PENENTUAN KARAKTER GRUP SIMETRI SYM_n MENGGUNAKAN TABLOID YOUNG

SKRIPSI

OLEH
AULA ZAHROTIN MAGFIROH
NIM. 18610038

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022

PENENTUAN KARAKTER GRUP SIMETRI SYM_n MENGGUNAKAN TABLOID YOUNG

SKRIPSI

Diajukan kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Aula Zahrotin Magfiroh
NIM. 18610038

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022

PENENTUAN KARAKTER GRUP SIMETRI SYM_n
MENGGUNAKAN TABLOID YOUNG

SKRIPSI

Oleh
Aula Zahrotin Magfiroh
NIM. 18610038

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Malang, 2 Desember 2022

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Intan Nisfulaila, M. Si	Erna Herawati, M. Pd
NIP. 19900215 201903 2 015	NIDT. 19760723 20180201 2 222

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PENENTUAN KARAKTER GRUP SIMETRI SYM_n MENGGUNAKAN TABLOID YOUNG

SKRIPSI

Oleh
Aula Zahrotin Magfiroh
NIM. 18610038

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S. Mat)
Tanggal, 13 Desember 2022

Ketua Penguji	: Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph. D	....
Anggota Penguji I	: Muhammad Khudzaifah, M. Si	....
Anggota Penguji II	: Intan Nisfulaila, M. Si	....
Anggota Penguji III	: Erna Herawati, M. Pd	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Aula Zahrotin Magfiroh

NIM : 18610038

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Penentuan Karakter Grup Simetri Sym_n Menggunakan Tabloid Young

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 13 Desember 2022

Yang membuat pernyataan,

Aula Zahrotin Magfiroh

MOTO

"Be your self and be better everyday"

PERSEMBAHAN

Matematika UIN Malang, pilihan ketiga SBMPTN 2018 yang tidak pernah terfikirkan jika saya akan diterima, atau akan saya pilih jika diterima di pilihan ini. Tapi ternyata, di Malang ada banyak pelajaran baru yang harus saya pelajari, banyak hal indah yang harus saya amati, dan banyak orang dengan berbagai sudut pandang yang harus saya temui. –Aula Zahrotin M

Alhamdulillahi Robbil'alamin, dengan mengucap rasa syukur kepada Allah Swt. Skripsi ini saya persembahkan untuk kedua orang tua tercinta, Bapak Jasmin dan Ibu Winarti, serta kakek-nenek, guru-guru, dan teman-teman saya yang senantiasa memberi kasih sayang, nasihat, motivasi, keceriaan, doa yang tulus, dan dukungan moril, serta materil bagi penulis.

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT atas limpahan rahmat, taufik dan hidayah-Nya, sehingga penulisan skripsi dengan judul *"Penentuan Karakter Grup Simetri Sym_n Menggunakan Tabloid Young"* dapat diselesaikan dengan baik. Tidak lupa sholawat dan salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Penulis menyadari banyak pihak yang telah terlibat dan membantu dalam terselesaikannya penulisan skripsi ini. Iringan doa dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Intan Nisfulaila, M.Si., selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, arahan, inspirasi, dan motivasi dengan penuh kesabaran kepada penulis selama mengerjakan skripsi ini.
5. Erna Herawati, M.Pd., selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan bimbingan dan arahan kepada penulis khususnya di bidang kajian agama.
6. Prof. Dr. H. Turmudi, M. Si, Ph. D, selaku ketua penguji dalam ujian skripsi yang telah banyak memberikan arahan serta ilmu kepada penulis.
7. Muhammad Khudzaifah, M. Si, selaku anggota penguji I dalam ujian skripsi yang telah banyak memberikan arahan serta ilmu kepada penulis.
8. Seluruh sivitas akademika Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim khususnya seluruh dosen yang memberikan banyak ilmu dan pengalaman yang berharga bagi penulis.
9. Keluarga yang selalu memberi doa dan motivasi baik moril maupun spiritual.
10. Seluruh mahasiswa Program Studi Matematika angkatan 2018 Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, teman-teman dekat penulis, teman-

teman Pondok Pesantren Putri Tanwirul Hija Malang, serta teman-teman Persatuan Catur Unior UIN Malang yang selalu memberi keceriaan dan doa.

11. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu, yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materil.

Malang, 13 Desember 2022

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

Sym_n	: Grup Simetri n
$\circ$	: Operasi Komposisi
$X \to X$	: Pemetaan
$\mapsto$	: Pemetaan Unsur dari Suatu Fungsi
$\lambda \vdash n$	: Partisi λ dari Bilangan Bulat Positif n
t	: Tablo Young
$\{t\}$	: Tabloid Young
α_n	: Permutasi ke-n
M^{λ}	: Modul Permutasi
$\sim$	: Ekuivalen Baris

ABSTRAK

Zahrotin Magfiroh, Aula. 2022. **Penentuan Karakter Grup Simetri Sym_n Menggunakan Tabloid Young.** Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Intan Nisfulaila, M. Si. (II) Erna Herawati, M. Pd.

Kata Kunci: Karakter, Grup Simetri Sym_n**,** Tabloid Young, *Cycle*.

Karakter grup simetri adalah nilai karakter dari representasi grup yang dalam penelitian ini diperoleh dengan menggunakan tabloid Young. Pengkontruksian suatu representasi dari Sym_n memanfaatkan kelas-kelas ekuivalen dari suatu tablo. Semua λ-tablo yang ekuivalen baris dihimpun dan menghasilkan definisi tabloid Young. Suatu λ-tabloid Young adalah suatu kelas ekuivalen baris dari t: λ-tablo yang dinotasikan sebagai $\{t\}$, yaitu $\{t\} = \{t_1 | t_1 \sim t\}$. Tabloid Young dari t merupakan himpunan tablo-tablo dari partisi λ yang ekuivalen baris. Jenis penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah kualitatif dengan pendekatan studi literatur. Penentuan karakter grup simetri Sym_n dapat menggunakan tabloid Young dengan langkah-langkah pertama menentukan partisi n elemen bilangan bulat dari grup permutasi Sym_n, menentukan diagram Young yang berkorespondensi dengan partisi, menentukan tablo Young t yang berkorespondensi dengan partisi dari bentuk λ dengan mengisi setiap kotak pada diagram Young dari λ dengan bilangan $1, 2, \dots, n$, dengan syarat setiap bilangan dientrikan tepat satu kali, menentukan tabloid Young dari bentuk λ atau λ-tabloid Young yang digambarkan dengan tablo Young tanpa garis vertikal di setiap barisnya, dan yang terakhir menghitung banyak tabloid Young yang dapat dapat di-*fix*-kan (banyak tabloid Young yang entri barisnya tidak berubah setelah dipermutasikan oleh setiap jenis *cycle* (anggota grup simetri)). Setelah banyak tabloid Young yang bersesuaian dengan partisi didapatkan, data nilai karakter tersebut diinputkan ke dalam tabel karakter.

ABSTRACT

Zahrotin Magfiroh, Aula. 2022. **Symmetry Group Sym_n Character Determination Using Tabloid Young.** Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisor: (I) Intan Nisfulaila, M. Si. (II) Erna Herawati, M. Pd.

Keywords: Character, Symmetry Group of Sym_n, Young Tabloid, Cycle.

The symmetrical group character is the character value of the group representation which in this study was obtained using the Young tabloid. The construction of a representation of Sym_n utilizes the equivalent classes of a tableau. All row equivalent λ -tableaus are aggregated to produce Young's tabloid definition. A Young λ -tabloid is a row equivalent class of t: λ -table which is denoted as $\{t\}$, namely $\{t\} = \{t_1 | t_1 \sim t\}$. Young's tabloid of t is the set of tableaus from the row equivalent partition λ. The type of research used in this research is qualitative with a literature study approach. Sym_n symmetry group character determination can use the Young tabloid with the first steps determining the partition n integer elements of the Sym_n permutation group, determining the Young diagram that corresponds to the partition, determining the Young t tableau corresponding to the partition of the form λ by filling in each box on the Young diagram of λ with the numbers $1,2,\dots,n$, provided that every number is entered exactly once, determines the Young tabloid of the form λ or the λ -Young tabloid depicted by a Young tabloid without a vertical line in each row, and finally counts the number of Young tabloids that can be fixed (many Young tabloids whose line entries are not changes after being permutated by each type of cycle (symmetry group member)). After obtaining many Young tabloids corresponding to the partition, the character value data is inputted into the character table.

مستخلص البحث

زهرة مغفره, اولى. ٢٠٢٢. **مجموعة Sym_n *Symmetry* لتحديد الأحرف باستخدام *Young Tabloid***. البحث العلمي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانامالك ابراهيم الاسلامية الحكوميه بمالانج.

المشرفةالأولى (١)إينتان نصف الليلة،الماجستير.المشرفةالثانية (٢) إيرنا هيراواتى، الماجستير.

الكلمات المفتاحية: حرف ، مجموعة Sym_n التناظر ،*Cycle,Young Tabloid*.

شخصية المجموعة المتناظرة هي القيمة المميزة لتمثيل المجموعة والتي تم الحصول عليها في هذه الدراسة باستخدام صحيفة *Young* الشعبية. يستخدم إنشاء تمثيل Sym_n الفئات المكافئة للوحة. يتم تجميع كل الصفوف المكافئة للصفوف لإنتاج تعريف يونغ للصحف التابلويد. يونغ λ-*tabloid* هي فئة مكافئة للصف من جدول λ :t والتي يُرمز إليها بـ { {t، أي $\{t\} = \{t\_1 \mid t\_1 \sim t\}$.صحيفة يونغ الخاصة بـ t هي مجموعة تابلو(*tablo*) من القسم المكافئ للصف .λنوع ويستخدم هذاالبحث هودراسة أدابية نوعي مع منهج دراسة الأدب. يمكن أن يستخدم تحديد حرف مجموعة تناظر Sym_n صحيفة *Young* مع الخطوات الأولى لتحديد القسم n من عناصر عدد صحيح لمجموعة تبديل Sym_n ، وتحديد مخطط *Young* الذي يتوافق مع القسم ، وتحديد لوحة *Young* المقابلة لقسم النموذج بواسطة λ **التي تملأكال المربع**. ملء كل مربع. في الرسم التخطيطي الشاب لـ بالأرقام 1 ، 2 ، ... ، n ، بشرط إدخال كل الرقم. مرة واحدة بالضبط ، تحدد صحيفة الشباب ذات الشكل λ أو صحيفة التابلويد λ-*Young* التي تصورها صحيفة صغيرة بدون خط عمودي في كل الصف ، وأخيراً تحسب عدد الصحف الشعبية الصغيرة التي يمكن إصلاحها (العديد من الصحف الشعبية الشباب التي تكون مدخلات سطرها لا يتغير بعد أن يتم تبديله بواسطة كل نوع من أنواع الدورة (عضو مجموعة التناظر)). بعد الحصول على العديد من الصحف الصغيرة المطابقة للقسم ، يتم إدخال بيانات قيمة الحرف في جدول الأحرف.

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Grup simetri $Sym_n(X)$ adalah grup yang terdiri dari semua permutasi anggota himpunan $X = \{1,2, \dots, n\}$ yang dilengkapi dengan operasi komposisi (dinotasikan dengan $\circ$). Komposisi fungsi adalah suatu operasi biner pada $Sym_n(X)$ karena jika $\sigma: X \to X$ dan $\tau: X \to X$ adalah fungsi bijektif dari X ke X, maka $\sigma \circ \tau \in Sym_n(X)$. Selanjutnya operasi $\circ$ merupakan operasi yang memiliki sifat asosiatif. Identitas dari Sym_n merupakan permutasi 1 yakni $1(a) = a$, untuk setiap $a \in X$ atau menunjukkan fungsi identitas $f(x) = x, \forall x \in X$. Invers $\sigma^{-1}: X \to X$ yang dimiliki oleh setiap permutasi $\sigma: X \to X$ memenuhi $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = 1$. Dengan demikian semua syarat dari grup terpenuhi oleh $(Sym_n, \circ)$ (Dummit & Foote, 2010). Alasan penggunaan grup simetri dalam penelitian ini adalah karena grup simetri Sym_n adalah grup hingga dengan $n \geq 1$ yang akan berhubungan dengan partisi, dan dengan partisi dapat digunakan untuk membuat tabloid Young.

Kelas konjugasi dapat digunakan untuk mempartisi unsur-unsur dari suatu grup. Misal a dan b adalah anggota dari grup G. Kita katakan bahwa a dan b adalah konjugat di G (sebut b konjugat dari a) jika $xax^{-1} = b$, untuk suatu $x \in G$ (Gallian, 2016). Liebeck (2001) dalam Nisfulaila (2014) menjelaskan bahwa kelas-kelas konjugasi di Sym_n berkorespondensi dengan partisi dari n. Misalkan $x \in Sym_n$, kelas konjugasi x^{Sym_n} dari x di Sym_n terdiri dari semua permutasi di Sym_n yang mempunyai struktur *cycle* yang sama seperti x. Misalkan $\alpha \in Sym_n$ dan $\alpha = (a_1 \dots a_{k_1})(b1 \dots b_{k_2}) \dots (c_1 \dots c_{k_s})$ adalah dekomposisi α dalam *cycle-cycle* disjoin dengan $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_s \geq 0$, maka struktur *cycle* dari α adalah $(k_1, k_2, \dots, k_s)$ (James & Liebeck, 2003 dalam Nisfulaila, 2014).

Suatu partisi λ dari bilangan bulat positif n atau $\lambda \vdash n$ adalah suatu barisan dari bilangan-bilangan bulat positif $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ yang memenuhi $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_l$ dan $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_l = n$ (Zhao, 2009). Grup permutasi Sym_n merupakan himpunan permutasi dari n elemen. Sebagai catatan, notasi $\lambda \vdash n$ menyatakan bahwa λ adalah partisi dari n, dan λ_i untuk setiap i akan dikatakan sebagai ke- i. (Nisfulaila, 2014).

Berdasarkan definisi partisi, dapat didefinisikan suatu diagram Young yang berkorespondensi dengan suatu partisi λ. Diagram Young dari λ adalah koleksi berhingga dari kotak-kotak yang disusun dalam baris-baris yang rata kiri dengan banyaknya kotak dari baris teratas ke baris terbawah menurun, dengan catatan banyak kotak di dua baris yang berurutan boleh sama banyak (Zhao, 2009 dalam Nisfulaila, 2014).

Tablo Young didefinisikan melalui suatu diagram Young. Penamaan diagram ini ditujukan sebagai penghormatan kepada pendeta yang juga seorang matematikawan Cambridge *University*, Alfred Young. Berdasarkan definisi diagram Young, maka definisi tablo Young adalah kotak-kotak pada diagram Young dari λ yang diisi dengan bilangan $1,2, \dots, n$, yang setiap bilangan dientrikan tepat satu kali (Zhao, 2009 dalam Nisfulaila, 2014).

Pengkontruksian suatu representasi dari Sym_n memanfaatkan kelas-kelas ekuivalen dari suatu tablo. Dengan mendefinisikan ekivalensi baris, dua tablo dapat dianggap sama. Dua λ-tablo s dan t dikatakan ekuivalen baris, dinotasikan sebagai $s \sim t$, jika untuk setiap baris $i \in \{1, 2, \dots, l\}$, himpunan entri pada baris ke- i dari s

dan t sama (Nisfulaila, 2014). Selanjutnya semua λ-tablo yang ekuivalen baris dihimpun dan menghasilkan definisi tabloid Young. Suatu λ-tabloid Young adalah suatu kelas ekuivalen baris dari t: λ-tablo yang dinotasikan sebagai $\{t\}$, yaitu $\{t\} = \{t_1 | t_1 \sim t\}$. Tabloid Young dari t merupakan himpunan tablo-tablo dari partisi λ yang ekuivalen baris.

Karakter adalah banyaknya λ-tabloid Young yang di-*fix*-kan (tabloid Young tidak berubah atau saling ekuivalen baris) setelah entrinya dipermutasikan sesuai dengan unsur dari Sym_n dengan tipe *cycle* tertentu. Karakter grup sendiri adalah fungsi $\rho: G \to GL(n, \mathbb{C})$ yang merupakan representasi dari grup hingga G dengan masing-masing matriks $g\rho(g \in G)$ berukuran $n \times n$ kita jumlahkan semua entri diagonal dari matriks dan menyebutnya $x(g)$. Fungsi $x: G \to \mathbb{C}$ disebut sebagai karakter representasi ρ (James & Liebeck, 2003). Sedangkan karakter Grup Simetri adalah nilai karakter dari representasi grup yang dalam penelitian ini representasi diperoleh dengan menggunakan tabloid Young.

Menurut M. June & F. Fran (2018), nilai karakter representasi dari Sym_n dapat diperoleh melalui konsep tabloid Young. Pemaparan serupa juga terdapat dalam *lecture note* dari Universitas Minnesota Amerika Serikat (2006). Dalam catatan tersebut ditunjukkan proses mendapatkan tabel karakter dari grup simetri menggunakan tabloid Young. Hanya saja dalam catatan tersebut masih belum detail bagaimana proses satu ke proses lainnya hingga mendapatkan hasil akhir sebuah tabel karakter dari grup simetri.

Penelitian mengenai teori representasi khususnya penentuan karakter grup simetri menggunakan tabloid Young masih jarang dikaji di Indonesia, terlebih mengenai sumber-sumber yang hanya menyajikan materi dengan langkah-langkah yang kurang detail. Sehingga dengan terselesaikannya penelitian Penentuan Karakter Grup Simetri Sym_n ini jangka pendeknya adalah berkembangnya khazanah keilmuan, dan jangka panjangnya bisa diimplementasikan di bidang-bidang lain. Berdasarkan latar belakang tersebut, peneliti tertarik untuk melakukan kajian tentang penentuan karakter grup simetri Sym_n dengan menggunakan tabloid Young. Alasan lain perlunya dilakukan penelitian ini adalah berdasarkan *lecture note* dari Universitas California, Irvine di web UCI Departement of Chemistry dengan judul "Representations, Character Tables, and One Application of Symmetry", karakter grup simetri dapat diaplikasikan pada bidang kimia untuk identifikasi molekul (Anonim, 2006).

Allah berfirman dalam Al Qur'an surat al-Furqan ayat 2.

الَّذِيْ لَه مُلْكُ السَّمٰوٰتِ وَالْاَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَّلَمْ يَكُنْ لَّه شَرِيْكٌ فِى الْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَّرَه تَقْدِيْرًا (الفرقان: ٢)

"Yang memiliki kerajaan langit dan bumi, tidak mempunyai anak, tidak ada sekutu bagi-Nya dalam kekuasaan(-Nya), dan Dia menciptakan segala sesuatu, lalu menetapkan ukuran-ukurannya dengan tepat." (QS. al-Furqan:2)

Berdasarkan pada tafsir Ibnu Katsir dijelaskan *"Telah menciptakan segala sesuatu dan menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya.".* Arti dalam kalimat tersebut adalah segala sesuatu selain Dia adalah makhluk dan yang berada di bawah kekuasaan, aturan, tatanan, dan takdir-Nya. Keteraturan alam semesta memiliki pola yang dapat diketahui dengan cara mengkaji dan meneliti mengenai kasus yang menghasilkan rumus atau persamaan matematis.

Pemodelan matematika yang dilakukan manusia adalah representasi penjelasan terhadap alam semesta dengan mencari rumus dan pola suatu fenomena. Beberapa bukti diciptakan segala sesuatu dengan ukuran seperti pada wabah demam berdarah, malaria, dan tuberkolosis yang ternyata mempunyai aturan-aturan matematis (Abdussakir, 2009a). Penelitian ini dilakukan dengan tujuan untuk menentukan karakter suatu grup simetri menggunakan tabloid Young dan juga untuk mendapatkan bentuk atau pola proses penentuan karakter grup simetri Sym_n secara umum. Hasil akhir yang akan diperoleh dari penelitian ini bukan merupakan suatu hal yang baru, melainkan hasil dari pemikiran dan pengembangan ilmu pengetahuan yang sudah ada, sehingga lebih menambah keimanan terhadap Allah dan segala ciptaan-Nya.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah berdasarkan pada latar belakang tersebut adalah bagaimana penentuan karakter grup simetri Sym_n menggunakan tabloid Young?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui bagaimana menentukan karakter grup simetri Sym_n menggunakan tabloid Young.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun maanfaat penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagi peneliti, menambah pengetahuan terkait penentuan karakter grup simetri Sym_n menggunakan tabloid Young.
2. Bagi pemerhati matematika, menambah pengetahuan dalam bidang matematika khususnya dalam teori representasi terkait penentuan karakter grup simetri Sym_n menggunakan tabloid Young.

3. Bagi lembaga, sebagai bahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di Prodi Matematika terkait teori representasi.

1.5 Batasan Masalah

Pembatasan masalah yang ada pada penilitian ini adalah,

1. Karakter grup simetri yang dimaksud adalah tabel karakter dari representasi tereduksi dari Sym_n.
2. Untuk perhitungan karakter cukup ditinjau dari basis (himpunan tabloid Young) representasi tereduksi yang bersesuaian dengan partisi λ (modul permutasi M^λ).

1.6 Definisi Istilah

Definisi istilah di sini adalah untuk menghindari kesalahan pemahaman atau perbedaan penafsiran yang berkaitan dengan istilah-istilah dalam penelitian ini dengan istilah sehari-hari. Sesuai dengan judul penelitian "Penentuan Karakter Grup Simetri Sym_n Menggunakan Tabloid Young", maka definisi istilah-istilah yang perlu dijelaskan adalah,

1. Karakter Grup Simetri

   Karakter grup simetri adalah banyaknya tabloid Young yang di-*fix*-kan (tabloid Young tidak berubah atau saling *ekivalen* baris) setelah entrinya dipermutasikan sesuai dengan unsur dari Sym_n dengan tipe *cycle* tertentu.

2. Grup Simetri Sym_n

Grup simetri Sym_n adalah grup yang terdiri dari semua permutasi himpunan $X = \{1,2, \dots, n\}$ yang dilengkapi dengan operasi komposisi.

3. Tablo Young

Suatu tablo Young t dari bentuk λ adalah kotak-kotak pada diagram Young dari λ yang diisi dengan bilangan $1,2, \dots, n$, yang setiap bilangan dientrikan tepat satu kali (Zhao, 2009 dalam Nisfulaila, 2014). Tablo Young dari bentuk λ dinotasikan sebagai λ-tablo (June & Fran, 2018).

4. Tabloid Young

Suatu λ-tabloid Young adalah suatu kelas ekuivalen baris dari $t: \lambda$-tablo yang dinotasikan sebagai $\{t\}$, yaitu $\{t\} = \{t_1 | t_1 \sim t\}$. Tabloid Young dari t merupakan himpunan tablo-tablo dari partisi λ yang ekuivalen baris.

BAB II
KAJIAN TEORI

2.1 Grup

2.1.1 Operasi Biner

Operasi biner $*$ pada himpunan G adalah fungsi $*: G \times G \rightarrow G$. Untuk setiap $a, b \in G$ hasil operasi $*$ dapat dituliskan sebagai $a * b$ (June & Fran, 2018).

Contoh:

1. Operasi penjumlahan adalah operasi biner di $\mathbb{Z}$ himpunan bilangan bulat. Operasi penjumlahan memenuhi syarat sebagai fungsi dari $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $\forall(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ maka $a + b \in \mathbb{Z}$.
2. Operasi penjumlahan adalah operasi biner yang memiliki sifat asosiatif pada $\mathbb{Z}$ himpunan bilangan bulat. Operasi penjumlahan memenuhi syarat sebagai fungsi dari $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, untuk setiap $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ maka $a + b \in \mathbb{Z}$ dan $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ memenuhi $a + (b + c) = (a + b) + c$.
3. Operasi penjumlahan adalah operasi biner yang bersifat komutatif yakni memenuhi syarat sebagai fungsi dari $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $\forall(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, maka $a \cdot b \in \mathbb{Z}$ dan $a \cdot b = b \cdot a$.

2.1.2 Grup

Grup adalah salah satu kajian struktur aljabar yang terdiri atas himpunan takkosong dilengkapi operasi biner yang bersifat asosiatif, memiliki elemen identitas dan untuk setiap elemennya memiliki invers (Ruatakurey et al., 2019).

Suatu himpunan tak kosong G yang dilengkapi dengan operasi biner $*$ dilambangakan dengan $(G,*)$, disebut grup jika memenuhi beberapa aksioma berikut:

1. Operasi $*$ bersifat asosiatif, artinya $a * (b * c) = (a * b) * c,\ \forall\ a, b, c \in G$.
2. Himpunan G memiliki elemen identitas. Ada elemen $e \in G$ sedemikian sehingga berlaku $a * e = a = e * a,\ \forall\ a, b \in G$. Elemen e dinamakan elemen identitas di G.
3. Setiap elemen di G memiliki invers terhadap operasi $*$. $\forall a \in G$ ada elemen $a^{-1} \in G$ yang memenuhi $a * a^{-1} = e = a^{-1} * a$. Elemen a^{-1} dinamakan invers dari elemen a (Ruatakurey et al., 2019).

Pada umumnya lambang $(G,*)$ hanya dituliskan G, demikian juga untuk ab yang memiliki arti $a * b$ (Ruatakurey et al., 2019).

Contoh:

Misalkan $\mathbb{Z}$ merupakan himpunan bilangan bulat, maka $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan suatu grup, karena

1. Operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}$ merupakan operasi biner.
2. Operasi + memiliki sifat asosiatif di $\in \mathbb{Z}$ karena $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ maka $a + (b + c) = (a + b) + c$.
3. Terdapat $0 \in \mathbb{Z}, \forall a \in \mathbb{Z}$ sedemikian hingga $a + 0 = a = 0 + a$, sehingga $\mathbb{Z}$ memiliki elemen identitas terhadap penjumlahan.
4. $\forall a \in \mathbb{Z}$ memiliki $-a \in \mathbb{Z}$ sedemikian hingga $a + (-a) = e = (-a) + a$, sehingga $\mathbb{Z}$ memiliki elemen invers terhadap penjumlahan.

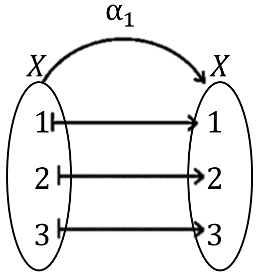
Karena himpunan $\mathbb{Z}$ dengan operasi penjumlahan memenuhi semua aksioma grup, maka dapat disimpulkan $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup (Ruatakurey et al., 2019).

2.2 Grup Simetri

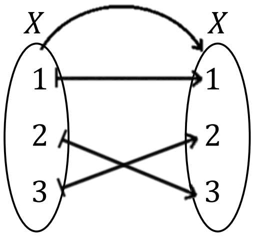
Definisi 2.1. Misalkan $X = \{1, 2, \dots, n\}, n \geq 1$. Himpunan semua fungsi bijektif (permutasi) dari X ke X dengan operasi komposisi fungsi membentuk suatu grup yang dinamakan **grup simetri** pada X dan dinotasikan dengan Sym_n (Nisfulaila, 2014).

Grup simetri Sym_n adalah grup yang terdiri dari semua permutasi anggota himpunan $X = \{1,2, \dots, n\}$ yang dilengkapi dengan operasi komposisi. Operasi komposisi adalah suatu operasi biner pada Sym_n karena jika $\sigma: X \to X$ dan $\tau: X \to X$ adalah fungsi bijektif dari X ke X, maka $\sigma \circ \tau \in Sym_n$. Operasi $\circ$ merupakan operasi yang memiliki sifat asosiatif. Identitas dari Sym_n adalah permutasi 1 yang memiliki definisi $1(a) = a$, untuk setiap $a \in X$ atau disebut dengan fungsi identitas $f(x) = x, x \in X$. Terdapat fungsi invers $\sigma^{-1}: X \to X$ yang memenuhi $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = 1$ untuk setiap permutasi $\sigma: X \to X$. Jadi semua syarat grup terpenuhi oleh (Sym_n, $\circ$). Grup simetri Sym_n tersebu dikatakan sebagai grup simetri pada himpunan X (Dummit & Foote, 2010).

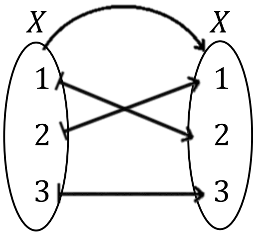
Berikut adalah contoh permutasi dari himpunan berhingga, misal $X = \{1, 2, 3\}$, notasi $X \to X$ menyatakan pemetaan, dan $\mapsto$ menyatakan pemetaan unsur dari suatu fungsi. Maka, diperoleh semua kemungkinan permutasi sebagai berikut:

1.


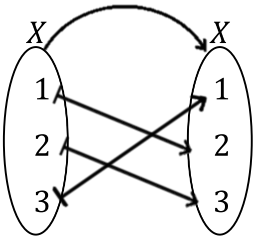
2. α_2



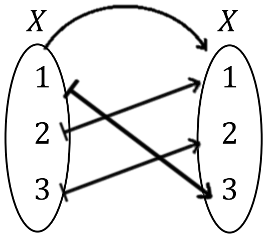
3. α_3



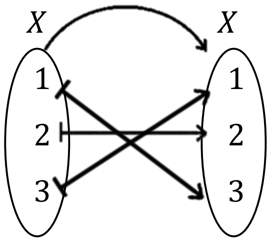
4. α_4



5. α_5



6. α_6



dengan demikian dapat dituliskan $Sym_3 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$ (Jamilia, 2008).

2.3 Matriks Array

Suatu permutasi juga dapat ditulis menggunakan matriks *array* dengan definisi

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \dots & \alpha(n) \end{bmatrix}$$

dengan $\{1, 2, \dots, n\}$ adalah domain α dan $\alpha(1), \dots, \alpha(n)$ adalah range α.

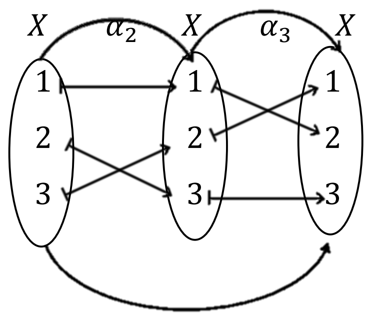
Misal diambil salah satu fungsi α dari permutasi $X = \{1, 2, 3\}$, yaitu

$$\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Baris pertama dari matriks tersebut menunjukan unsur-unsur dari domain fungsi α_2, dan baris kedua secara berturut-turut menunjukan hasil pemetaan α_2. Dari matriks tersebut diperoleh bahwa $\alpha_2(1) = 1, \alpha_2(2) = 3, \alpha_2(3) = 2$.

Berikut merupakan ilustrasi perhitungan operasi komposisi fungsi pada grup simetri, misal $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ dan $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, maka $\alpha_3 \circ \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \alpha_4$, dalam hal ini dioperasikan dari α_2 ke α_3 yang ditunjukkan oleh diagram panah berikut,

$\alpha_3 \circ \alpha_2 =$



$\alpha_3 \circ \alpha_2 = \alpha_4$

Gambar 2. 1 Ilustrasi Perhitungan Operasi Komposisi Fungsi pada Grup Simetri

Dari Gambar 2.1, 1 oleh α_2 dipetakan ke 1, lalu oleh α_3, 1 dipetakan ke 2. Sehingga diperoleh hasil akhir 1 dipetakan ke 2, cara tersebut berlaku untuk langkah-langkah berikutnya. Dengan demikian, diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \alpha_4$$

Contoh lain adalah permutasi α dari himpunan $\{1, 2, 3, 4\}$ secara spesifik dengan $\alpha(1) = 2, \alpha(2) = 3, \alpha(3) = 1,$ dan $\alpha(4) = 4.$ Penyajian α dalam matriks *array* adalah,

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

2.4 Struktur *Cycle*

Penulisan α dalam matriks *array* dapat dituliskan dalam bentuk *cycle*, berikut definisi *cycle*.

Definisi 2.2. Misalkan $\alpha \in Sym_n$ dan $\alpha = (a_1 \ldots a_{k_1})(b1 \ldots b_{k_2}) \ldots (c_1 \ldots c_{k_s})$ adalah dekomposisi α dalam *cycle-cycle* disjoin dengan $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_s \geq 0$, maka **struktur *cycle*** dari α adalah $(k_1, k_2, \ldots, k_s)$ (James & Liebeck, 2003 dalam Nisfulaila, 2014).

Contoh:

Matriks *array* dari fungsi

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

dapat ditulis sebagai struktur $\boldsymbol{cycle}\, \alpha = (123)(4)$, yakni bilangan 1 oleh α dipetakan ke 2, bilangan 2 oleh α dipetakan ke 3, bilangan 3 oleh α dipetakan ke 1, dan bilangan 4 oleh α dipetakan ke 4, dengan *cycle* satu unsur biasanya tidak dituliskan, sehingga didapatkan $\alpha = (123)$.

Berdasarkan contoh permutasi himpunan berhingga, maka dapat dituliskan hasil dari Sym_3 adalah

$Sym_3 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$ atau

$Sym_3 = \{(1), (23), (12), (123), (132), (13)\}$ (Nisfulaila, 2014).

2.5 Kelas Konjugasi

Banyaknya representasi tak tereduksi dari suatu grup G dapat diperoleh dengan menghitung banyaknya karakter tak tereduksi dari G. Hal ini dapat diketahui dengan menghitung banyaknya kelas konjugasi dari G.

Definisi 2.3. Misalkan $x, y \in G$. Dikatakan x **konjugat** dengan y, atau y dan x **saling konjugat** di G jika,

$$y = g^{-1}xg \text{ untuk suatu } g \in G$$

Himpunan semua elemen yang konjugat dengan x di G adalah:

$$x^G = \{g^{-1}xg : g \in G\},$$

dan disebut **kelas konjugasi** dari x di G (Nisfulaila, 2014). Untuk mengetahui bahwa setiap grup merupakan gabungan dari kelas-kelas konjugasi yang disjoin maka berlaku,

Proposisi 2.4. Jika $x, y \in G$, maka berlaku $x^G = y^G$ atau, $x^G \cap y^G = \emptyset$ (Nisfulaila, 2014).

Bukti:

Misalkan $x^G \cap y^G$ tidak kosong, ambil $z \in x^G \cap y^G$. Kemudian ada $g, h \in G$ oleh karena itu,

$$z = g^{-1}xg = h^{-1}yh$$

Sehingga $x = gh^{-1}yhg^{-1} = k^{-1}yk$, dimana $k = hg^{-1}$

Jadi $a \in x^G \Rightarrow a = b^{-1}xb$ untuk beberapa $b \in G$

$\Rightarrow a = b^{-1}k^{-1}ykb$

$\Rightarrow a = c^{-1}yc$ dimana $c = kb$

$\Rightarrow a \in y^G$

Oleh karena itu $x^G \subseteq y^G$. Demikian pula $y^G \subseteq x^G$ (gunakan $y = kxk^{-1}$), dan juga $x^G = y^G$ (James & Liebeck, 2003).

Dengan meninjau proposisi di atas, diperoleh akibat bahwa setiap grup merupakan gabungan dari kelas-kelas konjugasi yang saling disjoin. Observasi pada kelas konjugasi dari suatu unsur di Sym_n menghasilkan teorema 2.5 berikut,

Teorema 2.5. Misalkan $x \in Sym_n$. Kelas konjugasi x^{Sym_n} dari x di Sym_n terdiri dari semua permutasi di Sym_n yang mempunyai struktur *cycle* yang sama seperti x.

Bukti:

Tulis $A = \{i_l, \dots, i_k\}$. Untuk $i_r \in A$,

$i_r g(g^{-1}xg) = i_r xg = i_{r+1}g$ (atau $i_l g$ jika $r = k$).

Juga, untuk $1 \leq i \leq n$ dan $i \notin A$, $ig(g^{-1}xg)ixg = ig$.

Oleh karena itu $g^{-1}(i_1 i_2 \dots i_k)g = (i_1 i_2 g \dots i_k g)$, sesuai kebutuhan.

Sekarang pertimbangkan permutasi untuk Sym_n. Tulis

$$x = (a_1 \dots a_{k_1})(b_1 \dots b_{k_2}) \dots (c_1 \dots c_{k_s}),$$

Produk disjoin *cycle*, dengan $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_s$, untuk $g \in Sym_n$, maka dimiliki

$$g^{-1}xg = g^{-1}(a_1 \dots a_{k_1})gg^{-1}(b_1 \dots b_{k_2})g \dots g^{-1}(c_1 \dots c_{k_s})g$$

$$= (a_1 g \dots a_{k_1} g)(b_1 g \dots b_{k_2} g) \dots (c_1 g \dots c_{k_s} g)$$

$(k_1, \ldots, k_s)$ disebut bentuk *cycle* dari x, dan perhatikan bahwa x dan $g^{-1}xg$ memiliki *cycle* yang sama. Di sisi lain, diberikan dua permutasi x, y dari bentuk *cycle*, katakan

$$x = \left(a_1 \ldots a_{k_1}\right) \ldots \left(c_1 \ldots c_k s\right),$$

$$y = \left(a_1' \ldots a_{k_1}'\right) \ldots \left(c_1' \ldots c_{k_s}'\right),$$

(hasil kali dari *cycle* disjoin), ada $g \in Sym_n$ mengirim $a_1 \rightarrow\ a_1', \ldots, c_{k_s} \rightarrow c_{k_s}'$,

$$g^{-1}xg = y$$

(James & Liebeck, 2003)

Dengan demikian kelas-kelas konjugasi di Sym_n berkorespondensi dengan partisi dari n. Hal inilah yang memotivasi penggunaan tablo Young (James & Liebeck, 2003 dalam Nisfulaila, 2014).

2.6 Tabloid Young

2.6.1 Partisi

Definisi 2.6. Suatu **partisi** λ dari bilangan bulat positif n, dinotasikan $\lambda \vdash n$, adalah suatu barisan dari bilangan-bilangan bulat positif $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ yang memenuhi $\lambda_1 \geq\ \lambda_2 \geq \cdots \geq\ \lambda_l$ dan $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_l = n$ (Zhao, 2009).

Contoh:

Bilangan 3 memiliki tiga partisi, yaitu (3), (2,1), dan (1,1,1), karena memenuhi definisi partisi $2 \geq 1$, $1 \geq 1 \geq 1$, dan 2+1=3, 1+1+1=3. (3), (2,1), dan (1, 1, 1) juga disebut sebagai tipe *cycle*.

2.6.2 Diagram Young

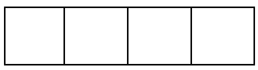
Berdasarkan definisi partisi, dapat didefinisikan suatu diagram Young yang berkorespondensi dengan suatu partisi λ.

Definisi 2.7. Diagram Young dari λ adalah koleksi berhingga dari kotak-kotak yang disusun dalam baris-baris yang rata kiri dengan banyaknya kotak dari baris teratas ke baris terbawah menurun, dengan catatan banyak kotak di dua baris yang berurutan boleh sama banyak.

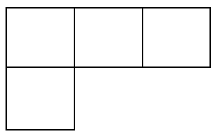
Berdasarkan definisi tersebut, diagram Young yang berkorespondensi dengan suatu partisi $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$ mempunyai l baris dan λ_i kotak pada baris ke-i (Zhao, 2009 dalam Nisfulaila, 2014).

Contoh:

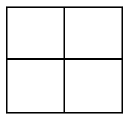
1. Diagram Young yang berkorespondensi dengan partisi bilangan 4, secara berturut-turut berkorespondensi dengan partisi (4), (3,1), (2,2), (2,1,1), dan (1,1,1,1) adalah:



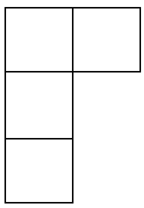
(4)



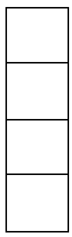
(3, 1)



(2, 2)

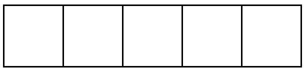
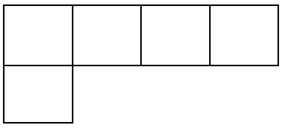
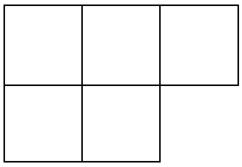


(2, 1, 1)

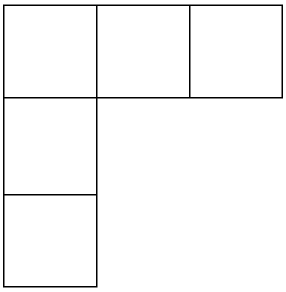
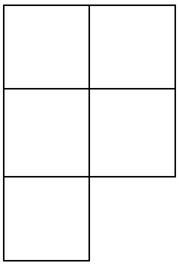
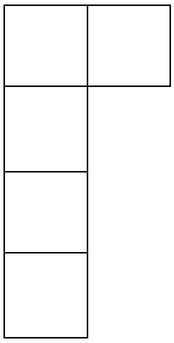
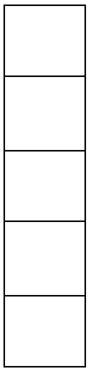


(1, 1, 1, 1)

2. Diagram Young yang bersesuaian untuk $n = 5$ secara berturut-turut berkorespondensi dengan partisi (5), (4,1), (3,2), (3,1,1), (2,2,1), (2,1,1,1), (1,1,1,1,1) adalah

(5) (4, 1) (3, 2)

(3, 1, 1) (2, 2, 1) (2, 1, 1, 1) (1, 1, 1, 1, 1)

2.6.3 Tablo Young

Tablo Young didefinisikan melalui suatu diagram Young. Penamaan diagram ini ditujukan sebagai penghormatan kepada pendeta yang juga seorang matematikawan Cambridge *University,* Alfred Young. Diagram ini diperkenalkan pada tahun 1900. Tablo Young pertama kali digunakan oleh Frobenius saat menginvestigasi representasi grup simetri. Tidak sampai tahun 1906, Young mempelajari aplikasi Frobenius yang menggunakan penemuannya tersebut. Pada tahun 1927 Young mempublikasikan hasil kerjanya, yang merupakan perluasan dari apa yang telah dikerjakan oleh Frobenius (Nisfulaila, 2014).

Berdasarkan definisi diagram Young, berikut definisi tablo Young.

Definisi 2.8. Suatu **tablo Young** t dari bentuk λ adalah kotak-kotak pada diagram Young dari λ yang diisi dengan bilangan $1,2, \dots, n$, yang setiap bilangan dientrikan tepat satu kali (Zhao, 2009 dalam Nisfulaila, 2014). Tablo Young dari bentuk λ dinotasikan sebagai λ-tablo (June & Fran, 2018).

Contoh:

Salah satu tablo Young dari Sym_5 dengan $\lambda = (4,1)$ adalah

5	**3**	**1**	**4**
2			

Jika $\lambda \vdash n$ suatu partisi λ dari bilangan bulat positif n, maka tablo Young t yang berkorespondensi dengan λ, ditulis sebagai t: λ-tablo. Bilangan-bilangan $1,2, \dots, n$ disebut **entri tablo.** Untuk teknis kepenulisan, entri pada kotak di baris ke-i dan kolom ke-j, ditulis sebagai t_{ij}. Terdapat $n!$ tablo Young untuk tiap-tiap $\lambda \vdash n$. Hal ini diperoleh dari menghitung banyak kemungkinan munculnya entri berbeda di setiap kotak (Nisfulaila, 2014).

Definisi 2.9. Misalkan kita menetapkan suatu penomoran pada kotak-kotak dari λ, maka kita dapat memandang suatu t: λ-tablo sebagai fungsi

$$t: \{1,2, \dots, n\} \rightarrow \{1,2 \dots, n\}$$

Sedemikian sehingga $t(p) = q$ jika dan hanya jika entri kotak pada tablo Young p memuat entri tablo Young q (Wildon, 2007).

Contoh:

Tablo-tablo yang berkorespondensi dengan partisi (2,1) dari bilangan 3 adalah:

1	2
3	

1	3
2	

2	1
3	

3	1
2	

3	2
1	

2	3
1	

Dari contoh tablo Young diatas dapat dipahami pada partisi (2,1) dari 3 memiliki 6 atau 3! tablo Young (Nisfulaila, 2014).

2.6.4 Tablo Young Standar

Tablo Young diperoleh dengan menghitung kemungkinan entri berbeda dari setiap kotak. Apabila entri yang ada di dalam tablo Young meningkat pada setiap baris dan kolomnya, maka tablo Young tersebut disebut tablo Young standar.

Definisi 2.10. Tablo Young standar adalah tablo Young yang entri-entrinya dalam urutan meningkat dengan masing-masing baris atau kolom dari kiri ke kanan dan atas ke bawah.

Contoh:

Salah satu tablo Young standar $\lambda = (4,1)$ dari partisi adalah

1	2	3	4
5			

(June & Fran, 2018).

2.6.5 Ekuivalen Baris

Dalam subbab ini akan dikonstruksi suatu representasi dari Sym_n yang memanfaatkan kelas-kelas ekuivalen dari suatu tablo. Setelah memperhatikan contoh definisi 2.9 maka akan muncul sebuah pertanyaan, Apakah

3	2
1	

=

2	3
1	

Dengan mendefinisikan ekuivalensi baris, dua tablo tersebut dianggap sama. Hal tersebut dimaksudkan untuk mendefinisikan suatu himpunan yang terdiri dari semua λ-tablo tidak ekivalen yang diklaim sebagai himpunan yang bebas linier dan membangun.

Definisi 2.11. Dua λ-tablo s dan t dikatakan **ekuivalen baris,** dinotasikan sebagai $s \sim t$, jika untuk setiap baris $i \in \{1, 2, \dots, l\}$, himpunan entri pada baris ke- i dari s dan t sama.

Contoh:

Misalkan $\lambda = (3,1)$, maka dua λ-tablo

p =

1	2	3
4		

dan

q =

1	3	2
4		

dikatakan ekivalen baris karena himpunan entri baris pertama pada p dan q sama (Nisfulaila, 2014).

2.6.6 Tabloid Young

Selanjutnya semua λ-tablo yang ekivalen baris dihimpun dan menghasilkan definisi baru.

Definisi 2.12. Suatu λ-**tabloid Young** adalah suatu kelas ekivalen baris dari t: λ-tablo yang dinotasikan sebagai $\{t\}$, yaitu $\{t\} = \{t_1 | t_1 \sim t\}$.

Contoh:

Misalkan λ=(2,1), diperoleh

$$t \quad = \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Maka tabloid Young dari t adalah

$$\{t\} \ = \quad \begin{array}{|cc|}\hline 1 & 2 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{3} & \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Ilustrasi dari tabloid Young adalah tablo Young tanpa garis vertikal. Yang merupakan himpunan tablo-tablo dari partisi λ yang ekuivalen baris yaitu

$$\{t\} = \left\{ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1}\end{array} \ , \ \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1}\end{array} \right\}$$

(Zhao, 2009 dalam Nisfulaila, 2014).

2.6.7 Aksi Grup pada Himpunan

Dengan memperhatikan defisini λ-tabloid pada Subbab 2.6.5, maka banyaknya λ-tablo dalam satu kelas ekivalen sama dengan $\lambda_1!\,\lambda_1!\,...\,\lambda_l!$ yang dituliskan sebagai λ!. Untuk selanjutnya dengan mengambil himpunan λ-tabloid sebagai basis untuk suatu ruang vektor, maka dapat didefinisikan suatu $\mathbb{C}Sym_n$-modul yang disebut sebagai **modul permutasi yang berkorespondensi dengan** λ, dinotasikan dengan M^{λ}, dengan mendefinisikan suatu aksi Sym_n pada himpunan semua λ-tabloid.

Lema 2.13 Terdapat suatu aksi yang terdefinisi dengan baik dari Sym_n pada himpunan semua λ-tabloid yang didefiniskan oleh $g\{t\} = \{gt\}$ dimana $\{t\}$ adalah suatu λ-tabloid dan $g \in Sym_n$. Dengan kata lain, g mempermutasikan entri-entri di $\{t\}$.

Berikut merupakan contoh untuk mengilustrasikan Lema 2.13.

Contoh:

Misalkan $g = (123) \in Sym_3$ dan $t = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$

Maka

$$(123)\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Yaitu entri 1 diganti 2, entri 2 diganti 3, dan entri 3 diganti 1.

Sebelum membuktikan Lema 2.13 dibutuhkan definisi berikut.

Definisi 2.14 Misalkan G suatu grup dan $\Omega \neq \emptyset$. Asumsikan untuk setiap $g \in G$ dan $\alpha \in \Omega, \alpha \cdot g \in \Omega$. Misalkan kondisi-kondisi berikut memenuhi,

1. $\alpha \cdot 1 = \alpha$, untuk setiap $\alpha \in \Omega$,
2. $(\alpha \cdot g) \cdot h = \alpha \cdot (gh)$, untuk setiap $\alpha \in \Omega$ dan $gh \in G$.

Dikatakan G **beraksi pada** Ω atau · adalah **aksi dari** G **pada** Ω.

Bukti Lema 2.13: (Nisfulaila, 2014)

Misalkan $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$.

1. Akan ditunjukkan aksi yang didefinisikan tersebut benar-benar merupakan suatu aksi. Misalkan X adalah himpunan semua λ-tabloid.
   a. Misalkan e adalah unsur identitas di Sym_n dan $\{t\}$ sebarang λ-tabloid di X, maka $e\{t\} = \{et\} = \{t\}$.
   b. Ambil sebarang $g, h \in Sym_n$ dan $\{t\} \in X$. Perhatikan bahwa $(gh)\{t\} = \{(gh)t\}$ dan $g(h\{t\}) = g\{ht\} = \{g(ht)\}$.

Namun apakah $(gh)t = g(ht)$? Misalkan t suatu tablo λ-tablo yang entri-entrinya dituliskan dalam suatu n-tuple $t = (t_1, \dots, t_n)$ dengan t_i entri pada kotak ke- j dimana $1 \leq j \leq n$. Tulis $ht = (t_{h_1}, \dots, t_{h_n})$. Akibatnya, $(gh)t = \left(t_{gh_1}, \dots, t_{gh_n}\right) = g\left(t_{h_1}, \dots, t_{h_n}\right) = g(ht)$.

Karena $(gh)t = g(ht)$, maka $(gh)\{t\} = g(h\{t\})$.

Jadi, pendefinisian $g\{t\} = \{gt\}$ benar-benar menunjukan suatu aksi.

2. Akan ditunjukkan untuk sebarang $\{p\}, \{q\} \in X$ dengan $p \sim q$, apakah $g\{p\} = g\{q\}$ untuk setiap $g \in Sym_n$. Perhatikan permisalan-permisalan berikut.
   a. Misalkan t suatu λ-tablo yang terdiri dari k baris dan entri-entri dalam tiap baris dituliskan dalam p-tuple jika baris tersebut terdiri dari p kotak.
   b. Misalkan $S_{l_i} = (s_{i_1}, \dots, s_{i_{l_i}})$ adalah entri-entri pada baris ke- i dimana $i = \{1, 2, \dots, k\}$ dan terdapat t_i kotak pada baris ke- i.
   c. Misalkan $\{t\} = \prod \ (s_i, \dots, s_{i_{l_i}})$ dimana $i = 1, 2, \dots, k$ dan $t_1 \geq t_2 \geq \cdots \geq t_k$.
   d. Misalkan π_i adalah suatu permutasi pada $S_{t_i} = (s_{i_1}, \dots, s_{i_{l_i}})$, maka $(s_{i_1}, \dots, s_{i_{l_i}}) \sim \pi_i (s_{i_1}, \dots, s_{i_{l_i}})$.

   Akibatnya, untuk sebarang $g \in Sym_n$

$$g\left(s_i, \dots, s_{i_{l_i}}\right) \sim g\pi_i \left(s_i, \dots, s_{i_{l_i}}\right) = g\left(s_{\pi_i\, i_1}, \dots, s_{\pi_i i l_i}\right)$$

$$= (s_{g\pi_i i_1}, \dots, s_{g\pi_i i l_i})$$

   Jadi, $(s_{gi_1}, \dots, s_{gil_i}) \sim (s_{g\pi_i i_1}, \dots, s_{g\pi_i i l_i})$ untuk setiap $i = \{1, 2, \dots, k\}$. Oleh karena itu $\{p\} \sim \{q\}$ jika dan hanya jika $g\{p\} \sim g\{q\}$.

Dengan demikian, aksi Sym_n pada suatu himpunan semua λ-tabloid terdefinisi dengan baik (Nisfulaila, 2014).

Selanjutnya akan didefinisikan suatu modul permutasi yang berkorespondensi dengan λ

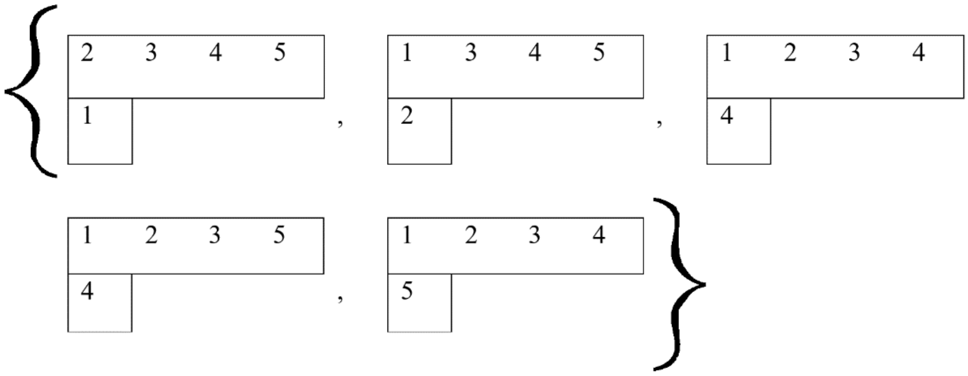
2.6.8 Modul Permutasi ($\boldsymbol{M^\lambda}$)

Modul permutasi M^λ merupakan representasi *reducible* dari Sym_n. Representasi *reducible* dari Sym_n merupakan tablo Young yang digunakan untuk menentukan tabloid dari λ partisi $n(\lambda \vdash n)$ untuk memperoleh nilai dimensi dan karakter dari M^λ. Karakter *reducible* Sym_n diperoleh dari banyaknya tabloid yang barisnya tetap ekuivalen setelah dipermutasikan. Sedangkan untuk representasi *irreducible* dari Sym_n merupakan tablo Young standar yang digunakan untuk menentukan *polytabloid* dari $\lambda \vdash n$ untuk memperoleh nilai dimensi dan karakter dari Sym^λ. Adapun definisi modul permutasi adalah sebagai berikut.

Definisi 2.15 Diberikan M^λ yang dinotasikan sebagai ruang vektor yang memiliki basis berupa himpunan dari λ-tabloid. Ruang vektor M^λ merupakan representasi tereduksi dari Sym_n yang dikenal sebagai modul permutasi yang bersesuaian pada λ.

Contoh:

Untuk $n = 5$, modul permutasi $M^{(4,1)}$ memiliki elemen sebagai berikut



Dari Definisi 2.15 dapat disimpulkan bahwa dimensi dari M^{λ} merupakan banyaknya tabloid Young dari $\lambda \vdash n$. Rumus untuk menghitung dimensi dari M^{λ} dituangkan dalam Proposisi 2. 16,

Proposisi 2.16 Jika $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$,

$$\dim\left(M^{\lambda}\right) = \frac{n!}{\lambda_1!\,\lambda_1!\,\dots\lambda_l!}$$

(June & Fran, 2018)

Bukti:

Karena basis dari M^{λ} adalah himpunan semua λ-tabloid, maka dimensinya sama dengan banyaknya λ-tabloid yang berbeda. Karena terdapat $\lambda_i!$ cara untuk mempermutasikan baris ke-i, maka banyaknya tablo dalam satu kelas ekuivalen baris adalah $\lambda_1!\,\lambda_2!\,\dots\lambda_l!$. karena terdapat $n!$ untuk setiap tablo, maka hanya tablo dalam satu kelas ekuivalen adalah $\frac{n!}{\lambda_1!\lambda_1!\dots\lambda_l!}$ (Nisfulaila, 2014).

Perhitungan karakter modul permutasi juga dapat menggunakan Proposisi 2.17. Proposisi 2.17 digunakan untuk mengecek hasil perhitungan karakter dengan menggunakan tabloid Young.

Proposisi 2.17 Misalkan $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$ adalah partisi dari n dan $g \in Sym_n$. Diberikan $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$ struktur *cycle* dari g. Karakter x dari representai

Sym_n pada M^λ dievaluasi pada suatu elemen dari Sym_n yang ekuivalen dengan koefisien dari $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_l^{\lambda_l}$ dalam

$$\prod_{i=1}^{m} (x_1^{\alpha_i} + x_2^{\alpha_i} + \cdots + x_i^{\alpha_i})$$

(June & Fran, 2018)

Bukti:

Dari perhitungan karakter dengan definisi *trace* dari matriks penyajian, karakter M^λ di suatu unsur $\pi \in Sym_n$ sama dengan banyaknya λ-tabloid yang dibuat tetap oleh π. Perhatikan dekomposisi *cycle* π. Misalkan $\pi = c_1 c_2 \dots c_j$ dengan c_i dan c_j disjoin jika $i \neq j$. Dikatakan c_i adalah faktor komposisi untuk setiap i. Misalkan $|c_i| > |c_j|$ jika $i > j$. Agar λ-tabloid dibuat tetap oleh π, maka himpunan entri-entri dari λ-tabloid pada baris ke-i sama dengan himpunan entri-entri pada *cycle* c_i. Jadi, selanjutya adalah menentukan λ-tabloid yang dibuat tetap oleh π.

Misalkan notasi $x_i^{\alpha_i}$ menyatakan baris ke-i dari λ-tabloid yang entrinya di suatu faktor komposisi dari π dengan panjang α_i. Selanjutnya adalah mencari ada berapa banyak $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_l^{\lambda_l}$, yaitu berapa banyak λ-tabloid yang dibuat tetap oleh π. Jadi, $x_i^{\lambda_i}$ berkorespondensi denga faktor komposisi c_i dengan panjang λ_i.

Untuk memperoleh polinom tersebut, suku-suku yang dipilih pada tiap-tiap faktor komposisi berkorespondensi dengan pemilihan baris dalam λ-tabloid dimana akan diletakkan entri-entri dari c_i. Akibatnya, untuk sebarang suku dalam ekpansi, pangkat dari x_i berkorespondensi dengan banyak unsur yang ditempatkan dalam baris ke-i.

Dengan demikian, jika panjang c_i adalah α_i, maka koefisien $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_l^{\lambda_l}$ diperoleh dari memperhatikan multinominal $\prod_{i=1}^{m}(x_1^{\alpha_i} + x_2^{\alpha_i} + \cdots + x_l^{\alpha_i})$. Koefisien dari $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_l^{\lambda_l}$ adalah banyak λ-tabloid dalam multinomial tersebut, yaitu banyak λ-tabloid yang dibuat tetap oleh permutasi berstruktur *cycle* α (Nisfulaila, 2014).

Contoh:

Karakter dari $M^{(4,1)}$ dari representasi yang Sym_5 yang dievaluasi pada elemen Sym_5 struktur *cycle* (2, 1, 1, 1) sama dengan koefisien $x_1^4 x_2$ yang ada pada $(x_1^2 + x_2^2)(x_1 + x_2)^3$ yaitu 3.

Dapat dilihat contoh pada Definisi 2.15, apabila dari kelima tabloid Young yang dihasilkan dipermutasikan dengan (1 2), maka tabloid yang entri pada setiap barisnya tidak berubah adalah

1 2 4 5		1 2 3 5		1 2 3 4
3	,	4	, dan	5

Nilai karakter lainnya dapat dihitung dengan cara yang sama, untuk nilai karakter M^λ dengan $n = 5$ ditunnjukkan pada tabel berikut.

Tabel 2.1 Nilai Karakter M^λ dengan $n = 5$

Tipe *cycle*	(1,1,1,1,1)	(2,1,1,1)	(2,2,1)	(3,1,1)	(3,2)	(4,1)	(5)
M^5	1	1	1	1	1	1	1
$M^{4,1}$	5	3	1	2	0	1	0
$M^{3,2}$	10	4	2	1	1	0	0
$M^{3,1,1}$	20	6	0	2	0	0	0
$M^{2,2,1}$	30	6	2	0	0	0	0
$M^{2,1,1,1}$	60	6	0	0	0	0	0
$M^{1,1,1,1,1}$	120	0	0	0	0	0	0

(June & Fran, 2018).

2.7 Karakter

Teori representasi menyajikan cara bagaimana menerjemahkan suatu hal yang abstrak dalam matematika ke dalam bahasa yang lebih mudah. Karakter adalah banyaknya λ-tabloid Young yang di-*fix*-kan (tabloid Young tidak berubah atau saling ekuivalen baris) setelah entrinya dipermutasikan sesuai dengan unsur dari Sym_n dengan tipe *cycle* tertentu.

Karakter grup sendiri adalah misal $\rho: G \to GL(n, \mathbb{C})$ adalah representasi dari grup hingga G, dengan masing-masing matriks $g\rho(g \in G)$ berukuran $n \times n$ kita jumlahkan semua entri diagonal dari matriks dan menyebutnya $x(g)$. Fungsi $x: G \to \mathbb{C}$ disebut sebagai karakter representasi ρ (James & Liebeck, 2003). Menurut (June & Fran, 2018), nilai karakter dari representasi grup (karakter grup) dapat diperoleh dari *trace* pada setiap matriks representasi yang dihasilkan. Misal diberikan $\rho(g)$ dengan $\rho \in G$ adalah representasi grup hingga G, maka karakter dari ρ adalah $x(g) = Tr(\rho(g))$. Karakter x dikatakan karakter *irreducible* dari G jika x merupakan karakter dari representasi *irreducible*, dan x dikatakan *reducible* jika x merupakan karakter dari representasi *reducible.*

Contoh:

Akan dihitung karakter dari representasi *irreducible* pada $G = S_3$, dan ruang vektor $V = \mathbb{C}^3$ .Terdapat subruang W dengan basis $B = \{w_1, w_2\}$ dengan $w_1 = v_1 - v_2$ dan $w_2 = v_2 - v_3$ dengan v_1, v_2 dan v_3 merupakan basis standar. Representasi $\rho(e)$ merupakan matriks identitas derajat 2. Untuk nilai $g = (1\ 2)$ diperoleh $\rho\big((1\ 2)\big) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Untuk $(1\ 2) \in S_3$ dengan $\rho\big((1\ 2)\big) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, karakter *irreducible* dari matriks representasi tersebut adalah

$$x\big((1\ 2)\big) = tr\left(\rho\big((1\ 2)\big)\right) = tr\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (-1) + 1 = 0$$

Sedangkan karakter grup simetri adalah nilai karakter dari representasi grup yang dalam penelitian ini representasi diperoleh dengan menggunakan tabloid Young.

2.8 Penentuan Karakter Grup Simetri

Analisis penentuan karakter grup simetri Sym_n dalam penelitian ini adalah menganalisis langkah-langkah menentukan tabel karakter grup simetri Sym_n dengan menggunakan tabloid Young. Seperti halnya dalam *lecture note* dari Universitas Minnesota Amerika Serikat (2006) ditunjukan proses mendapatkan tabel karakter dari grup simetri menggunakan tabloid Young, hanya saja dalam catatan tersebut masih belum detail bagaimana proses satu ke proses lainnya hingga mendapatkan hasil akhir sebuah tabel karakter dari grup simetri. Berikut adalah hasil tabel karakter Sym_4 dalam *lecture note* dari Universitas Minnesota Amerika Serikat (2006),

Tabel 2.2 Tabel Karakter Sym_4

	1,1,1,1	**2,1,1**	**2,2**	**3,1**	**4**
$\boldsymbol{\sigma_4}$	1	1	1	1	1
$\boldsymbol{\sigma_{3,1}}$	4	2	0	1	0
$\boldsymbol{\sigma_{2,2}}$	16	2	2	0	0
$\boldsymbol{\sigma_{2,1,1}}$	12	2	0	0	0
$\boldsymbol{\sigma_{1,1,1,1}}$	24	0	0	0	0

Karakter grup simetri dalam penelitian ini ditunjukan dengan banyaknya tabloid Young yang di-*fix*-kan oleh setiap jenis *cycle* anggota-anggota grup simetri.

Tabel karakter grup simetri di atas merupakan pemetaan himpunan tabloid ke bilangan cacah.

2.9 Kajian Keislaman

Dalam Al Qur’an terdapat petunjuk bagaimana manusia memperoleh ilmu pengetahuan. Ditemukan banyak ayat yang memberi isyarat kebenaran ilmu pengetahuan dan hakikat ilmu pengetahuan. Ilmu pengetahuan dalam Al Qur’an dapat diperoleh secara langsung sebagaimana Allah memberikan ilmu pengetahuan kepada para nabi dan rasul, sedangkan untuk yang bukan nabi dan rasul dapat diperoleh melalui proses pembelajaran aktualisasi potensi dan *qalbu* serta indera yang telah Allah anugerahkan kepada manusia, dan ketika seseorang yang berilmu mempelajari Al Qur’an, sudah seharusnya seseorang tersebut semakin bertambah keimanan ketakwaannya kepada Allah (Azzahra, 2021). Al Qur’an juga mengingatkan pembacanya melalui redaksional *ta’qilun* karena manusia sering lalai dan tidak mau merenung. Pengetahuan yang terdapat dalam Al Qur’an juga tidak hanya ilmu agama saja, di sisi lain ada 800 ayat kauniyah yang berisi tentang alam semesta, dalam hal ini bisa disebut sebagai ilmu fisika, astronomi, biologi, kimia, matematika, dan lain-lain (Purwanto, 2012).

Matematika adalah salah satu ilmu pengetahuan yang terdapat dalam Al Qur’an, alam semesta, dan fenomena-fenomena alam yang hanya dapat diketahui oleh orang-orang yang berpikir dan memahami arti kebesaran Tuhan. Alam semesta pada dasarnya memuat berbagi bentuk dan konsep matematika. Alam semesta dan segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran secara cermat dan teliti, menggunakan perhitungan-perhitungan yang sesuai, dengan rumus-rumus persamaan yang seimbang dan rapi (Abdussakir, 2009b). Allah berfirman dalam Al Qur'an surat al-Furqan ayat 2.

الَّذِيْ لَه مُلْكُ السَّمٰوٰتِ وَالْاَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَّلَمْ يَكُنْ لَّه شَرِيْكٌ فِى الْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَّرَه تَقْدِيْرًا (الفرقان: ٢)

"Yang memiliki kerajaan langit dan bumi, tidak mempunyai anak, tidak ada sekutu bagi-Nya dalam kekuasaan(-Nya), dan Dia menciptakan segala sesuatu, lalu menetapkan ukuran-ukurannya dengan tepat." (QS. al-Furqan:2)

Berdasarkan pada tafsir Ibnu Katsir dijelaskan *"Telah menciptakan segala sesuatu dan menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya."*. Arti dalam kalimat tersebut adalah segala sesuatu selain Dia adalah makhluk dan yang berada di bawah kekuasaan, aturan, tatanan, dan takdir-Nya. *"Dan Dia menetapkan ukuran-ukuran dengan serapi-rapinya,"* maknanya adalah Allah menetapkan segala sesuatu yang diciptakan-Nya sesuai dengan hikmah yang diinginkan-Nya, bukan berdasarkan nafsu dan kelalaian, melainkan segala sesuatu berjalan sesuai dengan ketentuan-Nya hingga hari kiamat dan setelah kiamat. Berdasarkan tafsir Al Muyassar dijelaskan *"Kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi. Dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu bagi-Nya dalam kekuasaan-Nya. Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukuran sesuai dengan makhluk-Nya. Kesesuaian yang mendatangkan hikmah-Nya tanpa ada kekurangan dan cacat (*وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَّرَه تَقْدِيْرًا*)"*, berdasarkan tafsir Jalalain dijelaskan *"(Yang kepunyaan-Nyalah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mmempunyai adan, dan tidak ada sekutu bagi-Nya dalam kekuasaan-Nya, dan Dia telah menciptakan segala sesuatu) karena hanya Dialah yang mampu menciptakan kesemuanya itu (dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya) secara tepat dan sempurna"*(Muslim, 2006). Matematika telah dan sengaja diciptakan untuk menuntun manusia agar berpikir dan memahami kebesaran-Nya. Berdasarkan ayat tersebut maka ditunjukan bahwa adanya rumus atau keteraturan pada segala ciptaan Allah tersebut masuk dalam kategori ilmu matematika (Nafisah, 2019).

Keteraturan alam semesta memiliki pola yang dapat diketahui dengan cara mengkaji dan meneliti mengenai kasus yang menghasilkan rumus atau persamaan matematis. Pemodelan matematika yang dilakukan manusia adalah representasi penjelasan terhadap alam semesta dengan mencari rumus dan pola suatu fenomena. Beberapa bukti diciptakan segala sesuatu dengan ukuran seperti pada wabah demam berdarah, malaria, dan tuberkolosis yang ternyata mempunyai aturan-aturan matematis (Abdussakir, 2009a).

Penelitian ini dilakukan dengan tujuan untuk menentukan karakter suatu grup simetri dengan menggunakan tablo Young dan juga untuk mendapatkan bentuk atau pola proses penentuan karakter grup simetri secara umum. Hasil akhir yang akan diperoleh dari penelitian ini bukan merupakan suatu hal yang baru, melainkan hasil dari pemikiran dan pengembangan ilmu pengetahuan yang sudah ada, sehingga lebih menambah keimanan terhadap Allah dan segala ciptaan-Nya.

2.10 Kajian Topik dengan Teori Pendukung

Analisis karakter grup simetri Sym_n dalam penelitian ini adalah menganalisis langkah-langkah menentukan karakter grup simetri Sym_4 dengan menggunakan tabloid Young. Seperti halnya dalam *lecture note* Universitas Minnesota Amerika Serikat (2006) ditunjukan proses mendapatkan tabel karakter dari grup simetri menggunakan tabloid Young, hanya saja dalam catatan tersebut masih belum detail bagaimana proses satu ke proses lainnya hingga mendapatkan hasil akhir sebuah tabel karakter dari grup simetri. Berikut adalah hasil tabel karakter Sym_4 dalam *lecture note* dari Universitas Minnesota Amerika Serikat (2006),

Tabel 2.3 Tabel Karakter Sym_4

	1,1,1,1	**2,1,1**	**2,2**	**3,1**	**4**
$\boldsymbol{\sigma_4}$	1	1	1	1	1
$\boldsymbol{\sigma_{3,1}}$	4	2	0	1	0
$\boldsymbol{\sigma_{2,2}}$	16	2	2	0	0
$\boldsymbol{\sigma_{2,1,1}}$	12	2	0	0	0
$\boldsymbol{\sigma_{1,1,1,1}}$	24	0	0	0	0

Baris pertama paling atas menunjukan kelas konjugasi berbeda dengan cara membuat daftar partisi; sedangkan kolom paling kiri menunjukan berbagai bentuk tabloid Young. Perhatikan bahwa penulisan kelas konjugasi dengan urutan meningkat dari kiri ke kanan, dan pada partisi mengecil dari atas ke bawah.

Terdapat beberapa catatan dalam mengkaji penyusunan tabel karakter dari grup simetri Sym_n. Pertama adalah menentukan partisi n elemen bilangan bulat dari grup permutasi Sym_n. Selanjutnya adalah menentukan diagram Young yang bersesuaian dengan bilangan bulat n dan berkorespondensi dengan partisi, lalu mengisi setiap kotak pada diagram Young dari λ dengan bilangan $1,2,\dots,n$, dengan syarat setiap bilangan dientrikan tepat satu kali hingga terbentuk tablo Young. Tabloid Young dari bentuk λ atau λ-tabloid Young digambarkan dengan tablo Young tanpa garis vertikal di setiap barisnya.

Setelah langkah-langkah dalam menentukan karakter grup simetri Sym_4 di dapatkan, berikutnya adalah menentukan karakter grup simetri Sym_n dengan n yang berbeda hingga diperoleh langkah umum menentukan karakter grup simetri

Sym_n menggunakan pola yang diperoleh dalam menentukan karakter grup simetri Sym_3 dan Sym_4.

BAB III
METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah kualitatif dengan pendekatan studi literatur. Studi literatur merupakan pendekatan dengan sistem mengumpulkan bahan pustaka dari jurnal, artikel, *lecture note* dan buku yang sesuai sebagai acuan. Sedangkan deskriptif kualitatif yaitu menjabarkan data analisis secara naratif. Pola pembahasannya dimulai dari hal-hal *general* menuju khusus. Dalam penelitian ini beracuan pada penentuan karakter grup simetri Sym_n dengan menggunakan tabloid Young.

3.2 Langkah-langkah Analisis

Berikut adalah langkah-langkah yang akan digunakan dalam membahas penelitian ini,

1. Mengkaji penentuan karakter dari grup Sym_3 dan Sym_4 yang sudah ada namun belum ada langkah-langkahnya, dengan :
   a. Menentukan partisi dari bilangan 3 dan 4.
   b. Menentukan diagram Young yang bersesuaian dengan partisi bilangan 3 dan 4.
   c. Menentukan tablo Young t yang berkorespondensi dengan partisi dari bentuk λ dengan mengisi setiap kotak pada diagram Young dari λ dengan bilangan $1,2,\ldots,n$, dengan syarat setiap bilangan dientrikan tepat satu kali.
   d. Menentukan tabloid Young dari bentuk λ atau λ-tabloid Young.

e. Mengkroscek langkah umum pada referensi dengan tabel karakter yang didapatkan secara manual.

f. Menuliskan langkah-langkah secara detail dalam menentukan karakter grup simetri Sym_3 dan Sym_4.

2. Menuliskan langkah-langkah dalam menentukan tabel karakter grup Sym_n secara detail untuk sebarang n.

BAB IV
HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai analisis penentuan karakter grup simetri yang sudah ada dengan menggunakan tabloid Young dan langkah-langkah dalam menentukan karakter grup simetri Sym_n. Karakter dari Sym_n adalah banyaknya tabloid Young yang di-*fix*-kan (tabloid Young tidak berubah atau saling ekuivalen baris) setelah entrinya dipermutasikan sesuai dengan unsur dari Sym_n dengan melihat tipe *cycle*nya.

4.1 Karakter Grup Simetri Sym_3

Berikut adalah langkah-langkah dalam menentukan tabel karakter dari Sym_n. Perlu dilakukan beberapa langkah untuk mengetahui berapa banyak tabloid Young yang di-*fix*-kan oleh setiap jenis *cycle*. Berikut adalah langkah-langkah dalam menentukan karakter grup simetri Sym_3.

1. Menentukan baris atas dari tabel karakter yang menunjukan kelas konjugasi berbeda dengan cara membuat daftar partisi; untuk kolom paling kiri menunjukan berbagai bentuk tabloid Young. Perhatikan bahwa penulisan kelas konjugasi dengan urutan meningkat dari kiri ke kanan, dan pada partisi mengecil dari atas ke bawah.

Tabel 4.1 Penentuan Baris dan Kolom Pertama pada Tabel Karakter Sym_3

	1,1,1	**2,1**	**3**
$\boldsymbol{\sigma_3}$			
$\boldsymbol{\sigma_{2,1}}$			
$\boldsymbol{\sigma_{1,1,1}}$			

2. Menentukan banyak tabloid Young yang dapat **di-*fix*-kan** (banyak tabloid Young yang entri barisnya tidak berubah setelah dipermutasikan oleh setiap

jenis *cycle* (anggota grup simetri)). Jumlah tabloid Young yang ditentukan pertama kali adalah tabloid Young dari σ_3 yang bersesuaian dengan masing-masing partisi.

Tabel 4.2 Tabloid Young σ_3 yang di-*fix*-kan oleh Partisi (1,1,1), (2,1), dan (3).

No.	**Tipe *Cycle***	**Tabloid yang dari σ_3 yang di*fix*kan dengan masing-masing partisi**	**Banyak Tabloid**
1.	(1, 1, 1)	1 2 3	1
2.	(2,1)		1
	(1 2) (3)	1 2 3	
	(1 3) (2)	1 2 3	
	(2 3) (1)	1 2 3	
3.	(3)		1
	(1 2 3)	1 2 3	

Setelah banyak tabloid Young yang bersesuaian dengan partisi didapatkan, data tersebut diinputkan ke dalam tabel karakter untuk baris kedua pada kolom 2, 3, dan 4.

Tabel 4.3 Banyaknya λ-Tabloid (λ=(3)) Young yang di-*fix*-kan oleh Unsur Sym_3 dengan Tipe *Cycle* (1,1,1), (2,1), dan (3).

	1,1,1	**2,1**	**3**
$\boldsymbol{\sigma_3}$	1	1	1
$\boldsymbol{\sigma_{2,1}}$			
$\boldsymbol{\sigma_{1,1,1}}$			

3. Menentukan banyak tabloid Young dari $\boldsymbol{\sigma_{2,1}}$ yang bersesuaian dengan masing-masing partisi.

Tabel 4.4 Tabloid Young $\sigma_{2,1}$ yang di-*fix*-kan oleh Partisi (1,1,1), (2,1), dan (3).

<table>
<tr><th>No.</th><th>Tipe Cycle</th><th>Tabloid yang dari $\boldsymbol{\sigma_{2,1}}$ yang difixkan dengan masing-masing partisi</th><th>Banyak Tabloid</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>(1, 1, 1)</td><td>1 2
3

1 3
2

2 3
1</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="4">2.</td><td>(2,1)</td><td rowspan="2">1 2
3</td><td rowspan="4">1</td></tr>
<tr><td>(1 2) (3)</td></tr>
<tr><td>(1 3) (2)</td><td>1 3
2</td></tr>
<tr><td>(2 3) (1)</td><td></td></tr>
</table>

		2 3 1	
3.	(3) (1 2 3)	Tidak ada	0

Setelah banyak tabloid Young yang bersesuaian dengan partisi didapatkan, data tersebut di inputkan ke dalam tabel karakter.

Tabel 4.5 Banyaknya λ-Tabloid (λ=(3,1)) Young yang di-*fix*-kan oleh Unsur Sym_3 dengan Tipe *Cycle* (1,1,1), (2,1), dan (3).

	1,1,1	**2,1**	**3**
$\boldsymbol{\sigma_3}$	1	1	1
$\boldsymbol{\sigma_{2,1}}$	3	1	0
$\boldsymbol{\sigma_{1,1,1}}$			

4. Menentukan banyak tabloid Young dari $\boldsymbol{\sigma_{1,1,1}}$ yang bersesuaian dengan masing-masing partisi.

Tabel 4.6 Tabloid Young $\sigma_{1,1,1}$ yang di-*fix*-kan oleh Partisi (1,1,1), (2,1), dan (3).

<table>
<tr><th>No.</th><th>Tipe Cycle</th><th>Tabloid yang dari $\boldsymbol{\sigma_{1,1,1}}$ yang difixkan dengan masing-masing partisi</th><th>Banyak Tabloid</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>(1, 1, 1)</td><td>$\begin{array}{|c|}\hline 1\\ \hline 2\\ \hline 3\\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|}\hline 1\\ \hline 3\\ \hline 2\\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|}\hline 2\\ \hline 3\\ \hline 1\\ \hline\end{array}$
$\begin{array}{|c|}\hline 2\\ \hline 3\\ \hline 1\\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|}\hline 3\\ \hline 1\\ \hline 2\\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|}\hline 3\\ \hline 2\\ \hline 1\\ \hline\end{array}$</td><td>6</td></tr>
<tr><td rowspan="4">2.</td><td>(2,1)</td><td rowspan="2">Tidak ada</td><td rowspan="4">0</td></tr>
<tr><td>(1 2) (3)</td></tr>
<tr><td>(1 3) (2)</td><td>Tidak ada</td></tr>
<tr><td>(2 3) (1)</td><td>Tidak ada</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3.</td><td>(3)</td><td rowspan="2">Tidak ada</td><td rowspan="2">0</td></tr>
<tr><td>(1 2 3)</td></tr>
</table>

Setelah banyak tabloid Young yang bersesuaian dengan partisi didapatkan, data tersebut di inputkan ke dalam tabel karakter.

Tabel 4.7 Nilai Karakter dari Sym_3.

	1,1,1	**2,1**	**3**
$\boldsymbol{\sigma_3}$	1	1	1
$\boldsymbol{\sigma_{2,1}}$	3	1	0
$\boldsymbol{\sigma_{1,1,1}}$	6	0	0

4.2 Penentuan Karakter Grup Simetri Sym_4

Setelah memperoleh langkah-langkah dan karakter dari Sym_3 , berikut adalah karakter dari representasi permutasi dari Sym_4. Perlu dilakukan beberapa langkah untuk mengetahui berapa banyak tabloid Young yang di-*fix*-kan oleh setiap jenis *cycle*. Berikut adalah langkah-langkah dalam menentukan karakter grup simetri Sym_4.

1. Menentukan baris atas dari tabel karakter yang menunjukan kelas konjugasi berbeda dengan cara membuat daftar partisi; untuk kolom paling kiri menunjukan berbagai bentuk tabloid Young. Perhatikan bahwa penulisan kelas konjugasi dengan urutan meningkat dari kiri ke kanan, dan pada partisi mengecil dari atas ke bawah.

Tabel 4.8 Penentuan Baris dan Kolom Pertama pada Tabel Karakter Sym_4

	1,1,1,1	**2,1,1**	**2,2**	**3,1**	**4**
$\boldsymbol{\sigma_4}$					
$\boldsymbol{\sigma_{3,1}}$					
$\boldsymbol{\sigma_{2,2}}$					
$\boldsymbol{\sigma_{2,1,1}}$					
$\boldsymbol{\sigma_{1,1,1,1}}$					

2. Menentukan banyak tabloid Young yang dapat **di-*fix*-kan** (banyak tabloid Young yang entri barisnya tidak berubah setelah dipermutasikan oleh setiap jenis *cycle* (anggota grup simetri)). Banyaknya tabloid Young yang ditentukan pertama kali adalah tabloid Young dari σ_4 yang bersesuaian dengan masing-masing partisi.

Tabel 4.9 Tabloid Young σ_4 yang di-*fix*-kan oleh Partisi (1,1,1,1), (2,1,1), (2,2), (3,1), dan (4)

No.	Tipe *Cycle*	Tabloid yang dari σ_4 yang di*fix*kan dengan masing-masing partisi	Banyak Tabloid
1.	(1, 1, 1, 1)	1 2 3 4	1
2.	(2, 1, 1)		1
	(1 2) (3) (4)	1 2 3 4	
	(1 3) (2) (4)	1 2 3 4	
	(2 3) (1) (4)	1 2 3 4	
	(2 4) (1) (3)	1 2 3 4	
	(3 4) (1) (2)	1 2 3 4	
3.	(2,2)		1
	(1 2) (3 4)	1 2 3 4	

	(1 3) (2 4)	1 2 3 4	
	(2 3) (1 4)	1 2 3 4	
	(2 4) (1 3)	1 2 3 4	
	(3 4) (1 2)	1 2 3 4	
4.	(3,1)		1
	(1 2 3) (4)	1 2 3 4	
	(2 3 4) (1)	1 2 3 4	
	(1 3 4) (2)	1 2 3 4	

	(1 2 4) (3)	1 2 3 4	
5.	(4) (1 2 3 4)	1 2 3 4	1

Setelah banyak tabloid Young yang bersesuaian dengan partisi didapatkan, data tersebut diinputkan ke dalam tabel karakter untuk baris kedua pada kolom 2, 3, 4, 5, dan 6.

Tabel 4.10 Banyaknya λ-Tabloid (λ=(4)) Young yang di-*fix*-kan oleh Unsur Sym_4 dengan Tipe *Cycle* (1,1,1,1), (2,1,1), (2,2), (3,1), dan (4)

	1,1,1,1	**2,1,1**	**2,2**	**3,1**	**4**
$\boldsymbol{\sigma_4}$	1	1	1	1	1
$\boldsymbol{\sigma_{3,1}}$					
$\boldsymbol{\sigma_{2,2}}$					
$\boldsymbol{\sigma_{2,1,1}}$					
$\boldsymbol{\sigma_{1,1,1,1}}$					

3. Menentukan banyak tabloid Young dari $\boldsymbol{\sigma_{3,1}}$ yang bersesuaian dengan masing-masing partisi.

Tabel 4.11 Tabloid Young $\sigma_{3,1}$ yang di-*fix*-kan oleh Partisi (1,1,1,1), (2,1,1), (2,2), (3,1), dan (4)

No.	Tipe *Cycle*	Tabloid yang dari $\boldsymbol{\sigma_{3,1}}$ yang di*fix*kan dengan masing-masing partisi	Banyak Tabloid
1.	(1, 1, 1, 1)	$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & \end{array}$ $\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \end{array}$ $\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & \end{array}$ $\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & & \end{array}$	4
2.	(2, 1, 1)		2
	(1 2) (3) (4)	$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & \end{array}$ $\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \end{array}$	
	(1 3) (2) (4)	$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \end{array}$ $\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & \end{array}$	
	(2 3) (1) (4)		

		$\begin{array}{\|c c c\|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \multicolumn{1}{\|c\|}{4} \\ \cline{1-1}\end{array}$ $\begin{array}{\|c c c\|}\hline 2 & 3 & 4 \\ \hline \multicolumn{1}{\|c\|}{1} \\ \cline{1-1}\end{array}$	
	(2 4) (1) (3)	$\begin{array}{\|c c c\|}\hline 1 & 2 & 4 \\ \hline \multicolumn{1}{\|c\|}{3} \\ \cline{1-1}\end{array}$ $\begin{array}{\|c c c\|}\hline 2 & 3 & 4 \\ \hline \multicolumn{1}{\|c\|}{1} \\ \cline{1-1}\end{array}$	
	(3 4) (1) (2)	$\begin{array}{\|c c c\|}\hline 1 & 3 & 4 \\ \hline \multicolumn{1}{\|c\|}{2} \\ \cline{1-1}\end{array}$ $\begin{array}{\|c c c\|}\hline 2 & 3 & 4 \\ \hline \multicolumn{1}{\|c\|}{1} \\ \cline{1-1}\end{array}$	
3.	(2,2)		0
	(1 2) (3 4)	Tidak ada	
	(1 3) (2 4)	Tidak ada	
	(2 3) (1 4)	Tidak ada	
	(2 4) (1 3)	Tidak ada	
	(3 4) (1 2)	Tidak ada	
4.	(3,1)		1

	(1 2 3) (4)	1 2 3 4	
	(2 3 4) (1)	2 3 4 1	
	(1 3 4) (2)	1 3 4 2	
	(1 2 4) (3)	1 2 4 3	
5.	(4) (1 2 3 4)	Tidak ada	0

Setelah banyak tabloid Young yang bersesuaian dengan partisi didapatkan, data tersebut di inputkan ke dalam tabel karakter.

Tabel 4.12 Banyaknya λ-Tabloid (λ=(3, 1)) Young yang di-*fix*-kan oleh Unsur Sym_4 dengan Tipe *Cycle* (1,1,1,1), (2,1,1), (2,2), (3,1), dan (4)

	1,1,1,1	**2,1,1**	**2,2**	**3,1**	**4**
$\boldsymbol{\sigma_4}$	1	1	1	1	1
$\boldsymbol{\sigma_{3,1}}$	4	2	0	1	0
$\boldsymbol{\sigma_{2,2}}$					
$\boldsymbol{\sigma_{2,1,1}}$					
$\boldsymbol{\sigma_{1,1,1,1}}$					

4. Menentukan banyak tabloid Young dari $\boldsymbol{\sigma_{2,2}}$ yang bersesuaian dengan masing-masing partisi.

Tabel 4.13 Tabloid Young $\sigma_{2,2}$ yang di-*fix*-kan oleh Partisi (1,1,1,1), (2,1,1), (2,2), (3,1), dan (4)

No.	**Tipe *Cycle***	**Tabloid yang dari $\boldsymbol{\sigma_{2,2}}$ yang di*fix*kan dengan masing-masing partisi**	**Banyak Tabloid**
1.	(1, 1, 1, 1)	1 2 3 4 1 3 2 4 2 3 1 4 2 4 1 3 1 4 2 3 3 4 1 2	6
2.	(2, 1, 1) (1 2) (3) (4)	1 2 3 4 3 4 1 2	2

	(1 3) (2) (4)	$\begin{array}{\|cc\|}\hline 1 & 3\\ \hline 2 & 4\\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{\|cc\|}\hline 2 & 4\\ \hline 1 & 3\\ \hline\end{array}$	
	(2 3) (1) (4)	$\begin{array}{\|cc\|}\hline 2 & 3\\ \hline 1 & 4\\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{\|cc\|}\hline 1 & 4\\ \hline 2 & 3\\ \hline\end{array}$	
	(2 4) (1) (3)	$\begin{array}{\|cc\|}\hline 1 & 3\\ \hline 2 & 4\\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{\|cc\|}\hline 2 & 4\\ \hline 1 & 3\\ \hline\end{array}$	
	(3 4) (1) (2)	$\begin{array}{\|cc\|}\hline 1 & 2\\ \hline 3 & 4\\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{\|cc\|}\hline 3 & 4\\ \hline 1 & 2\\ \hline\end{array}$	
3.	(2,2)		2
	(1 2) (3 4)	$\begin{array}{\|cc\|}\hline 1 & 2\\ \hline 3 & 4\\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{\|cc\|}\hline 3 & 4\\ \hline 1 & 2\\ \hline\end{array}$	
	(1 3) (2 4)	$\begin{array}{\|cc\|}\hline 1 & 3\\ \hline 2 & 4\\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{\|cc\|}\hline 2 & 4\\ \hline 1 & 3\\ \hline\end{array}$	

	(2 3) (1 4)	$\begin{array}{\|cc\|}\hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{\|cc\|}\hline 1 & 4 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline\end{array}$	
	(2 4) (1 3)	$\begin{array}{\|cc\|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{\|cc\|}\hline 2 & 4 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline\end{array}$	
	(3 4) (1 2)	$\begin{array}{\|cc\|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{\|cc\|}\hline 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline\end{array}$	
4.	(3,1)		0
	(1 2 3) (4)	Tidak ada	
	(2 3 4) (1)	Tidak ada	
	(1 3 4) (2)	Tidak ada	
	(1 2 4) (3)	Tidak ada	
5.	(4)		0
	(1 2 3 4)	Tidak ada	

Setelah banyak tabloid Young yang bersesuaian dengan partisi didapatkan, data tersebut di inputkan ke dalam tabel karakter.

Tabel 4.14 Banyaknya λ-Tabloid (λ=(2, 2)) Young yang di-*fix*-kan oleh Unsur Sym_4 dengan Tipe *Cycle* (1,1,1,1), (2,1,1), (2,2), (3,1), dan (4)

	1,1,1,1	**2,1,1**	**2,2**	**3,1**	**4**
$\boldsymbol{\sigma_4}$	1	1	1	1	1
$\boldsymbol{\sigma_{3,1}}$	4	2	0	1	0
$\boldsymbol{\sigma_{2,2}}$	6	2	2	0	0
$\boldsymbol{\sigma_{2,1,1}}$					
$\boldsymbol{\sigma_{1,1,1,1}}$					

5. Menentukan banyak tabloid dari $\boldsymbol{\sigma_{2,1,1}}$ yang bersesuaian dengan masing-masing partisi.

Tabel 4.15 Tabloid Young $\sigma_{2,1,1}$ yang di-*fix*-kan oleh Partisi (1,1,1,1), (2,1,1), (2,2), (3,1), dan (4)

No.	**Tipe *Cycle***	**Tabloid yang dari $\boldsymbol{\sigma_{2,1,1}}$ yang di*fix*kan dengan masing-masing partisi**	**Banyak Tabloid**
1.	(1, 1, 1, 1)	1 2 3 4 1 3 2 4 2 4 1 3 3 4 1 2 1 4 3 2 2 3 4 1	12

		$\begin{ytableau} 1 & 4 \\ 2 \\ 3 \end{ytableau}$ $\begin{ytableau} 2 & 3 \\ 1 \\ 4 \end{ytableau}$ $\begin{ytableau} 1 & 2 \\ 4 \\ 3 \end{ytableau}$ $\begin{ytableau} 1 & 3 \\ 4 \\ 2 \end{ytableau}$ $\begin{ytableau} 2 & 4 \\ 3 \\ 1 \end{ytableau}$ $\begin{ytableau} 3 & 4 \\ 2 \\ 1 \end{ytableau}$	
2.	(2, 1, 1)		2
	(1 2) (3) (4)	$\begin{ytableau} 1 & 2 \\ 3 \\ 4 \end{ytableau}$ $\begin{ytableau} 1 & 2 \\ 4 \\ 3 \end{ytableau}$	
	(1 3) (2) (4)	$\begin{ytableau} 1 & 3 \\ 2 \\ 4 \end{ytableau}$ $\begin{ytableau} 1 & 3 \\ 4 \\ 2 \end{ytableau}$	
	(2 3) (1) (4)	$\begin{ytableau} 2 & 3 \\ 1 \\ 4 \end{ytableau}$ $\begin{ytableau} 2 & 3 \\ 4 \\ 1 \end{ytableau}$	

	(2 4) (1) (3)	2 4 1 3 2 4 3 1	
	(3 4) (1) (2)	3 4 1 2 3 4 2 1	
3.	(2,2)		0
	(1 2) (3 4)	Tidak ada	
	(1 3) (2 4)	Tidak ada	
	(2 3) (1 4)	Tidak ada	
	(2 4) (1 3)	Tidak ada	
	(3 4) (1 2)	Tidak ada	
4.	(3,1)		0
	(1 2 3) (4)	Tidak ada	
	(2 3 4) (1)	Tidak ada	
	(1 3 4) (2)	Tidak ada	
	(1 2 4) (3)	Tidak ada	
5.	(4)		0
	(1 2 3 4)	Tidak ada	

Setelah banyak tabloid Young yang bersesuaian dengan partisi didapatkan, data tersebut di inputkan ke dalam tabel karakter

Tabel 4.16 Banyaknya λ-Tabloid (λ=(2, 1, 1)) Young yang di-*fix*-kan oleh Unsur Sym_4 dengan Tipe *Cycle* (1,1,1,1), (2,1,1), (2,2), (3,1), dan (4)

	1,1,1,1	**2,1,1**	**2,2**	**3,1**	**4**
$\boldsymbol{\sigma_4}$	1	1	1	1	1
$\boldsymbol{\sigma_{3,1}}$	4	2	0	1	0
$\boldsymbol{\sigma_{2,2}}$	16	2	2	0	0
$\boldsymbol{\sigma_{2,1,1}}$	12	2	0	0	0
$\boldsymbol{\sigma_{1,1,1,1}}$					

6. Menentukan banyak tabloid dari $\boldsymbol{\sigma_{1,1,1,1}}$ yang bersesuaian dengan masing-masing partisi.

Tabel 4.17 Tabloid Young $\sigma_{1,1,1,1}$ yang di-*fix*-kan oleh Partisi (1,1,1,1), (2,1,1), (2,2), (3,1), dan (4)

No.	**Tipe *Cycle***	**Tabloid yang dari $\boldsymbol{\sigma_{1,1,1,1}}$ yang di*fix*kan dengan masing-masing partisi**	**Banyak Tabloid**
1.	(1, 1, 1, 1)	$\begin{array}{\|c\|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 3\\\hline 4\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{\|c\|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 4\\\hline 3\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{\|c\|}\hline 1\\\hline 3\\\hline 2\\\hline 4\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{\|c\|}\hline 2\\\hline 1\\\hline 3\\\hline 4\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{\|c\|}\hline 2\\\hline 1\\\hline 4\\\hline 3\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{\|c\|}\hline 2\\\hline 3\\\hline 1\\\hline 4\\\hline\end{array}$	12

		1 1 1 3 4 4 4 2 3 2 3 2 2 2 2 3 4 4 4 1 3 1 3 1	
2.	(2, 1, 1)		0
	(1 2) (3) (4)	Tidak ada	
	(1 3) (2) (4)	Tidak ada	
	(2 3) (1) (4)	Tidak ada	
	(2 4) (1) (3)	Tidak ada	
	(3 4) (1) (2)	Tidak ada	
3.	(2,2)		0
	(1 2) (3 4)	Tidak ada	
	(1 3) (2 4)	Tidak ada	
	(2 3) (1 4)	Tidak ada	
	(2 4) (1 3)	Tidak ada	
	(3 4) (1 2)	Tidak ada	
4.	(3,1)		0
	(1 2 3) (4)	Tidak ada	
	(2 3 4) (1)	Tidak ada	
	(1 3 4) (2)	Tidak ada	
	(1 2 4) (3)	Tidak ada	
5.	(4)		0
	(1 2 3 4)	Tidak ada	

Setelah banyak tabloid Young yang bersesuaian dengan partisi didapatkan, data tersebut di inputkan ke dalam tabel karakter

Tabel 4.18 Nilai Karakter dari Sym_4

	1,1,1,1	**2,1,1**	**2,2**	**3,1**	**4**
$\boldsymbol{\sigma_4}$	1	1	1	1	1
$\boldsymbol{\sigma_{3,1}}$	4	2	0	1	0
$\boldsymbol{\sigma_{2,2}}$	16	2	2	0	0
$\boldsymbol{\sigma_{2,1,1}}$	12	2	0	0	0
$\boldsymbol{\sigma_{1,1,1,1}}$	24	0	0	0	0

4.3 Karakter Grup Simetri Sym_n

Setelah menganalisis dan memperinci proses dalam mendapatkan karakter dari Sym_3 dan Sym_4 , maka dapat disimpulkan beberapa cara penentuan karakter grup simetri Sym_n,

1. Menentukan baris paling atas yang menunjukan kelas konjugasi berbeda dengan cara membuat daftar partisi; untuk kolom paling kiri menunjukan representasi berbeda yang didapatkan untuk berbagai bentuk tabloid Young. Perhatikan bahwa penulisan kelas konjugasi dengan urutan meningkat dari kiri ke kanan, dan pada partisi mengecil dari atas ke bawah.
2. Menentukan banyak tabloid Young yang dapat **di-*fix*-kan** (banyak tabloid Young yang entri barisnya tidak berubah setelah dipermutasikan oleh setiap jenis *cycle* (anggota grup simetri)).
3. Setelah banyak tabloid Young yang bersesuaian dengan partisi didapatkan, data tersebut di inputkan ke dalam tabel karakter.

4.4 Kajian Keislaman dengan Hasil Penelitian

Matematika adalah salah satu ilmu pengetahuan yang terdapat dalam Al Qur'an, alam semesta, dan fenomena-fenomena alam yang hanya dapat diketahui oleh orang-orang yang berpikir dan memahami arti kebesaran Tuhan. Alam semesta pada dasarnya memuat berbagi bentuk dan konsep matematika. Alam semesta dan segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran secara cermat dan teliti, menggunakan perhitungan-perhitungan yang sesuai, dengan rumus-rumus persamaan yang seimbang dan rapi (Abdussakir, 2009b). Berdasarkan tafsir Ibnu Katsir Al Qur'an surat al-Furqan ayat 2 ditunjukan bahwa adanya rumus atau keteraturan pada segala ciptaan Allah, dalam hal ini bisa dikatakan masuk dalam kategori ilmu matematika (Nafisah, 2019).

Keteraturan alam semesta memiliki pola yang dapat diketahui dengan cara mengkaji dan meneliti mengenai kasus yang menghasilkan rumus atau persamaan matematis. Pemodelan matematika yang dilakukan manusia adalah representasi penjelasan terhadap alam semesta dengan mencari rumus dan pola suatu fenomena. Beberapa bukti diciptakan segala sesuatu dengan ukuran seperti pada wabah demam berdarah, malaria, dan tuberkolosis yang ternyata mempunyai aturan-aturan matematis (Abdussakir, 2009a).

Penelitian ini dilakukan dengan tujuan untuk menentukan karakter suatu grup simetri dengan menggunakan tabloid Young dan juga untuk mendapatkan bentuk atau pola proses penentuan karakter grup simetri Sym_n secara umum. Untuk mendapatkan pola proses penentuan karakter grup simetri Sym_n secara umum diperlukan pengerjaan terlebih dahulu untuk $n \geq 1$ yang dalam penelitian ini menggunakan $n = 3$ dan $n = 4$. Setelah mengetahui berapa banyak tabloid Young yang di-*fix*-kan oleh setiap jenis *cycle*, menganalisis, dan memperinci proses dalam mendapatkan karakter dari Sym_3 dan Sym_4 , maka dapat disimpulkan beberapa cara penentuan karakter grup simetri Sym_n secara umum.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada Bab IV, maka dapat diambil kesimpulan bahwa penentuan karakter grup simetri Sym_n dapat menggunakan tabloid Young dengan langkah-langkah umum sebagai berikut,

1. Menentukan partisi n elemen bilangan bulat dari grup permutasi Sym_n.
2. Menentukan diagram Young yang berkorespondensi dengan partisi.
3. Menentukan tablo Young t yang berkorespondensi dengan partisi dari bentuk λ dengan mengisi setiap kotak pada diagram Young dari λ dengan bilangan $1,2,\ldots,n$, dengan syarat setiap bilangan dientrikan tepat satu kali.
4. Menentukan tabloid Young dari bentuk λ atau λ-tabloid Young yang digambarkan dengan tablo Young tanpa garis vertikal di setiap barisnya.
5. Menghitung banyak tabloid Young yang dapat dapat **di-*fix*-kan** (banyak tabloid Young yang entri barisnya tidak berubah setelah dipermutasikan oleh setiap jenis *cycle* (anggota grup simetri)).
6. Setelah banyak tabloid Young yang bersesuaian dengan partisi didapatkan, data nilai karakter tersebut di inputkan ke dalam tabel karakter.

Tabel 5. 1 Ilustrasi Tabel Karakter dari Sym_n

<table>
<tr><td></td><td colspan="3">Tipe
Cycle</td></tr>
<tr><td rowspan="3">TabloYoung dari bentuk λ</td><td>Nilai karakter</td><td>Nilai karakter</td><td>Nilai Karakter</td></tr>
<tr><td>Nilai karakter</td><td>Nilai karakter</td><td>Nilai karakter</td></tr>
<tr><td>Nilai karakter</td><td>Nilai karakter</td><td>Nilai karakter</td></tr>
</table>

5.2 Saran untuk Penelitian Lanjutan

Pada skripsi ini, penulis hanya fokus pada analisis langkah-langkah penentuan karakter grup simetri Sym_n yang sudah ada dengan menggunakan tabloid Young. Untuk penelitian selanjutnya, penulis menyarankan mengkaji masalah implementasi karakter grup simetri dengan menggunakan tabloid Young, seperti identifikasi molekul pada bidang Kimia dan lain-lain.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. (2009a). Pentingnya Matematika dalam pemikiran Islam. *The Role of Sciences and Technology in Islamic Civilization"UIN Malang,* 1–16. http://repository.uin-malang.ac.id/1751/7/1751.pdf

Abdussakir. (2009b). Umat Islam Perlu Menguasai Matematika. *Konferensi Dan Seminar Nasional Matematika Islam I*, 1–10. http://sunankalijaga.org/prosiding/index.php/kiiis/article/view/388

Azzahra, N. S. (2021). *Matematika dalam Al-Qur'an*. Lembar Jum'at Al Rasikh Universitas Islam Indonesia. https://alrasikh.uii.ac.id/2021/11/19/matematika-dalam-al-quran/

Dummit, D. S., & Foote, R. M. (2010). Abstract Algebra. In *Science China Mathematics* (Vol. 53, Issue 12). https://doi.org/10.1007/s11425-010-4066-8

Gallian, J. (2016). Contemporary abstract algebra/Joseph A. Gallian. *Boston, MA.*

James, G., & Liebeck, M. (2003). *Representations and Characters of Groups* (second). Cambridge University Press.

Jamilia, Y. H. (2008). *Cayley color graph dari grup simetri dan grup dihedral* [UIN Maulana Malik Ibrahim Malang]. http://etheses.uin-malang.ac.id/4441/1/04510020.pdf/

June, M., & Fran, F. (2018). *Karakter representasi Sn*. *07*(1), 33–40.

Muslim, R. (2006). *Tafsir Quran Surah Al Furqaan 25:2*. Risalah Muslim. https://risalahmuslim.id/quran/al-furqaan/25-2/

Nafisah, D. (2019). Spektrum Graf Subgraf dari Grup Simetri. In *Etheses UIN Malang*.

Nisfulaila, I. (2014). *Representasi Grup Simetri Via Tablo Young dan Analisa Penggunaannya dalam Menentukan Polinom Kromatik Graf Gelang(Bracelet Graph)*. Institut Teknologi Bandung.

Purwanto, A. (2012). *Nalar Ayat-ayat Semesta*. Penerbit Mizan.

Ruatakurey, M., Montolalu, C. E. J. C., & Mananohas, M. L. (2019). *Kelas Konjugat Pada Grup Simetri Sn,(n=3,4,5,6) dan Grup Dihedral Dn(n=3,12,60,360)*. 0–5.

Wildon, M. (2007). Representation theory of the symmetric group. *Lecture Notes in Mathematics*, *830*(October), 53–70. https://doi.org/10.1007/978-3-540-46959-9_6

Zhao, Y. (2009). Young Tableaux and the Representations of the Symmetric Group. *Harvard College Mathematics Review*, *2*(2), 33–45.

RIWAYAT HIDUP

Aula Zahrotin Magfiroh, lahir di Ngawi, 17 Juni 2000. Tinggal di Sukowiyono 5, Kecamatan Padas, Kabupaten Ngawi. Anak tunggal dari pasangan Bapak Jasmin dan Ibu Winarti. Pendidikan dasar ditempuh di SDN Sukowiyono 4 dan lulus pada tahun 2012, pendidikan menengah pertama di MTs Salafiyah Syafi'iyah Tebuireng Jombang dan lulus pada tahun 2015, pendidikan menengah atas di SMA Trensains Tebuireng Jombang dan lulus pada tahun 2018. Selanjutnya menempuh pendidikan perguruan tinggi di program studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada tahun 2018 melalui jalur SBMPTN. Selama menempuh pendidikan S1, penulis aktif di HMJ Integral Matematika UIN Malang (2019), UPKM JDFI Kaligrafi (2018-2019), Komunitas perempuanbergerak (2020-2021), *Mathematics English Club* (2018-2021), Komunitas gubuktulis Malang (2019-2022), Komunitas *peaceleader* Indonesia (2019-2022) dan UKM Persatuan Catur Unior UIN Malang (2018-2022). Penulis dapat dihubungi melalui Email: aulazahrotin17@gmail.com.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Aula Zahrotin Magfiroh
NIM : 18610038
Fakultas / Program Studi : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Penentuan Karakter Grup Simetri Sym_n Menggunakan Tabloid Young
Pembimbing I : Intan Nisfulaila, M. Si
Pembimbing II : Erna Herawati, M. Pd

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	5 April 2022	Konsultasi Bab I	1.
2.	17 Mei 2022	Konsultasi Revisi Bab I	2.
3.	20 Juni 2022	Konsultasi Bab II dan III	3.
4.	7 Juli 2022	Konsultasi Revisi Bab II dan III	4.
5.	14 Juli 2022	Konsultasi Kajian Keislaman	5.
6.	18 Juli 2022	Konsultasi Revisi Kajian Keislaman	6.
7.	21 Juli 2022	ACC Seminar Proposal	7.
8.	27 September 2022	Konsultasi Bab IV dan V	8.
9.	2 Oktober 2022	Konsultasi Revisi Bab IV dan V	9.
10.	12 Oktober 2022	Konsultasi Kajian Keislaman	10.
11.	31 Oktober 2022	ACC Seminar Hasil	11.
12.	17 November 2022	Konsultasi Revisi Kajian Keislaman	12.
13.	22 November 2022	ACC Matriks Revisi Seminar Hasil	13.
14.	13 Desember 2022	ACC Sidang Skripsi	14.

Malang, 13 Desember 2022
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

KEMENTERIAN AGAMA REPUBLIK INDONESIA FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI JURUSAN MATEMATIKA

Dr. Elly Susanti, M. Sc
NIP. 19741129 200012 2 005