

**SOLUSI ANALITIK UNTUK MODEL MATEMATIKA  
VIBRASI DAWAI YANG DIKENAI MASSA  
MENGGELINDING DI SEPANJANG DAWAI**

**SKRIPSI**

**OLEH  
CHINTYA TRI MILLENIA  
NIM. 18610083**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2022**

**SOLUSI ANALITIK UNTUK MODEL MATEMATIKA  
VIBRASI DAWAI YANG DIKENAI MASSA  
MENGSELINDING DI SEPANJANG DAWAI**

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh  
Chintya Tri Millenia  
NIM. 18610083**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2022**

**SOLUSI ANALITIK UNTUK MODEL MATEMATIKA  
VIBRASI DAWAI YANG DIKENAI MASSA  
MENGSELINDING DI SEPANJANG DAWAI**

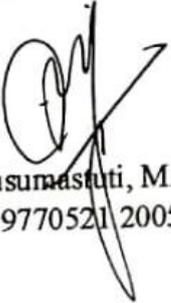
**SKRIPSI**

**Oleh  
Chintya Tri Millenia  
NIM. 18610083**

Telah Diperiksa dan Disetujui Untuk Diuji

Malang, 8 Desember 2022

Dosen Pembimbing I

  
Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si  
NIP. 19770521 200501 2 004

Dosen Pembimbing II

  
Mohammad Nafiq Jauhari, M.Si  
NIDT. 19870218 20160801 1 056

Mengetahui,  
Ketua Program Studi Matematika

  
Dr. Elly Susanti, M.Sc  
NIP. 19741129 200012 2 005

**SOLUSI ANALITIK UNTUK MODEL MATEMATIKA  
VIBRASI DAWAI YANG DIKENAI MASSA  
MENGSELINDING DI SEPANJANG DAWAI**

**SKRIPSI**

Oleh  
**Chintya Tri Millenia**  
**NIM. 18610083**

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi  
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)  
Tanggal 16 Desember 2022

Ketua Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si

Anggota Penguji I : Dr. Heni Widayani, M.Si

Anggota Penguji II : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si

Anggota Penguji III : Mohammad Nafie Jauhari, M.Si



Handwritten signatures of the examiners: Dr. Usman Pagalay, Dr. Heni Widayani, Ari Kusumastuti, and Mohammad Nafie Jauhari.

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika



Official stamp of the Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Universitas Islam Sumatera Utara, and the signature of Dr. Elly Susanti, M.Sc.

Dr. Elly Susanti, M.Sc

NIP. 19741129 200012 2 005

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Chintya Tri Millenia  
NIM : 18610083  
Program Studi : Matematika  
Fakultas : Sains dan Teknologi  
Judul Skripsi : Solusi Analitik Untuk Model Matematika Vibrasi Dawai yang  
Dikenai Massa Menggelinding di Sepanjang Dawai

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 16 Desember 2022  
Yang membuat pernyataan,



Chintya Tri Millenia  
NIM. 18610083

## **MOTTO DAN PERSEMBAHAN**

Motto:

“Perbanyak berdoa dan berusaha, percaya Allah berikan hasil terbaik”

Chintya Tri Millenia

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Kedua orang tua penulis Bapak Junianto (Almarhum) dan Ibu Rubini yang selalu memberi kasih sayang dan menjadi alasan penulis untuk berjuang menggapai mimpi dan kesuksesan penulis. Serta seluruh keluarga, dan teman-teman yang selalu menemani, mendoakan, memberi semangat, dan kasih sayang yang tak terhingga. Sehingga penulis semangat dalam berproses dan mampu menyelesaikan skripsi ini.

## KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, segala puji bagi Allah SWT yang telah memberi nikmat yang tidak terhitung kepada penulis, sehingga dapat menyelesaikan penyusunan skripsi yang berjudul “Solusi Analitik Untuk Model Matematika Vibrasi Dawai yang Dikenai Massa Menggelinding di Sepanjang Dawai” ini dengan baik. Semoga sholawat serta salam selalu terlimpahkan kepada Rasulullah Saw.

Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar sarjana matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Dengan ini penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Ari Kusumastuti, M.Pd. M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan bimbingan dan pengalaman yang berharga.
5. Mohammad Nafie Jauhari, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan bimbingan dan pengalaman yang berharga.
6. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim
7. Bapak Junianto (Almarhum) dan Ibu Rubini tercinta atas segala doa yang selalu dipanjatkan dan dukungan yang selalu diberikan.

Dalam penyusunan skripsi ini, penulis menyadari terdapat banyak kekurangan. Oleh karena itu penulis berharap pembaca memaklumi. Penulis berharap penelitian ini memberikan banyak manfaat bagi pembaca. Terimakasih.

Malang, 16 Desember 2022

Penulis

## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL .....	i
HALAMAN PENGAJUAN.....	ii
HALAMAN PERSETUJUAN.....	iii
NASKAH SKRIPSI.....	iv
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN.....	v
MOTTO DAN PERSEMBAHAN.....	vi
KATA PENGANTAR.....	vii
DAFTAR ISI.....	ix
DAFTAR TABEL .....	xi
DAFTAR GAMBAR.....	xii
DAFTAR SIMBOL .....	xiii
ABSTRAK .....	xiv
ABSTRACT .....	xv
مستخلص البحث.....	xvi
<b>BAB I PENDAHULUAN.....</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	5
1.3 Tujuan Penelitian .....	5
1.4 Manfaat Penelitian .....	6
1.5 Batasan Masalah.....	6
1.6 Definisi Istilah.....	7
<b>BAB II KAJIAN TEORI .....</b>	<b>8</b>
2.1 Teori Pendukung.....	8
2.1.1 Solusi Analitik Persamaan Diferensial Biasa Orde Dua.....	8
2.1.2 Model Vibrasi Dawai (Janah and Kusumastuti 2021) .....	11
2.1.3 Model Vibrasi Dawai (Janah and Kusumastuti 2021) Direvisi ...	41
2.1.4 Penelitian Rujukan .....	49
2.1.5 Kajian Validasi Model .....	55
2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Quran/Hadits .....	55
2.3 Kajian Topik Dengan Teori Pendukung .....	57
<b>BAB III METODE PENELITIAN .....</b>	<b>59</b>
3.1 Jenis Penelitian.....	59
3.2 Pra Penelitian .....	59
3.3 Tahapan Penelitian.....	60
<b>BAB IV PEMBAHASAN.....</b>	<b>63</b>
4.1 Solusi Analitik Model Vibrasi Dawai Dengan Massa.....	63
4.1.1 Solusi Analitik Simpangan Dawai $y(t)$ .....	64
4.1.2 Solusi Analitik Sudut Simpangan Dawai $\theta(t)$ .....	81
<b>BAB V PENUTUP .....</b>	<b>98</b>
5.1 Kesimpulan .....	98
5.2 Saran .....	100

<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>	<b>101</b>
<b>RIWAYAT HIDUP .....</b>	<b>103</b>

## DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Kemungkinan Akar-Akar Persamaan Karakteristik .....	10
Tabel 2.2	Aturan Untuk Metode Koefisien Tak Tentu .....	11
Tabel 2.3	Daftar Parameter .....	15

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Ilustrasi Vibrasi Dawai.....	12
Gambar 2.2	Ilustrasi Massa Berhenti di $1/2$ dari Panjang Dawai.....	13
Gambar 2.3	Ilustrasi Massa Berhenti di $1/4$ dari Panjang Dawai.....	14
Gambar 2.4	Ilustrasi Massa Berhenti di $1/8$ dari Panjang dawai.....	14
Gambar 2.5	Sudut Putar Bola.....	18
Gambar 2.6	Ilustrasi Gaya Dorong di Partisi pada $L$ Yakni di $l$ .....	20
Gambar 2.7	Ilustrasi Gaya Gesek.....	20
Gambar 2.8	Ilustrasi Simpangan Dawai di Partisi pada $L$ Yakni di $l$ .....	22
Gambar 2.9	Ilustrasi Peregangan di Sisi Kiri.....	22
Gambar 2.10	Ilustrasi Peregangan di Sisi Kanan.....	24
Gambar 2.11	Ilustrasi Gaya Tegangan pada Dawai.....	25
Gambar 2.12	Ilustrasi Gaya Berat.....	29
Gambar 2.13	Ilustrasi Gaya Pegas.....	30
Gambar 2.14	Ilustrasi Batang yang Digantung pada Pegas di Setiap Ujungnya .	50
Gambar 4.1	Grafik Solusi $y(t)$ Untuk $\delta^2 - 4a > 0$ .....	71
Gambar 4.2	Grafik Solusi $y(t)$ Untuk $\delta^2 - 4a = 0$ .....	75
Gambar 4.3	Grafik Solusi $y(t)$ Untuk $\delta^2 - 4a < 0$ .....	80
Gambar 4.4	Grafik Solusi $\theta(t)$ Untuk $\delta^2 - 4c > 0$ .....	88
Gambar 4.5	Grafik Solusi $\theta(t)$ Untuk $\delta^2 - 4c = 0$ .....	92
Gambar 4.6	Grafik Solusi $\theta(t)$ Untuk $\delta^2 - 4c < 0$ .....	97

## DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam penelitian ini memiliki arti sebagai berikut :

$y$  : lendutan dawai

$\theta$  : sudut lendutan dawai

$A$  : luas penampang dawai

$E$  : modulus elastisitas baja (tingkat kelenturan dawai ketika dikenai massa)

$l$  : panjang dawai

$k_p$  : konstanta tingkat kepegasan vibrasi dawai

$m_d$  : massa dawai

$m_b$  : massa benda

$\mu_k$  : koefisien gaya gesek dawai

$\eta$  : koefisien viskositas (koefisien kekentalan fluida/udara)

$r$  : jari-jari benda

$g$  : gaya gravitasi

## ABSTRAK

Millenia, Chintya Tri. 2022. **Solusi Analitik untuk Model Matematika Vibrasi Dawai yang Dikenai Massa Menggelinding di Sepanjang Dawai**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, M.Pd. M.Si, (II) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.

**Kata Kunci:** Model Vibrasi Dawai dengan Massa Menggelinding, Solusi Analitik  $y(t)$  dan  $\theta(t)$ .

Penelitian ini membahas tentang solusi analitik untuk model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai pada lendutan dan sudut lendutan dawai yang telah direvisi oleh Janah dan Kusumastuti, 2021. Model tersebut berupa persamaan diferensial orde dua sehingga untuk menyelesaikan solusi analitiknya dapat menggunakan metode karakteristik. Solusi analitik dilakukan untuk memperoleh solusi umum dan solusi khusus untuk setiap lendutan  $y(t)$  dan sudut lendutan  $\theta(t)$  dari model vibrasi dawai ter revisi. Analisis solusi analitik model dikerjakan pada tiga kondisi diskriminan  $\delta^2 - 4ac$  yang berbeda, yakni diskriminan bernilai positif, nol, dan negatif. Hasil analisis diperoleh bahwa profil grafik  $y(t)$  dan  $\theta(t)$  realistis yakni saat diskriminan bernilai positif dan negatif.

## ABSTRACT

Millenia, Chintya Tri. 2022. **Analytical Solutions for Mathematical Models of Vibration of Strings Subjected to Rolling Mass Along the Strings**. Thesis. Program Studi Matematika, Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Ari Kusumastuti, M.Pd. M.Si, (II) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.

**Keywords:** String Vibration Model with Rolling Mass, Analytical Solution  $y(t)$  and  $\theta(t)$ .

This study discusses analytical solutions for mathematical models of string vibration that are subjected to rolling mass along the strings on deflection and deflection angles of strings that have been revised by Janah and Kusumastuti, 2021. The model is a second-order differential equation so that to solve its analytical solution it can use a characteristic method. Analytical solutions were carried out to obtain a general solution and a specific solution for each  $y(t)$  deflection and  $\theta(t)$  deflection angle of the revised wire vibration model. The analysis of the model's analytical solution was performed on three different  $\delta^2 - 4ac$  discriminant conditions, namely positive, zero, and negative discriminants. The results of the analysis obtained that the graph profiles of  $y(t)$  and  $\theta(t)$  are realistic, namely when the discriminant is positive or negative.

## مستخلص البحث

ميلينيا ، جينيتيا تري . ٢٠٢٢ . حل تحليلي لنموذج رياضي لاهتزاز خيط يتعرض لكتلة المتداول على طول الخيط .  
البحث العلمي . قسم الرياضيات ، كلية العلوم والتكنولوجيا ، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية  
مالانج . المشرفة : (١) آري كوسوماستوتي ، الماجستير ، (٢) محمد نافع جوهرى ، الماجستير

**الكلمات المفتاحية:** نموذج اهتزاز السلسلة مع حلول تحليلية للكتلة المتداولة و  $y(t)$  و  $\theta(t)$ .

تناقش هذه الدراسة الحلول التحليلية للنماذج الرياضية لاهتزاز الأوتار التي تتعرض لكتلة متداولة على طول الأوتار في زوايا الانحراف والانحراف للأوتار التي تمت مراجعتها بواسطة جانه و كوسومستوتي (٢٠٢١). النموذج عبارة عن معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية بحيث لحل حلها التحليلي ، يمكنها استخدام طريقة مميزة. تم تنفيذ حلول تحليلية للحصول على حل عام وحل محدد لكل انحراف  $y(t)$  وزاوية انحراف  $\theta(t)$  لنموذج اهتزاز الأسلاك الانحراف. تم إجراء تحليل للحل التحليلي للنموذج على ثلاثة شروط تمييزية مختلفة  $\delta^2 - 4ac$  ، وهي التمييزات الإيجابية والصفرية والسلبية. تم الحصول على نتائج التحليل أن ملامح الرسم البياني ل  $y(t)$  و  $\theta(t)$  واقعية ، أي عندما يكون التمييز إيجابيا وسلبيا.

# BAB I PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Penelitian mengenai vibrasi ini terinspirasi dari Surat Ali-Imran ayat 190-191 yang memiliki arti :

*“Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal, (yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadaan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata): "Ya Tuhan kami, tiadalah Engkau menciptakan Ini dengan sia-sia, Maha Suci Engkau, Maka peliharalah kami dari siksa neraka.”* (Q.S Ali-Imran: 190-191)

Tafsir Al-Muyassar menyatakan bahwa “Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi yang tanpa ada contoh sebelumnya dan dalam pergantian malam dan siang dan perbedaan waktu keduanya dengan memanjang dan memendek benar-benar merupakan petunjuk-petunjuk dan bukti-bukti yang agung atas keesaan Allah bagi orang-orang yang mempunyai akal-akal yang selamat. Selain itu, dalam tafsir Ibnu Katsir menyatakan bahwa “Dalam penciptaan langit dan bumi maupun alam semesta ini ternyata memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta beserta segala isinya diciptakan oleh Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi.” (Abdullah 2007).

Berdasarkan Q.S Ali-Imran: 190-191 maka dalam dunia sains, model matematika merupakan salah satu alat yang mempermudah peneliti dari *background* disiplin ilmu yang berbeda-beda untuk dapat mempelajari fenomena yang terjadi dengan lebih mudah. Model matematika adalah representasi suatu fakta atau fenomena alam yang dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial.

Pada saat ini, sebagian besar peneliti memanfaatkan model matematika, sebagai dasar simulasi dan pengambilan keputusan. Salah satu contohnya adalah analisis model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai, yang model matematikanya telah dikerjakan oleh : (a) Janah dan Kusumastuti tahun 2021, (b) Mc Kenna pada tahun 1999. Kedua model ini memiliki tingkat kesamaan dalam hal asumsi dan variabel model yakni bagaimana lendutan  $y(t)$  dan sudut lendutan  $\theta(t)$  terjadi saat massa yang menggelinding di sepanjang dawai yang lentur. Asumsi berikutnya adalah bahwa ketinggian dawai dibuat sama di kedua ujungnya. Penelitian Janah dan Kusumastuti tahun 2021 tersebut menghasilkan model matematika dalam bentuk persamaan diferensial biasa orde dua. Secara terperinci, penelitian tersebut menggunakan pendekatan pemodelan secara teoritis dengan mencermati asumsi-asumsi dasar yang terjadi.

Pada penelitian Janah dan Kusumastuti tahun 2021, melibatkan beberapa energi pada benda dan dawai. Energi yang terkait adalah energi potensial dorong ( $Ep_r$ ), energi potensial berat ( $Ep_w$ ), energi potensial tegangan ( $Ep_T$ ), energi potensial gesek ( $Ep_k$ ), energi potensial pegas ( $Ep_p$ ), energi kinetik dawai ( $Ek_d$ ), dan energi kinetik benda ( $Ek_b$ ). Adapun parameter yang terlibat yaitu ( $l$ ) sebagai panjang dawai, massa dawai ( $m_d$ ) mendefinisikan perkalian antara massa jenis ( $\rho$ ) dan satuan panjang dawai ( $l$ ), kelenturan dawai yang didefinisikan dengan modulus elastisitas dawai ( $E$ ), dan peregangan dawai yang dinyatakan dengan simpangan dawai ( $y$ ). Dalam permasalahan vibrasi dawai tersebut diperkirakan bahwa dawai yang digunakan lentur, berada di posisi kesetimbangan dan dikenai massa ( $m_b$ ) yang menggelinding. Dengan menggunakan asumsi-asumsi dasar yang

terkait, (Janah and Kusumastuti 2021) memperoleh model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa yang menjadi permasalahan pada penelitian tersebut.

Selanjutnya penelitian Janah dan Kusumastuti juga mempertimbangkan penelitian McKenna tahun 1999 yakni perbaikan model runtuhnya Jembatan Gantung Tacoma yang sebelumnya telah dimodelkan oleh Lazer dan McKenna pada tahun 1990. Penelitian tersebut menghasilkan dua persamaan diferensial orde dua untuk  $y(t)$  dan  $\theta(t)$ . Pemodelan tersebut melibatkan energi pada dawai. Energi yang ada pada dawai yakni energi kinetik ( $Ek$ ) dan energi potensial ( $Ep$ ). Energi kinetik yang terlibat pada dawai yakni energi kinetik translasi dawai ( $Ek_{T(dawai)}$ ) dan energi kinetik rotasi dawai ( $Ek_{R(dawai)}$ ). Sedangkan energi potensial yang terlibat pada dawai yakni energi potensial berat dawai ( $Ep_{w(dawai)}$ ) dan energi potensial pegas dawai ( $Ep_{p(dawai)}$ ). Adapun parameter yang terlibat yaitu ( $k$ ) sebagai konstanta pegas, ( $m_d$ ) sebagai massa dawai, ( $g$ ) sebagai gaya gravitasi, ( $\lambda$ ) sebagai amplitudo, dan ( $\mu$ ) sebagai frekuensi.

Oleh karena itu, pada penelitian ini, difokuskan pada penyelesaian secara analitik dari model matematika pada Janah dan Kusumastuti tahun 2021 ter revisi yang mengacu pada penelitian McKenna tahun 1999. Perbaikan model tersebut dilakukan pada energi potensial pada dawai. Menurut McKenna tahun 1999, energi potensial pada dawai hanya energi potensial berat ( $Ep_{w(benda)}$ ) dan energi potensial pegas ( $Ep_{p(benda)}$ ). Sehingga model baru untuk kasus vibrasi dawai dengan massa menggelinding direvisi pada diabaikannya energi potensial tegangannya ( $Ep_{T(dawai)}$ ) dengan asumsi kontribusi yang tidak terlalu mempengaruhi  $y(t)$  dan  $\theta(t)$ . Revisi yang dilakukan berikutnya adalah melibatkannya suku redaman viskos kecil yakni  $\delta\dot{\theta}$  dan  $\delta\dot{y}$ .

Penyelesaian secara analitik merupakan salah satu cara untuk menguji tingkat relevan atau tidaknya profil grafik solusi analitik yang dihasilkan dengan profil grafik yang terjadi secara riil. Oleh sebab itu, solusi analitik menjadi penting sebagai langkah memvalidasi model. Jika profil grafik solusi analitik dari model tidak relevan dengan profil grafik riil, maka perlu dilakukan bedah model dengan menganalisis kembali lengkap atau tidaknya asumsi yang digunakan, semua satuan yang terlibat dari setiap suku persamaan dalam model, dan identifikasi hukum-hukum yang terlibat serta gaya-gaya yang terjadi. Pada akhirnya, analisis proses rekonstruksi model matematika juga perlu diperhatikan tingkat ketelitiannya. Sebaliknya jika profil grafik solusi analitik telah relevan dengan profil grafik riil yang diharapkan, maka model dikatakan valid dan profil grafik solusi analitik merupakan representasi dari model yang diharapkan. Sehingga tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui solusi analitik dari model matematika vibrasi dawai dengan massa yang menggelinding di sepanjang dawai.

Penelitian ini difokuskan pada solusi analitik dari model ter revisi dari Janah dan Kusumastuti tahun 2021. Langkah solusi analitik pada penelitian ini menggunakan metode karakteristik dan parameter-parameter yang merujuk pada Sari dan Kusumastuti, tahun 2018. Solusi analitik pada penelitian ini difokuskan pada solusi umum dan solusi khusus untuk  $y(t)$  dan  $\theta(t)$ . Selain itu, penyelesaian analitik untuk setiap persamaan  $y(t)$  dan  $\theta(t)$  dalam penelitian ini juga merujuk pada langkah-langkah yang telah dilakukan dalam penelitian (Hidayati 2018) yang diuji pada tiga kasus nilai diskriminan yang berbeda.

Penelitian pada model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding sepanjang dawai ini menjadi penting dengan berdasarkan pada dua

alasan. Pertama, dengan melakukan analisis model dan analisis solusi model, maka akan memberikan gambaran tentang bagaimana model dikonstruksi dalam menterjemahkan fakta atau fenomena yang dihadapi. Kedua, dengan mengetahui profil grafik solusi analitik sebagai representasi perilaku model matematika, maka dapat ditarik pengetahuan tentang regulasi apa saja yang bisa dibuat dan dimanfaatkan dari fenomena yang telah dimodelkan.

Berdasarkan uraian di atas, untuk mengetahui validasi model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding maka penulis melakukan suatu penelitian dalam skripsi dengan judul “Solusi Analitik Untuk Model Matematika Vibrasi Dawai yang Dikenai Massa Menggelinding di Sepanjang Dawai”

## **1.2 Rumusan Masalah**

Berlandaskan latar belakang yang telah dibahas di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini yaitu bagaimana solusi analitik  $y(t)$  dan  $\theta(t)$  dari model matematika untuk model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai?

## **1.3 Tujuan Penelitian**

Berlandaskan rumusan masalah yang telah diuraikan di atas, maka tujuan dari penelitian ini yaitu mengetahui penyelesaian solusi analitik  $y(t)$  dan  $\theta(t)$  dari model matematika untuk model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai.

#### 1.4 Manfaat Penelitian

Dengan mengetahui solusi analitik  $y(t)$  dan  $\theta(t)$  dari model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa menggeling sepanjang dawai, maka dapat dianalisis valid atau tidaknya model yang telah dikonstruksi pada penelitian sebelumnya. Selanjutnya, langkah rekonstruksi model sampai dihasilkan model yang relevan dapat diputuskan dengan mengacu pada profil grafik solusi analitiknya. Pada akhirnya, profil grafik solusi dari model yang telah valid dapat berkontribusi terhadap teknologi kedawaiian sesuai dengan fakta yang dihadapi.

#### 1.5 Batasan Masalah

Berdasarkan luasnya permasalahan yang terkait mengenai vibrasi dawai, maka terdapat batasan dalam penelitian ini yaitu :

1. Menggunakan model matematika vibrasi dawai ter revisi mengacu pada model matematika model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa menggeling sepanjang dawai (Janah and Kusumastuti 2021) yakni :

$$\dot{y} = -\delta\dot{y} - \frac{4k_p}{m_d} y + \frac{(m_b+m_d)g}{m_d} - F_r, y(0) = p \text{ dan } \dot{y}(0) = q$$

dan

$$\ddot{\theta} = -\delta\dot{\theta} - \frac{\left(-\frac{1}{2}F_r + \frac{1}{2}\mu m_b g + \frac{1}{2}k\eta v + 2kl\right)l}{\left(\frac{2}{5}m_b r^2 + \frac{1}{3}m_d l^2\right)} \theta + \frac{\frac{l}{2}m_b g}{\left(\frac{2}{5}m_b r^2 + \frac{1}{3}m_d l^2\right)}, \theta(0) = p \text{ dan}$$

$$\dot{\theta}(0) = q$$

2. Parameter yang terlibat pada model merujuk pada Janah dan Kusumastuti 2021 dan McKenna 1999.
3. Profil grafik solusi analitik dari berbagai kejadian dilakukan dengan perubahan semua parameter yang terlibat.

4. Uji solusi analitik diperlukan sebagai rujukan diperlukan atau tidaknya kontruksi ulang model matematika vibrasi dawai tersebut.

### **1.6 Definisi Istilah**

Definisi istilah yang digunakan dalam penelitian ini dapat dituliskan sebagai berikut:

1. Model Matematika merupakan representasi suatu fakta atau fenomena alam yang dinyatakan dalam bentuk persamaan matematika khususnya persamaan diferensia, baik persamaan diferensial biasa maupun persamaan diferensial parsial.
2. Solusi analitik atau penyelesaian analitik merupakan penyelesaian yang menghasilkan solusi umum dan solusi khusus pada suatu persamaan diferensial biasa maupun parsial.
3. Vibrasi adalah gerakan bolak-balik di titik kesetimbangan.
4. Dawai adalah kawat yang halus yang terbuat dari berbagai jenis bahan dan memiliki elastisitas sesuai dengan jenis bahan yang menyusunnya.
5. PDB atau Persamaan Diferensial Biasa (*ordinary differential equation*) merupakan suatu persamaan yang memuat fungsi yang tak diketahui dengan satu peubah yang tak diketahui.
6. Validasi model adalah suatu langkah untuk menganalisis valid atau tidaknya suatu model matematika yang dapat ditempuh dengan menganalisis profil grafik yang terjadi.

## BAB II KAJIAN TEORI

### 2.1 Teori Pendukung

#### 2.1.1 Solusi Analitik Persamaan Diferensial Biasa Orde Dua

Model matematika yang digunakan dalam penelitian ini berupa persamaan diferensial orde dua. Pengertian Persamaan Diferensial Biasa (*ordinary differential equation*) yang disingkat PDB merupakan suatu persamaan diferensial yang hanya memiliki satu variabel bebas (Pramono 2014). Menurut (Sari dan Kusumastuti 2018) terdapat dua solusi dalam penyelesaian analitik suatu persamaan diferensial yaitu solusi umum dan solusi khusus. Solusi umum merupakan solusi yang terdiri dari sejumlah fungsi bebas yang jumlahnya sesuai dengan orde persamaan diferensial yang diselesaikan. Sedangkan solusi khusus merupakan solusi yang diperoleh dari solusi umum dengan memasukkan nilai awal atau pilihan khusus dalam fungsi bebas. Dengan memperoleh solusi analitik, maka akan diperoleh nilai variabel terikat dengan mensubstitusikan nilai dari variabel-variabel bebas.

Menurut (Soehardjo 1996), pengertian solusi analitik atau penyelesaian analitik dari suatu persamaan diferensial yaitu suatu fungsi tanpa turunan-turunan yang memenuhi persamaan tersebut. Misalkan terdapat persamaan diferensial  $\frac{dy}{dt} = f(t)$ , maka solusi analitik dari persamaan diferensial tersebut yaitu fungsi tanpa turunan-turunan yang memenuhi persamaan  $\frac{dy}{dt} = f(t)$ . Perubahan terhadap waktu ini sering dihubungkan dengan masalah syarat awal yang selalu memiliki solusi tunggal. Solusi analitik terhadap suatu permasalahan dan penerapan matematika dikenal sebagai solusi sebenarnya (*actual solution*). Metode analitik juga biasa

disebut dengan metode sejati, dikarenakan solusi analitik memberikan solusi sejati yaitu solusi yang mempunyai galat (*error*) sama dengan nol (Kartono 2012).

### 1. Solusi PD Linier Homogen Koefisien Konstanta

Menurut (Pramono 2014), bentuk umum persamaan diferensial linier homogen dengan koefisien konstan dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0 \quad (2.1)$$

Dengan  $a, b, c$  merupakan konstanta

Misalkan solusi umum persamaan diferensial  $y = e^{\lambda t}, \lambda \in R$  solusi persamaan (2.1) dengan  $\lambda$  yang akan ditentukan. Sehingga jika disubstitusikan solusi umum persamaan diferensial ke persamaan (2.1) menjadi

$$\begin{aligned} a\ddot{y} + b\dot{y} + cy &= 0 \\ \Leftrightarrow a\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + ce^{\lambda t} &= 0 \\ \Leftrightarrow (a\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda t} &= 0 \end{aligned}$$

Sehingga  $y = e^{\lambda t}$  menjadi solusi persamaan diferensial untuk persamaan  $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$  yang disebut dengan persamaan karakteristik.

Akar-akar persamaan karakteristik yakni

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Akar-akar nilai  $\lambda$  pada persamaan memiliki tiga kemungkinan, yakni

**Tabel 2.1** Kemungkinan Akar-Akar Persamaan Karakteristik

Ciri-ciri	Kategori	Solusi umum
$\sqrt{b^2 - 4ac} > 0$	$\lambda_{1,2}$ merupakan dua akar real berbeda	$y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$
$\sqrt{b^2 - 4ac} = 0$	Akar real sama ( $\lambda_1 = \lambda_2$ )	$y = c_1 e^{\lambda t} + t c_2 e^{\lambda t}$
$\sqrt{b^2 - 4ac} < 0$	Dua akar kompleks yang saling konjugat ( $\lambda = \alpha \pm i\beta$ )	$y = e^{\alpha t} (A \cos \beta t + B \sin \beta t)$

## 2. Solusi PD NonHomogen Koefisien Tak Tentu

Menurut (Pramono 2014), awalnya metode ini digunakan untuk persamaan diferensial linier tak homogen orde dua dengan bentuk persamaan sebagai berikut:

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = r(t)$$

dengan  $a, b, c$  merupakan konstanta.

Kemudian metode ini pun berlaku juga untuk persamaan diferensial dengan orde yang lebih tinggi. Kunci metode ini yakni  $y_p$  merupakan suatu ekspresi yang hamper sama dengan koefisien-koefisien yang tidak diketahui kemudian dapat ditentukan dengan mensubstitusikan  $y_p$  pada persamaan. Adapun aturan untuk metode koefisien tak tentu yakni:

### a. Aturan dasar

Jika  $r(t)$  yaitu salah satu fungsi yang ada pada tabel (2.2), pilih fungsi  $y_p$  yang sesuai dan tentukan koefisien tak tentunya, dengan mensubstitusikan  $y_p$  ke dalam persamaan.

### b. Aturan modifikasi,

Jika  $r(t)$  sama dengan solusi persamaan diferensial homogenya, kalikan  $y_p$  yang sesuai tabel (2.2) dengan  $t$ .

## c. Aturan penjumlahan

Jika  $r(t)$  merupakan fungsi-fungsi yang ada pada tabel di kolom pertama,  $y_p$  adalah jumlah fungsi pada baris yang bersesuaian.

**Tabel 2.2** Aturan Untuk Metode Koefisien Tak Tentu

Suku-suku pada $r(t)$	Pilihan $y_p$
konstanta	$A$
$ke^{\lambda t}$	$Ce^{\lambda t}$
$Kt^n (n = 0, 1, \dots)$	$K_n t^n + K_{n-1} t^{n-1} + \dots + K_1 t + K_0$
$k \cos \omega t$ atau $k \sin \omega t$	$M_n \cos \omega t + N_n \sin \omega t$

Dengan kesimpulan sebagai berikut :

- a. Metode koefisien tak tentu digunakan untuk penyelesaian khusus persamaan diferensial linier tak homogenya dengan koefisien konstanta
- b. Untuk menentukan pemisalan yang sesuai, terlebih dahulu harus mencari solusi persamaan homogenya.
- c. Metode koefisien tak tentu hanya dapat digunakan jika fungsi  $f(t)$  di ruas kanan berupa polinom, fungsi trigonometri, fungsi eksponen atau penjumlahan/perkalian dari ketiga fungsi kolom pertama pada tabel 2.2.

### 2.1.2 Model Vibrasi Dawai (Janah and Kusumastuti 2021)

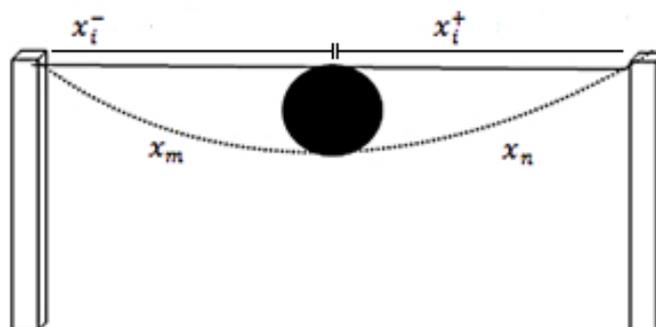
Model matematika adalah suatu cara untuk menggambarkan suatu masalah secara sederhana dalam ekspresi matematika dengan menggunakan persamaan diferensial (Kartono 2012). Model matematika kerap diperlukan untuk mengilustrasikan perilaku beberapa kejadian dalam kehidupan nyata, seperti penjelasan secara matematis permasalahan bidang biologi, fisika, bahkan hingga ekonomi. Permasalahan ini bisa dirumuskan menggunakan bentuk persamaan

diferensial. Persamaan diferensial sendiri merupakan persamaan yang memuat turunan satu variabel tak bebas atau lebih terhadap satu variabel bebas atau lebih. Salah satu contohnya yaitu laju perubahan kecepatan dalam waktu tertentu  $a = \frac{dv}{dt}$  sebagai bentuk pernyataan dari percepatan dalam hukum Newton II. Adapun contoh salah satu model matematika yang mengilustrasikan perilaku suatu kejadian dalam kehidupan nyata yaitu persamaan pada penelitian yang berjudul vibrasi dawai dikenai massa yang menggeling di atasnya (Janah and Kusumastuti 2021).

Persamaan model matematika vibrasi dawai dikenai massa yang menggeling di atasnya telah dikonstruksi oleh (Janah and Kusumastuti 2021) dengan tahapan pemodelan sebagai berikut:

1. Mengidentifikasi masalah vibrasi pada dawai berdasarkan keadaan nyata.

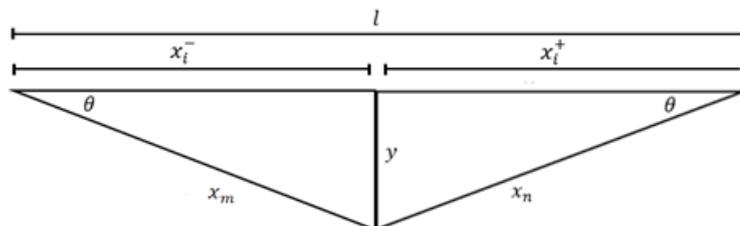
Dawai yang digunakan merupakan dawai yang dikenai massa menggeling yang diberi gaya dorong di sepanjang dawai. Permasalahan pertama yang diidentifikasi merupakan pengaruh massa yang dikenai gaya dorong. Ilustrasi dari vibrasi dawai yang dikenai massa menggeling di sepanjang dawai telah digambarkan pada Gambar 2.1 di bawah ini:



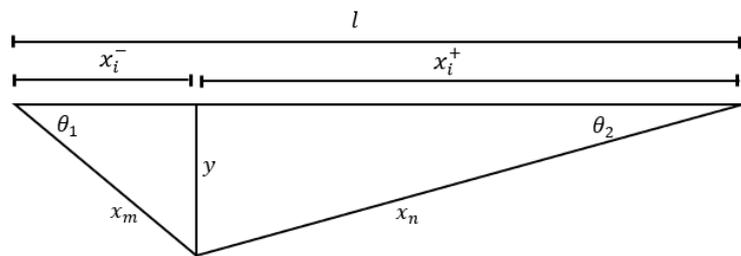
**Gambar 2.1** Ilustrasi Vibrasi Dawai

Gambar 2.1 menjelaskan bahwa panjang dawai dikaitkan dengan dua pengait yang mempunyai ketinggian yang sama. Di mana panjang dawai di sisi kiri benda diasumsikan sebagai  $x_i^-$  dan panjang dawai di sisi kanan benda adalah  $x_i^+$ . Sedangkan  $x_m$  dan  $x_n$  merupakan kemuluran dawai pada sisi kanan dan sisi kiri akibat sudut  $\theta$ , dan  $l$  merupakan panjang dawai. Tingkat keelastisan atau kelenturan dawai termuat dalam modulus elastisitas ( $E$ ). Besar gaya tarikan yang diberikan ketika dawai dikenai massa tidak boleh melebihi batas elastisitas dari dawai bertujuan untuk mencegah dawai agar tidak putus.

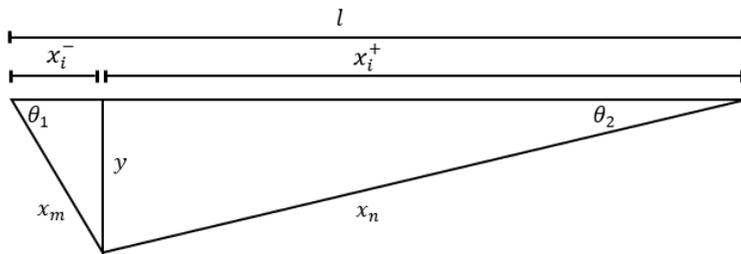
Dawai yang digunakan pada penelitian Janah dan Kusumastuti pada tahun 2021 merupakan dawai dengan gaya dorong di sepanjang dawai. Massa tersebut bisa berhenti di beberapa kemungkinan. Berikut kemungkinan yang terjadi posisi massa yang didorong di atas dawai:



**Gambar 2.2** Ilustrasi Massa Berhenti di  $\frac{1}{2}$  dari Panjang Dawai



**Gambar 2.3** Ilustrasi Massa Berhenti di  $\frac{1}{4}$  dari Panjang Dawai



**Gambar 2.4** Ilustrasi Massa Berhenti di  $\frac{1}{8}$  dari Panjang dawai

Gambar 2.2, Gambar 2.3, dan Gambar 2.4 menunjukkan bahwa terdapat peregangan dawai ( $e$ ) akibat pembebanan massa. Pada gambar tersebut terjadi lendutan akibat asumsi dari dawai yang lentur. Lendutan pada dawai ini mengakibatkan adanya sudut dawai ( $\theta$ ), simpangan ( $y$ ), kemiringan dawai pada sisi kiri ( $x_m$ ), dan kemiringan dawai pada sisi kanan ( $x_n$ ) akibat lendutan. Massa meluncur dikarenakan dikenai gaya dorong, maka selama massa berjalan terjadilah vibrasi dawai sepanjang  $l$ .

## 2. Mengidentifikasi seluruh parameter dan variabel yang terlibat.

Mengidentifikasi parameter dan variabel pada dawai yang terlibat ketika dikenai massa yang menggelinding yang diberi gaya dorong. Berikut beberapa parameter yang digunakan pada masalah vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai disajikan pada Tabel 2.1:

**Tabel 2.3** Daftar Parameter

Parameter	Definisi	Nilai dan satuan	Formula	Sumber
$A$	Luas penampang dawai	Sebarang $m^2$	$kp = EA/l$ $N/m$	-
$E$	Modulus elastisitas baja (tingkat kelenturan dawai ketika dikenai massa)	$2 \times 10^{11}$ $N/m^2$		<a href="https://www.fisika.co.id/2020/10/modulus-elastisitas.html">https://www.fisika.co.id/2020/10/modulus-elastisitas.html</a>
$l$	Panjang dawai	Sebarang $m$		-
$k_p$	Konstanta tingkat kepegasan vibrasi dawai ( $kp = EA/l$ )	Bergantung pada E, A, dan l $N/m$	$kp = EA/l$ $N/m$	-
$m_d$	Massa dawai	Sebarang $kg$		-
$m_b$	Massa benda	Sebarang $kg$		-
$\mu_k$	Koefisien gaya gesek dawai	0,57		<a href="https://www.fisikabc.com/2017/07/gaya-gesek.html">https://www.fisikabc.com/2017/07/gaya-gesek.html</a>
$v$	Kecepatan benda menggelinding di atas dawai	$m/s$		-
$\eta$	Koefisien viskositas (koefisien kekentalan fluida/udara)	$0,018 \times 10$		<a href="https://zero-d-inferno.blogspot.com/2011/10/koefisien-kekentalan-cairan.html">https://zero-d-inferno.blogspot.com/2011/10/koefisien-kekentalan-cairan.html</a>
$r$	Jari-jari benda	Sebarang, berhubungan dengan luas penampang dawai ( $A$ ) $m$	$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$	-
$g$	Gaya gravitasi	$9,8 m/s^2$		<a href="https://id.wikipedia.org/wiki/Gravitasi_Bumi">https://id.wikipedia.org/wiki/Gravitasi Bumi</a>

Terdapat dua variabel yang terlibat dalam penelitian Janah dan Kusumastuti tahun 2021 mengenai vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai yakni variabel bebas dan terikat. Vibrasi dawai pada penelitian tersebut bergantung pada waktu ( $t$ ), sehingga variabel bebasnya adalah  $t$ . Sedangkan variabel terikatnya adalah simpangan ( $y$ ) dan sudut ( $\theta$ ) yang muncul karena massa meluncur di sepanjang dawai.

Langkah selanjutnya yaitu mengidentifikasi energi-energi yang terkait dengan vibrasi dawai. Energi-energi yang terkait terjadi pada keadaan nyata. Dari uraian di atas, energi-energi yang terkait terjadinya vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding adalah:

- a. Energi potensial ( $E_p$ ), munculnya energi ini dikarenakan adanya reaksi dari gaya-gaya yang terkait dengan vibrasi dawai.
- b. Energi kinetik ( $E_k$ ), munculnya energi ini dikarenakan adanya getaran yang dialami oleh dawai.

### 3. Membangun asumsi dasar

Berdasarkan identifikasi masalah vibrasi dawai di atas, maka asumsi-asumsi dasar yang digunakan untuk memformulasikan model vibrasi yang dikenai massa dengan gaya dorong sebagai berikut:

- a. Dawai yang diteliti merupakan dawai elastis berbahan baja yang memiliki batas elastisitas sebesar  $2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
- b. Massa yang meluncur merupakan massa yang mendapat gaya dorong di sepanjang dawai yang tegang tetapi lentur

- c. Dawai yang dikenai massa mengakibatkan lendutan dawai sehingga membentuk simpangan dan sudut dawai
- d. Terjadi gaya gesek antara dawai dengan massa, dawai dengan udara, dan massa dengan udara. Gesekan-gesekan tersebut yang mengakibatkan terjadinya perlambatan laju vibrasi dawai
- e. Vibrasi dawai berupa gerak bolak balik di sepanjang dawai yang mendapatkan faktor peredam, sehingga dawai akan kembali pada posisi setimbang

4. Mengidentifikasi gaya-gaya yang terlibat dan energi potensial yang terlibat

Selanjutnya mengidentifikasi gaya-gaya pada vibrasi dawai ketika dikenai massa dengan gaya dorong. Dikarenakan massa yang meluncur disebabkan oleh gaya dorong, maka gaya dorong inilah yang menyebabkan terbentuknya gaya-gaya yang lain, di antaranya gaya gesek, gaya tegangan, gaya berat, dan gaya pegas.

a. Gaya Dorong ( $F_r$ )

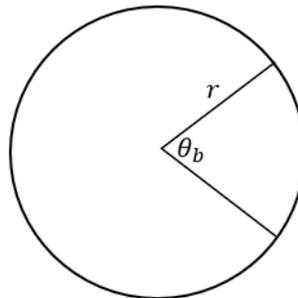
Vibrasi dawai pada penelitian ini disebabkan oleh adanya benda berbentuk bola yang menggelinding di atas dawai. Benda yang melintasi dawai tersebut memiliki massa benda sebesar  $m_b$ . Massa tersebut diberi gaya dorong supaya dapat menggelinding melewati dawai sehingga mengalami percepatan angular sebesar  $\alpha$ . Sehingga menurut (Nurlina dan Riskawati, 2018) dapat dituliskan

$$F_r = m_b a \quad (2.2)$$

Dikarenakan benda berbentuk bola dan lintasan yang dilalui bola setiap satuan waktu merupakan representasi dari ukuran keliling bola, berdasarkan gerak melingkar berubah beraturan (GMBB), dengan  $\alpha$  yang merupakan percepatan angular benda berbentuk bola maka dapat dirumuskan formula kecepatan angular sebagai berikut (Alonso and Finn 1966) :

$$\omega(t)^2 = \omega_0 + 2 \alpha \theta_b(t) \quad (2.3)$$

Dengan  $\omega(t)$  adalah kecepatan angular sedangkan  $\omega_0$  adalah kecepatan angular mula-mula dari benda bermassa berbentuk bola dan  $\theta_b$  merupakan sudut putar bola. Dengan memperhatikan  $\alpha$  adalah percepatan angular, seperti ditampilkan dalam gambar berikut :



**Gambar 2.5** Sudut Putar Bola

Berdasarkan gambar di atas, maka besar jarak tempuh bola per satuan waktu yang melibatkan sudut perputaran bola  $\theta_b$  dinyatakan sebagai berikut (Josephine 2020) :

$$x_m = \frac{\theta_b(t)}{360^\circ} 2\pi r$$

yakni

$$x_m = \frac{\theta_b(t)}{2\pi} 2\pi r$$

$$x_m = \theta_b(t)r \quad (2.4)$$

Sehingga dapat dihitung nilai  $\theta_b$  sebagai berikut

$$\theta_b(t) = \frac{x_m}{r} \quad (2.5)$$

Dengan  $x_m$  adalah besar jarak tempuh bola per satuan waktu. Ketika bola diam maka diasumsikan kecepatan awal bola  $\omega_0 = 0$ . Sehingga persamaann (2.3) dapat disederhanakan menjadi

$$\omega(t)^2 = 2 \alpha \theta_b(t) \quad (2.6)$$

Selanjutnya dapat dihitung nilai  $\alpha$  sebagai berikut

$$\alpha = \frac{\omega(t)^2}{2\theta_b(t)}$$

Substitusikan persamaan (2.5), sehingga dapat dituliskan kembali

$$\alpha = \frac{\omega(t)^2}{2x_m(t)} r \quad (2.7)$$

Kemudian substitusikan persamaan (2.7) ke persamaan (2.2) sehingga dapat dirumuskan besar  $F_r(t)$  sebagai berikut :

$$F_r = m_b \left( \frac{\omega(t)^2}{2x_m(t)} r \right) \quad (2.8)$$

Secara teoritik kecepatan putar bola  $\omega(t)$  adalah turunan dari sudut putar bola terhadap waktu (Alonso and Finn 1966), sehingga

$$\omega(t) = \frac{d\theta_b}{dt} \quad (2.9)$$

Melihat persamaan (2.5) yang membawa konsekuensi  $\theta_b = \frac{x_m}{r}$ , untuk  $r$  sebagai jari-jari berupa konstanta sembarang. Akibatnya  $\omega(t)$  pada persamaan (2.9) dapat dituliskan sebagai berikut

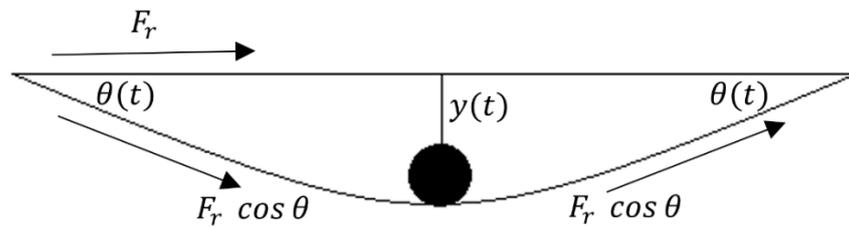
$$\omega(t) = \frac{1}{r} \frac{dx_m}{dt} \quad (2.10)$$

Karena gaya dorong  $F_r(t)$  yang dikenakan pada bola bermasa yang menggelinding di sepanjang dawai yang menyebabkan terjadinya lendutan,

maka terjadi pula sudut lendutan sebesar  $\theta(t)$ , maka persamaan (2.8) dapat dituliskan sebagai berikut

$$F_r(t) = m_b \left( \frac{dx_m}{dt} \right)^2 \frac{1}{2x_m r} \cos \theta(t) \quad (2.11)$$

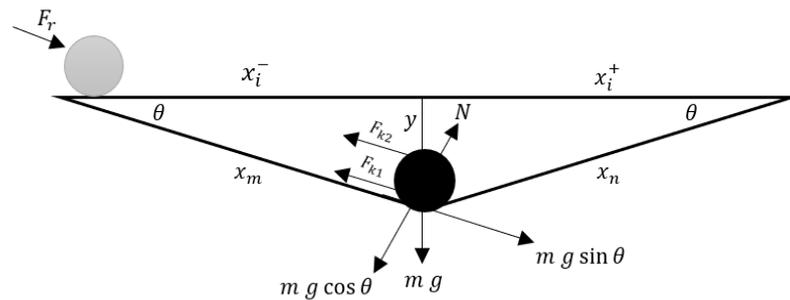
Penjelasan dari persamaan (2.11) diilustrasikan pada gambar (2.6) berikut



**Gambar 2.6** Ilustrasi Gaya Dorong di Partisi pada  $L$  Yakni di  $l$

b. Gaya Gesek ( $F_k$ ) dan Energi Potensial Gesek ( $E_{p_k}$ )

Berikut ilustrasi benda yang menggelinding karena adanya dorongan diilustrasikan pada Gambar 2.7



**Gambar 2.7** Ilustrasi Gaya Gesek

Berdasarkan gambar di atas, dawai yang dikenai massa dengan diberikan gaya dorong ( $F_r$ ) akan menghasilkan gaya gesek ( $F_k$ ) dengan arah yang berlawanan. Ketika peristiwa ini terjadi, maka terdapat gesekan antara dawai dengan benda, dawai dengan udara, dan benda dengan udara. **Pertama**, besar gaya gesek yang terjadi antara benda dengan dawai dinyatakan sebagai berikut (Nurlina and Riskawati 2017)

$$F_{k1} = \mu_k N$$

Di mana  $\mu_k$  merupakan koefisien gaya gesek dan  $N$  merupakan gaya normal yang didefinisikan dengan  $N = (m_b + m_d) g \cos \theta$ . Sehingga gaya gesek dawai dengan benda dapat dituliskan

$$F_{k1} = \mu_k (m_b + m_d) g \cos \theta \quad (2.12)$$

Kedua, gaya gesek yang terjadi antara benda dengan udara dinyatakan sebagai berikut

$$F_{k2} = k\eta v \cos \theta \quad (2.13)$$

Di mana  $k$  merupakan koefisien yang menyatakan bentuk benda,  $\eta$  merupakan koefisien viskositas, dan  $v$  merupakan kecepatan dawai. Sehingga gaya gesek total ( $F_k$ ) dapat dituliskan dengan

$$F_k = F_r(t) - (F_{k1} + F_{k2}) \quad (2.14)$$

$$F_k = m_b \left( \frac{dx_m}{dt} \right)^2 \frac{1}{2x_m r} \cos \theta - (\mu_k (m_b + m_d) g \cos \theta + k\eta v \cos \theta)$$

Mengingat hubungan antara  $x_m$  dan  $y$  dengan menggunakan kaidah *pythagoras* maka dapat diketahui bahwa

$$x_m = \sqrt{y^2 + x_i^{-2}} \quad (2.15)$$

Setelah diperoleh persamaan gaya gesek, langkah selanjutnya yaitu menghitung energi potensialnya. Untuk memperoleh energi potensial gesek total dengan menghitung integral untuk gaya gesek total. Diasumsikan gesekan terjadi pada sisi kiri benda, sehingga  $x$  diasumsikan sebagai  $x$  kiri. Dengan demikian

$$\Delta E p_k = - \int_0^{x_m = \sqrt{y^2 + x_i^{-2}}} F_k d(x_m)$$

$$E p_k - E p_k \text{ setimbang} = - \int_0^{\sqrt{y^2 + x_i^{-2}}} \left( m_b \left( \frac{dx_m}{dt} \right)^2 \frac{1}{2x_m r} \cos \theta - (\mu_k (m_d + m_b) g \sin \theta + k\eta v \cos \theta) \right) d(x_m)$$

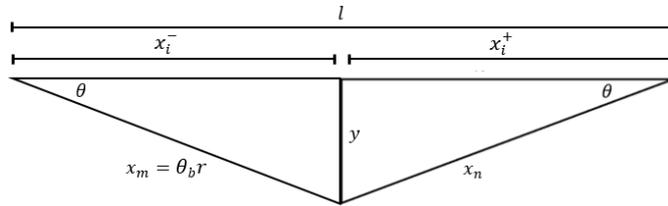
$$E p_k - 0 = - \left( \frac{m_b \cos \theta \ln(x_m)}{2r} \left( \frac{dx_m}{dt} \right)^2 + (\mu_k (m_d + m_b) g \sin \theta + k\eta v \cos \theta)(x_m) \right) x_m \Big|_0^{\sqrt{y^2 + x_i^{-2}}} = (m_d + m_b) \alpha$$

Sehingga diperoleh

$$Ep_k = -\frac{m_b \cos \theta \ln(x_m)}{2r} \left( \frac{d(\sqrt{y^2 + x_i^{-2}})}{dt} \right)^2 + (\mu_k(m_d + m_b) g \sin \theta + k\eta v \cos \theta) x_m - (m_d + m_b) \alpha \quad (2.16)$$

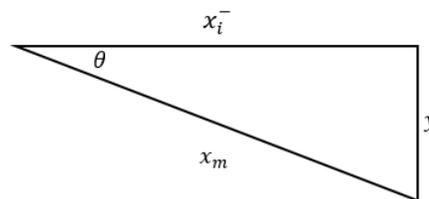
c. Gaya Tegangan ( $F_T$ ) dan Energi Potensial Tegangan ( $Ep_T$ )

Pada penelitian Janah dan Kusumastuti pada tahun 2021, dinyatakan panjang dawai mula-mula di sisi kiri ( $x_i^-$ ) dan di sisi kanan ( $x_i^+$ ) dapat berbeda dalam nilainya. Gaya tegangan oleh benda bermassa pada dawai dengan panjang  $l$  diasumsikan terjadi pada setengah panjang dawai dapat diilustrasikan pada Gambar 2.8 sebagai berikut:



**Gambar 2.8** Ilustrasi Simpangan Dawai di Partisi pada  $L$  Yakni di  $l$

Tahap pertama, berdasarkan gambar di atas, besar  $x_m$  diasumsikan sebagai jarak tempuh bola per satuan waktu yang melibatkan sudut perputaran bola  $\theta_b$ . Selanjutnya  $x_i^-$  diasumsikan sebagai panjang mula-mula dawai di sisi kiri seperti disajikan pada Gambar 2.9 sebagai berikut



**Gambar 2.9** Ilustrasi Peregangan di Sisi Kiri

Pada Gambar 2.9 panjang mula-mula dawai di sisi kiri ( $x_i^-$ ) dapat diketahui dengan menggunakan kaidah *pythagoras* yaitu sebagai berikut:

$$x_i^- = \sqrt{(x_m)^2 - (y)^2} \quad (2.17)$$

Berdasarkan teorema bidang momen (Dr. Muhtar 2020), sudut defleksi dawai  $\theta$  dan lendutan  $y$  didefinisikan sebagai

$$\theta = \frac{Wl^2}{2EI} \quad (2.18)$$

Di mana  $W = m g$ ,  $E$  modulus elastisitas dawai, dan  $I$  momen inersia benda. Diasumsikan  $l$  sebagai panjang sisi kiri dawai ( $x_i^-$ ), sehingga

$$l = (x_i^-) \quad (2.19)$$

Dengan memperhatikan persamaan (2.17) dan persamaan (2.19) kemudian mensubstitusikan ke (2.18) maka diperoleh :

$$\theta(t) = \frac{1}{2} \frac{mg(x_m^2 - y^2)}{EI} \quad (2.20)$$

Ketika diasumsikan dawai melendut tidak tepat di  $\frac{1}{2}l$ , dengan  $x_m = \theta_b r$  maka persamaan (2.20) dapat dituliskan sebagai

$$\theta(t) = \frac{a}{b} \frac{mg(\theta_b(t)^2 r^2 - y^2)}{EI} \quad (2.21)$$

Dari persamaan (2.21) dapat dinyatakan hubungan antara  $\theta_b$  dan  $\theta$  sebagai berikut :

$$\theta_b(t) = \frac{\sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g}} + y}{r} \quad (2.22)$$

Sehingga dapat dihitung nilai  $x_m$  adalah sebagai berikut :

$$x_m = \sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g}} + y \quad (2.23)$$

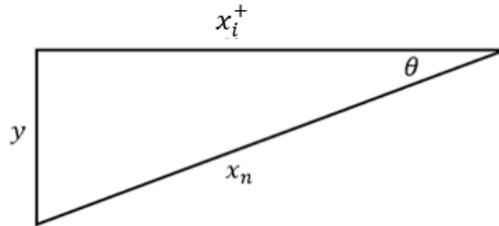
Selanjutnya dapat dihitung pertambahan panjang di sisi kiri ( $x^-$ ) sebagai berikut

$$\begin{aligned} x^- &= x_m - x_i^- \\ &= x_m - \sqrt{x_m^2 - y^2} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Setelah diketahui panjang mula-mula dawai di sisi kiri ( $x_i^-$ ), selanjutnya dapat dihitung peregangan dawai di sisi kiri  $e^-$  yang merupakan perbandingan antara pertambahan panjang dawai di sisi kiri  $x^-$  dan panjang mula-mula dawai di sisi kiri, yakni :

$$\begin{aligned} e^- &= \frac{x^-}{x_i^-} \\ &= \frac{x_m - \sqrt{x_m^2 - y^2}}{\sqrt{x_m^2 - y^2}} \\ &= \frac{x_m}{\sqrt{x_m^2 - y^2}} - 1 \end{aligned} \quad (2.25)$$

Tahap kedua, yaitu menghitung panjang mula-mula dawai di sisi kanan ( $x_i^+$ ) dengan ilustrasi yang digambarkan pada Gambar 2.10 sebagai berikut :



**Gambar 2.10** Ilustrasi Peregangan di Sisi Kanan

Panjang mula-mula dawai di sisi kanan ( $x_i^+$ ) dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_i^+ &= l - x_i^- \\ &= l - \sqrt{(x_m)^2 - (y)^2} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Selanjutnya dapat dihitung besar kemiringan simpangan di sisi kanan ( $x_n$ ) dengan menerapkan rumus trigonometri, yakni :

$$\cos \theta = \frac{x_i^+}{x_n}$$

Sehingga diperoleh

$$x_n = \frac{x_i^+}{\cos \theta} \quad (2.27)$$

Selanjutnya persamaan (2.27) dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$x_n = \frac{l - \sqrt{(x_m)^2 - (y)^2}}{\cos \theta} \quad (2.28)$$

Oleh karena itu, dapat dihitung panjang pertambahan di sisi kanan ( $x^+$ ) sebagai berikut

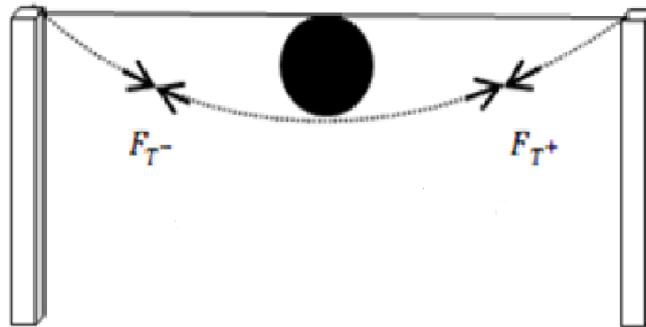
$$\begin{aligned} x^+ &= x_n - x_i^+ \\ &= \frac{l - \sqrt{(x_m)^2 - (y)^2}}{\cos \theta} - (l - \sqrt{(x_m)^2 - (y)^2}) \end{aligned}$$

Setelah diketahui panjang mula-mula dawai di sisi kanan ( $x_i^+$ ). Tahap selanjutnya dihitung besar peregangan dawai di sisi kanan  $e^+$  yang merupakan perbandingan antara pertambahan panjang dawai di sisi kanan

$x^+$  dan panjang mula-mula dawai di sisi kanan  $x_i^+$ , sehingga dapat dinyatakan :

$$\begin{aligned}
 e^+ &= \frac{x^+}{x_i^+} \\
 &= \frac{\frac{l - \sqrt{(x_m)^2 - (y)^2}}{\cos \theta} - (l - \sqrt{(x_m)^2 - (y)^2})}{l - \sqrt{(x_m)^2 - (y)^2}} \\
 &= \frac{1}{\cos \theta} - 1 \tag{2.29}
 \end{aligned}$$

Tahap ketiga, gaya tegangan di sisi kiri yang bekerja saat dawai dikenai massa dapat diilustrasikan pada Gambar 2.11



**Gambar 2.11** Ilustrasi Gaya Tegangan pada Dawai

Berdasarkan Gambar 2.11 tegangan terjadi di sisi kiri ( $F_{T-}$ ) dan sisi kanan ( $F_{T+}$ ). Gaya tegangan didefinisikan dengan minus dari besar tegangan, dikarenakan saat massa meluncur di sepanjang dawai terjadi gaya tarikan yang berlawanan dengan  $F_T$  yang melibatkan pengaruh sudut  $\theta$ , pada dawai berpenampang  $A$  dengan konstanta tegangan  $\sigma$ . Sehingga gaya tegangan pada vibrasi dawai dapat dituliskan sebagai berikut (Nurlina and Riskawati 2017)

$$F_T = \sigma A \cos \theta$$

Tegangan didefinisikan  $\sigma = E e$  dengan ( $E$ ) merupakan modulus elastisitas dan ( $e$ ) merupakan regangan. Sehingga gaya tegangan ( $F_T$ ) dapat dituliskan dengan

$$F_T = E e A \cos \theta \tag{2.30}$$

Berdasarkan persamaan (2.30) , maka besar gaya tegangan di sisi kiri adalah

$$F_{T^-} = E e^- A \cos \theta$$

Sehingga  $F_{T^-}$  dapat dinyatakan

$$F_{T^-} = EA \left( \frac{x_m}{\sqrt{(x_m)^2 - (y)^2}} \right) \cos \theta \quad (2.31)$$

Sedangkan besar gaya tegangan di sisi kanan adalah

$$F_{T^+} = E e^+ A \cos \theta$$

Sehingga  $F_{T^+}$  dapat dinyatakan

$$F_{T^+} = EA \left( \frac{1}{\cos \theta} - 1 \right) \cos \theta \quad (2.32)$$

Tahap keempat, menghitung energi potensial tegangan kiri. Energi potensial tegangan kiri merupakan negatif dari integral gaya tegangan kiri, yakni :

$$Ep_{T^-} = - \int_0^{x_m = \sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g}} + y} F_{T^-} d(x_m) \quad (2.33)$$

Selanjutnya, untuk menentukan perubahan potensial tegangan kiri ( $\Delta Ep_{T^-}$ ) melibatkan peregangannya ( $e^-$ ). Baik peregangannya di sisi kiri pada waktu setimbang ( $e_{setimbang}^-$ ), maupun peregangannya di sisi kiri setelah pembebanan ( $e_{setelah\ pembebanan}^-$ ). Karena sebelum pembebanan (kondisi setimbang) belum terjadi peregangannya, maka peregangannya di sisi kiri pada waktu setimbang bernilai nol. Sehingga energi potensial di sisi kiri pada waktu setimbang juga bernilai nol. Dengan demikian, dapat ditentukan besar perubahan energi potensial tegangan di sisi kiri ( $\Delta Ep_{T^-}$ ), yaitu :

$$\begin{aligned} \Delta Ep_{T^-} &= Ep_{T^-} - Ep_{T^- \text{ setimbang}} \\ &= Ep_{T^-} - 0 \end{aligned} \quad (2.34)$$

Berdasarkan persamaan (2.34), maka persamaan (2.33) dapat dituliskan kembali sebagai berikut :

$$\Delta Ep_{T^-} = - \int_0^{\sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g}} + y} F_{T^-} d(x_m)$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_0^{\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y} E e^{-A} d(x_m) \\
&= - \int_0^{\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y} E \left( \frac{x_m}{\sqrt{(x_m)^2 - (y)^2}} - 1 \right) \cos \theta A d(x_m) \\
&= - \int_0^{\sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y} \left( \frac{x_m}{\sqrt{(x_m)^2 - (y)^2}} - 1 \right) EA \cos \theta d(x_m)
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
Ep_{T^-} &= - \left( EA \cos \theta \sqrt{(x_m)^2 - (y)^2} - EA \cos \theta x_m \right) \\
&= - \left( EA \cos \theta \sqrt{\left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - (y)^2} - EA \cos \theta \left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right) \right) \\
&= -EA \cos \theta \sqrt{\left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - (y)^2} + EA \cos \theta \left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right) \quad (2.35)
\end{aligned}$$

Tahap kelima, menghitung energi potensial tegangan kanan, dengan mengingat kembali  $x_n$  pada persamaan (2.28). Oleh karena itu, energi potensial tegangan kanan merupakan negatif dari integral gaya tegangan kanan, yakni :

$$Ep_{T^+} = - \int_0^{x_n = \frac{l - \sqrt{(x_m)^2 - (y)^2}}{\cos \theta}} F_{T^+} d(x_n) \quad (2.36)$$

Selanjutnya, untuk menentukan perubahan potensial tegangan kanan ( $\Delta Ep_{T^+}$ ) melibatkan peregangan kanan ( $e^+$ ). Baik peregangan di sisi kanan pada waktu setimbang ( $e_{setimbang}^+$ ), maupun peregangan di sisi kanan setelah pembebanan ( $e_{setelah\ pembebanan}^+$ ). Karena sebelum pembebanan (kondisi setimbang) belum terjadi peregangan, maka peregangan di sisi kanan pada waktu setimbang bernilai nol. Sehingga energi potensial di sisi kanan pada waktu setimbang juga bernilai nol. Dengan demikian, dapat ditentukan besar perubahan energi potensial tegangan di sisi kanan ( $\Delta Ep_{T^+}$ ), yaitu :

$$\begin{aligned}
\Delta Ep_{T^+} &= Ep_{T^+} - Ep_{T^+ \text{ setimbang}} \\
&= Ep_{T^+} - 0 \quad (2.37)
\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (2.37), maka persamaan (2.36) dapat dituliskan kembali sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\Delta Ep_{T^+} &= - \int_0^{\frac{l - \sqrt{(x_m)^2 - (y)^2}}{\cos \theta}} F_{T^+} d(x_n) \\ Ep_{T^+} &= - \int_0^{\frac{l - \sqrt{(x_m)^2 - (y)^2}}{\cos \theta}} E e^+ A \cos \theta d(x_n) \\ Ep_{T^+} &= - \int_0^{\frac{l - \sqrt{(x_m)^2 - (y)^2}}{\cos \theta}} \left( \frac{1}{\cos \theta} - 1 \right) EA \cos \theta d(x_n)\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}Ep_{T^+} &= - \left( \frac{EA (l - \sqrt{(x_m)^2 - (y)^2})}{(\cos \theta)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{EA (l - \sqrt{(x_m)^2 - (y)^2})}{\cos \theta} \right) \cos \theta \\ &= - \left( \frac{EA (l - \sqrt{(x_m)^2 - (y)^2})}{\cos \theta} - EA (l - \sqrt{(x_m)^2 - (y)^2}) \right) \\ &= - \frac{EA (l - \sqrt{(x_m)^2 - (y)^2})}{\cos \theta} + EA (l - \sqrt{(x_m)^2 - (y)^2}) \quad (2.38)\end{aligned}$$

Substitusikan  $x_m = \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y$  pada persamaan (2.38) sehingga diperoleh

$$Ep_{T^+} = - \frac{EA \left( l - \sqrt{\left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} \right)}{\cos \theta} + EA \left( l - \sqrt{\left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} \right)$$

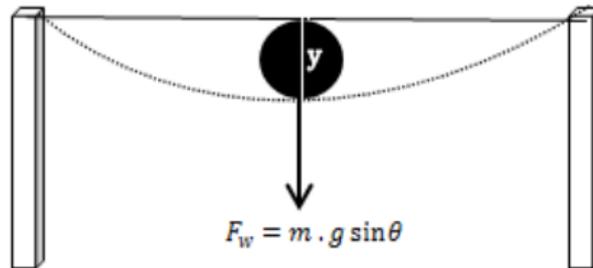
Dengan demikian,  $Ep_{T \text{ tot}}$  adalah penjumlahan dari persamaan ( $Ep_{T^-}$ ) dan ( $Ep_{T^+}$ ), yaitu :

$$Ep_{T \text{ tot}} = Ep_{T^+} + (-Ep_{T^-})$$

$$\begin{aligned}
Ep_{T \text{ tot}} &= -\frac{EA \left( l - \sqrt{\left( \frac{\theta b EI}{a m g} + y \right)^2 - y^2} \right)}{\cos \theta} + EA \left( l - \sqrt{\left( \frac{\theta b EI}{a m g} + y \right)^2 - y^2} \right) + \\
&\quad \left( - \left( -EA \cos \theta \sqrt{\left( \frac{\theta b EI}{a m g} + y \right)^2 - y^2} + EA \cos \theta \left( \frac{\theta b EI}{a m g} + y \right) \right) \right) \\
Ep_{T \text{ tot}} &= -\frac{EA \left( l - \sqrt{\left( \frac{\theta b EI}{a m g} + y \right)^2 - y^2} \right)}{\cos \theta} + EA \left( l - \sqrt{\left( \frac{\theta b EI}{a m g} + y \right)^2 - y^2} \right) + \\
&\quad EA \cos \theta \sqrt{\left( \frac{\theta b EI}{a m g} + y \right)^2 - y^2} - EA \cos \theta \left( \frac{\theta b EI}{a m g} + y \right) \quad (2.39)
\end{aligned}$$

d. Gaya Berat ( $F_w$ ) dan Energi Potensial Berat ( $Ep_w$ )

Suatu dawai yang dikenai massa menggeling akan mengalami pembebanan. Pembebanan ini yang menimbulkan adanya gaya berat yang diilustrasikan pada Gambar 2.12 berikut



**Gambar 2.12** Ilustrasi Gaya Berat

Pada gambar di atas menjelaskan bahwa dawai yang dikenai massa  $m_b$  pasti terjadi gaya berat. Karena gaya berat dipengaruhi oleh gravitasi ( $g$ ), menurut (Nurlina and Riskawati 2017) gaya berat dapat didefinisikan sebagai berikut

$$F_{berat} = F_w$$

$$F_w = (m_b + m_d) g \sin \theta \quad (2.40)$$

Di mana  $m_d$  merupakan massa dawai,  $m_b$  merupakan massa benda, dan  $g$  merupakan gravitasi yang mempengaruhi gaya berat tersebut. Setelah diperoleh persamaan gaya berat, langkah selanjutnya yaitu menghitung energi potensialnya. Karena gaya berat berada pada lintasan simpangan. Maka dalam menentukan energi potensial berat ( $Ep_w$ ) melibatkan simpangan ( $y$ )

$$\Delta Ep_w = - \int_0^y F_w d(y)$$

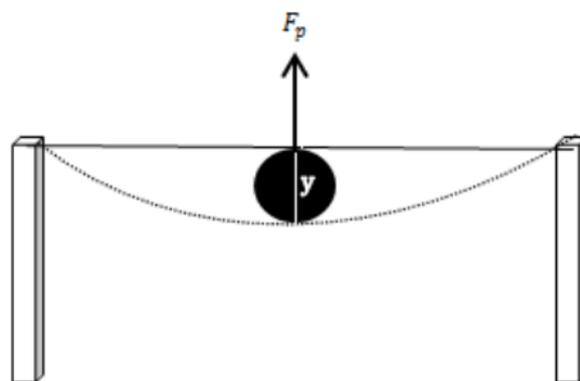
$$Ep_w - Ep_w \text{ setimbang} = - \int_0^y (m_d + m_b)g \sin \theta d(y)$$

Sehingga diperoleh

$$Ep_w = -(m_d + m_b)g y \sin \theta \quad (2.41)$$

e. Gaya Pegas ( $F_p$ ) dan Energi Potensial Pegas ( $Ep_p$ )

Gaya Pegas yang terlibat pada vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinging diilustrasikan pada Gambar 2.13 sebagai berikut



**Gambar 2.13** Ilustrasi Gaya Pegas

Pada Gambar di atas menjelaskan bahwa gaya pegas berfungsi sebagai gaya yang dapat mengembalikan dawai dalam keadaan seimbang.

Berdasarkan hukum Hooke, keadaan setimbang ditandai dengan tanda minus pada persamaan berikut (Nurlina and Riskawati 2017)

$$F_p = -k_p y \sin \theta \quad (2.42)$$

Di mana  $k_p$  merupakan koefisien pegas dan  $y$  merupakan simpangan dawai. Setelah diperoleh persamaan gaya pegas, langkah selanjutnya yaitu menghitung energi potensialnya. Karena gaya pegas berada pada lintasan yang sama dengan gaya berat, maka energi potensialnya adalah

$$\Delta E_{p_p} = - \int_{y-l \sin \theta}^{y+l \sin \theta} F_p d(y)$$

$$E_{p_p} - E_{p_p \text{ setimbang}} = - \int_{y-l \sin \theta}^{y+l \sin \theta} -k_p y \sin \theta d(y)$$

Sehingga diperoleh

$$E_{p_p} = \frac{1}{w} k_p ((y - l \sin \theta) + (y + l \sin \theta))^2 \quad (2.43)$$

f. Penjumlahan energi potensial berat dan energi potensial pegas

Karena gaya berat ( $F_w$ ) dan gaya pegas ( $F_p$ ) berada pada sumbu  $y$ , maka kedua gaya pada persamaan ( $E_{p_w}$ ) dan ( $E_{p_p}$ ) dapat dijumlahkan menjadi

$$E_{p_{pw}} = E_{p_p} - E_{p_w}$$

$$E_{p_{pw}} = \frac{1}{2} k_p ((y - l \sin \theta) + (y + l \sin \theta))^2 - (-(m_d + m_b) g y \sin \theta)$$

$$E_{p_{pw}} = \frac{1}{2} k_p ((y - l \sin \theta) + (y + l \sin \theta))^2 + (m_d + m_b) g y \sin \theta \quad (2.44)$$

## g. Energi potensial model

Dari identifikasi gaya-gaya pegas yang terkait, diperoleh energi potensial model ( $EP_M$ ). Energi potensial model ( $EP_M$ ) tersebut diperoleh dari penjumlahan seluruh energi potensial yang telah diidentifikasi, yaitu:

$$\begin{aligned}
 EP_M &= EP_k + EP_T + Ep_{pw} = (m_d + m_b) a, \text{ dengan } a = \ddot{y} \\
 EP_M &= -\frac{m_b \cos \theta(t) \ln\left(\sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g}} + y\right)}{2 r} (\dot{y} + \dot{x}_i^-)^2 + (\mu_k(m_d + m_b) g \sin \theta + \\
 &k\eta v \cos \theta) \left(\sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g}} + y\right) - \frac{EA \left(l - \sqrt{\left(\frac{\theta b EI}{a m g} + y\right)^2 - y^2}\right)}{\cos \theta} + EA \left(l - \right. \\
 &\left. \sqrt{\left(\frac{\theta b EI}{a m g} + y\right)^2 - y^2}\right) + EA \cos \theta \sqrt{\left(\frac{\theta b EI}{a m g} + y\right)^2 - y^2} - \\
 &EA \cos \theta \left(\sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g}} + y\right) + \frac{1}{2} k_p ((y - l \sin \theta) + (y + l \sin \theta))^2 + \\
 &(m_d + m_b) g \sin \theta y - (m_d + m_b) \ddot{y} \tag{2.45}
 \end{aligned}$$

Karena  $\dot{x}_i^-$  bernilai nol, maka persamaan (2.41) dapat dituliskan menjadi:

$$\begin{aligned}
 EP_M &= -\frac{m_b \cos \theta(t) \ln\left(\sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g}} + y\right)}{2 r} (\dot{y})^2 + (\mu_k(m_d + m_b) \cdot g \cdot \sin \theta + \\
 &k\eta v \cos \theta) \left(\sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g}} + y\right) - \frac{EA \left(l - \sqrt{\left(\frac{\theta b EI}{a m g} + y\right)^2 - y^2}\right)}{2 \cos \theta} + EA \left(l - \right. \\
 &\left. \sqrt{\left(\frac{\theta b EI}{a m g} + y\right)^2 - y^2}\right) + EA \cos \theta \sqrt{\left(\frac{\theta b EI}{a m g} + y\right)^2 - y^2} - \\
 &EA \cos \theta \left(\sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g}} + y\right) + \frac{1}{2} k_p ((y - l \sin \theta) + (y + l \sin \theta))^2 + \\
 &(m_d + m_b) g \sin \theta y - (m_d + m_b) \ddot{y} \tag{2.46}
 \end{aligned}$$

## 5. Memformulasikan Energi Kinetik

Setelah berhasil mengidentifikasi energi potensialnya, maka dilanjutkan dengan mengidentifikasi energi kinetiknya. Energi kinetik yang terjadi adalah energi kinetik translasi dan energi kinetik rotasi. Menurut (Synge and Griffith 1949) energi kinetik translasi ( $EK_T$ ) didefinisikan dengan

$$EK_T = \frac{1}{2}(m_d + m_b)v^2 \quad (2.47)$$

di mana  $v$  didefinisikan dengan  $\dot{y}$ , sehingga dapat dituliskan dengan

$$EK_T = \frac{1}{2}(m_d + m_b)(\dot{y})^2$$

Menurut (Synge and Griffith 1949) sedangkan energi kinetik rotasi ( $EK_R$ ) didefinisikan dengan

$$EK_R = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (2.48)$$

di mana kecepatan sudut ( $\omega$ ) =  $\dot{\theta}$  dan momen inersianya sebuah dawai yang berbentuk batang homogen ( $I$ ) =  $\frac{1}{3}ml^2$ , sehingga energi kinetik rotasi dapat dituliskan dengan

$$EK_R = \frac{1}{6}(m_d + m_b)l^2(\dot{\theta})^2$$

Setelah diketahui energi kinetik dawai dan energi kinetik benda maka energi kinetik model dapat diketahui melalui penjumlahan energi kinetik tersebut. Sehingga dapat diketahui energi kinetik model ( $EK_M$ ).

$$\begin{aligned} EK_M &= EK_T + EK_R \\ &= \frac{1}{2}(m_d + m_b)(\dot{y})^2 + \frac{1}{6}(m_d + m_b)l^2(\dot{\theta})^2 \end{aligned} \quad (2.49)$$

## 6. Menyusun Persamaan Lagrange

Persamaan *Lagrange* pada vibrasi dawai dikenai massa dengan gaya dorong dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 L &= EK_M - EP_M \\
 L &= \frac{1}{2}(m_d + m_b)(\dot{y})^2 + \frac{1}{6}(m_d + m_b)l^2(\dot{\theta})^2 - \\
 &\left( -\frac{m_b \cos \theta \ln\left(\sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g}} + y\right)}{2r} \left(\frac{dy^2}{dt^2}\right) + (\mu_k(m_d + m_b) g \sin \theta + \right. \\
 &k\eta v \cos \theta) \left(\sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g}} + y\right) - \frac{EA \left( l - \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g}} + y\right)^2 - y^2} \right)}{\cos \theta} + EA \left( l - \right. \\
 &\left. \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g}} + y\right)^2 - y^2} \right) + EA \cos \theta \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g}} + y\right)^2 - y^2} - \\
 &EA \cos \theta \left(\sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g}} + y\right) + \frac{1}{2}k_p((y - l \sin \theta) + (y + l \sin \theta))^2 + \\
 &\left. (m_d + m_b) g \sin \theta y - (m_d + m_b)\ddot{y} \right) = 0 \\
 L &= \frac{1}{2}(m_d + m_b)(\dot{y})^2 + \frac{1}{6}(m_d + m_b)l^2(\dot{\theta})^2 + \\
 &\frac{m_b \cos \theta \ln\left(\sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g}} + y\right)}{2r} (\dot{y})^2 \left(\sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g}} + y\right) + \frac{EA \left( l - \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g}} + y\right)^2 - (y)^2} \right)}{\cos \theta} - \\
 &EA \left( l - \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g}} + y\right)^2 - (y)^2} \right) - \\
 &EA \cos \theta \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g}} + y\right)^2 - y^2} + EA \cos \theta \left(\sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g}} + y\right) - \\
 &\frac{1}{2}k_p((y - l \sin \theta) + (y + l \sin \theta))^2 - (m_d + m_b) g \sin \theta y + \\
 &(m_d + m_b)\ddot{y} \tag{2.50}
 \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (2. 50), gerak dawai dikenai massa dengan gaya dorong merujuk pada persamaan *Euler-Lagrange* berikut (Thomson and Dahleh 2005)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{dy}{dt} \right)} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad (2.51)$$

dan

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{d\theta}{dt} \right)} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (2.52)$$

Langkah pertama adalah menurunkan persamaan (2.50) terhadap variabel  $y$ . sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y} = & \frac{m_b \cos \theta}{2r \left( \sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g} + y} \right)} (\dot{y})^2 - \mu_k (m_d + m_b) g \sin \theta - k \eta v \cos \theta - \\ & \frac{EA \sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g}}}{\cos \theta \sqrt{\left( \sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g} + y} \right)^2 - y^2}} + \frac{EA \sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g}}}{\sqrt{\left( \sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g} + y} \right)^2 - y^2}} - \frac{EA \cos \theta \sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g}}}{\sqrt{\left( \sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g} + y} \right)^2 - y^2}} + EA \cos \theta - \\ & 2k_p y - m g \sin \theta \end{aligned}$$

Langkah selanjutnya adalah menurunkan persamaan (2.50) terhadap variabel

$\frac{dy}{dt}$ . Sehingga diperoleh

$$\frac{\partial L}{\partial \left( \frac{dy}{dt} \right)} = (m_d + m_b) (\dot{y}) - \frac{m_b \sin \theta \ln \left( \sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g} + y} \right)}{r} (\dot{y}) + (m_d + m_b) (\dot{y})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \left( \frac{dy}{dt} \right)} = \left( 2 m_d + 2 m_b - \frac{m_b \sin \theta \ln \left( \sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g} + y} \right)}{r} \right) (\dot{y})$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{dy}{dt} \right)} \right) = \left( 2 m_d + 2 m_b - \frac{m_b \sin \theta \ln \left( \sqrt{\frac{\theta b EI}{a m g} + y} \right)}{r} \right) (\ddot{y})$$

Dengan demikian diperoleh persamaan (2.50) yang memenuhi persamaan (2.51) yaitu

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{dy}{dt} \right)} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

$$\left( 2 m_d + 2 m_b - \frac{m_b \sin \theta \ln \left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)}{r} \right) (\dot{y}) - \left( \frac{m_b \cos \theta}{2 r \left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)} (\dot{y})^2 - \right.$$

$$\mu_k (m_d + m_b) g \sin \theta - k \eta v \cos \theta - \frac{EA \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}}}{\cos \theta \sqrt{\left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)^2 - y^2}} +$$

$$\left. \frac{EA \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}}}{\sqrt{\left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)^2 - y^2}} - \frac{EA \cos \theta \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}}}{\sqrt{\left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)^2 - y^2}} + EA \cos \theta - 2 k_p y - m g \sin \theta \right) = 0$$

$$\left( 2 m_d + 2 m_b - \frac{m_b \sin \theta \ln \left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)}{r} \right) (\dot{y}) = \frac{m_b \cos \theta}{2 r \left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)} (\dot{y})^2 - \mu_k (m_d +$$

$$m_b) g \sin \theta - k \eta v \cos \theta - \frac{EA \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}}}{\cos \theta \sqrt{\left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)^2 - y^2}} + \frac{EA \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}}}{\sqrt{\left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)^2 - y^2}} -$$

$$\frac{EA \cos \theta \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}}}{\sqrt{\left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)^2 - y^2}} + EA \cos \theta - 2 k_p y - m g \sin \theta$$

$$(\dot{y}) = \left( \frac{m_b \cos \theta}{2 r \left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)} (\dot{y})^2 - \mu_k (m_d + m_b) g \sin \theta - k \eta v \cos \theta - \right.$$

$$\frac{EA \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}}}{\cos \theta \sqrt{\left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)^2 - y^2}} + \frac{EA \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}}}{\sqrt{\left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)^2 - y^2}} - \frac{EA \cos \theta \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}}}{\sqrt{\left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)^2 - y^2}} +$$

$$\left. \frac{EA \cos \theta - 2 k_p y - m g \sin \theta}{2 m_d r + 2 m_b r - m_b \sin \theta \ln \left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)} \right)$$

Langkah kedua adalah menurunkan persamaan (2.50) terhadap  $\theta$ . Langkah ini bertujuan untuk memenuhi persamaan (2.52). Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta} = & \frac{(\dot{y})^2}{2r} \left( -m_b \sin \theta \ln \left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right) + \frac{m_b \cos \theta b E I}{2 \left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right) \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}}} \right) - \\ & \mu_k (m_b + m_d) \cdot g \cdot \cos \theta \left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right) + k \eta v \sin \theta \left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right) - \\ & \frac{b E I (\mu_k (m_b + m_d) \cdot g \cdot \sin \theta + k \eta v \cos \theta)}{2 \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} a m g} - \frac{E^2 A b I \left( 2 \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + 2y \right)}{4 \cos \theta \sqrt{\left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}}} + \\ & \frac{E A l \sin \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{E A l \sin \theta}{\cos^2 \theta} \sqrt{\left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} + \frac{E^2 A b I \left( 2 \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + 2y \right)}{4 \sqrt{\left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}}} + \\ & E A \sin \theta \sqrt{\left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} - \frac{E^2 A b I \cos \theta \left( 2 \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + 2y \right)}{4 \sqrt{\left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}}} - \\ & E A \sin \theta \left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right) + \frac{E^2 A b I \cos \theta}{2 \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} a m g} - k_p l^2 \cos \theta \sin \theta - (m_d + \\ & m_b) g y \cos \theta \end{aligned}$$

Langkah selanjutnya adalah menurunkan persamaan (2.50) terhadap variabel  $\dot{\theta}$ . Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{dy}{dt} \right)} &= \frac{1}{3} (m_d + m_b) l^2 (\dot{\theta}) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{d\theta}{dt} \right)} \right) &= \frac{1}{3} (m_d + m_b) l^2 (\ddot{\theta}) \end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh persamaan (2.50) yang memenuhi persamaan (2.52) yaitu

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{d\theta}{dt} \right)} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{3} (m_d + m_b) l^2 (\ddot{\theta}) - \left( \frac{(\dot{y})^2}{2r} \left( -m_b \sin \theta \ln \left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{m_b \cos \theta b E I}{2 \left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right) \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} a m g} \right) - \mu_k (m_b + m_d) \cdot g \cdot \cos \theta \left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right) + \right. \\
& \left. k \eta v \sin \theta \left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right) - \frac{b E I (\mu_k (m_b + m_d) \cdot g \cdot \sin \theta + k \eta v \cos \theta)}{2 \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} a m g} - \right. \\
& \left. \frac{E^2 A b I \left( 2 \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + 2y \right)}{4 \cos \theta \sqrt{\left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} a m g} + \frac{E A l \sin \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{E A l \sin \theta}{\cos^2 \theta} \sqrt{\left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} + \right. \\
& \left. \frac{E^2 A b I \left( 2 \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + 2y \right)}{4 \sqrt{\left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} a m g} + E A \sin \theta \sqrt{\left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} - \right. \\
& \left. \frac{E^2 A b I \cos \theta \left( 2 \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + 2y \right)}{4 \sqrt{\left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} a m g} - E A \sin \theta \left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right) + \frac{E^2 A b I \cos \theta}{2 \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} a m g} - \right. \\
& \left. k_p l^2 \cos \theta \sin \theta - (m_d + m_b) g y \cos \theta \right) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{3} (m_d + m_b) l^2 (\ddot{\theta}) = \frac{(\dot{y})^2}{2r} \left( -m_b \sin \theta \ln \left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right) + \right. \\
& \left. \frac{m_b \cos \theta b E I}{2 \left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right) \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} a m g} \right) - \mu_k (m_b + m_d) \cdot g \cdot \cos \theta \left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right) + \\
& \left. k \eta v \sin \theta \left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right) - \frac{b E I (\mu_k (m_b + m_d) \cdot g \cdot \sin \theta + k \eta v \cos \theta)}{2 \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} a m g} - \right. \\
& \left. \frac{E^2 A b I \left( 2 \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + 2y \right)}{4 \cos \theta \sqrt{\left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} a m g} + \frac{E A l \sin \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{E A l \sin \theta}{\cos^2 \theta} \sqrt{\left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}} + y \right)^2 - y^2} + \right.
\end{aligned}$$

$$\frac{E^2 A b I \left( 2 \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + 2y} \right)}{4 \sqrt{\left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)^2 - y^2} \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}}} + EA \sin \theta \sqrt{\left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)^2 - y^2} -$$

$$\frac{E^2 A b I \cos \theta \left( 2 \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + 2y} \right)}{4 \sqrt{\left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)^2 - y^2} \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}}} - EA \sin \theta \left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right) + \frac{E^2 A b I \cos \theta}{2 \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}}} -$$

$$k_p l^2 \cos \theta \sin \theta - (m_d + m_b) g y \cos \theta$$

$$\ddot{\theta} = \left( \frac{(\dot{y})^2}{2r} \left( -m_b \sin \theta \ln \left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right) + \frac{m_b \cos \theta b E I}{2 \left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right) \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}}} \right) - \right.$$

$$\mu_k (m_b + m_d) \cdot g \cdot \cos \theta \left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right) + k \eta v \sin \theta \left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right) -$$

$$\frac{b E I (\mu_k (m_b + m_d) \cdot g \cdot \sin \theta + k \eta v \cos \theta)}{2 \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}}} + \frac{E^2 A b I \left( 2 \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + 2y} \right)}{4 \cos \theta \sqrt{\left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)^2 - y^2} \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}}} +$$

$$\frac{EA l \sin \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{EA l \sin \theta}{\cos^2 \theta} \sqrt{\left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)^2 - y^2} + \frac{E^2 A b I \left( 2 \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + 2y} \right)}{4 \sqrt{\left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)^2 - y^2} \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}}} +$$

$$EA \sin \theta \sqrt{\left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)^2 - y^2} - \frac{E^2 A b I \cos \theta \left( 2 \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + 2y} \right)}{4 \sqrt{\left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)^2 - y^2} \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}}} -$$

$$EA \sin \theta \left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right) + \frac{E^2 A b I \cos \theta}{2 \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}}} - k_p l^2 \cos \theta \sin \theta - (m_d +$$

$$m_b) g y \cos \theta \left. \right) \frac{3}{(m_d + m_b) l^2}$$

Sehingga pada penelitian (Janah and Kusumastuti 2021) menghasilkan suatu persamaan diferensial biasa orde dua yaitu

$$\begin{aligned}
(\ddot{y}) = & \left( \frac{m_b \cos \theta}{2r \left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)} (\dot{y})^2 - \mu_k (m_d + m_b) g \sin \theta - k \eta v \cos \theta - \right. \\
& \frac{EA \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}}}{\cos \theta \sqrt{\left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)^2 - y^2}} + \frac{EA \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}}}{\sqrt{\left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)^2 - y^2}} - \frac{EA \cos \theta \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g}}}{\sqrt{\left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)^2 - y^2}} + EA \cos \theta - \\
& \left. 2k_p y - m g \sin \theta \right) \frac{r}{2m_d r + 2m_b r - m_b \sin \theta \ln \left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)} \quad (2.53)
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta} = & \left( \frac{(\dot{y})^2}{2r} \left( -m_b \sin \theta \ln \left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right) + \frac{m_b \cos \theta b E I}{2 \left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right) \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} a m g}} \right) - \mu_k (m_b + \right. \\
& m_d) \cdot g \cdot \cos \theta \left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right) + k \eta v \sin \theta \left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right) - \\
& \frac{b E I (\mu_k (m_b + m_d) \cdot g \cdot \sin \theta + k \eta v \cos \theta)}{2 \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} a m g}} - \frac{E^2 A b I \left( 2 \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + 2y} \right)}{4 \cos \theta \sqrt{\left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)^2 - y^2} \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} a m g}} + \\
& \frac{EA l \sin \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{EA l \sin \theta}{\cos^2 \theta} \sqrt{\left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)^2 - y^2} + \frac{E^2 A b I \left( 2 \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + 2y} \right)}{4 \sqrt{\left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)^2 - y^2} \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} a m g}} + \\
& EA \sin \theta \sqrt{\left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)^2 - y^2} - \frac{E^2 A b I \cos \theta \left( 2 \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + 2y} \right)}{4 \sqrt{\left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right)^2 - y^2} \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} a m g}} - \\
& EA \sin \theta \left( \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} + y} \right) + \frac{E^2 A b I \cos \theta}{2 \sqrt{\frac{\theta b E I}{a m g} a m g}} - k_p l^2 \cos \theta \sin \theta - (m_d + \\
& m_b) g y \cos \theta \left. \right) \frac{3}{(m_d + m_b) l^2} \quad (2.54)
\end{aligned}$$

Namun model yang dinyatakan dalam persamaan (2.53) dan (2.54)

ternyata menghasilkan profil grafik yang kurang realistis. Sehingga perlu

dilakukan revisi model sampai menghasilkan profil grafik dari vibrasi dawai yang sesuai dengan keadaan riil nya.

### 2.1.3 Model Vibrasi Dawai (Janah and Kusumastuti 2021) Direvisi

Model vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai yang telah dikonstruksi oleh Jannah dan Kusumastuti pada tahun 2021 mengalami kendala pada profil  $y(t)$  dan  $\theta(t)$  yang tidak stabil. Oleh karena itu dilakukan eksplorasi terus menerus dengan melibatkan penelitian McKenna pada tahun 1999. Modifikasi tersebut dilakukan dengan: (a) energi potensial gesek diakomodir sebagai energi kinetik translasi, (b) energi potensial berat dan dorong selain bertugas sebagai energi potensial, juga diakomodir sebagai energi kinetik translasi. Maka pada model ter revisi mempertimbangkan energi yang terjadi pada benda dan dawai.

Model vibrasi dawai ter revisi dari Jannah dan Kusumastuti, 2021 mempertimbangkan perubahan pengelompokan energi dalam dua kelompok besar yaitu energi pada benda dan energi pada dawai. Energi pada benda meliputi energi potensial dorong ( $Ep_r(benda)$ ), energi potensial berat ( $Ep_w(benda)$ ) dan energi potensial pegas ( $Ep_p(benda)$ ). Energi kinetik benda meliputi energi kinetik Translasi ( $Ek_t(benda)$ ) dan energi kinetik rotasi ( $Ek_R(benda)$ ). Sementara itu, pada dawai berlaku energi kinetik translasi dawai ( $Ek_T(dawai)$ ) dan energi kinetik rotasi dawai ( $Ek_R(dawai)$ ). Sedangkan energi potensial yang terlibat pada dawai yakni energi potensial berat dawai ( $Ep_w(dawai)$ ) dan energi potensial pegas dawai ( $Ep_p(dawai)$ ). Revisi dari model Janah dan Kusumastuti tahun 2021

sebelumnya dengan mempertimbangkan kaidah pengelompokan di atas menghasilkan profil grafik yang lebih realistis.

Berikut ini adalah beberapa energi pada benda yang terlibat dalam model vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai yang telah dimodifikasi:

1. Energi Kinetik Translasi ( $Ek_T(benda)$ )

Energi kinetik translasi yang terjadi pada benda ( $Ek_T(benda)$ ) adalah sebagai berikut (Nurlina and Riskawati 2017)

$$w = \Delta Ek \quad (2.55)$$

Dalam hal ini  $w$  merupakan usaha total pada benda yang merupakan jumlahan dari semua gaya dikalikan dengan jarak tempuh benda yang diasumsikan berada di tengah dawai ( $s$ ). Sementara itu  $\Delta Ek$  merupakan perubahan energi kinetik benda di posisi setelah menggelinding ( $Ek_B$ ) terhadap posisi seimbang ( $Ek_A$ ). Berdasarkan persamaan (2.48) maka gaya-gaya yang terlibat pada  $w$  meliputi: gaya dorong  $F_r$  (seperti diilustrasikan gambar 2.6), gaya berat (seperti diilustrasikan pada persamaan 2.40), gaya gesek (seperti diilustrasikan pada persamaan 2.14), sehingga diperoleh ekspresi berikut:

$$F_r \cos \theta s + m g \sin \theta s - F_{k1} s - F_{k2} s = Ek_B - Ek_A \quad (2.56)$$

Energi kinetik pada posisi seimbang ( $Ek_A$ ) merupakan kondisi dimana bola dalam kondisi diam, sehingga nilainya sama dengan nol. Oleh karena itu, persamaan (2.56) dapat ditulis menjadi

$$(F_r \cos \theta + m g \sin \theta - F_{k1} - F_{k2}) s = Ek_B \quad (2.57)$$

Dengan memperhatikan persamaan (2.12) untuk  $F_{k1}$  dan persamaan (2.13) untuk  $F_{k2}$ , maka persamaan (2.57) dapat dituliskan kembali sebagai berikut

$$(F_r \cos \theta + m g \sin \theta - \mu m_b g \cos \theta - k \eta v \cos \theta) s = Ek_B \quad (2.58)$$

2. Energi Kinetik Rotasi ( $Ek_{R(benda)}$ )

Energi kinetik rotasi berdasarkan pada persamaan (2.48) Energi kinetik rotasi yang terjadi pada benda  $Ek_{R(benda)}$  adalah sebagai berikut

$$Ek_{R(benda)} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

di mana kecepatan sudut ( $\omega$ ) =  $\dot{\theta}$  dan momen inersianya sebuah bola pejal didefinisikan sebagai ( $I$ ) =  $\frac{2}{5} m_b r^2$  dengan  $m_b$  merupakan massa benda dan  $r$  merupakan jari-jari bola, sehingga energi kinetik rotasi pada benda itu berupa bola dapat dituliskan dengan

$$Ek_{R(benda)} = \frac{1}{5} m_b r^2 (\dot{\theta})^2$$

3. Energi Potensial Berat ( $Ep_w(benda)$ )

Energi potensial berat yang terjadi pada benda ( $Ep_w(benda)$ ) berdasarkan pada persamaan (2.40) adalah sebagai berikut:

$$Ep_w(benda) = -m_b g y$$

di mana  $m_b$  merupakan massa benda,  $g$  merupakan gravitasi yang mempengaruhi berat benda tersebut, dan  $y$  merupakan lintasan simpangan yang terjadi pada gaya gravitasi

4. Energi Potensial Pegas ( $Ep_p(benda)$ )

Energi Potensial Pegas yang terjadi pada benda ( $Ep_p(benda)$ ) berdasarkan pada persamaan (2.42) adalah sebagai berikut

$$Ep_p(benda) = \frac{1}{2} k y^2$$

## 5. Energi Potensial Dorong ( $Fr$ )

Pada revisi model nilai energi potensial dorong ( $Fr$ ) yang semula berupa fungsi, saat ini diasumsikan sebagai konstanta dengan satuan  $N$ .

Di pihak lain, energi pada dawai yang terlibat dalam model vibrasi dawai yang dikenai massa menggeling di sepanjang dawai yang telah dimodifikasi meliputi:

### 1. Energi Kinetik Translasi ( $Ek_T(dawai)$ )

Energi kinetik translasi yang terjadi pada dawai  $Ek_T(dawai)$  berdasarkan persamaan (2.47) adalah sebagai berikut

$$Ek_T(dawai) = \frac{1}{2} m_d v^2$$

di mana  $m_d$  merupakan massa dawai dan  $v$  didefinisikan sebagai kecepatan yang merupakan turunan satu dari jarak  $y$  yang dinotasikan sebagai  $\dot{y}$ , sehingga dapat dituliskan dengan

$$Ek_T(dawai) = \frac{1}{2} m_d (\dot{y})^2$$

### 2. Energi Kinetik Rotasi $Ek_R(dawai)$

Energi kinetik rotasi yang terjadi pada dawai  $Ek_R(dawai)$  berdasarkan persamaan (2.48) adalah sebagai berikut

$$Ek_R(dawai) = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (2.59)$$

di mana kecepatan sudut ( $\omega$ ) =  $\dot{\theta}$  dan momen inersianya sebuah dawai yang berbentuk batang homogen didefinisikan sebagai ( $I$ ) =  $\frac{1}{3} m_d l^2$  dengan  $m_d$

merupakan massa dawai dan  $l$  merupakan panjang dawai, sehingga energi kinetik dawai paada persamaan (2.59) dapat dituliskan kembali sebagai berikut

$$Ek_{R(dawai)} = \frac{1}{6} m_d l^2 (\dot{\theta})^2 \quad (2.60)$$

### 3. Energi Potensial Berat ( $Ep_w(dawai)$ )

Energi potensial berat yang terjadi pada dawai ( $Ep_w(dawai)$ ) berdasarkan persamaan (2.38) adalah sebagai berikut:

$$Ep_w(dawai) = -m_d g y$$

di mana  $m_d$  merupakan massa dawai,  $g$  merupakan gravitasi yang mempengaruhi berat dawai tersebut, dan  $y$  merupakan lintasan simpangan yang terjadi pada gaya gravitasi

### 4. Energi Potensial Pegas ( $Ep_p(dawai)$ )

Energi potensial pegas yang terjadi pada dawai  $Ep_p(dawai)$  berdasarkan pada persamaan (2.42) menggunakan asumsi baru bahwa  $y =$

$(y - l \sin \theta) + (y - l \sin \theta)$  adalah sebagai berikut

$$Ep_p(dawai) = \frac{1}{2} k ((y - l \sin \theta) + (y - l \sin \theta))^2 \quad (2.61)$$

Selanjutnya, energi-energi yang bekerja pada benda dan dawai yang telah dijelaskan di atas akan dimasukkan ke persamaan lagrange. Persamaan *Lagrange* pada vibrasi dawai dikenai massa dengan gaya dorong dapat dituliskan sebagai berikut

$$L = Ek_{(benda+dawai)} - EP_{(benda+dawai)} \quad (2.62)$$

Substitusikan nilai-nilai  $Ek_{(benda+dawai)}$  dan  $EP_{(benda+dawai)}$  dari persamaan (2.51) sampai (2.61) ke persamaan (2.62), sehingga dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
L &= (Ek_{Tb} + Ek_{Rb} + Ek_{Td} + Ek_{Rd}) - (Fr + Ep_{wb} + Ep_{pb} + Ep_{wd} + Ep_{pd}) \\
&= \left( (F_r \cos \theta + m g \sin \theta - \mu m_b g \cos \theta - k \eta v \cos \theta) s + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{5} m_b r^2 (\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} m_d (\dot{y})^2 + \frac{1}{6} m_d l^2 (\dot{\theta})^2 \right) - \left( F_r - m_b g y + \frac{1}{2} k y^2 - \right. \\
&\quad \left. m_d g y + \frac{1}{2} k ((y - l \sin \theta) + (y + l \sin \theta))^2 \right) \\
&= (F_r \cos \theta + m g \sin \theta - \mu m_b g \cos \theta - k \eta v \cos \theta) s + \frac{1}{5} m_b r^2 (\dot{\theta})^2 + \\
&\quad \frac{1}{2} m_d (\dot{y})^2 + \frac{1}{6} m_d l^2 (\dot{\theta})^2 + F_r + m_b g y + \frac{1}{2} k y^2 - m_d g y + \frac{1}{2} k ((y - \\
&\quad l \sin \theta) + (y + l \sin \theta))^2 \tag{2.63}
\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (2.63), gerak dawai dikenai massa dengan gaya dorong merujuk pada persamaan *Euler-Lagrange* berikut

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{\partial L}{\partial y} \tag{2.64}$$

dan

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \tag{2.65}$$

Langkah pertama adalah menurunkan persamaan (2.63) terhadap variabel  $y$ . sehingga diperoleh

$$\frac{\partial L}{\partial y} = (m_b + m_d) g - 2 k ((y - l \sin \theta) + (y + l \sin \theta))$$

Langkah selanjutnya adalah menurunkan persamaan (2.63) terhadap variabel  $\dot{y}$ .

Sehingga diperoleh

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = m_d \ddot{y}$$

Dengan demikian diperoleh persamaan (2.63) yang memenuhi persamaan (2.64) yaitu

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{\partial L}{\partial y}$$

sehingga diperoleh

$$m_d \ddot{y} = (m_b + m_d) g - 2k((y - l \sin \theta) + (y + l \sin \theta)),$$

yakni

$$\ddot{y} = -F_r - \frac{2k}{m_d} ((y - l \sin \theta) + (y + l \sin \theta)) + \frac{(m_b + m_d)g}{m_d} \quad (2.66)$$

Dengan memperhatikan  $((y - l \sin \theta) + (y + l \sin \theta)) = 2y$ , maka persamaan

(2.65) dapat ditulis dengan

$$\ddot{y} = -F_r - \frac{4ky}{m_d} + \frac{(m_b + m_d)g}{m_d} \quad (2.67)$$

Langkah kedua adalah menurunkan persamaan (2.63) terhadap  $\theta$ . Langkah ini

bertujuan untuk memenuhi persamaan (2.51). Sehingga diperoleh

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = (-F_r \sin \theta + m_b g \cos \theta + \mu m_b g \sin \theta + k \eta v \sin \theta) s - k l \cos \theta ((y - l \sin \theta) - (y + l \sin \theta))$$

Langkah selanjutnya adalah menurunkan persamaan (2.49) terhadap variabel  $\dot{\theta}$ .

Sehingga diperoleh

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \left( \frac{2}{5} m_b r^2 + \frac{1}{3} m_d l^2 \right) \ddot{\theta}$$

Dengan demikian, diperoleh persamaan (2.49) yang memenuhi persamaan (2.51)

yaitu

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

sehingga diperoleh

$$\left( \frac{2}{5} m_b r^2 + \frac{1}{3} m_d l^2 \right) \ddot{\theta} = (m_b g \cos \theta + \mu m_b g \sin \theta + k \eta v \sin \theta) s - k l \cos \theta ((y - l \sin \theta) - (y + l \sin \theta)),$$

yakni

$$\ddot{\theta} = \frac{(-F_r \sin \theta + m_b g \cos \theta + \mu m_b g \sin \theta + k \eta v \sin \theta) s - k l \cos \theta ((y - l \sin \theta) - (y + l \sin \theta))}{\left( \frac{2}{5} m_b r^2 + \frac{1}{3} m_d l^2 \right)}$$

Dengan memperhatikan  $((y - l \sin \theta) - (y + l \sin \theta)) = -2 l \sin \theta$ , maka dapat ditulis sebagai

$$\ddot{\theta} = \frac{(-F_r \sin \theta m_b g \cos \theta + \mu m_b g \sin \theta + k \eta v \sin \theta)s + 2 k l^2 \cos \theta \sin \theta}{\left(\frac{2}{5} m_b r^2 + \frac{1}{3} m_d l^2\right)}$$

Kemudian perlu menyederhanakan dan menambahkan suku redam viskos kecil pada  $y$  dan  $\theta$  sebagai akibat interaksi dengan fluida sebesar  $-\delta \dot{y}$  dan  $-\delta \dot{\theta}$  (McKenna, 1999), sehingga diperoleh

$$\ddot{y} = -\delta \dot{y} - F_r - \frac{4k_p y}{m_d} + \frac{(m_b + m_d)g}{m_d} \quad (2.68)$$

Dan

$$\ddot{\theta} = -\delta \dot{\theta} - \frac{(-F_r \sin \theta + m_b g \cos \theta + \mu m_b g \sin \theta + k \eta v \sin \theta)s + 2 k l^2 \cos \theta \sin \theta}{\left(\frac{2}{5} m_b r^2 + \frac{1}{3} m_d l^2\right)} \quad (2.69)$$

Menurut (McKenna 1999), sudut diasumsikan mendekati 0 sehingga dapat dilakukan penyederhanaan dengan mensubstitusikan  $\sin \theta \approx \theta$  dan  $\cos \theta \approx 1$ , dan dengan mengasumsikan jarak tempuh benda ( $s$ ) berada di tengah dawai, sehingga persamaan (2.68) dan (2.69) dapat dituliskan sebagai berikut

$$\ddot{y} = -\delta \dot{y} - \frac{4 k_p y}{m_d} + \frac{(m_b + m_d)g}{m_d} - F_r \quad (2.70)$$

dan

$$\ddot{\theta} = -\delta \dot{\theta} - \frac{\left(-\frac{1}{2} F_r + \frac{1}{2} \mu m_b g + \frac{1}{2} k \eta v + 2 k l\right) l \theta}{\left(\frac{2}{5} m_b r^2 + \frac{1}{3} m_d l^2\right)} + \frac{\frac{l}{2} m_b g}{\left(\frac{2}{5} m_b r^2 + \frac{1}{3} m_d l^2\right)} \quad (2.71)$$

Selanjutnya untuk keperluan analitik, perlu adanya penyederhanaan dan diabaikannya suku yang tidak mengandung variabel terikat untuk persamaan (2.70) dan (2.71), sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut

$$\ddot{y} = -\delta \dot{y} - \frac{4 k_p}{m_d} y$$

dan

$$\ddot{\theta} = -\delta\dot{\theta} - \frac{\left(-\frac{1}{2} F_r + \frac{1}{2} \mu m_b g + \frac{1}{2} k_p \eta v + 2 k l\right) l}{\left(\frac{2}{5} m_b r^2 + \frac{1}{3} m_d l^2\right)} \theta$$

Persamaan (2.70) dan (2.71) membentuk suatu persamaan diferensial biasa orde dua yang pada penelitian ini akan dicari solusi analitik untuk  $y(t)$  dan  $\theta(t)$ .

#### 2.1.4 Penelitian Rujukan

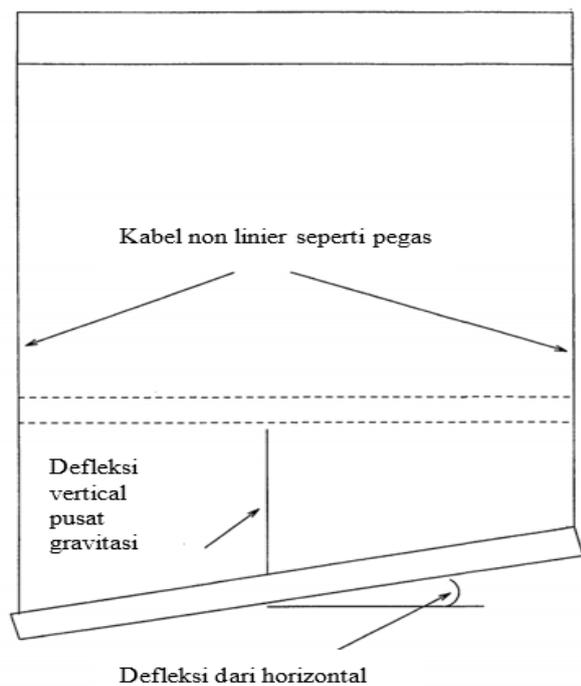
Fokus penelitian ini yaitu solusi analitik model vibrasi dawai oleh Janah dan Kusumastuti, 2021. Langkah penyelesaian analitik dalam penelitian ini menggunakan beberapa rujukan dari penelitian sebelumnya yakni :

1. Penelitian McKenna Tahun 1999

Pada tahun 1940 terjadi peristiwa runtuhnya jembatan gantung Tacoma. Peristiwa tersebut membuat matematikawan (Lazer and McKenna 1990) melakukan penelitian tentang pemodelan matematika jembatan gantung. Penelitian tersebut menjelaskan penyebab terjadinya runtuhnya jembatan secara matematis. Selanjutnya, model yang diperoleh dari penelitian tersebut mengalami perbaikan pada penelitian yang dilakukan oleh McKenna pada tahun 1999. (McKenna 1999) mempertimbangkan penampang horizontal dari bentang tengah jembatan gantung dan mengusulkan model persamaan diferensial biasa untuk gerakan puntir penampang. Model matematika tersebut dirumuskan dengan memperhatikan balok yang berosilasi secara torsional dengan seimbang dan digantung pada kedua ujungnya oleh kabel. Untuk memodelkan gerakan jembatan gantung, McKenna menganggap bahwa penampang horizontal jembatan gantung sebagai balok (batang) panjangnya  $2l$  dan massa  $m$  digantungkan oleh kabel non-linier.  $y(t)$

menunjukkan jarak ke bawah dari pusat gravitasi batang dari keadaan tidak dibebani dan  $\theta(t)$  menunjukkan bahwa sudut batang dari horizontal pada waktu  $t$ .

Diasumsikan batang digantung pada pegas yang menahan ekspansi dengan konstanta pegas  $k_p$  di setiap ujungnya yang diilustrasikan pada Gambar (2.14).



**Gambar 2.14** Ilustrasi Batang yang Digantung pada Pegas di Setiap Ujungnya

Persamaan untuk osilasi vertikal dan torsional menggunakan konstanta pegas ( $k_p$ ) diperpanjang sejauh  $y$  dengan energi potensial pegasnya adalah  $\frac{1}{2}k_p y^2$  dan energi potensial beratnya adalah  $-mgy$ . Eksistensinya adalah  $(y - l \sin \theta)^+$  di satu pegas dan  $(y + l \sin \theta)^+$  di pegas lainnya. Diasumsikan bahwa sudu kecil tersembunyi di bawah kabel tetap vertikal,

meskipun gerakan lateral ujung pelat atau batang membelokkannya sedikit ke kiri atau kanan. Sehingga energi potensial totalnya adalah

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2}k_p y^2 + (-mgy) \\ &= \frac{1}{2}k_p((y - l \sin \theta)^+ + (y + l \sin \theta)^+)^2 - mgy \end{aligned} \quad (2.72)$$

Apabila batang bermassa  $m$  dan panjangnya  $2l$  berputar di sekitar pusat gravitasi dengan kecepatan sudut  $\theta$ , maka energi kinetiknya  $\frac{1}{2}I\omega^2$ , di mana  $\omega = \dot{\theta}$  dan momen inersia batang  $I = \frac{1}{3}ml^2$ . Maka energi kinetik pada batang dapat ditulis  $\frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2$ . Sedangkan energi kinetik yang terjadi pada benda adalah  $\frac{1}{2}mv^2$ , di mana  $m$  adalah massa benda dan  $v$  adalah kecepatan benda yang didefinisikan dengan  $\dot{y}$ . Maka energi kinetik yang terjadi pada benda dapat ditulis  $\frac{1}{2}m\dot{y}^2$ . Sehingga diperoleh energi kinetik totalnya sebagai berikut (Synge and Griffith 1949)

$$E_k = \frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 \quad (2.73)$$

Selanjutnya menyusun persamaan Lagrange  $L = E_k - E_p$ , sehingga dapat dituliskan sebagai berikut

$$L = \frac{1}{6}m_d l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_d \dot{y}^2 - \frac{1}{2}k_p((y - l \sin \theta)^+ + (y + l \sin \theta)^+)^2 + mgy \quad (2.74)$$

Berdasarkan persamaan (2.74), gerakan puntir penampang merujuk pada persamaan *Euler-Lagrange* berikut

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad (2.75)$$

dan

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{\partial L}{\partial y} \quad (2.76)$$

Tahap pertama adalah menurunkan persamaan (2.74) terhadap  $\theta$ . Langkah ini bertujuan untuk memenuhi persamaan (2.75). Sehingga diperoleh

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = K_p l \cos \theta ((y - l \sin \theta)^+ + (y + l \sin \theta)^+)$$

Langkah selanjutnya adalah menurunkan persamaan (2.74) terhadap variabel  $\dot{\theta}$ . Sehingga diperoleh

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{1}{3} m l^2 \ddot{\theta}$$

Dengan demikian, diperoleh persamaan (2.74) yang memenuhi persamaan (2.75) yaitu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial \theta} \\ \frac{1}{3} m l^2 \ddot{\theta} &= K_p l \cos \theta ((y - l \sin \theta)^+ + (y + l \sin \theta)^+) \end{aligned} \quad (2.77)$$

Tahap kedua adalah menurunkan persamaan (2.74) terhadap variabel  $y$ . sehingga diperoleh

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -k_p ((y - l \sin \theta)^+ + (y + l \sin \theta)^+) + mg$$

Langkah selanjutnya adalah menurunkan persamaan (2.74) terhadap variabel  $\dot{y}$ . Sehingga diperoleh

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = m \ddot{y}$$

Dengan demikian diperoleh persamaan (2.74) yang memenuhi persamaan (2.76) yaitu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial y} \\ m \ddot{y} &= -k_p ((y - l \sin \theta)^+ + (y + l \sin \theta)^+) + mg \end{aligned} \quad (2.78)$$

Karena pegas diasumsikan tetap vertikal, gaya yang diberikan oleh pegas tidak dalam arah puntir tetapi membentuk sudut  $\theta$  yang tegak lurus

terhadap batang. Inilah mengapa perlu ditambahkan  $\cos \theta$  dalam persamaan torsi dalam pegas. Selain itu perlu menyederhanakan dan menambahkan suku redam viskos kecil pada  $y$  dan  $\theta$  sebagai akibat interaksi dengan fluida sebesar  $\delta \dot{y}$  dan  $\delta \dot{\theta}$ . Serta menambahkan suku gaya eksternal  $f(t)$  pada persamaan torsi. Sehingga persamaan (2.58) dan (2.59) dapat dituliskan sebagai berikut

$$\ddot{\theta} = -\delta \dot{\theta} + \frac{3K_p}{ml} \cos \theta ((y - l \sin \theta)^+ - (y + l \sin \theta)^+) + f(t) \quad (2.79)$$

dan

$$\ddot{y} = -\delta \dot{y} - \frac{k_p}{m} ((y - l \sin \theta)^+ + (y + l \sin \theta)^+) + g \quad (2.80)$$

Jika kita menganggap kabel tidak pernah kehilangan tegangan maka  $(y - l \sin \theta)^+ = (y - l \sin \theta)$  dan  $(y + l \sin \theta)^+ = (y + l \sin \theta)$ . Untuk suku gaya gaya luar berupa  $f(t) = \lambda \sin(\mu \theta)$  yakni sebagai gaya osilasi generik dengan frekuensi dan amplitudo yang tepat. Sehingga persamaan (2.57) dan (2.58) dapat dituliskan sebagai berikut

$$\ddot{\theta} = -\delta \dot{\theta} - \frac{6K_p}{m} \cos \theta \sin \theta + \lambda \sin(\mu \theta) \quad (2.81)$$

dan

$$\ddot{y} = -\delta \dot{y} - \frac{2K_p y}{m} + g \quad (2.82)$$

Kesalahan yang diyakini penulis sebagai kegagalan untuk memahami osilasi torsi amplitudo besar dalam kasus jembatan gantung Tacoma Narrows pada penelitian (Lazer and McKenna 1990). Menurut substitusikan  $\sin \theta = \theta$  dan  $\cos \theta = 1$  ke persamaan (2.81) dan (2.82) sehingga pada penelitian McKenna, 1999 menghasilkan persamaan diferensial biasa orde dua sebagai berikut

$$\ddot{\theta} = -\delta \dot{\theta} - \frac{6K_p}{m} \theta + \lambda \sin(\mu \theta) \quad (2.83)$$

dan

$$\ddot{y} = -\delta\dot{y} - \frac{2K_p y}{m} + g \quad (2.84)$$

2. Uji Validasi Model *Flying Fox* (Sari dan Kusumastuti 2018)

Pada penelitian ini, dilakukan penyelesaian analitik menggunakan metode karakteristik dengan merujuk pada langkah-langkah yang telah dilakukan dalam penelitian Sari dan Kusumastuti, tahun 2018. Fokus penelitian tersebut adalah uji validasi model matematika *flying fox* (Kusumastuti and dkk 2017). Uji validasi dilakukan dengan cara melakukan perbandingan antara solusi analitik dengan solusi numeriknya. Solusi analitik pada penelitian ini menghasilkan solusi umum dan solusi khusus untuk  $y(t)$  dan  $\theta(t)$ .

3. Analisis Model Sasando (Hidayati 2018)

Pada penelitian ini, dilakukan penyelesaian analitik untuk setiap persamaan  $y(t)$  dan  $\theta(t)$  dengan merujuk pada langkah-langkah yang telah dilakukan dalam penelitian (Hidayati 2018). Fokus penelitian tersebut yakni solusi analitik untuk model matematika vibrasi dawai pada sasando yang memiliki dua variabel bebas, yakni keadaan ( $x$ ) dan waktu ( $t$ ) dengan variabel terikat ( $u$ ) yang merupakan suatu fungsi yang bergantung pada ( $x$ ) dan ( $t$ ). Pada penelitian tersebut dilakukan penyelesaian analitik dengan tiga kasus untuk setiap persamaan  $X(x)$  dan  $T(t)$ , sehingga diperoleh tiga solusi untuk setiap persamaan  $X(x)$  dan  $T(t)$ . Tiga kasus tersebut yakni, jika  $\sqrt{b^2 - 4ac} > 0$ , jika  $\sqrt{b^2 - 4ac} = 0$ , dan jika  $\sqrt{b^2 - 4ac} < 0$ . Demikian

dengan penelitian ini akan menghasilkan solusi analitik dengan tiga kasus untuk setiap persamaan  $y(t)$  dan  $\theta(t)$ .

### 2.1.5 Kajian Validasi Model

Model matematika yang didapatkan dari suatu fenomena di dunia nyata haruslah *reliable*, dengan arti mampu mewakili keadaan riil di dunia nyata, sehingga model matematika yang didapatkan bisa dipercaya benar atau tidaknya. Menurut (Pagalay 2009) terdapat tiga tahapan dalam tahapan validasi model, antara lain:

1. Tahap pertama yaitu simulasi model. Simulasi model adalah menggambarkan model matematika yang telah diperoleh. Tahap ini bertujuan untuk melihat perilaku dari model matematika yang digunakan.
2. Tahap kedua yaitu simulasi masalah, yaitu menggambarkan perilaku dari permasalahan yang dimodelkan pada dunia nyata. Pada tahap ini biasanya memanfaatkan penggunaan *hard system*, misalnya komputer atau lainnya.
3. Tahap ketiga yaitu verifikasi. Verifikasi adalah membandingkan perilaku dari model yang telah didapatkan dan perilaku dari masalah yang dimodelkan. Tahap ini bertujuan untuk mengetahui apakah perilaku model telah mendekati kesesuaian dengan perilaku dari masalah yang dimodelkan. Jika hasil perbandingan perilaku model telah sesuai, maka model dapat dikatakan valid. Jika belum, maka perlu adanya konstruksi ulang untuk model tersebut.

## 2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Quran/Hadits

Penelitian solusi analitik mengenai vibrasi ini terinspirasi dari Surat Al-An-am ayat 48 yang memiliki arti:

*“Dan tidaklah Kami mengutus para rasul itu melainkan untuk memberi kabar gembira dan memberi peringatan. Barang siapa yang beriman dan mengadakan perbaikan, maka tak ada kekhawatiran terhadap mereka dan tidak (pula) mereka bersedih hati”* (Q.S. Al-An-nam/6:48).

Dalam hadist Anas bin Malik dijelaskan bahwa Rasulullah bersabda “orang yang pandai adalah orang yang mengintropeksi dirinya dan beramal untuk setelah kematian, sedang orang yang lemah adalah orang yang jiwanya selalu tunduk pada nafsunya dan mengharap pada Allah dengan berbagai angan-angan” (HR. Ahmad dan Tirmidzi). Selain itu, Umar bin Khatab r.a pernah menulis (surat) kepada beberapa pejabatnya bahwa “perhitungkan dirimu di waktu senang sebelum datang perhitungan yang berat. Barang siapa yang menghisab dirinya di waktu senang sebelum perhitungan yang berat, maka ia akan ridho dan mendapat keberuntungan. Sebaliknya, siapa yang kehidupannya melalaikannya dan nafsu menyibukkannya maka ia akan menyesal dan mendapat kerugian”.

Dengan merujuk pada Surat Al-An-nam ayat 48 dalam setiap perbaikan, informasi yang telah ada sebelumnya perlu ditelaah dengan pertimbangan yang logis berdasarkan ilmu pengetahuan. Seperti model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai, yang telah dikerjakan oleh Janah dan Kusumastuti tahun 2021 yang merupakan bentuk simbol dan aturan matematis dari fenomena alam yang diciptakan Allah. Sebagai salah satu penerapan Surat Al-An-nam ayat 48, maka pentingnya solusi analitik pada model matematika vibrasi dawai dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai supaya hasil simulasi dapat diterapkan untuk kondisi sesungguhnya. Penyelesaian secara analitik merupakan salah satu cara untuk menguji tingkat relevan atau tidaknya profil grafik solusi analitik yang dihasilkan dengan profil grafik yang terjadi secara riil. Oleh sebab itu, solusi analitik menjadi penting sebagai langkah memvalidasi model untuk

mengetahui valid (benar) atau tidaknya model tersebut. Jika profil grafik solusi analitik dari model tidak relevan dengan profil grafik riil, maka perlu dilakukan bedah model dengan menganalisis kembali lengkap atau tidaknya asumsi yang digunakan dengan tujuan memperbaiki model tersebut.

Oleh karena itu, penulis melakukan penelitian tentang solusi analitik model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai, menggunakan model matematika yang telah dimodelkan oleh Janah dan Kusumastuti tahun 2021. Dengan tujuan untuk mengetahui penyelesaian solusi analitik model matematika untuk menguji valid atau tidaknya model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai.

Dalam Surat Al-Talaq ayat ke 2, Allah bersabda :

*“Dan barang siapa yang bertaqwa kepada Allah SWT niscaya Dia akan mengadakan baginya jalan keluar” (QS. Asl-Talaq/65:2).*

Menurut (Katsir, 2000) ayat di atas menjelaskan “Barang siapa bertaqwa kepada Allah SWT dengan melaksanakan tuntunanNya dan meninggalkan laranganNya niscaya Dia akan mengadakan baginya jalan keluar dari kesulitan hidup, termasuk hidup rumah tangga yang dihadapinya dan memberi rizki di dunia dan di akhirat dari arah yang tak diduga”.

### **2.3 Kajian Topik Dengan Teori Pendukung**

Penelitian ini difokuskan pada penyelesaian secara analitik model matematika Janah dan Kusumastuti, 2021. Langkah solusi analitik dalam penelitian ini merujuk pada:

1. Erwin Kreyzich, 1988. Pada buku tersebut dirujuk tentang bagaimana tahapan penyelesaian analitik persamaan diferensial. Dalam buku

engineering advanced mathematics (Kreyszig 1988) terdapat beberapa metode dan langkahnya untuk penyelesaian analitik model PDB orde dua.

2. Tahapan penyelesaian analitik merujuk pada Sari dan Kusumastuti pada tahun 2018. Penelitian tersebut menggunakan model matematika berupa persamaan diferensial biasa orde dua. Penyelesaian solusi analitik pada model matematika dilakukan menggunakan metode karakteristik pada persamaan linier dan non liniernya. Dilakukan linierisasi pada persamaan kedua supaya dapat diselesaikan solusi analitiknya.
3. Hidayati, 2018. Pada penelitian ini dilakukan penyelesaian analitik untuk setiap persamaan  $y(t)$  dan  $\theta(t)$  dengan merujuk pada langkah-langkah yang telah dilakukan dalam penelitian (Hidayati 2018). Fokus penelitian tersebut yakni solusi analitik yang menghasilkan tiga solusi untuk setiap persamaan  $X(x)$  dan  $T(t)$ . Tiga kasus tersebut yakni, jika  $\sqrt{b^2 - 4ac} > 0$ , jika  $\sqrt{b^2 - 4ac} = 0$ , dan jika  $\sqrt{b^2 - 4ac} < 0$ . Demikian dengan penelitian ini akan menghasilkan solusi analitik dengan tiga kasus untuk setiap persamaan  $y(t)$  dan  $\theta(t)$ .

## **BAB III**

### **METODE PENELITIAN**

#### **3.1 Jenis Penelitian**

Penulisan penelitian ini menggunakan penelitian 60% kualitatif (menginterpretasikan hasil simulasi dengan mengkonfirmasi hasil simulasi terhadap solusi analitiknya sebagai deskripsi dari kondisi riil) dan 40% kuantitatif (pengolahan angka). Menurut (Kountur 2003) penelitian kualitatif yaitu penelitian yang menggunakan data kualitatif. Beberapa penelitian kualitatif menggunakan data berupa angka yang digunakan untuk menjelaskan suatu permasalahan. Proses penelitian kualitatif dilakukan dengan proses induktif, yaitu proses mengambil kesimpulan dari khusus ke umum. Penelitian kualitatif bertujuan untuk memperoleh pemahaman kualitatif terhadap suatu peristiwa (Suliyanto 2017). Objek pada penelitian ini menggunakan model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai yang merupakan penelitian dari Janah dan Kusumastuti pada tahun 2021. Sedangkan pengertian penelitian kuantitatif menurut (Sugiyono 2019) yaitu metode penelitian yang berlandaskan filsafat positivisme, yang digunakan untuk meneliti populasi atau suatu sampel tertentu, pengumpulan data dengan menggunakan instrumen penelitian, dan analisis data bersifat kuantitatif atau statistik. Penelitian kuantitatif bertujuan untuk menguji hipotesis yang telah ditetapkan (Sugiyono 2019).

#### **3.2 Pra Penelitian**

Pra penelitian berisi tahapan penulis untuk menunjang penelitian. Pada tahap pra penelitian penulis melaksanakan kegiatan-kegiatan yang menunjang penelitian

antara, lain mencari topik permasalahan yang akan diteliti, mencari referensi yang terkait dengan penelitian, menentukan model matematika yang dijadikan objek penelitian, dan juga menentukan judul penelitian.

Pada penelitian ini penulis melakukan penelitian dengan judul solusi analitik model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai. Penelitian ini merupakan penelitian yang menganalisis model matematika vibrasi dawai oleh Janah dan Kusumastuti pada tahun 2021. Penelitian ini difokuskan pada penyelesaian secara analitik model. Model matematika yang diperoleh pada penelitian tersebut berupa persamaan diferensial biasa orde dua. Terdapat dua variabel pada model matematika tersebut, yaitu lendutan dawai  $y(t)$  dan sudut lendutan  $\theta(t)$ . Dengan menggunakan model matematika tersebut, penelitian ini bertujuan untuk mengetahui penyelesaian solusi analitik model matematika untuk menguji valid atau tidaknya model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai. Langkah-langkah untuk penyelesaian solusi analitik pada penelitian ini merujuk pada penelitian (Sari dan Kusumastuti 2018) dan (Hidayati 2018).

### **3.3 Tahapan Penelitian**

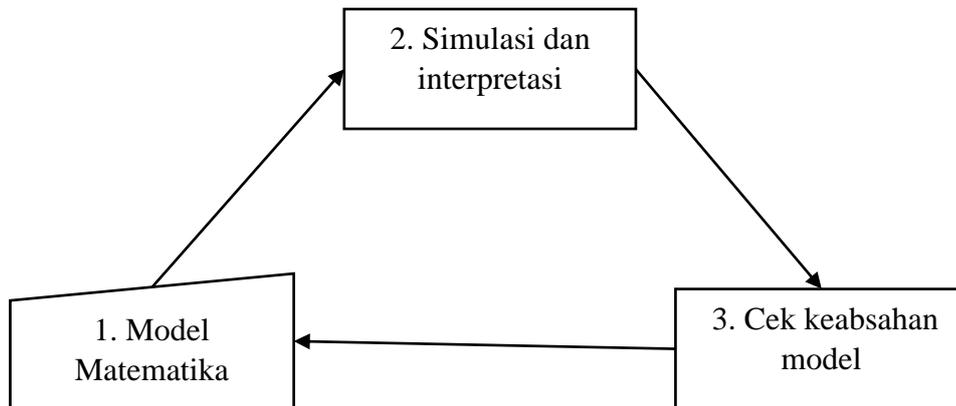
Penelitian ini menggunakan metode kepustakaan, dengan mengeksplorasi beberapa buku, jurnal, dan referensi yang berkaitan dengan solusi analitik model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa yang berupa PDB menggunakan metode pemisahan variabel. Pada umumnya, langkah-langkah untuk melakukan penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Melakukan analisis solusi analitik model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa

Dalam melakukan analisis solusi analitik, merujuk pada (Sari dan Kusumastuti 2018) sebagai berikut :

- a. Memisahkan variabel-variabel model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa.
  - b. Menetapkan solusi umum dari model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa.
  - c. Menetapkan solusi khusus model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa.
  - d. Menggambarkan grafik perilaku solusi analitik model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa.
2. Dalam melakukan rekonstruksi model matematika jika diperlukan, maka dilakukan langkah-langkah sebagai berikut :
    - a. Periksa ulang asumsi-asumsi yang digunakan.
    - b. Periksa ulang hukum-hukum yang terlibat beserta sketsa gaya-gaya yang terlibat dalam model.
    - c. Periksa ulang satuan-satuan yang terlibat di setiap suku persamaan model.
    - d. Periksa ulang proses penurunan model.
    - e. Melaksanakan proses solusi analitik seperti yang telah dipaparkan dalam poin nomor 1.

Secara diagram alir maka langkah penelitian nomor 1 dan 2 dilaksanakan sebagai berikut :



## BAB IV PEMBAHASAN

### 4.1 Solusi Analitik Model Vibrasi Dawai Dengan Massa

Pada bab ini dipaparkan analisis penyelesaian analitik model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa yang menggeling di sepanjang dawai dari penelitian Janah dan Kusumastuti 2021. Model matematika pada penelitian tersebut disajikan dalam sistem persamaan diferensial biasa orde dua yang memuat variabel terikat  $y(t)$  sebagai simpangan dawai dan  $\theta(t)$  sebagai sudut simpangan dawai yang disajikan sebagai berikut:

$$\ddot{y} = -\delta \dot{y} - \frac{4k_p}{m_d} y + \frac{(m_b+m_d)g}{m_d} - F_r$$

dan

$$\ddot{\theta} = -\delta \dot{\theta} - \frac{\left(-\frac{1}{2}F_r + \frac{1}{2}\mu m_b g + \frac{1}{2}k \eta v + 2kl\right)l}{\left(\frac{2}{5}m_b r^2 + \frac{1}{3}m_d l^2\right)} \theta + \frac{\frac{l}{2}m_b g}{\left(\frac{2}{5}m_b r^2 + \frac{1}{3}m_d l^2\right)}$$

Model tersebut memiliki variabel bebas waktu  $t$ . Penyelesaian analitik untuk persamaan ini menggunakan metode akar karakteristik. Kedua persamaan tersebut diberikan kondisi awal awal  $y(0)$  dan  $\theta(0) = p$ ,  $\dot{y}(0)$  dan  $\dot{\theta}(0) = q$ . Sebelum menyelesaikan solusi analitik model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa yang menggeling di sepanjang dawai, terlebih dahulu mengidentifikasi parameter yang terlibat dalam persamaan tersebut oleh (Janah and Kusumastuti 2021). Parameter yang digunakan adalah  $(K_p)$  sebagai konstanta pegas,  $(m_d)$  sebagai massa dawai,  $(g)$  sebagai gaya gravitasi,  $(\lambda)$  sebagai amplitudo,  $(\mu)$  sebagai frekuensi,  $(\eta)$  sebagai koefisien gesek,  $(v)$  sebagai kecepatan, dan  $(F_r)$  sebagai gaya dorong.

#### 4.1.1 Solusi Analitik Simpangan Dawai $y(t)$

Dengan menggunakan model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa yang menggeling di sepanjang dawai sebagai berikut :

$$\ddot{y} = -\delta\dot{y} - \left(\frac{4K_p}{m_d}\right)y + \frac{(m_b+m_d)g}{m_d} - F_r \quad (4.1)$$

Selanjutnya untuk mempermudah perhitungan solusi analitik, diabaikannya suku yang tidak mengandung variabel terikat dan dimisalkan

$$\frac{4K_p}{m_d} = a$$

dan

$$\frac{(m_b+m_d)g}{m_d} - F_r = b$$

sehingga persamaan (4.1) dapat ditulis sebagai

$$\ddot{y} = -\delta\dot{y} - ay + b \quad (4.2)$$

Persamaan (4.2) dapat ditulis kembali sebagai berikut:

$$\ddot{y} + \delta\dot{y} + ay = b \quad (4.3)$$

Langkah selanjutnya ialah mencari akar-akar karakteristik persamaan, dengan cara sebagai berikut.

Misalkan

$$y = e^{\lambda t}$$

Maka

$$\dot{y} = \lambda e^{\lambda t} \text{ dan } \ddot{y} = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

Kemudian substitusikan ke persamaan (4.2)

$$\lambda^2 e^{\lambda t} = -\delta\lambda e^{\lambda t} - a e^{\lambda t} \quad (4.4)$$

Dengan mengumpulkan  $e^{\lambda t}$  menjadi satu ruas, sehingga dapat ditulis kembali sebagai berikut

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \delta \lambda e^{\lambda t} + a e^{\lambda t} = b \quad (4.5)$$

Untuk menyelesaikan solusi umum persamaan di atas

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \delta \lambda e^{\lambda t} + a e^{\lambda t} = 0$$

$$e^{\lambda t}(\lambda^2 + \delta \lambda + a) = 0$$

Dengan memandang  $\lambda^2 + \delta \lambda + a = 0$  maka diperoleh akar-akar dari persamaan karakteristik persamaan tersebut sebagai berikut:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4(1)a}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4a}}{2}$$

Sehingga diperoleh nilai  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  yaitu:

$$\lambda_1 = \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - 4a}}{2} \text{ dan } \lambda_2 = \frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - 4a}}{2} \quad (4.6)$$

Dari nilai  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  yang telah diperoleh, terdapat tiga kemungkinan solusi umumnya, yakni:

1. Jika  $\delta^2 - 4a > 0$ , maka  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  merupakan dua akar real berbeda.

Sehingga solusi  $y_c(t)$  dapat diperoleh sebagai berikut

$$y_c(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

Dengan mengingat nilai  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  pada persamaann (4.6), maka

$$y_c(t) = c_1 e^{\frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - 4a}}{2} t} + c_2 e^{\frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - 4a}}{2} t} \quad (4.7)$$

Untuk menentukan nilai  $c_1$  dan  $c_2$  dapat menggunakan kondisi awal yakni

$y(0) = p$  dan  $\dot{y}(0) = q$  sebagai berikut

$$y(0) = c_1 e^{\frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - 4a}}{2}(0)} + c_2 e^{\frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - 4a}}{2}(0)}$$

$$p = c_1 + c_2 \quad (4.8)$$

Sehingga diperoleh

$$c_1 = p - c_2 \quad (4.9)$$

Selanjutnya dihitung  $\dot{y}(t)$  sebagai berikut

$$\dot{y}(t) = \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - 4a}}{2} c_1 e^{\frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - 4a}}{2} t} + \frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - 4a}}{2} c_2 e^{\frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - 4a}}{2} t} \quad (4.10)$$

Substitusikan nilai  $c_1$  ke persamaan (4.10) sehingga

$$\dot{y}(t) = \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - 4a}}{2} (p - c_2) e^{\frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - 4a}}{2} t} + \frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - 4a}}{2} c_2 e^{\frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - 4a}}{2} t}$$

Kemudian digunakan kondisi awal  $\dot{y}(0) = q$  sehingga

$$\begin{aligned} \dot{y}(0) &= \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - 4a}}{2} (p - c_2) e^{\frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - 4a}}{2} (0)} + \frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - 4a}}{2} c_2 e^{\frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - 4a}}{2} (0)} \\ q &= \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - 4a}(y_0 - c_2)}{2} + \frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - 4a}}{2} c_2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Sehingga diperoleh nilai

$$c_1 = -\frac{\sqrt{\delta^2 - 4a}(\delta p + 2q + p\sqrt{\delta^2 - 4a})}{2(4a - \delta^2)} \quad (4.12)$$

dan

$$c_2 = \frac{\sqrt{\delta^2 - 4a}(\delta p + 2q - p\sqrt{\delta^2 - 4a})}{2(4a - \delta^2)} \quad (4.13)$$

Kemudian substitusikan nilai  $c_1$  dan  $c_2$  ke persamaan (4.7), sehingga

diperoleh solusi analitik untuk persamaan homogen  $y_c(t)$  sebagai berikut

$$\begin{aligned} y_c(t) &= -\frac{\sqrt{\delta^2 - 4a}(\delta p + 2q + p\sqrt{\delta^2 - 4a})}{2(4a - \delta^2)} e^{\frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - 4a}}{2} t} + \\ &\quad \frac{\sqrt{\delta^2 - 4a}(\delta p + 2q - p\sqrt{\delta^2 - 4a})}{2(4a - \delta^2)} e^{\frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - 4a}}{2} t} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Selanjutnya dihitung solusi partikular untuk persamaan (4.2) sebagai berikut

$$y_p(t) = P \quad (4.15)$$

Dimana  $P$  dapat dicari dengan mensubstitusikan  $y_p(t)$  untuk  $y$  pada persamaan (4.2). turunan pertama dan kedua dari persamaan (4.2) adalah

$$\dot{y}_p(t) = 0$$

$$\ddot{y}_p(t) = 0$$

Sehingga turunan-turunan dari solusi partikular jika disubstitusikan ke persamaan (4.2) yakni

$$\ddot{y} + \delta\dot{y} + ay = b$$

sehingga dapat dinyatakan sebagai

$$0 + \delta(0) + aP = b$$

Maka diperoleh nilai  $P$  yakni

$$P = \frac{b}{a}$$

Maka solusi partikular untuk persamaan (4.2) adalah

$$y_p(t) = \frac{b}{a} \quad (4.16)$$

Sehingga diperoleh solusi khusus untuk persamaan (4.2) sebagai berikut

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t)$$

$$y(t) = -\frac{\sqrt{\delta^2-4a}(\delta p+2q+p\sqrt{\delta^2-4a})}{2(4a-\delta^2)} e^{\frac{-\delta+\sqrt{\delta^2-4a}}{2}t} + \frac{\sqrt{\delta^2-4a}(\delta p+2q-p\sqrt{\delta^2-4a})}{2(4a-\delta^2)} e^{\frac{-\delta-\sqrt{\delta^2-4a}}{2}t} + \frac{b}{a} \quad (4.17)$$

Dengan

$$a = \frac{4K_p}{m_d} \text{ dan } b = \frac{(m_b+m_d)g}{m_d} - F_r$$

Solusi pada persamaan (4.17) dianggap valid untuk  $y_c(t)$  jika memenuhi syarat sebagai berikut :

a.  $y_c(t)$  memenuhi nilai awal

(i) Langkah pertama cek menggunakan nilai awal  $y(0) = p$

Substitusikan nilai  $t = 0$  pada persamaan (4.11), maka

$$y(0) = -\frac{\sqrt{\delta^2-4a}(\delta p+2q+p\sqrt{\delta^2-4a})}{2(4a-\delta^2)} e^{\frac{-\delta+\sqrt{\delta^2-4a}}{2}(0)} +$$

$$\frac{\sqrt{\delta^2-4a}(\delta p+2q-p\sqrt{\delta^2-4a})}{2(4a-\delta^2)} e^{\frac{-\delta-\sqrt{\delta^2-4a}}{2}(0)}$$

$$y_0 = -\frac{\sqrt{\delta^2-4a}(\delta p+2q+p\sqrt{\delta^2-4a})}{2(4a-\delta^2)} + \frac{\sqrt{\delta^2-4a}(\delta p+2q-p\sqrt{\delta^2-4a})}{2(4a-\delta^2)} \quad (4.18)$$

Dengan mengingat persamaan (4.12) dan (4.13) sehingga persamaan (4.18) dapat ditulis sebagai

$$-\frac{\sqrt{\delta^2-4a}(\delta p+2q+p\sqrt{\delta^2-4a})}{2(4a-\delta^2)} + \frac{\sqrt{\delta^2-4a}(\delta p+2q-p\sqrt{\delta^2-4a})}{2(4a-\delta^2)}$$

$$= c_1 + c_2$$

$$c_1 + c_2 = p \quad (4.19)$$

Kemudian substitusikan persamaan (4.8) ke persamaan (4.19) maka terbukti

$$y(0) = p \quad (4.20)$$

(ii) Langkah selanjutnya dihitung  $\dot{y}(t)$  sebagai berikut

$$\dot{y}_c(t) = -\frac{-\delta+\sqrt{\delta^2-4a}}{2} \frac{\sqrt{\delta^2-4a}(\delta p+2q+p\sqrt{\delta^2-4a})}{2(4a-\delta^2)} e^{\frac{-\delta+\sqrt{\delta^2-4a}}{2}t} +$$

$$\frac{-\delta-\sqrt{\delta^2-4a}}{2} \frac{\sqrt{\delta^2-4a}(\delta p+2q-p\sqrt{\delta^2-4a})}{2(4a-\delta^2)} e^{\frac{-\delta-\sqrt{\delta^2-4a}}{2}t}$$

$$\dot{y}_c(t) = -\frac{-\delta\sqrt{\delta^2-4a}+\delta^2-4a(\delta p+2q+p\sqrt{\delta^2-4a})}{4(4a-\delta^2)} e^{\frac{-\delta+\sqrt{\delta^2-4a}}{2}t} +$$

$$\frac{-\delta\sqrt{\delta^2-4a}+\delta^2-4a(\delta p+2q-p\sqrt{\delta^2-4a})}{4(4a-\delta^2)} e^{\frac{-\delta-\sqrt{\delta^2-4a}}{2}t}$$

Kemudian cek menggunakan kondisi awal  $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$  sehingga

$$\begin{aligned}\dot{y}_c(0) &= -\frac{-\delta\sqrt{\delta^2-4a}+\delta^2-4a(\delta p+2q+p\sqrt{\delta^2-4a})}{4(4a-\delta^2)} e^{\frac{-\delta+\sqrt{\delta^2-4a}}{2}(0)} + \\ &\frac{-\delta\sqrt{\delta^2-4a}+\delta^2-4a(\delta p+2q-p\sqrt{\delta^2-4a})}{4(4a-\delta^2)} e^{\frac{-\delta-\sqrt{\delta^2-4a}}{2}(0)} \\ \dot{y}_c(0) &= -\frac{-\delta\sqrt{\delta^2-4a}+\delta^2-4a(\delta p+2q+p\sqrt{\delta^2-4a})}{4(4a-\delta^2)} + \\ &\frac{-\delta\sqrt{\delta^2-4a}+\delta^2-4a(\delta p+2q-p\sqrt{\delta^2-4a})}{4(4a-\delta^2)}\end{aligned}$$

Maka terbukti

$$\dot{y}(0) = q \quad (4.21)$$

- b.  $y_c(t)$  pada persamaan (4.14) memenuhi persamaan  $\ddot{y} = -\delta\dot{y} - \alpha y$  pada persamaan (4.3)

Persamaan (4.17) diturunkan terhadap  $t$  sehingga diperoleh persamaan  $\dot{y}$  dan  $\ddot{y}$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= -\frac{-\delta\sqrt{\delta^2-4a}+\delta^2-4a(\delta p+2q+p\sqrt{\delta^2-4a})}{4(4a-\delta^2)} e^{\frac{-\delta+\sqrt{\delta^2-4a}}{2}t} + \\ &\frac{-\delta\sqrt{\delta^2-4a}+\delta^2-4a(\delta p+2q-p\sqrt{\delta^2-4a})}{4(4a-\delta^2)} e^{\frac{-\delta-\sqrt{\delta^2-4a}}{2}t}\end{aligned} \quad (4.22)$$

dan

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\delta^2-4a}} \left( e^{\frac{-\delta+\sqrt{\delta^2-4a}}{2}t} \sqrt{\delta^2-4a} a p + \right. \\ &e^{\frac{-\delta+\sqrt{\delta^2-4a}}{2}t} \sqrt{\delta^2-4a} \delta q - e^{\frac{-\delta+\sqrt{\delta^2-4a}}{2}t} a \delta p - e^{\frac{-\delta+\sqrt{\delta^2-4a}}{2}t} \delta^2 q + \\ &\left. e^{\frac{-\delta-\sqrt{\delta^2-4a}}{2}t} \sqrt{\delta^2-4a} a p + e^{\frac{-\delta-\sqrt{\delta^2-4a}}{2}t} \sqrt{\delta^2-4a} \delta q + \right.\end{aligned}$$

$$e^{\frac{-\delta-\sqrt{\delta^2-4a}}{2}t} a \delta p + e^{\frac{-\delta-\sqrt{\delta^2-4a}}{2}t} \delta^2 q + 2e^{\frac{-\delta+\sqrt{\delta^2-4a}}{2}t} a q + 2e^{\frac{-\delta-\sqrt{\delta^2-4a}}{2}t} a q \Big) (4.23)$$

Selanjutnya dihitung  $-\delta\dot{y}$  dan  $-ay$  sebagai berikut

$$\ddot{y} = -\delta\dot{y} - ay$$

diperoleh  $-\delta\dot{y} - ay$  sebagai berikut

$$\begin{aligned} -\delta\dot{y} - ay = & -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\delta^2-4a}} \left( e^{\frac{-\delta+\sqrt{\delta^2-4a}}{2}t} \sqrt{\delta^2-4a} a p + \right. \\ & e^{\frac{-\delta+\sqrt{\delta^2-4a}}{2}t} \sqrt{\delta^2-4a} \delta q - e^{\frac{-\delta+\sqrt{\delta^2-4a}}{2}t} a \delta p - \\ & e^{\frac{-\delta+\sqrt{\delta^2-4a}}{2}t} \delta^2 q + e^{\frac{-\delta-\sqrt{\delta^2-4a}}{2}t} \sqrt{\delta^2-4a} a p + \\ & e^{\frac{-\delta-\sqrt{\delta^2-4a}}{2}t} \sqrt{\delta^2-4a} \delta q + e^{\frac{-\delta-\sqrt{\delta^2-4a}}{2}t} a \delta p + \\ & \left. e^{\frac{-\delta-\sqrt{\delta^2-4a}}{2}t} \delta^2 q + 2e^{\frac{-\delta+\sqrt{\delta^2-4a}}{2}t} a \dot{y}_0 + 2e^{\frac{-\delta-\sqrt{\delta^2-4a}}{2}t} a q \right) \end{aligned}$$

Dengan mengingat persamaan (4.23) maka terbukti

$$-\delta\dot{y} - ay = \ddot{y} \quad (4.24)$$

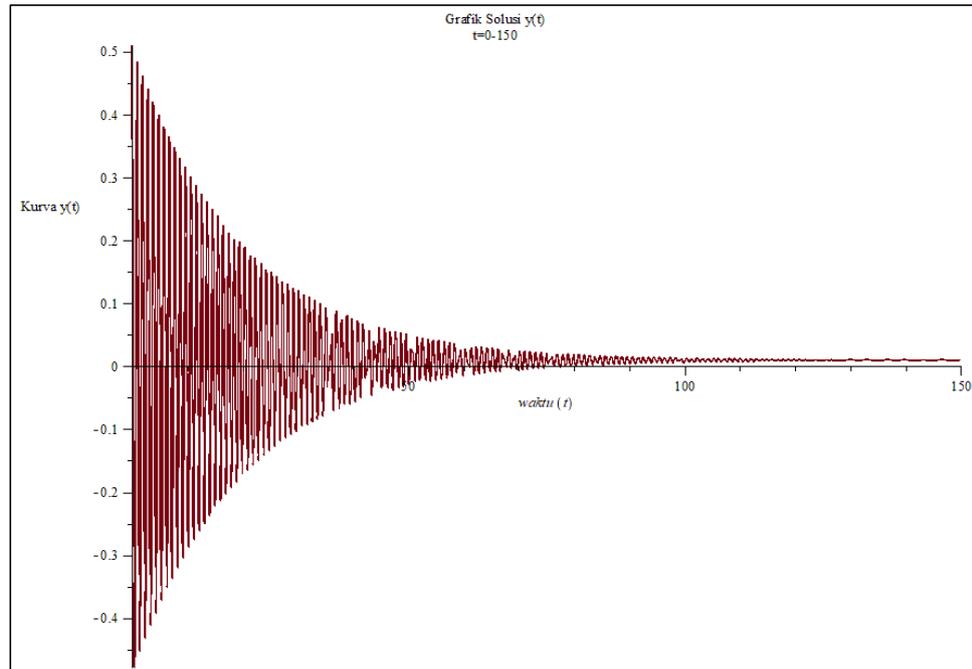
Berdasarkan persamaan (4.21), (4.21), dan (4.24), maka  $y(t)$  pada persamaan (4.17) dinyatakan valid sebagai solusi  $y(t)$ .

Selanjutnya dari persamaan (4.17) digambarkan plot grafik menggunakan parameter  $\delta = 0.1, y(0) = 0.5, \dot{y}(0) = 0, m_d = 2500, m_b = 100, f_r =$

$10, K_p = \frac{m_d+m_b}{2*y(0)} g$ , sehingga diperoleh nilai eksak sebagai berikut:

$$y(t) = (0.24999 - 0.00194) e^{(-0.05+6.44961)t} + (0.24999 + 0.00194) e^{(-0.05-6.44961)t} + 0.00962$$

Selanjutnya dari nilai eksak tersebut digambarkan plot grafik pada saat  $t = 0 - 150$  detik diperoleh hasil sebagai berikut :



**Gambar 4.1** Grafik Solusi  $y(t)$  Untuk  $\delta^2 - 4a > 0$ , dengan  $\delta = 0.1$ ,  $y(0) = 0.5$ ,  $\dot{y}(0) = 0$ ,  $m_d = 2500$ ,  $m_b = 100$ ,  $f_r = 10$ ,  $K_p = \frac{m_d + m_b}{2 * y(0)} g$ , dan  $g = 10$

Berdasarkan hasil profil grafik pada (Gambar 4.1), terlihat bahwa dengan amplitudo mula-mula 0.5 kemudian seiring dengan berjalannya waktu  $t = 150$ , amplitudo gelombang vibrasi dawai yang diberi massa menggelinging semakin kecil yang sampai akhirnya hampir berhenti dengan amplitudo 0.001 atau hampir kembali di posisi diam pada  $t \pm 135$  detik

2. Jika  $\delta^2 - 4a = 0$ , maka akar real sama ( $\lambda_1 = \lambda_2$ ). Sehingga solusi  $y_c(t)$  dapat diperoleh sebagai berikut

$$y_c(t) = c_1 e^{\lambda t} + t c_2 e^{\lambda t}$$

$$y_c(t) = e^{\lambda t} (c_1 + t c_2)$$

Dengan mengingat nilai  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  pada persamaan (4.6) dan  $\delta^2 - 4a = 0$ , maka

$$y_c(t) = e^{\frac{-\delta}{2}t}(c_1 + tc_2) \quad (4.25)$$

Untuk menentukan nilai  $c_1$  dan  $c_2$  dapat menggunakan kondisi awal yakni  $y(0) = p$  dan  $\dot{y}(0) = q$  sebagai berikut

$$y_c(0) = e^{\frac{-\delta}{2}(0)}(c_1 + 0)$$

$$p = c_1$$

Sehingga

$$c_1 = p \quad (4.26)$$

Langkah selanjutnya dihitung  $\dot{y}_c(t)$  sebagai berikut

$$\dot{y}_c(t) = \lambda e^{\lambda t}(c_1 + tc_2) + e^{\lambda t}c_2$$

Kemudian menggunakan kondisi awal  $\dot{y}(0) = q$  sebagai berikut

$$\dot{y}_c(0) = \frac{-\delta}{2} e^{\frac{-\delta}{2}(0)}(c_1 + (0)c_2) + e^{\frac{-\delta}{2}(0)}c_2$$

$$q = \frac{-\delta}{2}c_1 + c_2$$

Substitusikan nilai  $c_1$  pada persamaan (4.20) ke persamaan di atas maka

$$q = \frac{-\delta}{2}p + c_2$$

Sehingga diperoleh

$$c_2 = q + \frac{\delta p}{2} \quad (4.27)$$

Kemudian substitusikan nilai (4.26) dan (4.27) ke persamaan (4.25),

sehingga diperoleh solusi analitik untuk  $y_c(t)$  sebagai berikut

$$y_c(t) = e^{\frac{-\delta}{2}t} \left( p + \left( q + \frac{\delta p}{2} \right) t \right)$$

$$y_c(t) = e^{\frac{-\delta}{2}t} (p + qt + 0.5\delta pt) \quad (4.28)$$

Dengan mengingat solusi partikular pada persamaan (4.16), maka diperoleh solusi analitik untuk  $y(t)$  sebagai berikut

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t)$$

$$y(t) = e^{-\frac{\delta}{2}t}(p + qt + 0.5\delta pt) + \frac{b}{a} \quad (4.29)$$

dengan  $a = \frac{4K_p}{m_d}$  dan  $b = \frac{(m_b+m_d)g}{m_d} - F_r$

Solusi pada persamaan (4.29) dianggap valid untuk  $y(t)$  pada model jika memenuhi syarat sebagai berikut :

a.  $y_c(t)$  memenuhi nilai awal

(i) Langkah pertama cek menggunakan nilai awal  $y(0) = p$

Substitusikan nilai  $t = 0$  pada persamaan (4.28), sehingga diperoleh

$$y(0) = e^{-\frac{\delta}{2}t}(p + q(0) + 0.5\delta p(0))$$

Maka terbukti

$$y(0) = p \quad (4.30)$$

(ii) Langkah selanjutnya dihitung  $\dot{y}(t)$  sebagai berikut

$$\dot{y}(t) = \lambda e^{\lambda t}(c_1 + tc_2) + e^{\lambda t}c_2$$

$$\dot{y}(t) = \frac{-\delta}{2}e^{-\frac{\delta}{2}t}(p + qt + 0.5\delta pt) + e^{-\frac{\delta}{2}t}(\dot{y}_0 + 0.5\delta y_0)$$

$$\dot{y}(t) = -0.5\delta p e^{-\frac{\delta}{2}t} - 0.5\delta q t e^{-\frac{\delta}{2}t} - 0.25\delta^2 t e^{-\frac{\delta}{2}t} + q e^{-\frac{\delta}{2}t}$$

$$+ 0.5\delta p e^{-\frac{\delta}{2}t}$$

$$\dot{y}(t) = -0.5\delta q t e^{-\frac{\delta}{2}t} - 0.25\delta^2 t e^{-\frac{\delta}{2}t} + q e^{-\frac{\delta}{2}t}$$

Kemudian cek menggunakan nilai awal  $\dot{y}(0) = q$

$$\dot{y}(0) = -0.5\delta q(0)e^{\frac{-\delta}{2}(0)} - 0.25\delta^2(0)e^{\frac{-\delta}{2}(0)} + qe^{\frac{-\delta}{2}(0)}$$

$$\dot{y}(0) = q$$

Sehingga terbukti

$$\dot{y}(0) = q \quad (4.31)$$

- b.  $y_c(t)$  pada persamaan (4.28) memenuhi persamaan  $\ddot{y} = -\delta\dot{y} - ay$  pada persamaan (4.2)

Persamaan (4.29) diturunkan terhadap  $t$  sehingga diperoleh persamaan  $\dot{y}$  dan  $\ddot{y}$  sebagai berikut:

$$\dot{y}(t) = -\frac{1}{2}\delta e^{\frac{-\delta}{2}t} \left( qt + p + \frac{1}{2}\delta pt \right) + e^{\frac{-\delta}{2}t} \left( q + \frac{1}{2}\delta p \right) \quad (4.32)$$

dan

$$\ddot{y}(t) = \frac{1}{8}\delta e^{\frac{-\delta}{2}t} (\delta^2 pt + 2\delta qt - 2\delta p - 8q) \quad (4.33)$$

Selanjutnya hitung  $-\delta\dot{y} - ay$  sebagai berikut

$$-\delta\dot{y} - ay = \frac{1}{8}\delta e^{\frac{-\delta}{2}t} (\delta^2 pt + 2\delta qt - 2\delta p - 8q) \quad (4.34)$$

Maka terbukti

$$-\delta\dot{y} - ay = \ddot{y} \quad (4.35)$$

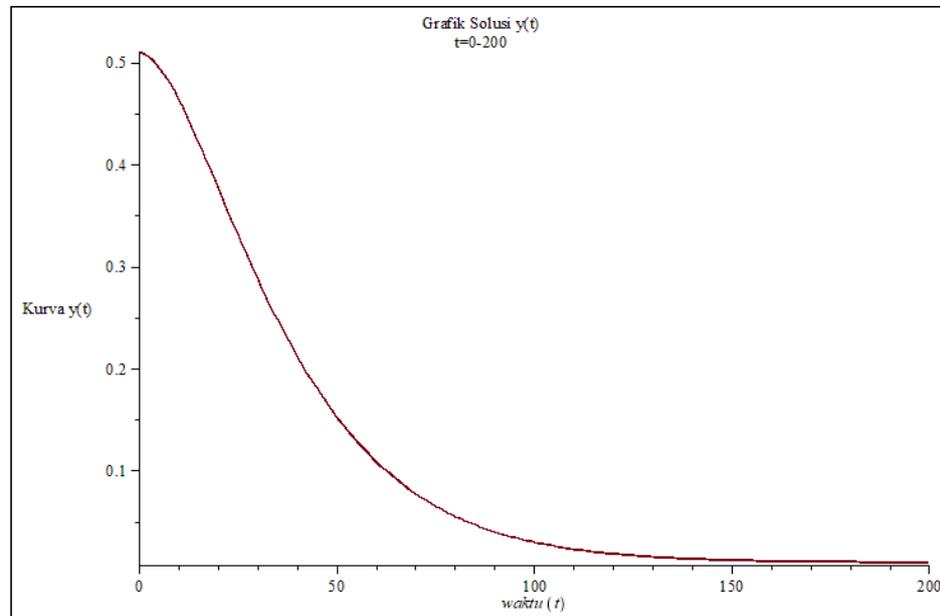
Berdasarkan persamaan (4.30), (4.31), dan (4.35), maka solusi  $y(t)$  pada persamaan (4.29) dinyatakan valid sebagai solusi  $y(t)$ .

Selanjutnya dari persamaan (4.29) digambarkan plot grafik menggunakan parameter  $\delta = 0.1, y(0) = 0.5, \dot{y}(0) = 0, m_d = 2500, m_b = 100, f_r =$

$10, K_p = \frac{m_d + m_b}{2 * y(0)} g$ , sehingga diperoleh nilai eksak sebagai berikut:

$$y(t) = (0.5 - 0.025 t)e^{-0.05t} + 0.00962$$

Selanjutnya dari nilai eksak tersebut digambarkan plot grafik pada saat  $t = 0 - 200$  detik dan diperoleh hasil sebagai berikut :



**Gambar 4.2** Grafik Solusi  $y(t)$  Untuk  $\delta^2 - 4a = 0$ , dengan  $\delta = 0.1$ ,  $y(0) = 0.5$ ,  $\dot{y}(0) = 0$ ,  $m_d = 2500$ ,  $m_b = 100$ ,  $f_r = 10$ ,  $K_p = \frac{m_d + m_b}{2 * y(0)} g$ , dan  $g = 10$

Berdasarkan hasil profil grafik pada (Gambar 4.2), terlihat bahwa dengan amplitudo mula-mula 0.5 kemudian seiring dengan berjalannya waktu  $t = 200$ , gelombang vibrasi dawai yang diberi massa menggeling semakin menurun yang sampai akhirnya hampir berhenti dengan amplitudo 0.001 atau hampir kembali di posisi diam pada  $t \pm 185$  detik.

3. Jika  $\delta^2 - 4a < 0$ , maka dua akar kompleks yang saling konjugat ( $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ ). Sehingga solusi  $y_c(t)$  dapat diperoleh sebagai berikut

$$y_c(t) = Ae^{at} \cos \beta t + Be^{at} \sin \beta t$$

Dengan mengingat nilai  $\lambda_1 = \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - 4a}}{2}$ , karena  $\delta^2 - 4a < 0$  maka

$$\lambda_1 = \frac{-\delta + \sqrt{-1\sqrt{\delta^2 - 4a}}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{-\delta + \sqrt{4a - \delta^2}i}{2}$$

Sehingga diperoleh nilai  $\alpha = \frac{-\delta}{2}$   $\beta = \frac{\sqrt{4a - \delta^2}}{2}$

Maka

$$y_c(t) = Ae^{-\frac{\delta}{2}t} \cos \frac{\sqrt{4a - \delta^2}}{2}t + Be^{-\frac{\delta}{2}t} \sin \frac{\sqrt{4a - \delta^2}}{2}t \quad (4.36)$$

Untuk menentukan nilai  $A$  dan  $B$  dapat menggunakan kondisi awal yakni

$y_c(0) = p$  dan  $\dot{y}(0) = q$  sebagai berikut

$$y_0 = Ae^{\alpha 0} \cos \beta 0 + Be^{\alpha 0} \sin \beta 0$$

$$y_0 = Ae^0 \cos 0 + Be^0 \sin 0$$

$$y_0 = A + 0$$

$$y_0 = A \quad (4.37)$$

dan

$$\dot{y}(0) = A\alpha e^{\alpha 0} \cos \beta 0 + A\beta e^{\alpha 0}(-\sin \beta 0) + B\alpha e^{\alpha 0} \sin \beta 0 +$$

$$B\beta e^{\alpha 0} \cos \beta 0$$

sehingga diperoleh

$$q = A\alpha + B\beta$$

Dengan mensubstitusikan nilai  $A$  pada persamaan (4.37), maka

$$q = \alpha p + B\beta$$

sehingga diperoleh nilai

$$B = \frac{q - \alpha p}{\beta}$$

$$B = \frac{q + 0.5\delta p}{\frac{\sqrt{4a - \delta^2}}{2}}$$

$$B = \frac{2q + \delta p}{\sqrt{4a - \delta^2}} \quad (4.38)$$

Kemudian substitusikan nilai  $A$  dan  $B$  ke persamaan (4.36), sehingga diperoleh solusi  $y_c(t)$  adalah sebagai berikut

$$y_c(t) = pe^{-\frac{\delta}{2}t} \cos \frac{\sqrt{4a-\delta^2}}{2} t + \left( \frac{2q+\delta p}{\sqrt{4a-\delta^2}} \right) e^{-\frac{\delta}{2}t} \sin \frac{\sqrt{4a-\delta^2}}{2} t \quad (4.39)$$

Dengan mengingat nilai  $y_p(t)$  pada persamaan (4.13), sehingga solusi analitik  $y(t)$  jika  $\delta^2 - 4a < 0$  adalah sebagai berikut

$$y(t) = y_p(t) + y_c(t)$$

$$y(t) = pe^{-\frac{\delta}{2}t} \cos \frac{\sqrt{4a-\delta^2}}{2} t + \left( \frac{2q+\delta p}{\sqrt{4a-\delta^2}} \right) e^{-\frac{\delta}{2}t} \sin \frac{\sqrt{4a-\delta^2}}{2} t + \frac{b}{a} \quad (4.40)$$

dengan  $a = \frac{4K_p}{m_d}$  dan  $b = \frac{(m_b+m_d)g}{m_d} - F_r$

Solusi pada persamaan (4.40) dianggap valid untuk  $y(t)$  jika memenuhi syarat sebagai berikut :

a.  $y_c(t)$  memenuhi nilai awal

(i) Langkah pertama cek menggunakan nilai awal  $y(0) = p$

Substitusikan nilai  $t = 0$  pada persamaan (4.39), maka

$$y(0) = pe^{-\frac{\delta}{2} \cdot 0} \cos \frac{\sqrt{4a-\delta^2}}{2} \cdot 0 + \left( \frac{2q+\delta p}{\sqrt{4a-\delta^2}} \right) e^{-\frac{\delta}{2} \cdot 0} \sin \frac{\sqrt{4a-\delta^2}}{2} \cdot 0$$

$$y(0) = p + 0$$

Sehingga diperoleh

$$y(0) = p \quad (4.41)$$

(ii) Langkah selanjutnya dihitung  $\dot{y}(t)$  sebagai berikut

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) = & -\frac{1}{2} \delta p e^{-\frac{\delta}{2}t} \cos \left( \frac{1}{2} \sqrt{4a - \delta^2} t \right) - \\ & \frac{1}{2} p e^{-\frac{\delta}{2}t} \sin \left( \frac{1}{2} \sqrt{4a - \delta^2} t \right) \sqrt{4a - \delta^2} - \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \frac{(\delta p + 2q)\delta e^{-\frac{\delta}{2}t} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{4a-\delta^2}t\right)}{\sqrt{4a-\delta^2}} + \frac{1}{2}(\delta p + 2q)e^{-\frac{\delta}{2}t} \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{4a-\delta^2}t\right)$$

$$\dot{y}(t) = e^{-\frac{\delta}{2}t} \cos\frac{\sqrt{4a-\delta^2}t}{2} \left(-\frac{1}{2}\delta p + \frac{(\delta p + 2q)}{2}\right) + e^{-\frac{\delta}{2}t} \sin\frac{\sqrt{4a-\delta^2}t}{2} \left(-\frac{1}{2}p\sqrt{4a-\delta^2} - \frac{(\delta p + 2q)\delta}{2\sqrt{4a-\delta^2}}\right)$$

$$\dot{y}(t) = e^{-\frac{\delta}{2}t} \cos\frac{\sqrt{4a-\delta^2}t}{2} \left(p\left(-\frac{\delta}{2}\right) + \left(\frac{\delta p + 2q}{\sqrt{4a-\delta^2}}\right)\frac{\sqrt{4a-\delta^2}}{2}\right) + e^{-\frac{\delta}{2}t} \sin\frac{\sqrt{4a-\delta^2}t}{2} \left(p\frac{\sqrt{4a-\delta^2}}{2} - \left(\frac{\delta p + 2q}{\sqrt{4a-\delta^2}}\right)\left(-\frac{\delta}{2}\right)\right)$$

$$\dot{y}(t) = e^{-\frac{\delta}{2}t} \cos\frac{\sqrt{4a-\delta^2}t}{2} \left(-\frac{\delta p}{2} + \frac{2q\sqrt{4a-\delta^2} + \delta p\sqrt{4a-\delta^2}}{2\sqrt{4a-\delta^2}}\right) + e^{-\frac{\delta}{2}t} \sin\frac{\sqrt{4a-\delta^2}t}{2} \left(\frac{p\sqrt{4a-\delta^2}}{2} + \frac{2\delta q + \delta^2 p}{2\sqrt{4a-\delta^2}}\right)$$

Kemudian cek menggunakan nilai awal  $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$  sehingga

$$\dot{y}(0) = e^{-\frac{\delta}{2}(0)} \cos\frac{\sqrt{4a-\delta^2}}{2}(0) \left(-\frac{1}{2}\delta p + \frac{(\delta p + 2q)}{2}\right) + e^{-\frac{\delta}{2}(0)} \sin\frac{\sqrt{4a-\delta^2}}{2}(0) \left(-\frac{1}{2}p\sqrt{4a-\delta^2} - \frac{(\delta p + 2q)\delta}{2\sqrt{4a-\delta^2}}\right)$$

$$\dot{y}(0) = \left(-\frac{\delta p}{2} + \frac{(\delta p + 2q)}{2}\right)$$

$$\dot{y}(0) = \frac{2q}{2}$$

Maka terbukti

$$\dot{y}(0) = q \tag{4.42}$$

- b.  $y_c(t)$  pada persamaan (4.39) memenuhi persamaan  $\ddot{y} = -\delta\dot{y} - \alpha y$  pada persamaan (4.3)

Persamaan (4.40) diturunkan terhadap  $t$  sehingga diperoleh persamaan  $\dot{y}$  dan  $\ddot{y}$  sebagai berikut:

$$\dot{y}(t) = e^{-\frac{\delta}{2}t} \cos \frac{\sqrt{4a-\delta^2}}{2} t \left( -\frac{\delta p}{2} + \frac{2q\sqrt{4a-\delta^2} + \delta p\sqrt{4a-\delta^2}}{2\sqrt{4a-\delta^2}} \right) + e^{-\frac{\delta}{2}t} \sin \frac{\sqrt{4a-\delta^2}}{2} t \left( \frac{p\sqrt{4a-\delta^2}}{2} + \frac{2\delta q + \delta^2 p}{2\sqrt{4a-\delta^2}} \right)$$

dan

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) = & -\frac{1}{\sqrt{4a-\delta^2}} \left( e^{-\frac{\delta}{2}t} \left( \cos \frac{\sqrt{\delta^2-4a}}{2} t \right) \sqrt{\delta^2-4a} ap + \right. \\ & \cos \frac{\sqrt{4a-\delta^2}}{2} t \sqrt{\delta^2-4a} \delta q - \sin \frac{\sqrt{\delta^2-4a}}{2} t a \delta p - \\ & \left. \sin \frac{\sqrt{4a-\delta^2}}{2} t \delta^2 q + 2 \sin \frac{\sqrt{\delta^2-4a}}{2} t a q \right) \end{aligned} \quad (4.43)$$

Selanjutnya dihitung  $-\delta\dot{y} - ay$  sebagai berikut

$$\begin{aligned} -\delta\dot{y} - ay = & -\frac{1}{\sqrt{4a-\delta^2}} \left( e^{-\frac{\delta}{2}t} \left( \cos \frac{\sqrt{4a-\delta^2}}{2} t \right) \sqrt{4a-\delta^2} ap + \right. \\ & \cos \frac{\sqrt{4a-\delta^2}}{2} t \sqrt{4a-\delta^2} \delta q - \sin \frac{\sqrt{4a-\delta^2}}{2} t a \delta p - \\ & \left. \sin \frac{\sqrt{4a-\delta^2}}{2} t \delta^2 q + 2 \sin \frac{\sqrt{4a-\delta^2}}{2} t a q \right) \end{aligned} \quad (4.44)$$

Sehingga terbukti

$$-\delta\dot{y} - ay = \ddot{y} \quad (4.45)$$

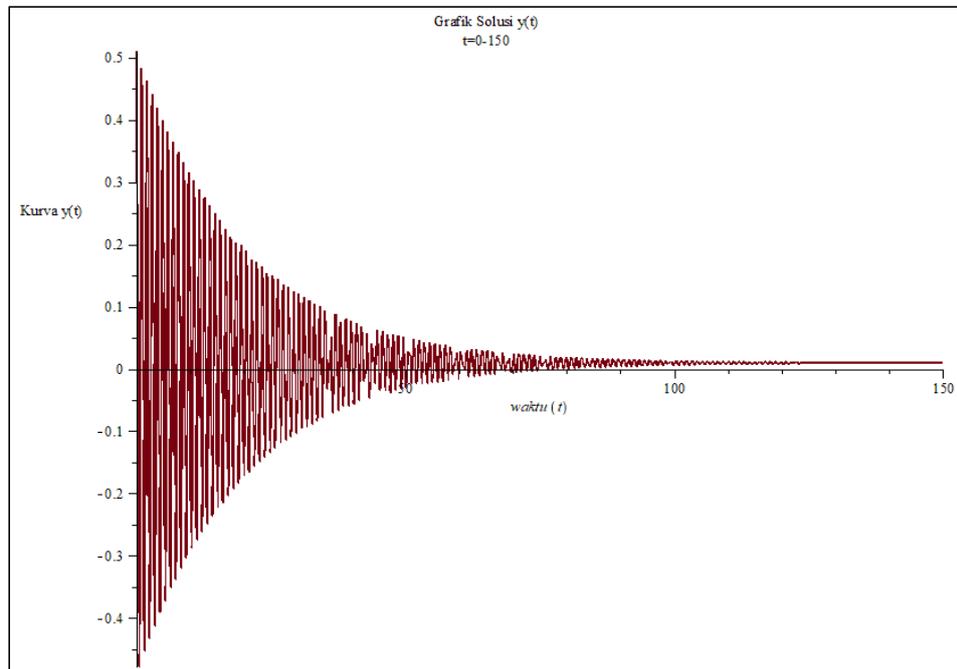
Berdasarkan persamaan (4.41), (4.42) dan (4.45), maka solusi  $y(t)$  pada persamaan (4.40) dinyatakan sah sebagai solusi model matematika vibrasi dawai dengan massa menggelinging untuk kasus  $\delta^2 - 4a < 0$ .

Selanjutnya dari persamaan (4.40) digambarkan plot grafik menggunakan parameter  $\delta = 0.1, y(0) = 0.5, \dot{y}(0) = 0, m_d = 2500, m_b = 100, f_r =$

$10, K_p = \frac{m_d+m_b}{2*y(0)} g$ , sehingga diperoleh nilai eksak sebagai berikut:

$$y(t) = 0.5e^{-0.05t} \cos(6.449612390 t) + 0.00388e^{-0.05t} \sin(6.449612390 t) + 0.00962$$

Selanjutnya dari nilai eksak tersebut digambarkan plot grafik pada saat  $t = 0 - 150$  detik dan diperoleh hasil sebagai berikut :



**Gambar 4.3** Grafik Solusi  $y(t)$  Untuk  $\delta^2 - 4a < 0$ , dengan  $\delta = 0.1$ ,  $y(0) = 0.5$ ,  $\dot{y}(0) = 0$ ,  $m_d = 2500$ ,  $m_b = 100$ ,  $f_r = 10$ ,  $K_p = \frac{m_d + m_b}{2 * y(0)} g$ , dan  $g = 10$

Berdasarkan hasil profil grafik pada (Gambar 4.3), terlihat bahwa dengan amplitudo mula-mula 0.5 kemudian seiring dengan berjalannya waktu  $t = 150$ , amplitudo gelombang vibrasi dawai yang diberi massa menggelinding semakin kecil yang sampai akhirnya hampir berhenti dengan amplitudo 0.001 atau hampir kembali di posisi diam pada  $t \pm 120$  detik.

#### 4.1.2 Solusi Analitik Sudut Simpangan Dawai $\theta(t)$

Dengan menggunakan model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa yang menggelinding di sepanjang dawai sebagai berikut :

$$\ddot{\theta} = -\delta\dot{\theta} - \frac{\left(-\frac{1}{2}F_r + \frac{1}{2}\mu m_b g + \frac{1}{2}k \eta v + 2k l\right)l \theta}{\left(\frac{2}{5}m_b r^2 + \frac{1}{3}m_d l^2\right)} + \frac{\frac{l}{2}m_b g}{\left(\frac{2}{5}m_b r^2 + \frac{1}{3}m_d l^2\right)} \quad (4.46)$$

Selanjutnya untuk mempermudah perhitungan solusi analitik, dimisalkan

$$\frac{\left(-\frac{1}{2}F_r + \frac{1}{2}\mu m_b g + \frac{1}{2}k \eta v + 2K_p l\right)l}{\left(\frac{2}{5}m_b r^2 + \frac{1}{3}m_d l^2\right)} = c \quad \text{dan} \quad \frac{\frac{l}{2}m_b g}{\left(\frac{2}{5}m_b r^2 + \frac{1}{3}m_d l^2\right)} = d \quad (4.47)$$

Sehingga persamaan (4.46) dapat disederhanakan menjadi

$$\ddot{\theta} = -\delta\dot{\theta} - c\theta + d \quad (4.48)$$

Selanjutnya variabel yang mengandung  $\theta$  dikumpulkan menjadi satu ruas, sehingga diperoleh

$$\ddot{\theta} + \delta\dot{\theta} + c\theta = d \quad (4.49)$$

Langkah selanjutnya ialah mencari akar-akar karakteristik persamaan, dengan cara sebagai berikut.

Misalkan

$$\theta = e^{\lambda t}$$

Maka

$$\dot{\theta} = \lambda e^{\lambda t} \quad \text{dan} \quad \ddot{\theta} = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

Kemudian substitusikan ke persamaan (4.49) sebagai berikut

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \delta \lambda e^{\lambda t} + c e^{\lambda t} = 0 \quad (4.50)$$

Untuk menyelesaikan solusi umum persamaan (4.34) yakni

$$\begin{aligned} \lambda^2 e^{\lambda t} + \delta \lambda e^{\lambda t} + c e^{\lambda t} &= 0 \\ e^{\lambda t}(\lambda^2 + \delta + \lambda c) &= 0 \end{aligned} \quad (4.51)$$

Dengan memandang  $\lambda^2 + \delta\lambda + c = 0$  maka diperoleh akar-akar dari persamaan karakteristik persamaan tersebut sebagai berikut:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4(1)c}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4c}}{2}$$

Sehingga diperoleh nilai untuk  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  yaitu:

$$\lambda_1 = \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - 4c}}{2} \text{ dan } \lambda_2 = \frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - 4c}}{2} \quad (4.52)$$

Dari nilai  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  yang telah diperoleh, terdapat tiga kemungkinan solusi umumnya, yakni:

1. Jika  $\delta^2 - 4c > 0$ , maka  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  merupakan dua akar real berbeda.

Sehingga solusi umum  $\theta(t)$  dapat diperoleh sebagai berikut

$$\theta_c(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

Dengan mengingat nilai  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  pada persamaan (4.52), maka

$$\theta_c(t) = c_1 e^{\frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - 4c}}{2} t} + c_2 e^{\frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - 4c}}{2} t} \quad (4.53)$$

Untuk menentukan nilai  $c_1$  dan  $c_2$  dapat dihitung menggunakan kondisi

awal yakni  $\theta(0) = p$  dan  $\dot{\theta}(0) = q$  sebagai berikut

$$\theta_c(0) = c_1 e^{\frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - 4c}}{2}(0)} + c_2 e^{\frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - 4c}}{2}(0)}$$

$$p = c_1 + c_2 \quad (4.54)$$

Sehingga diperoleh

$$c_1 = p - c_2 \quad (4.55)$$

Selanjutnya dihitung  $\dot{\theta}(t)$  sebagai berikut

$$\dot{\theta}(t) = \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - 4c}}{2} c_1 e^{\frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - 4c}}{2} t} + \frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - 4c}}{2} c_2 e^{\frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - 4c}}{2} t}$$

Sehingga

$$\dot{\theta}(0) = \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - 4c}}{2} c_1 e^{\frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - 4c}}{2} (0)} + \frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - 4c}}{2} c_2 e^{\frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - 4c}}{2} (0)}$$

$$q = \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - 4c}}{2} c_1 + \frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - 4c}}{2} c_2 \quad (4.56)$$

Kemudian substitusikan nilai  $c_1$  pada persamaan (4.55) ke persamaan (4.56)

maka

$$q = \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - 4c}}{2} (p - c_2) + \frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - 4c}}{2} c_2 \quad (4.57)$$

sehingga diperoleh

$$c_1 = -\frac{\sqrt{\delta^2 - 4c}(\delta p + 2q + p\sqrt{\delta^2 - 4c})}{2(4c - \delta^2)} \quad (4.58)$$

dan

$$c_2 = \frac{\sqrt{\delta^2 - 4c}(\delta p + 2q - p\sqrt{\delta^2 - 4c})}{2(4c - \delta^2)} \quad (4.59)$$

Selanjutnya substitusikan nilai  $c_1$  dan  $c_2$  ke persamaan (4.53), sehingga

diperoleh solusi untuk  $\theta(t)$  jika  $\delta^2 - 4c > 0$  adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} \theta_c(t) = & -\frac{\sqrt{\delta^2 - 4c}(\delta p + 2q + p\sqrt{\delta^2 - 4c})}{2(4c - \delta^2)} e^{\frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - 4c}}{2} t} + \\ & \frac{\sqrt{\delta^2 - 4c}(\delta p + 2q - p\sqrt{\delta^2 - 4c})}{2(4c - \delta^2)} e^{\frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - 4c}}{2} t} \end{aligned} \quad (4.60)$$

Selanjutnya dihitung solusi partikular untuk persamaan (4.46) sebagai

berikut

$$\theta_p(t) = Q \quad (4.61)$$

Dimana  $Q$  dapat dicari dengan mensubstitusikan  $\theta_p(t)$  untuk  $\theta$  pada persamaan (4.46). Turunan pertama dan kedua dari persamaan (4.49) adalah

$$\dot{\theta}_p(t) = 0$$

$$\ddot{\theta}_p(t) = 0$$

Sehingga turunan-turunan dari solusi partikular jika disubstitusikan ke persamaan (4.46) yakni

$$\ddot{\theta} + \delta\dot{\theta} + c\theta = d$$

sehingga dapat dinyatakan sebagai

$$0 + \delta(0) + cP = d$$

Maka diperoleh nilai  $P$  yakni

$$Q = \frac{d}{c}$$

Maka solusi partikular untuk persamaan (4.2) adalah

$$\theta_p(t) = \frac{d}{c} \quad (4.62)$$

Sehingga diperoleh solusi khusus untuk persamaan (4.46) sebagai berikut

$$\theta(t) = \theta_c(t) + \theta_p(t)$$

$$\begin{aligned} \theta(t) = & -\frac{\sqrt{\delta^2-4c}(\delta p+2q+p\sqrt{\delta^2-4c})}{2(4c-\delta^2)} e^{-\frac{\delta+\sqrt{\delta^2-4c}}{2}t} + \\ & \frac{\sqrt{\delta^2-4c}(\delta p+2q-p\sqrt{\delta^2-4c})}{2(4c-\delta^2)} e^{-\frac{\delta-\sqrt{\delta^2-4c}}{2}t} + \frac{d}{c} \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$\text{Dengan } c = \frac{\left(-\frac{1}{2}F_r + \frac{1}{2}\mu m_b g + \frac{1}{2}k \eta v + 2K_p l\right)l}{\left(\frac{2}{5}m_b r^2 + \frac{1}{3}m_d l^2\right)} \quad \text{dan} \quad d = \frac{\frac{l}{2}m_b g}{\left(\frac{2}{5}m_b r^2 + \frac{1}{3}m_d l^2\right)}$$

Solusi pada persamaan (4.63) dianggap valid untuk  $\theta(t)$  pada model jika memenuhi syarat sebagai berikut :

a.  $\theta_c(t)$  memenuhi nilai awal

(i) Langkah pertama cek menggunakan nilai awal  $\theta(0) = p$

Substitusikan nilai  $t = 0$  pada persamaan (4.60), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\theta(0) &= -\frac{\sqrt{\delta^2-4c}(\delta p+2q+p\sqrt{\delta^2-4c})}{2(4c-\delta^2)}e^{\frac{-\delta+\sqrt{\delta^2-4c}}{2}(0)} + \\ &\quad \frac{\sqrt{\delta^2-4c}(\delta p+2q-p\sqrt{\delta^2-4c})}{2(4c-\delta^2)}e^{\frac{-\delta-\sqrt{\delta^2-4c}}{2}(0)} \\ \theta(0) &= -\frac{\sqrt{\delta^2-4c}(\delta p+2q+p\sqrt{\delta^2-4c})}{2(4c-\delta^2)} + \frac{\sqrt{\delta^2-4c}(\delta p+2q-p\sqrt{\delta^2-4c})}{2(4c-\delta^2)} \quad (4.64)\end{aligned}$$

Dengan mengingat persamaan (4.58) dan (4.59) sehingga persamaan

(4.64) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned}-\frac{\sqrt{\delta^2-4c}(\delta p+2q+p\sqrt{\delta^2-4c})}{2(4c-\delta^2)} + \frac{\sqrt{\delta^2-4c}(\delta p+2q-p\sqrt{\delta^2-4c})}{2(4c-\delta^2)} &= c_1 + c_2 \\ -\frac{\sqrt{\delta^2-4c}(\delta p+2q+p\sqrt{\delta^2-4c})}{2(4c-\delta^2)} + \frac{\sqrt{\delta^2-4c}(\delta p+2q-p\sqrt{\delta^2-4c})}{2(4c-\delta^2)} &= p \quad (4.65)\end{aligned}$$

maka terbukti

$$\theta(0) = p \quad (4.66)$$

(ii) Langkah selanjutnya dihitung  $\dot{\theta}(t)$  sebagai berikut

$$\begin{aligned}\dot{\theta}(t) &= -\frac{-\delta+\sqrt{\delta^2-4c}}{2} \frac{\sqrt{\delta^2-4c}(\delta p+2q+p\sqrt{\delta^2-4c})}{2(4c-\delta^2)} e^{\frac{-\delta+\sqrt{\delta^2-4c}}{2}t} + \\ &\quad \frac{-\delta-\sqrt{\delta^2-4c}}{2} \frac{\sqrt{\delta^2-4c}(\delta p+2q+p\sqrt{\delta^2-4c})}{2(4c-\delta^2)} e^{\frac{-\delta-\sqrt{\delta^2-4c}}{2}t}\end{aligned}$$

Kemudian hitung menggunakan nilai awal  $\dot{\theta}(0) = q$

$$\begin{aligned}\dot{\theta}(0) &= -\frac{-\delta+\sqrt{\delta^2-4c}}{2} \frac{\sqrt{\delta^2-4c}(\delta p+2q+p\sqrt{\delta^2-4c})}{2(4c-\delta^2)} e^{\frac{-\delta+\sqrt{\delta^2-4c}}{2}(0)} + \\ &\quad \frac{-\delta-\sqrt{\delta^2-4c}}{2} \frac{\sqrt{\delta^2-4c}(\delta p+2q-p\sqrt{\delta^2-4c})}{2(4c-\delta^2)} e^{\frac{-\delta-\sqrt{\delta^2-4c}}{2}(0)} \\ \dot{\theta}(0) &= -\frac{-\delta+\sqrt{\delta^2-4c}}{2} \frac{\sqrt{\delta^2-4c}(\delta p+2q+p\sqrt{\delta^2-4c})}{2(4c-\delta^2)} + \\ &\quad \frac{-\delta-\sqrt{\delta^2-4c}}{2} \frac{\sqrt{\delta^2-4c}(\delta p+2q-p\sqrt{\delta^2-4c})}{2(4c-\delta^2)}\end{aligned}$$

maka terbukti

$$\dot{\theta}(0) = q \quad (4.67)$$

b.  $\theta_c(t)$  pada persamaan (4.60) memenuhi persamaan  $\ddot{\theta} = -\delta\dot{\theta} - c\theta$  pada persamaan (4.48)

Persamaan (4.63) diturunkan terhadap  $t$  sehingga diperoleh persamaan  $\dot{\theta}$  dan  $\ddot{\theta}$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(t) = & -\frac{-\delta+\sqrt{\delta^2-4c}}{2} \frac{\sqrt{\delta^2-4c}(\delta p+2q+p\sqrt{\delta^2-4c})}{2(4c-\delta^2)} e^{\frac{-\delta+\sqrt{\delta^2-4c}}{2}t} + \\ & \frac{-\delta-\sqrt{\delta^2-4c}}{2} \frac{\sqrt{\delta^2-4c}(\delta p+2q-p\sqrt{\delta^2-4c})}{2(4c-\delta^2)} e^{\frac{-\delta-\sqrt{\delta^2-4c}}{2}t} \end{aligned} \quad (4.68)$$

dan

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}(t) = & -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\delta^2-4c}} \left( e^{\frac{-\delta+\sqrt{\delta^2-4c}}{2}t} \sqrt{\delta^2-4c} c p + \right. \\ & e^{\frac{-\delta+\sqrt{\delta^2-4c}}{2}t} \sqrt{\delta^2-4c} \delta q - e^{\frac{-\delta+\sqrt{\delta^2-4c}}{2}t} c \delta p - \\ & e^{\frac{-\delta+\sqrt{\delta^2-4c}}{2}t} \delta^2 q e^{\frac{-\delta-\sqrt{\delta^2-4c}}{2}t} \sqrt{\delta^2-4c} c p e^{\frac{-\delta-\sqrt{\delta^2-4c}}{2}t} \sqrt{\delta^2-4c} \delta q + \\ & e^{\frac{-\delta-\sqrt{\delta^2-4c}}{2}t} c \delta p + e^{\frac{-\delta-\sqrt{\delta^2-4c}}{2}t} \delta^2 q + 2e^{\frac{-\delta+\sqrt{\delta^2-4c}}{2}t} c q + \\ & \left. 2e^{\frac{-\delta-\sqrt{\delta^2-4c}}{2}t} c q \right) \end{aligned} \quad (4.69)$$

Kemudian dihitung  $-\delta\dot{\theta} - c\theta$  sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} -\delta\dot{\theta} - c\theta = & -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\delta^2-4c}} \left( e^{\frac{-\delta+\sqrt{\delta^2-4c}}{2}t} \sqrt{\delta^2-4c} c p + \right. \\ & e^{\frac{-\delta+\sqrt{\delta^2-4c}}{2}t} \sqrt{\delta^2-4c} \delta q - e^{\frac{-\delta+\sqrt{\delta^2-4c}}{2}t} c \delta p - \\ & e^{\frac{-\delta+\sqrt{\delta^2-4c}}{2}t} \delta^2 q + \\ & \left. e^{\frac{-\delta-\sqrt{\delta^2-4c}}{2}t} \sqrt{\delta^2-4c} c p e^{\frac{-\delta-\sqrt{\delta^2-4c}}{2}t} \sqrt{\delta^2-4c} \delta q + \right. \end{aligned}$$

$$e^{\frac{-\delta-\sqrt{\delta^2-4c}}{2}t} c \delta p + e^{\frac{-\delta-\sqrt{\delta^2-4c}}{2}t} \delta^2 q + 2e^{\frac{-\delta+\sqrt{\delta^2-4c}}{2}t} c q + 2e^{\frac{-\delta-\sqrt{\delta^2-4c}}{2}t} c q \quad (4.70)$$

Dengan mengingat (4.63) maka terbukti

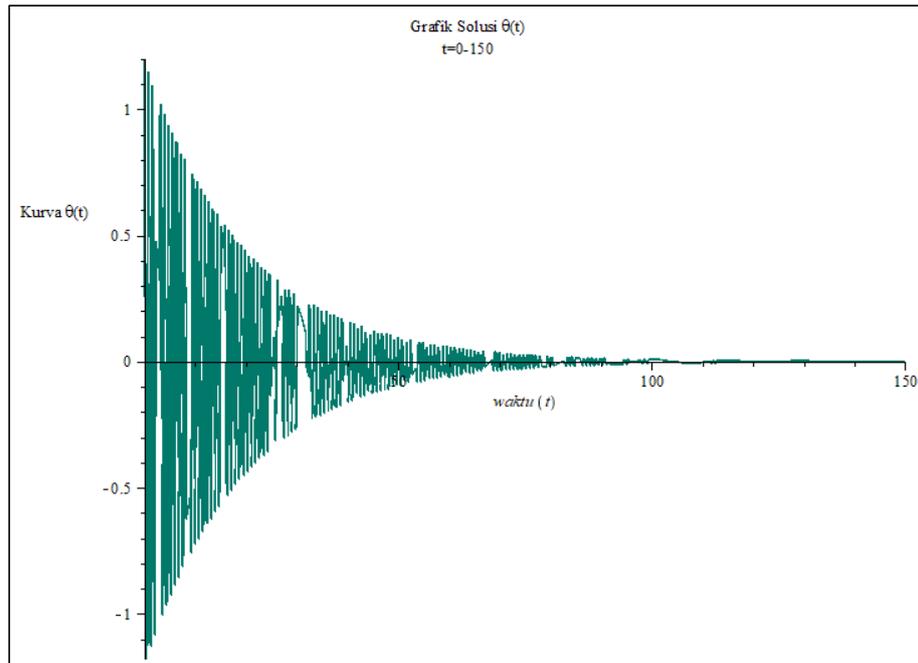
$$-\delta\dot{\theta} - c\theta = \ddot{\theta} \quad (4.71)$$

Berdasarkan persamaan (4.66), (4.67), dan (4.71), maka  $\theta(t)$  pada persamaan (4.63) dinyatakan valid sebagai solusi  $\theta(t)$ .

Selanjutnya dari persamaan (4.63) digambarkan plot grafik menggunakan parameter  $\delta = 0.1, \theta(0) = 1.2, \dot{\theta}(0) = 0, m_d = 2500, m_b = 100, f_r = 10, K_p = \frac{m_d+m_b}{2*y(0)} g, g = 10, \lambda = 0.06, \mu_k = 0.57, mtot = m_b + m_d, l = 1800, r = 0.1, \eta = 0.018.10^{-3}, v = 10$ , sehingga diperoleh nilai eksak sebagai berikut:

$$\theta(t) = (0.6 - 0.0038)e^{(-0.05+7.89922 I)t} + (0.6 + 0.0038)e^{(-0.05-7.89922 I)t} + 0.000005$$

Selanjutnya dari nilai eksak tersebut digambarkan plot grafik pada saat  $t = 0 - 150$  detik dan diperoleh hasil sebagai berikut :



**Gambar 4.4** Grafik Solusi  $\theta(t)$  Untuk  $\delta^2 - 4c > 0$ , dengan  $\delta = 0.1, \theta(0) = 1.2, \dot{\theta}(0) = 0, m_d = 2500, m_b = 100, f_r = 10, K_p = \frac{m_d + m_b}{2 * y(0)} g, g = 10, \lambda = 0.06, \mu_k = 0.57, mtot = m_b + m_d, l = 1800, r = 0.1, \eta = 0.018 \cdot 10^{-3}, v = 10$

Berdasarkan hasil profil grafik pada (Gambar 4.4), terlihat bahwa amplitudo mula-mula 1.2 kemudian seiring dengan berjalannya waktu  $t = 150$ , amplitudo sudut gelombang vibrasi dawai yang diberi massa menggelinding semakin kecil yang sampai akhirnya hampir berhenti dengan amplitudo 0.001 atau hampir kembali di posisi diam pada  $t \pm 135$  detik.

2. Jika  $\delta^2 - 4c = 0$ , maka akar real sama ( $\lambda_1 = \lambda_2$ ) sehingga solusi  $\theta_c(t)$  yakni

$$\theta_c(t) = c_1 e^{\lambda t} + t c_2 e^{\lambda t}$$

$$\theta_c(t) = e^{\lambda t} (c_1 + t c_2)$$

Dengan mengingat nilai  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  pada persamaan (4.52) dan  $\delta^2 - 4c = 0$ , maka

$$\theta_c(t) = e^{\frac{-\delta}{2}t}(c_1 + tc_2) \quad (4.72)$$

Untuk menentukan nilai  $c_1 + c_2$  dapat menggunakan kondisi awal yakni  $y(0) = p$  dan  $\dot{y}(0) = q$  sebagai berikut

$$\theta_c(t) = e^{\frac{-\delta}{2}t}(c_1 + tc_2)$$

$$\theta_c(0) = e^{\frac{-\delta}{2} \cdot 0}(c_1 + 0c_2)$$

$$p = c_1$$

Sehingga diperoleh

$$c_1 = p \quad (4.73)$$

Langkah selanjutnya dihitung  $\dot{\theta}(t)$  sebagai berikut

$$\dot{\theta}_c(t) = \lambda e^{\lambda t}(c_1 + tc_2) + e^{\lambda t}c_2$$

$$\dot{\theta}_c(t) = \frac{-\delta}{2} e^{\frac{-\delta}{2}t}(c_1 + tc_2) + e^{\frac{-\delta}{2}t}c_2$$

Kemudian menggunakan kondisi awal  $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$  sebagai berikut

$$\dot{\theta}_c(0) = \frac{-\delta}{2} e^{\frac{-\delta}{2}(0)}(c_1 + (0)c_2) + e^{\frac{-\delta}{2}(0)}c_2$$

$$q = \frac{-\delta}{2}c_1 + c_2$$

Substitusikan nilai  $c_1$  pada persamaan (4.20) sehingga

$$q = \frac{-\delta}{2}p + c_2$$

Sehingga diperoleh

$$c_2 = q + \frac{\delta p}{2} \quad (4.74)$$

Kemudian substitusikan nilai (4.73) dan (4.74) pada persamaan (4.56), sehingga diperoleh solusi analitik untuk  $\theta(t)$  sebagai berikut

$$\theta_c(t) = e^{-\frac{\delta}{2}t} \left( p + \left( q + \frac{\delta p}{2} \right) t \right)$$

$$\theta_c(t) = e^{-\frac{\delta}{2}t} (p + qt + 0.5\delta pt) \quad (4.75)$$

Dengan mengingat solusi partikular pada persamaan (4.62), maka diperoleh solusi analitik untuk  $\theta(t)$  sebagai berikut

$$\theta(t) = \theta_c(t) + \theta_p(t)$$

$$\theta(t) = e^{-\frac{\delta}{2}t} (p + qt + 0.5\delta pt) + \frac{d}{b} \quad (4.76)$$

Dengan  $c = \frac{\left(-\frac{1}{2}F_r + \frac{1}{2}\mu m_b g + \frac{1}{2}k \eta v + 2K_p l\right)l}{\left(\frac{2}{5}m_b r^2 + \frac{1}{3}m_d l^2\right)}$  dan  $d = \frac{\frac{1}{2}m_b g}{\left(\frac{2}{5}m_b r^2 + \frac{1}{3}m_d l^2\right)}$

Solusi pada persamaan (4.75) dianggap valid untuk  $\theta(t)$  memenuhi syarat sebagai berikut :

a.  $\theta_c(t)$  memenuhi nilai awal

(i) Langkah pertama cek menggunakan nilai awal  $\theta(0) = p$

Substitusikan nilai  $t = 0$  pada persamaan (4.59), maka

$$\theta(0) = e^{-\frac{\delta}{2} \cdot 0} (p + q(0) + 0.5\delta p(0))$$

Maka terbukti

$$\theta(0) = p \quad (4.77)$$

(ii) Langkah selanjutnya dihitung  $\dot{\theta}(t)$  sebagai berikut

$$\dot{\theta}(t) = \frac{-\delta}{2} e^{-\frac{\delta}{2}t} (p + qt + 0.5\delta pt) + e^{-\frac{\delta}{2}t} (q + 0.5\delta p)$$

Kemudian cek menggunakan nilai awal  $\dot{\theta}(0) = q$

$$\dot{\theta}(0) = -0.5\delta e^{-\frac{\delta}{2}(0)} (p + q(0) + 0.5\delta p(0)) + e^{-\frac{\delta}{2}(0)} (q + 0.5\delta p)$$

Maka terbukti

$$\dot{\theta}(0) = q \quad (4.78)$$

b.  $\theta_c(t)$  pada persamaan (4.75) memenuhi persamaan  $\ddot{\theta} = -\delta\dot{\theta} - c\theta$  pada persamaan (4.63)

Persamaan (4.75) diturunkan terhadap  $t$  sehingga diperoleh persamaan  $\dot{\theta}$  dan  $\ddot{\theta}$  sebagai berikut:

$$\dot{\theta} = \frac{-\delta}{2} e^{\frac{-\delta}{2}t} (p + qt + 0.5\delta pt) + e^{\frac{-\delta}{2}t} (q + 0.5\delta p) \quad (4.79)$$

dan

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{8} \delta e^{\frac{-\delta}{2}t} (\delta^2 pt + 2\delta qt - 2\delta p - 8q) \quad (4.80)$$

Selanjutnya dihitung  $-\delta\dot{\theta} - c\theta$  sehingga diperoleh

$$-\delta\dot{\theta} - c\theta = -\frac{1}{4} \delta e^{\frac{-\delta}{2}t} (-\delta^3 pt + 2c\delta pt - 2\delta^2 qt + 4cqt + 4cp + 4\delta q) \quad (4.81)$$

Karena  $\delta^2 - 4c = 0$  maka  $c = \frac{\delta^2}{4}$ , sehingga

$$-\delta\dot{\theta} - c\theta = \frac{1}{8} \delta e^{\frac{-\delta}{2}t} (\delta^2 pt + 2\delta qt - 2\delta p - 8q) \quad (4.82)$$

Maka terbukti bahwa

$$-\delta\dot{\theta} - c\theta = \ddot{\theta} \quad (4.83)$$

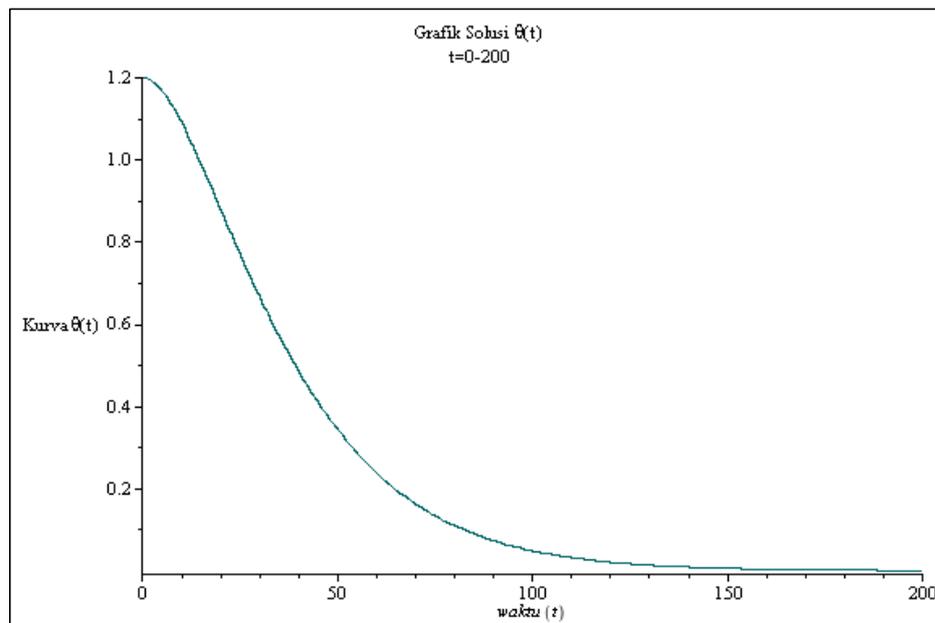
Berdasarkan persamaan (4.77), (4.78), dan (4.83), maka solusi  $\theta(t)$  pada persamaan (4.76) dinyatakan valid sebagai solusi  $\theta(t)$ .

Selanjutnya dari persamaan (4.76) digambarkan plot grafik menggunakan parameter  $\delta = 0.1, \theta(0) = 1.2, \dot{\theta}(0) = 0, m_d = 2500, m_b = 100, f_r = 10, K_p = \frac{m_d + m_b}{2 * y(0)} g, g = 10, \lambda = 0.06, \mu_k = 0.57, mtot = m_b + m_d, l =$

1800,  $r = 0.1$ ,  $\eta = 0.018 \cdot 10^{-3}$ ,  $v = 10$ , sehingga diperoleh nilai eksak sebagai berikut:

$$\theta(t) = (1.2 + 0.06)e^{(-0.05)t} + 0.000005$$

Selanjutnya dari nilai eksak tersebut digambarkan plot grafik pada saat  $t = 0$  hingga  $t = 200$  diperoleh hasil sebagai berikut :



**Gambar 4.5** Grafik Solusi  $\theta(t)$  Untuk  $\delta^2 - 4c = 0$ , dengan  $\delta = 0.1$   $\theta(0) = 1.2$ ,  $\dot{\theta}(0) = 0$ ,  $m_d = 2500$ ,  $m_b = 100$ ,  $f_r = 10$ ,  $K_p = \frac{m_d + m_b}{2 \cdot y(0)} g$ ,  $g = 10$ ,  $\lambda = 0.06$ ,  $\mu_k = 0.57$ ,  $mtot = m_b + m_d$ ,  $l = 1800$ ,  $r = 0.1$ ,  $\eta = 0.018 \cdot 10^{-3}$ ,  $v = 10$ .

Berdasarkan hasil profil grafik pada (Gambar 4.5), terlihat bahwa dengan amplitudo mula-mula 1.2 kemudian seiring dengan berjalannya waktu  $t = 200$ , sudut gelombang vibrasi dawai yang diberi massa menggelinding semakin menurun yang sampai akhirnya hampir berhenti dengan amplitudo 0.001 atau hampir kembali di posisi diam pada  $t \pm 185$  detik dan tidak mengalami vibrasi lagi.

3. Jika  $\delta^2 - 4c < 0$ , maka dua akar kompleks yang saling konjugat ( $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ ). Sehingga solusi  $\theta_c(t)$  dapat diperoleh sebagai

$$\theta_c(t) = Ae^{\alpha t} \cos \beta t + Be^{\alpha t} \sin \beta t$$

Dengan mengingat nilai  $\lambda_1 = \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - 4c}}{2}$ , karena  $\delta^2 - 4c < 0$  maka

$$\lambda_1 = \frac{-\delta + \sqrt{-1}\sqrt{\delta^2 - 4c}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{-\delta + \sqrt{4c - \delta^2}i}{2}$$

Sehingga diperoleh nilai  $\alpha = \frac{-\delta}{2}$   $\beta = \frac{\sqrt{4c - \delta^2}}{2}$

Maka

$$\theta_c(t) = Ae^{\frac{-\delta}{2}t} \cos \frac{\sqrt{4c - \delta^2}}{2} t + Be^{\frac{-\delta}{2}t} \sin \frac{\sqrt{4c - \delta^2}}{2} t \quad (4.84)$$

Untuk menentukan nilai  $A$  dan  $B$  dapat menggunakan kondisi awal yakni

$\theta(0) = p$  dan  $\dot{\theta}(0) = q$  sebagai berikut

$$\theta(0) = Ae^{\alpha 0} \cos \beta 0 + Be^{\alpha 0} \sin \beta 0$$

$$\theta_0 = Ae^0 \cos 0 + Be^0 \sin 0$$

$$\theta_0 = A + 0$$

$$\theta_0 = A \quad (4.85)$$

dan

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(0) &= A\alpha e^{\alpha 0} \cos \beta 0 + A\beta e^{\alpha 0} (-\sin \beta 0) + B\alpha e^{\alpha 0} \sin \beta 0 + \\ &\quad B\beta e^{\alpha 0} \cos \beta 0 \end{aligned}$$

$$\dot{\theta}_0 = A\alpha + B\beta$$

Dengan nilai  $A$  pada persamaan (4.85), maka

$$q = \alpha p + B\beta$$

sehingga diperoleh

$$B = \frac{2q + \delta p}{\sqrt{4c - \delta^2}} \quad (4.86)$$

Kemudian substitusikan nilai  $A$  dan  $B$  ke persamaan (4.84), sehingga diperoleh solusi  $\theta_c(t)$  adalah sebagai berikut

$$\theta_c(t) = p e^{-\frac{\delta}{2}t} \cos \frac{\sqrt{4c - \delta^2}}{2} t + \left( \frac{2q + \delta p}{\sqrt{4c - \delta^2}} \right) e^{-\frac{\delta}{2}t} \sin \frac{\sqrt{4c - \delta^2}}{2} t \quad (4.87)$$

Dengan mengingat solusi partikular pada persamaan (4.62), maka diperoleh solusi analitik untuk  $\theta(t)$  sebagai berikut

$$\theta(t) = \theta_c(t) + \theta_p(t)$$

$$\theta(t) = p e^{-\frac{\delta}{2}t} \cos \frac{\sqrt{4c - \delta^2}}{2} t + \left( \frac{2q + \delta p}{\sqrt{4c - \delta^2}} \right) e^{-\frac{\delta}{2}t} \sin \frac{\sqrt{4c - \delta^2}}{2} t + \frac{d}{c} \quad (4.88)$$

$$\text{Dengan } c = \frac{\left( -\frac{1}{2}F_r + \frac{1}{2}\mu m_b g + \frac{1}{2}k \eta v + 2K_p l \right) l}{\left( \frac{2}{5}m_b r^2 + \frac{1}{3}m_d l^2 \right)} \quad \text{dan} \quad d = \frac{\frac{l}{2}m_b g}{\left( \frac{2}{5}m_b r^2 + \frac{1}{3}m_d l^2 \right)}$$

Solusi pada persamaan (4.88) dianggap sah sebagai solusi analitik untuk  $\theta(t)$  pada model matematika vibrasi dawai dengan massa menggelinding yang sah jika memenuhi syarat sebagai berikut :

a.  $\theta_c(t)$  memenuhi nilai awal  $\theta(0) = p$

(i) Langkah pertama cek menggunakan nilai awal  $\theta(0) = p$

Substitusikan nilai  $t = 0$  pada persamaan (4.87), maka

$$\theta(0) = p e^{-\frac{\delta}{2}(0)} \cos \frac{\sqrt{4c - \delta^2}}{2} (0) + \left( \frac{2q + \delta p}{\sqrt{4c - \delta^2}} \right) e^{-\frac{\delta}{2}(0)} \sin \frac{\sqrt{4c - \delta^2}}{2} (0)$$

$$\theta(0) = p + 0$$

Maka terbukti

$$\theta(0) = p \quad (4.89)$$

(ii) Kemudian cek menggunakan nilai awal  $\dot{\theta}(0) = q$

$$\dot{\theta}(t) = e^{-\frac{\delta}{2}t} \cos \frac{\sqrt{4a-\delta^2}}{2} t \left( -\frac{\delta p}{2} + \frac{2q\sqrt{4a-\delta^2} + \delta p\sqrt{4a-\delta^2}}{2\sqrt{4a-\delta^2}} \right) +$$

$$e^{-\frac{\delta}{2}t} \sin \frac{\sqrt{4a-\delta^2}}{2} t \left( \frac{p\sqrt{4a-\delta^2}}{2} + \frac{2\delta q + \delta^2 p}{2\sqrt{4a-\delta^2}} \right)$$

$$\dot{\theta}(0) = e^{-\frac{\delta}{2}(0)} \cos \frac{\sqrt{4a-\delta^2}}{2} (0) \left( -\frac{\delta p}{2} + \frac{2q + \delta p}{2} \right) +$$

$$e^{-\frac{\delta}{2}(0)} (0) \left( \frac{\theta_0 \sqrt{4a-\delta^2}}{2} + \frac{2\delta q + \delta^2 p}{2\sqrt{4a-\delta^2}} \right)$$

$$\dot{\theta}(0) = -\frac{\delta p}{2} + \frac{2q + \delta p}{2}$$

$$\dot{\theta}(0) = \frac{2q}{2}$$

Maka terbukti

$$\dot{\theta}(0) = q \quad (4.90)$$

b.  $\theta_c$  pada persamaan (4.87) memenuhi persamaan awal  $\ddot{\theta} = -\delta\dot{\theta} - a\theta$  pada persamaan (4.63)

Selanjutnya tentukan  $\dot{\theta}(t)$  dan  $\ddot{\theta}(t)$  sebagai berikut

$$\dot{\theta}(t) = e^{-\frac{\delta}{2}t} \cos \frac{\sqrt{4a-\delta^2}}{2} t \left( -\frac{\delta p}{2} + \frac{2q\sqrt{4a-\delta^2} + \delta\theta_0\sqrt{4a-\delta^2}}{2\sqrt{4a-\delta^2}} \right) +$$

$$e^{-\frac{\delta}{2}t} \sin \frac{\sqrt{4a-\delta^2}}{2} t \left( \frac{\theta_0\sqrt{4a-\delta^2}}{2} + \frac{2\delta q + \delta^2 p}{2\sqrt{4a-\delta^2}} \right) \quad (4.91)$$

dan

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{1}{\sqrt{4c-\delta^2}} \left( e^{-\frac{\delta}{2}t} \left( \cos \frac{\sqrt{4c-\delta^2}}{2} t \right) \sqrt{4c-\delta^2} cp + \right.$$

$$\cos \frac{\sqrt{4c-\delta^2}}{2} t \sqrt{4c-\delta^2} \delta q - \sin \frac{\sqrt{4c-\delta^2}}{2} t c \delta p -$$

$$\left. \sin \frac{\sqrt{4c-\delta^2}}{2} t \delta^2 q + 2 \sin \frac{\sqrt{4c-\delta^2}}{2} t c q \right) \quad (4.92)$$

Selanjutnya dihitung  $-\delta\dot{\theta} - a\theta$  sebagai berikut

$$\begin{aligned}
-\delta\dot{\theta} - a\theta = & -\frac{1}{\sqrt{4c-\delta^2}} \left( e^{-\frac{\delta}{2}t} \left( \cos\frac{\sqrt{4c-\delta^2}}{2}t \right) \sqrt{4c-\delta^2} cp + \right. \\
& \cos\frac{\sqrt{4c-\delta^2}}{2}t \sqrt{4c-\delta^2} \delta q - \sin\frac{\sqrt{4c-\delta^2}}{2}t c \delta p - \\
& \left. \sin\frac{\sqrt{4c-\delta^2}}{2}t \delta^2 q + 2 \sin\frac{\sqrt{4c-\delta^2}}{2}t c q \right) \quad (4.93)
\end{aligned}$$

Maka terbukti bahwa

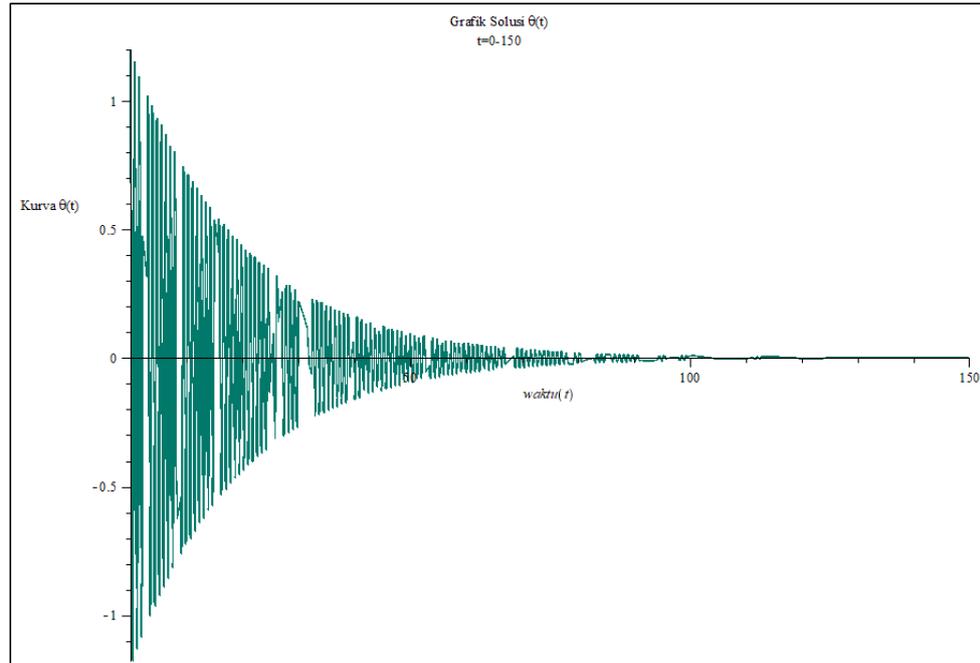
$$-\delta\dot{\theta} - c\theta = \ddot{\theta} \quad (4.94)$$

Berdasarkan persamaan (4.89), (4.90) dan (4.94), maka solusi  $\theta(t)$  pada persamaan (4.88) dinyatakan sah sebagai solusi model matematika vibrasi dawai dengan massa menggelinding untuk kasus  $\delta^2 - 4c < 0$ .

Selanjutnya dari persamaan (4.88) digambarkan plot grafik menggunakan parameter  $\delta = 0.1, \theta(0) = 1.2, \dot{\theta}(0) = 0, m_d = 2500, m_b = 100, f_r = 10, K_p = \frac{m_d+m_b}{2*y(0)}g, g = 10, \lambda = 0.06, \mu_k = 0.57, mtot = m_b + m_d, l = 1800, r = 0.1, \eta = 0.018.10^{-3}, v = 10$ , sehingga diperoleh nilai eksak sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\theta(t) = & 1.2 e^{(-0.05)t} \cos(7.8899 t) + 0.00759 e^{(-0.05)t} \sin(7.8899 t) + \\
& 0.000005
\end{aligned}$$

Selanjutnya dari nilai eksak tersebut digambarkan plot grafik pada saat  $t = 0$  hingga  $t = 150$  diperoleh hasil sebagai berikut :



**Gambar 4.6** Grafik Solusi  $\theta(t)$  Untuk  $\delta^2 - 4c < 0$ , dengan  $\delta = 0.1$ ,  $\theta(0) = 1.2$ ,  $\dot{\theta}(0) = 0$ ,  $m_d = 2500$ ,  $m_b = 100$ ,  $f_r = 10$ ,  $K = \frac{m_d + m_b}{2 * y(0)} g$ ,  $g = 10$ ,  $\lambda = 0.06$ ,  $\mu_k = 0.57$ ,  $mtot = m_b + m_d$ ,  $l = 1800$ ,  $r = 0.1$ ,  $\eta = 0.018 \cdot 10^{-3}$ ,  $v = 10$

Berdasarkan hasil profil grafik pada (Gambar 4.6), terlihat bahwa dengan amplitudo mula-mula 1.2 kemudian seiring dengan berjalannya waktu  $t = 150$ , amplitudo gelombang vibrasi dawai yang diberi massa menggelinging semakin kecil yang sampai akhirnya hampir berhenti dengan amplitudo 0.001 atau hampir kembali di posisi diam pada  $t \pm 120$  detik

## BAB V PENUTUP

### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pada bab pembahasan sebelumnya, diperoleh tiga solusi analitik dari tiga kasus yang berbeda untuk setiap persamaan  $y(t)$  dan  $\theta(t)$  pada model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding.

1. Untuk  $y(t)$  diperoleh solusi khusus dari tiga kasus sebagai berikut :

a. Untuk kasus  $\delta^2 - 4a > 0$  diperoleh solusi analitik sebagai berikut:

$$y(t) = -\frac{\sqrt{\delta^2-4a}(\delta p+2q+p\sqrt{\delta^2-4a})}{2(4a-\delta^2)} e^{\frac{-\delta+\sqrt{\delta^2-4a}}{2}t} + \frac{\sqrt{\delta^2-4a}(\delta p+2q-p\sqrt{\delta^2-4a})}{2(4a-\delta^2)} e^{\frac{-\delta-\sqrt{\delta^2-4a}}{2}t} + \frac{b}{a}$$

b. Untuk kasus  $\delta^2 - 4a = 0$  diperoleh solusi analitik sebagai berikut:

$$y(t) = e^{\frac{-\delta}{2}t} (p + qt + 0.5\delta pt) + \frac{b}{a}$$

c. Untuk kasus  $\delta^2 - 4a < 0$  diperoleh solusi analitik sebagai berikut:

$$y(t) = pe^{-\frac{\delta}{2}t} \cos \frac{\sqrt{4a-\delta^2}}{2}t + \left(\frac{2q+\delta p}{\sqrt{4a-\delta^2}}\right) e^{-\frac{\delta}{2}t} \sin \frac{\sqrt{4a-\delta^2}}{2}t + \frac{b}{a}$$

Dengan

$$a = \frac{4K_p}{m_d}$$

dan

$$b = \frac{(m_b+m_d)g}{m_d} - F_r$$

Berdasarkan hasil analisis profil grafik solusi analitik untuk model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding, pada  $y(t)$

diperoleh profil grafik yang sesuai dengan keadaan riil pada kasus pertama yakni  $\delta^2 - 4a > 0$  dan pada kasus ketiga yakni  $\delta^2 - 4a < 0$ .

2. Untuk  $\theta(t)$  diperoleh solusi khusus dari tiga kasus sebagai berikut :

a. Untuk kasus  $\delta^2 - 4c > 0$  diperoleh solusi analitik sebagai berikut:

$$\theta(t) = -\frac{\sqrt{\delta^2-4c}(\delta p+2q+p\sqrt{\delta^2-4c})}{2(4c-\delta^2)} e^{\frac{-\delta+\sqrt{\delta^2-4c}}{2}t} + \frac{\sqrt{\delta^2-4c}(\delta p+2q-p\sqrt{\delta^2-4c})}{2(4c-\delta^2)} e^{\frac{-\delta-\sqrt{\delta^2-4c}}{2}t} + \frac{d}{c}$$

b. Untuk kasus  $\delta^2 - 4c = 0$  diperoleh solusi analitik sebagai berikut:

$$\theta(t) = e^{\frac{-\delta}{2}t} (p + qt + 0.5\delta pt) + \frac{d}{c}$$

c. Untuk kasus  $\delta^2 - 4c < 0$  diperoleh solusi analitik sebagai berikut:

$$\theta(t) = pe^{-\frac{\delta}{2}t} \cos \frac{\sqrt{4c-\delta^2}}{2}t + \left(\frac{2q+\delta p}{\sqrt{4c-\delta^2}}\right) e^{-\frac{\delta}{2}t} \sin \frac{\sqrt{4c-\delta^2}}{2}t + \frac{d}{c}$$

Dengan

$$c = \frac{\left(-\frac{1}{2}F_r + \frac{1}{2}\mu m_b g + \frac{1}{2}k \eta v + 2K_p l\right)l}{\left(\frac{2}{5}m_b r^2 + \frac{1}{3}m_d l^2\right)}$$

dan

$$d = \frac{\frac{l}{2}m_b g}{\left(\frac{2}{5}m_b r^2 + \frac{1}{3}m_d l^2\right)}.$$

Berdasarkan hasil analisis profil grafik solusi analitik untuk model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding, pada  $\theta(t)$  diperoleh profil grafik yang sesuai dengan keadaan riil pada kasus pertama yakni  $\delta^2 - 4c > 0$  dan pada kasus ketiga yakni  $\delta^2 - 4c < 0$ .

## 5.2 Saran

Dalam penelitian ini, diperoleh tiga solusi analitik untuk tiga kasus pada setiap persamaan. Dilakukan pula analisis profil grafik dengan parameter yang merujuk pada penelitian McKenna tahun 1999. Bagi peneliti selanjutnya, disarankan untuk melakukan analisis profil grafik dari solusi dalam penelitian ini menggunakan nilai awal dan parameter yang berbeda.

## DAFTAR PUSTAKA

- Abdullah. *Tafsir Ibnu Katsir*. Jakarta: Pusat Imam Syafi'i, 2007.
- Alonso, Marcelo, dan Edward J. Finn. *Fundamental University Physics (Volume 1 Mechanics)*. Washington: Addison-Wesley Publishing Company, 1966.
- Al-Qur'an dan Terjemahannya*. Kementrian Agama RI, 2019.
- Dr. Muhtar, ST., MT. *Struktur Statis Tak Tentu untuk Teknik Sipil*. Jember: CV. PUSTAKA ABADI, 2020.
- Hidayati, Nurul Anggraeni. "Analisis Uji Validasi Model Matematika Vibrasi Dawai Pada Alat Musik Sasando." *SKRIPSI*, 2018.
- Janah, Miftakul, dan Ari Kusumastuti. "Model Matematika Vibrasi Dawai Dikenai Massa yang Berjalan di Atasnya." *Jurnal Riset Mahasiswa Matematika*, 2021: 1-12.
- Josephine, Neny Else. *Gerak Melingkar Fisika Kelas X*. Surabaya: SMA N 2 Surabaya, 2020.
- Kartono. *Persamaan Diferensial Biasa Model Matematika Fenomena Perubahan*. Yogyakarta: Graha Ilmu, 2012.
- Kountur. *Metode Penelitian untuk Skripsi dan Tesis*. Jakarta: PPM, 2003.
- Kreyszig, Erwin. *Advanced Engineering Mathematics*. London: Johwilwy & Son, 1988.
- Kusumastuti, Ari, dan dkk. "Analysis Construction of Mathematical Modeling." *Jurnal Teknologi*, 2017.
- Lazer, A. C., dan P. J. McKenna. "Large-Amplitude Periodic Oscillations in Suspension Bridges : Some New Connections with Nonlinier Analysis." *Society for Industrial and Aplied Mathematics Vol. 32, No. 4*, 1990: 537-578.
- McKenna, P. J. "Large Torsional Oscillations in Suspension Bridges Revisited : Fixing an Old Approximation ." *The American Mathematical Monthly, Vol. 106, No. 1*, 1999: 1-18.
- Nurlina, dan Riskawati. *Fisika Dasar I*. Makassar: LPP Unismuh Makassar, 2017.
- Pagalay, Usman. *Mathematical Modelling*. Malang: UIN Maliki Press, 2009.
- Pramono, Sholeh Hadi. *Matematika Teknik I*. Malang: UB Press, 2014.
- Sari, Dian Maulidiya, dan Ari Kusumastuti. "Uji Validasi Model Matematika Vibrasi Dawai Flying Fox." *Skripsi*, 2018.
- Soehardjo. *Matematika IV*. Diktat ITS, 1996.

- Sugiyono. *Metode Penelitian Kualitatif, Kuantitatif, dan R&D*. ALFABETA: Bandung, 2019.
- Suliyanto. "Metode Penelitian Kuantitatif." 2017.
- Synge, John L., dan Byron A. Griffith. *Principles of Mechanics*. New York: McGraw-Hill, 1949.
- Thomson, William T, dan Marrie Dilon Dahleh. *Theory of Vibration with Applications (Fifth Edition)*. China: Pearson Education Asia Limited and Tsinghua University Press, 2005.

## RIWAYAT HIDUP



Chintya Tri Millenia, lahir di Kediri pada tanggal 3 Januari 2000. Perempuan yang akrab disapa Chintya ini merupakan anak bungsu dari 3 bersaudara dari pasangan Bapak Junianto (Alm) dan Ibu Rubini. Chintya telah menempuh Pendidikan formal mulai dari TK Al-Islah, setelah itu menempuh pendidikan dasar di SD N Besowo I dan lulus pada tahun 2012. Kemudian melanjutkan ke SMP N 1 Kepung dan lulus pada tahun 2015, lalu melanjutkan ke jenjang berikutnya di SMA N 1 Puncu dan lulus pada tahun 2018. Pada tahun yang sama pula ia mulai menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada program studi matematika. Selama menjadi mahasiswa, Chintya berperan aktif pada organisasi kampus dalam rangka mengembangkan kompetensi akademiknya dengan menjadi anggota Dewan Eksekutif Mahasiswa Fakultas (DEMA-F) Saintek serta berperan aktif dalam kepanitiaan.



**BUKTI KONSULTASI SKRIPSI**

Nama : Chintya Tri Millenia  
NIM : 18610083  
Fakultas / Program Studi : Sains dan Teknologi / Matematika  
Judul Skripsi : Solusi Analitik untuk Model Matematika Vibrasi Dawai yang Dikenai Massa Menggelinding di Sepanjang Dawai  
Pembimbing I : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si  
Pembimbing II : Mohammad Nafie Jauhari, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	20 Januari 2022	Konsultasi Bab I	1.
2.	26 Januari 2022	Konsultasi Revisi Bab I	2.
3.	14 Februari 2022	Konsultasi Bab II dan III	3.
4.	03 Maret 2022	Konsultasi Revisi Bab II dan III	4.
5.	10 Maret 2022	Konsultasi Kajian Agama	5.
6.	17 Maret 2022	Konsultasi Revisi Kajian Agama	6.
7.	23 Maret 2022	ACC Seminar Proposal	7.
8.	27 Juli 2022	Konsultasi Bab IV dan V	8.
9.	9 Agustus 2022	Konsultasi Revisi Bab IV dan V	9.
10.	22 September 2022	Konsultasi Kajian Agama	10.
11.	11 Oktober 2022	Konsultasi Revisi Kajian Agama	11.
12.	25 November 2022	ACC Matriks Revisi Seminar Hasil	12.
13.	28 November 2022	ACC Sidang Skripsi	13.
14.	16 Desember 2022	ACC Keseluruhan	14.

Malang, 16 Desember 2022

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc

NIP. 19741129 200012 2 005