SIFAT-SIFAT INKLUSI PADA RUANG GRAND MORREY

SKRIPSI

OLEH
MEGA NUR AZIZAH
NIM. 18610094

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022

SIFAT-SIFAT INKLUSI PADA RUANG GRAND MORREY

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Mega Nur Azizah
NIM. 18610094

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022

SIFAT-SIFAT INKLUSI PADA RUANG GRAND MORREY

SKRIPSI

Oleh
Mega Nur Azizah
NIM. 18610094

Telah Diperiksa dan Disetujui Untuk Diuji
Malang, 10 November 2022

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Dr. Hairur Rahman, M.Si.	Erna Herawati, M.Pd.
NIP. 19800429 200604 1 003	NIDT. 1976072 320180201 2222

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

SIFAT-SIFAT INKLUSI PADA RUANG GRAND MORREY

SKRIPSI

Oleh
Mega Nur Azizah
NIM. 18610094

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 14 Desember 2022

Ketua Penguji	: Dr. Elly Susanti, M.Sc.	....
Anggota Penguji I	: Intan Nisfulaila, M.Si.	....
Anggota Penguji II	: Dr. Hairur Rahman, M.Si	....
Anggota Penguji III	: Erna Herawati, M.Pd	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Mega Nur Azizah
NIM	: 18610094
Program Studi	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Sifat-Sifat Inklusi pada Ruang Grand Morrey

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri dan bukan merupakan kumpulan data atau buah pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pemikiran saya sendiri, kecuali mencantumkan daftar pustaka dalam bentuk daftar referensi. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa skripsi ini plagiat, saya bersedia menerima sanksi atas skripsi ini.

Malang, 14 Desember 2022

Yang membuat pernyataan,

10000 METERAI TEMPEL 5ED34AKX202049230

Mega Nur Azizah

NIM. 18610094

MOTO

Sunguh Allah tidak mengujimu dengan sesuatu, kecuali dalam ujian itu ada kebaikan bagimu, maka ucapkanlah "Alhamdulillah"

(Q.S Al-Baqarah:286)

PERSEMBAHAN

Bismillahirrahmanirrahim, skripsi ini penulis persembahkan kepada kedua orang tua Ayah Siswanto dan ibu Yunifah Asmaning, yang selalu memberikan segala kasih sayang dalam bentuk apapun baik berupa semangat dan dukungan yang tidak akan ternilai harganya untuk berjuang dalam menuntut ilmu. Adik tercinta Majidah Nur Saufa, serta keluarga yang mengirim segala doa terbaik yang telah diberikan kepada penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji diucapkan kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan segala rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Sifat-Sifat Inklusi pada Ruang Grand Morrey" sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknlogi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Kedua sholawat beriring salam semoga tercurahkan kepada nabi Muhammad SAW.

Dalam proses penyusunan skripsi ini tidak lepas dari petunjuk dan bimbingan arahan serta masukan dari berbagai pihak. Untuk itu pada kesempatan ini dengan segala kerendahan hati penulis mengucapkan rasa hormat dan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Dr. Hairur Rahman, M.Si, selaku dosen pembimbing I (satu) yang telah meluangkan waktu dan fikirannya serta memberikan banyak arahan, kritik, saran, dukungan dan semangat kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.

5. Erna Herawati, M.Pd, selaku dosen pembimbing II (dua) yang telah memberikan arahan dan motivasi kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi.
6. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim yang telah memberikan ilmu pengetahuan dan juga pembelajaran berharga bagi penulis selama menempuh program Pendidikan S1.
7. Kedua orang tua yang selalu memberikan doa, semangat, kasih sayang lahir maupun batin dan seluruh keluarga tercinta yang selalu memberikan semangat dan motivasi. Semoga Allah SWT selalu melindunginya.
8. Seluruh mahasiswa angkatan 2018, terutama teman-teman dalam seperjuangan yang telah banyak membantu dalam memberikan berbagai informasi, dukuangan dan motivasi kepada penulis.

Semoga Allah SWT melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Penulis menyadari meskipun telah berusaha semaksimal mungkin skripsi ini masih jauh dari sempurna dan masih banyak terdapat kesalahan serta kekurangan. Selain itu, penulis juga berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat khususnya bagi penulis dan pembaca pada umumnya. *Aamiin*

Wassalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang,………………………

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam skripsi ini mempunyai makna yaitu sebagai berikut:

$\mathbb{R}$	: Himpunan bilangan Riil
$\mathbb{R}^n$	: Himpunan dari barisan-n bilangan Riil
$\mathbb{Z}$	: Himpunan bilangan bulat
$\mathbb{N}$	: Himpunan bilangan asli
$\mathbb{K}$	: Himpunan bilangan kompak
$\mathbb{C}$	: Himpunan bilangan kompleks
E	: Himpunan terukur
$:=$	: Didefinisikan dengan
$\neq$	: Tidak sama dengan
σ	: Sigma
ω	: Omega
γ	: Gamma
μ	: Mu
θ	: Theta
λ	: Lambda
ξ	: Xi
τ	: Tau
∞	: Tak terhingga
$\mathcal{A}$	: Koleksi himpunan terukur$-\mu^*$
$\mathcal{X}_k$	: Fungsi Karakteristik k
ρ	: Rho
$\subseteq$	: subset sama dengan
$\subset$	: subset
$x \in \mathbb{R}$	: x anggota $\mathbb{R}$
$f(x)$	: Fungsi terhadap x
$f^{-1}(x)$	: Invers fungsi atau balikan fungsi terhadap x
$\forall x$	: Untuk setiap unsur x
$\exists x$	: Terdapat unsur x

(f)	: Barisan fungsi f
$\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$	: Himpunan yang terdiri atas unsur $f_1, f_2, \dots, f_n$
χ	: Fungsi karakteristik
$\|\cdot\|$	: Norm
$\lvert\cdot\rvert$	: Nilai Mutlak
$\backsim$	: Ekuivalen
$X \to \mathbb{R}$	: Pemetaan dari X menuju $\mathbb{R}$
$\bigcup_{i=1}^{\infty} a_i$	: Gabungan $a_1 \cup a_2 \cup$ ...
$\bigcap_{i=1}^{\infty} a_i$	: Irisan $a_1 \cap a_2 \cap$ ...
$\sum_{j=1}^{n} a_i$	: Penjumlahan $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
$B(a, r)$	: Bola buka dengan pusat a dan jari-jari r
sup	: Batas atas terkecil
inf	: Batas bawah terbesar
L^p	: Ruang Lebesgue
$L^p(\mathbb{R}^n)$	: Ruang Lebesgue pada himpunan dari barisan-n bilangan Riil
$L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$	: Ruang Lebesgue Lokal pada himpunan dari barisan-n bilangan Riil
$\mathcal{M}^p_q$	: Ruang Morrey
$w\mathcal{M}^p_q$	: Ruang Morrey Lemah
$L^{p),\theta}$	: Ruang Grand Lebesgue
$L^{p),\theta,\lambda}$	: Ruang Grand Morrey

ABSTRAK

Azizah, Mega Nur. 2022. **Sifat-Sifat Inklusi pada Ruang Grand Morrey.** Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (II) Erna Herawati, M.Pd.

Kata Kunci : Sifat-Sifat Inklusi, Ruang Grand Morrey, Ruang Grand Lebesgue, Ruang Morrey

Sifat inklusi adalah adalah yang membahas keterkaitan anggota di setiap ruang. Terdapat beberapa ruang memiliki sifat inklusi. Pada penelitian sebelumnya telah diteliti sifat-sifat inklusi pada Ruang Morrey oleh Hendra Gunawan pada tahun 2018. Oleh karena itu tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui sifat-sifat inklusi pada Ruang Morrey berlaku juga pada ruang Grand Morrey. Dalam membuktikan keberlakuan sifat-sifat inklusi pada ruang Grand Morrey menggunakan ketaksamaan Holder. Metode yang digunakan dalam penelitian ini yaitu penelitian kepustakaan *(library research)*. Hasil penelitian ini adalah sifat-sifat inklusi pada ruang Grand Morrey.

ABSTRACT

Azizah, Mega Nur. 2022. **Inclusion Properties on the Grand Morrey Space**. Thesis. Mathematics department, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (1) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (II) Erna Herawati, M.Pd.

Keywords: Inclusion Properties, Grand Morrey Spaces, Grand Lebesgue Spaces, Morrey Spaces

The inclusion properties is a properties that discusses the interrelationships of members in each space. There are several spaces that have inclusion properties. In previous studies, the inclusion properties in the Morrey Space have been studied by Hendra Gunawan in 2018. Therefore, the purpose of this study is to determine the inclusion properties in the Morrey Space that apply also to the Grand Morrey space. In proving the applicability of the properties of inclusion in the space Grand Morrey uses the Holder's innocence. The method used in this research is library research. The results of this study is that the inclusion properties in the grand morrey spaces.

مستخلص البحث

عزيزة، ميغا نور.2022. خصائص التضمين في فضاء جراند موري. البحث العلمي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، ، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف الأول: الدكتور خير الرحمن والمشرف الثاني: الماجستير يرنا هيراواتي.

الكلمة الرئيسية: خصائص التضمين، فضاء جراند موري

خصائص التضمين هي الخصائص التي تفيض صلة العضو كل الفضاء. كان بعض الفضاء أن يتملك خصائص التصمين. قد بُحث البحث عن خصائص التضمين في فضاء جراند موري عند هيندرا غوناوان في السنة 2018. لذلك،كانت الباحثة تهتمّ بهذا البحث لتبحث عن خصائص التضمين في فضاء موري وينتصر على فضاء جراند موري. يستخدم لإثبات انتصار خصائص التضمين في فضاء جراند موري بتفاوت هولدر. الطريقة المستخدمة في هذا البحث هو البحث المكتبي. يحصل هذا البحث على خصائص التضمين في فضاء جراند موري

.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan sebuah ilmu pasti yang menjadi dasar dan saling berkaitan dengan ilmu yang lainnya. Matematika menjadi salah satu ilmu dasar dari berbagai macam ilmu. Sehingga matematika sering disebut sebagai ibu dari ilmu pengetahuan. Salah satu cabang ilmu matematika adalah analisis. Hingga saat ini bidang analisis tetap mengalami perkembangan. Bidang ini tidak akan terlepas dari pembahasan analisis fungsional.

Analisis fungsional merupakan ilmu yang dikhususkan untuk mempelajari berbagai struktur yang didefinisikan pada ruang linier dimensi tak terbatas. (Kadets, 2018). Salah satu ruang yang memiliki peran penting dan sering dibahas dalam bidang analisis adalah ruang L^p atau dikenal dengan ruang Lebesgue. Ruang Lebesgue pertama kali diperkenalkan oleh Henri Lebesgue. Ruang Lebesgue merupakan ruang Banach dengan $1 \leq p \leq \infty$ (Peressini & Randol, 1970).

Pada tahun 1938, C.B Morrey yang merupakan seorang matematikawan mendefinisikan Ruang Morrey $\mathcal{M}_q^p$ dengan $1 \leq p \leq q < \infty$ yang mana merupakan bentuk dari perumunan ruang Lebesgue (Adams, 2015). Pada tahun 1994, Matematikawan Nakai memperkenalkan definisi Ruang Morrey merupakan perumunan dari Ruang Lebesgue. Pada tahun 1992 Ruang Grand Lebesgue Space didefinisikan oleh Iwaniec dan Sbordone dengan $1 < p < \infty$ (Iwaniec & Sbordone, 1992). Selanjutnya Alexander Meskhi mendefinisikan Ruang Grand Morrey. Ruang Grand Morrey didefinisikan pada Ruang Ukuran Kuasi Metrik dengan dua ukuran dan memperoleh hasil pada batas dari operator maksimal, operator calderon-zygmund singular dan riez potentials (Meskhi, 2011). Karena Ruang Morrey dan Ruang Grand Morrey sama-sama merupakan Ruang Banach (Capone et al., 2013). Ruang Banach adalah ruang bernorma yang lengkap. Ruang Morrey adalah perluasan Ruang Lebesgue dengan $p = q$. Ruang Grand Morrey adalah Ruang Grand Lebesgue jika $\lambda = 0$ dan merupaka Ruang Lebesgue jika $\theta = 0$ (Meskhi, n.d.). Oleh karena itu pada penelitian ini, akan dibahas mengenai sifat-sifat inklusi pada Morrey juga berlaku pada Ruang Grand Morrey

Dalam surat Al-Alaq ayat 1 yang berbunyi

اِقْرَأْ بِاسْمِ رَبِّ كَ الَّذِيْ خَلَقَ (العلق: ١)

Artinya; "Bacalah dengan (menyebut) nama Tuhanmu yang menciptakan" (QS. Al-Alaq:1) (Departemen Agama RI., 2006).

Ayat tersebut mengandung perintah untuk mencari ilmu. Ilmu yang bersifat umum baik ilmu yang menyangkut ayat Al-quran dan ayat yang terjadi di alam. Ayat qauliyah ialah tanda-tanda kebesaran Allah SWT yang berupa firman-Nya, yaitu Al-Quran. Ayat-ayat kauniyah ialah tanda-tanda kebesaran Allah Swt yang berupa keadaan alam semesta. Dari ayat ini kita dapat mengetahui bahwa pentingnya mencari ilmu. Harapannya dengan kita menuntut ilmu agar dapat mengagumi dan menyukuri nikmat yang telah diberikan oleh Allah SWT.

Ada banyak hal yang dapat dilakukan untuk menuntut ilmu. Salah satunya melalui pengembangan ilmu matematika. Berdasarkan pemaparan tersebut peneliti ingin melakukan penelitian mengenai sifat inklusi di Ruang Morrey juga berlaku di Ruang Grand Morrey,. Pada penelitian sebelumnya telah dibahas sifat inklusi yang dimiliki oleh Ruang Morrey oleh Gunawan pada tahun 2018 yaitu $L^q(\mathbb{R}^d) = \mathcal{M}_q^q(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{M}_q^{p_2}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{M}_q^{p_1}(\mathbb{R}^d)$.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dijelaskan pada penelitian ini, maka rumusan masalah pada penelitian ini yaitu apakah berlakunya sifat-sifat inklusi yang berlaku pada Ruang Morrey juga berlaku pada Ruang Grand Morrey $L^{p),\theta,\lambda}$?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian yang dapat diambil berdasarkan rumusan masalah di atas adalah untuk mengetahui apakah sifat-sifat inklusi yang berlaku pada Ruang Morrey juga berlaku pada Ruang Grand Morrey $L^{p),\theta,\lambda}$.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan tambahan ilmu baru dan bahan kajian literatur bagi peneliti mengenai sifat-sifat inklusi pada Ruang Grand Morrey.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini dibuktikan berlakunya sifat-sifat inklusi pada Ruang Grand Morrey sehingga penelitian ini tidak akan membahas inklusi di ruang lainnya

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

2.1.1 Ruang Bernorma

Ruang bernorma adalah ruang vektor atas bilangan riil atau kompleks, dimana norma didefinisikan. Norma adalah fungsi bernilai riil yang ditentukan pada ruang vektor yang biasanya dilambangkan $x \rightarrow \| x \|$. Untuk penjelasan lengkapnya akan dijelaskan melalui definisi berikut.

Definisi 2.1.1.1. (Royden & Fitzpatrick, 2010) *Misalkan X ruang vektor atas lapangan F. Suatu norma di X merupakan fungsi.* $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ *sedemikian sehingga untuk setiap $x, y \in X$ dan $\alpha \in F$, memenuhi aksioma berikut ini:*

a. $\|x\| \geq 0$

b. $\|x\| = 0$

c. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \alpha \in \mathbb{R}, x \in X$

d. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, x, y \in X$ (Ketaksamaan Segitiga)

Merupakan norm.

Suatu ruang vektor X yang memiliki norm disebut ruang vector bernorma atau ruang bernorma, salah satu contoh ruang bernorma adalah ruang Banach. Sedangkan Kalton (2003) mendefinisikan quasi-norm sebagai berikut.

Definisi 2.1.1.2. Quasi-norm $\|\cdot\|$ pada ruang vector X atas lapangan $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ merupakan suatu pemetaan $\|\cdot\|: A \rightarrow [0, \infty)$ dengan $a, b \in A$ dan α sembarang scalar di $\mathbb{K}$ memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. $\|a\| = 0$ jika dan hanya jika $a = 0$;

2. $\|\alpha a\| = |\alpha|\|a\|$;
3. Terdapat konstanta $c \geq 1$ sedemikian sehingga

$$\|a + b\| \leq c(\|a\| + \|b\|).$$

2.1.2 Ruang Banach

Definisi pada ruang Banach yang didefinisikan oleh Royden dan Fitzpatrick (2010) berangkat dari ruang linier bernorma sebagai berikut.

Definisi 2.1.2.1 suatu barisan (f_n) merupakan ruang linier A dengan norma $\|\cdot\|$ disebut ***Cauchy*** di A dengan syarat untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan $\mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $m, n \ \geq \mathbb{N}$ berlaku

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon$$

Ruang Bernorma A disebut **lengkap** jika untuk setiap barisan *Cauchy* di A konvergen ke fungsi A. Ruang bernorma yang lengkap ini disebut **Ruang Banach.**

Contoh 2.1.2.1 (Kreysig,1978); Ruang Euclid $\mathbb{R}^n$ merupakan ruang yang terdiri dari semua pasangan n-baris dari bilangan real dengan, $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ dan $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$,

Serta dilengkapi dengan norma

$$\|x, y\| = \left(\sum_{j=1}^{n} \left|\xi_j + \eta_j\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Berikutnya, akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{R}^n$ merupakan Ruang Banach, dengan menunjukkan $\mathbb{R}^n$ merupakan ruang bernorma lengkap.

Ruang $\mathbb{R}^n$ dikatakan sebagai ruang bernorma, karena memenuhi aksioma a sampai dengan d, yaitu:

a. $\|x\| \geq 0$

Berdasarkan definisi harga mutlak jelas bahwa $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} \left|\xi_j\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq 0.$

b. $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$

Pembuktian dari arah kiri ke kanan, akan dibuktikan jika $\|x\| = 0$ maka $x = 0.$ Untuk $\left(\sum_{k=1}^{n} \left|\xi_j\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0$ maka $\sum_{k=1}^{n} \left|\xi_j\right|^2 = 0,$ jadi diperoleh $x = \xi_k = 0.$ Untuk pembuktian dari arah sebaliknya, jika $x = \xi_k = 0,$ maka $\left(\sum_{k=1}^{n} \left|\xi_j\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = (\sum_{k=1}^{n} |0|^2)^{\frac{1}{2}} = 0$

c. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|,$ ambil sebarang $\alpha \in \mathbb{R}$ dan $x \in X$

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} \left|\xi_j\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} 1. \left|\xi_j\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= |1|. \left(\sum_{k=1}^{n} \left|\xi_j\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= |\alpha| \|x\|$$

d. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$ ambil sebarang $x, y \in X$

$$\|x + y\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \|x\| + \|y\|.$$

Dengan demikian terbukti $(X, \|\cdot\|)$ merupakan ruang bernorma. Selanjutnya akan ditunjukkan kelengkapan $\mathbb{R}^n$.

a. Misalkan (x_m) merupakan barisan Cauchy di $\mathbb{R}^n$, Dimana $x_m = \left(\xi_1^{(m)}, \dots, \xi_n^{(m)}\right)$. Karena (x_m) merupakan barisan Cauchy berarti untuk setiap $\mathcal{E} > 0$ terdapat $m, r \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga,

$$\|x_m - x_r\| = \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_k^{(m)} - \xi_k^{(r)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} < \epsilon.$$

Untuk $k = 1,2, \dots, n$ tetap,

$$\left(\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)}\right)^2 < \epsilon^2$$

$$\left|\xi_k^{(m)} - \xi_k^{(r)}\right| < \epsilon$$

b. Karena $\left(\xi_k^{(1)}, \xi_k^{(1)}, \dots, \xi_k^r\right)$ merupakan barisan Cauchy di $\mathbb{R}$ dimana $\mathbb{R}$ lengkap, maka barisan itu konvergen. Misalkan ξ_k^r konvergen ke ξ_k. Dapat ditulis,

$$\|x_m, x\| = \|x_m, x_r\| = \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_k^{(m)} - \xi_k\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} < \epsilon$$

Maka terbukti barisan Cauchy x_m konvergen di $\mathbb{R}^n$ dan terbukti $\mathbb{R}^n$ lengkap

2.1.3 Ketaksamaan Holder

Dalam pembuktian ketasamaan holder dengan menggunakan bantuan Ketasamaan Young.

Definisi 2.1.3.1 (Royden & Fitzpatrick, 2010) Misalkan p, q saling konjugat, fungsi f, g adalah fungsi terukur bernilai real pada ruang (X, ρ, μ), sedemikian sehingga $|f|^p$ dan $|g|^p$ terintegral, maka f, g terintegralkan dan

$$\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Lemma 2.1.3.2 (Alemneh et al., 2020) **(Ketaksamaan Young)** Misalkan p, q saling konjugat dan $a, b \geq 0$. Maka berlaku

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Teorema 2.1.3.3 (Peressini & Randol, 1970) Jika $p, q \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga untuk $1 < p,\ q < \infty$ dan $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$ maka untuk setiap $(x_k) \in l_p$ dan $(y_k) \in l_q$ berlaku,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k, y_k| \leq \|(x_k)\|_p \|(y_k)\|_q$$

Bukti. Diketahui bahwa $(x_k) \in l_p$ dan $(y_k) \in l_q$ maka $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$ dan $\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p < \infty$. Selanjutnya dengan menerapkan lemma 2.1 diperoleh

$$\frac{|x_k|}{\|(x_k)\|_p \|(y_k)\|_q} \leq \frac{\left(\frac{|x_k|}{\|(x_k)\|_p}\right)^p}{p} + \frac{\left(\frac{|y_k|}{\|(y)\|_q}\right)^q}{q}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\|(x_k)\|_p \|(y_k)\|_q} |x_k y_k| \leq \frac{1}{p\left(\|(x_k)\|_p\right)^p} |x_k|^p + \frac{1}{q\left(\|(y_k)\|_q\right)^q} |y_k|^q$$

Untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Oleh karena itu, dengan menjumlah untuk setiap k diperoleh

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\|(x_k)\|_p \|(y_k)\|_q} |x_k y_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{p\left(\|(x_k)\|_p\right)^p} |x_k|^p + \frac{1}{q\left(\|(y_k)\|_q\right)^q} |y_k|^q\right]$$

Menggunakan kelinieran notasi sigma maka

$$\frac{1}{\|(x_k)\|_p \|(y_k)\|_q} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \frac{1}{p\left(\|(x_k)\|_p\right)^p} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p + \frac{1}{q\left(\|(y_k)\|_q\right)^q} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^q$$

Karena $\left(\|(x_k)\|_p\right)^p = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$ dan $\left(\|(y_k)\|_q\right)^q = \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q$ diperoleh

$$\frac{1}{\|(x_k)\|_p\|(y_k)\|_q}\sum_{k=1}^{\infty}|x_ky_k| \leq \frac{1}{p\left(\|(x_k)\|_p\right)^p}\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p + \frac{1}{q\left(\|(y_k)\|_q\right)^q}\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^q$$

$$\frac{1}{\|(x_k)\|_p\|(y_k)\|_q}\sum_{k=1}^{\infty}|x_ky_k| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

$$\frac{1}{\|(x_k)\|_p\|(y_k)\|_q}\sum_{k=1}^{\infty}|x_ky_k| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}|x_ky_k| \leq \|(x_k)\|_p\|(y_k)\|_q$$

2.1.4 Ruang Topologi

Definisi 2.1.4.1 Diberikan himpunan tak kosong X, suatu koleksi τ yang berisikan himpunan-himpunan bagian dari X dikatakan topologi pada τ, jika memenuhi sifat-sifat:

a. X dan himpunan $\emptyset$ termuat dalam τ

$$\emptyset, X \in \tau$$

b. Gabungan (berhingga ataupun tak hingga) dari himpunan-himpunan di τ termuat di τ juga

$$A_a \in \tau, \forall a \in I \Longrightarrow \bigcup_{a \in I} A_a \in \tau$$

I adalah himpunan indeks

c. Irisan berhingga dari himpunan-himpunan di τ berada di τ juga

$$A, B \in \tau \Longrightarrow A \cap B \in \tau$$

Dan pasangan (X, τ) disebut sebagai ruang topologi.

Contoh 2.1.4.2 Diberikan $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ dan

$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$

Maka τ_1 merupakan topologi di X karena memenuhi sifat-sifat a,b,c,d dari definisi 2.11.

Contoh 2.1.4.3 Diberikan $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ dan

$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, e\}, \{b, c, d\}\}$

Maka τ_2 bukan merupakan topologi di X, karena gabungan

$$\{c, d\} \cup \{a, c, e\} = \{a, c, d, e\}$$

Tidak termuat di τ_2. Sehingga τ_2 tidak memenuhi sifat b dari definisi 2.11.

2.1.5 Ruang Kuasi Metrik

Definisi 2.1.5.1 Diberikan X merupakan sebarang himpunan tak kosong. Dimana $x, y, z \in X$. Sedemikian hingga, fungsi $d: X \times X \to \mathbb{R}$ memenuhi sifat-sifat berikut disebut sebagai metrik pada X.

a. $d(x, y) > 0$ positif $\forall x, y \in X$
b. $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$
c. $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$
d. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y \in X$ (Bartle, 1955)

Contoh 2.1.5.2 Diberikan $\mathbb{R}$ sebarang himpunan tak kosong dengan $d(x, y) = |x - y|$ dimana $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$. Akan dibuktikan bahwa $(\mathbb{R}, d)$ adalah ruang Kuasi metrik.

Bukti:

Diambil sebarang $x, y, z \in \mathbb{R}$. Mengikuti sifat-sifat dari definisi ruang kuasi-metrik, sedemikian hingga:

a. $d(x,y) > 0$ positif $\forall x, y \in X$

   Berdasarkan definisi harga mutlak di $\mathbb{R}$, jelas terbukti bahwa $|x-y| = d(x,y)$

b. $d(x,y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$

   Untuk $x = y$ diperoleh $|x-y| = 0$, sehingga berlaku sebaliknya,

   $d(x,y) = |x-y| = 0$ didapatkan $x = y$ sehingga terbukti $d(x,y) = 0$.

c. $d(x,y) = d(y,x), \forall x, y \in X$

   Berdasarkan sifat komutatif, $d(x,y) = |x-y| = |y-x| = d(y,x)$, terbukti

d. $d(x,y) \leq k\big(d(a,z) + d(z,x)\big), \forall x, y \in X$

   Berdasarkan sifat ketaksamaan segitiga, $d(x,y) \leq d(|x-z| + |z-y|)$, terbukti.

Jadi, dapat disimpulkan bahwa $(\mathbb{R}, d)$ adalah ruang kuasi-metrik.

2.1.6 Ruang Lebesgue

Ruang Lebesgue $L^P(\mathbb{R}^n)$ ditemukan pertama kali oleh Henri Lebesgue pada tahun 1910. Ruang Lebesgue merupakan suatu ruang kelas ekuivalen fungsi yang dilengkapi suatu norma. Fungsi-fungsi tersebut merupakan fungsi terukur (Lebesgue). Norma pada ruang Lebesgue didefinisikan dengan suatu integral Lebesgue yang terbatas.

Definisi 2.1.6.1 (Kadets, 2018) Ruang Lebesgue $L^p = L^p(\mathbb{R}^n)$ dengan $1 < p < \infty$ adalah himpunan semua fungsi terukur $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ yang memenuhi

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Contoh 2.1.6.2 (Landsberg, 1966) Ruang Lebesgue

$$\|\alpha f\|_{L_p} = |\alpha|\|f\|_{L_p}; \forall \alpha \in \mathbb{R}^n$$

$$\|\alpha f\|_{L_p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\alpha f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\alpha|^p |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(|\alpha|^p \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= |\alpha|^p \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= |\alpha|\|f\|_{L_p}$$

2.1.7 Ruang Morrey

Ruang Morrey pertama kali ditemukan oleh C.B Morrey pada tahun 1938, dimana ruang Morrey $\mathcal{M}_q^p$ adalah bentuk perumunan dari ruang Lebesgue.

Definisi 2.1.7.1 (Gunawan et al., 2018) Untuk setiap $1 \leq p \leq q < \infty$, ruang morrey $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ adalah himpunan semua fungsi $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$sedemikian sehingga

$$\|\boldsymbol{f}\|_{\mathcal{M}_q^p} \coloneqq \sup_{\alpha \in \mathbb{R}^n, r>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Dengan $B(a,r)$ menyatakan bola buka di $\mathbb{R}^n$ yang berpusat di α dan berjari-jari di r. Jika $p = q$, maka $\mathcal{M}_q^p = L^p$. Artinya ruang Morrey merupakan perluasan ruang Lebesgue yang ditunjukkan sebagai berikut

$$\|\boldsymbol{f}\|_{\mathcal{M}_q^p} = \sup_{\alpha\in\mathbb{R}^n, r>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{\alpha\in\mathbb{R}^n, r>0} |B(a,r)|^0 \left(\int_{B(a,r)} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\left(\int_{B(a,r)} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

$$= \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L^p}}$$

Teorema 2.1.7.2 (Adams, 2015) Misalkan $0 < p < \infty$, $\mathcal{M}_p^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$ dengan norma.

Bukti. Misalkan $f \in L^0(\mathbb{R}^n)$. Menggunakan definisi $\|f\|_{\mathcal{M}_p^p}$;

$$\|f\|_{\mathcal{M}_p^p} \equiv \sup_{(x,r)\in\mathbb{R}_+^{n+1}} |B(x,r)|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(B(x,r))} = \sup_{(x,r)\in\mathbb{R}_+^{n+1}} \|f\|_{L^p(B(x,r))}$$

Selanjutnya

$$\|f\|_{\mathcal{M}_p^p} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L^p}$$

Sementara itu, dengan menggunakan teorema konvergensi monoton untuk setiap $x \in \mathbb{R}^n$ maka,

$$\|f\|_{L^p} = \lim_{m\to\infty} \|f\|_{L^p(B(x,m))} \leq \sup_{r>0} \|f\|_{L^p(B(x,r))} = \|f\|_{\mathcal{M}_p^p}$$

Contoh 2.1.7.3 Ruang Morrey] (Gunawan dkk, 2016):

Misalkan $1 \leq p \leq q < \infty$, dan $x \in \mathbb{R}^d$. Diberikan,

$$f(x) = |x|^{-\frac{d}{p}}$$

Perhatikan bahwa,

$$|B(\alpha,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(\int_{B(\alpha,r)}|x|^{-\frac{dp}{q}}\right)^{\frac{1}{p}} \leq Cr^{\frac{d}{q}-\frac{d}{p}}\left(\omega_d\int_0^r t^{-\frac{dp}{q}}.\,t^{(d-1)}dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq Cr^{\frac{d}{q}-\frac{d}{p}}\left(\omega_d\int_0^r t^{d-\frac{dp}{q}-1}\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq Cr^{\frac{d}{q}-\frac{d}{p}}\omega_d^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{d-\left(\frac{dp}{q}\right)}\right)^{\frac{1}{p}} r^{\frac{d}{q}-\frac{d}{p}}$$

$$\leq C_1\left(\frac{1}{d-\left(\frac{dp}{q}\right)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

Dengan ω_d merupakan luas permukaan bidang berdimensi $d-1$ dan C_1 suatu konstanta. Terbukti $f \in \mathcal{M}_q^p$

2.1.8 Sifat-Sifat Inklusi pada Ruang Morrey

Teorema 2.1.8.1 Ambil $f \in L^0(\mathbb{R}^n)$ dan $0 </q_1 \leq q_0 < p < \infty$, $\|f\|_{\mathcal{M}_{q_1}^p} \leq \|f\|_{\mathcal{M}_{q_0}^p}$. Khususnya $\mathcal{M}_{q_0}^p(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{M}_{q_1}^p(\mathbb{R}^n)$.

Bukti. Menggunakan norm

$$\|f\|_{\mathcal{M}_{q_1}^p} = \sup_{(x,r)\in\mathbb{R}_+^{n+1}}|B(x,r)|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q_1}}\left(\int_{B(x,r)}|f(y)|^{q_1}dy\right)^{\frac{1}{q_1}}$$

$$\|f\|_{\mathcal{M}_{q_0}^p} = \sup_{(x,r)\in\mathbb{R}_+^{n+1}}|B(x,r)|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q_0}}\left(\int_{B(x,r)}|f(y)|^{q_0}dy\right)^{\frac{1}{q_0}}$$

Menggunakan ketaksamaan Holder, maka

$$\left(\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|f(y)|^{q_1}dy\right)^{\frac{1}{q_1}} \leq \left(\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|f(y)|^{q_0}dy\right)^{\frac{1}{q_0}}$$

Teorema 2.1.8.2 [Sifat Inklusi] (Gunawan dkk, 2017): Untuk $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq q \leq \infty$, maka terjadi inklusi:

$$w\mathcal{M}_q^{p_2} \subseteq w\mathcal{M}_q^{p_1}$$

Selanjutnya jika $p_1 < p_{2,}$ maka

$$w\mathcal{M}_q^{p_2} \subseteq \mathcal{M}_q^{p_1}$$

Jika $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq q \leq \infty$, maka masing-masing di bawah ini proper inklusi:

a. $\mathcal{M}_q^{p_2} \subseteq \mathcal{M}_q^{p_1}$

b. $w\mathcal{M}_q^{p_2} \subseteq \mathcal{M}_q^{p_1}$

c. $w\mathcal{M}_q^{p_2} \subseteq w\mathcal{M}_q^{p_1}$

Teorema 2.1.8.3 [Sifat-Sifat Inklusi pada Ruang Herz-Morrey Homogen] (Rahman, 2020) Misalkan $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq q \leq \infty$, maka sifat inklusi yang terjadi

a. $\mathcal{M}K_{p_2,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{M}_{p_1,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)$

b. $L^q(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}K_{q,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{M}K_{p_2,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{M}_{p_1,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)$

c. $W\mathcal{M}K_{p_2,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n) \subseteq W\mathcal{M}_{p_1,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)$

d. Misalkan $1 \leq p \leq q$. Maka inklusi $\mathcal{M}K_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{M}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ adalah proper inklusi

2.1.9 Ruang Grand Lebesgue

Pada Tahun 1992 Tadeusz Iwaniec dan Carlo Sbordone mempelajari sifat integrabilitas Jacobian dalam satu himpunan terbuka terbatas Ω yang memperkenalkan tipe baru yaitu ruang fungsi $L^{p)}(\Omega)$, disebut sebagai ruang Grand Lebesgue. (Umarkhadzhiev, 2014)

Definisi 2.1.9.1 (Capone et al., 2013) Misalkan $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 1)$ merupakan himpunan Lebesgue terukur $|\Omega| < +\infty$ dan $1 < p < +\infty$ yang didefinisikan sebagai ruang dari fungsi terukur f pada Ω dan $\theta > 0$, sedemikian sehingga

$$\|f\|_{p)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |f|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < +\infty$$

2.1.10 Ruang Grand Morrey

Ruang Grand Morrey didefinisikan pada ruang kuasi-metrik dengan *doubling measure* dengan hasil merupakan ruang *Euclidean*. Misalkan $X \coloneqq (X, \rho, \mu)$ adalah ruang topologi dengan μ terukur. Sebuah fungsi $\rho: X \times X$ disebut kuasi-metrik d jika memenuhi:

a. $\rho(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$,
b. Terdapat konstanta $a_1 > 0$, sedemikian sehingga $\rho(x, y) \leq a_1(\rho(x, z) + \rho(z, y))$ untuk setiap $x, y, z \in X$
c. Terdapat konstanta $a_0 \geq 1$ sedemikian sehingga $\rho(x, y) \leq a_0 \rho(y, z)$ untuk setiap $x, y, z \in X$

Diasumsikan bahwa bola $B(x, r) \coloneqq \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$ terukur dan $0 \leq \mu\big(B(x, r)\big) < \infty$ untuk setiap $x \in X$ dan $r > 0$ sehingga,

$$B(x, R) \backslash B(x, r) \neq \theta$$

untuk setiap $x \in X$, r dan R positif dengan $0 < r < R < d$, dimana

$$d \coloneqq diam\ (X) = sup\{\rho(x, y) : x, y \in X\}.$$

Memenuhi kondisi ganda *(doubling condition)* dan $d < \infty$

$$\mu(B(x, 2r)) \leq c\mu(B(x, r))$$

Untuk μ adalah *satisfied*, dimana c tidak bergantung pada $x \in X$ dan $r > 0$. Ruang kuasi-metrik (X, ρ, μ) dengan μ *doubling measure* disebut ruang tipe homogen.

Catatan bahwa $d < \infty$ implikasi dengan $\mu(X) < \infty$ karena setiap bola pada X mempunyai ukuran yang terbatas.

Dapat diketahui bahwa μ terukur adalah *upper Ahlfors Q-regular*, jika terdapat konstanta $c_1 > 0$ sedemikian sehingga $\mu B(x, r) \leq c_1 r^Q$ untuk setiap $x \in X$ dan $r > 0$. sedangkan μ terukur adalah *lower Ahlfors q-regular* jika terdapat konstanta $c_2 > 0$ sedemikian sehingga $\mu B(x, r) \leq c_2 r^q$ untuk setiap $x \in X$ dan $r > 0$.

Definisi 2.1.10.1 (Meskhi, 2011) Ruang Grand Morrey, dinotasikan dengan $L^{p),\theta,\lambda}$, dimana $X \in \mathbb{R}$ dan f disimbolkan sebagai fungsi terukur pada $\mathbb{R}$ dengan $1 < p < \infty$, $\theta > 0$ dan $0 \leq \lambda < 1$ merupakan fungsi $f: X \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan

$$\|f\|_{L^{p),\theta,\lambda}(X,\rho,\mu)} \coloneqq \sup_{0<\varepsilon<p-1} \sup_{\substack{x \in X \\ 0<r<d}} \left(\frac{\varepsilon^\theta}{\left(\mu\left(B(x,r)\right)\right)^\lambda} \int_{B(x,r)} |f(y)|^{p-\varepsilon} d\mu(y) \right)^{\frac{1}{(p-\varepsilon)}} < \infty$$

(X, ρ, μ) dalam definisi $L^{p),\theta,\lambda}$ merupakan ruang kuasi-metrik dengan X himpunan tak kosong di $\mathbb{R}$, ρ adalah kuasi-metrik d dan μ merupakan simbol dari ukuran grand Morrey. Bola $B = B(x, r) = \{y \in X: \rho(x, y) < r\}$ menyatakan bola buka di X yang berpusat di x dan berjari-jari di r.

Ruang Grand Morrey adalah ruang Grand Lebesgue yang dapat dilihat pada kasus ketika $\lambda = 0$, yaitu

$$\|f\|_{L^{p),\theta,\lambda}(X,\mu)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \sup_{\substack{x\epsilon X \\ 0<r<d}} \left(\frac{\varepsilon^{\theta}}{\left(\mu\left(B(x,r)\right)\right)^{\lambda}} \int_B |f(y)|^{p-\varepsilon} d\mu(y) \right)^{\frac{1}{(p-\varepsilon)}} \quad \text{(diketahui)}$$

$$= \sup_{0<\varepsilon<p-1} \sup_{\substack{x\epsilon X \\ 0<r<d}} \left(\frac{\varepsilon^{\theta}}{\left(\mu\left(B(x,r)\right)\right)^{0}} \int_B |f(y)|^{p-\varepsilon} d\mu(y) \right)^{\frac{1}{(p-\varepsilon)}} \quad \text{(pangkat 0)}$$

$$= \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}} \|f\|_{L^{p-\varepsilon}(X,\mu)} \quad \text{(perkalian pangkat)}$$

$$= \|f\|_{L^{p),\theta}(X,\mu)} \quad \text{(diketahui dan perkalian)}$$

Lebih jauh lagi, jika $\theta = 1$, maka notasi yang digunakan adalah $L^{p),\lambda}(X,\mu)$, bukan $L^{p),\theta,\lambda}(X,\mu)$.

2.1.11 Hubungan Ruang Grand Morrey dengan Ruang Lebesgue

Lemma 4.1

Misalkan $1 < p < q < \infty$ maka berlaku $L^p \subset \mathcal{M}_q^p \subset L^{p),\theta} \subset L^{p),\theta,\lambda}$.

Bukti.

(i) Akan ditunjukkan bahwa $L^{p),\theta} \subset L^{p),\theta,\lambda}$.

Misalkan $1 < p < q < \infty$, $s = p/(p-1)$, Ω dan B merupakan sebarang bola buka di $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{X}_B$ adalah fungsi karakteristik dari B. Dengan menggunakan ketaksamaan Holder, maka :

$$\int_B |f(y)| dy = \int_B |f(y).1.1| dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y).\mathcal{X}_B(y).\mathcal{X}_B(y)| dy$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y).\mathcal{X}_B(y)|^p dy \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{X}_B(y)|^s dy \right)^{1/s}$$

$$= \left(\int_{\Omega} |f(y)|^{p-\varepsilon} dy \right)^{1/p-\varepsilon} \left(\int_{\Omega} 1.dy \right)^{1/s}$$

$$= \left(\int_{\Omega} |f(y)|^{p-\varepsilon} dy\right)^{1/p-\varepsilon} |\Omega|^{1/s}$$

$$\frac{1}{|B|}\int_{B} |f(y)| dy \leq \frac{1}{|\Omega|}\left(\int_{\Omega} |f(y)|^{p-\varepsilon} dy\right)^{1/p-\varepsilon} |\Omega|^{1/s}$$

$$= \frac{1}{|\Omega|}\left(\int_{\Omega} |f(y)|^{p-\varepsilon} dy\right)^{1/p-\varepsilon} |\Omega|^{\frac{p-\varepsilon-1}{p-\varepsilon}}$$

$$= \left(\int_{\Omega} |f(y)|^{p-\varepsilon} dy\right)^{1/p-\varepsilon} |\Omega|^{\frac{p-\varepsilon-1}{p-\varepsilon}-1}$$

$$= \left(\int_{\Omega} |f(y)|^{p-\varepsilon} dy\right)^{1/p-\varepsilon} |\Omega|^{\frac{-1}{p-\varepsilon}}$$

$$= \frac{1}{|\Omega|^{\frac{1}{p-\varepsilon}}}\left(\int_{\Omega} |f(y)|^{p-\varepsilon} dy\right)^{1/p-\varepsilon}$$

$$= \frac{1}{|\Omega|}\left(\int_{\Omega} |f(y)|^{p-\varepsilon} dy\right)^{1/p-\varepsilon}$$

Jadi

$$\frac{1}{|B|}\left(\int_{B} |f(y)|^{p-\varepsilon} dy\right)^{1/p-\varepsilon} \leq \frac{1}{|\Omega|}\left(\int_{\Omega} |f(y)|^{p-\varepsilon} dy\right)^{1/p-\varepsilon}$$

Karena $f \in L^{p)}$ jika dan hanya jika $\left(\frac{1}{|B|}\int_B |f(y)|^{p-\varepsilon} dy\right)^{1/p-\varepsilon} < \infty$ sehingga $\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |f(y)|^{p-\varepsilon} dy\right)^{1/p-\varepsilon} < \infty$ dengan demikian $f \in L^{p),\theta,\lambda}$. Jadi jika $f \in L^{p)}$ maka $f \in L^{p),\theta,\lambda}$ sehingga diperoleh $L^{p)} \subset L^{p),\theta,\lambda}$.

(ii) akan ditunjukkan bahwa $\mathcal{M}_q^p \subset L^{p)}$

Misalkan $1 < p < q < \infty$ atau $1 < q/p < \infty$, maka

$$\int_B \frac{1}{|B|}|f(y)|dy \le \frac{1}{|B|}\left(\int_B |f(y)|^{q/p}dy\right)^{\frac{1}{q/p}}$$

$$\le \frac{1}{|B|}\left(\int_B |f(y)|^{q/p}dy\right)^{\frac{p}{q}}$$

Misalkan $|g|^p = f$, sehingga

$$\int_B \frac{1}{|B|}|g(y)|^p dy \le \frac{1}{|B|}\left(\int_B |g(y)|^{\frac{q}{p}-p}dy\right)^{\frac{p}{q}}$$

$$= \frac{1}{|B|}\left(\int_B |f(y)|^q dy\right)^{\frac{p}{q}}$$

$$\frac{1}{|B|}\left(\int_B |g(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{1}{|B|}\left(\int_B |g(y)|^q dy\right)^{\frac{p}{q}\cdot\frac{1}{p}}$$

$$= \frac{1}{|B|}\left(\int_B |g(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}}$$

Jadi

$$\frac{1}{|B|}\left(\int_B |g(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{1}{|B|}\left(\int_B |g(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}}$$

Karena $g \in \mathcal{M}_q^p$ jika dan hanya jika $\frac{1}{|B|}\left(\int_B |g(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}} < \infty$ sehingga $\frac{1}{|B|}\left(\int_B |g(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$ dengan demikian $g \in L^{p),\theta}$. Jadi jika $g \in \mathcal{M}_q^p$ maka $g \in L^{p),\theta}$ sehingga diperoleh $\mathcal{M}_q^p \subset L^{p),\theta}$.

(iii) Akan ditunjukkan bahwa $L^p \subset \mathcal{M}_q^p$

Karena $|g(y)| \le \left||g(y)|\right|_{L^\infty}$, dengan $\left||g(y)|\right|_{L^\infty}$ adalah batas atas terkecil essensial dari $|g(y)|$ sehingga L^∞

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B |g(y)|^q dy\right)^{1/q} \le \left(\frac{1}{|B|}\int_B \left||g(y)|\right|_{L^\infty}^q dy\right)^{1/q}$$

$$\leq \left|\left|g(y)\right|\right|_{L^{\infty}(B)}$$

Karena $g \in L^p$ jika dan hanya jika $\left|\left|g(y)\right|\right|_{L^{\infty}(B)} < \infty$ sehingga $\left(\frac{1}{|B|}\int_B |g(y)|^q dy\right)^{1/q} < \infty$ dengan demikian $g \in \mathcal{M}_q^p$. Jadi jika $g \in \mathcal{M}_q^p$ maka $g \in L^p$ sehingga diperoleh $L^p \subset \mathcal{M}_q^p$.

2.2 Kajian Integrasi Topik Dengan Al-Quran/Hadits

Menuntut ilmu merupakan salah satu kewajiban bagi setiap umat untuk melakukannya. Dalam pandangan islam, ilmu merupakan keistimewaan yang dapat menjadikan manusia lebih unggul dari pada makhluk yang lainnya. Dalam Alquran dan Hadist disebutkan secara berulang-ulang bahwasannya kedudukan umat islam yang berilmu memiliki kedudukan yang tinggi karena dengan ilmu akan mendapatkan petunjuk hidup di dunia dan akhirat. Ilmu juga dapat membuat manusia menjadi berkembang dan mengetahui segala sesuatu yang tidak diketahui menjadi tahu (Ulum 2007).

Berikut merupakan salah satu hadist yang menjelaskan tentang kewajiban menuntut ilmu terdapat dalam hadist riwayat Ibnu Majah No.224, dari Anas bin Malik ra, yang dishahihkan oleh al-Albani dalam Shahih al-Jaami ash-Shaghir No.3914 sebagai berikut:

عَنْ أَنَسٍ رَضِىَ اللهُ عَنْهُ قَالَ: قَالَ رَسُوْلُ اللهِ صَلَّى اللهُ عَلَيْهِ وَ سَلَّمَ: طَلَبُ ٱلْعِلْمِ فَرِيْضَةٌ عَلَى كُلِّ مُسْلِمٍ، وَإِنَّ طَالِبَ ٱلْعِلْمِ يَسْتَغْفِرُ لَهُ كُلُّ شَيْءٍ، حَتَّى ألْحِيْتَانَ فِي الْبَحْرِ (رواه ابن ماجه)

Artinya: "Dari Anas ra berkata: Rasulullah SAW bersabda: menuntut ilmu itu wajib atas setiap orang Islam, karena sesungguhnya semua (makhluk) sampai binatang-binatang yang ada di laut memohonkan ampun untuk orang yang menuntut ilmu". (H.R. Ibnu Majah)

Menuntut ilmu wajib hukumnya bagi setiap muslim laki-laki maupun muslim perempuan. Ketika Allah telah menurunkan perintah yang mewajibkan atas suatu hal, maka kita harus menaatinya. Allah Ta'ala berfirman dalam QS. An-Nur ayat 51:

إِنَّمَا كَانَ قَوْلَ ٱلْمُؤْمِنِينَ إِذَا دُعُوٓاْ إِلَى ٱللَّهِ وَرَسُولِهِۦ لِيَحْكُمَ بَيْنَهُمْ أَن يَقُولُواْ سَمِعْنَا وَأَطَعْنَاۚ وَأُوْلَٰٓئِكَ هُمُ ٱلْمُفْلِحُونَ

(النور: ٥١)

"Sesungguhnya ucapan orang-orang yang beriman apabila diajak untuk kembali kepada Allah SWT dan Rasul-Nya agar rasul memberi keputusan hukum diantara mereka hanyalah dengan mengatakan 'kami mendengar dan kami taat'. Dan hanya merekalah orang-orang yang berbahagia." (QS. An-Nur:51) (Departemen Agama RI., 2006).

Terdapat berbagai cara untuk mendapatkan dan mengembangkan sebuah ilmu. Salah satunya yang dibahas dalam penelitian ini yaitu dengan menganalisis sifat-sifat inklusi pada ruang Grand Morrey. Untuk mengetahui keberadaan sifat-sifat inklusi pada ruang Grand Morrey dilakukan beberapa macam tahapan. Sesungguhnya manusia yang beriman senantiasa membiasakan dirinya untuk berpikir. Hal tersebut terdapat dalam QS. Al- Imran ayat 191:

الَّذِيْنَ يَذْكُرُوْنَ اللّٰهَ قِيَامًا وَّقُعُوْدًا وَّعَلٰى جُنُوْبِهِمْ وَيَتَفَكَّرُوْنَ فِيْ خَلْقِ السَّمٰوٰتِ وَالْاَرْضِۚ رَبَّنَا مَا خَلَقْتَ هٰذَا بَاطِلًاۚ سُبْحٰنَكَ فَقِنَا عَذَابَ النَّارِ(آل عمران: ١٩١)

" (yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata): "Ya Tuhan Kami, Tiadalah Engkau menciptakan ini dengan sia-sia, Maha suci Engkau, Maka peliharalah Kami dari siksa neraka" (QS. Al-Imran:191) (Departemen Agama RI., 2006).

2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung

2.3.1 Ruang Grand Morrey

Definisi 2.17. (Meskhi, 2011) Misalkan $1 < p < \infty$, $\theta > 0$ dan $0 \leq \lambda < 1$. Ruang Grand Morrey, dinotasikan $L^{p),\theta,\lambda}(X,\mu)$, untuk suatu kelas fungsi $f: X \to \mathbb{R}$ dengan norm

$$\|f\|_{L^{p),\theta,\lambda}(X)} := \sup_{0<\varepsilon<p-1} \sup_{\substack{x\epsilon X \\ 0<r<d}} \left(\frac{\varepsilon^{\theta}}{\left(\mu(B(x,r))\right)^{\lambda}} \int_B |f(y)|^{p-\varepsilon} d\mu(y) \right)^{\frac{1}{(p-\varepsilon)}} < \infty$$

2.3.2 Sifat-Sifat Inklusi pada Ruang Grand Morrey

Setiap ruang memiliki karakteristik tertentu dan sifat-sifat yang berlaku. Begitu juga Ruang Grand Morrey. Sifat inklusi cukup menarik diteliti, karena didalamnya akan dikaji keterkaitan hubungan antar ruang. Sifat inklusi dapat disimbolkan dengan $\subset$. Sifat inklusi telah di teliti pada beberapa ruang. Namun belum ada penelitian yang membahas tentang sifat-sifat inklusi pada ruang Grand Morrey.

Karena Ruang Morrey dan Ruang Grand Morrey sama-sama merupakan Ruang Banach. Ruang Banach adalah ruang bernorma yang lengkap. Ruang Morrey adalah perluasan Ruang Lebesgue dengan $p = q$. Ruang Grand Morrey adalah Ruang Grand Lebesgue jika $\lambda = 0$ dan merupaka Ruang Lebesgue jika $\theta = 0$. Oleh karena itu, peneliti ingin meneliti tentang sifat-sifat inklusi pada ruang Grand Morrey.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode penelitian kualitatif. Penelitian kualitatif adalah penelitian yang dilakukan dengan menggunakan metode studi pustaka (*library research*). Pengumpulan data dilakukan dengan cara mencari berbagai sumber seperti jurnal, buku, dan riset-riset yang sudah ada. Hasilnya penelitian kualitatif tidak berupa statistik atau dalam bentuk hitungan, melainkan secara holistik-konstektual dari pengumpulan data dan menjadikan peneliti sebagai sumber informasi. pr (National & Pillars, n.d.).

Metode penelitian kualitatif berdasarkan kepada post-positivisme, karena digunakan untuk meneliti subjek alamiah, (sebagai lawannya eksperimen) peneliti memiliki peran sebagai instrument kunci, pengambilan sampel, teknik pengumpulan data dilakukan dengan trianggulasi(gabungan), analisis data bersifat induktif/kualitatif, dan hasil penelitian kualitatif lebih menekankan makna dari pada generalisasi (Sugiyono, 2019).

Terdapat beberapa macam pendekatan penelitian kualitatif diantaranya *grounded theory*, *etnografi*, *hermeneutik*, *fenomenology*, naratif/historis,dan studi kasus.

3.2 Pra Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan mengumpulkan berbagai macam jurnal, artikel, buku, dan website yang terkait dengan topik yang akan dibahas dalam penelitian ini. Berikut beberapa rujukan yang digunakan sebagai rujukan utama

Pada tahun 2017, (Gunawan et al., 2017) meneliti tentang sifat inklusi pada Ruang Morrey yang diperumun. Penelitian ini membahas mengenai struktur dari Ruang Morrey, Ruang Morrey Lemah, Ruang Morrey diperumun dan Ruang Morrey Lemah diperumun. Beberapa kondisi yang diperlukan untuk inklusi sejati dari ruang-ruang tersebut diperoleh melalui norm pada fungsi karakteristik bola. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah menggunakan ketaksamaan holder. Ketika parameternya sama kita tahu bahwa Ruang Morrey diperumun terdapat dalam ruang morrey lemah diperumun. Jika $1 \leq p_1 < p_2 < q < \infty$ maka masing-masing dibawah memiliki sifat inklusi:

a. $\mathcal{M}_q^{p_2} \subseteq \mathcal{M}_q^{p_1}$
b. $w\mathcal{M}_q^{p_2} \subseteq \mathcal{M}_q^{p_1}$
c. $w\mathcal{M}_q^{p_2} \subseteq \mathcal{M}_q^{p_1}$

Pada tahun 2018, (Gunawan et al., 2018) tertarik meneliti Ruang Morrey lemah, Ruang Morrey lemah lebih luas dari pada Ruang Morrey dimana sifat inklusinya sejati. Dalam penelitian ini, dibuktikan bahwa inklusi antara ruang Morrey, antara ruang Morrey yang lemah, dan antara ruang Morrey dan ruang Morrey yang lemah semuanya proper. Proper inklusi antara ruang Morrey dan ruang Morrey yang lemah diperoleh melalui operator maksimal Hardy-Littlewood tak terbatas pada ruang Morrey dengan eksponen 1. Selain itu, juga diberikan kondisi yang diperlukan untuk setiap inklusi.

Penelitian selanjutnya adalah skripsi yang berjudul “Sifat-Sifat Inklusi pada Ruang Morrey Kecil”. Dalam penelitian ini, telah dibuktikan bahwa sifat inklusi yang ada di Ruang Morrey berlaku di Ruang Morrey kecil dan Morrey kecil lemah. Metode yang digunakan yaitu kajian pustaka, dengan mengumpulkan data dari buku, jurnal dan artikel yang berhubungan dengan inklusi Ruang Morrey kecil dan Ruang Morrey kecil lemah.

Sifat inklusi pada Ruang Grand Morrey akan membedakan penelitian yang dahulu dan sekarang. Penelitian terdahulu membahas mengenai sifat inklusi pada Ruang Morrey, Ruang Morrey diperumun, dan Ruang Morrey Lemah.

3.3 Tahapan Penelitian

Metode penelitian dalam penelitian ini dilakukan melalui beberapa tahap sebagai berikut:

a. Studi Literatur

Pada tahap ini dikaji materi dasar mengenai ruang bernorma, ketaksamaan Minkowski, ketaksamaan Holder, ruang Lebesgue, ruang Morrey, sifat-sifat inklusi pada ruang Morrey, ruang Grand Lebesgue, ruang Grand Morrey.

b. Hubungan Ruang Grand Morrey dengan Ruang Grand Lebesgue

Pada tahap ini didefinisikan ruang Lebesgue dan ruang Grand Morrey serta kaitan keduannya, dan untuk mempermudah pembuktian digunakan definisi ruang Grand Morrey.

c. Menyelidiki Sifat-Sifat Inklusi pada Ruang Grand Morrey

Pada tahap ini diselidiki sifat-sifat inklusi pada ruang Grand Morrey dengan $1 < p_1 < p_2 < \infty$, $\theta > 0$ dan $1 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 < 1$ melalui beberapa teorema:

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Ruang Grand Morrey

Ruang Grand Morrey merupakan ruang fungsi terukur dengan jari-jari $0 < r < d$. Untuk membahas sifat-sifat inklusi yang dimiliki Ruang Grand Morrey akan dijelaskan terlebih dahulu mengenai definisi dari Ruang Grand Morrey.

Definisi 4.1.2 (Meskhi, 2011) Misalkan $1 < p < \infty$, $\theta > 0$ dan $0 \leq \lambda < 1$. Ruang Grand Morrey, dinotasikan $L^{p),\theta,\lambda}(X,\mu)$, untuk suatu kelas fungsi $f: X \to \mathbb{R}$ dengan norm

$$\|f\|_{L^{p),\theta,\lambda}(X)} := \sup_{0<\varepsilon<p-1} \sup_{\substack{x\epsilon X \\ 0<r<d}} \left(\frac{\varepsilon^{\theta}}{\big(\mu(B(x,r))\big)^{\lambda}} \int_B |f(y)|^{p-\varepsilon} d\mu(y) \right)^{\frac{1}{(p-\varepsilon)}} < \infty$$

4.2 Sifat-Sifat Inklusi pada Ruang Grand Morrey

Teorema 4.2.1. Jika $1 < p_1 < p_2 < \infty$, $\theta > 0$ dan $1 \leq \lambda < 1$. Maka

$$L^{p_2),\theta,\lambda}(X,\mu) \subseteq L^{p_1),\theta,\lambda}(X,\mu)$$

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa $\|f\|_{L^{p_1),\theta,\lambda}(X,\mu)} \leq \|f\|_{L^{p_2),\theta,\lambda}(X,\mu)}$

Ambil sembarang $f \in L^{p_1),\theta,\lambda}(X,\mu)$ dengan menggunakan Ketaksamaan Holder dan $p_1 \leq p_2$.

$$\|f\|_{L^{p_1),\theta,\lambda}(X,\mu)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \sup_{\substack{x\in\mathbb{R} \\ 0<r<d}} \left[\frac{\varepsilon^{\theta}}{\big(\mu(B(x,r)\big)^{\lambda}} \int_{B(x,r)} |f(y)|^{p_1-\varepsilon} d\mu(y) \right]^{\frac{1}{p_1-\varepsilon}}$$

$$\leq \sup_{0<\mathcal{E}<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p_1-\varepsilon}} \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\0<r<d}} \left(\mu(B(x,r)\right)^{\frac{1-\lambda}{p_1-\varepsilon}} \left[\frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)|^{p_1-\varepsilon} d\mu(y)\right]^{\frac{1}{p_1-\varepsilon}}$$

$$\leq \left(\sup_{0<\mathcal{E}<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p_1-\varepsilon}}\right)\left(\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\0<r<d}} \left(\mu(B(x,r)\right)^{\frac{1-\lambda}{p_1-\varepsilon}} \left[\frac{1}{\mu(B(x,r)} \int_{B(x,r)} |f(y)|^{p_1-\varepsilon} d\mu(y)\right]^{\frac{1}{p_1-\varepsilon}}\right)$$

$$\leq \left(\sup_{0<\mathcal{E}<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p_1-\varepsilon}}\right)^{\frac{p_1-\varepsilon}{p_2-\varepsilon}} \left(\left(\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\0<r<d}} \left(\mu(B(x,r)\right)^{\frac{1-\lambda}{p_1-\varepsilon}}\right)^{\frac{p_1-\varepsilon}{p_2-\varepsilon}} \left[\frac{1}{\mu(B(x,r)} \left(\int_{B(x,r)} (|f(y)|^{p_1-\varepsilon})^{\frac{p_2-\varepsilon}{p_1-\varepsilon}} d\mu(y)\right)^{\frac{p_1-\varepsilon}{p_2-\varepsilon}} \left(\int_{B(x,r)} d\mu(y)\right)^{1-\frac{p_1-\varepsilon}{p_2-\varepsilon}}\right]^{\frac{1}{p_1-\varepsilon}}\right)$$

$$\leq \sup_{0<\mathcal{E}<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p_2-\varepsilon}} \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\0<r<d}} \left(\mu(B(x,r)\right)^{\frac{1-\lambda}{p_2-\varepsilon}} \left[\frac{1}{\mu(B(x,r)} \int_{B(x,r)} |f(y)|^{p_2-\varepsilon} d\mu(y)\right]^{\frac{1}{p_2-\varepsilon}}$$

$$\leq \sup_{0<\mathcal{E}<p-1} \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\0<r<d}} \left[\frac{\mathcal{E}^{\theta}}{\left(\mu(B(x,r)\right)^{\lambda}} \int_{B(x,r)} |f(y)|^{p_2-\varepsilon} d\mu(y)\right]^{\frac{1}{p_2-\varepsilon}}$$

$$\leq \|f\|_{L^{p_2),\theta,\lambda}(X,\mu)}$$

Dapat diketahui bahwa $f \in L^{p_2),\theta,\lambda}(X,\mu)$. Oleh karena itu $L^{p_2),\theta,\lambda}(X,\mu) \subseteq L^{p_1),\theta,\lambda}(X,\mu)$

Contoh 4.2.1. Misalkan $1 < p_1 < p_2 < \infty$, $\theta > 0$ dan $1 \leq \lambda < 1$. Bola $B = \{y \in X: \rho(x,y) < r\}$ dan $f\chi_B(y)$ merupakan fungsi karakteristik dari B, maka

$$L^{p_2),\theta,\lambda}(X,\mu) \subseteq L^{p_1),\theta,\lambda}(X,\mu)$$

Bukti :

Ambil sembarang $f \in L^{p_1),\theta,\lambda}(X,\mu)$

$$\|f\|_{L^{p_1),\theta,\lambda}(X,\mu)} = \sup_{0<\mathcal{E}<p-1} \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\0<r<d}} \left[\frac{\mathcal{E}^{\theta}}{\left(\mu(B(x,r)\right)^{\lambda}} \int_{B(x,r)} |f\chi_k|^{p_1-\varepsilon} d\mu(y)\right]^{\frac{1}{p_1-\varepsilon}}$$

$$\leq \sup_{0<\mathcal{E}<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p_1-\varepsilon}} \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\0<r<d}} \left(\mu(B(x,r)\right)^{\frac{1-\lambda}{p_1-\varepsilon}} \left[\frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f\chi_k|^{p_1-\varepsilon} d\mu(y)\right]^{\frac{1}{p_1-\varepsilon}}$$

$$\leq \left(\sup_{0<\mathcal{E}<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p_1-\varepsilon}}\right)\left(\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\0<r<d}} \left(\mu(B(x,r)\right)^{\frac{1-\lambda}{p_1-\varepsilon}} \left[\frac{1}{\mu(B(x,r)} \int_{B(x,r)} |f\chi_k|^{p_1-\varepsilon} d\mu(y)\right]^{\frac{1}{p_1-\varepsilon}}\right)$$

$$\leq \left(\sup_{0<\mathcal{E}<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p_1-\varepsilon}}\right)^{\frac{p_1-\varepsilon}{p_2-\varepsilon}} \left(\left(\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\0<r<d}} \left(\mu(B(x,r)\right)^{\frac{1-\lambda}{p_1-\varepsilon}}\right)^{\frac{p_1-\varepsilon}{p_2-\varepsilon}} \left[\frac{1}{\mu(B(x,r)}\left(\int_{B(x,r)} \left(\left|f\chi_k\right|^{p_1-\varepsilon}\right)^{\frac{p_2-\varepsilon}{p_1-\varepsilon}} d\mu(y)\right)^{\frac{p_1-\varepsilon}{p_2-\varepsilon}} \left(\int_{B(x,r)} d\mu(y)\right)^{1-\frac{p_1-\varepsilon}{p_2-\varepsilon}}\right]^{\frac{1}{p_1-\varepsilon}}\right)$$

$$\leq \sup_{0<\mathcal{E}<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p_2-\varepsilon}} \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\0<r<d}} \left(\mu(B(x,r)\right)^{\frac{1-\lambda}{p_2-\varepsilon}} \left[\frac{1}{\mu(B(x,r)} \int_{B(x,r)} \left|f\chi_k\right|^{p_2-\varepsilon} d\mu(y)\right]^{\frac{1}{p_2-\varepsilon}}$$

$$\leq \sup_{0<\mathcal{E}<p-1} \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\0<r<d}} \left[\frac{\mathcal{E}^{\theta}}{\left(\mu(B(x,r))\right)^{\lambda}} \int_{B(x,r)} |f\chi_k|^{p_2-\varepsilon} d\mu(y)\right]^{\frac{1}{p_2-\varepsilon}}$$

$$\leq \|f\|_{L^{p_2),\theta,\lambda}(X,\mu)}$$

Terbukti bahwa $L^{p_2),\theta,\lambda}(X,\mu) \subseteq L^{p_1),\theta,\lambda}(X,\mu)$.

Teorema 4.2.2. Diberikan $1 < p < \infty$, $\theta > 0$ dan $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 < 1$. Maka

$$L^{p),\theta,\lambda_2}(X,\mu) \subseteq L^{p),\theta,\lambda_1}(X,\mu).$$

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa $\|f\|_{L^{p),\theta,\lambda_1}(X,\mu)} \leq \|f\|_{L^{p),\theta,\lambda_2}(X,\mu)}$

Ambil sembarang $f \in L^{p),\theta,\lambda_1}(X,\mu)$ dengan menggunakan Ketaksamaan Holder dan $\lambda_1 \leq \lambda_2$.

$$\|f\|_{L^{p),\theta,\lambda_1}(X,\mu)} = \sup_{0<\mathcal{E}<p-1} \sup_{\substack{x\in X\\0<r<d}} \left[\frac{\mathcal{E}^{\theta}}{\left(\mu(B(x,r))\right)^{\lambda_1}} \int_{B(x,r)} |f(y)|^{p-\varepsilon} d\mu(y)\right]^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$\leq \sup_{0<\mathcal{E}<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}} \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\0<r<d}} \left(\mu(B(x,r))\right)^{\frac{1-\lambda_1}{p-\varepsilon}} \left[\frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)|^{p-\varepsilon} d\mu(y)\right]^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$\leq \left(\sup_{0<\mathcal{E}<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p_1-\varepsilon}}\right) \left(\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\0<r<d}} \left(\mu(B(x,r))\right)^{\frac{1-\lambda_1}{p-\varepsilon}} \left[\frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)|^{p-\varepsilon} d\mu(y)\right]^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\right)$$

$$\leq \left(\sup_{0<\mathcal{E}<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p_1-\varepsilon}}\right) \left(\left(\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\0<r<d}} \left(\mu(B(x,r))\right)^{\frac{1-\lambda_1}{p-\varepsilon}}\right)^{\frac{1-\lambda_2}{1-\lambda_1}} \left[\frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)|^{p-\varepsilon} d\mu(y)\right]^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\right)$$

$$\leq \sup_{0<\mathcal{E}<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}} \sup_{\substack{x\in\mathbb{R} \\ 0<r<d}} \big(\mu(B(x,r))\big)^{\frac{1-\lambda_2}{p-\varepsilon}} \left[\frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)|^{p-\varepsilon} d\mu(y)\right]^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$\leq \sup_{0<\mathcal{E}<p-1} \sup_{\substack{x\in X \\ 0<r<d}} \left[\frac{\mathcal{E}^{\theta}}{\big(\mu(B(x,r))\big)^{\lambda_2}} \int_{B(x,r)} |f(y)|^{p-\varepsilon} d\mu(y)\right]^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$\leq \|f\|_{L^{p),\theta,\lambda_2}(X,\mu)}$$

Dapat diketahui bahwa $f \in L^{p),\theta,\lambda_2}(X,\mu)$. Oleh karena itu $L^{p),\theta,\lambda_2}(X,\mu) \subseteq L^{p),\theta,\lambda_1}(X,\mu)$

Contoh 4.2.2 Misalkan $1 < p_1 < p_2 < \infty$, $\theta > 0$ dan $1 \leq \lambda < 1$. Bola $B = \{y \in X: \rho(x,y) < r\}$ dan $f\chi_B(y)$ merupakan fungsi karakteristik dari B, maka

$$L^{p),\theta,\lambda_2}(X,\mu) \subseteq L^{p),\theta,\lambda_1}(X,\mu).$$

Bukti. Ambil sembarang $f \in L^{p),\theta,\lambda_1}(X,\mu)$ dengan

$$\|f\|_{L^{p),\theta,\lambda_1}(X,\mu)} = \sup_{0<\mathcal{E}<p-1} \sup_{\substack{x\in X \\ 0<r<d}} \left[\frac{\mathcal{E}^{\theta}}{\big(\mu(B(x,r))\big)^{\lambda_1}} \int_{B(x,r)} |f\chi_k|^{p-\varepsilon} d\mu(y)\right]^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

Menggunakan Ketaksamaan Holder

$$\leq \sup_{0<\mathcal{E}<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}} \sup_{\substack{x\in\mathbb{R} \\ 0<r<d}} \big(\mu(B(x,r))\big)^{\frac{1-\lambda_1}{p-\varepsilon}} \left[\frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} \left|f\chi_k\right|^{p-\varepsilon} d\mu(y)\right]^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$\leq \left(\sup_{0<\mathcal{E}<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p_1-\varepsilon}}\right)\left(\sup_{\substack{x\in\mathbb{R} \\ 0<r<d}} \big(\mu(B(x,r))\big)^{\frac{1-\lambda_1}{p-\varepsilon}} \left[\frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} \left|f\chi_k\right|^{p-\varepsilon} d\mu(y)\right]^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\right)$$

$$\leq \left(\sup_{0<\mathcal{E}<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p_1-\varepsilon}}\right)\left(\left(\sup_{\substack{x\in\mathbb{R} \\ 0<r<d}} \big(\mu(B(x,r))\big)^{\frac{1-\lambda_1}{p-\varepsilon}}\right)^{\frac{1-\lambda_2}{1-\lambda_1}} \left[\frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} \left|f\chi_k\right|^{p-\varepsilon} d\mu(y)\right]^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\right)$$

$$\leq \sup_{0<\mathcal{E}<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}} \sup_{\substack{x\in\mathbb{R} \\ 0<r<d}} \big(\mu(B(x,r))\big)^{\frac{1-\lambda_2}{p-\varepsilon}} \left[\frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} \left|f\chi_k\right|^{p-\varepsilon} d\mu(y)\right]^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$\leq \sup_{0<\mathcal{E}<p-1} \sup_{\substack{x\in X \\ 0<r<d}} \left[\frac{\mathcal{E}^{\theta}}{\left(\mu(B(x,r))\right)^{\lambda_2}} \int_{B(x,r)} |f\chi_k|^{p-\varepsilon} d\mu(y)\right]^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$\leq \|f\|_{L^{p),\theta,\lambda_2}(X,\mu)}$$

Terbukti bahwa $L^{p),\theta,\lambda_2}(X,\mu) \subseteq L^{p),\theta,\lambda_1}(X,\mu)$.

Teorema 4.2.3. Diberikan $1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty$, $\theta > 0$ dan $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 < 1$. Maka

$$L^{p_2),\theta,\lambda_2}(X,\mu) \subseteq L^{p_1),\theta,\lambda_1}(X,\mu).$$

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa $\|f\|_{L^{p_1),\theta,\lambda_1}(X,\mu)} \leq \|f\|_{L^{p_2),\theta,\lambda_2}(X,\mu)}$

Ambil sembarang $f \in L^{p_1),\theta,\lambda_1}(X,\mu)$ dengan menggunakan Ketaksamaan Holder, $p_1 \leq p_2$ dan $\lambda_1 \leq \lambda_2$.

$$\|f\|_{L^{p_1),\theta,\lambda_1}(X,\mu)} = \sup_{0<\mathcal{E}<p-1} \sup_{\substack{x\in\mathbb{R} \\ 0<r<d}} \left[\frac{\mathcal{E}^{\theta}}{\left(\mu(B(x,r))\right)^{\lambda_1}} \int_{B(x,r)} |f(y)|^{p_1-\varepsilon} d\mu(y)\right]^{\frac{1}{p_1-\varepsilon}}$$

$$\leq \sup_{0<\mathcal{E}<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p_1-\varepsilon}} \sup_{\substack{x\in\mathbb{R} \\ 0<r<d}} \left(\mu(B(x,r))\right)^{\frac{1-\lambda_1}{p_1-\varepsilon}} \left[\frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)|^{p_1-\varepsilon} d\mu(y)\right]^{\frac{1}{p_1-\varepsilon}}$$

$$\leq \left(\sup_{0<\mathcal{E}<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p_1-\varepsilon}}\right) \left(\sup_{\substack{x\in\mathbb{R} \\ 0<r<d}} \left(\mu(B(x,r))\right)^{\frac{1-\lambda_1}{p_1-\varepsilon}} \left[\frac{1}{\mu(B(x,r)} \int_{B(x,r)} |f(y)|^{p_1-\varepsilon} d\mu(y)\right]^{\frac{1}{p_1-\varepsilon}}\right)$$

$$\leq \left(\sup_{0<\mathcal{E}<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p_1-\varepsilon}}\right)^{\frac{p_1-\varepsilon}{p_2-\varepsilon}} \left(\left(\left(\sup_{\substack{x\in\mathbb{R} \\ 0<r<d}} \left(\mu(B(x,r))\right)^{\frac{1-\lambda_1}{p_1-\varepsilon}}\right)^{\frac{p_1-\varepsilon}{p_2-\varepsilon}}\right)^{\frac{1-\lambda_2}{1-\lambda_1}} \left[\frac{1}{\mu(B(x,r)} \left(\int_{B(x,r)} (|f(y)|^{p_1-\varepsilon})^{\frac{p_2-\varepsilon}{p_1-\varepsilon}} d\mu(y)\right)^{\frac{p_1-\varepsilon}{p_2-\varepsilon}} \left(\int_{B(x,r)} d\mu(y)\right)^{1-\frac{p_1-\varepsilon}{p_2-\varepsilon}}\right]^{\frac{1}{p_1-\varepsilon}}\right)$$

$$\leq \sup_{0<\mathcal{E}<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p_2-\varepsilon}} \sup_{\substack{x\in\mathbb{R} \\ 0<r<d}} \left(\mu(B(x,r))\right)^{\frac{1-\lambda_2}{p_2-\varepsilon}} \left[\frac{1}{\mu(B(x,r)} \int_{B(x,r)} |f(y)|^{p_2-\varepsilon} d\mu(y)\right]^{\frac{1}{p_2-\varepsilon}}$$

$$\leq \|f\|_{L^{p_2),\theta,\lambda_2}(X,\mu)}$$

Dapat diketahui bahwa $f \in L^{p_2),\theta,\lambda_2}(X,\mu)$. Oleh karena itu $L^{p_2),\theta,\lambda_2}(X,\mu) \subseteq L^{p_1),\theta,\lambda_1}(X,\mu)$.

Contoh 2.13. Misalkan $1 < p_1 < p_2 < \infty$, $\theta > 0$ dan $1 \leq \lambda < 1$. Bola $B = \{y \in X : \rho(x,y) < r\}$ dan $f\chi_B(y)$ merupakan fungsi karakteristik dari B, maka

Maka $L^{p_2),\theta,\lambda_2}(X,\mu) \subseteq L^{p_1),\theta,\lambda_1}(X,\mu)$.

Bukti. Ambil sembarang $f \in L^{L^{p_1),\theta,\lambda_1}}(X,\mu)$

$$\|f\|_{L^{p_1),\theta,\lambda_1}(X,\mu)} = \sup_{0<\mathcal{E}<p-1} \sup_{\substack{x\in\mathbb{R} \\ 0<r<d}} \left[\frac{\mathcal{E}^{\theta}}{\left(\mu(B(x,r))\right)^{\lambda_1}} \int_{B(x,r)} |f\chi_k|^{p_1-\varepsilon} d\mu(y)\right]^{\frac{1}{p_1-\varepsilon}}$$

Menggunakan Ketaksamaan Holder

$$\|f\|_{L^{p_1),\theta,\lambda_1}(X,\mu)} = \sup_{0<\mathcal{E}<p-1} \sup_{\substack{x\in\mathbb{R} \\ 0<r<d}} \left[\frac{\mathcal{E}^{\theta}}{\left(\mu(B(x,r))\right)^{\lambda_1}} \int_{B(x,r)} |f\chi_k|^{p_1-\varepsilon} d\mu(y)\right]^{\frac{1}{p_1-\varepsilon}}$$

$$\leq \sup_{0<\mathcal{E}<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p_1-\varepsilon}} \sup_{\substack{x\in\mathbb{R} \\ 0<r<d}} \left(\mu(B(x,r))\right)^{\frac{1-\lambda_1}{p_1-\varepsilon}} \left[\frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} \left|f\chi_k\right|^{p_1-\varepsilon} d\mu(y)\right]^{\frac{1}{p_1-\varepsilon}}$$

$$\leq \left(\sup_{0<\mathcal{E}<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p_1-\varepsilon}}\right) \left(\sup_{\substack{x\in\mathbb{R} \\ 0<r<d}} \left(\mu(B(x,r))\right)^{\frac{1-\lambda_1}{p_1-\varepsilon}} \left[\frac{1}{\mu(B(x,r)} \int_{B(x,r)} \left|f\chi_k\right|^{p_1-\varepsilon} d\mu(y)\right]^{\frac{1}{p_1-\varepsilon}}\right)$$

$$\leq \left(\sup_{0<\mathcal{E}<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p_1-\varepsilon}}\right)^{\frac{p_1-\varepsilon}{p_2-\varepsilon}} \left(\left(\left(\sup_{\substack{x\in\mathbb{R} \\ 0<r<d}} \left(\mu(B(x,r))\right)^{\frac{1-\lambda_1}{p_1-\varepsilon}}\right)^{\frac{p_1-\varepsilon}{p_2-\varepsilon}}\right)^{\frac{1-\lambda_2}{1-\lambda_1}} \left[\frac{1}{\mu(B(x,r)} \left(\int_{B(x,r)} (|f\chi_k|^{p_1-\varepsilon})^{\frac{p_2-\varepsilon}{p_1-\varepsilon}} d\mu(y)\right)^{\frac{p_1-\varepsilon}{p_2-\varepsilon}} \left(\int_{B(x,r)} d\mu(y)\right)^{1-\frac{p_1-\varepsilon}{p_2-\varepsilon}}\right]^{\frac{1}{p_1-\varepsilon}}\right)$$

$$\leq \sup_{0<\mathcal{E}<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p_2-\varepsilon}} \sup_{\substack{x\in\mathbb{R} \\ 0<r<d}} \left(\mu(B(x,r))\right)^{\frac{1-\lambda_2}{p_2-\varepsilon}} \left[\frac{1}{\mu(B(x,r)} \int_{B(x,r)} |f\chi_k|^{p_2-\varepsilon} d\mu(y)\right]^{\frac{1}{p_2-\varepsilon}}$$

$$\leq \|f\|_{L^{p_2),\theta,\lambda_2}(X,\mu)}$$

Terbukti bahwa $L^{p_2),\theta,\lambda_2}(X,\mu) \subseteq L^{p_1),\theta,\lambda_1}(X,\mu)$.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Pembahasan terkait sifat-sifat inklusi pada ruang Grand Morrey telah diteliti sebelumnya. Oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa:

a. Jika $1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty$, $\theta > 0$ dan $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 < 1$, maka $L^{p_2),\theta,\lambda_2}(X,\mu) \subseteq L^{p_1),\theta,\lambda_1}(X,\mu)$

b. Jika $1 < p < \infty$, $\theta > 0$ dan $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 < 1$, maka $L^{p),\theta,\lambda_2}(X,\mu) \subseteq L^{p),\theta,\lambda_1}(X,\mu)$.

c. Jika $1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty$, $\theta > 0$ dan $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 < 1$, maka $L^{p_2),\theta,\lambda_2}(X,\mu) \subseteq L^{p_1),\theta,\lambda_1}(X,\mu)$.

5.2 Saran untuk Penelitian Lanjutan

Saran untuk penelitian selanjutnya yaitu peneliti dapat meneliti sifat-sifat inklusi pada ruang yang lain atau menggunakan metode yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

Adams, D. R. (2015). Morrey spaces. In *Applied and Numerical Harmonic Analysis* (Issue 9783319266794). https://doi.org/10.1201/9781003042341

Alemneh, H. T., Makinde, O. D., & Theuri, D. M. (2020). Optimal control model and cost-effectiveness analysis of Maize streak virus pathogen interaction with pest invasion in Maize plant. *Egyptian Journal of Basic and Applied Sciences*, *7*(1), 180–193. https://doi.org/10.1080/2314808x.2020.1769303

Bartle, R. G. (1955). *Robert-G.-Bartle-The-Elements-of-Integration-and-Lebesgue-Measure-Wiley-Interscience-_1995_.pdf*.

Capone, C., Formica, M. R., & Giova, R. (2013). Grand lebesgue spaces with respect to measurable functions. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, *85*, 125–131. https://doi.org/10.1016/j.na.2013.02.021

Gunawan, H., Hakim, D. I., & Idris, M. (2018). Proper inclusions of morrey spaces. *Glasnik Matematicki*, *53*(1), 143–151. https://doi.org/10.3336/gm.53.1.10

Gunawan, H., Hakim, D. I., Limanta, K. M., & Masta, A. A. (2017). Inclusion properties of generalized Morrey spaces. *Mathematische Nachrichten*, *290*(2–3), 332–340. https://doi.org/10.1002/mana.201500425

Iwaniec, T., & Sbordone, C. (1992). On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, *119*(2), 129–143. https://doi.org/10.1007/BF00375119

Kadets, V. (2018). A Course in Functional Analysis and Measure Theory. In *Springer, Universitext book series*. https://doi.org/10.1007/978-3-319-92004-7

Landsberg, M. (1966). K. Yosida, Functional Analysis. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 123) XII + 458 S. Berlin/Heidelberg/New York 1965. Springer-Verlag. Preis geb. DM 66, —. In *ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* (Vol. 46, Issue 1). https://doi.org/10.1002/zamm.19660460126

Meskhi, A. (n.d.). *Integral Operators in Grand Morrey Spaces*.

Meskhi, A. (2011). Maximal functions, potentials and singular integrals in grand Morrey spaces. *Complex Variables and Elliptic Equations*, *56*(10–11), 1003–1019. https://doi.org/10.1080/17476933.2010.534793

National, G., & Pillars, H. (n.d.). *Metodologi Penelitian Kualitatif & Grounded Theory*.

Peressini, E., & Randol, B. (1970). An Introduction to Real Analysis. In *The*

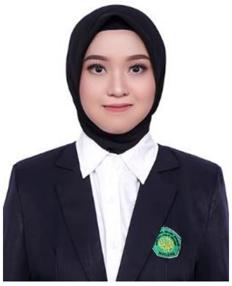
American Mathematical Monthly (Vol. 77, Issue 1). https://doi.org/10.2307/2316879

Rahman, H. (2020). Inclusion Properties of The Homogeneous Herz-Morrey. *Cauchy*, *6*(3), 117–121. https://doi.org/10.18860/ca.v6i3.10114

Royden, H., & Fitzpatrick, P. (2010). *Halsey Royden, Patrick Fitzpatrick-Real Analysis (4th Edition)-Prentice Hall (2010)*.

Umarkhadzhiev, S. M. (2014). Hardy-Littlewood maximal operator in generalized grand Lebesgue spaces. *AIP Conference Proceedings*, *1637*(3), 1137–1142. https://doi.org/10.1063/1.4904689

RIWAYAT HIDUP



Mega Nur Azizah, Lahir di Malang pada 02 Agustus 2000. Merupakan anak pertama dari pasangan Siswanto dan Yunifah Asmaning. Perempuan yang kerap dipanggil Mega ini telah mengikuti pendidikan formal maupun nonformal sejak SMA yaitu di SMAN 01 Bululawang dan PP. At-thohiriyah yang lulus pada tahun 2018. Selain itu, saat mengenyam pendidikan di SMA Mega juga mengikuti kegiatan ekstrakulikuler yaitu Organisasi Basket Club dan menjadi pengurus pondok sebagai bendahara di PP. At-Thohiriyah. Selanjutnya setelah tamat dari pendidikan SMA Mega melanjukan pendidikannya di UIN Maulana Malik Ibrahim Malang dan melanjutkan pendidikan non formalnya di PP. AL-Hikmah Al-Fathimiyyah Malang mengikuti program Tahfidz Al-Quran. Pada tahun 2019-2020 Mega mengikuti organisasi Lembaga Bimbingan Belajar Ahaf Institute sebagai pengurus organisasi yaitu devisi penelitian dan pengembangan. Selanjutnya, pada tahun 2020-2021 sebagai bendahara. Tahun 2019- saat ini masih menjadi pengajar di Lembaga Bimbingan Belajar Ahaf Institute.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Mega Nur Azizah
NIM : 18610094
Fakultas / Program Studi : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Sifat-Sifat Inklusi pada Ruang Grand Morrey
Pembimbing I : Dr. Hairur Rahman, M.Si
Pembimbing II : Erna Herawati, M.Pd

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	21 Maret 2022	Konsultasi Bab I	1.
2.	28 Maret 2022	Konsultasi Revisi Bab I	2.
3.	4 April 2022	Konsultasi Bab II dan III	3.
4.	8 April 2022	Konsultasi Revisi Bab II dan III	4.
5.	11 April 2022	Konsultasi Kajian Agama	5.
6.	25 April 2022	Konsultasi Revisi Kajian Agama	6.
7.	29 April 2022	Konsultasi Bab IV	7.
8.	2 Mei 2022	Konsultasi Kajian Agama	8.
9.	23 Mei 2022	Konsultasi Bab IV	9.
10.	20 Juni 2022	Konsultasi Revisi Kajian Agama	10.
11.	20 Juni 2022	Konsultasi Revisi Bab I, II, dan III	11.
12.	23 September 2022	Konsultasi Bab IV dan V	12.
13.	15 Oktober 2022	Konsultasi Revisi Bab IV dan V	13.
14.	21 Oktober 2022	Konsultasi Kajian Agama	14.
15.	13 Desember 2022	ACC Keseluruhan	15.

Malang, 14 Desember 2022
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005