ELEMEN ENGEL KIRI DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

OLEH:
ILFI NUR DIANA
NIM. 18610002

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022

ELEMEN ENGEL KIRI DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Ilfi Nur Diana
NIM. 18610002

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022

ELEMEN ENGEL KIRI DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh
Ilfi Nur Diana
NIM. 18610002

Telah Disetujui untuk Diuji

Malang, 23 November 2022

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si, P.hD	Juhari, M.Si
NIP. 19571005 198203 1 006	NIDT. 19840209 20160801 1 055

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

ELEMEN ENGEL KIRI DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh
Ilfi Nur Diana
NIM. 18610002

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 01 Desember 2022

Ketua Penguji	: Evawati Alisah, M.Pd	....
Anggota Penguji 1	: Intan Nisfulaila, M.Si	....
Anggota Penguji 2	: Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si, P.hD	....
Anggota Penguji 3	: Juhari, M.Si	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama	: Ilfi Nur Diana
NIM	: 18610002
Program Studi	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Elemen Engel Kiri dari Grup Dihedral

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perilaku tersebut.

Malang, 08 November 2022
Yang membuat pernyataan,

Ilfi Nur Diana
NIM. 18610002

MOTO

"Tetap SEMANGAT dan Jangan Lupa REBAHAN"

Tetap SEMANGAT dalam berusaha dan berdo'a serta jangan lupa untuk REBAHAN karena kamu butuh istirahat agar tubuh dan pikiranmu kembali segar.

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Kedua orang tua tercinta, Bapak Mustakim dan Ibu Masluchah yang senantisa memberikan nasihat, dukungan, dan do'a yang tulus bagi penulis.

Kakak penulis Suryani Husna yang senantiasa memberikan motivasi, dukungan, dan do'a bagi penulis.

Keponakan penulis Aim yang memberikan semangat bagi penulis dengan tingkahnya yang sangat aktif.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat, taufiq, hidayah, dan rahmat-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Elemen Engel Kiri dari Grup Dihrdral". Sholawat dan salam selalu senantiasa dihaturkan kepada Nabi kita tercinta Nabi Muhammad SAW. Beliau telah membawa kita dari zaman jahiliah (kebodohan) menuju zaman cerahnya agama islam. Semoga senantiasa kita mendapat syafaatnya di akhirat kelak.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah memberikan do'a, dukungan, bimbingan, dan arahan dalam penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd, M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D, selaku dosen pembimbing I sekaligus dosen wali yang yang senantiasa memberikan bimbingan, arahan, dan masukan kepada penulis.
5. Juhari M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, nasihat, dan ilmunya kepada penulis.

6. Evawati Alisah, M.Pd selaku ketua penguji yang telah memberikan arahan serta ilmu kepada penulis.
7. Seluruh sivitas akademika Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan arahan, khususnya dosen yang telah memberikan banyak ilmu yang berharga kepada penulis.
8. Bapak Mustakim dan Ibu Masluchah selaku orang tua penulis yang selalu memberikan dukungan, do’a, dan semangat kepada penulis.
9. Seluruh teman-teman dari Program Studi Matematika angkatan 2018 dan teman-teman Pramuka UIN Malang yang telah memberikan pengalaman berharga kepada penulis.
10. Semua pihak yang tidak bisa disebutkan satu-persatu, yang telah banyak membantu dalam proses penyelesaian skripsi ini.

Semoga Allah SWT meridhoi segala hal baik yang telah diberikan pada penulis. Penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat baik bagi penulis maupun berbagai pihak untuk menambah wawasan keilmuan.

Wassalamu’alaikum Wr. Wb

Malang, 01 Desember 2022

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Diana, Ilfi Nur. 2022. **Elemen Engel Kiri dari Grup Dihedral.** Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si, P.hD. (II) Juhari, M.Si.

Kata Kunci: Grup Dihedral, Komutator, Komutator Bernorma, Elemen Engel Kiri.

Diberikan G adalah suatu grup. Suatu elemen a di G disebut elemen Engel kiri dari G jika untuk setiap g di G terdapat bilangan bulat tak negatif m sehingga komutator m-bernorma dari g dan a membentuk elemen identitas. Jika terdapat bilangan bulat positif m sehingga komutator m-bernorma dari g dan a merupakan elemen identitas untuk setiap g di $G,$ maka a disebut elemen m-Engel kiri. Misalkan n adalah bilangan bulat positif dan n lebih besar sama dengan 3, grup dihedral-$2n$ merupakan himpunan yang terdiri dari perpangkatan r dan hasil kali s dengan perpangkatan r. Grup dihedral merupakan grup non-abelian. Tujuan dari penelitian ini yaitu untuk menentukan bentuk umum elemen Engel kiri dari grup dihedral-$2n$. Langkah-langkah untuk menentukan elemen Engel kiri dari grup dihedral-$2n$ secara umum adalah: pertama, menentukan elemen-elemen Engel kiri dari grup dihedral-$2n$ dengan n = 3, 4, …, 20, 24, …, 40. Selanjutnya, membuat dugaan bentuk elemen-elemen m-Engel kiri dari grup dihedral-$2n$. Kemudian, membuktikan dugaan bentuk elemen-elemen Engel kiri dari grup dihedral-$2n$. Untuk n ganjil diperoleh elemen-elemen Engel kiri dari grup dihedral-$2n$ adalah semua perpangkatan dari r. Untuk n genap yang bukan perpangkatan 2 diperoleh elemen-elemen Engel kiri dari grup dihedral-$2n$ adalah semua perpangkatan dari r. Untuk n perpangkatan 2 diperoleh elemen-elemen Engel kiri dari grup dihedral-$2n$ adalah semua unsur dari grup dihedral-$2n$.

ABSTRACT

Diana, Ilfi Nur. 2022. **Left Engel Elemen of Dihedral Group.** Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Supervisor: (I) Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si, P.hD. (II) Juhari, M.Si.

Keywords: Dihedral Group, Commutator, Normed Commutator, Left Engel Element.

Let G be a group. An element a in G is called a left Engel element of G whenever for every element g in G there exists a non-negative integer m such that the m-normed commutator of g and a form identity element. If there exists a positive integer m such that the m-normed commutator of g and a is an identity element for each g in G, then a is called the left m-Engel element of G. Let n be a positive integer, and n is greater than 3, then the $2n$-dihedral group is a set consisting of powers of r and the product of s with powers of r. Dihedral group is a non abelian group. The aim of this research is to determine the general form of the left Engel elements of $2n$-dihedral group. The steps to determine the left Engel elements of $2n$-dihedral group are: first, determine the left Engel elements of $2n$-dihedral group with $n = 3, 4, \dots, 20, 24, \dots, 40$. Next, make predictions about the form of the left m-Engel elements of $2n$-dihedral group. Then, prove the conjecture of the form of the left Engel elements of $2n$-dihedral group. For odd n, it is found that the left Engel elements of $2n$-dihedral group are all powers of r. For n even which is not raised to the power of 2, it is found that the left Engel elements of $2n$-dihedral group are all powers of r. For n powers of 2, it is found that the left Engel elements of $2n$-dihedral group are all elements of $2n$-dihedral group.

مستخلص البحث

ديانا, الفي نور. ٢٠٢٢. **عنصر الملاك الأيسر من مجموعة ثنائية السطوح**. البحث الجامعي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج.
المشرف الأول: البروفيسور, الدكتور, تورمذي, الماجستير ، والمشرف الثاني: جوهري, الماجستير.

الكلمات المفتاحية: مجموعة ثنائية السطوح، المحول، المحول المعياري، عنصر الملاك الأيسر.

المثال G هى مجموعة. ويسمى عنصر a في G بعنصر الملاك الأيسر من G إذا كان لكل g في G عدد صحيح غير سالب m بحيث يكون المحول m-المعياري من g وa فيشكلان عنصر الهوية. وإذا كان هناك عدد صحيح موجب m بحيث يكون المحول m- المعياري من g وa وهو من عنصر الهوية لكل g في G، فعندئذٍ تسمى a بعنصر m- الملاك الأيسر. على سبيل المثال، n هي عدد صحيح موجب وأكبر يساوي ٣، فإن المجموعة ثنائية السطوح $2n$- هي مجموعة تتكون من قوى r ومنتجات s بقوى r. والمجموعة ثنائية السطوح هي مجموعة غير بليانية. والهدف من هذا البحث لتعيين الشكل العام لعنصر الملاك الأيسر من المجموعة ثنائية السطوح $2n$-. وأما الخطوات لتعيين عنصر الملاك الأيسر من المجموعة ثنائية السطوح$2n$- بشكل عام فهي: أولاً، تعيين عنصر الملاك الأيسر من المجموعة ثنائية السطوح $2n$- ب $n = 3$، 4، ...، 20، 24، ...، 40. وبعد ذلك، قم بجعل تنبؤ عن شكل عناصر m- الملاك الأيسر من المجموعة ثنائية السطوح $2n$- ثم إثبات تنبؤ شكل عناصر الملاك الأيسر من المجموعة ثنائية السطوح $2n$- . فتنال ل n الوتري عناصر الملاك الأيسر من المجموعة ثنائية السطوح $2n$- هي من كل قوى r. وأما لn الشفعي التي ليست من قوى ٢ تنال عناصر الملاك الأيسر من المجموعة ثنائية السطوح $2n$- فهي كل قوى r . وأما لn للقوي ٢ تنال عناصر الملاك الأيسر من المجموعة ثنائية السطوح $2n$- فهي كل العنصر من المجموعة ثنائية السطوح.

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ilmu pengetahuan sudah mengalami perkembangan secara pesat sejak zaman rasulullah. Hal tersebut sesuai dengan ajaran Islam yang mengajarkan pentingnya menuntut ilmu. Sebagaimana firman Allah SWT dalam Al-Qur'an dalam surat Al-Baqarah ayat 266.

Artinya: *"Apakah salah seorang di antaramu yang ingin mempunyai kebun kurma dan anggur yang mengalir di bawahnya sungai-sungai; dia mempunyai dalam kebun itu segala macam buah-buahan, kemudian datanglah masa tua pada orang itu sedang dia mempunyai keturunan yang masih kecil-kecil. Maka kebun itu ditiup angin keras yang mengandung api, lalu terbakarlah, dengan demikianlah Allah menerangkan ayat-ayat-Nya kepada kamu supaya kamu memikirkannya."*

Ayat di atas memerintahkan untuk menuntut ilmu dan berpikir. Menurut tafsir Ibnu Katsir, penggalan ayat "Demikianlah Allah menerangkan ayat-ayat-Nya kepada kamu supaya kamu memikirkannya" maksudnya adalah mengambil pelajaran dan memahami perumpamaan serta maknanya dan mengambil tujuan dari perumpamaan itu (Abdullah, 2005). Dalam Islam menuntut ilmu merupakan suatu kewajiban bagi setiap muslim (Khasanah, 2021). Salah satu cabang ilmu pengetahuan yaitu matematika.

Himpunan tak-kosong G yang disertai suatu operasi biner $*$, disebut grup terhadap operasi biner $*$ jika memenuhi empat sifat yaitu tertutup, asosiatif, memiliki suatu elemen identitas, dan setiap elemen di G memiliki invers. Himpunan semua bilangan bulat terhadap operasi penjumlahan yang dinotasikan dengan $(\mathbb{Z}, +)$ dan himpunan semua bilangan riil terhadap operasi penjumlahan yang dinotasikan dengan $(\mathbb{R}, +)$ merupakan grup. Adapun himpunan bilangan riil positif yang dilengkapi operasi penjumlahan yang dinotasikan dengan $(\mathbb{R}^+, +)$ bukan merupakan grup. Lebih jauh, jika G memiliki sifat komutatif maka G disebut grup abelian. Himpunan bilangan riil positif terhadap operasi perkalian yang dinotasikan dengan $(\mathbb{R}^+,\times)$ merupakan grup abelian (Gilbert & Gilbert, 2013).

Salah satu grup yang menarik dan cukup sering dibahas adalah grup dihedral. Misalkan $n \in \mathbb{Z}^+$ dan $n \geq 3$, grup dihedral-$2n$ merupakan himpunan semua simetri yang diperoleh dari hasil rotasi (perputaran) dan refleksi (pencerminan) dari segi-n beraturan dengan operasi komposisi " $\circ$ ". Grup dihedral-$2n$ dengan operasi komposisi yang dinotasikan dengan $(D_{2n},\circ)$ merupakan grup non-abelian karena terdapat beberapa unsur yang tidak komutatif terhadap operasi komposisi. Penelitian mengenai grup dihedral telah dilakukan oleh Rahma (2011) yang membahas mengenai pola subgrup, *centralizer*, *center*, dan *normalizer* dari grup dihedral-$2n$ $(D_{2n},\circ)$. Kemudian penelitian yang dilakukan oleh Syarifudin dan Wardhana (2019) membahas mengenai subgrup nontrivial dari grup dihedral $(D_{2n},\circ)$.

Diberikan suatu grup G. Komutator dari dua elemen x, y di G yang dinotasikan dengan $[x, y]$ merupakan hasil operasi dua elemen dengan masing-masing inversnya yaitu $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$. Jika dua elemen di G bersifat komutatif maka komutatornya adalah elemen identitas (Dummit & Foote, 2004). Penelitian mengenai komutator dari grup dihedral salah satunya telah dilakukan oleh Muhsin (2014). Dalam penelitian tersebut dibahas mengenai pola komutator dari grup dihedral-$2n$ $(D_{2n},\circ)$.

Konsep komutator telah diperumum menjadi komutator bernorma. Misalkan G adalah grup, $x, y \in G$, dan m bilangan tak-negatif, maka komutator bernorma $[x,_m y] = [x, y, \dots, y]$ dengan y berulang sebanyak m didefinisikan secara rekursif dengan $[x,_0 y] = x$, $[x,_1 y] = [x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$, dan $[x,_m y] = \big[[x,_{m-1} y], y\big]$. Suatu elemen $a \in G$ disebut elemen Engel kiri jika untuk setiap $g \in G$ terdapat bilangan bulat tak-negatif m sehingga berlaku $[g,_m a] = 1$. Dengan cara yang serupa dapat ditentukan definisi dari elemen Engel kanan. Elemen $a \in G$ disebut elemen Engel kanan jika untuk setiap $g \in G$ terdapat bilangan bulat tak-negatif m sehingga berlaku $[a,_m g] = 1$. Lebih lanjut, untuk suatu bilangan bulat positif k, elemen a disebut elemen k-Engel kiri jika berlaku $[g,_k a] = 1$ dan a disebut elemen k-Engel kanan jika berlaku $[a,_k g] = 1$ (Abdollahi, 2011). Konsep mengenai elemen Engel dari suatu grup berbeda dengan konsep ideal dari suatu ring. Subset dari suatu ring disebut ideal apabila memenuhi definisi ideal kiri dan ideal kanan (Dummit & Foote, 2004). Untuk menentukan elemen Engel dari suatu grup tidak perlu mencari elemen Engel kiri dan elemen Engel kanan karena elemen Engel kiri dan elemen Engel kanan memiliki definisi tersendiri. Oleh karena itu, pada penelitian ini hanya menentukan elemen Engel kiri dari grup dihedral.

Elemen Engel merupakan salah satu topik dari bidang aljabar abstrak. Di sisi lain, elemen Engel dapat diaplikasikan dalam bidang kriptografi. Penelitian yang dilakukan oleh Kahrobaei dan Noce (2020) membahas mengenai pengaplikasian elemen Engel dalam bidang kriptografi, khususnya tentang *key exchanges*, *digital signature systems,* dan *secret sharing schemes*.

Kajian tentang grup dihedral telah banyak dilakukan, khususnya penelitian mengenai subgrup, *centralizer, center, normalizer,* dan komutator. Namun, penelitian mengenai elemen Engel dari grup dihedral belum dilakukan pada penelitian-penelitian sebelumya. Disamping itu, grup dihedral merupakan grup non-abelian sehingga untuk menentukan elemen Engel dari grup non-abelian harus dilakukan perhitungan lebih lanjut mengenai komutator bernorma dari grup tersebut. Berbeda dengan grup abelian, komutator dari grup abelian merupakan elemen identitas dari grup tersebut sehingga dapat ditentukan dengan mudah elemen Engel dari grup abelian. Oleh karena itu, peneliti tertarik untuk melakukan penelitian mengenai elemen Engel dari grup dihedral.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan di atas, maka rumusan masalah dari penelitian ini adalah apa bentuk umum elemen-elemen Engel kiri dari grup dihedral?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah dipaparkan di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui langkah-langkah menentukan elemen Engel kiri dari grup dihedral.

1.4 Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat bagi:

1. Peneliti

   Peneliti memperoleh tambahan pengetahuan tentang aljabar abstrak, khususnya mengenai elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{2n}.

2 Lembaga

Bagi lembaga dapat dijadikan sebagai tambahan pustaka untuk mengembangkan penelitian selanjutnya mengenai elemen Engel dari grup non-abelian.

3 Pembaca

Pembaca memperoleh pengetahuan tambahan mengenai salah satu disiplin ilmu matematika, yaitu bidang aljabar abstrak, khususnya tentang elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{2n}.

1.5 Definisi Istilah

Penelitian ini menggunakan beberapa istilah matematika. Definisi dari istilah yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Grup Dihedral

   Grup dihedral merupakan grup simetri dari poligon beraturan yang terdiri dari unsur rotasi dan unsur refleksi.

2. Komutator

   Komutator merupakan hasil operasi dua elemen pada grup dengan masing-masing inversnya.

3. Elemen Engel

   Elemen Engel merupakan unsur dari suatu grup yang setiap pasang komutator bernormanya merupakan unsur identitas.

BAB II
KAJIAN TEORI

Topik yang akan bahas pada penelitian ini adalah bentuk umum elemen Engel dari grup dihedral. Sebelum menentukan elemen Engel dari grup dihedral, perlu adalanya pembahasan terlebih dahulu tentang operasi biner, grup, grup abelian, grup dihedral, komutator, dan elemen Engel.

2.1 Teori Pendukung

2.1.1 Operasi Biner

Sebelum membahas mengenai grup, perlu adanya penjelasan mengenai operasi biner. Berikut ini akan dibahas mengenai definisi dan sifat dari operasi biner.

Definisi 2.1.1 (Gilbert & Gilbert, 2013) Operasi biner pada himpunan tak-kosong A adalah suatu pemetaan dari $A \times A$ ke A.

Contoh 2.1.2 Diberikan suatu operasi biner $*$ pada $\mathbb{Z}$ yang didefinisikan oleh $a * b = a + b - 2$, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$. Aturan $*$ merupakan operasi karena untuk $a, b \in \mathbb{Z}$ berlaku $a + b - 2 \in \mathbb{Z}$ tunggal.

Operasi biner bersifat komutatif apabila hasil pertukaran dua unsur terhadap operasi biner hasilnya sama. Untuk melakukan perhitungan tiga unsur yang dikenakan operasi biner dapat mengelompokkan dua unsur dengan tanda kurung dan melalukan perhitungan terhadap unsur pada tanda kurung terlebih dahulu. Apabila pengelompokan ditukarkan dan hasilnya sama maka operasi biner bersifat asosiatif.

Definisi 2.1.3 (Gilbert & Gilbert, 2013) Misalkan $*$ adalah operasi biner pada himpunan tak-kosong A, maka $*$ dikatakan komutatif jika $x * y = y * x$, untuk setiap x dan y di A. Jika $x * (y * z) = (x * y) * z$, untuk setiap x, y, z di A, maka operasi biner $*$ dikatakan asosiatif.

Contoh 2.1.4 (Gilbert & Gilbert, 2013) Operasi biner $*$ pada $\mathbb{Z}$ yang didefinisikan sebagai $a * b = a + b - 2$, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ bersifat komutatif karena

$$\begin{aligned} a * b &= a + b - 2 \\ &= b + a - 2 \\ &= b * a \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa $*$ juga asosiatif karena

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= a * (b + c - 2) \\ &= a + (b + c - 2) - 2 \\ &= (a + b - 2) + c - 2 \\ &= (a * b) + c - 2 \\ &= (* b) * c \end{aligned}$$

Himpunan dikatakan tertutup terhadap suatu operasi apabila operasi tersebut diberlakukan pada himpunan tersebut maka hasilnya selalu merupakan anggota dari himpunan tersebut. Himpunan yang tertutup terhadap operasi biner dijelaskan pada Definisi 2.1.5.

Definisi 2.1.5 (Gilbert & Gilbert, 2013) Misalkan $*$ adalah operasi biner pada himpunan tak-kosong A, dan $B \subseteq A$. Jika $x * y$ adalah suatu elemen dari B untuk sebarang $x \in B$ dan $y \in B$, maka B dikatakan tertutup terhadap operasi biner $*$.

Contoh 2.1.6 Diberikan operasi penjumlahan dan perkalian pada himpunan $\mathbb{Z}$, dan misalkan $H = \{n^2 | n \in \mathbb{Z}^+\}$ maka $(H, +)$ tidak tertutup dan $(H, \times)$ tertutup.

Pembuktian:

Akan ditunjukkan $(H, +)$ tidak tertutup. Pilih $a, b \in H$ dengan $a = 2^2$ dan $b = 3^2$. Perhatikan bahwa

$$a + b = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$$

Karena $13 \notin H$ maka terbukti bahwa $(H, +)$ tidak tertutup.

Kemudian, akan ditunjukkan $(H, \times)$ tertutup. Ambil sebarang $a, b \in H$ maka $a = n^2$ untuk setiap $n \in \mathbb{Z}^+$ dan $b = m^2$ untuk setiap $m \in \mathbb{Z}^+$.

Perhatikan bahwa

$$a \times b = n^2 \times m^2 = (nm)^2$$

Karena $nm \in \mathbb{Z}^+$ maka $(nm)^2 \in H$. Dengan demikian, terbukti bahwa $(H, \times)$ tertutup.

Suatu himpunan memiliki elemen identitas terhadap operasi biner jika memenuhi Definisi 2.1.7 berikut

Definisi 2.1.7 (Gilbert & Gilbert, 2013) Misalkan $*$ adalah operasi biner pada himpunan tak-kosong A. Suatu elemen e di A disebut elemen identitas terhadap operasi biner $*$ jika memenuhi $e * x = x * e = x$, untuk setiap $x \in A$.

Contoh 2.1.8 Elemen $2 \in \mathbb{Z}$ merupakan elemen identitas terhadap operasi biner $*$ yang didefinisikan oleh

$$a * b = a + b - 2, (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},$$

karena

$$a * 2 = a + 2 - 2 = a$$

dan

$$2 * a = 2 + a - 2 = a$$

Invers dari suatu unsur pada himpunan yang disertai operasi biner dijelaskan pada definisi berikut

Definisi 2.1.9 (Gilbert & Gilbert, 2013) Misalkan e adalah elemen identitas terhadap operasi biner $*$ pada himpunan tak-kosong A dan $a \in A$. Jika terdapat $b \in A$ sehingga $a * b = e$, maka b disebut invers kanan dari a. Jika $c * a = e$, maka c disebut invers kiri dari a. Jika $a * b = e$ dan $c * a = e$ serta $b = c$, maka b disebut invers dari a, dan a disebut elemen di A yang *invertible*. Invers dari a dinotasikan dengan a^{-1}.

Contoh 2.1.10 Diberikan operasi biner $*$ yang didefinisikan oleh

$$a * b = a + b - 2, (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},$$

yang mana identitasnya adalah 2. Invers dari $\in \mathbb{Z}$ terhadap operasi $*$ adalah $-a + 4$ karena

$$a * (-a + 4) = a + (-a + 4) - 2 = a - a + 4 - 2 = 2$$

dan

$$(-a + 4) * a = (-a + 4) + a - 2 = -a + 4 + a - 2 = 2.$$

2.1.2 Grup

Grup adalah suatu himpunan tak-kosong yang disertai operasi biner dan memenuhi beberapa sifat tertentu. Sifat yang harus ada pada grup dijelaskan pada Definisi 2.1.11.

Definisi 2.1.11 (Gilbert & Gilbert, 2013) Diberikan G adalah suatu himpunan tak-kosong dengan operasi biner $*$. Maka G disebut grup dengan operasi biner $*$ dan dinotasikan $(G,*)$ jika memenuhi empat sifat yaitu:

1. G tertutup terhadap operasi $*$,
2. Operasi $*$ asosiatif,
3. G memiliki suatu elemen identitas terhadap operasi $*$,
4. Setiap unsur di G memilik invers terhadap operasi $*$.

Contoh 2.1.12 Beberapa contoh himpunan yang merupakan grup yaitu himpunan semua bilangan bulat terhadap operasi penjumlahan $(\mathbb{Z},+)$, himpunan semua bilangan rasional terhadap operasi penjumlahan $(\mathbb{Q},+)$, himpunan semua bilangan riil terhadap operasi penjumlahan $(\mathbb{R},+)$, dan himpunan semua bilangan kompleks terhadap operasi penjumlahan $(\mathbb{C},+)$ merupakan grup.

Contoh 2.1.13 Contoh himpunan yang bukan merupakan grup yaitu himpunan setiap bilangan riil positif terhadap operasi penjumlahan $(\mathbb{R}^+,+)$ karena $\mathbb{R}^+$ tidak memiliki identitas terhadap operasi $+$.

Berdasarkan sifat yang ada pada grup diperoleh beberapa teorema berikut:

Teorema 2.1.14 (Gilbert & Gilbert, 2013) Misalkan $(G,*)$ adalah suatu grup, maka elemen identitas di G adalah tunggal.

Bukti:

Karena $(G,*)$ grup maka terdapat elemen identitas $e \in G$ yang memenuhi

$e * x = x * e = x$ untuk setiap $x \in G$.

Misalkan e' adalah elemen identitas di G. Karena e adalah elemen identitas di G maka

$$e * e' = e' * e = e'$$

Karena e' adalah elemen identitas di G maka

$$e' * e = e * e' = e$$

Dengan demikian $e = e'$.

Jadi, terbukti bahwa elemen identitas grup adalah tunggal.

Pada grup selain elemen identitas yang bersifat tunggal, elemen invers dari sebarang unsur juga bersifat tunggal seperti yang dinyatakan dalam teorema berikut

Teorema 2.1.15 (Gilbert & Gilbert, 2013) Misalkan $(G,*)$ adalah suatu grup, maka invers setiap elemen di G tunggal.

Bukti:

Ambil sebarang $x \in G$. Andaikan x^{-1} dan x' adalah invers dari x maka

$x^{-1} = x^{-1} * e$(Definisi 2.1.11 bagian 3)

$= x^{-1} * (x * x')$(Definisi 2.1.11 bagian 4)

$= (x^{-1} * x) * x'$(Definisi 2.1.11 bagian 2)

$= e * x'$(Definisi 2.1.11 bagian 4)

$= x'$(Definisi 2.1.11 bagian 3)

Jadi, invers setiap elemen di G tunggal.

Selanjutnya pada dua teorema berikut dijelaskan sifat kanselasi pada grup dan sifat terkait invers elemen di grup.

Teorema 2.1.16 (Gilbert & Gilbert, 2013) Misalkan G adalah grup terhadap operasi biner, maka berlaku sifat kanselasi kiri dan kanan, yaitu:

1. Jika $ab = ac$ maka $b = c$
2. Jika $ba = ca$ maka $b = c$

Bukti:

Ambil sebarang $a, b, c \in G$ dan misalkan $a^{-1} \in G$ adalah invers dari a.

Perhatikan bahwa

1. Jika $ab = ac$ maka

   $a^{-1}ab = a^{-1}ac$(Kalikan kedua ruas dengan a^{-1})

   $\Leftrightarrow eb = ec$(Definisi 2.1.11 bagian 4)

   $\Leftrightarrow b = c$(Definisi 2.1.11 bagian 3)

   Jadi, terbukti jika $ab = ac$ maka $b = c$.

2. Jika $ba = ca$ maka

   $baa^{-1} = caa^{-1}$(Kalikan kedua ruas dengan a^{-1})

   $\Leftrightarrow be = ce$(Definisi 2.1.11 bagian 4)

   $\Leftrightarrow b = c$(Definisi 2.1.11 bagian 3)

   Jadi, terbukti jika $ba = ca$ maka $b = c$.

Teorema 2.1.17 (Gilbert & Gilbert, 2013) Misalkan G adalah grup terhadap operasi biner, maka untuk setiap $x, y \in G$ berlaku

1. $(x^{-1})^{-1} = x$
2. $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$

Bukti:

1. Ambil sebarang $x \in G$ maka terdapat $x^{-1} \in G$ sehingga

$$x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$$

dan

$$x^{-1} * (x^{-1})^{-1} = (x^{-1})^{-1} * x^{-1} = e.$$

Diperoleh

$x^{-1} * x = x^{-1} * (x^{-1})^{-1}$ dan $x * x^{-1} = (x^{-1})^{-1} * x^{-1}$.

Karena invers bersifat tunggal maka $x^{-1} = (x^{-1})^{-1}$.

2. Ambil sebarang $x, y \in G$ maka

$$(xy)(xy)^{-1} = (xy)^{-1}(xy) = e$$

Perhatikan bahwa

$$(xy)(y^{-1}x^{-1}) = x(yy^{-1})x^{-1} = xex^{-1} = xx^{-1} = e$$

dan

$$(y^{-1}x^{-1})(xy) = y^{-1}(x^{-1}x)y = y^{-1}ey = y^{-1}y = e$$

Dengan demikian $y^{-1}x^{-1}$ juga merupakan invers dari $xy \in G$.

Karena invers elemen di G tunggal maka $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

2.1.3 Grup Abelian

Operasi pada grup tidak harus bersifat komutatif. Jika operasi pada grup bersifat komutatif maka grup tersebut dikatakan abelian seperti dinyatakan dalam definisi berikut

Definisi 2.1.18 (Gilbert & Gilbert, 2013) Misalkan G adalah grup dengan operasi $*$. Maka G dikatakan grup komutatif atau grup abelian jika operasi $*$ komutatif. Artinya $x * y = y * x$ untuk setiap $x, y \in G$.

Contoh 2.1.19 Beberapa contoh himpunan yang merupakan grup abelian yaitu:

1. Himpunan semua bilangan bulat terhadap operasi penjumlahan $(\mathbb{Z}, +)$, himpunan semua bilangan rasional terhadap operasi penjumlahan $(\mathbb{Q}, +)$, himpunan semua bilangan riil terhadap operasi penjumlahan $(\mathbb{R}, +)$, dan himpunan semua bilangan kompleks terhadap operasi penjumlahan $(\mathbb{C}, +)$ merupakan grup abelian.
2. Himpunan semua bilangan rasional positif terhadap operasi perkalian $(\mathbb{Q}^+, \times)$ dan himpunan semua bilangan riil positif terhadap operasi perkalian $(\mathbb{R}^+, \times)$ merupakan grup abelian.

2.1.4 Grup Dihedral

Misalkan n adalah bilangan asli, $n \geq 3$, dan D_{2n} adalah himpunan semua simetri dari segi-n beraturan. Selanjutnya, masing-masing simetri s dapat dideskripsikan dengan mengkorespondensikan permutasi σ dari $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ dimana jika simetri r sebuah rotasi $\frac{2\pi}{n}$ radian searah jarum jam, maka σ permutasi yang mengantarkan titik i ke $i + 1$, $1 \leq i \leq n - 1$, dan $\sigma(n) = 1$. Misalkan pula simetri s merupakan refleksi dengan sumbu simetri yang melalui titik 1 dan titik asal (Dummit & Foote, 2004).

Segi-n beraturan dengan n sisi mempunyai $2n$ simetri yang berbeda yaitu n simetri rotasi dan n simetri refleksi. Jika n ganjil, maka tiap-tiap sumbu simetri menghubungkan titik tengah suatu titik ke titik sudut di hadapannya. Jika n genap, maka terdapat $\frac{n}{2}$ sumbu simetri yang menghubungkan titik tengah suatu sisi yang berhadapan dan $\frac{n}{2}$ sumbu simetri yang menghubungkan titik sudut yang berhadapan. Umumnya terdapat n sumbu simetri dan $2n$ elemen dalam segi-n beraturan (Dummit & Foote, 2004).

Grup dihedral-$2n$ merupakan himpunan semua simetri pada segi-n beraturan (polygon-n) dengan operasi komposisi "$\circ$". Simetri dari suatu polygon-n adalah rotasi dan refleksi. Grup dihedral-$2n$ dengan operasi komposisi "$\circ$" dinotasikan dengan $(D_{2n},\circ)$. Jika pada grup simetri anggotanya mewakili rotasi dan refleksi, sedangkan anggota grup permutasi mewakili permutasi dari rotasi dan refleksi, maka anggota dari grup dihedral merupakan rotasi dan komposisi dari rotasi dan refleksi.

Grup dihedral dapat disederhanakan menggunakan beberapa notasi dan hitungan yang akan menyederhanakan perhitungan selanjutnya dan membantu mengamati D_{2n}. Misalkan elemen identitas dari D_{2n} dinotasikan dengan 1. Dummit & Foote (2004) menyatakan bahwa pada grup dihedral D_{2n} berlaku:

1. $1, r, r^2, \dots, r^{n-1}$ semua berbeda dan $r^n = 1$, dengan demikian $|r| = n, n \in \mathbb{Z}^+$,
2. $|s| = 2$,
3. $s \neq r^i$ untuk setiap $i, i \in \mathbb{Z}^+$,

4. $sr^i \neq sr^j$, untuk semua $0 \leq i, j \leq n-1$ dengan $i \neq j$, sehingga

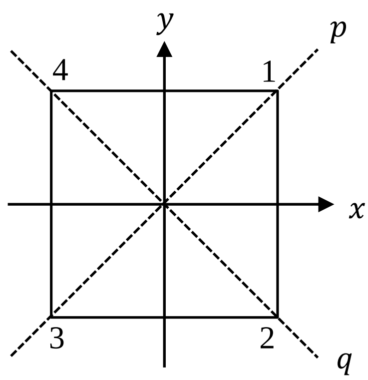
$$D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, \dots, sr^{n-1}\}$$

Setiap elemen dapat dituliskan secara tunggal dalam bentuk $s^k r^i$ untuk beberapa $k = 0$ atau 1 dan $0 \leq i \leq n-1$.

5. $sr = r^{-1}s$. Persamaan ini menunjukkan bahwa r dan s tidak saling komutatif, sehingga D_{2n} bukan grup abelian.

6. $r^i s = sr^{-i}$.

Contoh 2.1.20 Jika $n = 4$, digambarkan suatu persegi pada bidang x, y.



Gambar 2.1 Simetri pada Grup *Dihedral*-8

(Sumber: (Dummit & Foote, 2004))

Persegi tersebut dirotasi sebesar $\frac{2\pi}{n}$ searah jarum jam, maka akan menghasilkan rotasi sebagai berikut:

$r =$ rotasi sejauh $\frac{2\pi}{3}$,

$r^2 =$ rotasi sejauh $\frac{2\pi}{2}$,

$r^3 =$ rotasi sejauh $\frac{2\pi}{4}$,

$r^4 =$ rotasi sejauh $\frac{2\pi}{4}$.

Sedangkan hasil refleksinya adalah

$$s = \text{refleksi terhadap garis } p$$

$$sr = \text{refleksi terhadap garis } x$$

$$sr^2 = \text{refleksi terhadap garis } q$$

$$sr^3 = \text{refleksi terhadap garis } y$$

Karena $r^n = 1$, maka $r^4 = 1$ Dengan demikian, hasil rotasi dan refleksi dari Gambar 2.1 dapat dinyatakan sebagai $D_8 = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. D_8 merupakan grup terhadap operasi komposisi " $\circ$ ". Perhatikan Tabel 2.1 berikut:

Tabel 2.1 Tabel Cayley D_8

$\circ$	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
1	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
r	r	r^2	r^3	1	sr^3	s	sr	sr^2
r^2	r^2	r^3	1	r	sr^2	sr^3	s	sr
r^3	r^3	1	r	r^2	sr	sr^2	sr^3	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	1	r	r^2	r^3
sr	sr	sr^2	sr^3	s	r^3	1	r	r^2
sr^2	sr^2	sr^3	s	sr	r^2	r^3	1	r
sr^3	sr^3	s	sr	sr^2	r	r^2	r^3	1

Berdasarkan Tabel 2.1, $(D_8,\circ)$ merupakan grup karena memenuhi definisi 2.1.11, yaitu:

1. D_8 tertutup di bawah operasi $\circ$, karena untuk setiap $x, y \in D_8$ berlaku $x \circ y \in D_8$.
2. Operasi $\circ$ asosiatif, karena untuk setiap $x, y, z \in D_8$ berlaku $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$.
3. D_8 memiliki elemen identitas, yaitu $e = 1$ karena untuk setiap $x \in D_8$ berlaku $x \circ 1 = 1 \circ x = x$.

4. Setiap elemen di D_8 memiliki invers, karena untuk setiap $x \in D_8$ terdapat $x^{-1} \in D_8$ sedemikian sehingga $x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = 1$. Adapun invers dari setiap elemen di D_8 adalah $1^{-1} = 1, r^{-1} = r^3, (r^2)^{-1} = r^2, (r^3)^{-1} = r, s^{-1} = s, (sr)^{-1} = sr, (sr^2)^{-1} = sr^2$, dan $(sr^3)^{-1} = sr^3$.

Perhatikan bahwa $r \circ sr^2 = sr \neq sr^2 \circ r = sr^3$. Dengan demikian $(D_8,\circ)$ merupakan grup non-abelian.

2.1.5 Komutator

Sebelum membahas mengenai definisi dari elemen Engel, akan dibahas terlebih dahulu mengenai komutator.

Definisi 2.1.21 (Dummit & Foote, 2004) Misalkan G adalah grup dan $x, y \in G$. Komutator dari x dan y yang dilambangkan dengan $[x, y]$ adalah $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$.

Contoh 2.1.22 Berdasarkan Contoh 2.1.20 diketahui bahwa $D_8 = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$ merupakan grup terhadap operasi komposisi. Pilih $x = r^3 \in D_8$ dan $y = sr^2 \in D_8$, maka komutator dari r^3 dan sr^2 adalah

$$
\begin{aligned}
[r^3, sr^2] &= (r^3)^{-1} \circ (sr^2)^{-1} \circ r^3 \circ sr^2 \\
&= r \circ sr^2 \circ r^3 \circ sr^2 \\
&= r^2
\end{aligned}
$$

Teorema 2.1.23 (Dummit & Foote, 2004) Diberikan G adalah grup. Misalkan $x, y \in G$ maka $xy = yx$ jika dan hanya jika $[x, y] = e$.

Bukti:

($\Rightarrow$) Misalkan $xy = yx$ maka akan dibuktikan $[x, y] = e$.

Perhatikan bahwa

$xy = yx$

$\Leftrightarrow (y^{-1})xy = (y^{-1})yx$(Kalikan kedua ruas dengan y^{-1})

$\Leftrightarrow y^{-1}xy = ex$(Definisi 2.1.11 bagian 4)

$\Leftrightarrow y^{-1}xy = x$(Definisi 2.1.11 bagian 2)

$\Leftrightarrow x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}x$(Kalikan kedua ruas dengan x^{-1})

$\Leftrightarrow x^{-1}y^{-1}xy = e$(Definisi 2.1.11 bagian 4)

$\Leftrightarrow [x, y] = e$(Definisi 2.1.21)

($\Leftarrow$) Misalkan $[x, y] = e$ maka akan dibuktikan $xy = yx$.

Perhatikan bahwa

$[x, y] = e$

$\Leftrightarrow x^{-1}y^{-1}xy = e$(Definisi 2.1.21)

$\Leftrightarrow yxx^{-1}y^{-1}xy = yxe$(Kalikan kedua ruas dengan yx)

$\Leftrightarrow yey^{-1}xy = yxe$(Definisi 2.1.11 bagian 4)

$\Leftrightarrow yy^{-1}xy = yx$(Definisi 2.1.11 bagian 3)

$\Leftrightarrow exy = yx$(Definisi 2.1.11 bagian 4)

$\Leftrightarrow xy = yx$(Definisi 2.1.11 bagian 3)

Contoh 2.1.24 Berdasarkan contoh 2.1.20 diketahui bahwa $D_8 = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$ merupakan grup terhadap operasi komposisi. Pilih $x = r^3 \in D_8$ dan $y = r^2 \in D_8$. Dari Tabel 2.1 diketahui bahwa $r^3 \circ r^2 = r^2 \circ r^3$, maka komutator dari r^3 dan r^2 adalah

$$[r^3, r^2] = (r^3)^{-1} \circ (r^2)^{-1} \circ r^3 \circ r^2$$

$$= r \circ r^2 \circ r^3 \circ r^2$$

$$= 1$$

Akibat 2.1.25 Pada grup dihedral $(D_{2n},\circ)$ berlaku $[r^i, r^j] = 1$, untuk $0 \leq i,j \leq n-1$.

Bukti:

Ambil sebarang $r^i, r^j \in D_{2n}$, untuk $0 \leq i,j \leq n-1$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}[r^i, r^j] &= (r^i)^{-1} \circ (r^j)^{-1} \circ r^i \circ r^j \\ &= r^{n-i} \circ r^{n-j} \circ r^i \circ r^j \\ &= r^{2n-i-j} \circ r^{i+j} \\ &= r^{2n} \\ &= r^n \circ r^n \\ &= 1 \circ 1 \\ &= 1\end{aligned}$$

Selanjutnya, konsep komutator telah diperumum menjadi komutator bernorma. Misalkan x dan y merupakan elemen dari grup G dan m adalah bilangan bulat tak-negatif. Komutator m-bernorma

$$[x,_m y] = [x, \underbrace{y, \dots, y}_{m}]$$

yang didefinisikan oleh aturan

$$[x,_0 y] = x,\ [x,_1 y] = [x, y] = x^{-1}y^{-1}xy,$$

dan untuk setiap $m > 0$

$$[x,_m y] = [[x,_{m-1} y], y].$$

Berdasarkan aturan tersebut maka dapat ditentukan definisi dari elemen Engel yang dibahas dalam Sub-bab 2.1.7.

2.1.6 Elemen Engel

Diberikan G adalah suatu grup dan $x, y \in G$. Jika hasil dari komutator $[x,_m y]$ dengan m merupakan bilangan bulat tak-negatif adalah elemen identitas maka dapat ditentukan definisi dari elemen Engel. Ketentuan lebih lanjut mengenai elemen Engel dari G akan dijelaskan pada Definisi 2.1.25.

Definisi 2.1.25 (Robinson, 1972) Diberikan G adalah suatu grup. Suatu elemen $a \in G$ disebut elemen Engel kiri dari G jika untuk setiap $g \in G$ terdapat bilangan bulat tak-negatif m sehingga berlaku $[g,_m a] = 1$. Lebih lanjut, untuk suatu bilangan bulat positif k, elemen a disebut elemen k-Engel kiri jika berlaku $[g,_k a] = 1$.

Himpunan semua elemen k-Engel kiri dari grup G dinotasikan dengan $L_k(G)$. sedangkan himpunan semua elemen Engel kiri dari grup G dinotasikan dengan $L(G)$. Elemen k-Engel merupakan elemen t-Engel untuk sebarang $t > k$ karena untuk suatu bilangan positif k sehingga $[g,_k a] = 1$ mengakibatkan $[g,_t a] = 1$ sehingga berlaku

$$L_1(G) \subseteq L_2(G) \subseteq L_3(G) \subseteq \cdots \subseteq L(G).$$

Bounded Engel elemen kiri adalah elemen k-Engel kiri untuk suatu bilangan bulat positif k. $\overline{L}(G)$ adalah himpunan semua *bounded* Engel elemen kiri, oleh karena itu $\overline{L}(G)$ adalah gabungan dari semua himpunan elemen k-Engel kiri. Karena grup yang akan dibahas adalah grup hingga maka

$$\overline{L}(G) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} L_k(G) = L(G).$$

Contoh 2.1.26 Berdasarkan contoh 2.1.20 diketahui bahwa $D_8 = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$ merupakan grup terhadap operasi komposisi. Akan diselidiki apakah r^2 merupakan elemen Engel kiri dari D_8.

Untuk $m = 0$ diperoleh komutator $[g,_0 r^2]$ untuk setiap $g \in D_8$ adalah

$$[1,_0 r^2] = 1$$

$$[r,_0 r^2] = r$$

$$[r^2,_0 r^2] = r^2$$

$$[r^3,_0 r^2] = r^3$$

$$[s,_0 r^2] = s$$

$$[sr,_0 r^2] = sr$$

$$[sr^2,_0 r^2] = sr^2$$

$$[sr^3,_0 r^2] = sr^3$$

Untuk $m = 1$ diperoleh komutator $[g,_1 r^2]$ untuk setiap $g \in D_8$ adalah

$$[1, r^2] = 1^{-1} \circ (r^2)^{-1} \circ 1 \circ r^2 = 1 \circ r^2 \circ 1 \circ r^2 = 1$$

$$[r, r^2] = r^{-1} \circ (r^2)^{-1} \circ r \circ r^2 = r^3 \circ r^2 \circ r \circ r^2 = 1$$

$$[r^2, r^2] = (r^2)^{-1} \circ (r^2)^{-1} \circ r^2 \circ r^2 = r^2 \circ r^2 \circ r^2 \circ r^2 = 1$$

$$[r^3, r^2] = (r^3)^{-1} \circ (r^2)^{-1} \circ r^3 \circ r^2 = r \circ r^2 \circ r^3 \circ r^2 = 1$$

$$[s, r^2] = s^{-1} \circ (r^2)^{-1} \circ s \circ r^2 = s \circ r^2 \circ s \circ r^2 = 1$$

$$[sr, r^2] = (sr)^{-1} \circ (r^2)^{-1} \circ r \circ r^2 = sr \circ r^2 \circ sr \circ r^2 = 1$$

$$[sr^2, r^2] = (sr^2)^{-1} \circ (r^2)^{-1} \circ sr^2 \circ r^2 = sr^2 \circ r^2 \circ sr^2 \circ r^2 = 1$$

$$[sr^3, r^2] = (sr^3)^{-1} \circ (r^2)^{-1} \circ sr^3 \circ r^2 = sr^3 \circ r^2 \circ sr^3 \circ r^2 = 1$$

Karena terdapat bilangan bulat tak-negatif $m = 1$ yang memenuhi $[g,_m r^2] = 1$ untuk setiap $g \in D_8$, maka dapat disimpulkan bahwa r^2 merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_8.

2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Qur'an

Konsep mengenai unsur-unsur dari suatu himpunan sebenarnya telah dibahas dalam Al-Qur'an, salah satunya dalam surat An-Nuur ayat 45.

Artinya: *"Dan Allah telah menciptakan semua jenis hewan dari air, maka sebagian dari hewan itu ada yang berjalan di atas perutnya dan sebagian bejalan dengan dua kaki sedang sebagian (yang lain) berjalan dengan empat kaki. Allah menciptakan apa yang dikehendaki-Nya, sesungguhnya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu"*

Menurut tafsir Jalalain, ayat di atas menjelaskan bahwa Allah SWT menciptakan semua jenis hewan (makhluk hidup) dari air mani. Sebagian dari hewan tersebut ada yang berjalan di atas perutnya, seperti ular dan binatang melata lainnya. Sebagian hewan ada berjalan dengan dua kaki, seperti manusia dan burung. Sebagian hewan lainnya ada yang berjalan dengan empat kaki, seperti hewan liar dan hewan ternak (Al-Mahalli & As-Suyuti, 2008).

Himpunan adalah kumpulan objek yang terdefinisi dengan jelas (*well defined*). Objek-objek yang termasuk dalam suatu himpunan disebut unsur atau anggota himpunan (Abdussakir, 2014). Himpunan yang dibahas dalam surat An-Nuur ayat 45 yaitu:

1. Himpunan hewan yang berjalan tanpa kaki.
2. Himpunan hewan yang berjalan dengan dua kaki.
3. Himpunan hewan yang berjalan dengan empat kaki.

Unsur-unsur dari masing-masing himpunan di atas terdefinisi dengan jelas. Seseorang dapat menentukan dengan mudah unsur himpunan tersebut. Berbeda dengan kumpulan hewan gemuk. Seseorang akan kesulitan menentukan unsur dari himpunan tersebut karena definisi gemuk tidak jelas.

2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung

Pada penelitian ini, peneliti akan mencari elemen-elemen Engel kiri dari grup non-abelian. Grup yang digunakan yaitu grup dihedral D_{2n} dengan $n \geq 3$. Pertama, peneliti akan memilih suatu elemen $a \in D_{2n}$. Tahap selanjutnya, peneliti akan menunjukkan apakah elemen $a \in D_{2n}$ yang diambil merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedal $(D_{2n},\circ)$ atau bukan. Peneliti akan menghitung komutator bernorma $[g,_m a]$ untuk setiap $g \in D_{2n}$ dengan $m = 1,2,\cdots$ hingga diperoleh $[g,_m a] = 1$ atau $[g,_m a] \neq 1$ dan $[g,_{m+t} a] = [g,_m a]$ untuk suatu $t \in \mathbb{Z}^+$. Jika terdapat m yang memenuhi $[g,_m a] = 1$, maka a merupakan elemen m-Engel kiri dari grup dihedral $(D_{2n},\circ)$. Jika komutator bernorma $[g,_m a] \neq 1$ dan $[g,_{m+t} a] = [g,_m a]$ untuk suatu $t \in \mathbb{Z}^+$ maka a bukan merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral $(D_{2n},\circ)$. Peneliti akan menghitung semua elemen $a \in D_{2n}$ dengan $n = 3, 4, \dots, 20, 24, \dots, 40$.

Setelah menentukan elemen-elemen m-Engel kiri dari grup dihedral $(D_{2n},\circ)$ dengan $n = 3, 4, \dots, 20, 24, \dots, 40$. peneliti akan mendaftar semua elemen-elemen dari grup dihedral $(D_{2n},\circ)$ yang merupakan elemen-elemen m-Engel kiri dari grup dihedral $(D_{2n},\circ)$. Kemudian, peneliti membuat dugaan mengenai elemen-elemen m-Engel kiri dari grup dihedral $(D_{2n},\circ)$. Dari hasil dugaan yang telah ditentukan, akan dibuktikan menggunakan definisi dan teorema yang telah dibuktikan sebelumnya.

BAB III
METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan pada penelitian ini adalah penelitian kualitatif dengan menggunakan metode studi literatur atau studi pustaka. Studi literatur merupakan metode penelitian dengan cara mengumpulkan dan mempelajari bahan-bahan pustaka sesuai dengan penelitian yang akan diteliti.

3.2 Langkah-Langkah Analisis

Langkah-langkah analisis penelitian yang digunakan untuk mencari elemen-elemen Engel kiri dari grup dihedral adalah sebagai berikut:

1. Menentukan elemen-elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{2n} untuk $n = 3, 4, \dots, 20, 24, \dots, 40$ dengan menghitung komutator bernorma dari setiap $a \in D_{2n}$ sebagai berikut:
   a) Menghitung komutator bernorma $[g,_m a]$ untuk setiap $g \in D_{2n}$ dengan $m = 1,2, \dots$ hingga diperoleh $[g,_m a] = 1$ atau $[g,_m a] \neq 1$ dan $[g,_{m+t} a] = [g,_m a]$ untuk setiap $t \in \mathbb{Z}^+$.
   b) Jika terdapat m yang memenuhi $[g,_m a] = 1$ maka a merupakan elemen m-Engel kiri dari grup dihedral D_{2n}.
   c) Jika komutator bernorma $[g,_m a] \neq 1$ dan $[g,_{m+t} a] = [g,_m a]$ untuk setiap $t \in \mathbb{Z}^+$, maka a bukan merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{2n}.
2. Mendaftar elemen-elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{2n} dengan $n = 3, 4, \dots, 20, 24, \dots, 40$.

3. Membuat dugaan bentuk elemen-elemen dari grup dihedral D_{2n} yang merupakan elemen m-Engel kiri untuk $n \in \mathbb{Z}^+$ dan $n \geq 3$.
4. Membuktikan dugaan bentuk elemen-elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{2n}.

BAB IV
HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas cara menentukan elemen-elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{2n} dengan $n = 3,4,5,6,8$. Dari elemen-elemen Engel kiri yang telah ditentukan. Selanjutnya akan ditentukan bentuk umum elemen-elemen Engel kiri dari grup dihedral.

4.1 Elemen Engel Kiri dari Grup Dihedral-6 ($_6, \circ$)

Grup dihedral D_{2n} dengan $n = 3$ adalah $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Berikutnya akan diselidiki elemen-elemen dari D_6 yang merupakan elemen-elemen Engel kiri.

1. Komutator bernorma dari $1 \in D_6$

   Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 1] = x$, untuk setiap $x \in D_6$.

   Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 1]$ untuk sebarang $g \in D_6$ adalah

   $$[r,_1 1] = [r, 1] = r^{-1} \circ 1^{-1} \circ r \circ 1 = r^2 \circ 1 \circ r \circ 1 = 1$$

   Dengan cara yang sama maka diperoleh

   $$[1,1] = [r^2, 1] = [s, 1] = [sr, 1] = [sr^2, 1] = 1$$

   Karena terdapat bilangan bulat tak-negatif $m = 1$ yang memenuhi $[g,_m 1] = 1$ untuk sebarang $g \in D_6$, maka dapat disimpulkan bahwa 1 merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_6, khususnya 1 merupakan elemen 1-Engel kiri.

2. Komutator bernorma dari $r \in D_6$

Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 r] = x$, untuk setiap $x \in D_6$.

Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 r]$ untuk sebarang $g \in D_6$ adalah

$$[s,_1 r] = [s, r] = s^{-1} \circ r^{-1} \circ s \circ r = s \circ r^2 \circ s \circ r = r^2$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1, r] = [r, r] = [r^2, r] = 1$$

$$[sr, r] = [sr^2, r] = r^2$$

Untuk $m = 2$ diperoleh komutator bernorma $[g,_2 r]$ untuk sebarang $g \in D_6$ adalah

$$[s,_2 r] = \big[[s, r], r\big] = [r^2, r] = (r^2)^{-1} \circ r^{-1} \circ r^2 \circ r = r \circ r^2 \circ r^2 \circ r = 1$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_2 r] = [r,_2 r] = [r^2,_2 r] = [sr,_2 r] = [sr^2,_2 r] = 1$$

Karena terdapat bilangan bulat tak-negatif $m = 2$ yang memenuhi $[g,_m r] = 1$ untuk sebarang $g \in D_6$, maka dapat disimpulkan bahwa r merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_6, khususnya r merupakan elemen 2-Engel kiri.

3. Komutator bernorma dari $r^2 \in D_6$

Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 r^2] = x$, untuk setiap $x \in D_6$.

Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 r^2]$ untuk sebarang $g \in D_6$ adalah

$$[s,_1 r^2] = [s, r^2] = s^{-1} \circ (r^2)^{-1} \circ s \circ r^2 = s \circ r \circ s \circ r^2 = r$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1, r^2] = [r, r^2] = [r^2, r^2] = 1$$

$$[sr, r^2] = [sr^2, r^2] = r$$

Untuk $m = 2$ diperoleh komutator bernorma $[g,_2 r^2]$ untuk sebarang $g \in D_6$ adalah

$$[s,_2 r^2] = \left[[s, r^2], r^2\right] = [r, r^2] = r^{-1} \circ (r^2)^{-1} \circ r \circ r^2 = r^2 \circ r \circ r \circ r^2$$
$$= 1$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_2 r^2] = [r,_2 r^2] = [r^2,_2 r^2] = [sr,_2 r^2] = [sr^2,_2 r^2] = 1$$

Karena terdapat bilangan bulat tak-negatif $m = 2$ yang memenuhi $[g,_m r^2] = 1$ untuk sebarang $g \in D_6$, maka dapat disimpulkan bahwa r^2 merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_6, khususnya r^2 merupakan elemen 2-Engel kiri.

4. Komutator bernorma dari $s \in D_6$

   Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 s] = x$, untuk setiap $x \in D_6$.

   Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 s]$ untuk sebarang $g \in D_6$ adalah

$$[r,_1 s] = [r, s] = r^{-1} \circ s^{-1} \circ r \circ s = r^2 \circ s \circ r \circ s = r$$

   Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1, s] = [s, s] = 1$$

$$[sr, s] = r$$

$$[r^2, s] = [sr^2, s] = r^2$$

Perhatikan bahwa $[r, s] = r$ sehingga untuk sebarang bilangan bulat positif m menghasilkan $[r,_m s] = r$. Karena tidak terdapat bilangan bulat positif m yang memenuhi $[r,_m s] = 1$ untuk sebarang m, maka s bukan merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_6.

5. Komutator bernorma dari $sr \in D_6$

Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 sr] = x$, untuk sebarang $x \in D_6$.

Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 sr]$ untuk sebarang $g \in D_6$ adalah

$$[r,_1 sr] = [r, sr] = r^{-1} \circ (sr)^{-1} \circ r \circ sr = r^2 \circ sr \circ r \circ sr = r$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1, sr] = [sr, sr] = 1$$

$$[sr^2, sr] = r$$

$$[r^2, sr] = [s, sr] = r^2$$

Perhatikan bahwa $[r, sr] = r$ sehingga untuk sebarang bilangan bulat positif menghasilkan $[r,_m sr] = r$. Karena tidak terdapat bilangan bulat positif m yang memenuhi $[r,_m sr] = 1$ untuk sebarang m, maka sr bukan merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_6.

6. Komutator bernorma dari $sr^2 \in D_6$

Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 sr^2] = x$, untuk setiap $x \in D_6$.

Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 sr^2]$ untuk sebarang $g \in D_6$ adalah

$$[r,_1 sr^2] = [r, sr^2] = r^{-1} \circ (sr^2)^{-1} \circ r \circ sr^2 = r^2 \circ sr^2 \circ r \circ sr^2 = r$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1, sr^2] = [sr^2, sr^2] = 1$$

$$[s, sr^2] = r$$

$$[r^2, sr^2] = [sr, sr^2] = r^2$$

Perhatikan bahwa $[r, sr^2] = r$ sehingga untuk sebarang bilangan bulat positif m menghasilkan $[r,_m sr^2] = r$. Karena tidak terdapat bilangan bulat positif m yang memenuhi $[r,_m sr^2] = 1$ untuk sebarang m, maka sr^2 bukan merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_6.

Dari hasil perhitungan di atas, maka diperoleh elemen-elemen Engel kiri dari grup dihedral $_6$ adalah

$$L_1(D_6) = \{1\}$$

$$L_2(D_6) \setminus L_1(D_6) = \{r, r^2\}$$

$$L(D_6) = \{1, r, r^2\}.$$

4.2 Elemen Engel Kiri dari Grup Dihedral-8 $(D_8, \circ)$

Grup dihedral D_{2n} dengan $n = 4$ adalah $D_8 = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. Berikutnya akan diselidiki elemen-elemen dari D_8 yang merupakan elemen-elemen Engel kiri.

1. Komutator bernorma dari $1 \in D_8$

   Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 1] = x$, untuk sebarang $x \in D_8$.

   Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 1]$ untuk sebarang $g \in D_8$ adalah

$$[r,_1 1] = [r, 1] = r^{-1} \circ 1^{-1} \circ r \circ 1 = r^3 \circ 1 \circ r \circ 1 = 1$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,1] = [r^2, 1] = [r^3, 1] = [s, 1] = [sr, 1] = [sr^2, 1] = [sr^3, 1] = 1$$

Karena terdapat bilangan bulat tak-negatif $m = 1$ yang memenuhi $[g,_m 1] = 1$ untuk sebarang $g \in D_8$, maka dapat disimpulkan bahwa 1 merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_8, khususnya 1 merupakan elemen 1-Engel kiri.

2. Komutator bernorma dari $r \in D_8$

Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 r] = x$, untuk setiap $x \in D_8$.

Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 r]$ untuk sebarang $g \in D_8$ adalah

$$[s,_1 r] = [s, r] = s^{-1} \circ r^{-1} \circ s \circ r = s \circ r^3 \circ s \circ r = r^2$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1, r] = [r, r] = [r^2, r] = [r^3, r] = 1$$

$$[sr, r] = [sr^2, r] = [sr^3, r] = r^2$$

Untuk $m = 2$ diperoleh komutator bernorma $[g,_2 r]$ untuk sebarang $g \in D_8$ adalah

$$[s,_2 r] = \big[[s, r], r\big] = [r^2, r] = (r^2)^{-1} \circ r^{-1} \circ r^2 \circ r = r^2 \circ r^3 \circ r^2 \circ r$$
$$= 1$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_2 r] = [r,_2 r] = [r^2,_2 r] = [r^3,_2 r] = [sr,_2 r] = [sr^2,_2 r] = [sr^3,_2 r]$$
$$= 1$$

Karena terdapat bilangan bulat tak-negatif $m = 2$ yang memenuhi $[g,_m r] = 1$ untuk sebarang $g \in D_8$, maka dapat disimpulkan bahwa r

merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_8, khususnya r merupakan elemen 2-Engel kiri.

3. Komutator bernorma dari $r^2 \in D_8$

Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 r^2] = x$, untuk sebarang $x \in D_8$.

Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 r^2]$ untuk sebarang $g \in D_8$ adalah

$$[s,_1 r^2] = [s, r^2] = s^{-1} \circ (r^2)^{-1} \circ s \circ r^2 = s \circ r^2 \circ s \circ r^2 = 1$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1, r^2] = [r, r^2] = [r^2, r^2] = [r^3, r^2] = [sr, r^2] = [sr^2, r^2] = [sr^3, r^2] = 1$$

Karena terdapat bilangan bulat tak-negatif $m = 1$ yang memenuhi $[g,_m r^2] = 1$ untuk sebarang $g \in D_8$, maka dapat disimpulkan bahwa r^2 merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_8, khususnya r^2 merupakan elemen 1-Engel kiri.

4. Komutator bernorma dari $r^3 \in D_8$

Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 r^3] = x$, untuk sebarang $x \in D_8$.

Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 r^3]$ untuk sebarang $g \in D_8$ adalah

$$[s,_1 r^3] = [s, r^3] = s^{-1} \circ (r^3)^{-1} \circ s \circ r^3 = s \circ r \circ s \circ r^3 = r^2$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1, r^3] = [r, r^3] = [r^2, r^3] = [r^3, r^3] = 1$$

$$[sr, r^3] = [sr^2, r^3] = [sr^3, r^3] = r^2$$

Untuk $m = 2$ diperoleh komutator bernorma $[g,_2 r^3]$ untuk sebarang $g \in D_8$ adalah

$$[s,_2 r^3] = \left[[s, r^3], r^3\right] = [r^2, r^3] = (r^2)^{-1} \circ (r^3)^{-1} \circ r^2 \circ r^3$$
$$= r^2 \circ r \circ r^2 \circ r^3 = 1$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_2 r^3] = [r,_2 r^3] = [r^2,_2 r^3] = [r^3,_2 r^3] = [sr,_2 r^3] = [sr^2,_2 r^3]$$
$$= [sr^3,_2 r^3] = 1$$

Karena terdapat bilangan bulat tak-negatif $m = 2$ yang memenuhi $[g,_m r^3] = 1$ untuk sebarang $g \in D_8$, maka dapat disimpulkan bahwa r^3 merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_8, khususnya r^3 merupakan elemen 2-Engel kiri.

5. Komutator bernorma dari $s \in D_8$

Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 s] = x$, untuk sebarang $x \in D_8$.

Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 s]$ untuk sebarang $g \in D_8$ adalah

$$[r,_1 s] = [r, s] = r^{-1} \circ s^{-1} \circ r \circ s = r^3 \circ s \circ r \circ s = r^2$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1, s] = [r^2, s] = [s, s] = [sr^2, s] = 1$$

$$[r^3, s] = [sr, s] = [sr^3, s] = r^2$$

Untuk $m = 2$ diperoleh komutator bernorma $[g,_2 s]$ untuk sebarang $g \in D_8$ adalah

$$[r,_2 s] = \left[[r, s], s\right] = [r^2, s] = (r^2)^{-1} \circ s^{-1} \circ r^2 \circ s = r^2 \circ s \circ r^2 \circ s = 1$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_2 s] = [r^2,_2 s] = [r^3,_2 s] = [s,_2 s] = [sr,_2 s] = [sr^2,_2 s] = [sr^3,_2 s]$$
$$= 1$$

Karena terdapat bilangan bulat tak-negatif $m = 2$ yang memenuhi $[g,_m s] = 1$ untuk sebarang $g \in D_8$, maka dapat disimpulkan bahwa s merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_8, khususnya s merupakan elemen 2-Engel kiri.

6. Komutator bernaorma dari $sr \in D_8$

Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 sr] = x$, untuk setiap $x \in D_8$.

Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 sr]$ untuk sebarang $g \in D_8$ adalah

$$[r,_1 r] = [r, sr] = r^{-1} \circ (sr)^{-1} \circ r \circ sr = r^3 \circ sr \circ r \circ sr = r^2$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1, sr] = [r^2, sr] = [sr, sr] = [sr^3, sr] = 1$$
$$[r^3, sr] = [s, sr] = [sr^2, sr] = r^2$$

Untuk $m = 2$ diperoleh komutator bernorma $[g,_2 sr]$ untuk sebarang $g \in D_8$ adalah

$$[r,_2 sr] = \big[[r, sr], sr\big] = [r^2, sr] = (r^2)^{-1} \circ (sr)^{-1} \circ r^2 \circ sr$$
$$= r^2 \circ sr \circ r^2 \circ sr = 1$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_2 sr] = [r^2,_2 sr] = [r^3,_2 sr] = [s,_2 sr] = [sr,_2 sr] = [sr^2,_2 sr]$$
$$= [sr^3,_2 sr] = 1$$

Karena terdapat bilangan bulat tak-negatif $m = 2$ yang memenuhi $[g,_m sr] = 1$ untuk sebarang $g \in D_8$, maka dapat disimpulkan bahwa sr

merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_8, khususnya sr merupakan elemen 2-Engel kiri.

7. Komutator bernorma dari $sr^2 \in D_8$

Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 sr^2] = x$, untuk sebarang $x \in D_8$.

Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 sr^2]$ untuk sebarang $g \in D_8$ adalah

$$[r,_1 sr^2] = [r, sr^2] = r^{-1} \circ (sr^2)^{-1} \circ r \circ sr^2 = r^3 \circ sr^2 \circ r \circ sr^2 = r^2$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1, sr^2] = [r^2, sr^2] = [s, sr^2] = [sr^2, sr^2] = 1$$

$$[r^3, sr^2] = [sr, sr^2] = [sr^3, sr^2] = r^2$$

Untuk $m = 2$ diperoleh komutator bernorma $[g,_2 sr^2]$ untuk sebarang $g \in D_8$ adalah

$$[r,_2 sr^2] = \big[[r, sr^2], sr^2\big] = [r^2, sr^2] = (r^2)^{-1} \circ (sr^2)^{-1} \circ r^2 \circ sr^2$$

$$= r^2 \circ sr^2 \circ r^2 \circ sr^2 = 1$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_2 sr^2] = [r^2,_2 sr^2] = [r^3,_2 sr^2] = [s,_2 sr^2] = [sr,_2 sr^2] = [sr^2,_2 sr^2]$$

$$= [sr^3,_2 sr^2] = 1$$

Karena terdapat bilangan bulat tak-negatif $m = 2$ yang memenuhi $[g,_m sr^2] = 1$ untuk sebarang $g \in D_8$, maka dapat disimpulkan bahwa sr^2 merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_8, khususnya sr^2 merupakan elemen 2-Engel kiri.

8. Komutator bernorma dari $sr^3 \in D_8$

Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x.$ Jadi $[x,_0 sr^3] = x,$ untuk setiap $x \in D_8$.

Dari hasil perhitungan di atas, maka diperoleh elemen Engel kiri dari grup dihedral D_8 adalah Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 sr^3]$ untuk sebarang $g \in D_8$ adalah

$$[r,_1 sr^3] = [r, sr^3] = r^{-1} \circ (sr^3)^{-1} \circ r \circ sr^3 = r^3 \circ sr^3 \circ r \circ sr^3 = r^2$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1, sr^3] = [r^2, sr^3] = [sr, sr^3] = [sr^3, sr^3] = 1$$

$$[r^3, sr^3] = [s, sr^3] = [sr^2, sr^3] = r^2$$

Untuk $m = 2$ diperoleh komutator bernorma $[g,_2 sr^3]$ untuk sebarang $g \in D_8$ adalah

$$[r,_2 sr^3] = \big[[r, sr^3], sr\big] = [r^2, sr^3] = (r^2)^{-1} \circ (sr^3)^{-1} \circ r^2 \circ sr^3$$
$$= r^2 \circ sr^3 \circ r^2 \circ sr^3 = 1$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_2 sr^3] = [r^2,_2 sr^3] = [r^3,_2 sr^3] = [s,_2 sr^3] = [sr,_2 sr^3] = [sr^2,_2 sr^3]$$
$$= [sr^3,_2 sr^3] = 1$$

Karena terdapat bilangan bulat tak-negatif $m = 2$ yang memenuhi $[g,_m sr^3] = 1$ untuk sebarang $g \in D_8$, maka dapat disimpulkan bahwa sr^3 merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_8, khususnya sr^3 merupakan elemen 2-Engel kiri.

Dari hasil perhitungan di atas, maka diperoleh elemen-elemen Engel kiri dari grup dihedral D_8 adalah

$$L_1(D_8) = \{1, r^2\}$$

$$L_2(D_8) \setminus L_1(D_8) = \{r, r^3\}$$

$$L_3(D_8) \setminus L_2(D_{16}) = \{s, sr, sr^2, sr^3\}$$

$$L(D_8) = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\} = D_8.$$

4.3 Elemen Engel Kiri dari Grup Dihedral-10 $(\boldsymbol{D_{10}}, \circ)$

Grup dihedral D_{2n} dengan $n = 5$ adalah $D_{10} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$. Berikutnya akan diselidiki apakah elemen-elemen dari D_{10} yang merupakan elemen-elemen Engel kiri.

1. Komutator bernorma dari$1 \in D_{10}$

   Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 1] = x$, untuk setiap $x \in D_8$.

   Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 1]$ untuk sebarang $g \in D_{10}$ adalah

   $$[r,_1 1] = [r, 1] = r^{-1} \circ 1^{-1} \circ r \circ 1 = r^4 \circ 1 \circ r \circ 1 = 1$$

   Dengan cara yang sama maka diperoleh

   $$[1,1] = [r^2, 1] = [r^3, 1] = [r^4, 1] = [s, 1] = [sr, 1] = [sr^2, 1] = [sr^3, 1]$$
   $$= [sr^4, 1] = 1$$

   Karena terdapat bilangan bulat tak-negatif $m = 1$ yang memenuhi $[g,_m 1] = 1$ untuk sebarang $g \in D_{10}$, maka dapat disimpulkan bahwa 1 merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{10}, khususnya 1 merupakan elemen 1-Engel kiri.

2. Komutator bernorma dari $r \in D_{10}$

   Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. $[x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 r] = x$, untuk setiap $x \in D_8$.

Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 r]$ untuk sebarang $g \in D_{10}$ adalah

$$[s,_1 r] = [s, r] = s^{-1} \circ r^{-1} \circ s \circ r = s \circ r^4 \circ s \circ r = r^2$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1, r] = [r, r] = [r^2, r] = [r^3, r] = [r^4, r] = 1$$

$$[sr, r] = [sr^2, r] = [sr^3, r] = [sr^4, r] = r^2$$

Untuk $m = 2$ diperoleh komutator bernorma $[g,_2 r]$ untuk sebarang $g \in D_{10}$ adalah

$$[s,_2 r] = \big[[s, r], r\big] = [r^2, r] = (r^2)^{-1} \circ r^{-1} \circ r^2 \circ r = r^3 \circ r^4 \circ r^2 \circ r$$
$$= 1$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_2 r] = [r,_2 r] = [r^2,_2 r] = [r^3,_2 r] = [r^4,_2 r] = [s,_2 r] = [sr^2,_2 r]$$
$$= [sr^3,_2 r] = [sr^4,_2 r] = 1$$

Karena terdapat bilangan bulat tak-negatif $m = 2$ yang memenuhi $[g,_m r] = 1$ untuk sebarang $g \in D_{10}$, maka dapat disimpulkan bahwa r merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{10}, khususnya r merupakan elemen 2-Engel kiri.

3. Komutator bernorma dari $r^2 \in D_{10}$

Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 r^2] = x$, untuk setiap $x \in D_8$.

Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 r^2]$ untuk sebarang $g \in D_{10}$ adalah

$$[s,_1 r^2] = [s, r^2] = s^{-1} \circ (r^2)^{-1} \circ s \circ r^2 = s \circ r^3 \circ s \circ r^2 = r^4$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1, r^2] = [r, r^2] = [r^2, r^2] = [r^3, r^2] = [r^4, r^2] = 1$$

$$[sr, r^2] = [sr^2, r^2] = [sr^3, r^2] = [sr^4, r^2] = r^4$$

Untuk $m = 2$ diperoleh komutator bernorma $[g,_2 r^2]$ untuk sebarang $g \in D_{10}$ adalah

$$[s,_2 r^2] = \big[[s, r^2], r^2\big] = [r^4, r^2] = (r^4)^{-1} \circ (r^2)^{-1} \circ r^4 \circ r^2$$

$$= r \circ r^3 \circ r^4 \circ r^2 = 1$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_2 r^2] = [r,_2 r^2] = [r^2,_2 r^2] = [r^3,_2 r^2] = [r^4,_2 r^2] = [sr,_2 r^2]$$

$$= [sr^2,_2 r^2] = [sr^3,_2 r^2] = [sr^4,_2 r^2] = 1$$

Karena terdapat bilangan bulat tak-negatif $m = 2$ yang memenuhi $[g,_m r^2] = 1$ untuk sebarang $g \in D_{10}$, maka dapat disimpulkan bahwa r^2 merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{10}, khususnya r^2 merupakan elemen 2-Engel kiri.

4. Komutator bernorma dari $r^3 \in D_{10}$

   Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 r^3] = x$, untuk sebarang $x \in D_8$.

   Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 r^3]$ untuk sebarang $g \in D_{10}$ adalah

$$[s,_1 r^3] = [s, r^3] = s^{-1} \circ (r^3)^{-1} \circ s \circ r^3 = s \circ r^2 \circ s \circ r^3 = r$$

   Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1, r^3] = [r, r^3] = [r^2, r^3] = [r^3, r^3] = [r^4, r^3] = 1$$

$$[sr, r^3] = [sr^2, r^3] = [sr^3, r^3] = [sr^4, r^3] = r$$

   Untuk $m = 2$ diperoleh komutator bernorma $[g,_2 r^3]$ untuk sebarang $g \in D_{10}$ adalah

$$[s,_2 r^3] = \left[[s,r^3],r^3\right] = [r,r^3] = r^{-1} \circ (r^3)^{-1} \circ r \circ r^3 = r^4 \circ r^2 \circ r \circ r^3$$
$$= 1$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_2 r^3] = [r,_2 r^3] = [r^2,_2 r^3] = [r^3,_2 r^3] = [r^4,_2 r^3] = [sr,_2 r^3]$$
$$= [sr^2,_2 r^3] = [sr^3,_2 r^3] = [sr^4,_2 r^3] = 1$$

Karena terdapat bilangan bulat tak-negatif $m = 2$ yang memenuhi $[g,_m r^3] = 1$ untuk sebarang $g \in D_{10}$, maka dapat disimpulkan bahwa r^3 merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{10}, khususnya r^3 merupakan elemen 2-Engel kiri.

5. Komutator bernorma dari $r^4 \in D_{10}$

Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 r^4] = x$, untuk setiap $x \in D_8$.

Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 r^4]$ untuk sebarang $g \in D_{10}$ adalah

$$[s,_1 r^4] = [s,r^4] = s^{-1} \circ (r^4)^{-1} \circ s \circ r^4 = s \circ r \circ s \circ r^4 = r^3$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,r^4] = [r^2,r^4] = [r^3,r^4] = [r^4,r^4] = 1$$
$$[sr,r^4] = [sr^2,r^4] = [sr^3,r^4] = [sr^4,r^4] = r^3$$

Untuk $m = 2$ diperoleh komutator bernorma $[g,_2 r^4]$ untuk sebarang $g \in D_{10}$ adalah

$$[s,_2 r^4] = \left[[s,r^4],r^4\right] = [r^3,r^4] = (r^3)^{-1} \circ (r^4)^{-1} \circ r^3 \circ r^4$$
$$= r^2 \circ r \circ r^3 \circ r^4 = 1$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_2 r^4] = [r,_2 r^4] = [r^2,_2 r^4] = [r^3,_2 r^4] = [r^4,_2 r^4] = [sr,_2 r^4]$$

$$= [sr^2,_2 r^4] = [sr^3,_2 r^4] = [sr^4,_2 r^4] = 1$$

Karena terdapat bilangan bulat tak-negatif $m = 2$ yang memenuhi $[g,_m r^4] = 1$ untuk sebarang $g \in D_{10}$, maka dapat disimpulkan bahwa r^4 merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{10}, khususnya r^4 merupakan elemen 2-Engel kiri.

6. Komutator bernorma dari $s \in D_{10}$

Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 s] = x$, untuk setiap $x \in D_8$.

Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 s]$ untuk sebarang $g \in D_{10}$ adalah

$$[r,_1 s] = [r, s] = r^{-1} \circ s^{-1} \circ r \circ s = r^4 \circ s \circ r \circ s = r^3$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1, s] = [s, s] = 1$$

$$[r^2, s] = [sr^2, s] = r$$

$$[r^4, s] = [sr^4, s] = r^2$$

$$[sr, s] = r^3$$

$$[r^3, s] = [sr^3, s] = r^4$$

Untuk $m = 2$ diperoleh komutator bernorma $[g,_2 s]$ untuk sebarang $g \in D_{10}$ adalah

$$[r,_2 s] = \big[[r, s], s\big] = [r^3, s] = (r^3)^{-1} \circ s^{-1} \circ r^3 \circ s = r^2 \circ s \circ r^3 \circ s = r^4$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_2 s] = [s,_2 s] = 1$$

$$[r^4,_2 s] = [sr^4,_2 s] = r$$

$$[r^3,_2 s] = [sr^3,_2 s] = r^2$$

$$[r^2,_2 s] = [sr^2,_2 s] = r^3$$

$$[sr,_2 s] = r^4$$

Untuk $m = 3$ diperoleh komutator bernorma $[g,_3 s]$ untuk sebarang $g \in D_{10}$ adalah

$$[r,_3 s] = \big[[r,_2 s], s\big] = [r^4, s] = (r^4)^{-1} \circ s^{-1} \circ r^4 \circ s = r \circ s \circ r^4 \circ s = r^2$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_3 s] = [s,_3 s] = 1$$

$$[r^3,_3 s] = [sr^3,_3 s] = r$$

$$[sr,_3 s] = r^2$$

$$[r^4,_3 s] = [sr^4,_3 s] = r^3$$

$$[r^2,_3 s] = [sr^2,_3 s] = r^4$$

Untuk $m = 4$ diperoleh komutator bernorma $[g,_4 s]$ untuk sebarang $g \in D_{10}$ adalah

$$[r,_4 s] = \big[[r,_3 s], s\big] = [r^2, s] = (r^2)^{-1} \circ s^{-1} \circ r^2 \circ s = r^3 \circ s \circ r^2 \circ s = r$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_4 s] = [s,_4 s] = 1$$

$$[sr,_4 s] = r$$

$$[r^2,_4 s] = [sr^2,_4 s] = r^2$$

$$[r^3,_4 s] = [sr^3,_4 s] = r^3$$

$$[r^4,_4 s] = [sr^4,_4 s] = r^3$$

Untuk $m = 5$ diperoleh komutator bernorma $[g,_5 s]$ untuk sebarang $g \in D_{10}$ adalah

$$[r,_5 s] = \big[[r,_4 s], s\big] = [r, s] = r^{-1} \circ s^{-1} \circ r \circ s = r^4 \circ s \circ r \circ s = r^3$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_5 s] = [s,_5 s] = 1$$

$$[r^2,_5 s] = [sr^2,_5 s] = r$$

$$[r^4,_5 s] = [sr^4,_5 s] = r^2$$

$$[sr,_5 s] = r^3$$

$$[r^3,_5 s] = [sr^3,_5 s] = r^4$$

Perhatikan bahwa untuk sebarang bilangan bulat positif m, komutator bernorma $[r,_m s] \neq 1$ dan $[r,_{m+t} s] = [r,_m s]$ untuk setiap $t \in \mathbb{Z}^+$. Dengan demikian s bukan merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{10}.

7. Komutator bernorma dari $sr \in D_{10}$

Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 sr] = x$, untuk setiap $x \in D_8$.

Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 sr]$ untuk sebarang $g \in D_{10}$ adalah

$$[r,_1 sr] = [r, sr] = r^{-1} \circ (sr)^{-1} \circ r \circ sr = r^4 \circ sr \circ r \circ sr = r^3$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1, sr] = [sr, sr] = 1$$

$$[r^2, sr] = [sr^3, sr] = r$$

$$[r^4, sr] = [s, sr] = r^2$$

$$[sr^2, sr] = r^3$$

$$[r^3, sr] = [sr^4, sr] = r^4$$

Untuk $m = 2$ diperoleh komutator bernorma $[g,_2 sr]$ untuk sebarang $g \in D_{10}$ adalah

$$[r,_2 sr] = \big[[r, sr], sr\big] = [r^3, sr] = (r^3)^{-1} \circ (sr)^{-1} \circ r^3 \circ sr$$

$$= r^2 \circ sr \circ r^3 \circ sr = r^4$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_2 sr] = [sr,_2 sr] = 1$$

$$[r^4,_2 sr] = [s,_2 sr] = r$$

$$[r^3,_2 sr] = [sr^4,_2 sr] = r^2$$

$$[r^2,_2 sr] = [sr^3,_2 sr] = r^3$$

$$[sr^2,_2 sr] = r^4$$

Untuk $m = 3$ diperoleh komutator bernorma $[g,_3 sr]$ untuk sebarang $g \in D_{10}$ adalah

$$[r,_3 sr] = \big[[r,_2 sr], sr\big] = [r^4, sr] = (r^4)^{-1} \circ (sr)^{-1} \circ r^4 \circ sr$$

$$= r \circ sr \circ r^4 \circ sr = r^2$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_3 sr] = [sr,_3 sr] = 1$$

$$[r^3,_3 sr] = [sr^4,_3 sr] = r$$

$$[sr^2,_3 sr] = r^2$$

$$[r^4,_3 sr] = [s,_3 sr] = r^3$$

$$[r^2,_3 sr] = [sr^3,_3 sr] = r^4$$

Untuk $m = 4$ diperoleh komutator bernorma $[g,_4 sr]$ untuk sebarang $g \in D_{10}$ adalah

$$[r,_4 sr] = \big[[r,_3 sr], sr\big] = [r^2, sr] = (r^2)^{-1} \circ (sr)^{-1} \circ r^2 \circ sr$$

$$= r^3 \circ sr \circ r^2 \circ sr = r$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_4 sr] = [sr,_4 sr] = 1$$

$$[sr^2,_4 sr] = r$$

$$[r^2,_4 sr] = [sr^3,_4 sr] = r^2$$

$$[r^3,_4 sr] = [sr^4,_4 sr] = r^3$$

$$[r^4,_4 sr] = [s,_4 sr] = r^4$$

Untuk $m = 5$ diperoleh komutator bernorma $[g,_5 sr]$ untuk sebarang $g \in D_{10}$ adalah

$$[r,_5 sr] = \big[[r,_4 sr], sr\big] = [r, sr] = r^{-1} \circ (sr)^{-1} \circ r \circ sr$$

$$= r^4 \circ sr \circ r \circ sr = r^3$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_5 sr] = [sr,_5 sr] = 1$$

$$[r^2,_5 sr] = [sr^3,_5 sr] = r$$

$$[r^4,_5 sr] = [s,_5 sr] = r^2$$

$$[sr^2,_5 sr] = r^3$$

$$[r^3,_5 sr] = [sr^4,_5 sr] = r^4$$

Perhatikan bahwa untuk sebarang bilangan bulat positif m, komutator bernorma $[r,_m sr] \neq 1$ dan $[r,_{m+t} sr] = [r,_m sr]$ untuk setiap $t \in \mathbb{Z}^+$. Dengan demikian sr bukan merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{10}.

8. Komutator bernorma dari $sr^2 \in D_{10}$

Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 sr^2] = x$, untuk setiap $x \in D_8$.

Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 sr^2]$ untuk sebarang $g \in D_{10}$ adalah

$$[r,_1 (sr^2)] = [r, sr^2] = r^{-1} \circ (sr^2)^{-1} \circ r \circ sr^2 = r^4 \circ sr^2 \circ r \circ sr^2 = r^3$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1, sr^2] = [sr^2, sr^2] = 1$$

$$[r^2, sr^2] = [sr^4, sr^2] = r$$

$$[r^4, sr^2] = [sr, sr^2] = r^2$$

$$[sr^3, sr^2] = r^3$$

$$[r^3, sr^2] = [s, sr^2] = r^4$$

Untuk $m = 2$ diperoleh komutator bernorma $[g,_2 sr^2]$ untuk sebarang $g \in D_{10}$ adalah

$$[r,_2 sr^2] = \left[[r, sr^2], sr^2\right] = [r^3, sr^2] = (r^3)^{-1} \circ (sr^2)^{-1} \circ r^3 \circ sr^2$$

$$= r^2 \circ sr^2 \circ r^3 \circ sr^2 = r^4$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_2 sr^2] = [sr^2,_2 sr^2] = 1$$

$$[r^4,_2 sr^2] = [sr,_2 sr^2] = r$$

$$[r^3,_2 sr^2] = [s,_2 sr^2] = r^2$$

$$[r^2,_2 sr^2] = [sr^4,_2 sr^2] = r^3$$

$$[sr^3,_2 sr^2] = r^4$$

Untuk $m = 3$ diperoleh komutator bernorma $[g,_3 sr^2]$ untuk sebarang $g \in D_{10}$ adalah

$$[r,_3 sr^2] = \left[[r,_2 sr^2], sr^2\right] = [r^4, sr^2] = (r^4)^{-1} \circ (sr^2)^{-1} \circ r^4 \circ sr^2$$

$$= r \circ sr^2 \circ r^4 \circ sr^2 = r^2$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_3 sr^2] = [sr^2,_3 sr^2] = 1$$

$$[r^3,_3 sr^2] = [s,_3 sr^2] = r$$

$$[sr^3,_3 sr^2] = r^2$$

$$[r^4,_3\, sr^2] = [sr,_3\, sr^2] = r^3$$

$$[r^2,_3\, sr^2] = [sr^4,_3\, sr^2] = r^4$$

Untuk $m = 4$ diperoleh komutator bernorma $[g,_4\, sr^2]$ untuk sebarang $g \in D_{10}$ adalah

$$[r,_4\, sr^2] = \big[[r,_3\, sr^2], sr^2\big] = [r^2, sr^2] = (r^2)^{-1} \circ (sr^2)^{-1} \circ r^2 \circ sr^2$$

$$= r^2 \circ sr^2 \circ r^3 \circ sr^2 = r$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_4\, sr^2] = [sr^2,_4\, sr^2] = 1$$

$$[sr^3,_4\, sr^2] = r$$

$$[r^2,_4\, sr^2] = [sr^4,_4\, sr^2] = r^2$$

$$[r^3,_4\, sr^2] = [s,_4\, sr^2] = r^3$$

$$[r^4,_4\, sr^2] = [sr,_4\, sr^2] = r^4$$

Untuk $m = 5$ diperoleh komutator bernorma $[g,_5\, sr^2]$ untuk sebarang $g \in D_{10}$ adalah

$$[r,_5\, sr^2] = \big[[r,_4\, sr^2], sr^2\big] = [r, sr^2] = r^{-1} \circ (sr^2)^{-1} \circ r \circ sr^2$$

$$= r^4 \circ sr^2 \circ r \circ sr^2 = r^3$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_5\, sr^2] = [sr^2,_5\, sr^2] = 1$$

$$[r^2,_5\, sr^2] = [sr^4,_5\, sr^2] = r$$

$$[r^4,_5\, sr^2] = [sr,_5\, sr^2] = r^2$$

$$[sr^3,_5\, sr^2] = r^3$$

$$[r^3,_5\, sr^2] = [s,_5\, sr^2] = r^4$$

Perhatikan bahwa untuk sebarang bilangan bulat positif m, komutator bernorma $[r,_m\, sr^2] \neq 1$ dan $[r,_{m+t}\, sr^2] = [r,_m\, sr^2]$ untuk setiap $t \in \mathbb{Z}^+$.

Dengan demikian sr^2 bukan merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{10}.

9. Komutator bernorma dari $sr^3 \in D_{10}$

Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 sr^3] = x$, untuk setiap $x \in D_8$.

Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 sr^3]$ untuk sebarang $g \in D_{10}$ adalah

$[r,_1 (sr^3)] = [r, sr^3] = r^{-1} \circ (sr^3)^{-1} \circ r \circ sr^3 = r^4 \circ sr^3 \circ r \circ sr^3 = r^3$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1, sr^3] = [sr^3, sr^3] = 1$$

$$[r^2, sr^3] = [s, sr^3] = r$$

$$[r^4, sr^3] = [sr^2, sr^3] = r^2$$

$$[sr^4, sr^3] = r^3$$

$$[r^3, sr^3] = [sr, sr^3] = r^4$$

Untuk $m = 2$ diperoleh komutator bernorma $[g,_2 sr^3]$ untuk sebarang $g \in D_{10}$ adalah

$$[r,_2 sr^3] = \big[[r, sr^3], sr^3\big] = [r^3, sr^3] = (r^3)^{-1} \circ (sr^3)^{-1} \circ r^3 \circ sr^3$$
$$= r^2 \circ sr^3 \circ r^3 \circ sr^3 = r^4$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_2 sr^3] = [sr^3,_2 sr^3] = 1$$

$$[r^4,_2 sr^3] = [sr^2,_2 sr^3] = r$$

$$[r^3,_2 sr^3] = [sr,_2 sr^3] = r^2$$

$$[r^2,_2 sr^3] = [s,_2 sr^3] = r^3$$

$$[sr^4,_2 sr^3] = r^4$$

Untuk $m = 3$ diperoleh komutator bernorma $[g,_3\, sr^3]$ untuk sebarang $g \in D_{10}$ adalah

$$[r,_3\, sr^3] = \left[[r,_2\, sr^3], sr^3\right] = [r^4, sr^3] = (r^4)^{-1} \circ (sr^3)^{-1} \circ r^4 \circ sr^3$$

$$= r \circ sr^3 \circ r^4 \circ sr^3 = r^2$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_3\, sr^3] = [sr^3,_3\, sr^3] = 1$$

$$[r^3,_3\, sr^3] = [sr,_3\, sr^3] = r$$

$$[sr^4,_3\, sr^3] = r^2$$

$$[r^4,_3\, sr^3] = [sr^2,_3\, sr^3] = r^3$$

$$[r^2,_3\, sr^3] = [s,_3\, sr^3] = r^4$$

Untuk $m = 4$ diperoleh komutator bernorma $[g,_4\, sr^3]$ untuk sebarang $g \in D_{10}$ adalah

$$[r,_4\, sr^3] = \left[[r,_3\, sr^3], sr^3\right] = [r^2, sr^3] = (r^2)^{-1} \circ (sr^3)^{-1} \circ r^2 \circ sr^3$$

$$= r^3 \circ sr^3 \circ r^2 \circ sr^3 = r$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_4\, sr^3] = [sr^3,_4\, sr^3] = 1$$

$$[sr^4,_4\, sr^3] = r$$

$$[r^2,_4\, sr^3] = [s,_4\, sr^3] = r^2$$

$$[r^3,_4\, sr^3] = [sr,_4\, sr^3] = r^3$$

$$[r^4,_4\, sr^3] = [sr^2,_4\, sr^3] = r^4$$

Untuk $m = 5$ diperoleh komutator bernorma $[g,_5\, sr^3]$ untuk sebarang $g \in D_{10}$ adalah

$$[r,_5\, sr^3] = \left[[r,_4\, sr^3], sr^3\right] = [r, sr^3] = r^{-1} \circ (sr^3)^{-1} \circ r \circ sr^3$$

$$= r^4 \circ sr^3 \circ r \circ sr^3 = r^3$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_5 sr^3] = [sr^3,_5 sr^3] = 1$$

$$[r^2,_5 sr^3] = [s,_5 sr^3] = r$$

$$[r^4,_5 sr^3] = [sr^2,_5 sr^3] = r^2$$

$$[sr^4,_5 sr^3] = r^3$$

$$[r^3,_5 sr^3] = [sr,_5 sr^3] = r^4$$

Perhatikan bahwa untuk sebarang bilangan bulat positif m, komutator bernorma $[r,_m sr^3] \neq 1$ dan $[r,_{m+t} sr^3] = [r,_m sr^3]$ untuk setiap $t \in \mathbb{Z}^+$. Dengan demikian sr^3 bukan merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{10}.

10. Komutator bernorma dari $sr^4 \in D_{10}$

Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 sr^4] = x$, untuk setiap $x \in D_8$.

Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 sr^4]$ untuk sebarang $g \in D_{10}$ adalah

$$[r,_1 sr^4] = [r, sr^4] = r^{-1} \circ (sr^4)^{-1} \circ r \circ sr^4 = r^4 \circ sr^4 \circ r \circ sr^4 = r^3$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1, sr^4] = [sr^4, sr^4] = 1$$

$$[r^2, sr^4] = [sr, sr^4] = r$$

$$[r^4, sr^4] = [sr^3, sr^4] = r^2$$

$$[s, sr^4] = r^3$$

$$[r^3, sr^4] = [sr^2, sr^4] = r^4$$

Untuk $m = 2$ diperoleh komutator bernorma $[g,_2 sr^4]$ untuk sebarang $g \in D_{10}$ adalah

$$[r,_2 sr^4] = \big[[r, sr^4], sr^4\big] = [r^3, sr^4] = (r^3)^{-1} \circ (sr^4)^{-1} \circ r^3 \circ sr^4$$

$$= r^2 \circ sr^4 \circ r^3 \circ sr^4 = r^4$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_2 sr^4] = [sr^4,_2 sr^4] = 1$$

$$[r^4,_2 sr^4] = [sr^3,_2 sr^4] = r$$

$$[r^3,_2 sr^4] = [sr^2,_2 sr^4] = r^2$$

$$[r^2,_2 sr^4] = [sr,_2 sr^4] = r^3$$

$$[s,_2 sr^4] = r^4$$

Untuk $m = 3$ diperoleh komutator bernorma $[g,_3 sr^4]$ untuk sebarang $g \in D_{10}$ adalah

$$[r,_3 sr^4] = \big[[r,_2 sr^4], sr^4\big] = [r^4, sr^4] = (r^4)^{-1} \circ (sr^4)^{-1} \circ r^4 \circ sr^4$$

$$= r \circ sr^4 \circ r^4 \circ sr^4 = r^2$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_3 sr^4] = [sr^4,_3 sr^4] = 1$$

$$[r^3,_3 sr^4] = [sr^2,_3 sr^4] = r$$

$$[s,_3 sr^4] = r^2$$

$$[r^4,_3 sr^4] = [sr^3,_3 sr^4] = r^3$$

$$[r^2,_3 sr^4] = [sr,_3 sr^4] = r^4$$

Untuk $m = 4$ diperoleh komutator bernorma $[g,_4 sr^4]$ untuk sebarang $g \in D_{10}$ adalah

$$[r,_4 sr^4] = \big[[r,_3 sr^4], sr^4\big] = [r^2, sr^4] = (r^2)^{-1} \circ (sr^4)^{-1} \circ r^2 \circ sr^4$$

$$= r^3 \circ sr^4 \circ r^2 \circ sr^4 = r$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_4 sr^4] = [sr^4,_4 sr^4] = 1$$

$$[s,_4 sr^4] = r$$

$$[r^2,_4 sr^4] = [sr,_4 sr^4] = r^2$$

$$[r^3,_4 sr^4] = [sr^2,_4 sr^4] = r^3$$

$$[r^4,_4 sr^4] = [sr^3,_4 sr^4] = r^4$$

Untuk $m = 5$ diperoleh komutator bernorma $[g,_5 sr^4]$ untuk sebarang $g \in D_{10}$ adalah

$$[r,_5 sr^4] = \left[[r,_4 sr^4], sr^4\right] = [r, sr^4] = r^{-1} \circ (sr^4)^{-1} \circ r \circ sr^4$$

$$= r^4 \circ sr^4 \circ r \circ sr^4 = r^3$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_5 sr^4] = [sr^4,_5 sr^4] = 1$$

$$[r^2,_5 sr^4] = [sr,_5 sr^4] = r$$

$$[r^4,_5 sr^4] = [sr^3,_5 sr^4] = r^2$$

$$[s,_5 sr^4] = r^3$$

$$[r^3,_5 sr^4] = [sr^2,_5 sr^4] = r^4$$

Perhatikan bahwa untuk sebarang bilangan bulat positif m, komutator bernorma $[r,_m sr^4] \neq 1$ dan $[r,_{m+t} sr^4] = [r,_m sr^4]$ untuk setiap $t \in \mathbb{Z}^+$. Dengan demikian sr^4 bukan merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{10}.

Dari hasil perhitungan di atas, maka diperoleh elemen-elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{10} adalah

$$L_1(D_{10}) = \{1\}$$

$$L_2(D_{10}) \setminus L_1(D_{10}) = \{r, r^2, r^3, r^4\}$$

$$L(D_{10}) = \{1, r, r^2, r^3, r^4\}.$$

4.4 Elemen Engel Kiri dari Grup Dihedral-12 $(D_{12}, \circ)$

Grup dihedral D_{2n} dengan $n = 6$ adalah $D_{12} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$. Berikutnya akan diselidiki elemen-elemen dari D_{12} yang merupakan elemen-elemen Engel kiri.

1. Komutator bernorma dari $1 \in D_{12}$

   Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 1] = x$, untuk sebarang $x \in D_{12}$.

   Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 1]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

   $$[r,_1 1] = [r, 1] = r^{-1} \circ 1^{-1} \circ r \circ 1 = r^5 \circ 1 \circ r \circ 1 = 1$$

   Dengan cara yang sama maka diperoleh

   $$[1,1] = [r^2, 1] = [r^3, 1] = [r^4, 1] = [r^5, 1] = [s, 1] = [sr, 1] = [sr^2, 1]$$
   $$= [sr^3, 1] = [sr^4, 1] = [sr^5, 1] = 1$$

   Karena terdapat bilangan bulat tak-negatif $m = 1$ yang memenuhi $[g,_m 1] = 1$ untuk sebarang $g \in D_{12}$, maka dapat disimpulkan bahwa 1 merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{12}, khususnya 1 merupakan elemen 1-Engel kiri.

2. Komutator bernorma dari $r \in D_{12}$

   Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 r] = x$, untuk setiap $x \in D_{12}$.

   Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 r]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

   $$[s,_1 r] = [s, r] = s^{-1} \circ r^{-1} \circ s \circ r = s \circ r^5 \circ s \circ r = r^2$$

   Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1, r] = [r, r] = [r^2, r] = [r^3, r] = [r^4, r] = [r^5, r] = 1$$

$$[sr, r] = [sr^2, r] = [sr^3, r] = [sr^4, r] = [sr^5, r] = r^2$$

Untuk $m = 2$ diperoleh komutator bernorma $[g,_2 r]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[s,_2 r] = \big[[s, r], r\big] = [r^2, r] = (r^2)^{-1} \circ r^{-1} \circ r^2 \circ r = r^4 \circ r^5 \circ r^2 \circ r$$
$$= 1$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_2 r] = [r,_2 r] = [r^2,_2 r] = [r^3,_2 r] = [r^4,_2 r] = [r^5,_2 r] = [sr,_2 r]$$
$$= [sr^2,_2 r] = [sr^3,_2 r] = [sr^4,_2 r] = [sr^5,_2 r] = 1$$

Karena terdapat bilangan bulat tak-negatif $m = 2$ yang memenuhi $[g,_m r] = 1$ untuk sebarang $g \in D_{12}$, maka dapat disimpulkan bahwa r merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{12}, khususnya r merupakan elemen 2-Engel kiri.

3. Komutator bernorma dari $r^2 \in D_{12}$

   Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 r^2] = x$, untuk sebarang $x \in D_{12}$.

   Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 r^2]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[s,_1 r^2] = [s, r^2] = s^{-1} \circ (r^2)^{-1} \circ s \circ r^2 = s \circ r^4 \circ s \circ r^2 = r^4$$

   Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1, r^2] = [r, r^2] = [r^2, r^2] = [r^3, r^2] = [r^4, r^2] = [r^5, r^2] = 1$$

$$[sr, r^2] = [sr^2, r^2] = [sr^3, r^2] = [sr^4, r^2] = [sr^5, r^2] = r^4$$

   Untuk $m = 2$ diperoleh komutator bernorma $[g,_2 r^2]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[s,_2 r^2] = \left[[s, r^2], r^2\right] = [r^4, r^2] = (r^4)^{-1} \circ (r^2)^{-1} \circ r^4 \circ r^2$$

$$= r^2 \circ r^4 \circ r^4 \circ r^2 = 1$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_2 r^2] = [r,_2 r^2] = [r^2,_2 r^2] = [r^3,_2 r^2] = [r^4,_2 r^2] = [r^5,_2 r^2]$$

$$= [sr,_2 r^2] = [sr^2,_2 r^2] = [sr^3,_2 r^2] = [sr^4,_2 r^2]$$

$$= [sr^5,_2 r^2] = 1$$

Karena terdapat bilangan bulat tak-negatif $m = 2$ yang memenuhi $[g,_m r^2] = 1$ untuk sebarang $g \in D_{12}$, maka dapat disimpulkan bahwa r^2 merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{12}, khususnya r^2 merupakan elemen 2-Engel kiri.

4. Komutator bernorma dari $r^3 \in D_{12}$

Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 r^3] = x$, untuk setiap $x \in D_{12}$.

Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 r^3]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[s,_1 r^3] = [s, r^3] = s^{-1} \circ (r^3)^{-1} \circ s \circ r^3 = s \circ r^3 \circ s \circ r^3 = r$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1, r^3] = [r, r^3] = [r^2, r^3] = [r^3, r^3] = [r^4, r^3] = [r^5, r^3] = [sr, r^3]$$

$$= [sr^2, r^3] = [sr^3, r^3] = [sr^4, r^3] = [sr^5, r^3] = 1$$

Karena terdapat bilangan bulat tak-negatif $m = 1$ yang memenuhi $[g,_m r^3] = 1$ untuk sebarang $g \in D_{12}$, maka dapat disimpulkan bahwa r^3 merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{12}, khususnya r^3 merupakan elemen 1-Engel kiri.

5. Komutator bernorma dari $r^4 \in D_{12}$

Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 r^4] = x$, untuk sebarang $x \in D_{12}$.

Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 r^4]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[s,_1 r^4] = [s, r^4] = s^{-1} \circ (r^4)^{-1} \circ s \circ r^4 = s \circ r^2 \circ s \circ r^4 = r^2$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1, r^4] = [r^2, r^4] = [r^3, r^4] = [r^4, r^4] = [r^5, r^4] = 1$$

$$[sr, r^4] = [sr^2, r^4] = [sr^3, r^4] = [sr^4, r^4] = [sr^5, r^4] = r^2$$

Untuk $m = 2$ diperoleh komutator bernorma $[g,_2 r^4]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[s,_2 r^4] = \left[[s, r^4], r^4\right] = [r^2, r^4] = (r^2)^{-1} \circ (r^4)^{-1} \circ r^2 \circ r^4$$

$$= r^4 \circ r^2 \circ r^2 \circ r^4 = 1$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_2 r^4] = [r,_2 r^4] = [r^2,_2 r^4] = [r^3,_2 r^4] = [r^4,_2 r^4] = [r^5,_2 r^4]$$

$$= [sr,_2 r^4] = [sr^2,_2 r^4] = [sr^3,_2 r^4] = [sr^4,_2 r^4]$$

$$= [sr^5,_2 r^4] = 1$$

Karena terdapat bilangan bulat tak-negatif $m = 2$ yang memenuhi $[g,_m r^4] = 1$ untuk sebarang $g \in D_{12}$, maka dapat disimpulkan bahwa r^4 merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{12}, khususnya r^4 merupakan elemen 2-Engel kiri.

6. Komutator bernorma dari $r^5 \in D_{12}$

Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 r^5] = x$, untuk setiap $x \in D_{12}$.

Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 r^5]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[s,_1 r^5] = [s, r^5] = s^{-1} \circ (r^5)^{-1} \circ s \circ r^5 = s \circ r \circ s \circ r^5 = r^4$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1, r^5] = [r^2, r^5] = [r^3, r^5] = [r^4, r^5] = [r^5, r^5] = 1$$

$$[sr, r^5] = [sr^2, r^5] = [sr^3, r^5] = [sr^4, r^5] = [sr^5, r^5] = r^4$$

Untuk $m = 2$ diperoleh komutator bernorma $[g,_2 r^5]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[s,_2 r^5] = \big[[s, r^5], r^5\big] = [r^4, r^5] = (r^4)^{-1} \circ (r^5)^{-1} \circ r^4 \circ r^5$$

$$= r^2 \circ r \circ r^4 \circ r^5 = 1$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_2 r^5] = [r,_2 r^5] = [r^2,_2 r^5] = [r^3,_2 r^5] = [r^4,_2 r^5] = [r^5,_2 r^5]$$

$$= [sr,_2 r^5] = [sr^2,_2 r^5] = [sr^3,_2 r^5] = [sr^4,_2 r^5]$$

$$= [sr^5,_2 r^5] = 1$$

Karena terdapat bilangan bulat tak-negatif $m = 2$ yang memenuhi $[g,_m r^5] = 1$ untuk sebarang $g \in D_{12}$, maka dapat disimpulkan bahwa r^5 merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{12}, khususnya r^5 merupakan elemen 2-Engel kiri.

7. Komutator bernorma dari $s \in D_{12}$

Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 s] = x$, untuk sebarang $x \in D_{12}$.

Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 s]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[r^2,_1 s] = [r^2, s] = (r^2)^{-1} \circ s^{-1} \circ r^2 \circ s = r^4 \circ s \circ r^2 \circ s = r^2$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1, s] = [r^3, s] = [s, s] = [sr^3, s] = 1$$

$$[r^5, s] = [sr^2, s] = [sr^5, s] = r^2$$

$$[r, s] = [r^4, s] = [sr, s] = [sr^4, s] = r^4$$

Perhatikan bahwa $[r^2, s] = r^2$ sehingga untuk sebarang bilangan bulat positif m menghasilkan $[r^2,_m s] = r^2$. Karena tidak terdapat bilangan bulat positif m yang memenuhi $[r^2,_m s] = 1$ untuk sebarang m, maka s bukan merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{12}.

8. Komutator bernorma dari $sr \in D_{12}$

Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 sr] = x$, untuk setiap $x \in D_{12}$.

Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 sr]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[r^2,_1 sr] = [r^2, sr] = (r^2)^{-1} \circ (sr)^{-1} \circ r^2 \circ sr = r^4 \circ sr \circ r^2 \circ sr = r^2$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1, sr] = [r^3, sr] = [sr, sr] = [sr^4, sr] = 1$$

$$[r^5, sr] = [s, sr] = [sr^3, sr] = r^2$$

$$[r, sr] = [r^4, sr] = [sr^2, sr] = [sr^5, sr] = r^4$$

Perhatikan bahwa $[r^2, sr] = r^2$ sehingga untuk sebarang bilangan bulat positif m menghasilkan $[r^2,_m sr] = r^2$. Karena tidak terdapat bilangan bulat positif m yang memenuhi $[r^2,_m sr] = 1$ untuk sebarang m, maka sr bukan merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{12}.

9. Komutator bernorma dari $sr^2 \in D_{12}$

Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 sr^2] = x$, untuk sebarang $x \in D_{12}$.

Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 sr^2]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[r^2,_1 sr^2] = [r^2, sr^2] = (r^2)^{-1} \circ (sr^2)^{-1} \circ r^2 \circ sr^2 = r^4 \circ sr^2 \circ r \circ sr^2$$
$$= r^2$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1, sr^2] = [r^3, sr^2] = [sr^2, sr^2] = [sr^5, sr^2] = 1$$

$$[r^5, sr^2] = [sr, sr^2] = [sr^4, sr^2] = r^2$$

$$[r, sr^2] = [r^4, sr^2] = [s, sr^2] = [sr^3, sr^2] = r^4$$

Perhatikan bahwa $[r^2, sr^2] = r^2$ sehingga untuk sebarang bilangan bulat positif m menghasilkan $[r^2,_m sr^2] = r^2$. Karena tidak terdapat bilangan bulat positif m yang memenuhi $[r^2,_m sr^2] = 1$ untuk sebarang m, maka sr^2 bukan merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{12}.

10. Komutator bernorma dari $sr^3 \in D_{12}$

Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 sr^3] = x$, untuk setiap $x \in D_{12}$.

Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 sr^3]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[r^2,_1 sr^3] = [r^2, sr^3] = (r^2)^{-1} \circ (sr^3)^{-1} \circ r^2 \circ sr^3 = r^4 \circ sr^3 \circ r^2 \circ sr^3$$
$$= r^2$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1, sr^3] = [r^3, sr^3] = [s, sr^3] = [sr^3, sr^3] = 1$$

$$[r^5, sr^3] = [sr^2, sr^3] = [sr^5, sr^3] = r^2$$

$$[r, sr^3] = [r^4, sr^3] = [sr, sr^3] = [sr^4, sr^3] = r^4$$

Perhatikan bahwa $[r^2, sr^3] = r^2$ sehingga untuk sebarang bilangan bulat positif m menghasilkan $[r^2,_m sr^3] = r^2$. Karena tidak terdapat bilangan bulat positif m yang memenuhi $[r^2,_m sr^3] = 1$ untuk sebarang m, maka sr^3 bukan merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{12}.

11. Komutator bernorma dari $sr^4 \in D_{12}$

Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 r^4] = x$, untuk sebarang $x \in D_{12}$.

Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 sr^4]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[r^2,_1 sr^4] = [r^2, sr^4] = (r^2)^{-1} \circ (sr^4)^{-1} \circ r^2 \circ sr^4 = r^4 \circ sr^4 \circ r^2 \circ sr^4$$
$$= r^2$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1, sr^4] = [r^3, sr^4] = [sr, sr^4] = [sr^4, sr^4] = 1$$

$$[r^5, sr^4] = [s, sr^4] = [sr^3, sr^4] = r^2$$

$$[r, sr^4] = [r^4, sr^4] = [sr^2, sr^4] = [sr^5, sr^4] = r^4$$

Perhatikan bahwa $[r^2, sr^4] = r^2$ sehingga untuk sebarang bilangan bulat positif m menghasilkan $[r^2,_m sr^4] = r^2$. Karena tidak terdapat bilangan bulat positif m yang memenuhi $[r^2,_m sr^4] = 1$ untuk sebarang m maka sr^4 bukan merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{12}.

12. Komutator bernorma dari $sr^5 \in D_{12}$

Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 r^5] = x$, untuk setiap $x \in D_{12}$.

Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 sr^5]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[r^2,_1 sr^5] = [r^2, sr^5] = (r^2)^{-1} \circ (sr^5)^{-1} \circ r^2 \circ sr^5 = r^4 \circ sr^5 \circ r^2 \circ sr^5$$
$$= r^2$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1, sr^5] = [r^3, sr^5] = [sr^2, sr^5] = [sr^5, sr^5] = 1$$

$$[r^5, sr^5] = [sr, sr^5] = [sr^4, sr^5] = r^2$$

$$[r, sr^5] = [r^4, sr^5] = [s, sr^5] = [sr^3, sr^5] = r^4$$

Perhatikan bahwa $[r^2, sr^5] = r^2$ sehingga untuk sebarang bilangan bulat positif m menghasilkan $[r^2,_m sr^5] = r^2$. Karena tidak terdapat bilangan bulat positif m yang memenuhi $[r^2,_m sr^5] = 1$ untuk sebarang m, maka sr^5 bukan merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{12}.

Dari hasil perhitungan di atas, maka diperoleh elemen-elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{12} adalah

$$L_1(D_{12}) = \{1\}$$

$$L_2(D_{12}) \setminus L_1(D_{12}) = \{r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$$

$$L(D_{12}) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}.$$

4.5 Elemen Engel Kiri dari dari Grup Dihedral-16 $(\boldsymbol{D_{16}},\circ)$

Grup dihedral D_{2n} dengan $n = 8$ adalah $D_{16} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$.Berikutnya akan diselidiki elemen-elemen dari D_{24} yang merupakan elemen-elemen Engel kiri.

1. Komutator bernorma dari $1 \in D_{16}$

   Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 1] = x$, untuk sebarang $x \in D_{16}$.

   Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 1]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[r,_1 1] = [r, 1] = r^{-1} \circ 1^{-1} \circ r \circ 1 = r^7 \circ 1 \circ r \circ 1 = 1$$

   Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$\begin{aligned}[1,1] = [r^2, 1] = [r^3, 1] = [r^4, 1] = [r^5, 1] = [r^6, 1] = [r^7, 1] = [s, 1] \\ = [sr, 1] = [sr^2, 1] = [sr^3, 1] = [sr^4, 1] = [sr^5, 1] \\ = [sr^6, 1] = [sr^7, 1] = 1\end{aligned}$$

   Karena terdapat bilangan bulat tak-negatif $m = 1$ yang memenuhi $[g,_m 1] = 1$ untuk sebarang $g \in D_{16}$, maka dapat disimpulkan bahwa 1 merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{16}, khususnya 1 merupakan elemen 1-Engel kiri.

2. Komutator bernorma dari $r \in D_{16}$

   Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 r] = x$, untuk setiap $x \in D_{16}$.

   Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 r]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[s,_1 r] = [s, r] = s^{-1} \circ r^{-1} \circ s \circ r = s \circ r^7 \circ s \circ r = r^2$$

   Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$\begin{aligned}[1, r] = [r, r] = [r^2, r] = [r^3, r] = [r^4, r] = [r^5, r] = [r^6, r] = [r^7, r] \\ = 1\end{aligned}$$

$$[sr, r] = [sr^2, r] = [sr^3, r] = [sr^4, r] = [sr^5, r] = [sr^6, r] = [sr^7, r]$$
$$= r^2$$

Untuk $m = 2$ diperoleh komutator bernorma $[g,_2 r]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[s,_2 r] = \big[[s, r], r\big] = [r^2, r] = (r^2)^{-1} \circ r^{-1} \circ r^2 \circ r = r^6 \circ r^7 \circ r^2 \circ r$$
$$= 1$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_2 r] = [r,_2 r] = [r^2,_2 r] = [r^3,_2 r] = [r^4,_2 r] = [r^5,_2 r] = [r^6,_2 r]$$
$$= [r^7,_2 r] = [sr,_2 r] = [sr^2,_2 r] = [sr^3,_2 r] = [sr^4,_2 r]$$
$$= [sr^5,_2 r] = [sr^6,_2 r] = [sr^7,_2 r] = 1$$

Karena terdapat bilangan bulat tak-negatif $m = 2$ yang memenuhi $[g,_m r] = 1$ untuk sebarang $g \in D_{24}$, maka dapat disimpulkan bahwa r merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{24}, khususnya r merupakan elemen 2-Engel kiri.

3. Komutator bernorma dari $r^2 \in D_{16}$

   Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 r^2] = x$, untuk setiap $x \in D_{16}$.

   Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 r^2]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[s,_1 r^2] = [s, r^2] = s^{-1} \circ (r^2)^{-1} \circ s \circ r^2 = s \circ r^6 \circ s \circ r^2 = r^4$$

   Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1, r^2] = [r, r^2] = [r^2, r^2] = [r^3, r^2] = [r^4, r^2] = [r^5, r^2] = [r^6, r^2]$$
$$= [r^7, r^2] = 1$$

$$[sr, r^2] = [sr^2, r^2] = [sr^3, r^2] = [sr^4, r^2] = [sr^5, r^2] = [sr^6, r^2]$$
$$= [sr^7, r^2] = r^4$$

Untuk $m = 2$ diperoleh komutator bernorma $[g,_2 r^2]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[s,_2 r^2] = \big[[s, r^2], r^2\big] = [r^4, r^2] = (r^4)^{-1} \circ (r^2)^{-1} \circ r^4 \circ r^2$$
$$= r^4 \circ r^6 \circ r^4 \circ r^2 = 1$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_2 r^2] = [r,_2 r^2] = [r^2,_2 r^2] = [r^3,_2 r^2] = [r^4,_2 r^2] = [r^5,_2 r^2]$$
$$= [r^6,_2 r^2] = [r^7,_2 r^2] = [sr,_2 r^2] = [sr^2,_2 r^2]$$
$$= [sr^3,_2 r^2] = [sr^4,_2 r^2] = [sr^5,_2 r^2] = [sr^6,_2 r^2]$$
$$= [sr^7,_2 r^2] = 1$$

Karena terdapat bilangan bulat tak-negatif $m = 2$ yang memenuhi $[g,_m r^2] = 1$ untuk sebarang $g \in D_{16}$, maka dapat disimpulkan bahwa r^2 merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{16}, khususnya r^2 merupakan elemen 2-Engel kiri.

4. Komutator bernorma dari $r^3 \in D_{16}$

Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 r^3] = x$, untuk setiap $x \in D_{16}$.

Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 r^3]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[s,_1 r^3] = [s, r^3] = s^{-1} \circ (r^3)^{-1} \circ s \circ r^3 = s \circ r^5 \circ s \circ r^3 = r^6$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1, r^3] = [r, r^3] = [r^2, r^3] = [r^3, r^3] = [r^4, r^3] = [r^5, r^3] = [r^6, r^3]$$
$$= [r^7, r^3] = 1$$

$$[sr, r^3] = [sr^2, r^3] = [sr^3, r^3] = [sr^4, r^3] = [sr^5, r^3] = [sr^6, r^3]$$
$$= [sr^7, r^3] = r^6$$

Untuk $m = 2$ diperoleh komutator bernorma $[g,_2 r^3]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[s,_2 r^3] = \big[[s, r^3], r^3\big] = [r^6, r^3] = (r^6)^{-1} \circ (r^3)^{-1} \circ r^6 \circ r^3$$
$$= r^2 \circ r^5 \circ r^6 \circ r^3 = 1$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_2 r^3] = [r,_2 r^3] = [r^2,_2 r^3] = [r^3,_2 r^3] = [r^4,_2 r^3] = [r^5,_2 r^3]$$
$$= [r^6,_2 r^3] = [r^7,_2 r^3] = [sr,_2 r^3] = [sr^2,_2 r^3]$$
$$= [sr^3,_2 r^3] = [sr^4,_2 r^3] = [sr^5,_2 r^3] = [sr^6,_2 r^3]$$
$$= [sr^7,_2 r^3] = 1$$

Karena terdapat bilangan bulat tak-negatif $m = 2$ yang memenuhi $[g,_m r^3] = 1$ untuk sebarang $g \in D_{16}$, maka dapat disimpulkan bahwa r^3 merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{16}, khususnya r^3 merupakan elemen 2-Engel kiri.

5. Komutator bernorma dari $r^4 \in D_{16}$

Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 r^4] = x$, untuk setiap $x \in D_{16}$.

Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 r^4]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[s,_1 r^4] = [s, r^4] = s^{-1} \circ (r^4)^{-1} \circ s \circ r^4 = s \circ r^4 \circ s \circ r^4 = 1$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,r^4]=[r^2,r^4]=[r^3,r^4]=[r^4,r^4]=[r^5,r^4]=[r^6,r^4]=[r^7,r^4]$$
$$=[r^8,r^4]=[r^9,r^4]=[r^{10},r^4]=[r^{11},r^4]=[sr,r^4]$$
$$=[sr^2,r^4]=[sr^3,r^4]=[sr^4,r^4]=[sr^5,r^4]=[sr^6,r^4]$$
$$=[sr^7,r^4]=[sr^8,r^4]=[sr^9,r^4]=[sr^{10},r^4]$$
$$=[sr^{11},r^4]=1$$

Karena terdapat bilangan bulat tak-negatif $m=1$ yang memenuhi $[g,_m r^4]=1$ untuk setiap $g\in D_{16}$, maka dapat disimpulkan bahwa r^4 merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{16}, khususnya r^4 merupakan elemen 1-Engel kiri.

6. Komutator bernorma dari $r^5\in D_{16}$

Berdasarkan definisi, untuk $m=0$ diperoleh $[x,_m y]=[x,_0 y]=x$. Jadi $[x,_0 r^5]=x$, untuk setiap $x\in D_{16}$.

Untuk $m=1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 r^5]$ untuk sebarang $g\in D_{12}$ adalah

$$[s,_1 r^5]=[s,r^5]=s^{-1}\circ(r^5)^{-1}\circ s\circ r^5=s\circ r^3\circ s\circ r^5=r^2$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,r^5]=[r^2,r^5]=[r^3,r^5]=[r^4,r^5]=[r^5,r^5]=[r^6,r^5]=[r^7,r^5]$$
$$=1$$
$$[sr,r^5]=[sr^2,r^5]=[sr^3,r^5]=[sr^4,r^5]=[sr^5,r^5]=[sr^6,r^5]$$
$$=[sr^7,r^5]=r^{10}$$

Untuk $m=2$ diperoleh komutator bernorma $[g,_2 r^5]$ untuk sebarang $g\in D_{12}$ adalah

$$[s,_2 r^5]=\big[[s,r^5],r^5\big]=[r^2,r^5]=(r^2)^{-1}\circ(r^5)^{-1}\circ r^2\circ r^5$$
$$=r^6\circ r^3\circ r^2\circ r^5=1$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_2 r^5] = [r,_2 r^5] = [r^2,_2 r^5] = [r^3,_2 r^5] = [r^4,_2 r^5] = [r^5,_2 r^5]$$

$$= [r^6,_2 r^5] = [r^7,_2 r^5] = [sr,_2 r^5] = [sr^2,_2 r^5]$$

$$= [sr^3,_2 r^5] = [sr^4,_2 r^5] = [sr^5,_2 r^5] = [sr^6,_2 r^5]$$

$$= [sr^7,_2 r^5] = 1$$

Karena terdapat bilangan bulat tak-negatif $m = 2$ yang memenuhi $[g,_m r^5] = 1$ untuk sebarang $g \in D_{16}$, maka dapat disimpulkan bahwa r^5 merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{16}, khususnya r^5 merupakan elemen 2-Engel kiri.

7. Komutator bernorma dari $r^6 \in D_{16}$

Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 r^6] = x$, untuk setiap $x \in D_{16}$.

Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 r^6]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[s,_1 r^6] = [s, r^6] = s^{-1} \circ (r^6)^{-1} \circ s \circ r^6 = s \circ r^2 \circ s \circ r^6 = 1$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1, r^6] = [r^2, r^6] = [r^3, r^6] = [r^4, r^6] = [r^5, r^6] = [r^6, r^6] = [r^7, r^6]$$

$$= 1$$

$$[sr, r^6] = [sr^2, r^6] = [sr^3, r^6] = [sr^4, r^6] = [sr^5, r^6] = [sr^6, r^6]$$

$$= [sr^7, r^6] = r^4$$

Untuk $m = 2$ diperoleh komutator bernorma $[g,_2 r^6]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[s,_2 r^6] = \big[[s, r^6], r^6\big] = [r^4, r^6] = (r^4)^{-1} \circ (r^6)^{-1} \circ r^4 \circ r^6$$

$$= r^4 \circ r^2 \circ r^4 \circ r^6 = 1$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_2 r^6] = [r,_2 r^6] = [r^2,_2 r^6] = [r^3,_2 r^6] = [r^4,_2 r^6] = [r^5,_2 r^6]$$
$$= [r^6,_2 r^6] = [r^7,_2 r^6] = [sr,_2 r^6] = [sr^2,_2 r^6]$$
$$= [sr^3,_2 r^6] = [sr^4,_2 r^6] = [sr^5,_2 r^6] = [sr^6,_2 r^6]$$
$$= [sr^7,_2 r^6] = 1$$

Karena terdapat bilangan bulat tak-negatif $m = 2$ yang memenuhi $[g,_m r^6] = 1$ untuk sebarang $g \in D_{16}$, maka dapat disimpulkan bahwa r^6 merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{16}, khususnya r^6 merupakan elemen 2-Engel kiri.

8. Komutator bernorma dari $r^7 \in D_{16}$

Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 r^7] = x$, untuk setiap $x \in D_{16}$.

Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 r^7]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[s,_1 r^7] = [s, r^7] = s^{-1} \circ (r^7)^{-1} \circ s \circ r^7 = s \circ r \circ s \circ r^7 = r^6$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1, r^7] = [r^2, r^7] = [r^3, r^7] = [r^4, r^7] = [r^5, r^7] = [r^6, r^7] = [r^7, r^7]$$
$$= 1$$
$$[sr, r^7] = [sr^2, r^7] = [sr^3, r^7] = [sr^4, r^7] = [sr^5, r^7] = [sr^6, r^7]$$
$$= [sr^7, r^7] = r^2$$

Untuk $m = 2$ diperoleh komutator bernorma $[g,_2 r^7]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[s,_2 r^7] = \big[[s, r^7], r^7\big] = [r^6, r^7] = (r^6)^{-1} \circ (r^7)^{-1} \circ r^6 \circ r^7$$
$$= r^2 \circ r \circ r^6 \circ r^7 = 1$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_2 r^7] = [r,_2 r^7] = [r^2,_2 r^7] = [r^3,_2 r^7] = [r^4,_2 r^7] = [r^5,_2 r^7]$$

$$= [r^6,_2 r^7] = [r^7,_2 r^7] = [sr,_2 r^7] = [sr^2,_2 r^7]$$

$$= [sr^3,_2 r^7] = [sr^4,_2 r^7] = [sr^5,_2 r^7] = [sr^6,_2 r^7]$$

$$= [sr^7,_2 r^7] = 1$$

Karena terdapat bilangan bulat tak-negatif $m = 2$ yang memenuhi $[g,_m r^7] = 1$ untuk setiap $g \in D_{16}$, maka dapat disimpulkan bahwa r^7 merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{16}, khususnya r^7 merupakan elemen 2-Engel kiri.

9. Komutator bernorma dari $s \in D_{16}$

Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 s] = x$, untuk setiap $x \in D_{16}$.

Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 s]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[r,_1 s] = [r, s] = r^{-1} \circ s^{-1} \circ r \circ s = r^7 \circ s \circ r \circ s = r^6$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1, s] = [r^4, s] = [s, s] = [sr^4, s] = 1$$

$$[r^3, s] = [r^7, s] = [sr^3, s] = [sr^7, s] = r^2$$

$$[r^2, s] = [sr^6, s] = [sr^2, s] = [sr^6, s] = r^4$$

$$[r^5, s] = [sr, s] = [sr^5, s] = r^6$$

Untuk $m = 2$ diperoleh komutator bernorma $[g,_2 s]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[r,_2 s] = \big[[r, s], s\big] = [r^6, s] = (r^6)^{-1} \circ s^{-1} \circ r^6 \circ s = r^2 \circ s \circ r^6 \circ s = r^4$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_2 s] = [r^2,_2 s] = [r^4,_2 s] = [r^6,_2 s] = [s,_2 s] = [sr^2,_2 s] = [sr^4,_2 s]$$
$$= [sr^6,_2 s] = 1$$

$$[r^3,_2 s] = [r^5,_2 s] = [r^7,_2 s] = [sr,_2 s] = [sr^3,_2 s] = [sr^5,_2 s] = [sr^7,_2 s]$$
$$= r^4$$

Untuk $m = 3$ diperoleh komutator bernorma $[g,_3 s]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[r,_3 s] = \big[[r,_2 s], s\big] = [r^4, s] = (r^4)^{-1} \circ s^{-1} \circ r^4 \circ s = r^4 \circ s \circ r^4 \circ s = 1$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_3 s] = [r^2,_3 s] = [r^4,_3 s] = [r^6,_3 s] = [s,_3 s] = [sr^2,_3 s] = [sr^4,_3 s]$$
$$= [sr^6,_3 s] = [r^3,_3 s] = [r^5,_3 s] = [r^7,_3 s] = [sr,_3 s]$$
$$= [sr^3,_3 s] = [sr^5,_3 s] = [sr^7,_3 s] = 1$$

Karena terdapat bilangan bulat tak-negatif $m = 3$ yang memenuhi $[g,_m 3] = 1$ untuk sebarang $g \in D_{16}$, maka dapat disimpulkan bahwa s merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{16}, khususnya s merupakan elemen 3-Engel kiri.

10. Komutator bernorma dari $sr \in D_{16}$

Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 sr] = x$, untuk setiap $x \in D_{16}$.

Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 sr]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[r,_1 sr] = [r, sr] = r^{-1} \circ (sr)^{-1} \circ r \circ sr = r^7 \circ sr \circ r \circ sr = r^6$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1, sr] = [r^4, sr] = [sr, sr] = [sr^5, sr] = 1$$

$$[r^3, sr] = [r^7, sr] = [s, sr] = [sr^4, sr] = r^2$$

$$[r^2, sr] = [sr^6, sr] = [sr^3, sr] = [sr^7, sr] = r^4$$

$$[r^5, sr] = [sr^2, sr] = [sr^6, sr] = r^6$$

Untuk $m = 2$ diperoleh komutator bernorma $[g,_2 sr]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[r,_2 sr] = \big[[r, sr], sr\big] = [r^6, sr] = (r^6)^{-1} \circ (sr)^{-1} \circ r^6 \circ sr$$

$$= r^2 \circ sr \circ r^6 \circ sr = r^4$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_2 sr] = [r^2,_2 sr] = [r^4,_2 sr] = [r^6,_2 sr] = [sr,_2 sr] = [sr^3,_2 sr]$$

$$= [sr^5,_2 sr] = [sr^7,_2 sr] = 1$$

$$[r^3,_2 sr] = [r^5,_2 sr] = [r^7,_2 sr] = [s,_2 sr] = [sr^2,_2 sr] = [sr^4,_2 sr]$$

$$= [sr^6,_2 sr] = r^4$$

Untuk $m = 3$ diperoleh komutator bernorma $[g,_3 sr]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[r,_3 sr] = \big[[r,_2 sr], sr\big] = [r^4, sr] = (r^4)^{-1} \circ (sr)^{-1} \circ r^4 \circ sr$$

$$= r^4 \circ sr \circ r^4 \circ sr = 1$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_3 sr] = [r^2,_3 sr] = [r^4,_3 sr] = [r^6,_3 sr] = [s,_3 sr] = [sr^2,_3 sr]$$

$$= [sr^4,_3 sr] = [sr^6,_3 sr] = [r^3,_3 sr] = [r^5,_3 sr]$$

$$= [r^7,_3 sr] = [sr,_3 sr] = [sr^3,_3 sr] = [sr^5,_3 sr]$$

$$= [sr^7,_3 sr] = 1$$

Karena terdapat bilangan bulat tak-negatif $m = 3$ yang memenuhi $[g,_m 3] = 1$ untuk setiap $g \in D_{16}$, maka dapat disimpulkan bahwa sr merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{16}, khususnya sr merupakan elemen 3-Engel kiri.

11. Komutator bernorma dari $sr^2 \in D_{16}$

Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 sr^2] = x$, untuk setiap $x \in D_{16}$.

Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 sr^2]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[r,_1 sr^2] = [r, sr^2] = r^{-1} \circ (sr^2)^{-1} \circ r \circ sr^2 = r^7 \circ sr^2 \circ r \circ sr^2 = r^6$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1, sr^2] = [r^4, sr^2] = [sr^2, sr^2] = [sr^6, sr^2] = 1$$

$$[r^3, sr^2] = [r^7, sr^2] = [sr, sr^2] = [sr^5, sr^2] = r^2$$

$$[r^2, sr^2] = [r^6, sr^2] = [s, sr^2] = [sr^4, sr^2] = r^4$$

$$[r^5, sr^2] = [sr^3, sr^2] = [sr^7, sr^2] = r^6$$

Untuk $m = 2$ diperoleh komutator bernorma $[g,_2 sr^2]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[r,_2 sr^2] = \big[[r, sr^2], sr^2\big] = [r^6, sr^2] = (r^6)^{-1} \circ (sr^2)^{-1} \circ r^6 \circ sr^2$$

$$= r^2 \circ sr^2 \circ r^6 \circ sr^2 = r^4$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_2 sr^2] = [r^2,_2 sr^2] = [r^4,_2 sr^2] = [r^6,_2 sr^2] = [s,_2 sr^2] = [sr^2,_2 sr^2]$$

$$= [sr^4,_2 sr^2] = [sr^6,_2 sr^2] = 1$$

$$[r^3,_2 sr^2] = [r^5,_2 sr^2] = [r^7,_2 sr^2] = [sr,_2 sr^2] = [sr^3,_2 sr^2]$$

$$= [sr^5,_2 sr^2] = [sr^7,_2 sr^2] = r^4$$

Untuk $m = 3$ diperoleh komutator bernorma $[g,_3 sr^2]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[r,_3 sr^2] = \big[[r,_2 sr^2], sr^2\big] = [r^4, sr^2] = (r^4)^{-1} \circ (sr^2)^{-1} \circ r^4 \circ sr^2$$

$$= r^4 \circ sr^2 \circ r^4 \circ sr^2 = 1$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_3 sr^2] = [r^2,_3 sr^2] = [r^4,_3 sr^2] = [r^6,_3 sr^2] = [s,_3 sr^2] = [sr^2,_3 sr^2]$$

$$= [sr^4,_3 sr^2] = [sr^6,_3 sr^2] = [r^3,_3 sr^2] = [r^5,_3 sr^2]$$

$$= [r^7,_3 sr^2] = [sr,_3 sr^2] = [sr^3,_3 sr^2] = [sr^5,_3 sr^2]$$

$$= [sr^7,_3 sr^2] = 1$$

Karena terdapat bilangan bulat tak-negatif $m = 3$ yang memenuhi $[g,_m 3] = 1$ untuk setiap $g \in D_{16}$, maka dapat disimpulkan bahwa sr^2 merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{16}, khususnya sr^2 merupakan elemen 3-Engel kiri.

12. Komutator bernorma dari $sr^3 \in D_{16}$

Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 sr^3] = x$, untuk setiap $x \in D_{16}$.

Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 sr^3]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[r,_1 sr^3] = [r, sr^3] = r^{-1} \circ (sr^3)^{-1} \circ r \circ sr^3 = r^7 \circ sr^3 \circ r \circ sr^3 = r^6$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1, sr^3] = [r^4, sr^3] = [sr^3, sr^3] = [sr^7, sr^3] = 1$$

$$[r^3, sr^3] = [r^7, sr^3] = [sr^2, sr^3] = [sr^6, sr^3] = r^2$$

$$[r^2, sr^3] = [r^6, sr^3] = [sr, sr^3] = [sr^5, sr^3] = r^4$$

$$[r^5, sr^3] = [s, sr^3] = [sr^4, sr^3] = r^6$$

Untuk $m = 2$ diperoleh komutator bernorma $[g,_2 sr^3]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[r,_2 sr^3] = \left[[r, sr^3], sr^3\right] = [r^6, sr^3] = (r^6)^{-1} \circ (sr^3)^{-1} \circ r^6 \circ sr^3$$

$$= r^2 \circ sr^3 \circ r^6 \circ sr^3 = r^4$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_2 sr^3] = [r^2,_2 sr^3] = [r^4,_2 sr^3] = [r^6,_2 sr^3] = [sr,_2 sr^3]$$

$$= [sr^3,_2 sr^3] = [sr^5,_2 sr^3] = [sr^7,_2 sr^3] = 1$$

$$[r^3,_2 sr^3] = [r^5,_2 sr^3] = [r^7,_2 sr^3] = [s,_2 sr^3] = [sr^2,_2 sr^3]$$

$$= [sr^4,_2 sr^3] = [sr^6,_2 sr^3] = r^4$$

Untuk $m = 3$ diperoleh komutator bernorma $[g,_3 sr^3]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[r,_3 sr^3] = \big[[r,_2 sr^3], sr^3\big] = [r^4, sr^3] = (r^4)^{-1} \circ (sr^3)^{-1} \circ r^4 \circ sr^3$$

$$= r^4 \circ sr^3 \circ r^4 \circ sr^3 = 1$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_3 sr^3] = [r^2,_3 sr^3] = [r^4,_3 sr^3] = [r^6,_3 sr^3] = [s,_3 sr^3] = [sr^2,_3 sr^3]$$

$$= [sr^4,_3 sr^3] = [sr^6,_3 sr^3] = [r^3,_3 sr^3] = [r^5,_3 sr^3]$$

$$= [r^7,_3 sr^3] = [sr,_3 sr^3] = [sr^3,_3 sr^3] = [sr^5,_3 sr^3]$$

$$= [sr^7,_3 sr^3] = 1$$

Karena terdapat bilangan bulat tak-negatif $m = 3$ yang memenuhi $[g,_m 3] = 1$ untuk setiap $g \in D_{16}$, maka dapat disimpulkan bahwa sr^3 merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{16}, khususnya sr^3 merupakan elemen 3-Engel kiri.

13. Komutator bernorma dari $sr^4 \in D_{16}$

Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 sr^4] = x$, untuk setiap $x \in D_{16}$.

Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 sr^4]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[r,_1 sr^4] = [r, sr^4] = r^{-1} \circ (sr^4)^{-1} \circ r \circ sr^4 = r^7 \circ sr^4 \circ r \circ sr^4 = r^4$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1, sr^4] = [r^4, sr^4] = [s, sr^4] = [sr^4, sr^4] = 1$$

$$[r^3, sr^4] = [r^7, sr^4] = [sr^3, sr^4] = [sr^7, sr^4] = r^2$$

$$[r^2, sr^4] = [r^6, sr^4] = [sr^2, sr^4] = [sr^6, sr^4] = r^4$$

$$[r^5, sr^4] = [sr, sr^4] = [sr^5, sr^4] = r^6$$

Untuk $m = 2$ diperoleh komutator bernorma $[g,_2 sr^4]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[r,_2 sr^4] = \left[[r, sr^4], sr^4\right] = [r^6, sr^4] = (r^6)^{-1} \circ (sr^4)^{-1} \circ r^6 \circ sr^4$$

$$= r^2 \circ sr^4 \circ r^6 \circ sr^4 = r^4$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_2 sr^4] = [r^2,_2 sr^4] = [r^4,_2 sr^4] = [r^6,_2 sr^4] = [s,_2 sr^4] = [sr^2,_2 sr^4]$$

$$= [sr^4,_2 sr^4] = [sr^6,_2 sr^4] = 1$$

$$[r^3,_2 sr^4] = [r^5,_2 sr^4] = [r^7,_2 sr^4] = [sr,_2 sr^4] = [sr^3,_2 sr^4]$$

$$= [sr^5,_2 sr^4] = [sr^7,_2 sr^4] = r^4$$

Untuk $m = 3$ diperoleh komutator bernorma $[g,_3 sr^4]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[r,_3 sr^4] = \left[[r,_2 sr^4], sr^4\right] = [r^4, sr^4] = (r^4)^{-1} \circ (sr^4)^{-1} \circ r^4 \circ sr^4$$

$$= r^4 \circ sr^4 \circ r^4 \circ sr^4 = 1$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_3 sr^4] = [r^2,_3 sr^4] = [r^4,_3 sr^4] = [r^6,_3 sr^4] = [s,_3 sr^4] = [sr^2,_3 sr^4]$$

$$= [sr^4,_3 sr^4] = [sr^6,_3 sr^4] = [r^3,_3 sr^4] = [r^5,_3 sr^4]$$

$$= [r^7,_3 sr^4] = [sr,_3 sr^4] = [sr^3,_3 sr^4] = [sr^5,_3 sr^4]$$

$$= [sr^7,_3 sr^4] = 1$$

Karena terdapat bilangan bulat tak-negatif $m = 3$ yang memenuhi $[g,_m 3] = 1$ untuk setiap $g \in D_{16}$, maka dapat disimpulkan bahwa sr^4 merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{16}, khususnya sr^4 merupakan elemen 3-Engel kiri.

14. Komutator bernorma dari $sr^5 \in D_{16}$

Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 sr^5] = x$, untuk setiap $x \in D_{16}$.

Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 sr^5]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[r,_1 sr^5] = [r, sr^5] = r^{-1} \circ (sr^5)^{-1} \circ r \circ sr^5 = r^7 \circ sr^5 \circ r \circ sr^5 = r^6$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1, sr^5] = [r^4, sr^5] = [sr^5, sr^5] = [sr, sr^5] = 1$$

$$[r^3, sr^5] = [r^7, sr^5] = [s, sr^5] = [sr^4, sr^5] = r^2$$

$$[r^2, sr^5] = [r^6, sr^5] = [sr^3, sr^5] = [sr^7, sr^5] = r^4$$

$$[r^5, sr^5] = [sr^2, sr^5] = [sr^6, sr^5] = r^6$$

Untuk $m = 2$ diperoleh komutator bernorma $[g,_2 sr^5]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[r,_2 sr^5] = \big[[r, sr^5], sr^5\big] = [r^6, sr^5] = (r^6)^{-1} \circ (sr^5)^{-1} \circ r^6 \circ sr^5$$

$$= r^2 \circ sr^5 \circ r^6 \circ sr^5 = r^4$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_2 sr^5] = [r^2,_2 sr^5] = [r^4,_2 sr^5] = [r^6,_2 sr^5] = [sr,_2 sr^5]$$

$$= [sr^3,_2 sr^5] = [sr^5,_2 sr^5] = [sr^7,_2 sr^5] = 1$$

$$[r^3,_2 sr^5] = [r^5,_2 sr^5] = [r^7,_2 sr^5] = [s,_2 sr^5] = [sr^2,_2 sr^5]$$

$$= [sr^4,_2 sr^5] = [sr^6,_2 sr^5] = r^4$$

Untuk $m = 3$ diperoleh komutator bernorma $[g,_3\, sr^5]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[r,_3\, sr^5] = \left[[r,_2\, sr^5], sr^5\right] = [r^4, sr^5] = (r^4)^{-1} \circ (sr^5)^{-1} \circ r^4 \circ sr^5$$
$$= r^4 \circ sr^5 \circ r^4 \circ sr^5 = 1$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_3\, sr^5] = [r^2,_3\, sr^5] = [r^4,_3\, sr^5] = [r^6,_3\, sr^5] = [s,_3\, sr^5] = [sr^2,_3\, sr^5]$$
$$= [sr^4,_3\, sr^5] = [sr^6,_3\, sr^5] = [r^3,_3\, sr^5] = [r^5,_3\, sr^5]$$
$$= [r^7,_3\, sr^5] = [sr,_3\, sr^5] = [sr^3,_3\, sr^5] = [sr^5,_3\, sr^5]$$
$$= [sr^7,_3\, sr^5] = 1$$

Karena terdapat bilangan bulat tak-negatif $m = 3$ yang memenuhi $[g,_m\, 3] = 1$ untuk setiap $g \in D_{16}$, maka dapat disimpulkan bahwa sr^5 merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{16}, khususnya sr^5 merupakan elemen 3-Engel kiri.

15. Komutator bernorma dari $sr^6 \in D_{16}$

Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m\, y] = [x,_0\, y] = x$. Jadi $[x,_0\, sr^6] = x$, untuk setiap $x \in D_{16}$.

Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1\, sr^6]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[r,_1\, sr^6] = [r, sr^6] = r^{-1} \circ (sr^6)^{-1} \circ r \circ sr^6 = r^7 \circ sr^6 \circ r \circ sr^6 = r^6$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1, sr^6] = [r^4, sr^6] = [sr^2, sr^6] = [sr^6, sr^6] = 1$$
$$[r^3, sr^6] = [r^7, sr^6] = [sr, sr^6] = [sr^5, sr^6] = r^2$$
$$[r^2, sr^6] = [sr^6, sr^6] = [s, sr^6] = [sr^4, sr^6] = r^4$$
$$[r^5, sr^6] = [sr^3, sr^6] = [sr^7, sr^6] = r^6$$

Untuk $m = 2$ diperoleh komutator bernorma $[g,_2 sr^6]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[r,_2 sr^6] = \left[[r, sr^6], sr^6\right] = [r^6, sr^6] = (r^6)^{-1} \circ (sr^6)^{-1} \circ r^6 \circ sr^6$$
$$= r^2 \circ sr^6 \circ r^6 \circ sr^6 = r^4$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_2 sr^6] = [r^2,_2 sr^6] = [r^4,_2 sr^6] = [r^6,_2 sr^6] = [s,_2 sr^6] = [sr^2,_2 sr^6]$$
$$= [sr^4,_2 sr^6] = [sr^6,_2 sr^6] = 1$$
$$[r^3,_2 sr^6] = [r^5,_2 sr^6] = [r^7,_2 sr^6] = [sr,_2 sr^6] = [sr^3,_2 sr^6]$$
$$= [sr^5,_2 sr^6] = [sr^7,_2 sr^6] = r^4$$

Untuk $m = 3$ diperoleh komutator bernorma $[g,_3 sr^6]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[r,_3 sr^6] = \left[[r,_2 sr^6], sr^6\right] = [r^4, sr^6] = (r^4)^{-1} \circ (sr^6)^{-1} \circ r^4 \circ sr^6$$
$$= r^4 \circ sr^6 \circ r^4 \circ sr^6 = 1$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_3 sr^6] = [r^2,_3 sr^6] = [r^4,_3 sr^6] = [r^6,_3 sr^6] = [s,_3 sr^6] = [sr^2,_3 sr^6]$$
$$= [sr^4,_3 sr^6] = [sr^6,_3 sr^6] = [r^3,_3 sr^6] = [r^5,_3 sr^6]$$
$$= [r^7,_3 sr^6] = [sr,_3 sr^6] = [sr^3,_3 sr^6] = [sr^5,_3 sr^6]$$
$$= [sr^7,_3 sr^6] = 1$$

Karena terdapat bilangan bulat tak-negatif $m = 3$ yang memenuhi $[g,_m 3] = 1$ untuk setiap $g \in D_{16}$, maka dapat disimpulkan bahwa sr^6 merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{16}, khususnya sr^6 merupakan elemen 3-Engel kiri.

16. Komutator bernorma dari $sr^7 \in D_{16}$

Berdasarkan definisi, untuk $m = 0$ diperoleh $[x,_m y] = [x,_0 y] = x$. Jadi $[x,_0 sr^7] = x$, untuk setiap $x \in D_{16}$.

Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[g,_1 sr^7]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[r,_1 sr^7] = [r, sr^7] = r^{-1} \circ (sr^7)^{-1} \circ r \circ sr^7 = r^7 \circ sr^7 \circ r \circ sr^7 = r^6$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1, sr^7] = [r^4, sr^7] = [sr^3, sr^7] = [sr^7, sr^7] = 1$$

$$[r^3, sr^7] = [r^7, sr^7] = [sr^2, sr^7] = [sr^6, sr^7] = r^2$$

$$[r^2, sr^7] = [r^6, sr^7] = [sr, sr^7] = [sr^5, sr^7] = r^4$$

$$[r^5, sr^7] = [s, sr^7] = [sr^4, sr^7] = r^6$$

Untuk $m = 2$ diperoleh komutator bernorma $[g,_2 sr^7]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[r,_2 sr^7] = \big[[r, sr^7], sr^7\big] = [r^6, sr^7] = (r^6)^{-1} \circ (sr^7)^{-1} \circ r^6 \circ sr^7$$

$$= r^2 \circ sr^7 \circ r^6 \circ sr^7 = r^4$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_2 sr^7] = [r^2,_2 sr^7] = [r^4,_2 sr^7] = [r^6,_2 sr^7] = [sr,_2 sr^7]$$

$$= [sr^3,_2 sr^7] = [sr^5,_2 sr^7] = [sr^7,_2 sr^7] = 1$$

$$[r^3,_2 sr^7] = [r^5,_2 sr^7] = [r^7,_2 sr^7] = [s,_2 sr^7] = [sr^2,_2 sr^7]$$

$$= [sr^4,_2 sr^7] = [sr^6,_2 sr^7] = r^4$$

Untuk $m = 3$ diperoleh komutator bernorma $[g,_3 sr^7]$ untuk sebarang $g \in D_{12}$ adalah

$$[r,_3 sr^7] = \big[[r,_2 sr^7], sr^7\big] = [r^4, sr^7] = (r^4)^{-1} \circ (sr^7)^{-1} \circ r^4 \circ sr^7$$

$$= r^4 \circ sr^7 \circ r^4 \circ sr^7 = 1$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$[1,_3 sr^7] = [r^2,_3 sr^7] = [r^4,_3 sr^7] = [r^6,_3 sr^7] = [s,_3 sr^7] = [sr^2,_3 sr^7]$$

$$= [sr^4,_3 sr^7] = [sr^6,_3 sr^7] = [r^3,_3 sr^7] = [r^5,_3 sr^7]$$

$$= [r^7,_3 sr^7] = [sr,_3 sr^7] = [sr^3,_3 sr^7] = [sr^5,_3 sr^7]$$

$$= [sr^7,_3 sr^7] = 1$$

Karena terdapat bilangan bulat tak-negatif $m = 3$ yang memenuhi $[g,_m 3] = 1$ untuk setiap $g \in D_{16}$, maka dapat disimpulkan bahwa sr^7 merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{16}, khususnya sr^7 merupakan elemen 3-Engel kiri.

Dari hasil perhitungan di atas, maka diperoleh elemen-elemen Engel kiri dari grup dihedral D_{12} adalah

$$L_1(D_{16}) = \{1, r^4\}$$

$$L_2(D_{16}) \setminus L_1(D_{16}) = \{r, r^2, r^3, r^5, r^6, r^7\}$$

$$L_3(D_{16}) \setminus L_2(D_{16}) = \{s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$$

$$L(D_{16}) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\} = D_{16}.$$

4.6 Bentuk Umum Elemen Engel Kiri dari Grup Dihedral

Dengan langkah-langkah perhitungan yang sama seperti untuk $n =$ 3,4,5,6,8 penulis juga menentukan elemen-elemen Engel kiri dari grup dihedral $(D_{2n},\circ)$ untuk $n =$ 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 24, 28, 32, 36, 40. Selanjutnya dilakukan tabulasi dari hasil yang telah diperoleh pada Tabel 4.1.

Tabel 4.1 Tabulasi Elemen-elemen Engel Kiri

Elemen m-Engel Kiri (m bilangan bulat terkecil)					
n	$L_1(D_{2n})$	$L_2(D_{2n}) \setminus L_1(D_{2n})$	$L_3(D_{2n}) \setminus L_2(D_{2n})$	$L_4(D_{2n}) \setminus L_3(D_{2n})$	$L_5(D_{2n}) \setminus L_4(D_{2n})$
3	1	r, r^2			
4	$1, r^2$	$r, r^3, s, sr, sr^2, sr^3$			
5	1	r, r^2, r^3, r^4			
6	$1, r^3$	r, r^2, r^4, r^5			
7	1	$r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6$			
8	$1, r^4$	$r, r^2, r^3, r^5, r^6,$	$s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7$		
9	1	$r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8$			
10	$1, r^5$	$r, r^2, r^3, r^4, r^6, r^7, r^8, r^9$			
11	1	$r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, r^9, r^{10}$			
12	$1, r^6$	$r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^7, r^8, r^9, r^{10}, r^{11}$			
13	1	$r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, r^9, r^{10}, r^{11}, r^{12}$			
14	$1, r^7$	$r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^8, r^9, r^{10}, r^{11}, r^{12}, r^{13}$			
15	1	$r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, r^9, r^{10}, r^{11}, r^{12}, r^{13}, r^{14}$			
16	$1, r^8$	$r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^9, r^{10}, r^{11}, r^{12}, r^{13}, r^{14}, r^{15}$		$sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8, sr^9, sr^{10}, sr^{11}, sr^{12}, sr^{13}, sr^{14}, sr^{15}$	
17	1	$r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, r^9, r^{10}, r^{11}, r^{12}, r^{13}, r^{14}, r^{15}, r^{16}$			
18	$1, r^9$	$r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, r^{10}, r^{11}, r^{12}, r^{13}, r^{14}, r^{15}, r^{16}, r^{17}$			

19	1	$r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, r^9, r^{10}, r^{11}, r^{12}, r^{13}, r^{14}, r^{15}, r^{16}, r^{17}, r^{18}$			
20	$1, r^{10}$	$r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, r^9, r^{11}, r^{12}, r^{13}, r^{14}, r^{15}, r^{16}, r^{17}, r^{18}, r^{19}$			
24	$1, r^{12}$	$r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, r^9, r^{10}, r^{11}, r^{13}, r^{14}, r^{15}, r^{16}, r^{17}, r^{18}, r^{19}, r^{20}, r^{21}, r^{22}, r^{23}$			
28	$1, r^{14}$	$r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, r^9, r^{10}, r^{11}, r^{12}, r^{13}, r^{15}, r^{16}, r^{17}, r^{18}, r^{19}, r^{20}, r^{21}, r^{22}, r^{23}, r^{24}, r^{25}, r^{26}, r^{27}$			
32	$1, r^{16}$	$r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, r^9, r^{10}, r^{11}, r^{12}, r^{13}, r^{14}, r^{15}, r^{17}, r^{18}, r^{19}, r^{20}, r^{21}, r^{22}, r^{23}, r^{24}, r^{25}, r^{26}, r^{27}, r^{28}, r^{29}, r^{30}, r^{31}$			$sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8, sr^9, sr^{10}, sr^{11}, sr^{12}, sr^{13}, sr^{14}, sr^{15}, sr^{16}, sr^{17}, sr^{18}, sr^{19}, sr^{20}, sr^{21}, sr^{22}, sr^{23}, sr^{24}, sr^{25}, sr^{26}, sr^{27}, sr^{28}, sr^{29}, sr^{30}, sr^{31}$
36	$1, r^{18}$	$r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, r^9, r^{10}, r^{11}, r^{12}, r^{13}, r^{14}, r^{15}, r^{16}, r^{17}, r^{19}, r^{20}, r^{21}, r^{22}, r^{23}, r^{24}, r^{25}, r^{26}, r^{27}, r^{28}, r^{29}, r^{30}, r^{31}, r^{32}, r^{33}, r^{34}, r^{35}$			

40	$1, r^{20}$	$r, r^2, r^3, r^4, r^5,$ $r^6, r^7, r^8, r^9,$ $r^{10}, r^{11}, r^{12},$ $r^{13}, r^{14}, r^{15},$ $r^{16}, r^{17}, r^{18},$ $r^{19}, r^{21}, r^{22},$ $r^{23}, r^{24}, r^{25},$ $r^{26}, r^{27}, r^{28},$ $r^{29}, r^{30}, r^{31},$ $r^{32}, r^{33}, r^{34},$ $r^{35} r^{36}, r^{37},$ $r^{38},\ ^{39}$			

Dari Tabel 4.1, dapat ditentukan elemen-elemen Engel kiri dari grup *Dihedral*-$2n$ $(D_{2n}, \circ)$ secara umum. Elemen-elemen Engel kiri dari grup *Dihedral*-$2n$ $(D_{2n}, \circ)$ dijelaskan pada teorema berikut:

Teorema 4.1 Misalkan $n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 3$ dan n ganjil maka elemen-elemen Engel kiri dari grup dihedral $(D_{2n}, \circ)$ adalah

$$L_1(D_{2n}) = \{1\}$$

$$L_2(D_{2n}) \setminus L_1(D_{2n}) = \{r, r^2, \dots, r^{n-1}\}.$$

Lebih lanjut

$$L(D_{2n}) = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}.$$

Bukti:

Untuk membuktikan 1 merupakan elemen 1-Engel kiri dari grup dihedral $(D_{2n}, \circ)$ maka harus ditunjukkan $[g,_1 1] = 1$ untuk setiap $g \in D_{2n}$. Karena $1 \in D_{2n}$ merupakan elemen identitas dari grup dihedral $(D_{2n}, \circ)$ maka $1 \circ g = g \circ 1$ untuk setiap $g \in D_{2n}$ (Definisi 2.1.11 bagian 3) sehingga $[g, 1] = 1$ (Teorema 2.1.23). Dengan demikian, terbukti bahwa $1 \in D_{2n}$ merupakan elemen 1-Engel kiri dari grup dihedral $(D_{2n}, \circ)$. Jadi $L_1(D_{2n}) = \{1\}$.

Untuk membuktikan $r, r^2, \dots, r^{n-1}$ merupakan elemen-elemen 2-Engel kiri harus ditunjukkan bahwa untuk sebarang r^j dengan $j = 1, 2, \dots, n-1$ berlaku $[g,_2 r^j] = 1$ untuk setiap $g \in D_{2n}$. Oleh karena itu dibuktikan bahwa:

1. $[r^i,_2 r^j] = 1$ untuk $i = 0,1, 2, \dots, n-1$.
2. $[sr^i,_2 r^j] = 1$ untuk $i = 0,1, 2, \dots, n-1$.

Penjabaran pembuktian dari kedua bagian di atas adalah:

1. $[r^i,_1 r^j] = [r^i, r^j] = 1$(Akibat 2.1.25)

   Selanjutnya perhatikan bahwa

   $$\begin{aligned}[r^i,_2 r^j] &= [[r^i, r^j], r^j] \\ &= [1, r^j] \\ &= 1 \text{(Akibat 2.1.25)}\end{aligned}$$

   Jadi $[r^i,_2 r^j] = 1$ (4.1)

2. $$\begin{aligned}[sr^i,_1 r^j] &= [sr^i, r^j] \\ &= (sr^i)^{-1} \circ (r^j)^{-1} \circ sr^i \circ r^j \\ &= sr^i \circ r^{n-j} \circ sr^i \circ r^j \\ &= sr^{i+n-j} \circ sr^{i+j} \\ &= s \circ sr^{n-(i+n-j)} \circ r^{i+j} \\ &= r^{n-(i+n-j)} \circ r^{i+j} \\ &= r^{2j}\end{aligned}$$

   Jadi $[sr^i, r^j] = r^{2j}$ (4.2)

   Selanjutnya, perhatikan bahwa

   $[sr^i,_2 r^j] = [[sr^i, r^j], r^j]$

$= [r^{2j}, r^j]$

$= 1$(Akibat 2.1.25)

Dengan demikian, terbukti bahwa $[r^i,_2 r^j] = 1$ dan $[sr^i,_2 r^j] = 1$ dengan $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ dan $j = 1, 2, \dots, n-1$.

Selanjutnya akan ditunjukkan untuk $sr^j \in D_{2n}$ dengan $j = 0,1, 2, \dots, n-1$ bukan merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral $(D_{2n},\circ)$. Untuk sebarang r^i dengan $i = 1, 2, \dots, n-1$ perhatikan bahwa:

$[r^i, sr^j] = (r^i)^{-1} \circ (sr^j)^{-1} \circ r^i \circ sr^j$

$= r^{n-i} \circ sr^j \circ r^i \circ sr^j$

$= r^{n-i} \circ sr^{j+i} \circ sr^j$

$= r^{n-i} \circ s \circ sr^{n-(j+i)} \circ r^j$

$= r^{n-i} \circ r^{n-j-i} \circ r^j$

$= r^{2n-2i-j} \circ r^j$

$= r^{2n-2i}$

$= r^{-2i}$

Jadi $[r^i, sr^j] = r^{-2i}$ (4.3)

Untuk $m = 1$ diperoleh komutator bernorma $[r,_1 sr^j]$ adalah

$[r,_1 sr^j] = [r, sr^j]$

$= r^{-2(1)}$(Persamaan 4.3)

$= r^{-2}$

Untuk $m = 2$ diperoleh komutator bernorma $[r,_2 sr^j]$ adalah

$[r,_2 sr^j] = [[r,_1 sr^j], sr^j]$

$= [r^{-2}, sr^j]$

$= r^{-2(-2)}$(Persamaan 4.3)

$= r^{4}$

Untuk $m = 3$ diperoleh komutator bernorma $[r,_3\, sr^j]$ adalah

$[r,_3\, sr^j] = [[r,_2\, sr^j], sr^j]$

$= [r^4, sr^j]$

$= r^{-2(4)}$(Persamaan 4.3)

$= r^{-8}$

Untuk $m = 4$ diperoleh komutator bernorma $[r,_4\, sr^j]$ adalah

$[r,_4\, sr^j] = [[r,_3\, sr^j], sr^j]$

$= [r^{-8}, sr^j]$

$= r^{-2(-8)}$(Persamaan 4.3)

$= r^{16}$

Untuk $m = 5$ diperoleh komutator bernorma $[r,_5\, sr^j]$ adalah

$[r,_5\, sr^j] = [[r,_4\, sr^j], sr^j]$

$= [r^{16}, sr^j]$

$= r^{-2(16)}$(Persamaan 4.3)

$= r^{-32}$

Untuk $m = 6$ diperoleh komutator bernorma $[r,_6\, sr^j]$ adalah

$[r,_6\, sr^j] = [[r,_5\, sr^j], sr^j]$

$= [r^{-32}, sr^j]$

$= r^{-2(-32)}$(Persamaan 4.3)

$= r^{64}$

Perhatikan bahwa hasil komutator bernorma $[r,_m sr^j]$ merupakan perpangkatan r yang pangkatnya membentuk barisan berikut:

$$-2, 4, -8, 16, -32, 64, \dots$$

Dapat dilihat bahwa barisan di atas membentuk barisan Geometri dengan suku pertama -2 dan rasio -2 sehingga untuk suatu $a \in \mathbb{N}$ diperoleh

$$\begin{aligned} U_a &= -2 \cdot (-2)^{a-1} \\ &= (-2)^1 \cdot (-2)^{a-1} \\ &= (-2)^{a-1+1} \\ &= (-2)^a \\ &= (-1 \cdot 2)^a \\ &= (-1)^a \cdot (2)^a \end{aligned}$$

Jadi, $[r,_a sr^j] = r^{(-1)^a \cdot (2)^a}$ (4.4)

Dengan demikian komutator bernorma

$$[r,_a sr^j] = r^{(-1)^a \cdot (2)^a} = 1$$

jika dan hanya jika $2^a = n$ sehingga untuk n ganjil, komutator bernorma $[r,_m sr^j] \neq 1$ dan $[r,_{m+t} sr^j] = [r,_m sr^j]$ untuk setiap $t \in \mathbb{Z}^+$. Dengan demikian, sr^j dengan $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$ bukan merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral $(D_{2n}, \circ)$.

Teorema 4.2 Misalkan $n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 3$ dan n genap bukan perpangkatan 2 maka elemen-elemen Engel kiri dari grup dihedral $(D_{2n}, \circ)$ adalah

$$L_1(D_{2n}) = \left\{1, r^{\frac{n}{2}}\right\}$$

$$L_2(D_{2n}) \setminus L_1(D_{2n}) = \{r, r^2, \dots, r^{n-1}\} \setminus \left\{r^{\frac{n}{2}}\right\}.$$

Lebih lanjut

$$L(D_{2n}) = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}.$$

Bukti:

Untuk membuktikan $1, r^{\frac{n}{2}}$ merupakan elemen-elemen 1-Engel kiri dari grup dihedral $(D_{2n},\circ)$ maka harus ditunjukkan bahwa $[g,_1 1] = 1$ dan $\left[g,_1 r^{\frac{n}{2}}\right] = 1$ untuk setiap $g \in D_{2n}$. Karena $1 \in D_{2n}$ merupakan elemen identitas dari grup dihedral $(D_{2n},\circ)$ maka $1 \circ g = g \circ 1$ untuk setiap $g \in D_{2n}$ (Definisi 2.1.11 bagian 3) sehingga $[g, 1] = 1$ (Teorema 2.1.23). Dengan demikian, terbukti bahwa $1 \in D_{2n}$ merupakan elemen 1-Engel kiri dari grup dihedral $(D_{2n},\circ)$. Kemudian, untuk membuktikan $r^{\frac{n}{2}}$ merupakan elemen 1-Engel kiri sama halnya menunjukkan bahwa:

1. $\left[r^i,_1 r^{\frac{n}{2}}\right] = 1$ untuk $i = 0,1,2,\dots,n-1$
2. $\left[sr^i,_1 r^{\frac{n}{2}}\right] = 1$ untuk $i = 0,1,2,\dots,n-1$

Penjabaran pembuktian dari kedua bagian di atas adalah:

1. $\left[r^i,_1 r^{\frac{n}{2}}\right] = \left[r^j, r^{\frac{n}{2}}\right] = 1$(Akibat 2.1.25)
2. $\left[sr^i,_1 r^{\frac{n}{2}}\right] = \left[sr^i, r^{\frac{n}{2}}\right]$

$$= \left(sr^i\right)^{-1} \circ \left(r^{\frac{n}{2}}\right)^{-1} \circ sr^i \circ r^{\frac{n}{2}}$$

$$= sr^i \circ r^{n-\frac{n}{2}} \circ sr^i \circ r^{\frac{n}{2}}$$

$$= sr^i \circ r^{\frac{n}{2}} \circ sr^i \circ r^{\frac{n}{2}}$$

$$= sr^{\frac{n}{2}+i} \circ sr^{\frac{n}{2}+i}$$

$$= s \circ sr^{n-\left(\frac{n}{2}-i\right)} \circ r^{\frac{n}{2}+i}$$

$$= r^{\frac{n}{2}-i} \circ r^{\frac{n}{2}+i}$$

$$= r^n$$

$$= 1$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $\left[r^i,_1 r^{\frac{n}{2}}\right] = 1$ dan $\left[sr^i,_1 r^{\frac{n}{2}}\right] = 1$ dengan $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ dan $j = 1, 2, \dots, n-1$.

Untuk membuktikan $r, r^2, \dots, r^{n-1}$ merupakan elemen-elemen 2-Engel kiri harus ditunjukkan bahwa untuk sebarang r^j dengan $j = 1, 2, \dots, n-1$ berlaku $\left[g,_2 r^j\right] = 1$ untuk setiap $g \in D_{2n}$. Oleh karena itu dibuktikan bahwa:

1. $\left[r^i,_2 r^j\right] = 1$ untuk $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$.
2. $\left[sr^i,_2 r^j\right] = 1$ untuk $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Penjabaran pembuktian dari kedua bagian di atas adalah:

1. Dari Persamaan 4.1 diperoleh

   $\left[r^i,_2 r^j\right] = 1$

2. Dari Persamaan 4.2 diperoleh

   $\left[sr^i,_1 r^j\right] = \left[sr^i, r^j\right] = r^{2j}$

   Selanjutnya, perhatikan bahwa

   $$\left[sr^i,_2 r^j\right] = \left[\left[sr^i, r^j\right], r^j\right]$$
   $$= \left[r^{2j}, r^j\right]$$
   $$= 1 \text{(Akibat 2.1.25)}$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $\left[r^i,_2 r^j\right] = 1$ dan $\left[sr^i,_2 r^j\right] = 1$ dengan $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ dan $j = 1, 2, \dots, n-1$.

Selanjutnya akan ditunjukkan untuk $sr^i \in D_{2n}$ dengan $j = 0,1, 2, \dots, n-1$ bukan merupakan elemen-elemen Engel kiri dari grup dihedral $(D_{2n}, \circ)$.

Jadi, $\left[r,_{a} sr^{j}\right] = r^{(-1)^{a}\cdot(2)^{a}}$ (4.4)

Dengan demikian komutator bernorma

$$\left[r,_{a} sr^{j}\right] = r^{(-1)^{a}\cdot(2)^{a}} = 1$$

jika dan hanya jika $2^{a} = n$ sehingga untuk n genap dan bukan perpangkatan 2, komutator bernorma $\left[r,_{m} sr^{j}\right] \neq 1$ dan $\left[r,_{m+t} sr^{j}\right] = \left[r,_{m} sr^{j}\right]$ untuk setiap $t \in \mathbb{Z}^{+}$. Dengan demikian, sr^{j} dengan $j = 0,1,2,\dots,n-1$ bukan merupakan elemen Engel kiri dari grup dihedral $(D_{2n},\circ)$.

Teorema 4.3 Misalkan $n \in \mathbb{Z}^{+}, n \geq 3$ dan n perpangkatan 2 atau $n = 2^{a}$ untuk suatu $a \in \mathbb{N}$ maka elemen-elemen Engel kiri dari grup dihedral $(D_{2n},\circ)$ adalah

$$L_{1}(D_{2n}) = \left\{1, r^{\frac{n}{2}}\right\}$$

$$L_{2}(D_{2n}) \setminus L_{1}(D_{2n}) = \{r, r^{2}, \dots, r^{n-1}\} \setminus \left\{r^{\frac{n}{2}}\right\}$$

$$L_{a}(D_{2n}) \setminus L_{a-1}(D_{2n}) = \{s, sr, sr^{2}, \dots, sr^{n-1}\}.$$

Lebih lanjut

$$L(D_{2n}) = D_{2n}.$$

Bukti:

Karena n merupakan bilangan bulat perpangkatan 2, maka n genap sehingga untuk membuktikan bahwa elemen-elemen 1-Engel kiri dari grup dihedral $(D_{2n},\circ)$ adalah $\left\{1, r^{\frac{n}{2}}\right\}$ dan elemen-elemen 2-Engel kiri dari grup dihedral $(D_{2n},\circ)$ adalah $\{r, r^{2}, \dots, r^{n-1}\}$ sama halnya seperti pembuktian pada Teorema 4.2.

Untuk membuktikan $sr, sr^{2}, \dots, sr^{n-1}$ merupakan elemen-elemen a-Engel kiri harus ditunjukkan bahwa untuk sebarang sr^{j} dengan $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$ berlaku $\left[g,_{a} sr^{j}\right] = 1$ untuk setiap $g \in D_{2n}$. Oleh karena itu dibuktikan bahwa:

1. $[r^i,_a sr^j] = 1$ untuk $i = 0,1,2,\dots,n-1.$

2. $[sr^i,_a sr^j] = 1$ untuk $i = 0,1,2,\dots,n-1.$

Penjabaran pembuktian dari kedua bagian di atas adalah:

1. Untuk $a = 1$ diperoleh komutator bernorma $[r^i,_1 sr^j]$ adalah

$$[r^i,_1 sr^j] = [r^i, sr^j]$$

$$= r^{-2i}\text{(Persamaan 4.3)}$$

Untuk $a = 2$ diperoleh komutator bernorma $[r^i,_2 sr^j]$ adalah

$$[r^i,_2 sr^j] = [[r^i,_1 sr^j], sr^j]$$

$$= [r^{-2i}, sr^j]$$

$$= r^{-2(-2i)}\text{(Persamaan 4.3)}$$

$$= r^{4i}$$

Untuk $a = 3$ diperoleh komutator bernorma $[r^i,_3 sr^j]$ adalah

$$[r^i,_3 sr^j] = [[r^i,_2 sr^j], sr^j]$$

$$= [r^{4i}, sr^j]$$

$$= r^{-2(4i)}\text{(Persamaan 4.3)}$$

$$= r^{-8i}$$

Untuk $a = 4$ diperoleh komutator bernorma $[r^i,_4 sr^j]$ adalah

$$[r^i,_4 sr^j] = [[r^i,_3 sr^j], sr^j]$$

$$= [r^{-8i}, sr^j]$$

$$= r^{-2(-8i)}\text{(Persamaan 4.3)}$$

$$= r^{16i}$$

Untuk $a = 5$ diperoleh komutator bernorma $[r^i,_5 sr^j]$ adalah

$$\left[r^i,_5 sr^j\right] = \left[\left[r^i,_4 sr^j\right], sr^j\right]$$
$$= \left[r^{16i}, sr^j\right]$$
$$= r^{-2(16i)}\text{(Persamaan 4.3)}$$
$$= r^{-32i}$$

Untuk $a = 6$ diperoleh komutator bernorma $\left[r^i,_6 sr^j\right]$ adalah

$$\left[r^i,_6 sr^j\right] = \left[\left[r^i,_5 sr^j\right], sr^j\right]$$
$$= \left[r^{-32i}, sr^j\right]$$
$$= r^{-2(-32i)}\text{(Persamaan 4.3)}$$
$$= r^{64i}$$

Perhatikan bahwa hasil komutator bernorma $\left[r^i,_m sr^j\right]$ merupakan perpangkatan r yang pangkatnya membentuk barisan berikut:

$$-2i, 4i, -8i, 16i, -32i, 64i, \ldots$$

Dapat dilihat bahwa barisan di atas membentuk barisan Geometri dengan suku pertama $-2i$ dan rasio -2 sehingga diperoleh

$$U_a = -2i \cdot (-2)^{a-1}$$
$$= (-2)^1 i \cdot (-2)^{a-1}$$
$$= (-2)^{a-1+1} i$$
$$= (-2)^a i$$
$$= (-1 \cdot 2)^a i$$
$$= (-1)^a \cdot (2)^a i$$

Jadi $U_a = (-1)^a \cdot (2)^a i$ (4.5)

dengan demikian

$$\left[r^i,_a sr^j\right] = r^{(-1)^a \cdot (2)^a i}$$

$= r^{(-1)^a \cdot ni}$

$= 1$

2. Untuk $a = 1$ diperoleh komutator bernorma $[sr^i,_1 sr^j]$ adalah

$[sr^i, sr^j] = (sr^i)^{-1} \circ (sr^j)^{-1} \circ s \circ sr^i$

$= sr^i \circ sr^j \circ sr^i \circ sr^j$

$= s \circ sr^{n-i} \circ r^j \circ s \circ sr^{n-i} \circ r^j$

$= r^{n-i} \circ r^j \circ r^{n-i} \circ r^j$

$= r^{2n-2i+2j}$

$= r^{2n} \circ r^{-2i+2j}$

$= 1 \circ r^{-2i+2j}$

$= r^{-2i+2j}$

$= r^{-2(i-j)}$

$= r^{-2u}$ untuk suatu $u \in \mathbb{Z}^+$.

Untuk $a = 2$ diperoleh komutator bernorma $[sr^i,_2 sr^j]$ adalah

$[sr^i,_2 sr^j] = [[sr^i,_1 sr^j], sr^j]$

$= [r^{-2u}, sr^j]$

$= r^{-2(-2u)}$(Persamaan 4.3)

$= r^{4u}$

Untuk $a = 3$ diperoleh komutator bernorma $[sr^i,_3 sr^j]$ adalah

$[sr^i,_3 sr^j] = [[sr^i,_2 sr^j], sr^j]$

$= [r^{4u}, sr^j]$

$= r^{-2(4u)}$(Persamaan 4.3)

$= r^{-8u}$

Untuk $a = 4$ diperoleh komutator bernorma $[sr^i,_4 sr^j]$ adalah

$[sr^i,_4 sr^j] = [[sr^i,_3 sr^j], sr^j]$

$= [r^{-8u}, sr^j]$

$= r^{-2(-8u)}$(Persamaan 4.3)

$= r^{16u}$

Untuk $a = 5$ diperoleh komutator bernorma $[sr^i,_5 sr^j]$ adalah

$[sr^i,_5 sr^j] = [[sr^i,_4 sr^j], sr^j]$

$= [sr^{16u}, sr^j]$

$= r^{-2(16u)}$(Persamaan 4.3)

$= r^{-32u}$

Untuk $a = 6$ diperoleh komutator bernorma $[sr^i,_6 sr^j]$ adalah

$[sr^i,_6 sr^j] = [[sr^i,_5 sr^j], sr^j]$

$= [r^{-32u}, sr^j]$

$= r^{-2(-32u)}$(Persamaan 4.3)

$= r^{64u}$

Perhatikan bahwa hasil komutator bernorma $[sr^i,_m sr^j]$ merupakan perpangkatan r yang pangkatnya membentuk barisan berikut:

$$-2u, 4u, -8u, 16u, -32u, 64u, \ldots$$

Dapat dilihat bahwa barisan di atas membentuk barisan Geometri dengan suku pertama $-2u$ dan rasio -2 sehingga diperoleh

$U_a = (-1)^a \cdot (2)^a u$(Persamaan 4.5) dengan demikian

$$\left[sr^i,_a sr^j\right] = r^{(-1)^a \cdot (2)^a u}$$

$$= r^{(-1)^a \cdot nu}$$

$$= 1$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $\left[r^i,_a sr^j\right] = 1$ dan $\left[sr^i,_a sr^j\right] = 1$ dengan $i, j = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

4.7 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Qur'an

Elemen Engel kiri dari grup dihedral $(D_{2n}, \circ)$ merupakan unsur dari himpunan D_{2n} yang memenuhi Definisi 2.1.25. Unsur-unsur dari D_{2n} yang merupakan elemen Engel kiri yaitu unsur semua rotasi dari himpunan D_{2n} ketika n ganjil dan n genap bukan perpangkatan 2. Jika n merupakan perpangkatan 2 maka elemen Engel kiri dari grup dihedral $(D_{2n}, \circ)$ merupakan semua unsur dari D_{2n}.

Konsep mengenai unsur-unsur dari suatu himpunan telah dijelaskan dalam Al-Qur'an surat An-Nuur ayat 45. Dalam surat An-Nuur ayat 45 terdapat himpunan hewan yang berjalan tanpa kaki, berjalan dengan dua kaki, dan berjalan dengan empat kaki. Konsep himpunan dalam surat An-Nuur ayat 45 yang secara matematis dapat dituliskan sebagai berikut:

Misalkan: $T =$ himpunan hewan yang berjalan tanpa kaki,

$D =$ himpunan hewan yang berjalan dengan dua kaki,

$E =$ himpunan hewan yang berjalan dengan empat kaki.

Unsur-unsur dari himpunan pada surat An-Nuur ayat 45 dapat ditentukan dengan mudah. Unsur-unsur dari himpunan hewan yang berjalan tanpa kaki yaitu ular, cacing, siput, dan lain-lain. Unsur-unsur dari himpunan hewan yang berjalan dengan dua kaki yaitu ayam, angsa, burung, dan lain-lain. Unsur-unsur dari himpunan hewan yang berjalan dengan empat kaki yaitu kucing, sapi, singa, dan lain-lain. Secara matematis himpunan pada surat An-Nuur ayat 45 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$T = \{\text{ular}, \text{cacing}, \text{siput}, \cdots\},$$

$$D = \{\text{ayam}, \text{angsa}, \text{burung}, \cdots\},$$

$$E = \{\text{kucing}, \text{sapi}, \text{singa}, \cdots\}.$$

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada penelitian di atas, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Misalkan $n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 3$ dan n ganjil maka elemen-elemen Engel kiri dari grup dihedral $(D_{2n}, \circ)$ adalah

$$L_1(D_{2n}) = \{1\}$$

$$L_2(D_{2n}) \setminus L_1(D_{2n}) = \{r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$$

$$L(D_{2n}) = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}.$$

2. Misalkan $n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 3$ dan n genap bukan perpangkatan 2 maka elemen-elemen Engel kiri dari grup dihedral $(D_{2n}, \circ)$ adalah

$$L_1(D_{2n}) = \left\{1, r^{\frac{n}{2}}\right\}$$

$$L_2(D_{2n}) \setminus L_1(D_{2n}) = \{r, r^2, \dots, r^{n-1}\} \setminus \left\{r^{\frac{n}{2}}\right\}$$

$$L(D_{2n}) = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}.$$

3. Misalkan $n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 3$ dan n perpangkatan 2 atau $n = 2^a$ untuk suatu $a \in \mathbb{N}$ maka elemen-elemen Engel kiri dari grup dihedral $(D_{2n}, \circ)$ adalah

$$L_1(D_{2n}) = \left\{1, r^{\frac{n}{2}}\right\}$$

$$L_2(D_{2n}) \setminus L_1(D_{2n}) = \{r, r^2, \dots, r^{n-1}\} \setminus \left\{r^{\frac{n}{2}}\right\}$$

$$L_a(D_{2n}) \setminus L_{a-1}(D_{2n}) = \{s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$$

$$L(D_{2n}) = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}.$$

5.2 Saran

Penelitian yang dilakukan oleh peneliti hanya membahas mengenai elemen Engel kiri dari grup dihedral. Oleh karena itu, peneliti menyarankan untuk penelitian selanjutnya dapat menentukan elemen Engel kanan dari grup dihedral atau mementukan elemen Engel dari grup non-abelian lainnya, seperti grup simetri.

DAFTAR PUSTAKA

Abdollahi, A. (2011). Engel Elements in Groups. Dalam *In Groups St Andrews 2009 in Bath* (hal. 94-117). Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9780511842467.005

Abdullah. (2005). *Tafsir Ibnu Katsir.* Bogor: Pustaka Imam Asy-Syafi'i.

Abdussakir. (2014). *Matematika dalam Al-Qur'an.* Malang: UIN-Maliki Press.

Al-Mahalli, I. J., & As-Suyuti, I. J. (2008). *Tafsir Jalalain.* (A. Bakar, Trans.) Bandung: Sinar Baru Algensindo.

Departemen. (2015). *Al-Qur'an dan Terjemahannya.* Jakarta: CV Darus Sunnah.

Dummit, D. S., & Foote, R. M. (2004). *Abstract Algebra Third Edition.* USA: John Wiley and Son, Inc.

Gilbert, L., & Gilbert, J. (2013). *Elements of Modern Algebra Eight Edition.* Stamford: Cengage Learning.

Kahrobaei, D., & Noce, M. (2020). Algorithmic Problems in Engel Groups and Cryptographic Applications. *International Journal of Group Theory, 9*(4), 231-250. doi:10.22108/ijgt.2020.119123.1574

Khasanah, W. (2021). Kewajiban Menuntut Ilmu dalam Islam. *Jurnal Riset Agama, 1*(2), 296-307. doi:10.15575/jra.v1i2.14568

Muhsin, M. (2014). *Grup Faktor dan Komutator dari Grup Dihedral2n* $(D_{2n},\circ)$. (Skripi, Uninersitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang) Diakses dari http://etheses.uin-malang.ac.id/6838/.

Rahma, E. P. (2011). *Centralizer, Center, dan Normalizer Subgrup di Grup Dihedral-2n* $(D_{2n},\circ)$. (Skripi, Uninersitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang) Diakses dari http://etheses.uin-malang.ac.id/6591/.

Robinson, D. J. (1972). *Finiteness Conditions And Generalized Soluble Groups Part 2.* Springer Berlin Heidelberg. doi:10.10007/978-3-662-11747-7

Syarifudin, A. G., & Wardhana, I. G. (2019). Subgrup Non Trivial dari Grup Dihedral. *Eigen Mathematics Journal, 2*(2), 73-76. doi:10.29303/emj.v1i2.26

RIWAYAT HIDUP

Ilfi Nur Diana lahir di Malang tanggal 23 Juni 1999, biasa dipanggil fifi atau ilfi. Alamat di Jalan Sunan Drajat RT/RW 006/003 Dusun Kasin, Desa Sepanjang, Kecamatan Gondanglegi, Kabupaten Malang. Anak dari pasangan ibu Masluchah dan Bapak Mustakim.

Penulis telah menempuh pendidikan formal mulai dari RA Miftahul Ulum Gondanglegi dan lulus tahun 2006. Kemudian, penulis menempuh pendidikan dasar di MI Miftahul Ulum Gondanglegi dan lulus tahun 2012. Selanjutnya, penulis penempuh pendidikan menengah pertama di SMP NU Gondanglegi dan lulus tahun 2015. Setelah itu, penulis menempuh pendidikan menengah atas di MA Khairuddin Gondanglegi dan lulus tahun 2018. Kemudian, penulis melanjutkan pendidikan ke Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang melalui jalur SNMPTN dengan mengambil prodi Matematika pada tahun 2018.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Ilfi Nur Diana
NIM : 18610002
Fakultas / Program Studi : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Elemen Engel Kiri dari Grup Dihedral
Pembimbing I : Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si, P.hD
Pembimbing II : Juhari, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	14 Januari 2022	Konsultasi Bab I	1.
2.	21 Januari 2022	Konsultasi Revisi Bab I	2.
3.	08 Maret 2022	Konsultasi Bab II dan III	3.
4.	22 Maret 2022	Konsultasi Revisi Bab II dan III	4.
5.	01 April 2022	Konsultasi Kajian Agama	5.
6.	08 April 2022	Konsultasi Revisi Kajian Agama	6.
7.	02 Juni 2022	Konsultasi Bab IV	7.
8.	10 Juni 2022	Konsultasi Kajian Agama	8.
9.	14 Juni 2022	Konsultasi Revisi Bab IV	9.
10.	17 Juni 2022	Konsultasi Bab IV dan V	10.
11.	23 Juni 2022	Konsultasi Revisi Bab IV dan V	11.
12.	14 Oktober 2022	Konsultasi Revisi Bab I, II, dan III	12.
13.	28 Oktober 2022	Konsultasi Revisi Bab IV dan V	13.
14.	17 November 2022	Konsultasi Kajian Agama	14.
15.	01 Desember 2022	ACC Keseluruhan	15.

Malang, 01 Desember 2022
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005