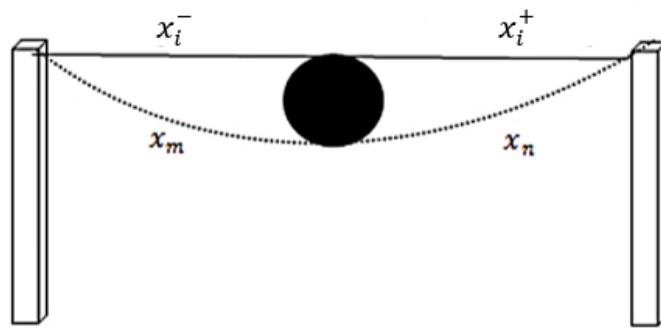
2.1.1 Model Vibrasi Dawai (Janah & Kusumastuti, 2021)

Menurut (Afifah & Putra, 2018) model matematika adalah keadaan sederhana yang dapat menggambarkan suatu fenomena yang terjadi yang dapat disajikan dalam bentuk matematika. Model matematika yang digunakan pada suatu penelitian bertujuan untuk memudahkan proses penyelesaian. Menurut (Yakin, 2019) pemodelan matematika dibuat menganut konsep sains yang terjadi dalam permasalahan ke bentuk persamaan matematika. Sehingga dibutuhkan penguasaan matematika dan konsep sains yang baik untuk memodelkan suatu permasalahan.

Salah satu model matematika dalam dunia nyata adalah model matematika vibrasi dawai. Model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding untuk lendutan $y(t)$ dan sudut lendutan $\theta(t)$ telah dikonstruksikan pada penelitian (Janah & Kusumastuti, 2021). Konstruksi model tersebut dilakukan melalui beberapa tahapan pemodelan sebagai berikut:

1. Mengidentifikasi masalah vibrasi dawai berdasarkan keadaan riilnya

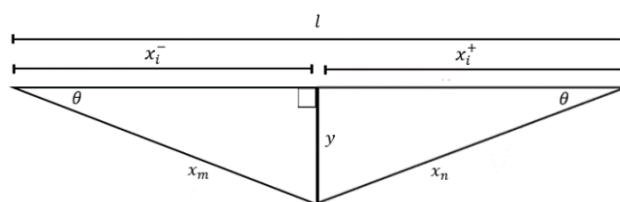
Dawai yang digunakan merupakan dawai yang dikenai massa menggelinding yang diberi gaya dorong di sepanjang dawai. Permasalahan pertama yang diidentifikasi merupakan pengaruh massa yang dikenai gaya dorong. Ilustrasi dari vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai telah digambarkan pada Gambar 2.1 di bawah ini:



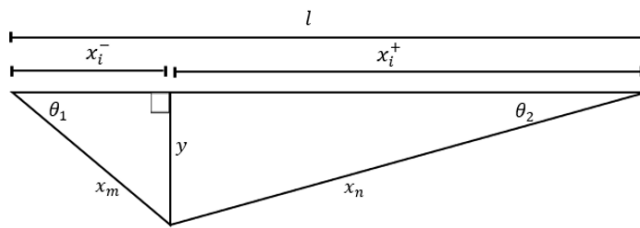
Gambar 2.1 Ilustrasi Vibrasi Dawai

Gambar 2.1 menjelaskan bahwa panjang dawai dikaitkan dengan dua pengait yang mempunyai ketinggian yang sama. Di mana panjang dawai di sisi kiri benda x_i^- dan panjang dawai di sisi kanan benda x_i^+ , dengan a dan b merupakan sembarang nilai bulat positif. Sedangkan x_m dan x_n merupakan kemuluran dawai pada sisi kanan dan sisi kiri akibat sudut θ , dan l merupakan panjang dawai. Tingkat keelastisan atau kelenturan dawai termuat dalam modulus elastisitas (E). Besar gaya tarikan yang diberikan ketika dawai dikenai massa tidak boleh melebihi batas elastisitas dari dawai bertujuan untuk mencegah dawai agar tidak putus.

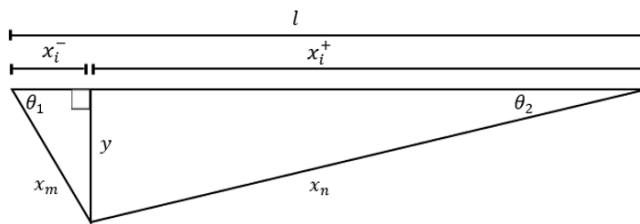
Dawai yang digunakan pada penelitian Janah dan Kusumastuti pada tahun 2021 merupakan dawai dengan gaya dorong di sepanjang dawai. Massa tersebut bisa berhenti di beberapa kemungkinan. Berikut kemungkinan yang terjadi posisi massa yang didorong di atas dawai



Gambar 2.2 Ilustrasi Massa Berhenti di $\frac{1}{2}$ dari Panjang dawai



Gambar 2.3 Ilustrasi Massa berhenti di $\frac{1}{4}$ dari Panjang dawai



Gambar 2.4 Ilustrasi Massa berhenti di $\frac{1}{8}$ dari Panjang dawai

Gambar 2.2, Gambar 2.3, dan Gambar 2.4 menunjukkan bahwa terdapat peregangan dawai (e) akibat pembebanan massa. Pada gambar tersebut terjadi lendutan akibat asumsi dari dawai yang lentur. Lendutan pada dawai ini mengakibatkan adanya sudut dawai (θ), simpangan (y), kemiringan dawai pada sisi kiri (x_m), dan kemiringan dawai pada sisi kanan (x_n) akibat lendutan. Massa meluncur dikarenakan dikenai gaya dorong, maka selama massa berjalan terjadilah vibrasi dawai sepanjang l .

2. Mengidentifikasi parameter dan variabel yang terlibat

Mengidentifikasi parameter dan variabel pada dawai yang terlibat ketika dikenai massa yang menggelinding yang diberi gaya dorong. Berikut beberapa parameter yang digunakan pada masalah vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai disajikan pada Tabel 2.1:

Tabel 2.1 Daftar Parameter

Parameter	Definisi	Nilai dan satuan	Formula	Sumber
A	Luas penampang dawai	Sebarang m^2	$kp = EA/l$ N/m	-
E	Modulus elastisitas baja (tingkat kelenturan dawai ketika dikenai massa)	2×10^{11} N/m^2		https://www.fisika.co.id/2020/10/modulus-elastisitas.html
l	Panjang dawai	Sebarang m		-
kp	Konstanta tingkat kepegasan vibrasi dawai ($kp = EA/l$)	Bergantung pada $E, A,$ dan l N/m		-
m_d	Massa dawai	Sebarang kg		-
m_b	Massa benda	Sebarang kg		-
μ_k	Koefisien gaya gesek dawai	0,57		https://www.fisikabc.com/2017/07/gaya-gesek.html
v	Kecepatan benda menggelinding di atas dawai	m/s		-
η	Koefisien viskositas (koefisien kekentalan fluida/udara)	$0,018 \times 10^{-3}$		https://zerod-inferno.blogspot.com/2011/10/koefisien-kekentalan-cairan.html
r	Jari-jari benda	Sebarang, berhubungan dengan luas penampang dawai (A) m	$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$	-
g	Gaya gravitasi	$9,8 m/s^2$		https://id.wikipedia.org/wiki/Gravitasi_Bumi

Terdapat dua variabel yang terlibat dalam penelitian (Janah & Kusumastuti, 2021) mengenai vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai yakni variabel bebas dan terikat. Vibrasi dawai pada penelitian tersebut bergantung pada waktu (t), sehingga variabel bebasnya adalah t . Sedangkan variabel terikatnya adalah simpangan (y) dan sudut (θ) yang muncul karena massa meluncur di sepanjang dawai.

Langkah selanjutnya yaitu mengidentifikasi energi-energi yang terkait dengan vibrasi dawai. Energi-energi yang terkait terjadi pada keadaan nyata. Dari uraian di atas, energi-energi yang terkait terjadinya vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding adalah:

- a. Energi potensial (Ep), munculnya energi ini dikarenakan adanya reaksi dari gaya-gaya yang terkait dengan vibrasi dawai.
- b. Energi kinetik (Ek), munculnya energi ini dikarenakan adanya getaran yang dialami oleh dawai.

3. Membangun asumsi dasar

Berdasarkan identifikasi masalah vibrasi dawai di atas, maka asumsi-asumsi dasar yang digunakan untuk memformulasikan model vibrasi yang dikenai massa dengan gaya dorong sebagai berikut:

- a. Dawai yang diteliti merupakan dawai elastis berbahan baja yang memiliki batas elastisitas sebesar $2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
- b. Massa yang meluncur merupakan massa yang mendapat gaya dorong di sepanjang dawai yang tegang tetapi lentur
- c. Dawai yang dikenai massa mengakibatkan lendutan dawai sehingga membentuk simpangan dan sudut dawai

- d. Terjadi gaya gesek antara dawai dengan massa, dawai dengan udara, dan massa dengan udara. Gesekan-gesekan tersebut yang mengakibatkan terjadinya perlambatan laju vibrasi dawai
 - e. Vibrasi dawai berupa gerak bolak balik di sepanjang dawai yang mendapatkan faktor peredam, sehingga dawai akan kembali pada posisi setimbang
4. Identifikasi gaya dan formulasi energi potensial yang terlibat

Selanjutnya mengidentifikasi gaya-gaya pada vibrasi dawai ketika dikenai massa dengan gaya dorong. Dikarenakan massa yang meluncur disebabkan oleh gaya dorong, maka gaya dorong inilah yang menyebabkan terbentuknya gaya-gaya yang lain, di antaranya gaya gesek, gaya tegangan, gaya berat, dan gaya pegas.

a. Gaya Dorong (F_r)

Vibrasi dawai pada penelitian ini disebabkan oleh adanya benda berbentuk bola yang menggelinding di atas dawai. Benda yang melintasi dawai tersebut memiliki massa benda sebesar m_b . Massa tersebut diberi gaya dorong supaya dapat menggelinding melewati dawai sehingga mengalami percepatan angular sebesar α . Sehingga dapat dituliskan (Nurlina & Riskawati, 2017)

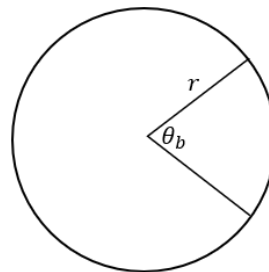
$$F_r = m_b \alpha \quad (2.1)$$

Dikarenakan benda berbentuk bola dan lintasan yang dilalui bola setiap satuan waktu merupakan representasi dari ukuran keliling bola, berdasarkan gerak melingkar berubah beraturan (GMBB), dengan α yang merupakan percepatan angular benda berbentuk bola maka dapat

dirumuskan formula kecepatan angular sebagai berikut (Alonso & Finn, 1966):

$$\omega(t)^2 = \omega_0^2 + 2 \alpha \theta_b(t) \quad (2.2)$$

Dengan $\omega(t)$ adalah kecepatan angular sedangkan ω_0 adalah kecepatan angular mula-mula dari benda bermassa berbentuk bola, dan θ_b merupakan sudut putar bola. Dengan memperhatikan α adalah percepatan angular, seperti ditampilkan dalam gambar berikut :



Gambar 2.5 Sudut Putar Bola

Berdasarkan gambar di atas, maka besar jarak tempuh bola per satuan waktu yang melibatkan sudut perputaran bola θ_b dinyatakan sebagai berikut (Josephine, 2020):

$$x_m = \frac{\theta_b(t)}{360^\circ} 2\pi r$$

yakni

$$x_m = \frac{\theta_b(t)}{2\pi} 2\pi r$$

$$x_m = \theta_b(t)r \quad (2.3)$$

Sehingga dapat dihitung nilai θ_b sebagai berikut

$$\theta_b(t) = \frac{x_m}{r} \quad (2.4)$$

Dengan x_m adalah besar jarak tempuh bola per satuan waktu. Ketika bola diam maka diasumsikan kecepatan awal bola $\omega_0 = 0$. Sehingga persamaan (2.2) dapat disederhanakan menjadi

$$\omega(t)^2 = 2 \alpha \theta_b(t) \quad (2.5)$$

Selanjutnya dapat dihitung nilai α sebagai berikut

$$\alpha = \frac{\omega(t)^2}{2\theta_b(t)}$$

Substitusikan persamaan (2.4) ke persamaan di atas menghasilkan

$$\alpha = \frac{\omega(t)^2}{2x_m(t)} r \quad (2.6)$$

Kemudian substitusikan persamaan (2.6) ke persamaan (2.1) sehingga dapat dirumuskan besar $F_r(t)$ sebagai berikut :

$$F_r(t) = m_b \left(\frac{\omega(t)^2}{2x_m(t)} r \right) \quad (2.7)$$

Secara teoritik kecepatan putar bola sesaat $\omega(t)$ adalah turunan dari sudut putar bola terhadap waktu (Alonso & Finn, 1966), sehingga

$$\omega(t) = \frac{d\theta_b}{dt} \quad (2.8)$$

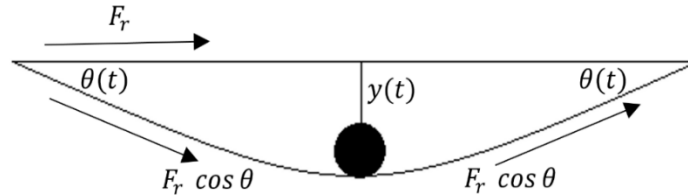
Melihat persamaan (2.8) yang membawa konsekuensi $\theta_b = \frac{x_m}{r}$, untuk r sebagai jari-jari berupa konstanta sembarang. Akibatnya $\omega(t)$ pada persamaan (2.8) dapat dituliskan sebagai berikut

$$\omega(t) = \frac{1}{r} \frac{dx_m}{dt} \quad (2.9)$$

Karena gaya dorong $F_r(t)$ yang dikenakan pada bola bermassa yang menggelinding di sepanjang dawai yang menyebabkan terjadinya lendutan, maka terjadi pula sudut lendutan sebesar $\theta(t)$, maka persamaan (2.7) dapat dituliskan sebagai berikut

$$F_r(t) = m_b \left(\frac{dx_m}{dt} \right)^2 \frac{1}{2x_m r} \cos \theta(t) \quad (2.10)$$

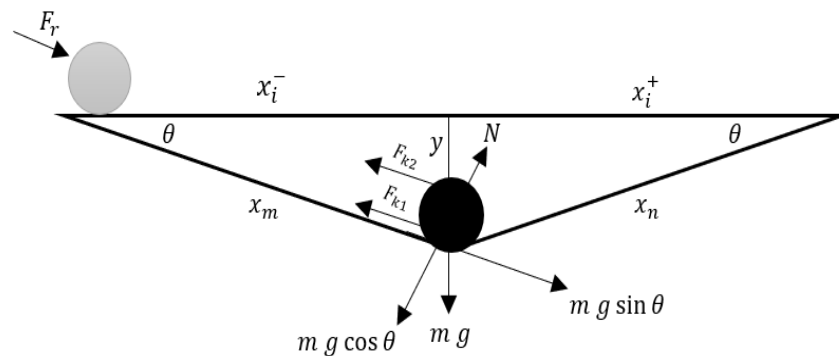
Penjelasan dari persamaan (2.10) diilustrasikan pada gambar berikut



Gambar 2.6 Ilustrasi Gaya Dorong di partisi pada L yakni di l

b. Gaya Gesek (F_k) dan Energi Potensial Gesek (E_{p_k})

Berikut ilustrasi benda yang menggelinding karena adanya dorongan diilustrasikan pada Gambar 2.7



Gambar 2.7 Ilustrasi Gaya Gesek

Berdasarkan gambar di atas, dawai yang dikenai massa dengan diberikan gaya dorong (F_r) akan menghasilkan gaya gesek (F_k) dengan arah yang berlawanan. Ketika peristiwa ini terjadi, maka terdapat gesekan antara dawai dengan benda, dawai dengan udara, dan benda dengan udara.

Pertama, besar gaya gesek yang terjadi antara benda dengan dawai dinyatakan sebagai berikut (Nurlina & Riskawati, 2017)

$$F_{k1} = \mu_k N \quad (2.11)$$

Di mana μ_k merupakan koefisien gaya gesek dan N merupakan gaya normal yang didefinisikan dengan $N = (m_b + m_d) g \cos \theta$. Sehingga gaya gesek dawai dengan benda dapat dituliskan

$$F_{k1} = \mu_k(m_b + m_d) g \cos \theta \quad (2.12)$$

Kedua, gaya gesek yang terjadi antara benda dengan udara dinyatakan sebagai berikut

$$F_{k2} = k\eta v \cos \theta \quad (2.13)$$

Di mana k merupakan koefisien yang menyatakan bentuk benda, η merupakan koefisien viskositas, dan v merupakan kecepatan dawai. Sehingga gaya gesek total (F_k) dapat dituliskan dengan

$$F_k = F_r(t) - (F_{k1} + F_{k2})$$

$$F_k = m_b \left(\frac{dx_m}{dt} \right)^2 \frac{1}{2x_m r} \cos \theta - (\mu_k(m_b + m_d) g \sin \theta + k\eta v \cos \theta) \quad (2.14)$$

Mengingat hubungan antara x_m dan y dengan menggunakan kaidah *pythagoras* yang dapat dilihat pada gambar 2.7 maka dapat diketahui bahwa

$$x_m = \sqrt{y^2 + x_i^{-2}} \quad (2.15)$$

Setelah diperoleh persamaan gaya gesek, langkah selanjutnya yaitu menghitung energi potensialnya. Untuk memperoleh energi potensial gesek total dengan menghitung integral untuk gaya gesek total. Diasumsikan gesekan terjadi pada sisi kiri benda, sehingga x diasumsikan sebagai x kiri. Dengan demikian

$$\Delta E p_k = - \int_0^{x_m} F_k d(x_m) \quad \text{dengan } x_m = \sqrt{y^2 + x_i^{-2}}$$

$$Ep_k - Ep_k \text{ setimbang} = - \int_0^{x_m} \left(m_b \left(\frac{dx_m}{dt} \right)^2 \frac{1}{2x_m r} \cos \theta - (\mu_k(m_d + m_b) \cdot g \cdot \sin \theta + k\eta v \cos \theta) \right) d(x_m)$$

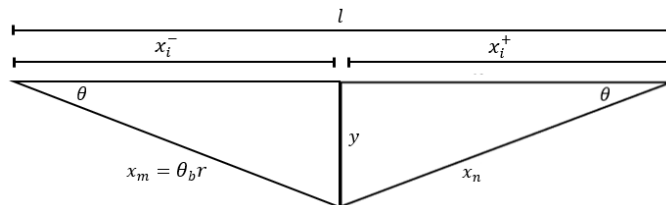
$$Ep_k - 0 = - \left(\frac{m_b \cos \theta \ln(x_m)}{2r} \left(\frac{dx_m}{dt} \right)^2 + (\mu_k(m_d + m_b) g \sin \theta + k\eta v \cos \theta)(x_m) \right) x_m \Big|_0^{\sqrt{y^2 + x_i^-^2}} = (m_d + m_b) \cdot \alpha$$

Sehingga diperoleh

$$Ep_k = - \frac{m_b \cos \theta \ln(x_m)}{2r} \left(\frac{dx_m}{dt} \right)^2 + (\mu_k(m_d + m_b) g \sin \theta + k\eta v \cos \theta) x_m - (m_d + m_b) \alpha \quad (2.16)$$

c. Gaya Tegangan (F_T) dan Energi Potensial Tegangan (Ep_T)

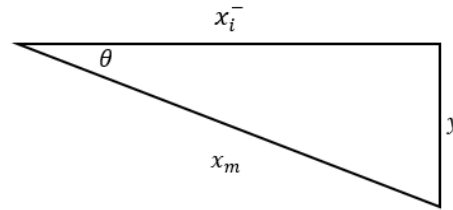
Pada penelitian Janah dan Kusumastuti pada tahun 2021, dinyatakan panjang dawai mula-mula di sisi kiri (x_i^-) dan di sisi kanan (x_i^+) dapat berbeda dalam nilainya. Gaya tegangan oleh benda bermassa pada dawai dengan panjang l diasumsikan terjadi pada setengah panjang dawai dapat diilustrasikan pada Gambar 2.8 sebagai berikut:



Gambar 2.8 Ilustrasi Simpangan Dawai di partisi pada L yakni di l

Tahap pertama, berdasarkan gambar di atas, besar x_m diasumsikan sebagai jarak tempuh bola per satuan waktu yang melibatkan sudut

perputaran bola θ_b . Selanjutnya x_i^- diasumsikan sebagai panjang mula-mula dawai di sisi kiri seperti disajikan pada Gambar 2.9 sebagai berikut



Gambar 2.9 Ilustrasi Peregangan di Sisi Kiri

Pada Gambar 2.9 panjang mula-mula dawai di sisi kiri (x_i^-) dapat diketahui dengan menggunakan kaidah *pythagoras* yaitu sebagai berikut:

$$x_i^- = \sqrt{(x_m)^2 - (y)^2} \quad (2.17)$$

Berdasarkan teorema bidang momen (Dr. Muhtar, 2020), sudut defleksi dawai θ dan lendutan y didefinisikan sebagai

$$\theta(t) = \frac{Wl^2}{2EI} \quad (2.18)$$

Di mana $W = m g$, E modulus elastisitas dawai, dan I momen inersia benda. Diasumsikan l sebagai panjang sisi kiri dawai (x_i^-), sehingga

$$l = (x_i^-) \quad (2.19)$$

Dengan memperhatikan persamaan (2.17) dan persamaan (2.19) kemudian mensubstitusikan ke (2.18) maka diperoleh :

$$\theta(t) = \frac{1}{2} \frac{m g (x_m^2 - y^2)}{E I} \quad (2.20)$$

Ketika diasumsikan dawai melendut tidak tepat di $\frac{1}{2}l$, dengan $x_m = \theta_b r$ maka persamaan (2.20) dapat dituliskan sebagai

$$\theta(t) = \frac{a}{b} \frac{m g (\theta_b(t)^2 r^2 - y^2)}{E I} \quad (2.21)$$

Dari persamaan (2.21) dapat dinyatakan hubungan antara θ_b dan θ sebagai berikut:

$$\theta_b(t) = \frac{\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y}{r} \quad (2.22)$$

Dengan memperhatikan $x_m = \theta_b(t)r$ dan persamaan (2.22) maka dapat diperoleh nilai x_m adalah sebagai berikut :

$$x_m = \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \quad (2.23)$$

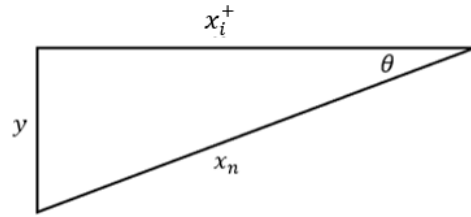
Selanjutnya dapat dihitung pertambahan panjang di sisi kiri (x^-) sebagai berikut

$$\begin{aligned} x^- &= x_m - x_i^- \\ x^- &= x_m - \sqrt{(x_m)^2 - (y)^2} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Setelah diketahui panjang mula-mula dawai di sisi kiri (x_i^-), selanjutnya dapat dihitung peregangan dawai di sisi kiri e^- yang merupakan perbandingan antara pertambahan panjang dawai di sisi kiri x^- dan panjang mula-mula dawai di sisi kiri, yakni :

$$\begin{aligned} e^- &= \frac{x^-}{x_i^-} \\ e^- &= \frac{x_m - \sqrt{(x_m)^2 - (y)^2}}{\sqrt{(x_m)^2 - (y)^2}} \\ e^- &= \frac{x_m}{\sqrt{(x_m)^2 - (y)^2}} - 1 \end{aligned} \quad (2.25)$$

Tahap kedua, yaitu menghitung panjang mula-mula dawai di sisi kanan (x_i^+) dengan ilustrasi yang digambarkan pada Gambar 2.10 sebagai berikut :



Gambar 2.10 Ilustrasi Peregangan di Sisi Kanan

Panjang mula-mula dawai di sisi kanan (x_i^+) dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_i^+ &= l - x_i^- \\ x_i^+ &= l - \sqrt{(x_m)^2 - (y)^2} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Selanjutnya dapat dihitung besar kemiringan simpangan di sisi kanan (x_n) dengan menerapkan rumus trigonometri, yakni :

$$\cos \theta = \frac{x_i^+}{x_n}$$

Sehingga diperoleh

$$x_n = \frac{x_i^+}{\cos \theta} \quad (2.27)$$

Selanjutnya persamaan (2.27) dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$x_n = \frac{l - \sqrt{(x_m)^2 - (y)^2}}{\cos \theta} \quad (2.28)$$

Oleh karena itu, dapat dihitung panjang pertambahan di sisi kanan (x^+) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x^+ &= x_n - x_i^+ \\ x^+ &= \frac{l - \sqrt{(x_m)^2 - (y)^2}}{\cos \theta} - \left(l - \sqrt{(x_m)^2 - (y)^2} \right) \end{aligned}$$

Setelah diketahui panjang mula-mula dawai di sisi kanan (x_i^+). Tahap selanjutnya dihitung besar peregangan dawai di sisi kanan e^+ yang merupakan perbandingan antara pertambahan panjang dawai di sisi kanan

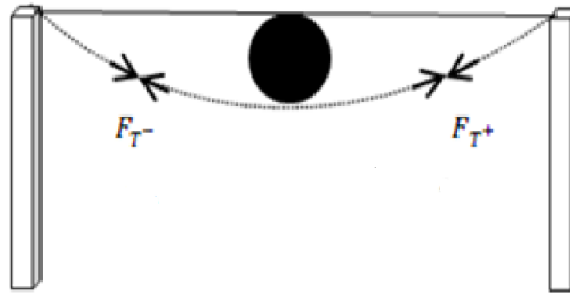
x^+ dan panjang mula-mula dawai di sisi kanan x_i^+ , sehingga dapat dinyatakan :

$$e^+ = \frac{x^+}{x_i^+}$$

$$e^+ = \frac{\frac{l - \sqrt{(x_m)^2 - (y)^2}}{\cos \theta} - (l - \sqrt{(x_m)^2 - (y)^2})}{l - \sqrt{(x_m)^2 - (y)^2}}$$

$$e^+ = \frac{1}{\cos \theta} - 1 \quad (2.29)$$

Tahap ketiga, gaya tegangan di sisi kiri yang bekerja saat dawai dikenai massa dapat diilustrasikan pada Gambar 2.11:



Gambar 2.11 Ilustrasi Gaya Tegangan pada dawai

Berdasarkan Gambar 2.11 tegangan terjadi di sisi kiri (F_{T-}) dan sisi kanan (F_{T+}). Gaya tegangan didefinisikan dengan minus dari besar tegangan, dikarenakan saat massa meluncur di sepanjang dawai terjadi gaya tarikan yang berlawanan dengan F_T yang melibatkan pengaruh sudut θ , pada dawai yang mempunyai penampang A dengan konstanta tegangan σ . Sehingga gaya tegangan pada vibrasi dawai dapat dituliskan sebagai berikut (Nurlina & Riskawati, 2017)

$$F_T = \sigma A \cos \theta$$

Tegangan didefinisikan $\sigma = E e$ dengan (E) merupakan modulus elastisitas dan (e) merupakan regangan. Sehingga gaya tegangan (F_T) dapat dituliskan dengan

$$F_T = E e A \cos \theta \quad (2.30)$$

Berdasarkan persamaan (2.30) , maka besar gaya tegangan di sisi kiri adalah

$$F_{T^-} = E e^- A \cos \theta$$

Sehingga F_{T^-} dapat dinyatakan

$$F_{T^-} = EA \left(\frac{x_m}{\sqrt{(x_m)^2 - (y)^2}} - 1 \right) \cos \theta \quad (2.31)$$

Sedangkan besar gaya tegangan di sisi kanan adalah

$$F_{T^+} = E e^+ A \cos \theta$$

Sehingga F_{T^+} dapat dinyatakan

$$F_{T^+} = EA \left(\frac{1}{\cos \theta} - 1 \right) \cos \theta \quad (2.32)$$

Tahap keempat, menghitung energi potensial tegangan kiri. Energi potensial tegangan kiri merupakan negatif dari integral gaya tegangan kiri, yakni :

$$E p_{T^-} = - \int_0^{x_m = \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y} F_{T^-} d(x_m) \quad (2.33)$$

Selanjutnya, untuk menentukan perubahan potensial tegangan kiri ($\Delta E p_{T^-}$) melibatkan peregangannya (e^-). Baik peregangannya di sisi kiri pada waktu setimbang ($e_{setimbang}^-$), maupun peregangannya di sisi kiri setelah pembebanan ($e_{setelah\ pembebanan}^-$). Karena sebelum pembebanan (kondisi setimbang) belum terjadi peregangannya, maka peregangannya di sisi

kiri pada waktu setimbang bernilai nol. Sehingga energi potensial di sisi kiri pada waktu setimbang juga bernilai nol. Dengan demikian, dapat ditentukan besar perubahan energi potensial tegangan di sisi kiri ($\Delta E p_{T^-}$), yaitu :

$$\begin{aligned}\Delta E p_{T^-} &= E p_{T^-} - E p_{T^- \text{ setimbang}} \\ \Delta E p_{T^-} &= E p_{T^-} - 0\end{aligned}\quad (2.34)$$

Berdasarkan persamaan (2.34), maka persamaan (2.33) dapat dituliskan kembali sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\Delta E p_{T^-} &= - \int_0^{\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y} F_{T^-} d(x_m) \\ \Delta E p_{T^-} &= - \int_0^{\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y} E e^{-A} A d(x_m) \\ \Delta E p_{T^-} &= - \int_0^{\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y} E \left(\frac{x_m}{\sqrt{(x_m)^2 - (y)^2}} - 1 \right) \cos \theta A d(x_m) \\ \Delta E p_{T^-} &= - \int_0^{\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y} \left(\frac{x_m}{\sqrt{(x_m)^2 - (y)^2}} - 1 \right) EA \cos \theta d(x_m)\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}E p_{T^-} &= -(EA \cos \theta \sqrt{(x_m)^2 - (y)^2} - EA \cos \theta x_m) \\ E p_{T^-} &= - \left(EA \cos \theta \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} - EA \cos \theta \left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right) \right) \\ E p_{T^-} &= -EA \cos \theta \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} + EA \cos \theta \left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)\end{aligned}\quad (2.35)$$

Tahap kelima, menghitung energi potensial tegangan kanan, dengan mengingat kembali x_n pada persamaan (2.25). Oleh karena itu, energi

potensial tegangan kanan merupakan negatif dari integral gaya tegangan kanan, yakni :

$$Ep_{T^+} = - \int_0^{x_n = \frac{l - \sqrt{(x_m)^2 - (y)^2}}{\cos \theta}} F_{T^+} d(x_n) \quad (2.36)$$

Selanjutnya, untuk menentukan perubahan potensial tegangan kanan (ΔEp_{T^+}) melibatkan peregangan kanan (e^+). Baik peregangan di sisi kanan pada waktu setimbang ($e_{setimbang}^+$), maupun peregangan di sisi kanan setelah pembebanan ($e_{setelah\ pembebanan}^+$). Karena sebelum pembebanan (kondisi setimbang) belum terjadi peregangan, maka peregangan di sisi kanan pada waktu setimbang bernilai nol. Sehingga energi potensial di sisi kanan pada waktu setimbang juga bernilai nol. Dengan demikian, dapat ditentukan besar perubahan energi potensial tegangan di sisi kanan (ΔEp_{T^+}), yaitu :

$$\begin{aligned} \Delta Ep_{T^+} &= Ep_{T^+} - Ep_{T^+_{setimbang}} \\ \Delta Ep_{T^+} &= Ep_{T^+} - 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

Berdasarkan persamaan (2.37), maka persamaan (2.36) dapat dituliskan kembali sebagai berikut :

$$\Delta Ep_{T^+} = - \int_0^{\frac{l - \sqrt{(x_m)^2 - (y)^2}}{\cos \theta}} F_{T^+} d(x_n)$$

$$\Delta Ep_{T^+} = - \int_0^{\frac{l - \sqrt{(x_m)^2 - (y)^2}}{\cos \theta}} E e^+ A \cos \theta d(x_n)$$

$$\Delta Ep_{T^+} = - \int_0^{\frac{l - \sqrt{(x_m)^2 - (y)^2}}{\cos \theta}} \left(\frac{1}{\cos \theta} - 1 \right) EA \cos \theta d(x_n)$$

Sehingga diperoleh

$$Ep_{T^+} = - \left(\frac{EA (l - \sqrt{(x_m)^2 - (y)^2})}{(\cos \theta)^2} - \frac{EA (l - \sqrt{(x_m)^2 - (y)^2})}{\cos \theta} \right) \cos \theta$$

$$Ep_{T^+} = - \left(\frac{EA (l - \sqrt{(x_m)^2 - (y)^2})}{\cos \theta} - EA (l - \sqrt{(x_m)^2 - (y)^2}) \right)$$

$$Ep_{T^+} = - \frac{EA (l - \sqrt{(x_m)^2 - (y)^2})}{\cos \theta} + EA (l - \sqrt{(x_m)^2 - (y)^2}) \quad (2.38)$$

Substitusikan $x_m = \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y$ pada persamaan (2.37) sehingga

diperoleh

$$Ep_{T^+} = - \frac{EA \left(l - \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} \right)}{\cos \theta} + EA \left(l - \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} \right)$$

Dengan demikian, $Ep_{T \text{ tot}}$ adalah penjumlahan dari persamaan (Ep_{T^-}) dan

(Ep_{T^+}), yaitu :

$$Ep_{T \text{ tot}} = Ep_{T^+} + (-Ep_{T^-})$$

$$Ep_{T \text{ tot}} = - \frac{EA \left(l - \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} \right)}{\cos \theta} + EA \left(l - \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} \right) +$$

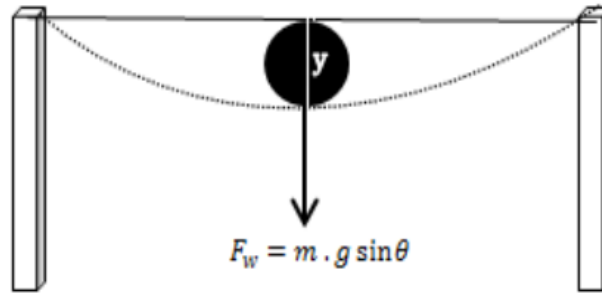
$$\left(- \left(-EA \cos \theta \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} + EA \cos \theta \left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right) \right) \right)$$

$$Ep_{T \text{ tot}} = - \frac{EA \left(l - \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} \right)}{\cos \theta} + EA \left(l - \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} \right) +$$

$$EA \cos \theta \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} - EA \cos \theta \left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right) \quad (2.39)$$

d. Gaya Berat (F_w) dan Energi Potensial Berat (Ep_w)

Suatu dawai yang dikenai massa menggeling akan mengalami pembebanan. Pembebanan ini yang menimbulkan adanya gaya berat yang diilustrasikan pada Gambar 2.12



Gambar 2.12 Ilustrasi Gaya Berat

Pada gambar di atas menjelaskan bahwa dawai yang dikenai massa m_b pasti terjadi gaya berat. Karena gaya berat dipengaruhi oleh gravitasi (g), maka gaya berat dapat didefinisikan sebagai berikut (Nurlina & Riskawati, 2017)

$$F_{berat} = F_w$$

$$F_w = (m_b + m_d) g \sin \theta \quad (2.40)$$

Di mana m_d merupakan massa dawai, m_b merupakan massa benda, dan g merupakan gravitasi yang mempengaruhi gaya berat tersebut. Setelah diperoleh persamaan gaya berat, langkah selanjutnya yaitu menghitung energi potensialnya. Karena gaya berat berada pada lintasan simpangan. Maka dalam menentukan energi potensial berat (Ep_w) melibatkan simpangan (y)

$$\Delta Ep_w = - \int_0^y F_w d(y)$$

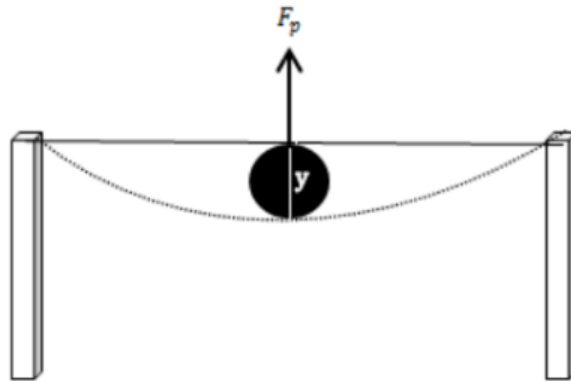
$$Ep_w - Ep_{w \text{ setimbang}} = - \int_0^y (m_d + m_b)g \sin \theta d(y)$$

Sehingga diperoleh

$$Ep_w = -(m_d + m_b) g \sin \theta y \quad (2.41)$$

e. Gaya Pegas (F_p) dan Energi Potensial Pegas (Ep_p)

Gaya Pegas yang terlibat pada vibrasi dawai yang dikenai massa menggeling diilustrasikan pada Gambar 2.13 sebagai berikut



Gambar 2.13 Ilustrasi Gaya Pegas

Pada Gambar di atas menjelaskan bahwa gaya pegas berfungsi sebagai gaya yang dapat mengembalikan dawai dalam keadaan seimbang. Berdasarkan hukum Hooke, keadaan setimbang ditandai dengan tanda minus pada persamaan berikut (Nurlina & Riskawati, 2017)

$$F_p = -k_p y \sin \theta \quad (2.42)$$

Di mana k_p merupakan koefisien pegas dan y merupakan simpangan dawai. Setelah diperoleh persamaan gaya pegas, langkah selanjutnya yaitu menghitung energi potensialnya. Karena gaya pegas berada pada lintasan yang sama dengan gaya berat, maka energi potensialnya adalah

$$\Delta E p_p = - \int_0^y F_p d(y)$$

$$E p_p - E p_p \text{ setimbang} = - \int_0^y -k_p y \sin \theta d(y)$$

Sehingga diperoleh

$$E p_p = \frac{1}{2} k_p ((y - l \sin \theta) + (y + l \sin \theta))^2 \quad (2.43)$$

f. Penjumlahan energi potensial berat dan energi potensial pegas

Karena gaya berat (F_w) dan gaya pegas (F_p) berada pada sumbu y , maka kedua gaya pada persamaan ($E p_w$) dan ($E p_p$) dapat dijumlahkan menjadi

$$E p_{pw} = E p_p - E p_w$$

$$E p_{pw} = \frac{1}{2} k_p ((y - l \sin \theta) + (y + l \sin \theta))^2 - (-(m_d + m_b) g \sin \theta y)$$

$$E p_{pw} = \frac{1}{2} k_p ((y - l \sin \theta) + (y + l \sin \theta))^2 + (m_d + m_b) g \sin \theta y \quad (2.44)$$

g. Energi potensial model

Dari identifikasi gaya-gaya pegas yang terkait, diperoleh energi potensial model ($E P_M$). Energi potensial model ($E P_M$) tersebut diperoleh dari penjumlahan seluruh energi potensial yang telah diidentifikasi, yaitu:

$$E P_M = E P_k + E P_T + E p_{pw} = (m_d + m_b) a, \text{ dengan } a = \ddot{y}$$

$$E P_M = - \frac{m_b \cos \theta(t) \ln \left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)}{2 r} (\dot{y} + \dot{x}_l^-)^2 + (\mu_k (m_d + m_b) g \sin \theta +$$

$$k \eta v \cos \theta) \left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right) - \frac{EA \left(l - \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} \right)}{\cos \theta} + EA \left(l -$$

$$\sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} \right) + EA \cos \theta \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} -$$

$$EA \cos \theta \left(\sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g}} + y \right) + \frac{1}{2} k_p ((y - l \sin \theta) + (y + l \sin \theta))^2 + (m_d + m_b) g \sin \theta y - (m_d + m_b) \ddot{y} \quad (2.45)$$

Karena \dot{x}_t^- bernilai nol. Sehingga persamaan 2.45 dapat dituliskan menjadi

$$EP_M = - \frac{m_b \cos \theta(t) \ln \left(\sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g}} + y \right)}{2r} (\dot{y})^2 + (\mu_k (m_d + m_b) \cdot g \cdot \sin \theta + k \eta v \cos \theta) \left(\sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g}} + y \right) - \frac{EA \left(l - \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} \right)}{2 \cos \theta} + EA \left(l - \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} \right) + EA \cos \theta \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} - EA \cos \theta \left(\sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g}} + y \right) + \frac{1}{2} k_p ((y - l \sin \theta) + (y + l \sin \theta))^2 + (m_d + m_b) g \sin \theta y - (m_d + m_b) \ddot{y} \quad (2.46)$$

5. Memformulasikan Energi Kinetik

Setelah berhasil mengidentifikasi energi potensialnya, maka dilanjutkan dengan mengidentifikasi energi kinetiknya. Energi kinetik yang terjadi adalah energi kinetik translasi dan energi kinetik rotasi. Menurut (Synge & Griffith, 1949) energi kinetik translasi (EK_T) didefinisikan dengan

$$EK_T = \frac{1}{2} (m_d + m_b) v^2 \quad (2.47)$$

di mana v didefinisikan dengan \dot{y} , sehingga dapat dituliskan dengan

$$EK_T = \frac{1}{2} (m_d + m_b) (\dot{y})^2$$

Menurut (Synge & Griffith, 1949), Energi kinetik rotasi (EK_R) didefinisikan dengan

$$EK_R = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (2.48)$$

di mana kecepatan sudut (ω) = $\dot{\theta}$ dan momen inersianya sebuah dawai yang berbentuk batang homogen (I) = $\frac{1}{3} m l^2$, sehingga energi kinetik rotasi dapat dituliskan dengan

$$EK_R = \frac{1}{6} (m_d + m_b) l^2 (\dot{\theta})^2$$

Setelah diketahui energi kinetik translasi dan energi kinetik rotasi, maka energi kinetik model dapat diketahui melalui penjumlahan energi kinetik tersebut. Sehingga dapat diketahui energi kinetik model (EK_M).

$$EK_M = EK_T + EK_R$$

$$EK_M = \frac{1}{2} (m_d + m_b) (\dot{y})^2 + \frac{1}{6} (m_d + m_b) l^2 (\dot{\theta})^2 \quad (2.49)$$

6. Menyusun Persamaan *Lagrange*

Persamaan *Lagrange* pada vibrasi dawai dikenai massa dengan gaya dorong dapat dituliskan sebagai berikut

$$L = EK_M - EP_M$$

$$L = \frac{1}{2} (m_d + m_b) (\dot{y})^2 + \frac{1}{6} (m_d + m_b) l^2 (\dot{\theta})^2 - \left(-\frac{m_b \cos \theta \ln \left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)}{2 r} \left(\frac{dy^2}{dt^2} \right) + (\mu_k (m_d + m_b) g \sin \theta + k \eta v \cos \theta) \left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right) - \frac{EA \left(l - \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)^2 - y^2} \right)}{\cos \theta} + EA \left(l - \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)^2 - y^2} \right) + EA \cos \theta \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)^2 - y^2} - \right.$$

$$EA \cos \theta \left(\sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g}} + y \right) + \frac{1}{2} k_p ((y - l \sin \theta) + (y + l \sin \theta))^2 + (m_d + m_b) g \sin \theta y - (m_d + m_b) \ddot{y} \Big) = 0$$

$$L = \frac{1}{2} (m_d + m_b) (\dot{y})^2 + \frac{1}{6} (m_d + m_b) l^2 (\dot{\theta})^2 + \frac{m_b \cos \theta \ln \left(\sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g}} + y \right)}{2 r} (\dot{y})^2 \left(\sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g}} + y \right) + \frac{EA \left(l - \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g}} + y \right)^2 - (y)^2} \right)}{\cos \theta} - EA \left(l - \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g}} + y \right)^2 - (y)^2} \right) - EA \cos \theta \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} + EA \cos \theta \left(\sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g}} + y \right) - \frac{1}{2} k_p ((y - l \sin \theta) + (y + l \sin \theta))^2 - (m_d + m_b) g \sin \theta y + (m_d + m_b) \ddot{y} \quad (2.50)$$

Berdasarkan persamaan (2.50), gerak dawai dikenai massa dengan gaya dorong merujuk pada persamaan *Euler-Lagrange* berikut (Thomson & Dahleh, 2005)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial (\dot{y})} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad (2.51)$$

dan

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial (\dot{\theta})} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (2.52)$$

Langkah pertama adalah menurunkan persamaan (2.50) terhadap variabel y . sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y} = & \frac{m_b \cos \theta}{2r \left(\sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g} + y} \right)} (\dot{y})^2 - \mu_k (m_d + m_b) g \sin \theta - k \eta v \cos \theta - \\ & \frac{EA \sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g}}}{\cos \theta \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g} + y} \right)^2 - y^2}} + \frac{EA \sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g}}}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g} + y} \right)^2 - y^2}} - \frac{EA \cos \theta \sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g}}}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g} + y} \right)^2 - y^2}} + EA \cos \theta - \\ & 2k_p y - m g \sin \theta \end{aligned}$$

Langkah selanjutnya adalah menurunkan persamaan (2.43) terhadap variabel \dot{y} . Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dy}{dt} \right)} = & (m_d + m_b) (\dot{y}) - \frac{m_b \sin \theta \ln \left(\sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g} + y} \right)}{r} (\dot{y}) + (m_d + m_b) (\dot{y}) \\ \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dy}{dt} \right)} = & \left(2 m_d + 2 m_b - \frac{m_b \sin \theta \ln \left(\sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g} + y} \right)}{r} \right) (\dot{y}) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dy}{dt} \right)} \right) = & \left(2 m_d + 2 m_b - \frac{m_b \sin \theta \ln \left(\sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g} + y} \right)}{r} \right) (\dot{y}) \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh persamaan (2.50) yang memenuhi persamaan

(2.51) yaitu

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dy}{dt} \right)} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

$$\begin{aligned}
& \left(2 m_d + 2 m_b - \frac{m_b \sin \theta \ln \left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)}{r} \right) (\ddot{y}) - \left(\frac{m_b \cos \theta}{2 r \left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)} (\dot{y})^2 - \right. \\
& \mu_k (m_d + m_b) g \sin \theta - k \eta v \cos \theta - \frac{EA \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}}}{\cos \theta \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)^2 - y^2}} + \\
& \left. \frac{EA \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}}}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)^2 - y^2}} - \frac{EA \cos \theta \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}}}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)^2 - y^2}} + EA \cos \theta - 2 k_p y - m g \sin \theta \right) = 0 \\
& \left(2 m_d + 2 m_b - \frac{m_b \sin \theta \ln \left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)}{r} \right) (\ddot{y}) = \frac{m_b \cos \theta}{2 r \left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)} (\dot{y})^2 - \\
& \mu_k (m_d + m_b) g \sin \theta - k \eta v \cos \theta - \frac{EA \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}}}{\cos \theta \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)^2 - y^2}} + \\
& \frac{EA \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}}}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)^2 - y^2}} - \frac{EA \cos \theta \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}}}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)^2 - y^2}} + EA \cos \theta - 2 k_p y - m g \sin \theta \\
& (\ddot{y}) = \left(\frac{m_b \cos \theta}{2 r \left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)} (\dot{y})^2 - \mu_k (m_d + m_b) g \sin \theta - k \eta v \cos \theta - \right. \\
& \frac{EA \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}}}{\cos \theta \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)^2 - y^2}} + \frac{EA \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}}}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)^2 - y^2}} - \frac{EA \cos \theta \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}}}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)^2 - y^2}} + \\
& \left. EA \cos \theta - 2 k_p y - m g \sin \theta \right) \frac{r}{2 m_d r + 2 m_b r - m_b \sin \theta \ln \left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)}
\end{aligned}$$

Langkah kedua adalah menurunkan persamaan (2.50) terhadap θ . Langkah ini bertujuan untuk memenuhi persamaan (2.52). Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \theta} = & \frac{(\dot{y})^2}{2r} \left(-m_b \sin \theta \ln \left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right) + \frac{m_b \cos \theta b E I}{2 \left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right) \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} a m g} \right) - \\
& \mu_k (m_b + m_d) \cdot g \cdot \cos \theta \left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right) + k \eta v \sin \theta \left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right) - \\
& \frac{b E I (\mu_k (m_b + m_d) \cdot g \cdot \sin \theta + k \eta v \cos \theta)}{2 \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} a m g} - \frac{E^2 A b I \left(2 \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + 2y \right)}{4 \cos \theta \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} a m g} + \\
& \frac{E A l \sin \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{E A l \sin \theta}{\cos^2 \theta} \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} + \\
& \frac{E^2 A b I \left(2 \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + 2y \right)}{4 \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} a m g} + E A \sin \theta \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} - \\
& \frac{E^2 A b I \cos \theta \left(2 \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + 2y \right)}{4 \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} a m g} - E A \sin \theta \left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right) + \\
& \frac{E^2 A b I \cos \theta}{2 \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} a m g} - 2 k_p l^2 \cos \theta \sin \theta - (m_d + m_b) g y \cos \theta
\end{aligned}$$

Langkah selanjutnya adalah menurunkan persamaan (2.50) terhadap variabel

$\dot{\theta}$. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dy}{dt} \right)} &= \frac{1}{3} (m_d + m_b) l^2 (\dot{\theta}) \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{d\theta}{dt} \right)} \right) &= \frac{1}{3} (m_d + m_b) l^2 (\ddot{\theta})
\end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh persamaan (2.50) yang memenuhi persamaan

(2.52) yaitu

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{d\theta}{dt} \right)} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{3}(m_d + m_b) l^2(\ddot{\theta}) - \left(\frac{(\dot{y})^2}{2r} \left(-m_b \sin \theta \ln \left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{m_b \cos \theta b E I}{2 \left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right) \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} a m g} \right) - \mu_k (m_b + m_d) \cdot g \cdot \cos \theta \left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right) + \right. \\
& \left. k \eta v \sin \theta \left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right) - \frac{b E I (\mu_k (m_b + m_d) \cdot g \cdot \sin \theta + k \eta v \cos \theta)}{2 \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} a m g} - \right. \\
& \left. \frac{E^2 A b I \left(2 \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + 2y \right)}{4 \cos \theta \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} a m g} + \frac{E A l \sin \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{E A l \sin \theta}{\cos^2 \theta} \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} + \right. \\
& \left. \frac{E^2 A b I \left(2 \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + 2y \right)}{4 \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} a m g} + E A \sin \theta \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} - \right. \\
& \left. \frac{E^2 A b I \cos \theta \left(2 \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + 2y \right)}{4 \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} a m g} - E A \sin \theta \left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right) + \frac{E^2 A b I \cos \theta}{2 \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} a m g} - \right. \\
& \left. 2 k_p l^2 \cos \theta \sin \theta - (m_d + m_b) g y \cos \theta \right) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{3}(m_d + m_b) l^2(\ddot{\theta}) = \frac{(\dot{y})^2}{2r} \left(-m_b \sin \theta \ln \left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right) + \right. \\
& \left. \frac{m_b \cos \theta b E I}{2 \left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right) \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} a m g} \right) - \mu_k (m_b + m_d) \cdot g \cdot \cos \theta \left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right) + \\
& \left. k \eta v \sin \theta \left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right) - \frac{b E I (\mu_k (m_b + m_d) \cdot g \cdot \sin \theta + k \eta v \cos \theta)}{2 \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} a m g} - \right. \\
& \left. \frac{E^2 A b I \left(2 \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + 2y \right)}{4 \cos \theta \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} a m g} + \frac{E A l \sin \theta}{\cos^2 \theta} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{EA \sin \theta}{\cos^2 \theta} \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y\right)^2 - y^2} + \frac{E^2 A b I \left(2\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + 2y\right)}{4 \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y\right)^2 - y^2} \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}}} + \\
& EA \sin \theta \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y\right)^2 - y^2} - \frac{E^2 A b I \cos \theta \left(2\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + 2y\right)}{4 \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y\right)^2 - y^2} \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}}} - \\
& EA \sin \theta \left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y\right) + \frac{E^2 A b I \cos \theta}{2 \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}}} - 2 k_p l^2 \cos \theta \sin \theta - (m_d + \\
& m_b) g y \cos \theta \\
& \ddot{\theta} = \left(\frac{(\dot{y})^2}{2r} \left(-m_b \sin \theta \ln \left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right) + \frac{m_b \cos \theta b E I}{2 \left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right) \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}}} \right) - \right. \\
& \mu_k (m_b + m_d) \cdot g \cdot \cos \theta \left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right) + k \eta v \sin \theta \left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right) - \\
& \left. \frac{b E I (\mu_k (m_b + m_d) \cdot g \cdot \sin \theta + k \eta v \cos \theta)}{2 \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}}} - \frac{E^2 A b I \left(2\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + 2y\right)}{4 \cos \theta \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y\right)^2 - y^2} \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}}} + \right. \\
& \frac{EA \sin \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{EA \sin \theta}{\cos^2 \theta} \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y\right)^2 - y^2} + \\
& \frac{E^2 A b I \left(2\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + 2y\right)}{4 \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y\right)^2 - y^2} \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}}} + EA \sin \theta \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y\right)^2 - y^2} - \\
& \frac{E^2 A b I \cos \theta \left(2\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + 2y\right)}{4 \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y\right)^2 - y^2} \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}}} - EA \sin \theta \left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y\right) + \\
& \left. \frac{E^2 A b I \cos \theta}{2 \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}}} - 2 k_p l^2 \cos \theta \sin \theta - (m_d + m_b) g y \cos \theta \right) \frac{3}{(m_d + m_b) l^2}
\end{aligned}$$

Sehingga pada penelitian (Janah & Kusumastuti, 2021) menghasilkan suatu persamaan diferensial biasa orde dua yaitu

$$\begin{aligned}
(\dot{y}) = & \left(\frac{m_b \cos \theta}{2r \left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)} (\dot{y})^2 - \mu_k (m_d + m_b) g \sin \theta - k \eta v \cos \theta - \right. \\
& \frac{EA \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}}}{\cos \theta \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - y^2}} + \frac{EA \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}}}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - y^2}} - \frac{EA \cos \theta \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}}}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - y^2}} + \\
& \left. EA \cos \theta - 2k_p y - m g \sin \theta \right) \frac{r}{2m_d r + 2m_b r - m_b \sin \theta \ln \left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)} \quad (2.53)
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta} = & \left(\frac{(\dot{y})^2}{2r} \left(-m_b \sin \theta \ln \left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right) + \frac{m_b \cos \theta b E I}{2 \left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right) \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} a m g \right) - \right. \\
& \mu_k (m_b + m_d) \cdot g \cdot \cos \theta \left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right) + k \eta v \sin \theta \left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right) - \\
& \frac{b E I (\mu_k (m_b + m_d) \cdot g \cdot \sin \theta + k \eta v \cos \theta)}{2 \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} a m g} - \frac{E^2 A b I \left(2 \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + 2y \right)}{4 \cos \theta \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} a m g} + \\
& \frac{E A l \sin \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{E A l \sin \theta}{\cos^2 \theta} \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} + \\
& \frac{E^2 A b I \left(2 \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + 2y \right)}{4 \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} a m g} + E A \sin \theta \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} - \\
& \frac{E^2 A b I \cos \theta \left(2 \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + 2y \right)}{4 \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} a m g} - E A \sin \theta \left(\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right) + \frac{E^2 A b I \cos \theta}{2 \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} a m g} - \\
& \left. 2k_p l^2 \cos \theta \sin \theta - (m_d + m_b) g y \cos \theta \right) \frac{3}{(m_d + m_b) l^2} \quad (2.54)
\end{aligned}$$

2.1.2 Model Vibrasi Dawai (Janah & Kusumastuti, 2021) Ter revisi

Model vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai yang telah dikonstruksi oleh Janah dan Kusumastuti pada tahun 2021 mengalami kendala pada profil $y(t)$ dan $\theta(t)$ yang tidak stabil. Oleh karena itu dilakukan eksplorasi terus menerus dengan melibatkan penelitian McKenna pada tahun 1999. Revisi tersebut dilakukan dengan: (a) energi potensial gesek diakomodir sebagai energi kinetik translasi, (b) energi potensial berat dan dorong selain bertugas sebagai energi potensial, juga diakomodir sebagai energi kinetik translasi. Maka pada model yang telah direvisi mempertimbangkan energi yang terjadi pada benda dan dawai.

Model vibrasi dawai yang telah direvisi dari Janah dan Kusumastuti tahun 2021 mempertimbangkan perubahan pengelompokan energi dalam dua kelompok besar yaitu energi pada benda dan energi pada dawai. Energi pada benda meliputi energi potensial dorong (F_r), energi potensial berat ($Ep_w(benda)$) dan energi potensial pegas ($Ep_p(benda)$). Energi kinetik benda meliputi energi kinetik Translasi ($Ek_t(benda)$) dan energi kinetik rotasi ($Ek_R(benda)$). Sementara itu, pada dawai berlaku energi kinetik translasi dawai ($Ek_T(dawai)$) dan energi kinetik rotasi dawai ($Ek_R(dawai)$). Sedangkan energi potensial yang terlibat pada dawai yakni energi potensial berat dawai ($Ep_w(dawai)$) dan energi potensial pegas dawai ($Ep_p(dawai)$). Revisi dari model Janah dan Kusumastuti tahun 2021 sebelumnya dengan mempertimbangkan kaidah pengelompokan di atas menghasilkan profil grafik yang lebih realistis.

Berikut ini adalah beberapa energi pada benda yang terlibat dalam model vibrasi dawai yang dikenai massa menggeling di sepanjang dawai yang telah direvisi:

1. Energi Kinetik Translasi ($Ek_T(benda)$)

Menurut (Alonso & Finn, 1966) Energi kinetik translasi yang terjadi pada benda ($Ek_T(benda)$) adalah

$$w = \Delta Ek \quad (2.55)$$

Dalam hal ini w merupakan usaha total pada benda yang merupakan jumlahan dari semua gaya dikalikan dengan jarak tempuh benda yang diasumsikan berada di tengah dawai (s). Sementara itu ΔEk merupakan perubahan energi kinetik benda di posisi setelah menggeling (Ek_B) terhadap posisi seimbang (Ek_A). Berdasarkan persamaan (2.55) maka gaya-gaya yang terlibat pada w meliputi: gaya dorong F_r (seperti diilustrasikan gambar 2.6), gaya berat (seperti diilustrasikan pada persamaan 2.40), gaya gesek (seperti diilustrasikan pada persamaan 2.12 dan 2.13), sehingga diperoleh ekspresi berikut:

$$F_r \cos \theta s + m g \sin \theta s - F_{k1} s - F_{k2} s = Ek_B - Ek_A \quad (2.56)$$

Energi kinetik pada posisi seimbang (Ek_A) merupakan kondisi dimana bola dalam kondisi diam, sehingga nilainya sama dengan nol. Oleh karena itu, persamaan (2.56) dapat ditulis menjadi

$$-(F_r \cos \theta + m g \sin \theta - F_{k1} - F_{k2}) s = Ek_B \quad (2.57)$$

Dengan memperhatikan persamaan (2.12) untuk F_{k1} dan persamaan (2.13) untuk F_{k2} , maka persamaan (2.56) dapat dituliskan kembali sebagai berikut

$$-(F_r \cos \theta + m g \sin \theta - \mu_k m_b g \cos \theta - k_p \eta v \cos \theta) s = Ek_B \quad (2.58)$$

2. Energi Kinetik Rotasi ($Ek_{R(benda)}$)

Energi kinetik rotasi berdasarkan pada persamaan (2.48) Energi kinetik rotasi yang terjadi pada benda $Ek_{R(benda)}$ adalah sebagai berikut

$$Ek_{R(benda)} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

di mana kecepatan sudut (ω) = $\dot{\theta}$ dan momen inersianya sebuah bola pejal didefinisikan sebagai (I) = $\frac{2}{5} m_b r^2$ dengan m_b merupakan massa benda dan r merupakan jari-jari bola, sehingga energi kinetik rotasi pada benda yaitu berupa bola dapat dituliskan dengan

$$Ek_{R(benda)} = \frac{1}{5} m_b r^2 (\dot{\theta})^2$$

3. Energi Potensial Berat ($Ep_w(benda)$)

Energi potensial berat yang terjadi pada benda ($Ep_w(benda)$) berdasarkan pada persamaan (2.40) adalah sebagai berikut:

$$Ep_w(benda) = -m_b g y$$

di mana m_b merupakan massa benda, g merupakan gravitasi yang mempengaruhi berat benda tersebut, dan y merupakan lintasan simpangan yang terjadi pada gaya gravitasi

4. Energi Potensial Pegas ($Ep_p(benda)$)

Energi Potensial Pegas yang terjadi pada benda ($Ep_p(benda)$) berdasarkan pada persamaan (2.42) adalah sebagai berikut

$$Ep_p(benda) = \frac{1}{2} k_p y^2$$

5. Energi Potensial Dorong (Fr)

Pada revisi model nilai energi potensial dorong (Fr) yang semula berupa fungsi, saat ini diasumsikan sebagai konstanta dengan satuan N .

Di pihak lain, energi pada dawai yang terlibat dalam model vibrasi dawai yang dikenai massa menggeling di sepanjang dawai yang telah direvisi meliputi:

1. Energi Kinetik Translasi ($Ek_T(dawai)$)

Energi kinetik translasi yang terjadi pada dawai $Ek_T(dawai)$ berdasarkan persamaan (2.47) adalah sebagai berikut

$$Ek_T(dawai) = \frac{1}{2} m_d v^2$$

di mana m_d merupakan massa dawai dan v didefinisikan sebagai kecepatan yang merupakan turunan satu dari jarak y yang dinotasikan sebagai \dot{y} , sehingga dapat dituliskan dengan

$$Ek_T(dawai) = \frac{1}{2} m_d (\dot{y})^2$$

2. Energi Kinetik Rotasi $Ek_R(dawai)$

Energi kinetik rotasi yang terjadi pada dawai $Ek_R(dawai)$ berdasarkan persamaan (2.48) adalah sebagai berikut

$$Ek_R(dawai) = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (2.59)$$

di mana kecepatan sudut (ω) = $\dot{\theta}$ dan momen inersianya sebuah dawai yang berbentuk batang homogen didefinisikan sebagai $(I) = \frac{1}{3} m_d l^2$ dengan m_d merupakan massa dawai dan l merupakan panjang dawai, sehingga energi kinetik dawai pada persamaan (2.59) dapat dituliskan kembali sebagai berikut

$$Ek_R(dawai) = \frac{1}{6} m_d l^2 (\dot{\theta})^2 \quad (2.60)$$

3. Energi Potensial Berat ($Ep_w(dawai)$)

Energi potensial berat yang terjadi pada dawai ($Ep_w(dawai)$) berdasarkan persamaan (2.38) adalah sebagai berikut:

$$Ep_w(dawai) = -m_d g y$$

di mana m_d merupakan massa dawai, g merupakan gravitasi yang mempengaruhi berat dawai tersebut, dan y merupakan lintasan simpangan yang terjadi pada gaya gravitasi

4. Energi Potensial Pegas ($Ep_p(dawai)$)

Energi potensial pegas yang terjadi pada dawai $Ep_p(dawai)$ berdasarkan pada persamaan (2.42) menggunakan asumsi baru bahwa $y = (y - l \sin \theta) + (y - l \sin \theta)$ adalah sebagai berikut

$$Ep_p(dawai) = \frac{1}{2} k_p ((y - l \sin \theta) + (y - l \sin \theta))^2 \quad (2.61)$$

Selanjutnya, energi-energi yang bekerja pada benda dan dawai yang telah dijelaskan di atas akan dimasukkan ke persamaan *lagrange*. Persamaan *Lagrange* pada vibrasi dawai dikenai massa dengan gaya dorong dapat dituliskan sebagai berikut

$$L = Ek_{(benda+dawai)} - EP_{(benda+dawai)} \quad (2.62)$$

Substitusikan nilai-nilai $Ek_{(benda+dawai)}$ dan $EP_{(benda+dawai)}$ dari persamaan (2.55) sampai (2.61) ke persamaan (2.62), sehingga dapat dinyatakan sebagai berikut

$$L = (-Ek_{Tb} + Ek_{Rb} + Ek_{Td} + Ek_{Rd}) - (Fr + Ep_{wb} + Ep_{pb} + Ep_{wd} + Ep_{pd})$$

$$L = \left(-(F_r \cos \theta + m g \sin \theta - \mu_k m_b g \cos \theta - k_p \eta v \cos \theta) s + \right.$$

$$\left. \frac{1}{5} m_b r^2 (\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} m_d (\dot{y})^2 + \frac{1}{6} m_d l^2 (\dot{\theta})^2 \right) - \left(F_r - m_b g y + \frac{1}{2} k_p y^2 - \right.$$

$$\left. m_d g y + \frac{1}{2} k ((y - l \sin \theta) + (y + l \sin \theta))^2 \right)$$

$$\begin{aligned}
L = & -(F_r \cos \theta + m_b g \sin \theta - \mu_k m_b g \cos \theta - k_p \eta v \cos \theta) s + \frac{1}{5} m_b r^2 (\dot{\theta})^2 + \\
& \frac{1}{2} m_d (\dot{y})^2 + \frac{1}{6} m_d l^2 (\dot{\theta})^2 - F_r + (m_b + m_d) g y - \frac{1}{2} k y^2 - \frac{1}{2} k_p ((y - l \sin \theta) + \\
& (y + l \sin \theta))^2
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Berdasarkan persamaan (2.63), gerak dawai dikenai massa dengan gaya dorong merujuk pada persamaan *Euler-Lagrange* berikut

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{\partial L}{\partial y} \tag{2.64}$$

dan

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \tag{2.65}$$

Langkah pertama adalah menurunkan persamaan (2.63) terhadap variabel y . sehingga diperoleh

$$\frac{\partial L}{\partial y} = (m_b + m_d) g - 2 k_p ((y - l \sin \theta) + (y + l \sin \theta))$$

Langkah selanjutnya adalah menurunkan persamaan (2.63) terhadap variabel \dot{y} . Sehingga diperoleh

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = m_d \ddot{y}$$

Dengan demikian diperoleh persamaan (2.63) yang memenuhi persamaan (2.64) yaitu

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{\partial L}{\partial y}$$

Sehingga diperoleh

$$m_d \ddot{y} = (m_b + m_d) g - 2 k_p ((y - l \sin \theta) + (y + l \sin \theta)),$$

yakni

$$\ddot{y} = -F_r - \frac{2k}{m_d} ((y - l \sin \theta) + (y + l \sin \theta)) + \frac{(m_b + m_d)g}{m_d} \tag{2.66}$$

Dengan memperhatikan $((y - l \sin \theta) + (y + l \sin \theta)) = 2y$, maka persamaan (2.66) dapat ditulis dengan

$$\ddot{y} = -F_r - \frac{4 k_p y}{m_d} + \frac{(m_b + m_d)g}{m_d} \quad (2.67)$$

Langkah kedua adalah menurunkan persamaan (2.63) terhadap θ . Langkah ini bertujuan untuk memenuhi persamaan (2.65). Sehingga diperoleh

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -(-F_r \sin \theta + m_b g \cos \theta + \mu_k m_b g \sin \theta + k_p \eta v \sin \theta) s - k l \cos \theta ((y - l \sin \theta) - (y + l \sin \theta))$$

Langkah selanjutnya adalah menurunkan persamaan (2.63) terhadap variabel $\dot{\theta}$.

Sehingga diperoleh

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \left(\frac{2}{5} m_b r^2 + \frac{1}{3} m_d l^2 \right) \ddot{\theta}$$

Dengan demikian, diperoleh persamaan (2.49) yang memenuhi persamaan (2.63) yaitu

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

sehingga diperoleh

$$\left(\frac{2}{5} m_b r^2 + \frac{1}{3} m_d l^2 \right) \ddot{\theta} = -(-F_r \sin \theta + m_b g \cos \theta + \mu_k m_b g \sin \theta + k_p \eta v \sin \theta) s - k l \cos \theta ((y - l \sin \theta) - (y + l \sin \theta)),$$

yakni

$$\ddot{\theta} = - \frac{(-F_r \sin \theta + m_b g \cos \theta + \mu_k m_b g \sin \theta + k_p \eta v \sin \theta) s - k_p l \cos \theta ((y - l \sin \theta) - (y + l \sin \theta))}{\left(\frac{2}{5} m_b r^2 + \frac{1}{3} m_d l^2 \right)}$$

Dengan memperhatikan $((y - l \sin \theta) - (y + l \sin \theta)) = -2 l \sin \theta$, maka dapat ditulis sebagai

$$\ddot{\theta} = - \frac{(-F_r \sin \theta + m_b g \cos \theta + \mu_k m_b g \sin \theta + k_p \eta v \sin \theta) s + 2 k_p l^2 \cos \theta \sin \theta}{\left(\frac{2}{5} m_b r^2 + \frac{1}{3} m_d l^2 \right)}$$

Kemudian perlu menyederhanakan dan menambahkan suku redam viskos kecil pada y dan θ sebagai akibat interaksi dengan fluida sebesar $-\delta\dot{y}$ dan $-\delta\dot{\theta}$ (McKenna, 1999), sehingga diperoleh

$$\ddot{y} = -\delta\dot{y} - F_r - \frac{4k_p y}{m_d} + \frac{(m_b+m_d)g}{m_d} \quad (2.68)$$

dan

$$\ddot{\theta} = -\delta\dot{\theta} - \frac{(-F_r \sin \theta + m_b g \cos \theta + \mu_k m_b g \sin \theta + k_p \eta v \sin \theta) s + 2k_p l^2 \cos \theta \sin \theta}{\left(\frac{2}{5}m_b r^2 + \frac{1}{3}m_d l^2\right)} \quad (2.69)$$

Dengan memperhatikan jarak tempuh benda (s) yang diasumsikan berada di tengah dawai, maka diperoleh $s = \frac{l}{2}$. Sehingga persamaan (2.68) dan (2.69) dapat dituliskan sebagai berikut

$$\ddot{y} = -\delta\dot{y} - \left(\frac{4k_p}{m_d}\right)y + \frac{(m_b+m_d)g}{m_d} - F_r \quad (2.70)$$

$$\ddot{\theta} = -\delta\dot{\theta} - \frac{\left(-\frac{l}{2}F_r + \frac{l}{2}\mu_k m_b g + \frac{l}{2}k_p \eta v\right) \sin \theta + \frac{l}{2}m_b g \cos \theta + 2k_p l^2 \cos \theta \sin \theta}{\left(\frac{2}{5}m_b r^2 + \frac{1}{3}m_d l^2\right)} \quad (2.71)$$

Dengan memisalkan $\lambda = \frac{4k_p}{m_d}$; $\alpha = \frac{\left(-\frac{l}{2}F_r + \frac{l}{2}\mu_k m_b g + \frac{l}{2}k_p \eta v\right)}{\left(\frac{2}{5}m_b r^2 + \frac{1}{3}m_d l^2\right)}$; $\beta = \frac{l m_b g}{2\left(\frac{2}{5}m_b r^2 + \frac{1}{3}m_d l^2\right)}$; $\gamma =$

$\frac{2k_p l^2}{\left(\frac{2}{5}m_b r^2 + \frac{1}{3}m_d l^2\right)}$ sehingga persamaan (2.70) dan (2.71) dapat ditulis kembali menjadi

$$\ddot{y} = -\delta\dot{y} - \lambda y + \frac{(m_b+m_d)g}{m_d} - F_r \quad (2.72)$$

$$\ddot{\theta} = -\delta\dot{\theta} - \alpha \sin \theta - \beta \cos \theta - \gamma \cos \theta \sin \theta \quad (2.73)$$

Persamaan (2.72) dan (2.73) membentuk suatu persamaan diferensial biasa orde dua yang pada penelitian ini akan dicari solusi numerik untuk $y(t)$ dan $\theta(t)$.

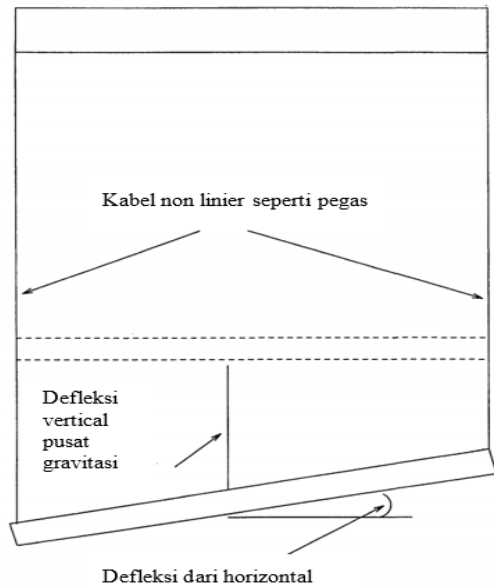
2.1.3 Penelitian Rujukan

Penelitian ini diarahkan pada penyelesaian numerik model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa menggeling di sepanjang dawai yang telah direvisi menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde 4. Berikut beberapa penelitian rujukan yang menjadi pedoman dalam mengerjakan penelitian ini:

1. Model Matematika McKenna tahun 1999

Pada tahun 1940 terjadi peristiwa runtuhnya jembatan gantung Tacoma. Peristiwa tersebut membuat matematikawan (Lazer & McKenna, 1990) melakukan penelitian tentang pemodelan matematika jembatan gantung. Penelitian tersebut menjelaskan penyebab terjadinya runtuhnya jembatan secara matematis. Selanjutnya, model yang diperoleh dari penelitian tersebut mengalami perbaikan pada penelitian yang dilakukan oleh McKenna pada tahun 1990. (McKenna, 1999) mempertimbangkan penampang horizontal dari bentang tengah jembatan gantung dan mengusulkan model persamaan diferensial biasa untuk gerakan puntir penampang. Model matematika tersebut dirumuskan dengan memperhatikan balok yang berosilasi secara torsional dengan seimbang dan digantung pada kedua ujungnya oleh kabel. Untuk memodelkan gerakan jembatan gantung, McKenna menganggap bahwa penampang horizontal jembatan gantung sebagai balok (batang) panjangnya $2l$ dan massa m digantungkan oleh kabel non-linier. $y(t)$ menunjukkan jarak ke bawah dari pusat gravitasi batang dari keadaan tidak dibebani dan $\theta(t)$ menunjukkan bahwa sudut batang dari horizontal pada waktu t .

Diasumsikan batang digantung pada pegas yang menahan ekspansi dengan konstanta pegas k_p di setiap ujungnya yang diilustrasikan pada Gambar (2.14).



Gambar 2.14 Ilustrasi batang yang digantung pada pegas di setiap ujungnya

Persamaan untuk osilasi vertikal dan torsional menggunakan konstanta pegas (k_p) diperpanjang sejauh y dengan energi potensial pegasnya adalah $\frac{1}{2}k_p y^2$ dan energi potensial beratnya adalah $-mgy$. Eksistensinya adalah $(y - l \sin \theta)^+$ di satu pegas dan $(y + l \sin \theta)^+$ di pegas lainnya. Diasumsikan bahwa sudut kecil tersembunyi di bawah kabel tetap vertikal, meskipun gerakan lateral ujung pelat atau batang membelokkannya sedikit ke kiri atau kanan. Sehingga energi potensial totalnya adalah

$$E_p = \frac{1}{2}k_p y^2 + (-mgy)$$

$$E_p = \frac{1}{2}k_p ((y - l \sin \theta)^+ + (y + l \sin \theta)^+)^2 - mgy \quad (2.74)$$

Apabila batang bermassa m dan panjangnya $2l$ berputar di sekitar pusat gravitasi dengan kecepatan sudut θ , maka energi kinetiknya $\frac{1}{2}I\omega^2$, di mana $\omega = \dot{\theta}$ dan momen inersia batang $I = \frac{1}{3}ml^2$. Maka energi kinetik pada batang dapat ditulis $\frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2$. Sedangkan energi kinetik yang terjadi pada benda adalah $\frac{1}{2}mv^2$, di mana m adalah massa benda dan v adalah kecepatan benda yang didefinisikan dengan \dot{y} . Maka energi kinetik yang terjadi pada benda dapat ditulis $\frac{1}{2}m\dot{y}^2$. Sehingga diperoleh energi kinetik totalnya sebagai berikut (Synge & Griffith, 1949)

$$E_k = \frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 \quad (2.75)$$

Selanjutnya menyusun persamaan Lagrange $L = E_k - E_p$, sehingga dapat dituliskan sebagai berikut

$$L = \frac{1}{6}m_d l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_d \dot{y}^2 - \frac{1}{2}k_p ((y - l \sin \theta)^+ + (y + l \sin \theta)^+)^2 + mgy \quad (2.76)$$

Berdasarkan persamaan (2.76), gerakan puntir penampang merujuk pada persamaan *Euler-Lagrange* berikut

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad (2.77)$$

dan

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{\partial L}{\partial y} \quad (2.78)$$

Tahap pertama adalah menurunkan persamaan (2.76) terhadap θ . Langkah ini bertujuan untuk memenuhi persamaan (2.77). Sehingga diperoleh

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = k_p l \cos \theta ((y - l \sin \theta)^+ + (y + l \sin \theta)^+)$$

Langkah selanjutnya adalah menurunkan persamaan (2.74) terhadap variabel $\dot{\theta}$. Sehingga diperoleh

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{1}{3} ml^2 \ddot{\theta}$$

Dengan demikian, diperoleh persamaan (2.76) yang memenuhi persamaan (2.77) yaitu

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

$$\frac{1}{3} ml^2 \ddot{\theta} = K_p l \cos \theta ((y - l \sin \theta)^+ + (y + l \sin \theta)^+) \quad (2.79)$$

Tahap kedua adalah menurunkan persamaan (2.76) terhadap variabel y . sehingga diperoleh

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -k_p ((y - l \sin \theta)^+ + (y + l \sin \theta)^+) + mg$$

Langkah selanjutnya adalah menurunkan persamaan (2.74) terhadap variabel \dot{y} . Sehingga diperoleh

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = m\ddot{y}$$

Dengan demikian diperoleh persamaan (2.76) yang memenuhi persamaan (2.78) yaitu

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{\partial L}{\partial y}$$

$$m\ddot{y} = -k_p ((y - l \sin \theta)^+ + (y + l \sin \theta)^+) + mg \quad (2.80)$$

Karena pegas diasumsikan tetap vertikal, gaya yang diberikan oleh pegas tidak dalam arah puntir tetapi membentuk sudut θ yang tegak lurus terhadap batang. Inilah mengapa perlu ditambahkan $\cos \theta$ dalam persamaan torsi dalam pegas. Selain itu perlu menyederhanakan dan menambahkan suku

redam viskos kecil pada y dan θ sebagai akibat interaksi dengan fluida sebesar $\delta\dot{y}$ dan $\delta\dot{\theta}$. Serta menambahkan suku gaya eksternal $f(t)$ pada persamaan torsi. Sehingga persamaan (2.77) dan (2.78) dapat dituliskan sebagai berikut

$$\ddot{\theta} = -\delta\dot{\theta} + \frac{3K_p}{ml} \cos \theta ((y - l \sin \theta)^+ + (y + l \sin \theta)^+) + f(t) \quad (2.81)$$

dan

$$\ddot{y} = -\delta\dot{y} - \frac{k_p}{m} ((y - l \sin \theta)^+ + (y + l \sin \theta)^+) + g \quad (2.82)$$

Jika kita menganggap kabel tidak pernah kehilangan tegangan maka $(y - l \sin \theta)^+ = (y - l \sin \theta)$ dan $(y + l \sin \theta)^+ = (y + l \sin \theta)$. Untuk suku gaya gaya luar berupa $f(t) = \lambda \sin(\mu \theta)$ yakni sebagai gaya osilasi generik dengan frekuensi dan amplitudo yang tepat. Sehingga persamaan (2.77) dan (2.78) dapat dituliskan sebagai berikut

$$\ddot{\theta} = -\delta\dot{\theta} - \frac{6K_p}{m} \cos \theta \sin \theta + \lambda \sin(\mu \theta) \quad (2.83)$$

dan

$$\ddot{y} = -\delta\dot{y} - \frac{2k_p y}{m} + g \quad (2.84)$$

Kesalahan yang diyakini penulis sebagai kegagalan untuk memahami osilasi torsi amplitudo besar dalam kasus jembatan gantung Tacoma Narrows pada penelitian (Lazer & McKenna, 1990). Substitusikan $\sin \theta = \theta$ dan $\cos \theta = 1$ ke persamaan (2.83) dan (2.84) sehingga penelitian McKenna, 1999 menghasilkan persamaan diferensial biasa orde dua sebagai berikut

$$\ddot{\theta} = -\delta\dot{\theta} - \frac{6K_p}{m} \theta + \lambda \sin(\mu \theta) \quad (2.85)$$

dan

$$\ddot{y} = -\delta\dot{y} - \frac{2k_p y}{m} + g \quad (2.86)$$

2. Uji Validasi Model *Flying Fox* (Sari & Kusumastuti, 2018)

Pada penelitian ini, dilakukan perhitungan nilai eror atau galat pada penyelesaian numeriknya terhadap eksaknya dengan merujuk pada penelitian Sari dan Kusumastuti pada tahun 2018 tentang bagaimana membahas strategi dalam menghitung nilai eror atau galat pada model *flying fox*. Pada penelitian ini menghitung galat dilakukan dengan menghitung selisih nilai numerik metode ABM ke i terhadap eksaknya.

3. Simulasi Numerik Model *Flying Fox* dengan metode ABM (Utami, 2021)

Pada penelitian ini, dilakukan penyelesaian numerik menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde 4 dengan merujuk pada langkah-langkah yang telah dilakukan penelitian Utami dan Kusumastuti pada tahun 2021 tentang simulasi numerik model *Flying fox* menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat.

2.1.4 Metode Adams-Bashforth-Moulton (ABM) Orde Empat

Metode Adams-Bashforth-Moulton (ABM) orde empat adalah salah satu metode numerik *multi-step*. Pada metode ini dalam proses pencarian solusi numeriknya tidak menggunakan turunan-turunan fungsinya dahulu, tetapi menggunakan persamaan *predictor* dan persamaan *corrector*. Galat pemotongan pada metode ABM ber orde empat ini lebih kecil dari pada galat pemotongan pada orde dua atau tiga. Oleh sebab itu metode ini cocok apabila digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai awal persamaan diferensial biasa orde satu dikarenakan solusi yang diperoleh cukup akurat dalam penyelesaian masalah. Langkah pertama yang dilakukan pada penyelesaian ini yaitu mereduksi persamaan

yang digunakan menjadi persamaan diferensial orde satu yang terdiri dari n buah persamaan. Selanjutnya persamaan diferensial orde satu tersebut diselesaikan dengan metode Runge-Kutta orde empat yang bertujuan untuk memperoleh nilai awal, dan dilanjutkan dengan menyubstitusikan nilai awal ke persamaan *predictor*. Setelah itu memperbaiki nilai *predictor* menggunakan persamaan *corrector* ABM orde empat. Penyelesaian persamaan diferensial biasa menggunakan metode ABM merupakan proses mencari nilai fungsi $y(x)$ pada titik x dari persamaan diferensial biasa non linier orde satu $y' = f(x, y)$ dan nilai awal $y(x_0) = y_0$ yang diketahui melalui prediksi dengan persamaan *predictor* dan melakukan koreksi dengan persamaan *corrector* (Apriadi, Prihandono, & Novianti, 2014).

Metode ABM memiliki rumus dalam perhitungan masalah nilai awal $y = f(x, y)$ dan nilai awal $y(x_0) = y_0$ pada $[t_0, b]$ sebagai berikut (Conte & Boor, 1993):

1. Rumus Metode Adams-Bashforth sebagai *predictor*

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (-9f_{n-3} + 37f_{n-2} - 59f_{n-1} + 55f_n) \quad (2.87)$$

2. Rumus Metode Adams-Moulton sebagai *corrector*

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (f_{n-2} - 5f_{n-1} + 19f_n + 9f_{n+1}) \quad (2.88)$$

Pada rumus di atas di mana untuk setiap $n = 3, 4, 5, \dots$ dengan h adalah lebar langkah yang diberikan $f_1 = f(t_1, y_1)$. Nilai $y_1, y_2,$ dan y_3 dapat dihitung dengan metode lain, misalnya dengan metode Runge-Kutta orde empat.

2.1.5 Metode Runge-Kutta Orde Empat

Metode Runge-Kutta adalah metode dengan ketelitian lebih besar tanpa menurunkan suatu fungsi dalam persamaan. Bentuk umum dari Runge-Kutta adalah

$$x_{i+1} = x_i + \Phi(t_i, x_i, h)$$

dengan $\Phi(t_i, x_i, h)$ merupakan fungsi pertambahan (kemiringan rerata pada interval) yang digunakan untuk mengekstrapolasi nilai lama x_i ke nilai baru x_{i+1} di sepanjang interval h . Fungsi pertambahan dapat ditulis dalam bentuk umum

$$\Phi = a_1k_1 + a_2k_2 + \dots + a_nk_n$$

dengan a merupakan konstanta dan k merupakan

$$k_1 = f(t_i, x_i)$$

$$k_2 = f(t_i + p_1h, x_i + q_{11}k_1h)$$

$$k_3 = f(t_i + p_2h, x_i + q_{21}k_1h + q_{22}k_2h)$$

$$k_n = f(t_i + p_{n-1}h, x_i + q_{n-1,2}k_1h + q_{n-1,2}k_2h + \dots + q_{n-1,n-1}k_{n-1}h)$$

dengan p dan q merupakan konstanta. Nilai k menunjukkan hubungan berurutan.

Nilai k_1 muncul pada persamaan k_2 nilai k_2 muncul pada persamaan k_3 dan seterusnya (Triatmodjo, 2002).

Metode Runge-Kutta orde empat mempunyai bentuk umum sebagai berikut (Yakin, 2019):

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.89)$$

dengan

$$k_1 = f(y_i, x_i)$$

$$k_2 = f\left(y_i + \frac{1}{2}hk_1, x_i + \frac{1}{2}hl_1\right)$$

$$k_3 = f\left(y_i + \frac{1}{2}hk_2, x_i + \frac{1}{2}hl_2\right)$$

$$k_4 = f(y_i + hk_3, x_i + hl_3)$$

2.1.6 Analisis Nilai *Error* (Galat)

Menurut (Purwati & Erawati, 2020) penyelesaian dari perhitungan numerik pada persamaan matematika merupakan nilai hampiran atau aproksimasi yang mendekati nilai sebenarnya (eksak). Sehingga perbedaan hasil dari suatu perhitungan numerik dengan nilai sebenarnya disebut dengan nilai *error* (galat) atau bisa disebut dengan nilai kesalahan. Analisis galat merupakan aspek penting dalam perhitungan numerik karena membahas tingkat kesalahan yang terjadi pada proses perhitungan. Sehingga semakin kecil galat/kesalahan maka nilai hasil perhitungan numerik semakin mendekati nilai eksaknya, namun tidak semua kasus yang dipecahkan dengan perhitungan numerik memiliki nilai eksak. Jika kasus tersebut terjadi maka galat dalam perhitungan dapat dicari melalui nilai pendekatan sebelumnya (Yakin, 2019).

Menurut (Djojodihardjo, 2000) galat absolut pada suatu bilangan merupakan selisih antara hasil sebenarnya (dianggap sudah diketahui) dengan hasil pendekatannya. Dapat ditulis dengan

$$e = |x - \tilde{x}|$$

di mana

e = galat absolut,

x = nilai eksak,

\tilde{x} = nilai pendekatan numerik.

Galat relatif dapat didefinisikan sebagai galat absolut dibagi dengan nilai sebenarnya. Jika nilai sebenarnya belum diketahui maka dapat menggunakan nilai pendekatan atau tafsiran galat suatu batas terbesar dari ukuran galat.

2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Quran/Hadits

Merujuk pada firman Allah SWT dalam QS. Yusuf Ayat 67 yang artinya sebagai berikut:

"Hai anak-anakku janganlah kamu (bersama-sama) masuk dari satu pintu gerbang, dan masuklah dari pintu-pintu gerbang yang berlain-lain; namun demikian aku tiada dapat melepaskan kamu barang sedikit pun dari pada (takdir) Allah. Keputusan menetapkan (sesuatu) hanyalah hak Allah; kepada-Nya lah aku bertawakal dan hendaklah kepada-Nya saja orang-orang yang bertawakal berserah diri"(QS. Yusuf :67).

Menurut Tafsir Ibnu Katsir, dijelaskan bahwa Nabi Yaqub memerintahkan anaknya ketika perjalanan menuju kota Mesir, bahwa janganlah mereka masuk dari satu pintu gerbang yang sama, tetapi hendaklah masuk dari berbagai pintu gerbang yang berlainan. Karena mereka adalah orang-orang yang berpenampilan bagus dan rupa yang tampan serta berwibawa. Sehingga Yaqub khawatir apabila mereka tertimpa penyakit yang disebabkan dengiknya orang yang melihatnya. Yaqub yakin bahwa meski melewati pintu yang berbeda Yusuf pasti akan menjumpai salah seorang dari saudaranya di antara gerbang itu (Abdullah, 2004).

Dalam hal ini pintu yang dimaksud pada QS. Yusuf Ayat 67 diibaratkan sebagai cara atau metode. Allah SWT telah menyediakan berbagai cara atau metode pada penyelesaian masalah agar mendapatkan jalan keluar dari permasalahan tersebut. Manusia diperintahkan agar selalu sabar dan berusaha untuk mendapatkan solusi terbaik dengan memanfaatkan berbagai cara yang ada. Demikian pula pada penyelesaian suatu permasalahan dalam matematika, banyak cara atau metode yang dapat digunakan untuk menganalisis suatu model matematika secara numerik pada persamaan diferensial biasa orde dua. Sehingga dalam penelitian ini penulis memilih untuk menyelesaikan permasalahan tentang vibrasi dawai yang dikenai

massa menggelinding di sepanjang dawai menggunakan metode ABM orde 4 yang diawali dengan mencari nilai awal menggunakan metode Runge-Kutta orde 4.

2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung

Pada penelitian ini diperlukan teori pendukung untuk mendukung penyelesaian pada topik yang telah ditentukan. Topik yang diangkat pada penelitian ini difokuskan pada penyelesaian solusi numerik dari model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton (ABM). Model yang digunakan merupakan model matematika penelitian Janah dan Kusumastuti tahun 2021 yang mengalami revisi model yang mengacu pada model matematika dari penelitian McKenna tahun 1999 yakni persamaan lendutan dawai $y(t)$ dan sudut lendutan dawai $\theta(t)$ yang merupakan persamaan diferensial biasa orde dua dengan parameter yang sama.

Langkah-langkah dalam penyelesaian model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai merujuk pada penelitian (Utami, 2021). Dalam penyelesaian solusi numerik model tersebut diawali dengan mencari nilai awal menggunakan metode Runge-Kutta orde empat. Pencarian nilai awal tersebut menggunakan bentuk umum Runge-Kutta orde empat merujuk pada buku (Yakin, 2019). Setelah itu dilanjutkan dengan mengevaluasi pada *predictor* menggunakan persamaan *corrector* melalui metode ABM orde 4, bentuk umum dari persamaan *predictor* dan *corrector* merujuk pada buku (Conte & Boor, 1993). Setelah diperoleh solusi numerik pada model matematika tersebut, penelitian ini diarahkan pada analisis grafik pertumbuhan galat pada model matematika yang dimaksud dengan menggunakan metode ABM orde 4.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Jenis penelitian pada penelitian ini adalah penelitian kualitatif-kuantitatif yang terdiri dari 60% penelitian kuantitatif (pengolahan angka) dan 40% penelitian kualitatif (menginterpretasikan hasil simulasi dari pertumbuhan grafik). Penelitian kualitatif merupakan penelitian yang data dan analisisnya bersifat kualitatif. Penelitian kualitatif mempunyai tujuan untuk menjelaskan suatu fenomena dari hasil pengamatan pada objek penelitian (Kountur, 2003). Sedangkan penelitian kuantitatif pada prosesnya menggunakan data berupa angka (numerik). Penelitian kuantitatif mempunyai tujuan untuk menguji atau memverifikasi suatu objek penelitian (Creswell, 2013). Objek penelitian yang diambil pada penelitian ini adalah model matematika penelitian Janah dan Kusumastuti tahun 2021 yang mengalami revisi model yang mengacu pada model matematika dari penelitian McKenna tahun 1999.

3.2 Pra Penelitian

Pra penelitian merupakan tahapan penulis sebelum melakukan penelitian. Pada tahap ini penulis melakukan kegiatan-kegiatan seperti mencari masalah yang akan diangkat sebagai topik penelitian, mencari referensi-referensi berupa jurnal atau penelitian terdahulu, menentukan model matematika yang akan digunakan pada penelitian, serta menentukan judul penelitian.

Model yang digunakan adalah model matematika penelitian Janah dan Kusumastuti tahun 2021 yang mengalami revisi model yang mengacu pada model

matematika dari penelitian McKenna tahun 1999. Model matematika tersebut memiliki dua variabel yaitu lendutan dawai $y(t)$ dan sudut lendutan $\theta(t)$ yang merupakan persamaan diferensial biasa orde dua. Penulis mengambil model tersebut sebagai bahan penelitian bertujuan untuk menguji kevalidan dari model tersebut dengan mencari solusi numeriknya.

3.3 Tahapan Penelitian

Tahapan penelitian yang dapat dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk melaksanakan solusi numerik dengan ABM model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa menggeling di sepanjang dawai meliputi
 - a. Mencari dua nilai awal menggunakan metode Runge-Kutta orde empat
 - b. Mencari nilai k_1, k_2, k_3 , dan k_4
 - c. Menyubstitusikan nilai k_1, k_2, k_3 , dan k_4 ke persamaan x_{i+1}
 - d. Menggunakan persamaan Adams-Bashforth orde empat dalam pencarian hasil *predictor*
 - e. Menggunakan persamaan Adams-Moulton orde empat dalam pencarian hasil *corrector*
2. Untuk melakukan analisis pertumbuhan galat menggunakan metode ABM terhadap eksaknya pada model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa menggeling di sepanjang dawai meliputi
 - a. Menampilkan tabel galat dari perhitungan solusi numerik metode ABM orde empat terhadap eksaknya
 - b. Menampilkan grafik *tren* dari pertumbuhan galat dari analisis dari tabel

3. Melakukan simulasi dan interpretasi dengan tahapan-tahapan sebagai berikut:
 - a. Melakukan simulasi dari hasil solusi numerik pada model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding dengan variasi parameter massa bola dan jari-jari bola
 - b. Melakukan interpretasi tentang hasil dan kesimpulan dari solusi numerik pada model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding dengan variasi parameter massa bola dan jari-jari bola

BAB IV PEMBAHASAN

4.1 Solusi Numerik dengan ABM untuk Model Vibrasi Dawai

Pada bab ini akan dipaparkan penyelesaian numerik dari model matematika penelitian Janah dan Kusumastuti tahun 2021 yang mengalami revisi model yang mengacu pada model matematika dari penelitian McKenna tahun 1999. Model matematika pada penelitian tersebut berupa persamaan diferensial biasa orde dua yang memuat variabel tak bebas y yang merupakan simpangan dawai dan θ yang merupakan sudut simpangan dawai. Sedangkan variabel bebas pada model tersebut adalah waktu t . Berikut merupakan model matematika dari vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai :

$$\ddot{y} = -\delta \dot{y} - \lambda y + \frac{(m_b + m_d)g}{m_d} - Fr \quad (4.1)$$

$$\ddot{\theta} = -\delta \dot{\theta} - \alpha \sin \theta - \beta \cos \theta - \gamma \cos \theta \sin \theta \quad (4.2)$$

Dengan memperhatikan bahwa

$$\lambda = \frac{4 k_p}{m_d}; \alpha = \frac{\left(-\frac{1}{2}Fr + \frac{1}{2}\mu_k m_b g + \frac{1}{2}k_p \eta v\right)}{\left(\frac{2}{5}m_b r^2 + \frac{1}{3}m_d l^2\right)}; \beta = \frac{l m_b g}{2\left(\frac{2}{5}m_b r^2 + \frac{1}{3}m_d l^2\right)}; \gamma = \frac{2 k_p l^2}{\left(\frac{2}{5}m_b r^2 + \frac{1}{3}m_d l^2\right)}$$

Di mana $y_1(0) = 0$ dan $\theta_1(0) = 0$ yang artinya bahwa sudut dan lendutan dawai masih dalam keadaan diam dikarenakan massa masih berada di ujung tiang dawai (belum menggelinding). Sedangkan $y_2(0) = 0.5$ dan $\theta_2(0) = 1.2$ di mana y_2 dan θ_2 merupakan kecepatan sudut dan lendutan dawai yang dikenai massa menggelinding. Pada persamaan (4.1) dan (4.2) terdiri dari beberapa parameter yang ditentukan sebagai berikut (a) konstanta pegas dawai k_p diasumsikan memiliki besar 2600, (b) massa benda m_b diasumsikan sebesar 10 kg, (c) massa dawai m_d diasumsikan memiliki besar 250 kg, (d) koefisien gesek μ_k

diasumsikan memiliki besar 0.57, (d) suku redaman viskos δ diasumsikan memiliki besar 0.1, (e) gravitasi g diasumsikan memiliki besar 10, (f) koefisien viskositas η diasumsikan memiliki besar 0.018×10^{-3} , (g) energi potensial dorong F_r yang diasumsikan berupa konstanta yang memiliki besar 10 N, (h) Panjang dawai l diasumsikan memiliki Panjang 180 m, dan (i) kecepatan benda menggelinding (v) yang diasumsikan memiliki besar 10 m/s.

Model matematika pada persamaan (4.1) dan (4.2) masih berupa persamaan diferensial biasa orde dua, sehingga perlu direduksi ke persamaan diferensial biasa orde satu. Untuk mereduksi persamaan (4.1) ke sistem persamaan diferensial biasa orde satu, dilakukan dengan cara sebagai berikut (Robinson, 2004)

Misalkan $y = y_1$ dan $\dot{y}_1 = y_2$ maka

$$\ddot{y}_1 = \frac{d}{dt}(\dot{y}_1) = \frac{d}{dt}(y_2) = \dot{y}_2$$

$$\dot{y}_2 = -\delta y_2 - \lambda y_1 + \frac{(m_b + m_d)g}{m_d} - F_r$$

Sehingga diperoleh sistem pertama persamaan diferensial biasa orde satu, yakni

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 & , y_1(0) = 0 \\ \dot{y}_2 = -\delta y_2 - \lambda y_1 + \frac{(m_b + m_d)g}{m_d} - F_r & , y_2(0) = 0.5 \end{cases} \quad (4.3)$$

Selanjutnya dilakukan reduksi pada persamaan (4.2) ke sistem persamaan diferensial biasa orde satu

Misalkan $\theta = \theta_1$ dan $\dot{\theta}_1 = \theta_2$, maka

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{d}{dt}(\dot{\theta}_1) = \frac{d}{dt}(\theta_2) = \dot{\theta}_2$$

$$\dot{\theta}_2 = -\delta \theta_2 - \alpha \sin \theta_1 - \beta \cos \theta_1 - \gamma \cos \theta_1 \sin \theta_1$$

Sehingga diperoleh sistem kedua persamaan diferensial biasa orde satu, yakni

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \theta_2 & , \theta_1(0) = 0 \quad (4.5) \\ \dot{\theta}_2 = -\delta \theta_2 - \alpha \sin \theta_1 - \beta \cos \theta_1 - \gamma \cos \theta_1 \sin \theta_1 & , \theta_2(0) = 1.2 \quad (4.6) \end{cases}$$

4.1.1 Input Tiga Nilai Awal pada ABM menggunakan RK orde 4

Solusi numerik model vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai menggunakan Runge-Kutta orde empat akan dijabarkan pada sub bab ini. Tujuannya untuk mencari nilai awal yang akan digunakan untuk metode ABM orde empat. Berikut akan dijelaskan persamaan $y(t)$ untuk mencari nilai lendutan dawai dan persamaan $\theta(t)$ untuk mencari nilai sudut dawai.

1. Tiga Nilai Awal $y(t)$ menggunakan RK orde 4

Merujuk pada metode RK orde empat maka persamaan (4.3) dan (4.4) dituliskan dengan fungsi f dan r . Sehingga diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f &= \dot{y}_1 = y_2 \\ r &= \dot{y}_2 = -\delta y_2 - \lambda y_1 + \frac{(m_b + m_d)g}{m_d} - F_r \\ k_1 &= f(t_i, y_{1i}, y_{2i}) \\ k_1 &= y_{2i} \\ l_1 &= r(t_i, y_{1i}, y_{2i}) \\ l_1 &= -\delta y_{2i} - \lambda y_{1i} + \frac{(m_b + m_d)g}{m_d} - F_r \\ k_2 &= f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_{1i} + \frac{1}{2}hk_1, y_{2i} + \frac{1}{2}hl_1\right) \\ k_2 &= y_{2i} + \frac{1}{2}hl_1 \\ l_2 &= r\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_{1i} + \frac{1}{2}hk_1, y_{2i} + \frac{1}{2}hl_1\right) \\ l_2 &= -\delta\left(y_{2i} + \frac{1}{2}hl_1\right) - \lambda\left(y_{1i} + \frac{1}{2}hk_1\right) + \frac{(m_b + m_d)g}{m_d} - F_r \\ k_3 &= f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_{1i} + \frac{1}{2}hk_2, y_{2i} + \frac{1}{2}hl_2\right) \end{aligned}$$

$$k_3 = y_{2i} + \frac{1}{2}hl_2$$

$$l_3 = r\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_{1i} + \frac{1}{2}hk_2, y_{2i} + \frac{1}{2}hl_2\right)$$

$$l_3 = -\delta\left(y_{2i} + \frac{1}{2}hl_2\right) - \lambda\left(y_{1i} + \frac{1}{2}hk_2\right) + \frac{(m_b + m_d)g}{m_d} - F_r$$

$$k_4 = f\left(t_i + h, y_{1i} + hk_3, y_{2i} + hl_3\right)$$

$$k_4 = y_{2i} + hl_3$$

$$l_4 = r\left(t_i + h, y_{1i} + hk_3, y_{2i} + hl_3\right)$$

$$l_4 = -\delta(y_{2i} + hl_3) - \lambda(y_{1i} + hk_3) + \frac{(m_b + m_d)g}{m_d} - F_r$$

Sehingga,

$$y_{1i+1} = y_{1i} + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$y_{2i+1} = y_{2i} + \frac{1}{6}h(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$

Tiga nilai awal yang didapatkan dari perhitungan menggunakan Runge

Kutta orde 4 disajikan pada Tabel 4.1 sebagai berikut

Tabel 4.1 Nilai Awal Persamaan $y(t)$ (parameter: $t_0 = 0; y_2(0) = 0.5; y_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250; m_b = 10; F_r = 10; g = 10; k_p = 2600; \lambda = 41.6$)

$n = i$	t	$y_2(i)$	$y_1(i)$
0	0.00000000	0.50000000	0.00000000
1	0.01000000	0.50245653	0.00501402
2	0.02000000	0.50282216	0.01004216
3	0.03000000	0.50109745	0.01506350

Tiga nilai awal tersebut dapat digunakan untuk mencari solusi numerik persamaan $y(t)$ pada metode Adams Bashforth Moulton orde 4.

2. Tiga Nilai Awal $\theta(t)$ menggunakan RK orde 4

Merujuk pada metode Runge-Kutta orde empat maka (4.5) dan (4.6)

dituliskan dengan fungsi f dan r . Sehingga diperoleh sebagai berikut:

$$f = \dot{\theta}_1 = \theta_2$$

$$r = \dot{\theta}_2 = -\delta\theta_2 - \alpha \sin \theta_1 - \beta \cos \theta_1 - \gamma \cos \theta_1 \sin \theta_1$$

$$k_1 = f(t_i, \theta_{1_i}, \theta_{2_i})$$

$$k_1 = p_i$$

$$l_1 = f(t_i, \theta_{1_i}, \theta_{2_i})$$

$$l_1 = -\delta\theta_{2_i} - \alpha \sin \theta_{1_i} - \beta \cos \theta_{1_i} - \gamma \cos \theta_{1_i} \sin \theta_{1_i}$$

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, \theta_{1_i} + \frac{1}{2}hk_1, \theta_{2_i} + \frac{1}{2}hl_1\right)$$

$$k_2 = \theta_{2_i} + \frac{1}{2}hl_1$$

$$l_2 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, \theta_{1_i} + \frac{1}{2}hk_1, \theta_{2_i} + \frac{1}{2}hl_1\right)$$

$$l_2 = -\delta\left(\theta_{2_i} + \frac{1}{2}hl_1\right) - \alpha \sin \theta_1 \left(\theta_{1_i} + \frac{1}{2}hk_1\right) - \beta \cos \theta_1 \left(\theta_{1_i} + \frac{1}{2}hk_1\right) - \gamma \cos \theta_1 \left(\theta_{1_i} + \frac{1}{2}hk_1\right) \sin \theta_1 \left(\theta_{1_i} + \frac{1}{2}hk_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, \theta_{1_i} + \frac{1}{2}hk_2, \theta_{2_i} + \frac{1}{2}hl_2\right)$$

$$k_3 = \theta_{2_i} + \frac{1}{2}hl_2$$

$$l_3 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, \theta_{1_i} + \frac{1}{2}hk_2, \theta_{2_i} + \frac{1}{2}hl_2\right)$$

$$l_3 = -\delta\left(\theta_{2_i} + \frac{1}{2}hl_2\right) - \alpha \sin \theta_1 \left(\theta_{1_i} + \frac{1}{2}hk_2\right) - \beta \cos \theta_1 \left(\theta_{1_i} + \frac{1}{2}hk_2\right) - \gamma \cos \theta_1 \left(\theta_{1_i} + \frac{1}{2}hk_2\right) \sin \theta_1 \left(\theta_{1_i} + \frac{1}{2}hk_2\right)$$

$$k_4 = f(t_i + h, \theta_{1_i} + hk_3, \theta_{2_i} + hl_3)$$

$$k_4 = \theta_{2_i} + hl_3$$

$$l_4 = f(t_i + h, \theta_{1_i} + hk_3, \theta_{2_i} + hl_3)$$

$$l_4 = -\delta(\theta_{2_i} + hl_3) - \alpha \sin \theta_1 \left(\theta_{1_i} + \frac{1}{2}hk_3\right) - \beta \cos \theta_1 \left(\theta_{1_i} + \frac{1}{2}hk_3\right) - \gamma \cos \theta_1 \left(\theta_{1_i} + \frac{1}{2}hk_3\right) \sin \theta_1 \left(\theta_{1_i} + \frac{1}{2}hk_3\right)$$

Sehingga,

$$\theta_{1_{i+1}} = \theta_{1_i} + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$\theta_{2_{i+1}} = \theta_{2_i} + \frac{1}{6}h(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$

Tiga nilai awal yang didapatkan dari perhitungan menggunakan Runge Kutta orde 4 disajikan pada Tabel 4.2 sebagai berikut

Tabel 4.2 Nilai Awal $\theta(t)$ (parameter: $t_0 = 0; \theta_2(0) = 1.2; \theta_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250; m_b = 10; F_r = 10; g = 10; k_p = 2600; \mu_k = 0.57; v = 10; l = 180; r = 0.1; \alpha = 0.001582; \beta = 0.003333; \gamma = 62.399999$)

$n = i$	t	$\theta_2(i)$	$\theta_1(i)$
0	0.00000000	1.20000000	0.00000000
1	0.01000000	1.19502784	0.01198136
2	0.02000000	1.18261359	0.02387574
3	0.03000000	1.16284830	0.03560912

Tiga nilai awal tersebut dapat digunakan untuk mencari solusi numerik persamaan $\theta(t)$ pada metode Adams Bashforth Moulton orde 4.

4.1.2 Hasil Solusi Numerik Metode ABM Orde 4

Pada sub bab ini akan membahas solusi numerik menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton (ABM) orde 4 dengan 3 nilai awal yang telah diperoleh menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 pada sub bab sebelumnya

1. Solusi Numerik Persamaan $y(t)$

Untuk mencari nilai $y_1(i)$ dan $y_2(i)$ dengan $i = 4, 5, 6, \dots, n$ menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde 4 dengan memperhatikan bahwa:

$$f = \dot{y}_1 = y_2$$

$$r = \dot{y}_2 = -\delta y_2 - \lambda y_1 + \frac{(m_b + m_d)g}{m_d} - F_r$$

Saat $n = 3$ maka $t_4 = t_3 + h = 0.03 + 0.01 = 0.04$

Diketahui bahwa

$$\dot{y}_1 = y_2(i)$$

$$\dot{y}_1(0) = f(t(0), y_1(0), y_2(0)) = y_2(0) = 0.5$$

$$\dot{y}_1(1) = f(t(1), y_1(1), y_2(1)) = y_2(1) = 0.50245653$$

$$\dot{y}_1(2) = f(t(2), y_1(2), y_2(2)) = y_2(2) = 0.50282216$$

$$\dot{y}_1(3) = f(t(3), y_1(3), y_2(3)) = y_2(3) = 0.50109745$$

dan

$$\dot{y}_2 = y_1(i) = -\delta y_2 - \lambda y_1 + \frac{(m_b + m_d)g}{m_d} - F_r$$

$$\dot{y}_2(0) = r(t(0), y_1(0), y_2(0)) = -\delta y_2(0) - \lambda y_1(0) + \frac{(m_b + m_d)g}{m_d} - F_r = 0$$

$$\dot{y}_2(1) = r(t(1), y_1(1), y_2(1)) = -\delta y_2(1) - \lambda y_1(1) + \frac{(m_b + m_d)g}{m_d} - F_r$$

$$= 0.00501402$$

$$\dot{y}_2(2) = r(t(2), y_1(2), y_2(2)) = -\delta y_2(2) - \lambda y_1(2) + \frac{(m_b + m_d)g}{m_d} - F_r$$

$$= 0.01004216$$

$$\dot{y}_2(3) = r(t(3), y_1(3), y_2(3)) = -\delta y_2(3) - \lambda y_1(3) + \frac{(m_b + m_d)g}{m_d} - F_r$$

$$= 0.01506350$$

Selanjutnya mencari nilai *predictor* dan *corrector* dari persamaan lendutan dawai dengan metode Adams-Bashforth-Moulton orde 4 dengan nilai $y_1(i)$ dan $y_2(i)$ dengan $i = 0,1,2,3$ yang telah dicari

Predictor :

$$y_2(4) = y_2(3) + \frac{h}{24} (-9 y_1(0) + 37 y_1(1) - 59 y_1(2) + 55 y_1(3))$$

$$= 0.5012730849$$

$$y_1(4) = y_1(3) + \frac{h}{24} (-9 y_2(0) + 37 y_2(1) - 59 y_2(2) + 55 y_2(3))$$

$$= 0.02005714330$$

Sehingga untuk mencari $y_2(4)$ dan $y_1(4)$

$$y_2(4) = f(t(4), y_1(4), y_2(4)) = 0.5012730849$$

$$\begin{aligned} y_1(4) = r(t(4), y_1(4), y_2(4)) &= -\delta y_2(4) - \lambda y_1(4) + \frac{(m_b + m_d)g}{m_d} - F_r \\ &= -0.48450447 \end{aligned}$$

Corrector :

$$\begin{aligned} y_2(4) &= y_2(3) + \frac{h}{24} (y_1(1) - 5 y_1(2) + 19 y_1(3) + 9 y_1(4)) \\ &= 0.4993809790 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1(4) &= y_1(3) + \frac{h}{24} (y_2(1) - 5 y_2(2) + 19 y_2(3) + 9 y_2(4)) \\ &= 0.02007210627 \end{aligned}$$

Sehingga pada saat $t = 0.04$ atau iterasi keempat diperoleh nilai prediksi dari $y_2(4)$ adalah 0.5012730849 dan nilai koreksi dari $y_2(4)$ adalah 0.4993809790. Sedangkan nilai prediksi dari $y_1(4)$ adalah 0.02005714330 dan nilai koreksi dari $y_1(4)$ adalah 0.02007210627.

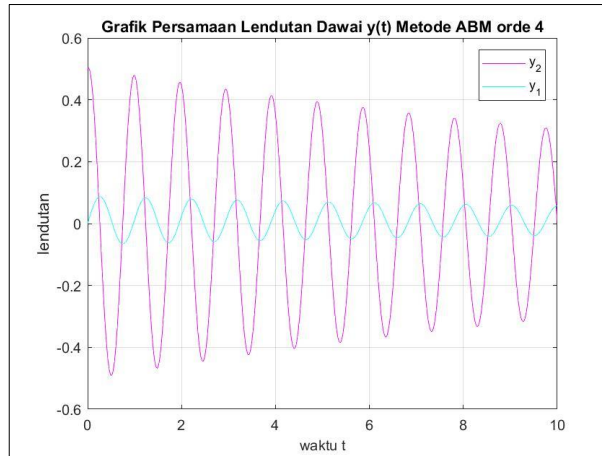
Persamaan dari lendutan dawai dengan parameter $t_0 = 0; y_2(0) = 0.5;$

$$y_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250; m_b = 10; F_r = 10; g = 10;$$

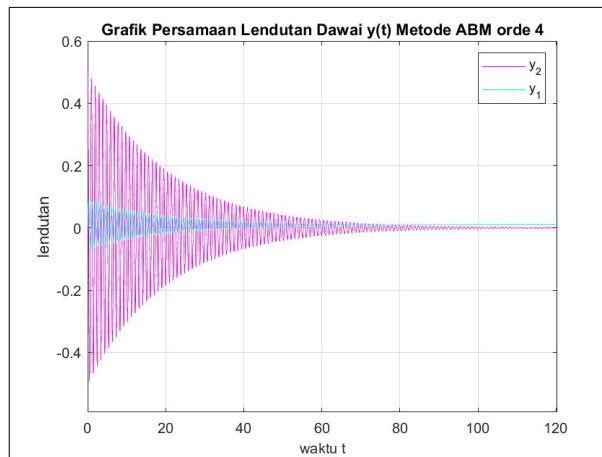
$k_p = 2600; \lambda = 41.6$ diperoleh hasil numerik sebagaimana terlampir pada

Lampiran 1. Dari sistem persamaan lendutan dawai tersebut dapat

digambarkan pada grafik berikut dengan bantuan program Matlab.



Gambar 4.1 Grafik $y(t)$ saat $t \in [0,10]$ dengan parameter: $t_0 = 0; y_2(0) = 0.5;$
 $y_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250; m_b = 10; F_r = 10; g = 10;$
 $k_p = 2600; \lambda = 41.6$



Gambar 4.2 Grafik $y(t)$ saat $t \in [0,120]$ dengan parameter: $t_0 = 0; y_2(0) = 0.5;$
 $y_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250; m_b = 10; F_r = 10; g = 10;$
 $k_p = 2600; \lambda = 41.6$

Grafik tersebut menunjukkan hasil dari simulasi persamaan lendutan dawai menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde 4. Pada grafik tersebut dapat dilihat bahwa pada saat $t \in [0,10]$ atau dalam waktu 10 detik, nilai maksimum pada y_2 sebesar 0.50282216 di $t = 0.02$ dan nilai maksimum pada y_1 sebesar 0.08663981 di $t = 0.26$. Ketika waktu lendutan dawai diperpanjang menjadi $t \in [0,120]$ atau saat detik ke 120 yang dapat

dilihat pada Gambar 4.2 menunjukkan bahwa pergerakan lendutan pada plot grafik $y(t)$ mulai stabil pada detik ke 100. Hal ini menunjukkan bahwa nilai lendutan dawai menggambarkan kondisi riilnya yaitu semakin bertambahnya waktu, maka dawai akan kembali stabil seperti posisi semula.

2. Solusi Numerik Persamaan $\theta(t)$

Untuk mencari nilai $\theta_2(i)$ dan $\theta_1(i)$ dengan $i = 4, 5, 6, \dots, n$ menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde 4 dengan memperhatikan bahwa:

$$f = \dot{\theta}_1 = \theta_2$$

$$r = \dot{\theta}_2 = -\delta\theta_2 - \alpha \sin \theta_1 - \beta \cos \theta_1 - \gamma \cos \theta_1 \sin \theta_1$$

Saat $n = 3$ maka $t_4 = t_3 + h = 0.03 + 0.01 = 0.04$

Diketahui bahwa

$$\dot{\theta}_1 = \theta_2(i)$$

$$\dot{\theta}_1(0) = f(t(0), \theta_1(0), \theta_2(0)) = \theta_2(0) = 1.2$$

$$\dot{\theta}_1(1) = f(t(1), \theta_1(1), \theta_2(1)) = \theta_2(1) = 1.19502784$$

$$\dot{\theta}_1(2) = f(t(2), \theta_1(2), \theta_2(2)) = \theta_2(2) = 1.18261359$$

$$\dot{\theta}_1(3) = f(t(3), \theta_1(3), \theta_2(3)) = \theta_2(3) = 1.16284830$$

dan

$$\dot{\theta}_2 = \theta_1(i) = -\delta\theta_2 - \alpha \sin \theta_1 - \beta \cos \theta_1 - \gamma \cos \theta_1 \sin \theta_1$$

$$\dot{\theta}_2(0) = r(t(0), \theta_1(0), \theta_2(0))$$

$$= -\delta\theta_2(0) - \alpha \sin \theta_1 - \beta \cos \theta_1 - \gamma \cos \theta_1 \sin \theta_1 = 0$$

$$\dot{\theta}_2(1) = r(t(1), \theta_1(1), \theta_2(1))$$

$$= -\delta\theta_2(1) - \alpha \sin \theta_1(1) - \beta \cos \theta_1(1) - \gamma \cos \theta_1(1) \sin \theta_1(1)$$

$$= 0.01198136$$

$$\dot{\theta}_2(2) = r(t(2), \theta_1(2), \theta_2(2))$$

$$= -\delta\theta_2(2) - \alpha \sin \theta_1(2) - \beta \cos \theta_1(2) - \gamma \cos \theta_1(2) \sin \theta_1(2)$$

$$= 0.02387574$$

$$\dot{\theta}_2(3) = r(t(3), \theta_1(3), \theta_2(3))$$

$$= -\delta\theta_2(3) - \alpha \sin \theta_1(3) - \beta \cos \theta_1(3) - \gamma \cos \theta_1(3) \sin \theta_1(3)$$

$$= 0.03560912$$

Selanjutnya mencari nilai *predictor* dan *corrector* dari persamaan sudut lendutan dawai dengan metode Adams-Bashforth-Moulton orde 4 dengan nilai $\theta_2(i)$ dan $\theta_1(i)$ dengan $i = 0,1,2,3$ yang telah dicari

Predictor :

$$\theta_2(4) = \theta_2(3) + \frac{h}{24} (-9\theta_1(0) + 37\theta_1(1) - 59\theta_1(2) + 55\theta_1(3))$$

$$= 1.163262110$$

$$\theta_1(4) = \theta_1(3) + \frac{h}{24} (-9\theta_2(0) + 37\theta_2(1) - 59\theta_2(2) + 55\theta_2(3))$$

$$= 0.04710848865$$

Sehingga untuk mencari $\theta_2(4)$ dan $\theta_1(4)$

$$\theta_2(4) = f(t(4), \theta_1(4), \theta_2(4)) = 1.163262110$$

$$\theta_1(4) = r(t(4), \theta_1(4), \theta_2(4))$$

$$= -\delta\theta_2(4) - \alpha \sin \theta_1(4) - \beta \cos \theta_1(4) - \gamma \cos \theta_1(4) \sin \theta_1(4)$$

$$= -3.054952921$$

Corrector :

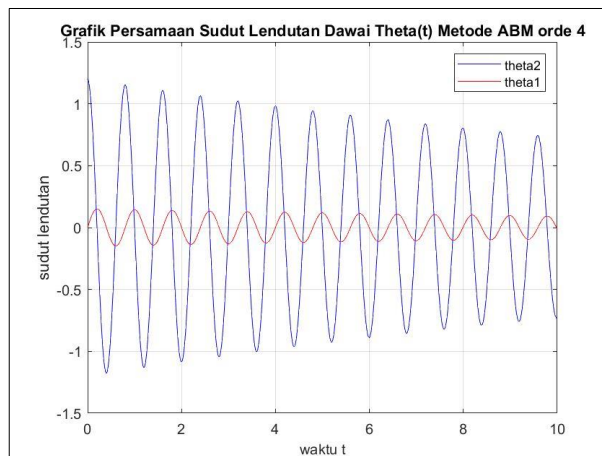
$$\theta_2(4) = \theta_2(3) + \frac{h}{24} (\theta_1(1) - 5\theta_1(2) + 19\theta_1(3) + 9\theta_1(4))$$

$$= 1.151629383$$

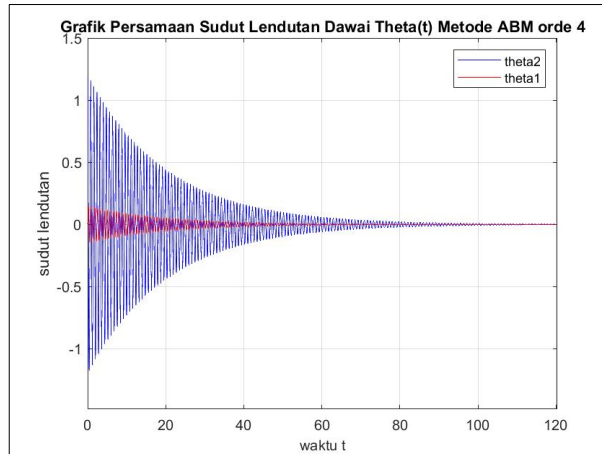
$$\theta_1(4) = \theta_1(3) + \frac{h}{24} (\theta_2(1) - 5(2) + 19\theta_2(3) + 9\theta_2(4))$$

$$= 0.04721138524$$

Sehingga pada saat $t = 0.04$ atau iterasi keempat diperoleh nilai prediksi dari $\theta_2(4)$ adalah 1.163262110 dan nilai koreksi dari $\theta_2(4)$ adalah 1.151629383. Sedangkan nilai prediksi dari $\theta_1(4)$ adalah 0.04710848865 dan nilai koreksi dari $\theta_1(4)$ adalah 0.04721138524. Persamaan dari sudut lendutan dawai dengan parameter $t_0 = 0; \theta_2(0) = 1.2; \theta_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250; m_b = 10; F_r = 10; g = 10; k_p = 2600; \mu_k = 0.57; v = 10; l = 180; r = 0.1; \alpha = 0.001582; \beta = 0.003333; \text{ dan } \gamma = 62.399999$ diperoleh hasil numerik sebagaimana terlampir pada Lampiran 2. Dari sistem persamaan lendutan dawai tersebut dapat digambarkan pada grafik berikut dengan bantuan program Matlab.



Gambar 4.3 Grafik $\theta(t)$ saat $t \in [0,10]$ dengan parameter: $t_0 = 0; \theta_2(0) = 1.2; \theta_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250; m_b = 10; F_r = 10; g = 10; k_p = 2600; \mu_k = 0.57; v = 10; l = 180; r = 0.1; \alpha = 0.001582; \beta = 0.003333; \gamma = 62.399999$

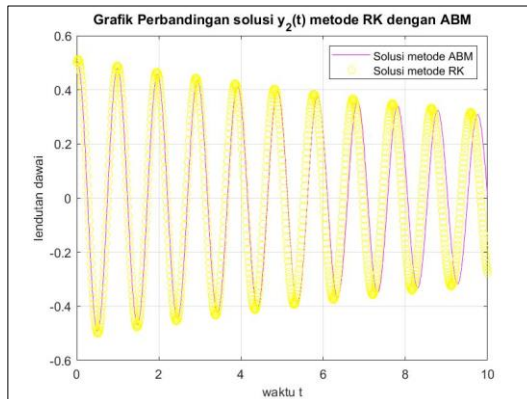


Gambar 4.4 Grafik $\theta(t)$ saat $t \in [0, 120]$ dengan parameter: $t_0 = 0$; $\theta_2(0) = 1.2$; $\theta_1(0) = 0$; $h = 0.01$; $\delta = 0.1$; $m_d = 250$; $m_b = 10$; $F_r = 10$; $g = 10$; $k_p = 2600$; $\mu_k = 0.57$; $v = 10$; $l = 180$; $r = 0.1$; $\alpha = 0.001582$; $\beta = 0.003333$; $\gamma = 62.399999$

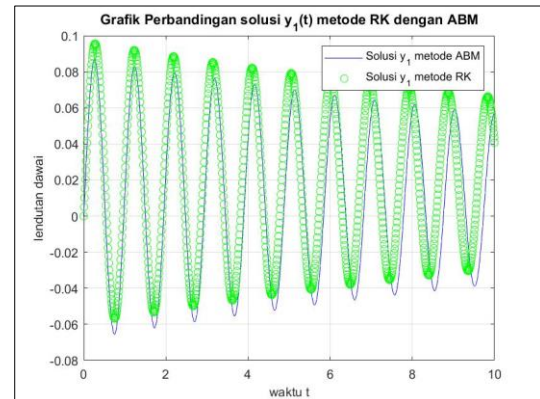
Grafik tersebut menunjukkan hasil simulasi persamaan sudut lendutan dawai menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde 4. Pada grafik tersebut dapat dilihat bahwa saat $t \in [0, 10]$, nilai maksimum pada θ_2 sebesar 1.19503142 di $t = 0.01$ dan nilai maksimum pada θ_1 sebesar 0.15099725 di $t = 0.20$. Ketika waktu lendutan dawai diperpanjang menjadi $t \in [0, 120]$ atau saat detik ke 120 yang dapat dilihat pada Gambar 4.4 menunjukkan bahwa pergerakan lendutan pada plot grafik $\theta(t)$ mulai stabil pada detik ke 100. Hal ini menunjukkan bahwa nilai dari sudut lendutan dawai menggambarkan kondisi riilnya yaitu semakin bertambahnya waktu, maka sudut pada dawai berangsur-angsur akan kembali stabil seperti posisi semula.

4.1.3 Perbandingan Solusi Runge Kutta dan Adams-Bashforth-Moulton

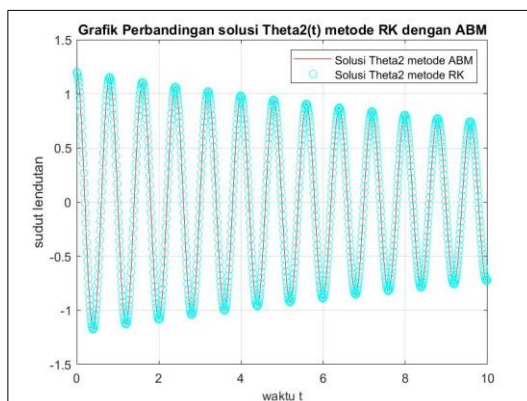
Perbandingan solusi $y(t)$ dan $\theta(t)$ model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai dapat digambarkan pada profil grafik berikut ini:



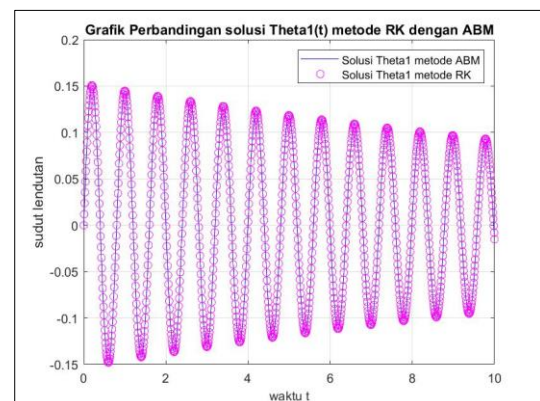
Gambar 4.5 Perbandingan Grafik Solusi $y_2(t)$ metode RK dan ABM (parameter: $t_0 = 0; y_2(0) = 0.5; y_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250; m_b = 10; F_r = 10; g = 10; k_p = 2600; \lambda = 41.6$)



Gambar 4.6 Perbandingan Grafik Solusi $y_1(t)$ metode RK dan ABM (parameter: $t_0 = 0; y_2(0) = 0.5; y_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250; m_b = 10; F_r = 10; g = 10; k_p = 2600; \lambda = 41.6$)



Gambar 4.7 Perbandingan Grafik Solusi $\theta_2(t)$ metode RK dan ABM (parameter: $t_0 = 0; \theta_2(0) = 1.2; \theta_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250; m_b = 10; F_r = 10; g = 10; k_p = 2600; \mu_k = 0.57; v = 10; l = 180; r = 0.1; \alpha = 0.001582; \beta = 0.003333; \gamma = 62.399999$)



Gambar 4.8 Perbandingan Grafik Solusi $\theta_1(t)$ metode RK dan ABM (parameter: $t_0 = 0; \theta_2(0) = 1.2; \theta_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250; m_b = 10; F_r = 10; g = 10; k_p = 2600; \mu_k = 0.57; v = 10; l = 180; r = 0.1; \alpha = 0.001582; \beta = 0.003333; \gamma = 62.399999$)

Pada Gambar 4.5 sampai dengan Gambar 4.8 merupakan hasil perbandingan solusi numerik persamaan $y(t)$ dan $\theta(t)$ model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai menggunakan metode Runge-Kutta dan Adams-Bashforth-Moulton (ABM). Pada grafik tersebut dapat dilihat bahwa tidak terlihat perbedaan grafik secara jelas. Sehingga untuk menunjukkan perbedaan yang signifikan antara hasil numerik dengan menggunakan 2 metode tersebut dapat dilihat pada tabel berikut ini:

Tabel 4.3 Tabel Perbandingan Nilai Persamaan $y(t)$ metode RK dan ABM (parameter: $t_0 = 0$; $y_2(0) = 0.5$; $y_1(0) = 0$; $h = 0.01$; $\delta = 0.1$; $m_d = 250$; $m_b = 10$; $F_r = 10$; $g = 10$; $k_p = 2600$; ; $\lambda = 41.6$)

i	t	Solusi y_2 metode ABM	Solusi y_2 metode RK	Selisih nilai y_2 dari ABM dan RK
1	0.01	0.50245653	0.50245653	0.00000000
2	0.02	0.50282216	0.50282216	0.00000000
3	0.03	0.50109745	0.50109745	0.00000000
4	0.04	0.49729167	0.49729167	0.00000000
5	0.05	0.49142271	0.49142271	0.00000000
6	0.06	0.48351702	0.48351702	0.00000000
7	0.07	0.47360951	0.47360951	0.00000000
8	0.08	0.46174334	0.46174335	0.00000001
9	0.09	0.44796981	0.44796983	0.00000002
10	0.10	0.43234807	0.43234810	0.00000003
11	0.11	0.41494489	0.41494494	0.00000005
12	0.12	0.39583439	0.39583446	0.00000007
13	0.13	0.37509772	0.37509780	0.00000009
14	0.14	0.35282268	0.35282279	0.00000011
15	0.15	0.32910341	0.32910354	0.00000013
16	0.16	0.30403993	0.30404008	0.00000015
17	0.17	0.27773776	0.27773794	0.00000018
18	0.18	0.25030747	0.25030768	0.00000021
19	0.19	0.22186420	0.22186444	0.00000023
20	0.20	0.19252718	0.19252744	0.00000026

Selanjutnya perbandingan nilai $y_1(t)$ menggunakan metode Runge-Kutta dan Adams-Bashforth-Moulton (ABM) dapat disajikan pada tabel 4.4

Tabel 4.4 Tabel Perbandingan Nilai Persamaan $y_1(t)$ metode RK dan ABM (parameter: $t_0 = 0; y_2(0) = 0.5; y_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250; m_b = 10; F_r = 10; g = 10; k_p = 2600; ; \lambda = 41.6$)

i	t	Solusi y_1 metode ABM	Solusi y_1 metode RK	Selisih nilai y_1 dari ABM dan RK
1	0.01	0.00501402	0.00501402	0.00000000
2	0.02	0.01004216	0.01004216	0.00000000
3	0.03	0.01506350	0.01506350	0.00000000
4	0.04	0.02005717	0.02005717	0.00000000
5	0.05	0.02500246	0.02500245	0.00000001
6	0.06	0.02987884	0.02987883	0.00000001
7	0.07	0.03466613	0.03466613	0.00000002
8	0.08	0.03934451	0.03934449	0.00000002
9	0.09	0.04389464	0.04389462	0.00000002
10	0.10	0.04829774	0.04829772	0.00000002
11	0.11	0.05253567	0.05253564	0.00000003
12	0.12	0.05659096	0.05659093	0.00000003
13	0.13	0.06044694	0.06044691	0.00000003
14	0.14	0.06408779	0.06408776	0.00000003
15	0.15	0.06749858	0.06749855	0.00000003
16	0.16	0.07066538	0.07066534	0.00000004
17	0.17	0.07357525	0.07357522	0.00000003
18	0.18	0.07621637	0.07621634	0.00000003
19	0.19	0.07857803	0.07857800	0.00000003
20	0.20	0.08065068	0.08065065	0.00000003

Sedangkan perbandingan nilai $\theta_2(t)$ menggunakan metode Runge-Kutta dan Adams-Bashforth-Moulton (ABM) dapat disajikan pada tabel 4.5

Tabel 4.5 Tabel Perbandingan Nilai Persamaan $\theta(t)$ metode RK dan ABM (parameter: $t_0 = 0; \theta_2(0) = 1.2; \theta_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250; m_b = 10; F_r = 10; g = 10; k_p = 2600; \mu_k = 0.57; v = 10; l = 180; r = 0.1; \alpha = 0.001582; \beta = 0.003333; \gamma = 62.399999$)

i	t	Solusi θ_2 metode ABM	Solusi θ_2 metode RK	Selisih nilai θ_2 dari ABM dan RK
1	0.01	1.19502784	1.19502784	0.00000000
2	0.02	1.18261359	1.18261359	0.00000000
3	0.03	1.16284830	1.16284830	0.00000000
4	0.04	1.13587245	1.13587246	0.00000001
5	0.05	1.10187434	1.10187439	0.00000005
6	0.06	1.06108810	1.06108822	0.00000012
7	0.07	1.01379115	1.01379136	0.00000021
8	0.08	0.96030135	0.96030167	0.00000032
9	0.09	0.90097393	0.90097438	0.00000045
10	0.10	0.83619814	0.83619873	0.00000059
11	0.11	0.76639385	0.76639459	0.00000074

12	0.12	0.69200812	0.69200902	0.00000090
13	0.13	0.61351175	0.61351281	0.00000106
14	0.14	0.53139595	0.53139718	0.00000123
15	0.15	0.44616916	0.44617055	0.00000139
16	0.16	0.35835395	0.35835550	0.00000155
17	0.17	0.26848413	0.26848584	0.00000171
18	0.18	0.17710204	0.17710389	0.00000185
19	0.19	0.08475591	0.08475790	0.00000199
20	0.20	-0.00800259	-0.00800047	0.00000212

Selanjutnya perbandingan nilai $\theta_1(t)$ menggunakan metode Runge-Kutta

dan Adams-Bashforth-Moulton (ABM) dapat disajikan pada tabel 4.6

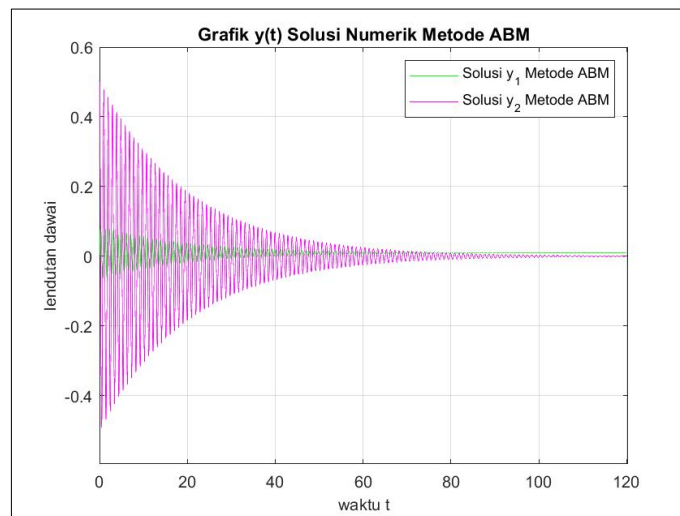
Tabel 4.6 Tabel Perbandingan Nilai Persamaan $\theta_1(t)$ metode RK dan ABM (parameter: $t_0 = 0; \theta_2(0) = 1.2; \theta_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250; m_b = 10; F_r = 10; g = 10; k_p = 2600; \mu_k = 0.57; v = 10; l = 180; r = 0.1; \alpha = 0.001582; \beta = 0.003333; \gamma = 62.399999$)

i	t	Solusi θ_1 metode ABM	Solusi θ_1 metode RK	Selisih nilai θ_1 dari ABM dan RK
1	0.01	0.01198136	0.01198136	0.00000000
2	0.02	0.02387574	0.02387574	0.00000000
3	0.03	0.03560912	0.03560912	0.00000000
4	0.04	0.04710867	0.04710865	0.00000002
5	0.05	0.05830318	0.05830315	0.00000003
6	0.06	0.06912356	0.06912350	0.00000006
7	0.07	0.07950327	0.07950320	0.00000007
8	0.08	0.08937876	0.08937868	0.00000008
9	0.09	0.09868986	0.09868976	0.00000010
10	0.10	0.10738010	0.10737999	0.00000011
11	0.11	0.11539708	0.11539697	0.00000011
12	0.12	0.12269273	0.12269261	0.00000012
13	0.13	0.12922356	0.12922344	0.00000012
14	0.14	0.13495092	0.13495079	0.00000013
15	0.15	0.13984113	0.13984101	0.00000012
16	0.16	0.14386569	0.14386557	0.00000012
17	0.17	0.14700137	0.14700126	0.00000011
18	0.18	0.14923034	0.14923024	0.00000010
19	0.19	0.15054021	0.15054013	0.00000008
20	0.20	0.15092409	0.15092403	0.00000006

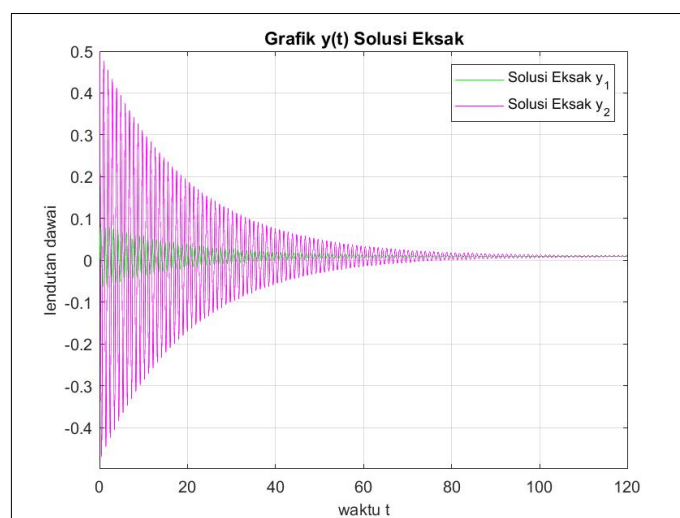
4.2 Analisis Galat Sejati Metode ABM terhadap Solusi Eksaknya

4.2.1 Analisis Galat Persamaan $y(t)$

Galat Sejati Persamaan lendutan dawai $y(t)$ diperoleh dari selisih antara solusi numerik metode ABM dengan solusi eksaknya. Berikut ini adalah grafik perbandingan antara solusi numerik metode ABM dengan solusi eksaknya:



Gambar 4.9 Grafik solusi $y(t)$ menggunakan metode ABM saat $t \in [0, 120]$ dengan parameter: $t_0 = 0$; $y_2(0) = 0.5$; $y_1(0) = 0$; $h = 0.01$; $\delta = 0.1$; $m_d = 250$; $m_b = 10$; $F_r = 10$; $g = 10$; $k_p = 2600$; $\lambda = 41.6$



Gambar 4.10 Grafik solusi eksak $y(t)$ saat $t \in [0, 120]$ dengan parameter: $t_0 = 0$; $y_2(0) = 0.5$; $y_1(0) = 0$; $\delta = 0.1$; $m_d = 250$; $m_b = 10$; $F_r = 10$; $g = 10$; $k_p = 2600$; $\lambda = 41.6$

Gambar 4.9 dan Gambar 4.10 menggambarkan hasil dari perbandingan antara grafik lendutan dawai $y(t)$ untuk solusi numerik metode ABM dan solusi eksaknya. Pada grafik tersebut dapat dilihat bahwa tidak terlihat perbedaan grafik secara jelas. Sehingga untuk menunjukkan perbedaan yang signifikan antara hasil numerik metode ABM dengan solusi eksaknya dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 4.7 Tabel Nilai Galat pada Persamaan $y_2(t)$ (parameter: $t_0 = 0; y_2(0) = 0.5; y_1(0) = 0; \delta = 0.1; m_d = 250; m_b = 10; F_r = 10; g = 10; k_p = 2600; \lambda = 41.6$)

i	t	Solusi Eksak (\bar{y}_2)	Solusi ABM (y_2)	$ \bar{y}_2(i) - y_2(i) $
1	0.01	0.49898069	0.50245653	0.00347584
2	0.02	0.49592837	0.50282216	0.00689379
3	0.03	0.49085774	0.50109745	0.01023971
4	0.04	0.48379191	0.49729167	0.01349976
5	0.05	0.47476224	0.49142271	0.01666047
6	0.06	0.46380822	0.48351702	0.01970880
7	0.07	0.45097731	0.47360951	0.02263220
8	0.08	0.43632470	0.46174334	0.02541864
9	0.09	0.41991314	0.44796981	0.02805667
10	0.10	0.40181258	0.43234807	0.03053549
11	0.11	0.38209996	0.41494489	0.03284493
12	0.12	0.36085881	0.39583439	0.03497558
13	0.13	0.33817896	0.37509772	0.03691876
14	0.14	0.31415611	0.35282268	0.03866657
15	0.15	0.28889145	0.32910341	0.04021196
16	0.16	0.26249124	0.30403993	0.04154869
17	0.17	0.23506634	0.27773776	0.04267142
18	0.18	0.20673177	0.25030747	0.04357570
19	0.19	0.17760621	0.22186420	0.04425799
20	0.20	0.14781152	0.19252718	0.04471566

Selanjutnya nilai galat y_1 solusi metode ABM dengan solusi eksaknya pada model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa menggeling di sepanjang dawai dapat dilihat pada tabel berikut:

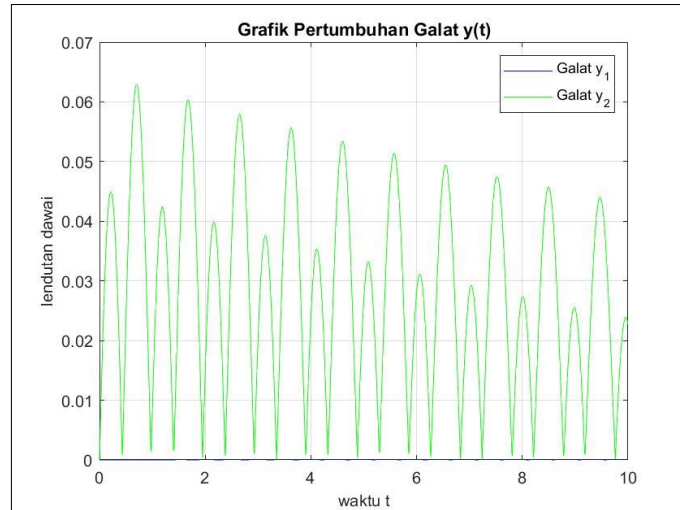
Tabel 4.8 Tabel Nilai Galat pada Persamaan $y_1(t)$ (parameter: $t_0 = 0; y_2(0) = 0.5; y_1(0) = 0; \delta = 0.1; m_d = 250; m_b = 10; F_r = 10; g = 10; k_p = 2600; \lambda = 41.6$)

i	t	Solusi Eksak (\bar{y}_1)	Solusi ABM (y_1)	$ \bar{y}_1(i) - y_1(i) $
1	0.01	0.00501402	0.00501402	0.00000000
2	0.02	0.01004216	0.01004216	0.00000000
3	0.03	0.01506350	0.01506350	0.00000000
4	0.04	0.02005717	0.02005717	0.00000000
5	0.05	0.02500246	0.02500246	0.00000000
6	0.06	0.02987884	0.02987884	0.00000000
7	0.07	0.03466612	0.03466613	0.00000001
8	0.08	0.03934450	0.03934451	0.00000001
9	0.09	0.04389463	0.04389464	0.00000001
10	0.10	0.04829773	0.04829774	0.00000001
11	0.11	0.05253565	0.05253567	0.00000002
12	0.12	0.05659094	0.05659096	0.00000002
13	0.13	0.06044692	0.06044694	0.00000002
14	0.14	0.06408777	0.06408779	0.00000002
15	0.15	0.06749856	0.06749858	0.00000002
16	0.16	0.07066535	0.07066538	0.00000003
17	0.17	0.07357522	0.07357525	0.00000003
18	0.18	0.07621634	0.07621637	0.00000003
19	0.19	0.07857800	0.07857803	0.00000003
20	0.20	0.08065065	0.08065068	0.00000003

Pada Tabel 4.7 dan Tabel 4.8 ditunjukkan bahwa nilai galat pada persamaan $y(t)$ didapatkan dengan menghitung selisih solusi eksak dan solusi numerik menggunakan metode ABM dengan bantuan *software* matlab. Nilai galat dari y_2 disajikan pada tabel $|\bar{y}_2(i) - y_2(i)|$, di mana $y_2(i)$ merupakan nilai solusi numerik metode ABM ke i dan $\bar{y}_2(i)$ merupakan nilai eksaknya ke i . Sedangkan nilai galat dari y disajikan pada tabel $|\bar{y}_1(i) - y_1(i)|$, di mana $y_1(i)$ merupakan nilai solusi numerik metode ABM ke i dan $\bar{y}_1(i)$ merupakan nilai eksaknya ke i . Berikut ini adalah grafik pertumbuhan dari nilai galat $y(t)$ dengan parameter:

$$t_0 = 0; y_2(0) = 0.5; y_1(0) = 0; \delta = 0.1; m_d = 250; m_b = 10; F_r = 10;$$

$$g = 10; k_p = 2600; \lambda = 41.6$$

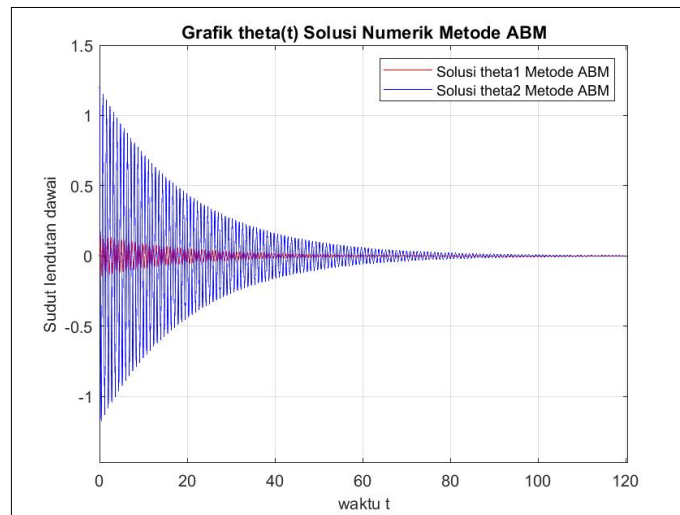


Gambar 4.11 Grafik pertumbuhan galat $y(t)$ (parameter: $t_0 = 0; y_2(0) = 0.5; y_1(0) = 0; \delta = 0.1; m_d = 250; m_b = 10; F_r = 10; g = 10; k_p = 2600; \lambda = 41.6$)

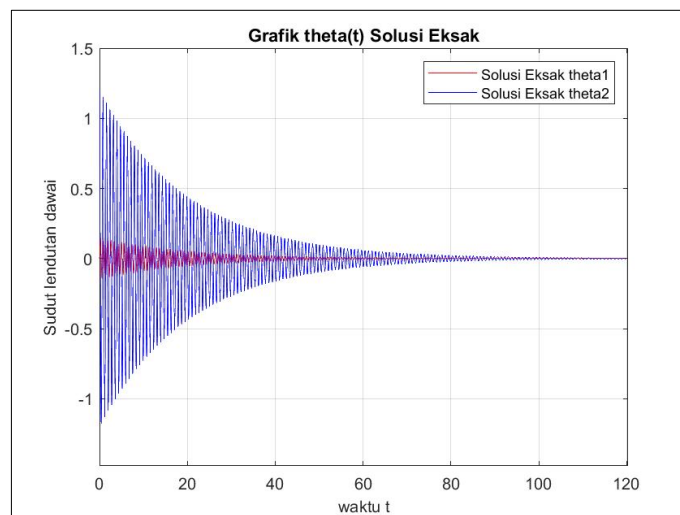
Pada grafik tersebut menunjukkan bahwa nilai galat berangsur-angsur naik hingga mencapai pada y_2 sebesar 0.04495143 pada waktu $t = 0.22$, kemudian berangsur-angsur turun hingga mencapai nilai 0.00075062 di $t = 0.43$ dan kemudian naik kembali pada saat $t = 0.44$, sedangkan pada y_1 nilai galat berangsur-angsur naik hingga mencapai pada y_1 sebesar 0.00000003 pada waktu $t = 0.22$, kemudian berangsur-angsur turun hingga mencapai nilai 0.00000000 di $t = 0.32$ dan kemudian naik kembali pada saat $t = 0.33$ pada rentang waktu $t \in [0, 10]$. Hal ini menunjukkan bahwa Gambar 4.11 sesuai pada nilai galat yang disajikan pada Tabel 4.7 dan Tabel 4.8 yakni bersifat fluktuatif, dibuktikan dengan grafik yang memiliki kenaikan dan penurunan yang teratur.

4.2.2 Analisis Galat Persamaan $\theta(t)$

Galat Sejati Persamaan sudut lendutan dawai $\theta(t)$ diperoleh dari selisih antara solusi numerik metode ABM dengan solusi eksaknya. Berikut ini adalah grafik perbandingan antara solusi numerik metode ABM dengan solusi eksaknya:



Gambar 4.12 Grafik solusi $\theta(t)$ menggunakan metode ABM saat $t \in [0, 120]$ dengan parameter: $t_0 = 0$; $\theta_2(0) = 1.2$; $\theta_1(0) = 0$; $h = 0.01$; $\delta = 0.1$; $m_d = 250$; $m_b = 10$; $F_r = 10$; $g = 10$; $k_p = 2600$; $\mu_k = 0.57$; $v = 10$; $l = 180$; $r = 0.1$; $\alpha = .001582$; $\beta = 0.003333$; $\gamma = 62.399999$



Gambar 4.13 Grafik solusi eksak $\theta(t)$ saat $t \in [0, 120]$ dengan parameter: $t_0 = 0$; $\theta_2(0) = 1.2$; $\theta_1(0) = 0$; $\delta = 0.1$; $m_d = 250$; $m_b = 10$; $F_r = 10$; $g = 10$; $k_p = 2600$; $\mu_k = 0.57$; $v = 10$; $l = 180$; $r = 0.1$; $\alpha = 0.001582$; $\beta = 0.003333$; $\gamma = 62.399999$

Gambar 4.12 dan Gambar 4.13 menggambarkan hasil dari perbandingan antara grafik sudut lendutan dawai $\theta(t)$ untuk solusi numerik metode ABM dan solusi eksaknya. Pada grafik tersebut dapat dilihat bahwa tidak terlihat perbedaan grafik secara jelas. Sehingga untuk menunjukkan perbedaan yang signifikan antara hasil numerik metode ABM dengan solusi eksaknya dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 4.9 Nilai Galat pada Persamaan $\theta_2(t)$ dengan parameter: $t_0 = 0; \theta_2(0) = 1.2; \theta_1(0) = 0; \delta = 0.1; m_d = 250; m_b = 10; F_r = 10; g = 10; k_p = 2600; \mu_k = 0.57; v = 10; l = 180; r = 0.1; \alpha = 0.001582; \beta = 0.003333; \gamma = 62.399999$

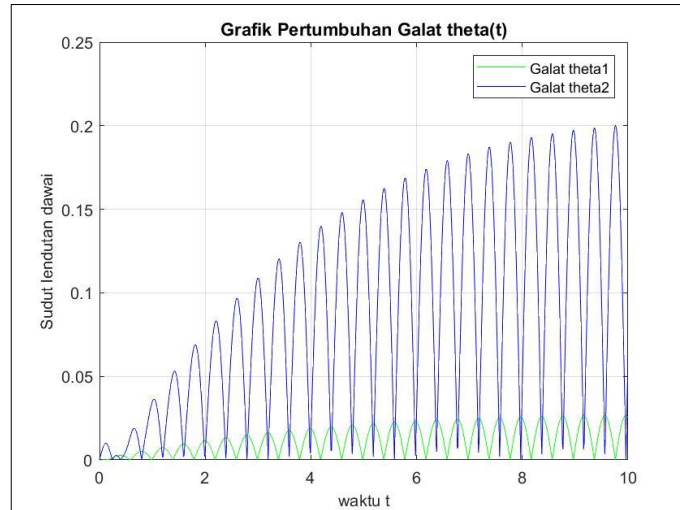
i	t	Solusi eksak ($\bar{\theta}_2$)	Solusi ABM (θ_2)	$ \bar{\theta}_2(i) - \theta_2(i) $
1	0.01	1.19625893	1.19502784	0.00123109
2	0.02	1.18506404	1.18261359	0.00245044
3	0.03	1.16649255	1.16284830	0.00364424
4	0.04	1.14066761	1.13587245	0.00479516
5	0.05	1.10775747	1.10187434	0.00588312
6	0.06	1.06797435	1.06108810	0.00688624
7	0.07	1.02157312	1.01379115	0.00778197
8	0.08	0.96884966	0.96030135	0.00854831
9	0.09	0.91013896	0.90097393	0.00916502
10	0.10	0.84581298	0.83619814	0.00961484
11	0.11	0.77627833	0.76639385	0.00988448
12	0.12	0.70197370	0.69200812	0.00996558
13	0.13	0.62336703	0.61351175	0.00985529
14	0.14	0.54095266	0.53139595	0.00955671
15	0.15	0.45524814	0.44616916	0.00907898
16	0.16	0.36679102	0.35835395	0.00843707
17	0.17	0.27613548	0.26848413	0.00765135
18	0.18	0.18384885	0.17710204	0.00674681
19	0.19	0.09050805	0.08475591	0.00575214
20	0.20	-0.00330400	-0.00800259	0.00469859

Selanjutnya nilai galat $\theta_1(t)$ metode ABM dengan solusi eksaknya pada model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 4.10 Nilai Galat pada Persamaan $\theta_1(t)$ dengan parameter: $t_0 = 0; \theta_2(0) = 1.2; \theta_1(0) = 0; \delta = 0.1; m_d = 250; m_b = 10; F_r = 10; g = 10; k_p = 2600; \mu_k = 0.57; v = 10; l = 180; r = 0.1; \alpha = 0.001582; \beta = 0.003333; \gamma = 62.399999$

i	t	Solusi eksak ($\bar{\theta}$)	Solusi ABM (θ)	$ \bar{\theta}(i) - \theta(i) $
1	0.01	0.01198137	1.19502784	0.00000000
2	0.02	0.02387573	1.18261359	0.00000000
3	0.03	0.03560904	1.16284830	0.00000007
4	0.04	0.04710831	1.13587245	0.00000036
5	0.05	0.05830209	1.10187434	0.00000109
6	0.06	0.06912091	1.06108810	0.00000265
7	0.07	0.07949769	1.01379115	0.00000558
8	0.08	0.08936820	0.96030135	0.00001057
9	0.09	0.09867140	0.90097393	0.00001846
10	0.10	0.10734988	0.83619814	0.00003023
11	0.11	0.11535015	0.76639385	0.00004694
12	0.12	0.12262302	0.69200812	0.00006971
13	0.13	0.12912388	0.61351175	0.00009968
14	0.14	0.13481298	0.53139595	0.00013793
15	0.15	0.13965567	0.44616916	0.00018546
16	0.16	0.14362259	0.35835395	0.00024309
17	0.17	0.14668991	0.26848413	0.00031146
18	0.18	0.14883939	0.17710204	0.00039095
19	0.19	0.15005855	0.08475591	0.00048165
20	0.20	0.15034073	-0.00800259	0.00058336

Pada Tabel 4.9 dan Tabel 4.10 ditunjukkan bahwa nilai galat pada persamaan $\theta(t)$ didapatkan dengan menghitung selisih nilai eksak dan solusi numerik menggunakan metode ABM dengan bantuan *software* matlab. Nilai galat dari θ_2 disajikan pada tabel $|\bar{\theta}_2(i) - \theta_2(i)|$, di mana $\theta_2(i)$ merupakan nilai solusi numerik ke i dan $\bar{\theta}_2(i)$ merupakan nilai eksak ke i . Sedangkan untuk nilai galat dari θ_1 disajikan pada tabel $|\bar{\theta}_1(i) - \theta_1(i)|$, di mana $\theta_1(i)$ merupakan nilai solusi numerik ke i dan $\bar{\theta}_1(i)$ merupakan nilai eksak ke i . Berikut ini adalah grafik pertumbuhan dari nilai galat $y(t)$ dengan parameter: $t_0 = 0; \theta_2(0) = 1.2; \theta_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250; m_b = 10; F_r = 10; g = 10; k_p = 2600; \mu_k = 0.57; v = 10; l = 180; r = 0.1; \alpha = 0.001582; \beta = 0.003333; \gamma = 62.399999$



Gambar 4.14 grafik pertumbuhan dari nilai galat $\theta(t)$ dengan parameter: $t_0 = 0$; $\theta_2(0) = 1.2$; $\theta_1(0) = 0$; $h = 0.01$; $\delta = 0.1$; $m_d = 250$; $m_b = 10$; $F_r = 10$; $g = 10$; $k_p = 2600$; $\mu_k = 0.57$; $v = 10$; $l = 180$; $r = 0.1$; $\alpha = 0.001582$; $\beta = 0.003333$; $\gamma = 62.399999$

Gambar 4.14 menggambarkan hasil dari grafik pertumbuhan galat pada persamaan sudut lendutan dawai. Pada grafik tersebut menunjukkan bahwa nilai galat $\theta_2(t)$ berangsur-angsur naik hingga mencapai pada θ_2 sebesar 0.00996558 pada waktu $t = 0.12$, kemudian berangsur-angsur turun hingga mencapai nilai 0.00033891 di $t = 0,25$ dan kemudian naik kembali pada saat $t = 0.26$ pada rentang waktu $t \in [0,10]$. Hal ini menunjukkan bahwa Gambar 4.14 sesuai pada nilai galat yang disajikan pada Tabel 4.8 yakni bersifat fluktuatif, dibuktikan dengan grafik yang memiliki kenaikan dan penurunan yang teratur.

4.3 Simulasi dan Interpretasi Solusi Numerik Variasi Parameter

Variasi Parameter yang digunakan pada model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai ini berupa massa benda (m_b) yakni 20 kg dan jari-jari benda yang menggelinding (r) yakni 10 m. Sehingga

hasil dari solusi numerik pada model tersebut menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde 4 adalah sebagai berikut:

4.3.1 Solusi Numerik $y(t)$ dengan Variasi Parameter m_b

Berikut ini adalah Tiga nilai awal yang diperoleh menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 yang disajikan pada Tabel 4.5:

Tabel 4.11 Nilai Awal Persamaan $y(t)$ dengan Variasi Parameter ($t_0 = 0; y_2(0) = 0.5; y_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250; m_b = 20; F_r = 10; g = 10; k_p = 2700; \lambda = 43.2$)

$n = i$	t	$y_2(i)$	$y_1(i)$
0	0.00000000	0.50000000	0.00000000
1	0.01000000	0.50641160	0.00503387
2	0.02000000	0.51063098	0.01012092
3	0.03000000	0.51264211	0.01523913

Selanjutnya untuk mencari nilai $y_1(i)$ dan $y_2(i)$ dengan $i = 4, 5, 6, \dots, n$ menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde 4 pada saat $t = 0.04$ atau iterasi keempat diperoleh dengan mencari nilai *predictor* dan *corrector* dari persamaan lendutan dawai sebagai berikut:

Predictor :

$$y_2(4) = y_2(3) + \frac{h}{24}(-9 y_1(0) + 37 y_1(1) - 59 y_1(2) + 55 y_1(3))$$

$$= 0.5128201396$$

$$y_1(4) = y_1(3) + \frac{h}{24}(-9 y_2(0) + 37 y_2(1) - 59 y_2(2) + 55 y_2(3))$$

$$= 0.02036634560$$

Sehingga untuk mencari $y_2(4)$ dan $y_1(4)$

$$y_2(4) = f(t(4), y_1(4), y_2(4)) = 0.5128201396$$

$$\begin{aligned}
 y_1(4) &= r(t(4), y_1(4), y_2(4)) = -\delta y_2(4) - \lambda y_1(4) + \frac{(m_b + m_d)g}{m_d} - F_r \\
 &= -0.13110814
 \end{aligned}$$

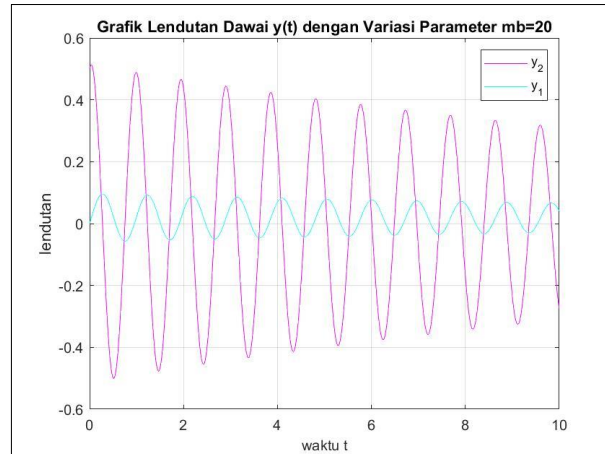
Corrector :

$$\begin{aligned}
 y_2(4) &= y_2(3) + \frac{h}{24} (y_1(1) - 5 y_1(2) + 19 y_1(3) + 9 y_1(4)) \\
 &= 0.5122521098
 \end{aligned}$$

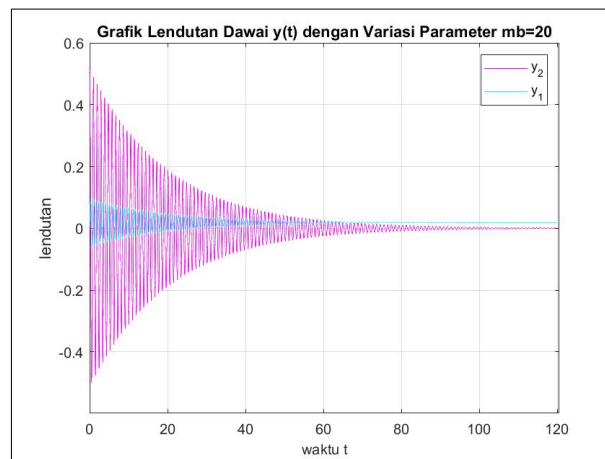
$$\begin{aligned}
 y_1(4) &= y_1(3) + \frac{h}{24} (y_2(1) - 5 y_2(2) + 19 y_2(3) + 9 y_2(4)) \\
 &= 0.02036781252
 \end{aligned}$$

Sehingga persamaan lendutan dawai dengan variasi parameter pada saat $t = 0.04$ atau iterasi keempat diperoleh nilai prediksi dari $y_2(4)$ adalah 0.5128201396 dan nilai koreksi dari $y_2(4)$ adalah 0.5122521098. Sedangkan nilai prediksi dari $y_1(4)$ adalah 0.02036634560 dan nilai koreksi dari $y_1(4)$ adalah 0.02036781252. Persamaan dari lendutan dawai dengan parameter:

$t_0 = 0; y_2(0) = 0.5; y_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250; m_b = 20; F_r = 10;$
 $g = 10; k_p = 2700; \lambda = 43.2$ diperoleh hasil numerik sebagaimana terlampir pada Lampiran 1. Dari sistem persamaan lendutan dawai tersebut dapat digambarkan pada grafik berikut dengan program Matlab.



Gambar 4.15 Grafik $y(t)$ dengan Variasi Parameter saat $t \in [0,10]$ dengan parameter: $t_0 = 0; y_2(0) = 0.5; y_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250; m_b = 20; F_r = 10; g = 10; k_p = 2700; \lambda = 43.2$



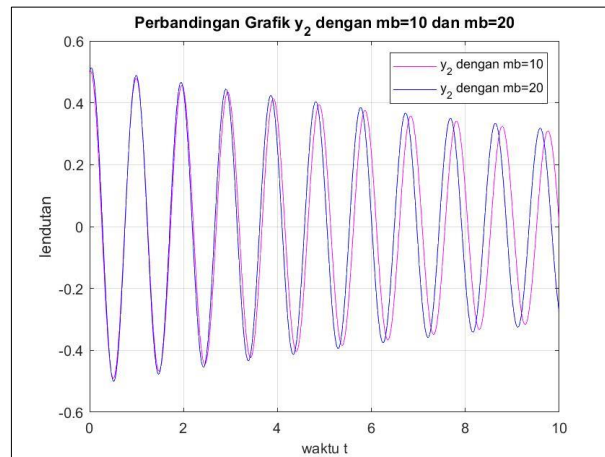
Gambar 4.16 Grafik $y(t)$ dengan Variasi Parameter saat $t \in [0,120]$ dengan parameter: $t_0 = 0; y_2(0) = 0.5; y_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250; m_b = 20; F_r = 10; g = 10; k_p = 2700; \lambda = 43.2$

Grafik tersebut menunjukkan hasil dari simulasi persamaan lendutan dawai menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde 4. Pada grafik tersebut dapat dilihat bahwa saat $t \in [0,10]$ atau dalam waktu 10 detik, nilai maksimum pada y_2 sebesar 0.51264211 di $t = 0.03$ dan nilai maksimum pada y_1 sebesar 0.09558148 di $t = 0.27$. Ketika waktu lendutan dawai diperpanjang menjadi $t \in [0,120]$ yang dapat dilihat pada Gambar 4.8 menunjukkan bahwa pergerakan lendutan pada plot grafik $y(t)$ mulai stabil pada detik ke 100.

4.3.2 Uji Sensitivitas Solusi $y(t)$ pada m_b

Uji sensitivitas pada sub bab ini dilakukan untuk mengetahui sejauh mana pentingnya parameter m_b pada persamaan lendutan dawai $y(t)$. Berikut ini merupakan gambar dari perbandingan antara grafik $y_2(t)$ dengan parameter:

$t_0 = 0; y_2(0) = 0.5; y_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250; m_b = 10; F_r = 10;$
 $g = 10; k_p = 2600; \lambda = 41.6$ dan grafik persamaan lendutan dawai menggunakan variasi parameter $t_0 = 0; y_2(0) = 0.5; y_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250;$
 $m_b = 20; F_r = 10; g = 10; k_p = 2700; \lambda = 43.2$



Gambar 4.17 Perbandingan Grafik $y_2(t)$ Persamaan Lendutan Dawai (parameter: $t_0 = 0; y_2(0) = 0.5; y_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250; F_r = 10; g = 10$) dengan variasi parameter $m_b = 10$ dan $m_b = 20$

Grafik tersebut menunjukkan hasil dari perbandingan grafik $y_2(t)$ pada persamaan lendutan dawai menggunakan metode ABM orde 4 dengan variasi parameter $m_b = 10$ dan $m_b = 20$. Pada grafik tersebut dapat dilihat bahwa pada saat $t \in [0, 10]$ nilai maksimum pada y_2 dengan $m_b = 10$ adalah 0.50282216 pada saat $t = 0.02$ sedangkan nilai maksimum pada y_2 dengan $m_b = 20$ adalah 0.51264211 pada saat $t = 0.03$. Perbandingan solusi numerik dari $y_2(t)$ dapat disajikan pada Tabel 4.6 berikut:

Tabel 4.12 Perbandingan Solusi Numerik $y_2(t)$ dengan Parameter $t_0 = 0; y_2(0) = 0.5; y_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250; F_r = 10; g = 10$ dengan variasi $m_b = 10$ dan $m_b = 20$

i	t	$y_2(t)$ dengan $m_b = 10$	$y_2(t)$ dengan $m_b = 20$
1	0.01	0.50245653	0.50641160
2	0.02	0.50282216	0.51063098
3	0.03	0.50109745	0.51264211
4	0.04	0.49729167	0.51243853
5	0.05	0.49142271	0.51002331
6	0.06	0.48351702	0.50540911
7	0.07	0.47360951	0.49861802
8	0.08	0.46174334	0.48968154
9	0.09	0.44796981	0.47864038
10	0.10	0.43234807	0.46554430

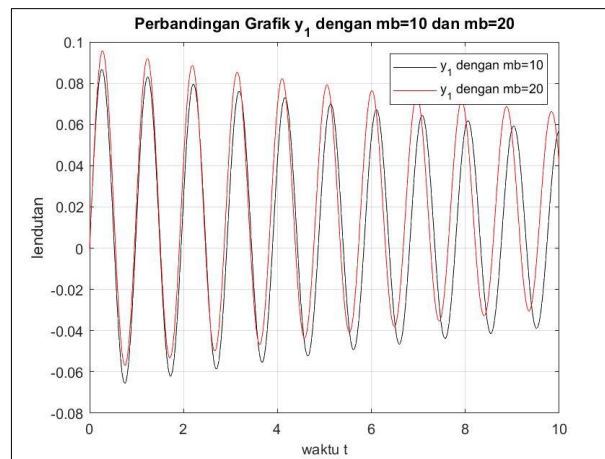
Sedangkan perbandingan antara grafik $y_1(t)$ dengan parameter:

$$t_0 = 0; y_2(0) = 0.5; y_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250; m_b = 10; F_r = 10;$$

$g = 10; k_p = 2600; \lambda = 41.6$ dan grafik persamaan lendutan dawai menggunakan

variasi parameter $t_0 = 0; y_2(0) = 0.5; y_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250;$

$m_b = 20; F_r = 10; g = 10; k_p = 2700; \lambda = 43.2$ disajikan pada Gambar 4.12



Gambar 4.18 Perbandingan Grafik $y_1(t)$ Persamaan Lendutan Dawai (parameter: $t_0 = 0; y_2(0) = 0.5; y_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.01; m_d = 250; F_r = 10; g = 10$) dengan variasi parameter $m_b = 10$ dan $m_b = 20$

Grafik tersebut menunjukkan hasil dari perbandingan grafik $y_1(t)$ pada persamaan lendutan dawai menggunakan metode ABM orde 4 dengan variasi

parameter $m_b = 10$ dan $m_b = 20$. Pada grafik tersebut dapat dilihat bahwa pada saat $t \in [0,10]$ nilai maksimum pada y_1 dengan $m_b = 10$ adalah 0.08663981 pada saat $t = 0.26$ sedangkan nilai maksimum pada y_1 dengan $m_b = 20$ adalah 0.09558148 pada saat $t = 0.27$. Perbandingan Solusi Numerik dari $y_1(t)$ dapat disajikan pada Tabel 4.7 berikut:

Tabel 4.13 Perbandingan Solusi Numerik $y_1(t)$ dengan Parameter $t_0 = 0; y_2(0) = 0.5; y_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250; F_r = 10; g = 10$ dengan variasi $m_b = 10$ dan $m_b = 20$

i	t	$y_1(t)$ dengan $m_b = 10$	$y_1(t)$ dengan $m_b = 20$
1	0.01	0.00501402	0.00503387
2	0.02	0.01004216	0.01012092
3	0.03	0.01506350	0.01523913
4	0.04	0.02005717	0.02036638
5	0.05	0.02500246	0.02548053
6	0.06	0.02987884	0.03055952
7	0.07	0.03466613	0.03558146
8	0.08	0.03934451	0.04052474
9	0.09	0.04389464	0.04536808
10	0.10	0.04829774	0.05009070

Dari solusi numerik dan perbandingan grafik persamaan lendutan vibrasi dawai pada $y_1(t)$ dan $y_2(t)$ dengan variasi parameter $m_b = 10$ dan $m_b = 20$ menunjukkan bahwa massa benda (m_b) yang melewati dawai mempengaruhi amplitudo yang terjadi pada lendutan dawai. Pada simulasi ini menunjukkan bahwa semakin besar massa yang melewati dawai maka amplitudo yang terjadi pada dawai semakin besar.

4.3.3 Solusi Numerik $\theta(t)$ Variasi Parameter r pada $m_b = 10$

Berikut ini adalah Tiga nilai awal yang diperoleh menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 yang disajikan pada Tabel 4.6:

Tabel 4.14 Nilai Awal $\theta(t)$ Variasi Parameter: $t_0 = 0; \theta_2(0) = 1.2; \theta_1(0) = 0;$
 $h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250; m_b = 10; F_r = 10; g = 10; k_p = 2600; \mu_k = 0.57;$
 $v = 10; l = 180; r = 10; \alpha = 0.00158203; \beta = 00333283; \gamma = 62.39075692$

$n = i$	t	$\theta_2(i)$	$\theta_1(i)$
0	0.00000000	1.20000000	0.00000000
1	0.01000000	1.19502840	0.01198136
2	0.02000000	1.18261581	0.02387575
3	0.03000000	1.16285325	0.03560917

Selanjutnya untuk mencari nilai $\theta_1(i)$ dan $\theta_2(i)$ dengan $i = 4, 5, 6, \dots, n$ menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde 4 pada saat $t = 0.04$ atau iterasi keempat diperoleh dengan mencari nilai *predictor* dan *corrector* dari persamaan lendutan dawai sebagai berikut:

Predictor :

$$\begin{aligned}\theta_2(4) &= \theta_2(3) + \frac{h}{24}(-9\theta_1(0) + 37\theta_1(1) - 59\theta_1(2) + 55\theta_1(3)) \\ &= 1.163267061\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_1(4) &= \theta_1(3) + \frac{h}{24}(-9\theta_2(0) + 37\theta_2(1) - 59\theta_2(2) + 55\theta_2(3)) \\ &= 0.04710860615\end{aligned}$$

Sehingga untuk mencari $\theta_1(4)$ dan $\theta_2(4)$

$$\theta_2(4) = f(t(4), \theta_1(4), \theta_2(4)) = 1.163267061$$

$$\begin{aligned}\theta_1(4) &= r(t(4), \theta_1(4), \theta_2(4)) \\ &= -\delta\theta_2(4) - \alpha \sin \theta_1(4) - \beta \cos \theta_1(4) - \gamma \cos \theta_1(4) \sin \theta_1(4) \\ &= -3.054525470\end{aligned}$$

Corrector :

$$\theta_2(4) = \theta_2(3) + \frac{h}{24}(\theta_1(1) - 5\theta_1(2) + 19\theta_1(3) + 9\theta_1(4)) = 1.151635936$$

$$\begin{aligned}\theta_1(4) &= \theta_1(3) + \frac{h}{24}(\theta_2(1) - 5\theta_2(2) + 19\theta_2(3) + 9\theta_2(4)) \\ &= 0.04721148860\end{aligned}$$

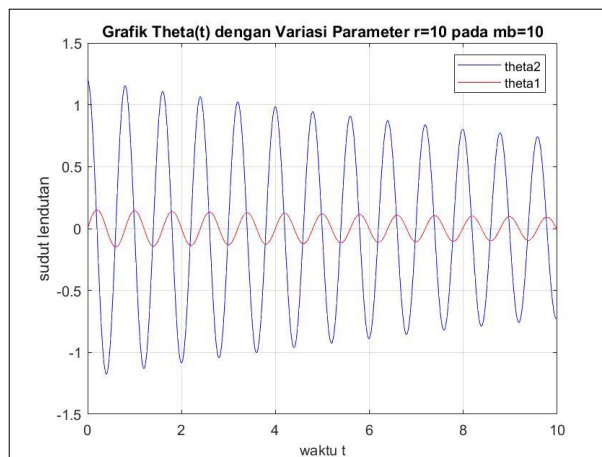
Sehingga persamaan lendutan dawai dengan variasi parameter pada saat $t = 0.04$ atau iterasi keempat diperoleh nilai prediksi dari $\theta_2(4)$ adalah 1.163267061 dan nilai koreksi dari $\theta_2(4)$ adalah 1.151635936. Sedangkan nilai prediksi dari $\theta_1(4)$ adalah 0.04710860615 dan nilai koreksi dari $\theta_1(4)$ adalah 0.04721148860. Persamaan dari sudut lendutan dawai dengan parameter:

$$t_0 = 0; \theta_2(0) = 1.2; \theta_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250; m_b = 10;$$

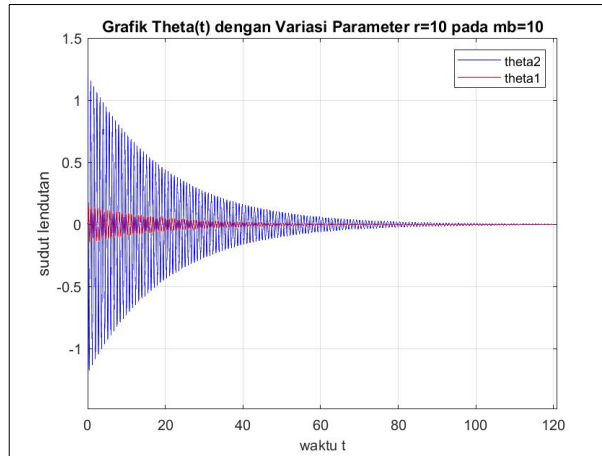
$$F_r = 10; g = 10; k_p = 2600; \mu_k = 0.57; v = 10; l = 180; r = 10;$$

$$\alpha = 0.00158203; \beta = 00333283; \gamma = 62.39075692$$

diperoleh hasil numerik sebagaimana terlampir pada Lampiran 2. Dari sistem persamaan sudut lendutan dawai tersebut dapat digambarkan pada grafik berikut dengan program Matlab.



Gambar 4.19 Grafik $\theta(t)$ dengan Variasi Parameter saat $t \in [0,10]$ dengan parameter: $t_0 = 0; \theta_2(0) = 1.2; \theta_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250; m_b = 10; F_r = 10; g = 10; k_p = 2600; \mu_k = 0.57; v = 10; l = 180; r = 10; \alpha = 0.00158203; \beta = 00333283; \gamma = 62.39075692$



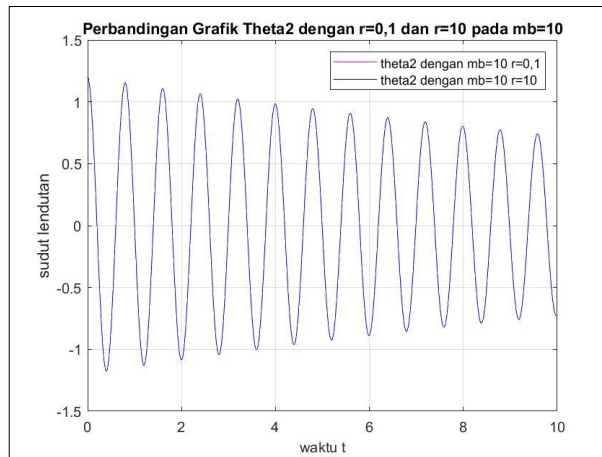
Gambar 4.20 Grafik $\theta(t)$ dengan Variasi Parameter saat $t \in [0,120]$ dengan parameter: $t_0 = 0; \theta_2(0) = 1.2; \theta_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250; m_b = 10; F_r = 10; g = 10; k_p = 2600; \mu_k = 0.57; v = 10; l = 180; r = 10; \alpha = 0.00158203; \beta = 00333283; \gamma = 62.39075692$

Grafik tersebut menunjukkan hasil dari simulasi persamaan sudut lendutan dawai menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde 4. Pada grafik tersebut dapat dilihat bahwa saat $t \in [0,10]$ atau dalam waktu 10 detik, nilai maksimum pada θ_2 sebesar 1.19502840 di $t = 0.01$ dan nilai maksimum pada θ_1 sebesar 0.15093536 di $t = 0.20$. Ketika waktu lendutan dawai diperpanjang menjadi $t \in [0,120]$ yang dapat dilihat pada Gambar 4.8 menunjukkan bahwa pergerakan lendutan pada plot grafik $\theta(t)$ mulai stabil pada detik ke 100.

4.3.4 Uji Sensitivitas Solusi $\theta(t)$ Parameter r pada $m_b = 10$

Uji sensitivitas pada sub bab ini dilakukan untuk mengetahui sejauh mana pentingnya parameter r pada $m_b = 10$ pada persamaan sudut lendutan dawai $\theta(t)$. Berikut ini merupakan gambar dari perbandingan antara grafik $\theta_2(t)$ dengan $t_0 = 0; \theta_2(0) = 1.2; \theta_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250; m_b = 10; F_r = 10; g = 10; k_p = 2600; \mu_k = 0.57; v = 10; l = 180; r = 0.1;$

$\alpha = 0.001582$; $\beta = 0.003333$; $\gamma = 62.399999$ dan grafik persamaan sudut lendutan dawai menggunakan variasi parameter $t_0 = 0$; $\theta_2(0) = 1.2$; $\theta_1(0) = 0$;
 $h = 0.01$; $\delta = 0.1$; $m_d = 250$; $m_b = 10$; $F_r = 10$; $g = 10$; $k_p = 2600$; $\mu_k = 0.57$;
 $v = 10$; $l = 180$; $r = 10$; $\alpha = 0.00158203$; $\beta = 00333283$; $\gamma = 62.39075692$



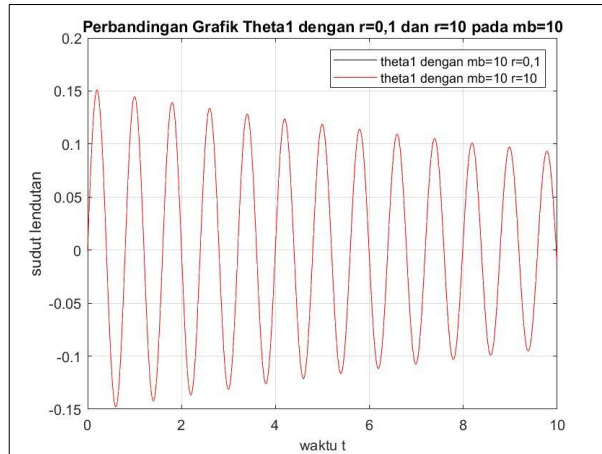
Gambar 4.21 Perbandingan Grafik $\theta_2(t)$ Persamaan Sudut Lendutan Dawai (parameter: $t_0 = 0$; $\theta_2(0) = 1.2$; $\theta_1(0) = 0$; $h = 0.01$; $\delta = 0.1$; $m_d = 250$; $m_b = 10$; $F_r = 10$; $g = 10$; $k_p = 2600$; $\mu_k = 0.57$; $v = 10$; $l = 180$) dengan variasi parameter $r = 0,1$ dan $r = 10$

Grafik tersebut menunjukkan hasil dari perbandingan grafik $\theta_2(t)$ pada persamaan sudut lendutan dawai menggunakan metode ABM orde 4 dengan variasi parameter $r = 0,1$ dan $r = 10$ pada $m_b = 10$. Pada grafik tersebut dapat dilihat bahwa pada saat $t \in [0,10]$ nilai maksimum pada θ_2 dengan $r = 0,1$ adalah 1.19502784 pada saat $t = 0.01$ sedangkan nilai maksimum pada θ_2 dengan $r = 10$ adalah 1.19502840 pada saat $t = 0.01$. Solusi Numerik dari $\theta_2(t)$ dapat disajikan pada Tabel 4.15 berikut:

Tabel 4.15 Perbandingan Solusi Numerik $\theta_2(t)$ (parameter: $t_0 = 0; \theta_2(0) = 1.2; \theta_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250; m_b = 10; F_r = 10; g = 10; k_p = 2600; \mu_k = 0.57; v = 10; l = 180$) dengan variasi parameter $r = 0,1$ dan $r = 10$

i	t	$\theta_2(t)$ dengan $r = 0,1$ pada $m_b = 10$	$\theta_2(t)$ dengan $r = 10$ pada $m_b = 10$
1	0.01	1.19502784	1.19502840
2	0.02	1.18261359	1.18261581
3	0.03	1.16284830	1.16285325
4	0.04	1.13587245	1.13588116
5	0.05	1.10187434	1.10188781
6	0.06	1.06108810	1.06110725
7	0.07	1.01379115	1.01381682
8	0.08	0.96030135	0.96033431
9	0.09	0.90097393	0.90101483
10	0.10	0.83619814	0.83624755

Sedangkan perbandingan antara grafik $\theta_1(t)$ dengan parameter: $t_0 = 0; \theta_2(0) = 1.2; \theta_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250; m_b = 10; F_r = 10; g = 10; k_p = 2600; \mu_k = 0.57; v = 10; l = 180; r = 0.1; \alpha = 0.001582; \beta = 0.003333; \gamma = 62.399999$ dan grafik persamaan sudut lendutan dawai menggunakan variasi parameter $t_0 = 0; \theta_2(0) = 1.2; \theta_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250; m_b = 10; F_r = 10; g = 10; k_p = 2600; \mu_k = 0.57; v = 10; l = 180; r = 10; \alpha = 0.00158203; \beta = 0.00333283; \gamma = 62.39075692$ disajikan pada Gambar 4.22 berikut



Gambar 4.22 Perbandingan Grafik $\theta_1(t)$ Persamaan Sudut Lendutan Dawai (parameter: $t_0 = 0$; $\theta_2(0) = 1.2$; $\theta_1(0) = 0$; $h = 0.01$; $\delta = 0.1$; $m_d = 250$; $m_b = 10$; $F_r = 10$; $g = 10$; $k_p = 2600$; $\mu_k = 0.57$; $v = 10$; $l = 180$) dengan variasi parameter $r = 0,1$ dan $r = 10$

Grafik tersebut menunjukkan hasil dari perbandingan grafik $\theta_1(t)$ pada persamaan sudut lendutan dawai menggunakan metode ABM orde 4 dengan variasi parameter $r = 0,1$ dan $r = 10$ pada $m_b = 10$. Pada grafik tersebut dapat dilihat bahwa pada saat $t \in [0,10]$ nilai maksimum pada θ_1 dengan $r = 0,1$ adalah 0.15092409 pada saat $t = 0.20$ sedangkan nilai maksimum pada θ_1 dengan $r = 10$ adalah 0.15093536 pada saat $t = 0.20$. Solusi Numerik dari $\theta_1(t)$ dapat disajikan pada Tabel 4.16 berikut:

Tabel 4.16 Perbandingan Solusi Numerik $\theta_1(t)$ (parameter: $t_0 = 0$; $\theta_2(0) = 1.2$; $\theta_1(0) = 0$; $h = 0.01$; $\delta = 0.1$; $m_d = 250$; $m_b = 10$; $F_r = 10$; $g = 10$; $k_p = 2600$; $\mu_k = 0.57$; $v = 10$; $l = 180$) dengan variasi parameter $r = 0,1$ dan $r = 10$

i	t	$\theta_1(t)$ dengan $r = 0,1$ pada $m_b = 10$	$\theta_1(t)$ dengan $r = 10$ pada $m_b = 10$
1	0.01	0.01198136	0.01198136
2	0.02	0.02387574	0.02387575
3	0.03	0.03560912	0.03560917
4	0.04	0.04710867	0.04710879
5	0.05	0.05830318	0.05830341
6	0.06	0.06912356	0.06912395
7	0.07	0.07950327	0.07950388
8	0.08	0.08937876	0.08937967
9	0.09	0.09868986	0.09869113
10	0.10	0.10738010	0.10738183

Dari solusi numerik dan perbandingan grafik persamaan sudut lendutan vibrasi dawai pada $\theta_1(t)$ dan $\theta_2(t)$ dengan variasi parameter $r = 0,1$ dan $r = 10$ menunjukkan bahwa jari-jari benda (r) yang melewati dawai mempengaruhi amplitudo yang terjadi pada sudut lendutan dawai. Pada simulasi ini menunjukkan bahwa semakin besar jari-jari benda (r) yang melewati dawai maka amplitudo yang terjadi pada dawai semakin besar.

4.3.5 Solusi Numerik $\theta(t)$ Variasi Parameter r pada $m_b = 20$

Berikut ini adalah Tiga nilai awal yang diperoleh menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 yang disajikan pada Tabel 4.17:

Tabel 4.17 Nilai Awal Persamaan $\theta(t)$ dengan Variasi Parameter: $t_0 = 0; \theta_2(0) = 1.2; \theta_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250; m_b = 20; F_r = 10; g = 10; k_p = 2700; \mu_k = 0.57; v = 10; l = 180; r = 10; \alpha = 0.00348183; \beta = 006664691; \gamma = 64.78080568$

$n = i$	t	$\theta_2(i)$	$\theta_1(i)$
0	0.00000000	1.20000000	0.00000000
1	0.01000000	1.19485188	0.01198072
2	0.02000000	1.18197877	0.02387127
3	0.03000000	1.16147819	0.03559486

Selanjutnya untuk mencari nilai $\theta_2(i)$ dan $\theta_1(i)$ dengan $i = 4,5,6, \dots, n$ menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde 4 pada saat $t = 0.04$ atau iterasi keempat diperoleh dengan mencari nilai *predictor* dan *corrector* dari persamaan lendutan dawai sebagai berikut:

Predictor :

$$\begin{aligned} \theta_2(4) &= \theta_2(3) + \frac{h}{24} (-9 \theta_1(0) + 37 \theta_1(1) - 59 \theta_1(2) + 55 \theta_1(3)) \\ &= 1.161891773 \end{aligned}$$

$$\theta_1(4) = \theta_1(3) + \frac{h}{24} (-9 \theta_2(0) + 37 \theta_2(1) - 59 \theta_2(2) + 55 \theta_2(3))$$

$$= 0.04707572358$$

Sehingga untuk mencari $\theta_2(4)$ dan $\theta_1(4)$

$$\theta_2(4) = f(t(4), \theta_1(4), \theta_2(4)) = \theta_2(4) = 1.161891773$$

$$\theta_1(4) = r(t(4), \theta_1(4), \theta_2(4))$$

$$= -\delta\theta_2(4) - \alpha \sin \theta_1(4) - \beta \cos \theta_1(4) - \gamma \cos \theta_1(4) \sin \theta_1(4)$$

$$= -3.168110100$$

Corrector :

$$\theta_2(4) = \theta_2(3) + \frac{h}{24} (\theta_1(1) - 5\theta_1(2) + 19\theta_1(3) + 9\theta_1(4)) = 1.149834830$$

$$\theta_1(4) = \theta_1(3) + \frac{h}{24} (\theta_2(1) - 5\theta_2(2) + 19\theta_2(3) + 9\theta_2(4))$$

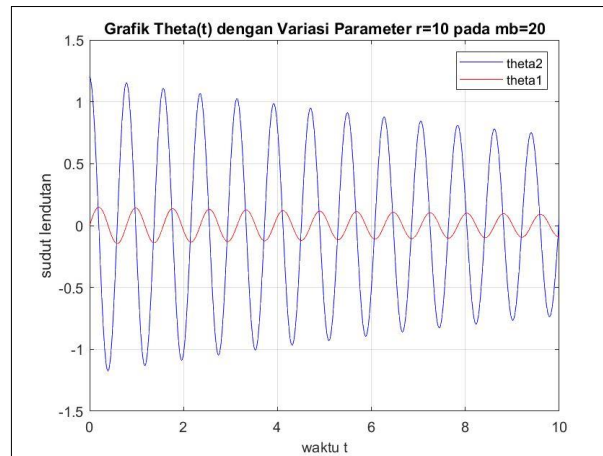
$$= 0.04718238900$$

Sehingga persamaan lendutan dawai dengan variasi parameter pada saat $t = 0.04$ atau iterasi keempat diperoleh nilai prediksi dari $\theta_2(4)$ adalah 1.161891773 dan nilai koreksi dari $\theta_2(4)$ adalah 1.149834830. Sedangkan nilai prediksi dari $\theta_1(4)$ adalah 0.04707572358 dan nilai koreksi dari $\theta_1(4)$ adalah 0.04718238900. Persamaan dari sudut lendutan dawai dengan parameter:

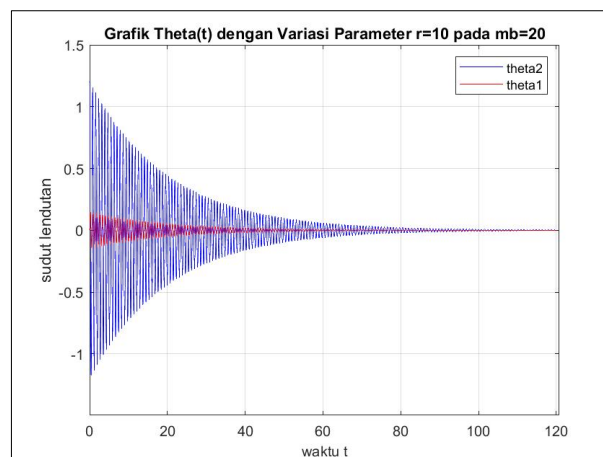
$$t_0 = 0; \theta_2(0) = 1.2; \theta_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250; m_b = 20;$$

$$F_r = 10; g = 10; k_p = 2700; \mu_k = 0.57; v = 10; l = 180; r = 10;$$

$\alpha = 0.00348183$; $\beta = 0.06664691$; $\gamma = 64.78080568$ diperoleh hasil numerik sebagaimana terlampir pada Lampiran 3. Dari sistem persamaan sudut lendutan dawai tersebut dapat digambarkan pada grafik berikut dengan program Matlab.



Gambar 4.23 Grafik $\theta(t)$ dengan Variasi Parameter saat $t \in [0,10]$ dengan parameter: $t_0 = 0; \theta_2(0) = 1.2; \theta_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250; m_b = 20; F_r = 10; g = 10; k_p = 2700; \mu_k = 0.57; v = 10; l = 180; r = 10; \alpha = 0.00348183; \beta = 006664691; \gamma = 64.78080568$



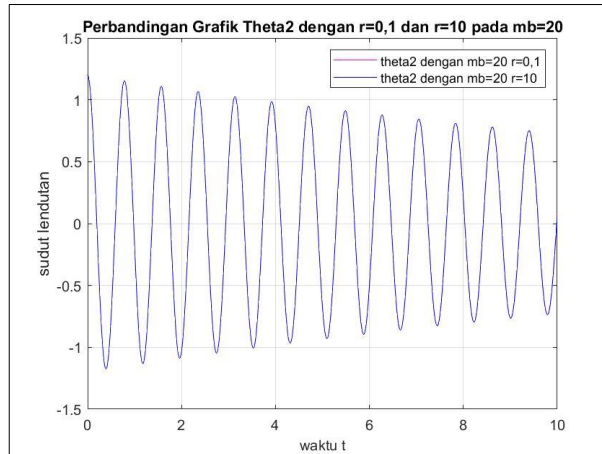
Gambar 4.24 Grafik $\theta(t)$ dengan Variasi Parameter saat $t \in [0,120]$ dengan parameter: $t_0 = 0; \theta_2(0) = 1.2; \theta_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250; m_b = 20; F_r = 10; g = 10; k_p = 2700; \mu_k = 0.57; v = 10; l = 180; r = 10; \alpha = 0.00348183; \beta = 006664691; \gamma = 64.78080568$

Grafik tersebut menunjukkan hasil dari simulasi persamaan sudut lendutan dawai menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde 4. Pada grafik tersebut dapat dilihat bahwa saat $t = [0,10]$ atau dalam waktu 10 detik, nilai maksimum pada θ_2 sebesar 1.19485188 di $t = 0.01$ dan nilai maksimum pada θ_1 sebesar 0.14798109 di $t = 0.20$. Ketika waktu lendutan dawai diperpanjang

menjadi $t = [0,120]$ atau saat detik ke 120 yang dapat dilihat pada Gambar 4.8 menunjukkan bahwa pergerakan lendutan pada plot grafik $\theta(t)$ mulai stabil pada detik ke 100. Pada simulasi ini massa benda yang melewati dawai sebesar 20 kg mempengaruhi titik stabil pada sudut lendutan dawai dan amplitudo yang terjadi pada sudut lendutan dawai.

4.3.6 Uji Sensitivitas Solusi $\theta(t)$ Parameter r pada $m_b = 20$

Uji sensitivitas pada sub bab ini dilakukan untuk mengetahui sejauh mana pentingnya parameter r pada $m_b = 20$ pada persamaan sudut lendutan dawai $\theta(t)$. Berikut ini merupakan gambar dari perbandingan antara grafik $\theta_2(t)$ dengan $t_0 = 0; \theta_2(0) = 1.2; \theta_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250;$
 $m_b = 20; F_r = 10; g = 10; k_p = 2700; \mu_k = 0.57; v = 10; l = 180; r = 0.1;$
 $\alpha = 0.00348286; \beta = 0.00666666; \gamma = 64.799998$ dan grafik persamaan sudut lendutan dawai menggunakan variasi parameter $t_0 = 0; \theta_2(0) = 1.2;$
 $\theta_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250; m_b = 20; F_r = 10; g = 10; k_p = 2700;$
 $\mu_k = 0.57; v = 10; l = 180; r = 10; \alpha = 0.00348183; \beta = 0.006664691;$
 $\gamma = 64.78080568$



Gambar 4.25 Perbandingan Grafik $\theta_2(t)$ Persamaan Sudut Lendutan Dawai (parameter: $t_0 = 0; \theta_2(0) = 1.2; \theta_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250; m_b = 20; F_r = 10; g = 10; k_p = 2700; \mu_k = 0.57; v = 10; l = 180;$) dengan variasi parameter $r = 0,1$ dan $r = 10$

Grafik tersebut menunjukkan hasil dari perbandingan grafik $\theta_2(t)$ pada persamaan sudut lendutan dawai menggunakan metode ABM orde 4 dengan variasi parameter $r = 0,1$ dan $r = 10$ pada $m_b = 10$. Pada grafik tersebut dapat dilihat bahwa pada saat $t \in [0,10]$ nilai maksimum pada θ_2 dengan $r = 0,1$ adalah 1.19485071 pada saat $t = 0.01$ sedangkan nilai maksimum pada θ_2 dengan $r = 10$ adalah 1.19485188 pada saat $t = 0.01$. Solusi Numerik dari $\theta_2(t)$ dapat disajikan pada Tabel 4.18 berikut:

Tabel 4.18 Perbandingan Solusi Numerik $\theta_2(t)$ (parameter: $t_0 = 0; \theta_2(0) = 1.2; \theta_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250; m_b = 20; F_r = 10; g = 10; k_p = 2700; \mu_k = 0.57; v = 10; l = 180$) dengan variasi parameter $r = 0,1$ dan $r = 10$

i	t	$\theta_2(t)$ dengan $r = 0,1$ pada $m_b = 20$	$\theta_2(t)$ dengan $r = 10$ pada $m_b = 20$
1	0.01	1.19485071	1.19485188
2	0.02	1.18197416	1.18197877
3	0.03	1.16146789	1.16147819
4	0.04	1.13348256	1.13350069
5	0.05	1.09822017	1.09824816
6	0.06	1.05593186	1.05597162
7	0.07	1.00691517	1.00696843
8	0.08	0.95151091	0.95157923
9	0.09	0.89009979	0.89018452
10	0.10	0.82309876	0.82320102

Sedangkan perbandingan antara grafik $\theta_1(t)$ dengan parameter:

$$t_0 = 0; \theta_2(0) = 1.2; \theta_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250; m_b = 20;$$

$$F_r = 10; g = 10; k_p = 2600; \mu_k = 0.57; v = 10; l = 180; r = 0.1;$$

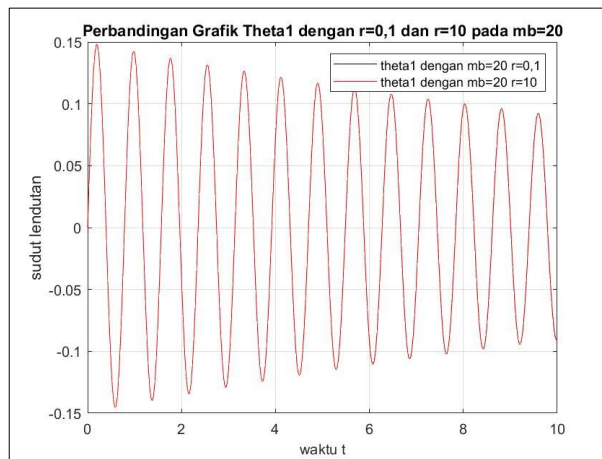
$$\alpha = 0.00348286; \beta = 0.00666666; \gamma = 64.799998 \text{ dan grafik persamaan}$$

$$\text{sudut lendutan dawai menggunakan variasi parameter } t_0 = 0; \theta_2(0) = 1.2;$$

$$\theta_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250; m_b = 20; F_r = 10; g = 10;$$

$$k_p = 2600; \mu_k = 0.57; v = 10; l = 180; r = 10; \alpha = 0.00348183;$$

$$\beta = 0.006664691; \gamma = 64.78080568 \text{ disajikan pada Gambar 4.26 berikut}$$



Gambar 4.26 Perbandingan Grafik $\theta_1(t)$ Persamaan Sudut Lendutan Dawai (parameter: $t_0 = 0; \theta_2(0) = 1.2; \theta_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250; m_b = 20; F_r = 10; g = 10; k_p = 2700; \mu_k = 0.57; v = 10; l = 180$) dengan variasi parameter $r = 0,1$ dan $r = 10$

Grafik tersebut menunjukkan hasil dari perbandingan grafik $\theta_1(t)$ pada persamaan sudut lendutan dawai menggunakan metode ABM orde 4 dengan variasi parameter $r = 0,1$ dan $r = 10$ pada $m_b = 10$. Pada grafik tersebut dapat dilihat bahwa pada saat $t \in [0,10]$ nilai maksimum pada θ_1 dengan $r = 0,1$ adalah 0.14795790 pada saat $t = 0.20$ sedangkan nilai maksimum pada θ_1 dengan

$r = 10$ adalah 0.14798109 pada saat $t = 0.20$. Solusi Numerik dari $\theta_1(t)$ dapat disajikan pada Tabel 4.6 berikut:

Tabel 4.19 Solusi Numerik $\theta_1(t)$ (parameter: $t_0 = 0; \theta_2(0) = 1.2; \theta_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250; m_b = 20; F_r = 10; g = 10; k_p = 2700; \mu_k = 0.57; v = 10; l = 180$) dengan variasi parameter $r = 0,1$ dan $r = 10$

i	t	$\theta_1(t)$ dengan $r = 0,1$ pada $m_b = 20$	$\theta_1(t)$ dengan $r = 10$ pada $m_b = 20$
1	0.01	0.01198072	0.01198072
2	0.02	0.02387124	0.02387127
3	0.03	0.03559475	0.03559486
4	0.04	0.04707568	0.04707592
5	0.05	0.05824017	0.05824064
6	0.06	0.06901669	0.06901750
7	0.07	0.07933641	0.07933768
8	0.08	0.08913372	0.08913560
9	0.09	0.09834663	0.09834927
10	0.10	0.10691711	0.10692069

Dari solusi numerik dan perbandingan grafik persamaan sudut lendutan vibrasi dawai pada $\theta_1(t)$ dan $\theta_2(t)$ dengan variasi parameter $r = 0,1$ dan $r = 10$ menunjukkan bahwa jari-jari benda (r) yang melewati dawai mempengaruhi amplitudo yang terjadi pada sudut lendutan dawai. Pada simulasi ini menunjukkan bahwa semakin besar jari-jari benda (r) yang melewati dawai maka amplitudo yang terjadi pada dawai semakin besar.

BAB V PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dipaparkan pada Bab IV diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Solusi Numerik Model Matematika Vibrasi Dawai yang Dikenai Massa Menggelinding di Sepanjang Dawai Menggunakan Metode Adams-Bashforth-Moulton (ABM) dapat disimpulkan bahwa pergerakan lendutan pada plot grafik $y(t)$ dan $\theta(t)$ menuju stabil pada saat $t = 100$. Pada grafik $y(t)$ ditunjukkan dengan nilai maksimum $y_2 = 0,50282216$ dan $y_1 = 0,08663981$ sedangkan nilai minimum $y_2 = 0,00003245$ dan $y_1 = 0,08663981$ pada rentang waktu $t = [0,120]$. Sedangkan pada grafik $\theta(t)$ ditunjukkan dengan nilai maksimum $\theta_2 = 1.19503142$ dan $\theta_1 = 0.15099725$ sedangkan nilai minimum $\theta_2 = 0.00000032$ dan $\theta_1 = 0.00000010$ pada rentang waktu $t \in [0,120]$. Hal ini menunjukkan bahwa amplitudo dari lendutan dan sudut lendutan dawai semakin lama semakin mengecil dan kemudian akan berhenti atau stabil pada saat waktu tertentu.
2. Pertumbuhan galat metode Adams-Bashforth-Moulton (ABM) terhadap eksaknya pada model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai diperoleh dari selisih solusi numerik metode ABM terhadap nilai eksaknya. Nilai galat berangsur-angsur naik hingga mencapai $y_2 = 0.04495143$ pada $t = 0.22$, kemudian berangsur-angsur turun hingga mencapai nilai 0.00075062 di $t = 0,43$ dan kemudian naik kembali pada $t = 0.44$, sedangkan pada y_1 nilai galat berangsur-angsur

naik hingga mencapai pada $y_1 = 0.00000003$ pada waktu $t = 0.22$, kemudian berangsur-angsur turun hingga mencapai nilai 0.00000000 di $t = 0,32$ dan kemudian naik kembali pada saat $t = 0.33$ pada rentang waktu $t \in [0,10]$. Nilai galat pada $\theta_2(t)$ berangsur-angsur naik hingga mencapai pada $\theta_2 = 0.00996558$ pada waktu $t = 0.12$, kemudian berangsur-angsur turun hingga mencapai nilai 0.00033891 di $t = 0,25$ dan kemudian naik kembali pada saat $t = 0.26$ pada rentang waktu $t \in [0,10]$. Hal ini menyebabkan grafik yang dihasilkan pada kedua persamaan yakni $y(t)$ dan $\theta(t)$ bersifat fluktuatif, dibuktikan dengan grafik yang memiliki kenaikan dan penurunan yang teratur.

3. Solusi numerik untuk model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa menggeling di sepanjang dawai dengan berbagai kejadian dilakukan dengan melakukan uji sensitivitas model dengan mengubah parameter berupa massa benda (m_b) yakni 20 kg pada persamaan $y(t)$ dan mengubah parameter berupa massa benda (m_b) yakni 20 kg dan jari-jari benda (r) yakni 10 pada persamaan $\theta(t)$. Dari profil grafik uji sensitivitas model yang diperoleh dari simulasi pada rentang waktu $t \in [0,120]$, dapat disimpulkan bahwa besar massa benda (m_b) yang melewati dawai mempengaruhi amplitudo yang terjadi pada profil grafik $y(t)$ dibuktikan dengan nilai maksimum pada saat $m_b = 10$ bernilai $y_2 = 0.50282216$ dan $y_1 = 0.08663981$ dan pada saat $m_b = 20$ bernilai $y_2 = 0.51264211$ dan $y_1 = 0.09558148$. Besar jari-jari benda (r) yang melewati dawai juga mempengaruhi amplitudo yang terjadi pada sudut lendutan dawai $\theta(t)$ dibuktikan dengan nilai maksimum pada $m_b = 10$ saat $r = 0,1$ bernilai $\theta_2 = 1.19502784$ dan $\theta_1 = 0.15092409$ dan saat $r = 10$ bernilai $\theta_2 = 1.19502840$ dan $\theta_1 = 0.15093536$.

5.2 Saran untuk Penelitian Selanjutnya

Pada penelitian ini membahas tentang solusi numerik pada model vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton. Sehingga untuk penelitian selanjutnya diharapkan untuk, membahas model vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding ini menggunakan metode lain agar dapat diketahui perbedaan dari hasil menggunakan metode lain dengan menampilkan grafiknya, menghitung perbandingan nilai eror atau galat dengan metode numerik lainnya hingga mencapai nilai eror atau galat yang hampir mendekati solusi eksaknya, dan melakukan simulasi numerik serta analisis sensitivitas dengan berbagai variasi parameter dan nilai awal sehingga didapatkan grafik model vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di berbagai kejadian.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdullah. (2004). *Tafsir Ibnu Katsir*. Bogor: Pustaka Imam Asy-Syafi'i.
- Afifah, Y. N., & Putra, B. C. (2018). Model Matematika Aliran Tak Tunak pada Nano Fluid Melewati Bola Teriris dengan Pengaruh Medan Magnet. *Teknika : Engineering and Sains Journal Vol. 2 No. 2*, 119-124.
- Alonso, M., & Finn, E. (1966). *Fundamental University Physics (Volume 1 Mechanics)*. Washibgton: Addison-Wesley Publishing Company.
- Al-Qur'an dan Terjemahnya*. (2019). Kementrian Agama RI.
- Apriadi, Prihandono, B., & Novianti, E. (2014). Metode Adams-Bashforth-Moulton dalam Penyelesaian Persamaan Diferensial Non Linier. *Buletin Ilmiah Mat, Stat, dan Terapannya (Bimaster) Vol 3 No. 2*, 107-116.
- Conte, S. D., & Boor, C. d. (1993). *Dasar-Dasar Analisis Numerik: Suatu Pendekatan Algoritma*. Jakarta: Penerbit Erlangga.
- Creswell, J. W. (2013). *Research Design (Pendekatan Kualitatif, Kuantitatif, dan Mixed)*. Yogyakarta: Pustaka Pelajar.
- Djojodihardjo, H. (2000). *Metode Numerik*. Jakarta: PT. Gramedia Pustaka Utama.
- Dr. Muhtar, S. M. (2020). *Struktur Statis Tak Tentu Untuk Teknik Sipil*. Jember: CV. Pustaka Abadi.
- Janah, M., & Kusumastuti, A. (2021). Model Matematika Vibrasi Dawai Dikenai Massa yang Berjalan di Atasnya. *Jurnal Riset Mahasiswa Matematika*, 1-12.
- Josephine, N. E. (2020). *Gerak Melingkar Fisika Dasar Kelas X*. Surabaya: SMAN 2 Surabaya.
- Kountur, R. (2003). *Metode Penelitian untuk Penulisan Skripsi dan Tesis*. Jakarta: Penerbit PPM.
- Lazer, A. C., & McKenna, P. J. (1990). Large-Amplitude Periodic Oscillations in Suspension Bridges : Some New Connections with Nonlinier Analysis. *Society for Industrial and Aplied Mathematics Vol. 32, No. 4*, 537-578.

- McKenna, P. J. (1999). Large Torsional Oscillations in Suspension Bridges Revisited : Fixing an Old Approximation . *The American Mathematical Monthly*, Vol. 106, No. 1 , 1-18.
- Ndii, M. Z. (2018). *Pemodelan Matematika Dinamika Populasi dan Penyebaran Penyakit Teori, Aplikasi, dan Numerik*. Yogyakarta: CV Budi Utama.
- Nurlina, & Riskawati. (2017). *Fisika Dasar I*. Makassar: LPP Unismuh Makassar.
- Purwati, N. R., & Erawati, N. K. (2020). *Pengantar Metode Numerik*. Lumajang: Klik Media.
- Robinson, J. C. (2004). *An Introduction to Ordinary Differential Equations*. America: Cambridge University Press.
- Sari, D. M., & Kusumastuti, A. (2018). Uji Validasi Model Matematika Vibrasi Dawai Flying Fox. *Skripsi*.
- Synge, J. L., & Griffith, B. A. (1949). *Principles of Mechanics*. New York: McGraw-Hill.
- Thomson, W. T., & Dahleh, M. D. (2005). *Theory of Vibration with Applications (Fifth Edition)*. China: Pearson Education Asia Limited and Tsinghua University Press.
- Triatmodjo, B. (2002). *Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer*. Yogyakarta: Beta Offset.
- Utami, F. N. (2021). *Simulasi Numerik Model Matematika Vibrasi Dawai Flying Fox Menggunakan Metode Adams-Bashforth-Moulton*. Malang: Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim: Skripsi .
- Yakin, K. (2019). *Metode Analitik dan Numerik dengan Matlab*. Malang: Literasi Nusantara.

LAMPIRAN

Lampiran 1. Hasil Solusi Numerik Persamaan Lendutan Dawai $y(t)$ dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton orde 4 (parameter: $t_0 = 0; y_2(0) = 0.5; y_1(0) = 0; h = 0.01; \delta = 0.1; m_d = 250; F_r = 10; g = 10$)

i	t	y_2 dengan $m_b = 10$	y_2 dengan $m_b = 10$	y_1 dengan $m_b = 10$	y_1 dengan $m_b = 20$
1	0.01	0.50245653	0.50641160	0.00501402	0.00503387
2	0.02	0.50282216	0.51063098	0.01004216	0.01012092
3	0.03	0.50109745	0.51264211	0.01506350	0.01523913
4	0.04	0.49729167	0.51243853	0.02005717	0.02036638
5	0.05	0.49142271	0.51002331	0.02500246	0.02548053
6	0.06	0.48351702	0.50540911	0.02987884	0.03055952
7	0.07	0.47360951	0.49861802	0.03466613	0.03558146
8	0.08	0.46174334	0.48968154	0.03934451	0.04052474
9	0.09	0.44796981	0.47864038	0.04389464	0.04536808
10	0.10	0.43234807	0.46554430	0.04829774	0.05009070
11	0.11	0.41494489	0.45045190	0.05253567	0.05467232
12	0.12	0.39583439	0.43343029	0.05659096	0.05909331
13	0.13	0.37509772	0.41455489	0.06044694	0.06333475
14	0.14	0.35282268	0.39390901	0.06408779	0.06737851
15	0.15	0.32910341	0.37158354	0.06749858	0.07120733
16	0.16	0.30403993	0.34767652	0.07066538	0.07480491
17	0.17	0.27773776	0.32229273	0.07357525	0.07815595
18	0.18	0.25030747	0.29554319	0.07621637	0.08124622
19	0.19	0.22186420	0.26754474	0.07857803	0.08406265
20	0.20	0.19252718	0.23841948	0.08065068	0.08659336
21	0.21	0.16241925	0.20829423	0.08242601	0.08882771
22	0.22	0.13166632	0.17730004	0.08389692	0.09075635
23	0.23	0.10039685	0.14557155	0.08505761	0.09237127
24	0.24	0.06874134	0.11324644	0.08590357	0.09366580
25	0.25	0.03683175	0.08046483	0.08643160	0.09463468
26	0.26	0.00480095	0.04736868	0.08663981	0.09527405
27	0.27	-0.02721778	0.01410115	0.08652766	0.09558148
28	0.28	-0.05909138	-0.01919400	0.08609594	0.09555598
29	0.29	-0.09068751	-0.05237302	0.08534676	0.09519799
30	0.30	-0.12187512	-0.08529282	0.08428355	0.09450939
31	0.31	-0.15252498	-0.11781157	0.08291105	0.09349347
32	0.32	-0.18251025	-0.14978931	0.08123526	0.09215496
33	0.33	-0.21170694	-0.18108856	0.07926347	0.09049995
34	0.34	-0.23999450	-0.21157489	0.07700416	0.08853590
35	0.35	-0.26725625	-0.24111753	0.07446700	0.08627160
36	0.36	-0.29337991	-0.26958991	0.07166282	0.08371712
37	0.37	-0.31825803	-0.29687020	0.06860355	0.08088377
38	0.38	-0.34178845	-0.32284186	0.06530215	0.07778407
39	0.39	-0.36387471	-0.34739407	0.06177260	0.07443166
40	0.40	-0.38442646	-0.37042229	0.05802977	0.07084127
41	0.41	-0.40335980	-0.39182864	0.05408946	0.06702862
42	0.42	-0.42059767	-0.41152236	0.04996823	0.06301040
43	0.43	-0.43607010	-0.42942014	0.04568339	0.05880416

Lampiran 2. Hasil Solusi Numerik Persamaan Lendutan Dawai $\theta(t)$ dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton orde 4 (parameter: $t_0 = 0$; $y_2(0) = 0.5$; $y_1(0) = 0$; $h = 0.01$; $\delta = 0.1$; $m_d = 250$; $m_b = 10$; $F_r = 10$; $g = 10$; $k_p = 2600$)

i	t	θ_2 dengan $r = 0.1$	θ_2 dengan $r = 10$	θ_1 dengan $r = 0.1$	θ_1 dengan $r = 10$
1	0.01	1.19502784	1.19502840	0.01198136	0.01198136
2	0.02	1.18261359	1.18261581	0.02387574	0.02387575
3	0.03	1.16284830	1.16285325	0.03560912	0.03560917
4	0.04	1.13587245	1.13588116	0.04710867	0.04710879
5	0.05	1.10187434	1.10188781	0.05830318	0.05830341
6	0.06	1.06108810	1.06110725	0.06912356	0.06912395
7	0.07	1.01379115	1.01381682	0.07950327	0.07950388
8	0.08	0.96030135	0.96033431	0.08937876	0.08937967
9	0.09	0.90097393	0.90101483	0.09868986	0.09869113
10	0.10	0.83619814	0.83624755	0.10738010	0.10738183
11	0.11	0.76639385	0.76645222	0.11539708	0.11539935
12	0.12	0.69200812	0.69207577	0.12269273	0.12269562
13	0.13	0.61351175	0.61358889	0.12922356	0.12922718
14	0.14	0.53139595	0.53148267	0.13495092	0.13495535
15	0.15	0.44616916	0.44626541	0.13984113	0.13984648
16	0.16	0.35835395	0.35845954	0.14386569	0.14387205
17	0.17	0.26848413	0.26859875	0.14700137	0.14700883
18	0.18	0.17710204	0.17722524	0.14923034	0.14923899
19	0.19	0.08475591	0.08488710	0.15054021	0.15055013
20	0.20	-0.00800259	-0.00786411	0.15092409	0.15093536
21	0.21	-0.10062075	-0.10047581	0.15038063	0.15039332
22	0.22	-0.19254714	-0.19239672	0.14891399	0.14892816
23	0.23	-0.28323403	-0.28307921	0.14653382	0.14654952
24	0.24	-0.37213969	-0.37198166	0.14325525	0.14327251
25	0.25	-0.45873090	-0.45857096	0.13909875	0.13911760
26	0.26	-0.54248554	-0.54232509	0.13409009	0.13411054
27	0.27	-0.62289523	-0.62273575	0.12826019	0.12828225
28	0.28	-0.69946823	-0.69931129	0.12164497	0.12166861
29	0.29	-0.77173241	-0.77157962	0.11428519	0.11431038
30	0.30	-0.83923834	-0.83909138	0.10622619	0.10625288
31	0.31	-0.90156251	-0.90142309	0.09751769	0.09754582
32	0.32	-0.95831058	-0.95818041	0.08821352	0.08824299
33	0.33	-1.00912063	-1.00900143	0.07837127	0.07840199
34	0.34	-1.05366631	-1.05355979	0.06805198	0.06808383
35	0.35	-1.09165991	-1.09156773	0.05731978	0.05735262
36	0.36	-1.12285513	-1.12277891	0.04624144	0.04627513
37	0.37	-1.14704963	-1.14699089	0.03488600	0.03492036
38	0.38	-1.16408711	-1.16404730	0.02332429	0.02335915
39	0.39	-1.17385907	-1.17383951	0.01162846	0.01166362
40	0.40	-1.17630596	-1.17630785	-0.00012849	-0.00009325
41	0.41	-1.17141787	-1.17144225	-0.01187323	-0.01183811
42	0.42	-1.15923464	-1.15928241	-0.02353255	-0.02349780
43	0.43	-1.13984541	-1.13991730	-0.03503392	-0.03499976

Lampiran 3. Hasil Solusi Numerik Persamaan Lendutan Dawai $\theta(t)$ menggunakan Metode Adams-Bashforth-Moulton orde 4 (parameter: $t_0 = 0$; $y_2(0) = 0.5$; $y_1(0) = 0$; $h = 0.01$; $\delta = 0.1$; $m_a = 250$; $m_b = 20$; $F_r = 10$; $g = 10$; $k_p = 2700$)

i	t	θ_2 dengan $r = 0.1$	θ_2 dengan $r = 0.1$	θ_1 dengan $r = 10$	θ_1 dengan $r = 10$
1	0.01	1.19485071	1.19485188	0.01198072	0.01198072
2	0.02	1.18197416	1.18197877	0.02387124	0.02387127
3	0.03	1.16146789	1.16147819	0.03559475	0.03559486
4	0.04	1.13348256	1.13350069	0.04707568	0.04707592
5	0.05	1.09822017	1.09824816	0.05824017	0.05824064
6	0.06	1.05593186	1.05597162	0.06901669	0.06901750
7	0.07	1.00691517	1.00696843	0.07933641	0.07933768
8	0.08	0.95151091	0.95157923	0.08913372	0.08913560
9	0.09	0.89009979	0.89018452	0.09834663	0.09834927
10	0.10	0.82309876	0.82320102	0.10691711	0.10692069
11	0.11	0.75095733	0.75107801	0.11479149	0.11479619
12	0.12	0.67415381	0.67429355	0.12192074	0.12192673
13	0.13	0.59319158	0.59335073	0.12826073	0.12826822
14	0.14	0.50859545	0.50877412	0.13377248	0.13378166
15	0.15	0.42090818	0.42110619	0.13842235	0.13843341
16	0.16	0.33068717	0.33090407	0.14218221	0.14219535
17	0.17	0.23850129	0.23873632	0.14502956	0.14504495
18	0.18	0.14492786	0.14518001	0.14694762	0.14696546
19	0.19	0.05054984	0.05081780	0.14792544	0.14794588
20	0.20	-0.04404692	-0.04376473	0.14795790	0.14798109
21	0.21	-0.13827635	-0.13798177	0.14704574	0.14707181
22	0.22	-0.23155476	-0.23124989	0.14519555	0.14522462
23	0.23	-0.32330349	-0.32299070	0.14241975	0.14245191
24	0.24	-0.41295164	-0.41263350	0.13873649	0.13877181
25	0.25	-0.49993883	-0.49961814	0.13416959	0.13420810
26	0.26	-0.58371814	-0.58339789	0.12874840	0.12879013
27	0.27	-0.66375916	-0.66344252	0.12250769	0.12255260
28	0.28	-0.73955123	-0.73924151	0.11548739	0.11553543
29	0.29	-0.81060679	-0.81030743	0.10773245	0.10778354
30	0.30	-0.87646484	-0.87617934	0.09929257	0.09934659
31	0.31	-0.93669446	-0.93642639	0.09022191	0.09027870
32	0.32	-0.99089840	-0.99065134	0.08057877	0.08063814
33	0.33	-1.03871654	-1.03849403	0.07042522	0.07048695
34	0.34	-1.07982925	-1.07963479	0.05982678	0.05989059
35	0.35	-1.11396057	-1.11379755	0.04885190	0.04891750
36	0.36	-1.14088101	-1.14075266	0.03757159	0.03763865
37	0.37	-1.16041002	-1.16031938	0.02605891	0.02612706
38	0.38	-1.17241797	-1.17236786	0.01438845	0.01445731
39	0.39	-1.17682760	-1.17682059	0.00263586	0.00270501
40	0.40	-1.17361494	-1.17365328	-0.00912272	-0.00905372
41	0.41	-1.16280953	-1.16289517	-0.02081115	-0.02074278
42	0.42	-1.14449414	-1.144462866	-0.03235390	-0.03228662
43	0.43	-1.11880376	-1.11898836	-0.04367648	-0.04361079

RIWAYAT HIDUP



Yunia Mega Pratiwi, lahir di Kabupaten Tuban pada tanggal 7 Juni 1999. Penulis merupakan putri terakhir dari pasangan Bapak Suyuti dan Ibu Mujiyah. Penulis bertempat tinggal di Desa Sokosari RT 08 RW 01 Kecamatan Soko Kabupaten Tuban.

Perempuan yang biasa disapa Yunia ini telah menempuh Pendidikan mulai dari TK Bhayangkari Soko, kemudian menempuh pendidikan dasar di SDN Sokosari I (2006-2012), kemudian melanjutkan pendidikan menengah pertama di SMPN I Bojonegoro (2012-2015), kemudian menempuh pendidikan sekolah menengah atas di SMAN I Bojonegoro (2015-2018) dan pada tahun 2018 penulis mulai menempuh bangku perkuliahan di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil program studi matematika.

Selama menjadi mahasiswa, penulis berperan cukup aktif pada organisasi dan kompetisi. Pada tahun 2018-2021 penulis tergabung dalam UKM Paduan Suara Mahasiswa Gema Gita Bahana (PSM GGB) UIN Malang dan pernah menjadi anggota singer PSM GGB dalam perlombaan 4th World Virtual Choir Festival 2021 yang mendapatkan penghargaan medali emas. Pada tahun 2020-2021 penulis juga tergabung dalam komunitas pemuda peduli pendidikan, Jejak Pengabdian Indonesia (JPI) Chapter Malang dengan menjadi anggota pengurus. Selain itu penulis juga berperan aktif dalam organisasi kampus dalam rangka mengembangkan kompetensi akademiknya dengan menjadi anggota Dewan Eksekutif Mahasiswa Fakultas Sains dan Teknologi (DEMA-FST) pada tahun 2020-2021.



**KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**

Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Yunia Mega Pratiwi
NIM : 18610079
Fakultas / Program Studi : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Solusi Numerik Model Matematika Vibrasi Dawai yang Dikenai Massa Menggelinding di Sepanjang Dawai Menggunakan Metode Adams-Bashforth-Moulton (ABM)
Pembimbing I : Ari Kusumastusi, M.Pd., M.Si
Pembimbing II : Mohammad Nafie Jauhari, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	24 Januari 2022	Konsultasi Bab I	1.
2.	31 Januari 2022	Konsultasi Revisi Bab I	2.
3.	16 Februari 2022	Konsultasi Bab II dan III	3.
4.	25 Februari 2022	Konsultasi Revisi Bab II dan III	4.
5.	5 Maret 2022	Konsultasi Kajian Agama	5.
6.	14 Maret 2022	Konsultasi Revisi Kajian Agama	6.
7.	23 Maret 2022	ACC Seminar Proposal	7.
8.	25 Juli 2022	Konsultasi Bab IV dan V	8.
9.	15 Agustus 2022	Konsultasi Revisi Bab IV dan V	9.
10.	20 September 2022	Konsultasi Kajian Agama	10.
11.	10 Oktober 2022	Konsultasi Revisi Kajian Agama	11.
12.	25 November 2022	ACC Matriks Revisi Seminar Hasil	12.
13.	28 November 2022	ACC Sidang Skripsi	13.
14.	16 Desember 2022	ACC Keseluruhan	14.

Malang, 16 Desember 2022

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc

NIP. 19741129 200012 2 005