INDEKS NARUMI-KATAYAMA DAN ZAGREB PERKALIAN PADA GRAF ANNIHILATOR RING BILANGAN BULAT MODULO

SKRIPSI

OLEH
DZULFIKRI ALWI MUHAMMAD
NIM. 18610001

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022

INDEKS NARUMI-KATAYAMA DAN ZAGREB PERKALIAN PADA GRAF ANNIHILATOR RING BILANGAN BULAT MODULO

SKRIPSI

Diajukan kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Dzulfikri Alwi Muhammad
NIM 18610001

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022

INDEKS NARUMI-KATAYAMA DAN ZAGREB PERKALIAN PADA GRAF ANNIHILATOR RING BILANGAN BULAT MODULO

SKRIPSI

Oleh
Dzulfikri Alwi Muhammad
NIM. 18610001

Telah Diperiksa dan Disetujui Untuk Diuji

Malang, 19 Desember 2022

Dosen Pembimbing 1	Dosen Pembimbing 2
Intan Nisfulaila, M.Si.	Erna Herawati, M.Pd.
NIP. 19900215 201903 2 015	NIDT. 19760723 20180201 2 222

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

INDEKS NARUMI-KATAYAMA DAN ZAGREB PERKALIAN PADA GRAF ANNIHILATOR RING BILANGAN BULAT MODULO

SKRIPSI

Oleh
Dzulfikri Alwi Muhammad
NIM. 18610001

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 23 Desember 2022

Ketua Penguji	:	Evawati Alisah, M.Pd.	
Anggota Penguji 1	:	Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.	....
Anggota Penguji 2	:	Intan Nisfulaila, M.Si.	....
Anggota Penguji 3	:	Erna Herawati. M.Pd.	.

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Dzulfikri Alwi Muhammad
NIM	: 18610001
Program Studi	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Indeks Narumi-Katayama dan Zagreb Perkalian pada Graf Annihilator Ring Bilangan Bulat

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan pengambilan tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripai ini hasil jiplakan, maka saya akan bersedia menerima sanksi atar perbuatan tersebut.

Malang, 19 Desember 2022

Yang membuat pernyataan

Dzulfikri Alwi Muhammad

NIM. 18610001

MOTO

"Semakin banyak yang kau tahu, semakin banyak yang tidak kau tahu."

PERSEMBAHAN

Dengan rasa syukur, penulis mempersembahkan skripsi ini kepada: Ayahanda Burhanudin Al Imron dan Ibunda Sofiyah yang selalu memberikan doa, motivasi, serta nasihat demi keberhasilan. Dan kepada adik-adik penulis yang memberikan semangat kepada penulis serta teman-teman penulis yang menemani dalam pembuatan karya ini.

KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah SWT atas limpahan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Indeks Narumi-Katayma dan Zagreb Perkalian pada Graf Annihilator Ring Bilangan Bulat Modulo” sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah menuntun manusia dari jalan gelap gulita menuju jalan terang benderang yaitu agama Islam.

Pada penyusunan skripsi ini, penulis mendapatkan banyak bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu, penulis mengucapkan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Dr. Sri Harini, M.Si., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc., selaku ketua Program Studi Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Intan Nisfulaila, M.Si., selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan banyak arahan, ilmu, dan motivasi kepada penulis.
5. Erna Herawati, M.Pd., selaku dosen pembimbing II selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan banyak arahan, ilmu, dan motivasi kepada penulis.
6. Seluruh dosen Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim yang telah memberikan ilmu dan bimbingan.
7. Orang tua dan seluruh keluarga yang selalu memberikan do’a, semangat, dan motivasi demi keberhasilan penulis.
8. Seluruh mahasiswa Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang Program Studi Matematika angkatan 2018.

Semoga Allah SWT melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan pembaca.

Malang, 15 April 2022

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMPIRAN

ABSTRAK

Muhammad, Dzulfikri Alwi. 2022. **Indeks Narumi-Katayama dan Zagreb Perkalian pada Graf Annihilator Ring Bilangan Bulat Modulo.** Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Intan Nisfulaila, M.Si., (2) Erna Herawati, M.Pd.

Kata kunci: Indeks Narumi-Katayama, Zagreb Perkalian, Graf Annihilator, Ring Bilangan Bulat Modulo

Misalkan R merupakan ring komutatif dan $Z^*(R)$ merupakan himpunan pembagi nol di R, graf annihilator ring R, dinotasikan $AG(R)$ adalah graf yang simpul-simpulnya merupakan semua elemen dari $Z^*(R) = Z(R)/\{0\}$ dan dua simpul berbeda $u, v \in V\big(AG(R)\big)$ terhubung langsung jika dan hanya jika $ann(u) \cup ann(v) \neq ann(u \cdot v)$. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui rumus umum dari indeks Narumi-Katayama dan Zagreb Perkalian pada $AG\big(\mathbb{Z}_{pq}\big)$ dimana $\mathbb{Z}_{pq}$ merupakan bilangan bulat modulo pq dengan p, q bilangan prima. Metode penelitian yang digunakan adalah studi kepustakaan. Hasil dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Indeks Narumi-Katayama pada graf annihilator ring bilangan bulat modulo pq dengan p, q bilangan prima adalah
$$NK\left(AG\big(\mathbb{Z}_{pq}\big)\right) = \begin{cases} (p-1)^{q-1}(q-1)^{p-1}, \text{Jika } p \neq q \\ (p-2)^{p-1}, \text{jika } p = q \end{cases}$$
2. Indeks Zagreb Perkalian Pertama pada graf annihilator ring bilangan bulat modulo pq dengan p, q bilangan prima adalah
$$M_1\left(AG\big(\mathbb{Z}_{pq}\big)\right) = \begin{cases} (p-1)^{2q-2}(q-1)^{2p-2}, p \neq q \\ (p-2)^{2p-2}, \quad p = q \end{cases}$$
3. Indeks Zagreb Perkalian Kedua pada graf annihilator ring bilangan bulat modulo pq dengan p, q bilangan prima adalah
$$M_2\left(AG\big(\mathbb{Z}_{pq}\big)\right) = \begin{cases} (p-1)(q-1)^{(p-1)(q-1)}, p \neq q \\ (p-2)^{(p-1)(p-2)}, \quad p = q \end{cases}$$
4. Koindeks Zagreb Perkalian Kedua pada graf annihilator ring bilangan bulat modulo pq dengan p, q bilangan prima adalah
$$\bar{M}_2\left(AG\big(\mathbb{Z}_{pq}\big)\right) = \begin{cases} (p-1)^{(q-1)(q-2)} \cdot (q-1)^{(p-1)(p-2)}, p \neq q \\ 0, \quad p = q \end{cases}$$

ABSTRACT

Muhammad, Dzulfikri Alwi. 2022. **Narumi-Katayama Index and Multiplicative Zagreb of Annihilator Graph of Ring Integers Modulo.** Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisors: (1) Intan Nisfulaila, M.Si., (2) Erna Herawati, M.Pd.

Keywords: Narumi-Katayama Index, Multiplicative Zagreb, Annihilator Graph, Ring Integers Modulo

Suppose R is commutative ring and $Z^*(R)$ is set of zero divisors of R, annihilator graph of R, denoted by $AG(R)$, is graph whose vertices are all element of $Z^*(R) = Z(R)/\{0\}$ and two distinct vertices $u, v \in V\big(AG(R)\big)$ are adjacent if and only if $ann(u) \cup ann(v) \neq ann(u \cdot v)$. The purpose of this research is to determine the formula of Narumi-Katayama index and Multiplicative Zagreb of $AG(\mathbb{Z}_{pq})$ where $\mathbb{Z}_{pq}$ is ring of integers modulo pq with p, q are prime numbers. The method of the research used is library study. The result of the research is as follows:

1. The Narumi-Katayama index of annihilator graph of integer ring modulo pq with p, q are prime numbers is
$$NK\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right) = \begin{cases} (p-1)^{q-1}(q-1)^{p-1}, p \neq q \\ (p-2)^{p-1}, p = q \end{cases}$$
2. The First Multiplicative Zagreb index of annihilator graph of integer ring modulo pq with p, q are prime numbers is
$$M_1\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right) = \begin{cases} (p-1)^{2q-2}(q-1)^{2p-2}, p \neq q \\ (p-2)^{2p-2}, \quad p = q \end{cases}$$
3. The Second Multiplicative Zagreb index of annihilator graph of integer ring modulo pq with p, q are prime numbers is
$$M_2\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right) = \begin{cases} (p-1)(q-1)^{(p-1)(q-1)}, p \neq q \\ (p-2)^{(p-1)(p-2)}, \quad p = q \end{cases}$$
4. The Second Multiplicative Zagreb coindex of annihilator graph of integer ring modulo pq with p, q are prime numbers is
$$\overline{M}_2\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right) = \begin{cases} (p-1)^{(q-1)(q-2)} \cdot (q-1)^{(p-1)(p-2)}, p \neq q \\ 0, \quad p = q \end{cases}$$

مستخلص البحث

محمد، ذوالفكرعلوي. ٢٠٢٢. **مؤشر نارومي–كتاياما والزغرب الضرب على المخططات المبيد حلقة عدد صحيحة مودولو**. البحث الجامعي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبرهيم مالانج. المشرفة الأولى: إنتان نصف اليلة الماجستير، المشرفة الثانية: إيرنا هيراواتي الماجستير

كلمات المفتاحية: مؤشر نارومي–كتاياما، الزغرب الضرب، المخططات المبيد، حلقة عدد صحيحة مودولو.

مثلا R الحلقة التبادلية و$Z^*(R)$ مجموعة من صفر قواسم في R, المخطات المبيد على الذي كتب ب $AG(R)$ هو المخطات الذي الرؤوس عناصر في $Z^*(R) = Z(R)/\{0\}$. الرأسان المختلفان،$u, v \in V(AG(R))$ ،متجاوران إذا وفقط إذا$ann(u) \cup ann(v) \neq ann(u \cdot v)$. المقصد البحث لمعرفة الشكل العم من المؤشر نارومي–كتاياما والزغرب الضرب على $AG(\mathbb{Z}_{pq})$ الذي $\mathbb{Z}_{pq}$ هو حلقة عدد صحيحة مودولو pq ،الذي p, q هو عدد أولي. الطريقة المستخدمة الطريقة البحث المكتبة. النتائج البحث هي كما يلي:

١. المؤشر نارومي–كتاياما على المخطات المبيد حلقة عدد صحيحة مودولو pq ،الذي p, q ،هو عدد أولي هو

$$NK\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right) = \begin{cases} (p-1)^{q-1}(q-1)^{p-1}, p \neq q \\ (p-2)^{p-1}, p = q \end{cases}$$

٢. المؤشر الزغرب الضربية الأولية على المخطات المبيد حلقة عدد صحيحة مودولو pq ،الذي p, q هو عدد أولي هو

$$M_1\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right) = \begin{cases} (p-1)^{2q-2}(q-1)^{2p-2}, p \neq q \\ (p-2)^{2p-2}, \quad p = q \end{cases}$$

٣. المؤشر الزغرب الضربية الثانية على المخطات المبيد حلقة عدد صحيحة مودولو pq ،الذي p, q هو عدد أولي هو

$$M_2\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right) = \begin{cases} (p-1)(q-1)^{(p-1)(q-1)}, p \neq q \\ (p-2)^{(p-1)(p-2)}, \quad p = q \end{cases}$$

٤. المؤشر الزغرب الضربية الثانية على المخطات المبيد حلقة عدد صحيحة مودولو pq ،الذي p, q هو عدد أولي هو

$$\overline{M}_2\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right) = \begin{cases} (p-1)^{(q-1)(q-2)} \cdot (q-1)^{(p-1)(p-2)}, p \neq q \\ 0, \quad p = q \end{cases}$$

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan cabang dari ilmu Matematika yang diperkenalkan oleh matematikawan Swiss, Leonhard Euler (1707-1783) pada tahun 1736 dengan memberikan solusi imajinatif pada permasalahan jembatan Konigsberg. (Fournier, 2006). Arthur Cayley (1875) tertarik meneliti tentang *tree*, yang merupakan kelas tertentu dari graf. Tiga tahun setelahnya, Sylvester (1878) memperkenalkan istilah "graf" pada sebuah artikel yang membahas analogi dari kuantitif varian dan co-varian dari aljabar dan diagram molekul. Kemudian, ide-ide tentang teori graf ini semakin masif dikembangkan baik pada bidang matematika maupun pada bidang keilmuan yang lain.

Sejalan dengan ajaran agama Islam, manusia harus terus belajar dan melahirkan ide-ide yang bermanfaat. Hal ini terlihat dari wahyu pertama yang diturunkan kepada nabi Muhammad, surah Al-Alaq ayat 1-5 yang artinya (Lajnah Pentashihan Mushaf Al-Quran, 2019):

"Bacalah dengan (menyebut) nama Tuhanmu yang Menciptakan. Dia telah menciptakan manusia dari segumpal darah. Bacalah, dan Tuhanmu lah yang Maha Pemurah, yang mengajar manusia dengan perantara kalam, Dia mengajar kepada manusia apa yang tidak diketahuinya".

Kata *iqra'* di permulaan ayat dimaknai dengan membaca, menelaah, menyampaikan, meneliti - dan sebagainya - segala yang dapat terjangkau, baik ia merupakan bacaan suci yang bersumber dari Tuhan maupun bukan, baik ia menyangkut ayat-ayat yang tertulis maupun yang tidak tertulis. Perintah *iqra'* mencakup telaah terhadap alam raya, masyarakat, dan diri sendiri, serta bacaan tertulis, baik suci maupun tidak (Shihab, 2000). Dalam hal ini, termasuk dengan pengembangan ilmu pengetahuan yang membawa kemanfaatan bagi umat manusia.

Salah satu bidang keilmuan yang memanfaatkan perkembangan ilmu teori graf adalah bidang kimia. Pada bidang kimia, teori graf digunakan untuk merepresentasikan molekul. Tujuannya adalah agar dapat menggunakan invarian aljabar untuk mereduksi struktur topologi molekul menjadi bilangan tunggal yang menunjukkan antara lain energi molekul, orbital, percabangan molekul, fragmen struktural, struktur elektronik, dan lain-lain. Untuk mendapatkan informasi yang termuat dalam molekul yang direpresentasikan dengan graf tersebut menggunakan metode indeks topologi (Mahboob, Jaradat, Nigar, & Siddique, 2021).

Indeks topologi adalah nilai numerik yang terkait dengan hukum kimia yang menunjukkan hubungan antara struktur kimia dan berbagai macam kualitas fisik yang dapat mengukur reaktivitas kimia atau aktivitas biologis. Dengan menggunakan indeks topologi, penelitian bisa menjadi lebih cepat dan murah karena tidak perlu menggunakan laboratorium yang menghabiskan waktu yang lama dan uang yang banyak (Mahboob, Jaradat, Nigar, & Siddique, 2021). Indeks topologi pertama kali diperkenalkan oleh kimiawan asal Amerika yaitu Wiener. Wiener menggunakannya untuk menyelidiki aproksimasi dari titik didih alkana yang kemudian hari disebut indeks Wiener. Saat ini, ada lebih dari 140 indeks yang sudah terdefinisi (Kwun, Virk, Nazeer, Rehman, & Kang, 2018).

Salah satu indeks topologi yang paling tua dikenal dengan indeks Zagreb pertama dan indeks Zagreb kedua. Pada tahun 1970-an, keduanya diperkenalkan oleh Gutman dan Trinajstic yang menyelidiki energi π elektron total pada struktur molekul hidrokarbon. Kemudian Todeschini & Consonni (2010) memodifikasi

Indeks Zagreb, yang semula menggunakan prosedur penjumlahan, menjadi prosedur perkalian. Mereka menyebutnya *Multiplicative Zagreb Index* yang kemudian penamaannya diganti *First and Second Multiplicative Zagreb Index* oleh Gutman (2011). Hasil penelitian tersebut mengungkapkan bahwa indeks perkalian Zagreb mempunyai nilai keakuratan prediksi yang lebih tinggi dari indeks Zagreb, terutama dalam penentuan titik didih, panas pembentukan, bilangan oktan motor, luas permukaan total, dan bias molar (Todeschini & Consonni, 2010).

Indeks lain yang menggunakan prosedur perkalian adalah *simple topological index* yang diperkenalkan pada tahun 1984 oleh Narumi dan Katayama. Mereka (1984) menggunakan indeks ini untuk merepresentasikan stuktur molekul dari hidrokarbon jenuh. Gutman et al. (2001) mengubah penamaannya menjadi indeks Narumi-Katayama. Ia juga mengunakan indeks Narumi-Katayama untuk menggambarkan hubungan *phenylenes* dan tekanan heksagonalnya. Indeks ini juga digunakan untuk menggambarkan *nanostar dendrimers* (Farkoush, Alaeiyan, & Maghasedi, 2020).

Xu (2013) memperkenalkan koindeks Zagreb perkalian pada graf. Pada artikelnya, dia membahas beberapa sifat, terutama batas atas dan bawah, untuk dua invarian graf pada graf terhubung (molekuler). Selain itu, juga untuk beberapa graf ekstremal yang sesuai dengan dua indeks ini. Di lain sisi, Ahmadi & Darafshe (2018) meneliti nilai koindeks Zagreb perkalian kedua pada graf $NC_n(k)$ dan graf $Ca_3(C_6)$ bersama dengan indeks topologi lainnya.

Penelitian tentang indeks Narumi-Katayama dan indeks perkalian Zagreb pernah dibahas dalam penelitian Cancan et al. (2020). Mereka menghitung indeks-indeks topologi yang menggunakan prosedur perkalian dan berdasarkan derajat graf pada struktur kimiawi obat. Sebelumnya Soner et al. (2016) juga meneliti tentang indeks Narumi-Katayama dan indeks perkalian Zagreb pada sebuah graf kincir angin. Das, et al. (2016) dalam artikelnya juga membahas hubungan indeks Narumi-Katayama, indeks perkalian Zagreb, dan koindeks perkalian Zagreb.

Pada bidang Matematika, teori graf juga berkembang. Pada tahun 1983, Mc. Nulty dan Shallon memperkenalkan graf aljabar sebagai cara membentuk graf yang didasarkan pada struktur aljabar (Putra, Ginting, & Purnamasari, 2021). Dalam perkembangannya, muncul berbagai macam graf yang dibentuk dari struktur aljabar, salah satunya graf annihilator. Graf annihilator diperkenalkan oleh Badawi (2014). Graf annihilator dari gelanggang R merupakan graf sederhana yang simpulnya merupakan elemen pembagi nol dan uv merupakan sisi jika dan hanya jika $ann(u) \cup ann(v) \neq ann(uv)$ dengan $ann(u) = \{r \in R | ur = 0\}$. Nikandish et al. (2016) memaparkan pewarnaan graf annihilator pada ring komutatif. Dutta & Lanong (2017) meneliti tentang graf annihilator dari ring komutatif terbatas.

Berdasarkan penelitian terdahulu, penelitian mengenai indeks Narumi-Katayama, indeks-indeks Zagreb perkalian, dan koindeks Zagreb perkalian kedua dapat diperluas dan digabungkan dengan graf annihilator ring komutatif. Dengan demikian, untuk membedakan dengan penelitian sebelumnya, peneliti akan melakukan penelitian indeks Narumi-Katayama, indeks dan koindeks Zagreb perkalian pada graf annihilator ring bilangan bulat modulo pq, dengan p dan q merupakan bilangan prima. Sehingga judul dari penelitian ini adalah "Indeks Narumi-Katayama dan Zagreb Perkalian Graf Annihilator Ring Bilangan Bulat Modulo".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, diperoleh rumusan masalah sebagai berikut:

1. Apa rumus umum dari indeks Narumi-Katayama pada graf annihilator bilangan bulat modulo.
2. Apa rumus umum dari indeks Zagreb Perkalian Pertama pada graf annihilator bilangan bulat modulo.
3. Apa rumus umum dari indeks Zagreb Perkalian Kedua pada graf annihilator bilangan bulat modulo.
4. Apa rumus umum dari koindeks Zagreb Perkalian Kedua pada graf annihilator bilangan bulat modulo.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini berdasarkan latar belakang sebagai berikut:

1. Mengetahui rumus umum dari indeks Narumi-Katayama pada graf annihilator bilangan bulat modulo.
2. Mengetahui rumus umum dari indeks Zagreb Perkalian Pertama pada graf annihilator bilangan bulat modulo.
3. Mengetahui rumus umum dari indeks Zagreb Perkalian Kedua pada graf annihilator bilangan bulat modulo.
4. Mengetahui rumus umum dari koindeks Zagreb Perkalian Kedua pada graf annihilator bilangan bulat modulo.

1.4 Manfaat Penelitian

1. Menambah pengetahuan tentang teori graf khususnya graf annihilator pada ring bilangan bulat, indeks Narumi-Katayama, dan Zagreb perkalian.

2. Menjadi referensi dalam pengembangan ilmu pengetahuan terutama dalam bidang graf.

1.5 Batasan Masalah

Penelitian ini memfokuskan pembahasan pada graf annihilator dari ring bilangan bulat modulo pq, dengan p, q merupakan bilangan prima.

BAB II
KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

2.1.1 Ring

1. Definisi Ring

Ring $(R, +, \cdot)$ adalah himpunan takkosong R dengan operasi biner penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\cdot)$ pada R yang memenuhi aksioma-aksioma berikut:

a. Himpunan R bersifat tertutup terhadap operasi penjumlahan. Misalkan $a, b \in R$, maka $a + b \in R$.

b. Operasi penjumlahan bersifat asosiatif. Misalkan $a, b, c \in R$, maka $(a + b) + c = a + (b + c)$.

c. Adanya unsur identitas 0 terhadap penjumlahan di R sehingga untuk sebarang $a \in R$, berlaku $a + 0 = 0 + a = a$.

d. Setiap elemen $a \in R$ mempunyai invers terhadap penjumlahan, $(-a)$, di R. Misal $a \in R$, maka $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

e. Operasi penjumlahan bersifat komutatif. Misal $a, b \in R$, maka $a + b = b + a$.

f. Himpunan R bersifat tertutup terhadap operasi perkalian. Misalkan $a, b \in R$, maka $a \cdot b \in R$.

g. Operasi perkalian bersifat asosiatif. Misalkan $a, b, c \in R$, maka $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

h. Operasi perkalian bersifat distributif terhadap operasi penjumlahan. Misalkan $a, b, c \in R$, maka $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ dan $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ (Masoed, 2013).

Contoh:

Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dengan operasi biner penjumlahan dan perkalian, $(\mathbb{Z},+,\cdot)$, merupakan ring. Bukti:

a. Misal $x, y \in \mathbb{Z}$, maka $x + y \in \mathbb{Z}$. Jadi operasi penjumlahan pada himpunan $\mathbb{Z}$ bersifat tertutup.
b. Misal $x, y, z \in \mathbb{Z}$, maka $x + (y + z) = (x + y) + z$. Jadi operasi penjumlahan pada himpunan $\mathbb{Z}$ bersifat asosiatif.
c. Ada 0 yang merupakan unsur identitas di himpunan $\mathbb{Z}$ sehingga berlaku $x + 0 = 0 + x = x$, untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$.
d. Misal $x \in \mathbb{Z}$, maka ada $(-x)$ yang merupakan unsur invers di himpunan $\mathbb{Z}$ sehingga berlaku $x + (-x) = (-x) + x = 0$.
e. Misal $x, y \in \mathbb{Z}$, maka $x + y = y + x$. Jadi operasi penjumlahan pada himpunan $\mathbb{Z}$ bersifat komutatif.
f. Misalkan $x, y \in \mathbb{Z}$, maka $x \cdot y \in \mathbb{Z}$. Jadi himpunan $\mathbb{Z}$ bersifat tertutup terhadap operasi penjumlahan.
g. Misalkan $x, y, z \in \mathbb{Z}$, maka $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$. Jadi operasi perkalian pada himpunan $\mathbb{Z}$ bersifat asosiatif.
h. Misalkan $x, y, z \in \mathbb{Z}$, maka $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ dan $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$. Jadi operasi perkalian bersifat distributif terhadap operasi penjumlahan pada himpunan $\mathbb{Z}$.

2. Definisi Ring Komutatif

Ring $(R,+,\cdot)$ disebut ring komutatif, jika untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $a \cdot b = b \cdot a$. Ring komutatif R disebut ring komutatif dengan kesatuan jika terdapat unsur kesatuan $1 \in R$ sedemikian sehingga berlaku $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$.

Unsur kesatuan 1 juga disebut dengan identitas terhadap operasi perkalian (Galian, 2016).

Contoh:

Himpunan $\mathbb{Z}_{10} = \{0,1,2,\dots,9\}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian modulo 10 merupakan ring komutatif dengan unsur kesatuan 1.

Bukti:

Perhatikan tabel Cayley di bawah ini:

Tabel 2.1 Tabel Cayley $(\mathbb{Z}_{10}, +)$

+	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Tabel 2.2 Tabel Cayley $(\mathbb{Z}_{10}, \cdot)$

*****	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
3	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
4	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6
5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	0	6	2	8	4	0	6	2	8	4
7	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3
8	0	8	6	4	2	0	8	6	4	2

9	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Dari Tabel 2.1 dan Tabel 2.2 diperoleh fakta:

a. Himpunan $\mathbb{Z}_{10}$ bersifat tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian. Misal $x, y \in \mathbb{Z}_{10}$, maka berlaku $x + y \in \mathbb{Z}_{10}$ dan $x \cdot y \in \mathbb{Z}_{10}$.

b. Adanya unsur identitas 0 terhadap operasi penjumlahan dan unsur identitas 1 terhadap operasi perkalian. Misal $x \in \mathbb{Z}_{10}$, maka $x + 0 = 0 + x = x$ dan $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$.

c. Setiap elemen di $\mathbb{Z}_{10}$ mempunyai invers terhadap penjumlahan. Misal 1 inversnya 9, 2 inversnya 8, 3 inversnya 7, 4 inversnya 6, 5 inversnya 5, dan 0 inversnya 0.

d. Operasi penjumlahan dan operasi perkalian bersifat komutatif. Misal $x, y \in \mathbb{Z}_{10}$, maka $x + y = y + x$ dan $x \cdot y = y \cdot x$.

Selanjutnya perhatikan bahwa $\mathbb{Z}_{10} \subset \mathbb{Z}$, maka operasi penjumlahan dan perkalian bersifat asosiatif, serta operasi perkalian bersifat distributif terhadap penjumlahan. Jadi ring $(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$ merupakan ring komutatif dengan kesatuan.

3. Definisi Pembagi Nol

Misal R adalah ring komutatif. Pembagi nol adalah elemen a di R sedemikian sehingga ada $b \neq 0$ di R dan $a \cdot b = 0$ (Atiyah & Macdonald, 2018). Himpunan pembagi nol dari ring R dinotasikan $Z(R)$ (Riyanti, Kiftah, & Fran, 2018).

Contoh:

Pada ring $\mathbb{Z}_{10}$, bilangan 5 dan 6 merupakan pembagi nol karena $5 \cdot 6 = 0 = 6 \cdot 5$, $5 \neq 0$ dan $6 \neq 0$. Selain bilangan 5 dan 6, elemen yang merupakan pembagi nol adalah 2,4,8, karena $2 \cdot 5 = 4 \cdot 5 = 8 \cdot 5 = 0$ dan 2,4,8 tidak sama dengan 0. Jadi himpunan pembagi nol pada $\mathbb{Z}_{10}$ adalah $Z(\mathbb{Z}_{10}) = \{2,4,5,6,8\}$.

4. Definisi Annihilator

Misal $b \in R$, annihilator dari b adalah himpunan semua $x \in R$ sedemikian sehingga $x \cdot b = 0$ dan dinotasikan $ann(b)$ (Atiyah & Macdonald, 2018).

Contoh:

Misal $\mathbb{Z}_{15}$ merupakan himpunan bilangan bulat modulo 15. Ambil $5 \in \mathbb{Z}_{15}$. Karena $3 \cdot 5 \equiv 15\ mod\ 15 \equiv 0$, maka 3 merupakan salah satu anggota annihilator dari 5. Selain 3, ada $0, 6, 9, 12$. Untuk membuktikannya, perhatikan tabel berikut:

Tabel 2.3 Tabel Annihilator dari 5 pada $\mathbb{Z}_{15}$

x	b	$x \cdot b\ mod\ 15$
0	5	$0\ mod\ 15 = 0$
3		$15\ mod\ 15 = 0$
6		$30\ mod\ 15 = 0$
9		$45\ mod\ 15 = 0$
12		$60\ mod\ 15 = 0$

Sehingga diperoleh annihilator dari 5 adalah $\{0,3,6,9,12\}$ atau dapat dinotasikan $ann(5) = \{0,3,6,9,12\}$.

2.1.2 Kongruensi

1. Definisi Kongruensi

Misal a, b, n bilangan bulat, dan $n \geq 1$, maka a dikatakan kongruen dengan b modulo n, dinotasikan $a \equiv b\ (mod\ n)$, jika a dan b mempunyai sisa bagi yang sama apabila dibagi dengan n. Dengan kata lain, a kongruen dengan b modulo n, jika $n|(a-b)$ (Hengki, Irawan, & dkk, 2014).

Contoh:

Bilangan 13 kongruen dengan 3 $mod(5)$ karena 5 $|(13-3)$, sehingga bisa dituliskan $13 \equiv 3\ (mod\ 5)$. Sementara itu 12 tidak kongruen dengan 3 $mod(5)$ karena $5 \nmid (12-3)$.

2. Definisi Kongruensi Linier

Misalkan $s_1, s_2, \dots, s_m$ adalah sistem residu lengkap modulo m. Banyaknya selesaian dari $f(x) \equiv 0\ (mod\ m)$ adalah banyaknya s_i yang mememnuhi $f(s_i) \equiv 0\ (mod\ m)$.

Teorema 2.1

Kongruensi linier $a \cdot x \equiv b\ (mod\ m)$ dimana $a, b, n \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ dan $m > 1$ dapat diselesaikan hanya jika $d = FPB(a, m)$ membagi b, dan pada kasus ini memiliki d selesaian. Jika a dan m relatif prima atau $d = 1$, maka kongruensi memiliki satu penyelesaian (Hengki, Irawan, & dkk, 2014).

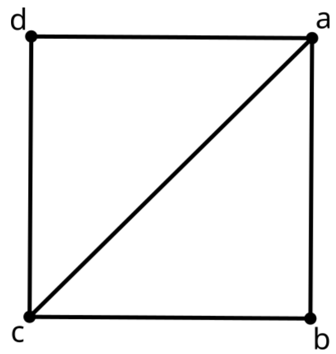
2.1.3 Graf

1. Definisi Graf

Graf G merupakan pasangan himpunan $V(G)$ dan $E(G)$. Himpunan $V(G)$ merupakan himpunan tidak kosong dan berhingga yang memuat objek yang disebut simpul. Sedangkan $E(G)$ merupakan himpunan yang mungkin kosong dari pasangan tak terurut dari simpul-simpul yang berbeda di $V(G)$ disebut sisi. Banyaknya elemen di $V(G)$ disebut order dari G dan banyaknya elemen di $E(G)$ disebut ukuran dari G. (Abdussakir, Azizah, & Nofandika, 2009)

Contoh:

Misal G merupakan graf dengan $V(G) = \{\mathrm{a, b, c, d}\}$ dan $E = \{(\mathrm{a, b}), (\mathrm{a, d}), (\mathrm{a, c}), (\mathrm{b, c}), (\mathrm{c, d})\}$, maka graf G dapat digambarkan sebagai berikut:



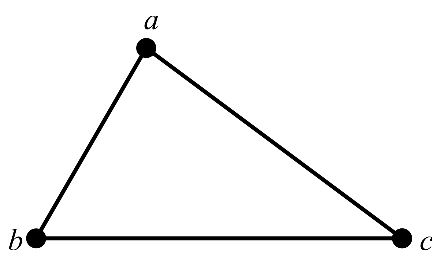
Gambar 2.1 Contoh Graf 1

Graf G memiliki orde 4 karena $|V(G)| = |\{\mathrm{a, b, c, d}\}| = 4$ dan ukuran graf G adalah 5 karena $|E(G)| = |\{(\mathrm{a, b}), (\mathrm{a, d}), (\mathrm{a, c}), (\mathrm{b, c}), (\mathrm{c, d})\}| = 5$.

2. Definisi Terkait Langsung dan Terhubung Langsung

Jika (u, v) adalah sisi dari G, maka u dan v merupakan simpul yang terhubung langsung. Jika (u, v) dan (v, w) berbeda, maka (u, v) dan (v, w) disebut sisi yang terhubung langsung. Simpul u terkait langsung terhadap sisi (u, v) (Chartrand, Lesniak, & Zhang, 2015).

Contoh:



Gambar 2.2 Contoh Graf 2

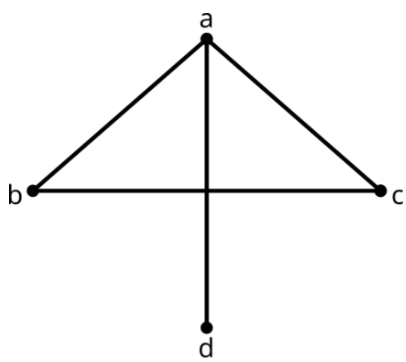
Pada gambar graf di atas, simpul a terhubung langsung dengan simpul c dan simpul b, atau dapat dituliskan (a, c) dan (a, b). Sedangkan sisi (a, c) dan (a, b)

disebut dengan sisi yang terhubung langsung dan simpul a terkait langsung terhadap sisi (a, b) dan sisi (a, c).

3. Definisi Lingkungan

Misal v merupakan simpul di graf G, maka himpunan semua simpul di G yang terhubung langsung dengan v disebut lingkungan dari v. Lingkungan dari v dinotasikan dengan $N_G(v)$. Selanjutnya, jika dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf, maka notasi $N_G(v)$ disederhanakan menjadi $N(v)$ (Abdussakir, Azizah, & Nofandika, 2009).

Contoh:



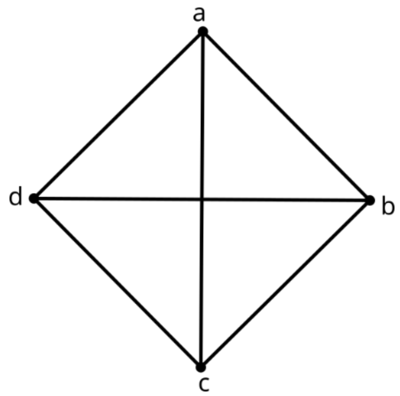
Gambar 2.3 Contoh Graf 3

Pada graf di atas, simpul a terhubungan langsung dengan $\{\mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}$, sehingga simpul a memiliki lingkungan $\{\mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}$ atau dapat dituliskan $N(\mathrm{a}) = \{\mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}$.

4. Definisi Derajat

Derajat simpul v di graf G adalah banyaknya sisi yang terkait langsung dengan v. Dinotasikan dengan $\deg_G(v)$ atau sederhananya $\deg(v)$. Derajat simpul v, dapat juga didefinisikan sebagai banyaknya simpul yang terhubung langsung dengan v atau banyaknya tetangga dari v, $\deg(v) = |N(v)|$ (Chartrand & Zhang, 2012).

Contoh:



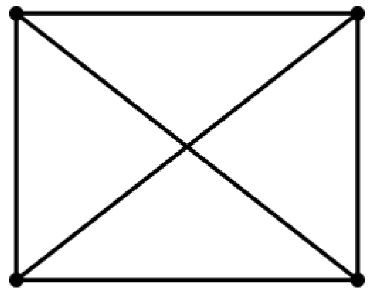
Gambar 2.4 Contoh Graf 4

Simpul a pada Gambar 2.4 memiliki lingkungan $N(\mathrm{a}) = \{\mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}$, sehingga simpul a memiliki derajat 3 atau dapat dinotasikan $\deg(\mathrm{a}) = 3$. Setiap simpul pada Gambar 2.4 memiliki derajat 3 karena jumlah tetangganya ada 3.

5. Definisi Graf Lengkap

Graf lengkap merupakan graf yang setiap dua simpul berbedanya terhubung langsung. Graf lengkap dapat dinotasikan K_n dimana n merupakan order dari graf. Ukuran dari graf lengkap berorder n adalah $\binom{n}{2} = \frac{n\cdot(n-1)}{2}$ (Chartrand, Lesniak, & Zhang, 2015). Derajat dari setiap simpul graf lengkap adalah $\deg(u) = n - 1$, dimana u simpul di K_n dan n merupakan order dari graf.

Contoh:



Gambar 2.5 Contoh Graf Lengkap

Gambar 2.5 merupakan graf lengkap berorder 4 atau dapat dinotasikan K_4. Setiap simpul K_4 terhubung langsung dengan tiga simpul berbeda, sehingga derajat dari tiap-tiap simpulnya adalah $\deg(u) = 3$, dimana $u \in V(K_4)$. Ukuran dari K_4 adalah $|E| = \binom{4}{2} = \frac{4\cdot(4-1)}{2} = 2 \cdot 3 = 6$.

6. Definisi Graf Annihilator

Graf annihilator dari ring R, dinotasikan $AG(R)$, merupakan graf yang simpul-simpulnya merupakan elemen dari $Z(R)^* = Z(R)\backslash\{0\}$. Dua simpul berbeda $u, v \in V\big(AG(R)\big)$ terhubung langsung jika dan hanya jika $ann(u) \cup ann(v) \neq ann(u \cdot v)$ dengan $ann(u) = \{r \in R \mid u \cdot r = 0\}$ (Badawi, 2014).

Contoh:

Diberikan elemen dari ring komutatif dengan kesatuan $\mathbb{Z}_{10} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Untuk membentuk graf annihilator, perlu mengetahui himpunan pembagi di $\mathbb{Z}_{10}$. Pembagi nol pada $\mathbb{Z}_{10}$ dapat dicari menggunakan tabel Cayley sebagai berikut:

Tabel 2.4 Tabel Cayley Perkalian pada $\mathbb{Z}_{10}$

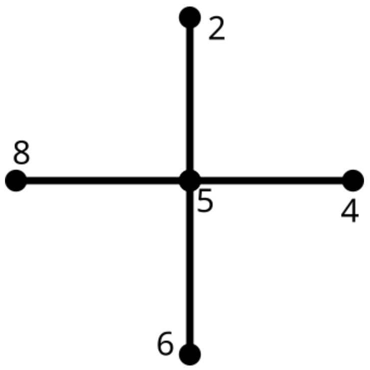
*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
3	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
4	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6
5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	0	6	2	8	4	0	6	2	8	4
7	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3
8	0	8	6	4	2	0	8	6	4	2
9	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Dari Tabel 2.4, diketahui bahwa pembagi nol pada $\mathbb{Z}_{10}$ adalah $\{\bar{2},\bar{4},\bar{5},\bar{6},\bar{8}\}$ atau dapat dituliskan $Z(\mathbb{Z}_{10})=\{\bar{2},\bar{4},\bar{5},\bar{6},\bar{8}\}$. Elemen pada $Z(\mathbb{Z}_{10})$ merupakan simpul pada $AG(\mathbb{Z}_{10})$. Kemudian untuk mencari simpul yang terhubung langsung, perlu diketahui annihilator dari setiap simpul dan annihilator dari hasil kali kedua simpul tersebut. Berikut perhitungannya:

1. $ann(\bar{2}) \cup ann(\bar{5}) = \{\bar{0},\bar{2},\bar{4},\bar{5},\bar{6},\bar{8}\} \neq \mathbb{Z}_{10} = ann(\overline{10}) = ann(\bar{0})$
2. $ann(4) \cup ann(\bar{5}) = \{\bar{0},\bar{2},\bar{4},\bar{5},\bar{6},\bar{8}\} \neq \mathbb{Z}_{10} = ann(\overline{10}) = ann(\bar{0})$
3. $ann(\bar{6}) \cup ann(\bar{5}) = \{\bar{0},\bar{2},\bar{4},\bar{5},\bar{6},\bar{8}\} \neq \mathbb{Z}_{10} = ann(\overline{10}) = ann(\bar{0})$
4. $ann(\bar{8}) \cup ann(\bar{5}) = \left\{\{\bar{0},\bar{2},\bar{4},\bar{5},\bar{6},\bar{8}\}2,4,5,6,8\right\} \neq \mathbb{Z}_{10} = ann(\overline{10}) =$

   $ann(\bar{0})$

Dari keterangan diatas diperoleh sisi dari graf annihilator $AG(\mathbb{Z}_{10})$ adalah $E(AG(\mathbb{Z}_{10})) = \{(\bar{2},\bar{5}),(\bar{4},\bar{5}),(\bar{6},\bar{5}),(\bar{8},\bar{5})\}$. Dari data yang diperoleh, graf annihilator $AG(\mathbb{Z}_{10})$ diperoleh bentuk sebagai berikut:



Gambar 2.6 Graf Annihilator $\mathbb{Z}_{\mathbf{10}}$

2.1.4 Indeks Narumi-Katayama

Misal $G(V,E)$ adalah suatu graf. Himpunan $V(G)$ adalah himpunan simpul di graf G dan $\deg(u)$ merupakan derajat simpul u, maka indeks Narumi-Katayama dari suatu graf didefinisikan sebagai hasil kali semua derajat simpul di graf $G(V,E)$. Indeks Narumi-Katayama dapat dinotasikan sebagai,

$$NK(G) = \prod_{u\in V(G)} \deg(u)$$

(Das, et al., 2016).

Contoh:

Misal $G = AG(\mathbb{Z}_{10})$, dengan $V\big(AG(\mathbb{Z}_{10})\big) = \{\bar{2},\bar{4},\bar{5},\bar{6},\bar{8}\}$ dan $E\big(AG(\mathbb{Z}_{10})\big) = \{(\bar{2},\bar{5}),(\bar{4},\bar{5}),(\bar{6},\bar{5}),(\bar{8},\bar{5})\}$. Derajat dari semua simpul dari graf annihilator pada $\mathbb{Z}_{10}$ yaitu, $\deg(\bar{5}) = 4$ dan $\deg(\bar{2}) = \deg(\bar{4}) = \deg(\bar{8}) = 1$. Berdasarkan data tersebut, maka indeks Narumi-Katayama graf annihilator pada $\mathbb{Z}_{10}$ adalah $NK\big(AG(\mathbb{Z}_{10})\big) = \prod_{u\in V(G)} \deg(u) = \deg(\bar{2}) \cdot \deg(\bar{4}) \cdot \deg(\bar{5}) \cdot \deg(\bar{8}) = 1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 = 4$.

2.1.5 Indeks Zagreb Perkalian Pertama

Misal $G(V,E)$ adalah suatu graf. Himpunan $V(G)$ adalah himpunan simpul di graf G dan $E(G)$ adalah himpunan sisi pada graf G. Notasi $\deg(u)$ menyatakan derajat simpul u. Selanjutnya indeks Zagreb Perkalian Pertama didefinisikan sebagai hasil kali semua kuadrat dari derajat simpul di graf $G(V,E)$ yang dapat dinotasikan sebagai,

$$M_1(G) = \prod_{u\in V(G)} (\deg(u))^2$$

(Das, et al., 2016). Dengan kata lain, $M_1(G) = NK(G)^2$ (Alfuraidan, Vetrík, & Balachandran, 2020).

Contoh:

Misal $G = AG(\mathbb{Z}_{10})$, dengan $V\big(AG(\mathbb{Z}_{10})\big) = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{8}\}$ dan $E\big(AG(\mathbb{Z}_{10})\big) = \{(\bar{2}, \bar{5}), (\bar{4}, \bar{5}), (\bar{6}, \bar{5}), (\bar{8}, \bar{5})\}$. Derajat dari semua simpul dari graf annihilator pada $\mathbb{Z}_{10}$ yaitu, $\deg(\bar{5}) = 4$ dan $\deg(\bar{2}) = \deg(\bar{4}) = \deg(\bar{8}) = 1$. Berdasarkan data tersebut, maka indeks Zagreb Perkalian Pertama graf annihilator pada $\mathbb{Z}_{10}$ adalah $M_1\big(AG(\mathbb{Z}_{10})\big) = \prod_{u \in V(G)} (\deg(u))^2 = (\deg(\bar{2}))^2 \cdot (\deg(\bar{4}))^2 \cdot \big(\deg(\bar{5})\big)^2 \cdot (\deg(\bar{8}))^2 = 1^2 \cdot 1^2 \cdot 4^2 \cdot 1^2 = 16$.

2.1.6 Indeks Zagreb Perkalian Kedua

Misal $G(V, E)$ adalah suatu graf. Himpunan $V(G)$adalah himpunan simpul di graf G dan $E(G)$ adalah himpunan sisi pada graf G. Notasi $\deg(u)$ menyatakan derajat simpul u. Selanjutnya, indeks Zagreb Perkalian Kedua didefinisikan sebagai perkalian dari hasil kali semua derajat simpul yang terhubung langsung. Indeks Zagreb Perkalian Kedua dapat dinotasikan sebagai,

$$M_2(G) = \prod_{(u,v) \in E(G)} \deg(u) \cdot \deg(v)$$

(Das, et al., 2016).

Contoh:

Misal $G = AG(\mathbb{Z}_{10})$, dengan $V\big(AG(\mathbb{Z}_{10})\big) = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{8}\}$ dan $E\big(AG(\mathbb{Z}_{10})\big) = \{(\bar{2}, \bar{5}), (\bar{4}, \bar{5}), (\bar{6}, \bar{5}), (\bar{8}, \bar{5})\}$. Derajat dari semua simpul dari graf annihilator pada $\mathbb{Z}_{10}$ yaitu, $\deg(\bar{5}) = 4$ dan $\deg(\bar{2}) = \deg(\bar{4}) = \deg(\bar{8}) = 1$. Berdasarkan data di atas, maka indeks Zagreb Perkalian Kedua graf annihilator pada $\mathbb{Z}_{10}$ adalah $M_2\big(AG(\mathbb{Z}_{10})\big) = \prod_{(u,v) \in E(G)} \deg(u) \cdot \deg(v) = \big(\deg(\bar{2}) \cdot$

$\deg(\bar{5})) \cdot (\deg(\bar{4}) \cdot \deg(\bar{5})) \cdot (\deg(\bar{6}) \cdot \deg(\bar{5})) \cdot (\deg(\bar{8}) \cdot \deg(\bar{5})) = (1 \cdot 4) \cdot (1 \cdot 4) \cdot (1 \cdot 4) \cdot (1 \cdot 4) = 16.$

2.1.7 Koindeks Zagreb Perkalian Kedua

Misal $G(V,E)$ adalah suatu graf. Himpunan $V(G)$adalah himpunan simpul di graf G dan $E(G)$ adalah himpunan sisi pada graf G. Notasi $\deg(u)$ menyatakan derajat simpul u, maka koindeks Zagreb Perkalian Kedua didefinisikan sebagai perkalian dari hasil kali semua derajat simpul yang tidak terhubung langsung. Koindeks Zagreb Perkalian Kedua dapat dinotasikan sebagai,

$$\overline{M_2}(G) = \prod_{(u,v)\notin E(G)} \deg(u) \cdot \deg(v)$$

(Das, et al., 2016)

Contoh:

Misal $G = AG(\mathbb{Z}_{10})$, dengan $V(AG(\mathbb{Z}_{10})) = \{\bar{2},\bar{4},\bar{5},\bar{6},\bar{8}\}$ dan $E(AG(\mathbb{Z}_{10})) = \{(\bar{2},\bar{5}),(\bar{4},\bar{5}),(\bar{6},\bar{5}),(\bar{8},\bar{5})\}$. Himpunan pasangan simpul yang tidak terhubung langsung adalah $E'(AG(\mathbb{Z}_{10})) = \{(\bar{2},\bar{4}),(\bar{2},\bar{6}),(\bar{2},\bar{8}),(\bar{4},\bar{6}),(\bar{4},\bar{8}),(\bar{6},\bar{8})\}$. Derajat dari semua simpul dari graf annihilator pada $\mathbb{Z}_{10}$ yaitu, $\deg(\bar{5}) = 4$ dan $\deg(\bar{2}) = \deg(\bar{4}) = \deg(\bar{8}) = 1 = 1$. Berdasarkan data tersebut, maka koindeks Zagreb Prkalian Kedua graf annihilator pada $\mathbb{Z}_{10}$ adalah $\overline{M_2}(AG(\mathbb{Z}_{10})) = \prod_{(u,v)\in E(G)} \deg(u) \cdot \deg(v) = (\deg(\bar{2}) \cdot \deg(\bar{4})) \cdot (\deg(\bar{2}) \cdot \deg(\bar{6})) \cdot (\deg(\bar{2}) \cdot \deg(\bar{8})) \cdot (\deg(\bar{4}) \cdot \deg(\bar{6})) \cdot (\deg(\bar{4}) \cdot \deg(\bar{8})) \cdot (\deg(\bar{8}) \cdot \deg(\bar{6})) = (1 \cdot 1) \cdot (1 \cdot 1) \cdot (1 \cdot 1) \cdot (1 \cdot 1) \cdot (1 \cdot 1) \cdot (1 \cdot 1) = 1$.

2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Quran

Alam semesta merupakan ciptaan Allah SWT. Semua yang ada di dunia ini merupakan makhluk dari Sang Khalik, baik itu yang besar seperti bumi, planet-planet, langit, maupun benda-benda kecil seperti atom, molekul dan lain sebagainya. Allah tidak sekedar menciptakan saja, namun juga mengatur dan memperhitungkan semua makhluk agar saling berkaitan dan dapat bermanfaat bagi keberlangsungan alam semesta yang sering disebut dengan sunnatullah.

Allah berfirman dalam surah Al-Qomar ayat 49 (Lajnah Pentashihan Mushaf Al-Quran, 2019):

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: "Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran".

Berdasarkan ayat tersebut, semua perkara di alam semesta diciptakan dengan ukuran, rumus, formula. Imam Al Qurtubi (2006) menafsirkan ayat ini bahwa Allah SWT menetapkan ukuran, keadaan, dan waktu dari segala sesuatu. Quraish Shiahb dalam tafsir Al Misbah (2000) menjelaskan ayat ini bahwa Allah menciptakan sesuatu tidak ada yang sia-sia. Semuanya diberi potensi yang sesuai dan dengan kadar yang cukup untuk melaksanakan fungsinya, dan saling berkaitan untuk menunjang keseimbangan.

Ayat lain yang mengungkapkan bahwa Allah menciptakan sesuatu dengan ukuran ada pada surah Al-Furqon ayat 2 (Lajnah Pentashihan Mushaf Al-Quran, 2019):

... وَ خَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَّرُهُ تَقْدِيْرًا ﴿٢﴾

Artinya: "...Dan Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya".

Ayat ini menegaskan bahwa Allah menciptakan dengan segala sesuatu di alam semesta ini dengan teliti dan penuh perhitungan. Kata فَقَدَّرَهُ تَقْدِيْرًا mengandung makna bahwa semua makhluk diciptakan sesui dengan manfaat, kegunaan dan hikmah sesuai kehendak-Nya. Allah tidak pernah menciptakan sesuatu hanya karena main-main ataupun bercanda (al-Qurthubi, 2006).

Kadar, aturan, ataupun rumus dari Allah SWT ini juga berlaku pada semua benda termasuk atom dan molekul. Dalam surah Al-Zalzalah ayat 7-8 (Al-Qur'an dan Terjemahannya, 2019):

فَمَنْ يَعْمَلْ مِثْقَالَ ذَرَّةٍ خَيْرًا يَرَهُ ﴿٧﴾ ومَنْ يَعْمَلْ مِثْقَالَ ذَرَّةٍ شَرًا يَرَهُ ﴿٨﴾

Artinya: "Barang siapa yang melakukan kebaikan seberat dzarrah pun, niscaya dia akan melihat (balasan)nya. Dan barangsiapa yang mengerjakan kejahatan sebesar dzarrah pun, niscaya dia akan melihat (balasan)nya pula".

Ayat di atas menegaskan bahwa tidak ada yang luput dari ilmu Allah, bahkan sekecil "*dzarrah*" pun tetap berada dalam kekuasaan Allah. Kata "*dzarrah*" dapat diartikan sesuatu yang sangat kecil, dalam hal ini bisa disebut juga atom (Sabarni, 2014).

2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung

Pembahasan "Indeks Narumi-Katayama dan Zagreb perkalian pada Graf Annihilator dari Bilangan Bulat Modulo" ini didukung oleh beberapa teori pendukung seperti graf annihilator, indeks Narumi-Katayama pada graf, dan Zagreb perkalian pada graf. Graf annihilator adalah graf yang simpulnya adalah semua elemen pembagi nol pada ring. Dua simpul berbeda terhubung jika gabungan annihilator dua simpul tidak sama dengan annihilator hasil kali dua simpul tersebut (Badawi, 2014).

Gambar graf annihilator pada $\mathbb{Z}_{pq}$ dibuat agar memudahkan penulis untuk mengidentifikasi pola yang ada dalam graf annihilator pada $\mathbb{Z}_{pq}$. Kemudian dari gambar graf tersebut dapat dibuat tabulasi data berupa simpul dan sisi pada graf annihilator, sehingga dari setiap simpul dan sisi pada $\mathbb{Z}_{pq}$ untuk p, q bilangan prima akan terbentuk rumus dari graf annihilator. Selain perhitungan manual, penelitian ini juga menggunakan program *python* sebagai alat bantu memperoleh data dari graf annihilator pada $\mathbb{Z}_{pq}$.

Selanjutnya terdapat indeks Narumi-Katayama dan Zagreb perkalian yang terdiri dari indeks Zagreb perkalian pertama, indeks Zagreb perkalian kedua, koindeks Zagreb perkalian kedua, pada graf. Indeks Narumi-Katayama adalah indeks topologi pada graf G, yang didefinisikan sebagai $NK(G) = \prod_{u\in V} \deg(u)$ dengan $\deg(u)$ merupakan derajat simpul u pada graf G (Badawi, 2014).

Indeks Zagreb perkalian pertama pada graf G didefinisikan $\Pi_1 = \prod_{u\in V} \deg(u)^2$. Indeks Zagreb perkalian kedua pada graf G didefinisikan $\Pi_2 = \prod_{(u,v)\in E} \deg(u)\cdot\deg(v)$. Koindeks Zagreb perkalian kedua pada graf G didefinisikan $\overline{\Pi}_2 = \prod_{(u,v)\notin E} \deg(u)\cdot\deg(v)$. Selanjutnya indeks Narumi-Katayama dan Zagreb perkalian diterapkan pada graf annihilator $\mathbb{Z}_{pq}$ dengan p, q bilangan prima, sehingga terbentuk suatu rumus umum indeks Narumi-Katayama dan Zagreb perkalian. Rumus umum tersebut akan dibuktikan menggunakan teorema pendukung.

BAB III
METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Metode yang dipakai dalam penelitian ini adalah studi literatur atau studi pustaka. Data atau informasi diperoleh dari berbagai macam sumber yang menjelaskan mengenai teori graf dan aljabar abstrak yang berhubungan dengan topik penelitian.

3.2 Pra Penelitian

Proses pada penelitian ini dimulai dengan memahami landasan teori dan konsep-konsep dasar yang terkait pada penelitian yang bersumber dari buku, artikel jurnal dan lainnya yang terkait dengan penelitian kemudian akan digunakan sebagai dasar pada penelitian ini. Proses tersebut dimulai dengan memahami tentang ring, ring komutatif, pembagi nol, dan annihilator, kemudian memahami kongruensi dan kongruensi linier. Selanjutnya memahami konsep tentang graf dan graf annihilator. Kemudian berlanjut memahami konsep indeks Narumi-Katayama, indeks Zagreb perkalian pertama, indeks Zagreb perkalian kedua, dan koindeks Zagreb perkalian kedua.

Pemahaman tentang konsep tersebut mengacu pada masing-masing rujukan utama yaitu artikel yang ditulis Badawi (2014) tentang graf annihilator, Cancan et al. (2020) tentang indeks-indeks perkalian berdasarkan derajat dan Xu (2013) tentang koindeks Zagreb perkalian. Setelah memahami konsep tersebut, proses selanjutnya adalah mulai untuk mengumpulkan data yang meliputi elemen-elemen pada ring yang akan digunakan pada penelitian ini. Data tersebut kemudian akan diteliti lebih lanjut serta diperdalam pada suatu kasus yang diangkat pada penelitian ini.

3.3 Tahapan Penelitian

Penelitian indeks Narumi-Katayama dan Zagreb Perkalian pada graf annihilator ring bilangan bulat modulo yang dibatasi pada bilangan bulat modulo pq dengan $p = 2,3,5,7,11$ dan $q = 2,3,5,7,11$ untuk menduga rumus umum dari indeks Narumi-Katayama dan Zagreb Perkalian pada graf annihilator $\mathbb{Z}_{pq}$ dengan p, q bilangan prima. Untuk memperoleh informasi pada graf annihilator $\mathbb{Z}_{pq}$ dimana $pq \geq 25$, penelitian ini akan dibantu dengan program *python*. Tahapan yang dilakukan pada penelitian ini sebagai berikut:

1. Menghitung indeks Narumi-Katayama dan Zagreb Perkalian pada graf annihilator ring $\mathbb{Z}_{pq}$ dengan $p, q \in \{2,3,5,7,11\}$ guna mendapatkan informasi yang digunakan untuk merumuskan lemma-lemma yang mendukung penyusunan rumus umum indeks Narumi-Katayama dan Zagreb Perkalian pada graf annihilator $\mathbb{Z}_{pq}$ dengan p, q bilangan prima.
2. Merumuskan dan membuktikan lemma pendukung yang berkaitan dengan graf annihilator $\mathbb{Z}_{pq}$ dengan p, q bilangan prima.
3. Merumuskan dan membuktikan rumus umum indeks Narumi-Katayama, dan Zagreb perkalian pada graf annihilator $\mathbb{Z}_{pq}$ dengan p, q bilangan prima.

BAB IV
PEMBAHASAN

4.1 Indeks Narumi-Katayama dan Zagreb Perkalian pada Graf Annihilator $\mathbb{Z}_{pq}$, dengan $p, q \in \{2, 3, 5, 7, 11\}$

Karena $p, q \in \{2, 3, 5, 7, 11\}$, maka akan ditinjau graf annihilator dari $\mathbb{Z}_{2\cdot2}$, $\mathbb{Z}_{2\cdot3}$, $\mathbb{Z}_{2\cdot5}$, $\mathbb{Z}_{2\cdot7}$, $\mathbb{Z}_{2\cdot11}$, $\mathbb{Z}_{3\cdot3}$, $\mathbb{Z}_{3\cdot5}$, $\mathbb{Z}_{3\cdot7}$, $\mathbb{Z}_{3\cdot11}$, $\mathbb{Z}_{5\cdot5}$, $\mathbb{Z}_{5\cdot7}$, $\mathbb{Z}_{5\cdot11}$, $\mathbb{Z}_{5\cdot5}$, $\mathbb{Z}_{5\cdot7}$, $\mathbb{Z}_{5\cdot11}$, $\mathbb{Z}_{7\cdot7}$, $\mathbb{Z}_{7\cdot11}$, dan $\mathbb{Z}_{11\cdot11}$

4.1.1 Indeks Narumi-Katayama dan Zagreb Perkalian pada Graf Annihilator $\mathbb{Z}_4$

Tabel Cayley Perkalian dari unsur-unsur $\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ disajikan sebagai berikut,

Tabel 4.1 Tabel Cayley Perkalian pada $\mathbb{Z}_4$

$\cdot$	$\overline{\mathbf{0}}$	$\overline{\mathbf{1}}$	$\overline{\mathbf{2}}$	$\overline{\mathbf{3}}$
$\overline{\mathbf{0}}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{\mathbf{1}}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{\mathbf{2}}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{\mathbf{3}}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Dari Tabel 4.1 diperoleh $Z(\mathbb{Z}_4) = \{\overline{2}\}$, dimana semua elemennya merupakan simpul dari graf $AG(\mathbb{Z}_4)$. Karena hanya ada satu simpul, maka graf annihilator dari $\mathbb{Z}_4$, $AG(\mathbb{Z}_4)$, merupakan graf trivial dengan gambar sebagai berikut:

Gambar 4.1 Graf Annihilator $\mathbb{Z}_4$

Berdasarkan Gambar 4.1, diperoleh indeks Narumi Katayama, indeks Zagreb perkalian pertama, indeks Zagreb perkalian kedua, dan koindeks Zagreb perkalian kedua dari graf annihilator $\mathbb{Z}_4$ semuanya bernilai 0.

4.1.2 Indeks Narumi-Katayama dan Zagreb Perkalian pada Graf Annihilator $\mathbb{Z}_6$

Tabel Cayley Perkalian dari unsur-unsur $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ disajikan sebagai berikut,

Tabel 4.2 Tabel Cayley Perkalian pada $\mathbb{Z}_6$

$\cdot$	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{\mathbf{5}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{\mathbf{5}}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

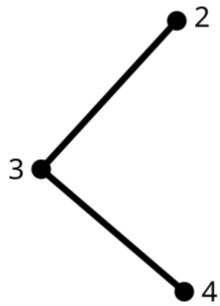
Dari Tabel 4.2, diperoleh $Z(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$, dimana semua elemennya merupakan simpul dari graf $AG(\mathbb{Z}_6)$. Selanjutnya untuk mengetahui sisi dari $AG(\mathbb{Z}_6)$, diketahui annihilator dari setiap anggota $Z(\mathbb{Z}_6)$ sebagai berikut, $ann(\bar{2}) = ann(\bar{4}) = \{\bar{0}, \bar{3}\}$ dan $ann(3) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$.

Kemudian dua simpul berbeda u dan v dikatakan terhubung langsung jika $ann(u) \cup ann(v) \neq ann(uv)$. Keterhubungan diperoleh sebagai berikut:

1. $ann(\bar{2}) \cup ann(\bar{3}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\} \neq \mathbb{Z}_6 = ann(\bar{0}) = ann(\bar{6}) = ann(\bar{2} \cdot \bar{3})$ sehingga simpul $\bar{2}$ dan simpul $\bar{3}$ terhubung langsung.

2. $ann(\bar{2}) \cdot ann(\bar{4}) = \{\bar{0}, \bar{3}\} = ann(\bar{2}) = ann(\bar{8}) = ann(\bar{2} \cdot \bar{4})$ sehingga simpul $\bar{2}$ dan $\bar{4}$ tidak terhubung langsung.
3. $ann(\bar{3}) \cup ann(\bar{4}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\} \neq \mathbb{Z}_6 = ann(\bar{0}) = ann(\overline{12}) = ann(\bar{3} \cdot \bar{4})$ sehingga simpul $\bar{3}$ dan simpul $\bar{4}$ terhubung langsung.

Dari perhitungan di atas, graf annihilator atas $\mathbb{Z}_6$ dapat digambarkan sebagai,



Gambar 4.2 Graf Annihilator $\mathbb{Z}_6$

Dari Gambar 4.2 diperoleh derajat simpul sebagai berikut, $\deg(\bar{2}) = \deg(\bar{4}) = 1$ dan $\deg(\bar{3}) = 2$. Berdasarkan uraian tersebut diperoleh:

1. Nilai indeks Narumi-Katayama sebagai,

$$NK\big(AG(\mathbb{Z}_6)\big) = \prod_{u \in V(AG(\mathbb{Z}_6))} \deg(u)$$

$$NK\big(AG(\mathbb{Z}_6)\big) = \deg(\bar{2}) \cdot \deg(\bar{3}) \cdot \deg(\bar{4}) = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$$

2. Nilai indeks Zagreb Perkalian Pertama sebagai,

$$M_1\big(AG(\mathbb{Z}_6)\big) = \prod_{u \in V(AG(\mathbb{Z}_6))} (\deg(u))^2 = \Big(NK\big(AG(\mathbb{Z}_6)\big)\Big)^2 = 2^2 = 4$$

3. Nilai indeks Zagreb Perkalian Kedua sebagai,

$$M_2\big(AG(\mathbb{Z}_6)\big) = \prod_{(u,v) \in E(AG(\mathbb{Z}_6))} \deg(u) \cdot \deg(v)$$

$$M_2(AG(\mathbb{Z}_6)) = (\deg(\bar{2}) \cdot \deg(\bar{3})) \cdot (\deg(\bar{3}) \cdot \deg(\bar{4}))$$

$$= (1 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 1) = 4$$

4. Nilai koindeks Zagreb Perkalian Kedua sebagai,

$$\overline{M_2}(AG(\mathbb{Z}_6)) = \prod_{(u,v) \notin E(AG(\mathbb{Z}_6))} \deg(u) \cdot \deg(v)$$

$$\overline{M_2}(AG(\mathbb{Z}_6)) = (\deg(\bar{2}) \cdot \deg(\bar{4})) = (1 \cdot 1) = 1$$

4.1.3 Indeks Narumi-Katayama dan Zagreb Perkalian pada Graf Annihilator $\mathbb{Z}_9$

Tabel Cayley Perkalian dari unsur-unsur $\mathbb{Z}_9 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}\}$ disajikan sebagai berikut,

Tabel 4.3 Tabel Cayley Perkalian pada $\mathbb{Z}_9$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{7}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{3}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Dari Tabel 4.3, diperoleh $Z(\mathbb{Z}_9) = \{\bar{3}, \bar{6}\}$, dimana semua elemennya merupakan simpul dari graf $AG(\mathbb{Z}_9)$. Selanjutnya untuk mengetahui sisi dari $AG(\mathbb{Z}_9)$, diketahui annihilator dari setiap anggota $Z(\mathbb{Z}_9)$ adalah, $ann(\bar{3}) = ann(\bar{6}) = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}\}$.

Selanjutnya dua simpul berbeda u dan v dikatakan terhubung langsung jika $ann(u) \cup ann(v) \neq ann(uv)$. Keterhubungan diperoleh sebagai berikut:

1. $ann(\bar{3}) = ann(\bar{6}) = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}\} \neq \mathbb{Z}_9 = ann(\bar{0}) = ann(\overline{18}) = ann(\bar{3} \cdot \bar{6})$ sehingga simpul $\bar{3}$ dan $\bar{6}$ terhubung langsung.

Dari perhitungan di atas, graf annihilator atas $\mathbb{Z}_9$ dapat digambarkan sebagai berikut,

Gambar 4.3 Graf Annihilator $\mathbb{Z}_9$

Dari Gambar 4.3 diperoleh derajat simpul yaitu, $\deg(\bar{3}) = \deg(\bar{6}) = 1$. Berdasarkan uraian tersebut diperoleh:

1. Nilai indeks Narumi-Katayama sebagai,

$$NK\big(AG(\mathbb{Z}_9)\big) = \prod_{u \in V(AG(\mathbb{Z}_9))} \deg(u)$$

$$NK\big(AG(\mathbb{Z}_9)\big) = \deg(\bar{3}) \cdot \deg(\bar{6}) = 1 \cdot 1 = 1$$

2. Nilai indeks Zagreb Perkalian Pertama sebagai,

$$M_1\big(AG(\mathbb{Z}_9)\big) = \prod_{u \in V(AG(\mathbb{Z}_9))} (\deg(u))^2 = \Big(NK\big(AG(\mathbb{Z}_9)\big)\Big)^2 = 1^2 = 1$$

3. Nilai indeks Zagreb Perkalian Kedua sebagai,

$$M_2\big(AG(\mathbb{Z}_9)\big) = \prod_{(u,v) \in E(AG(\mathbb{Z}_9))} \deg(u) \cdot \deg(v)$$

$$M_2\big(AG(\mathbb{Z}_9)\big) = (\deg(\bar{3}) \cdot \deg(\bar{6})) = (1 \cdot 1) = 1$$

4. Nilai koindeks Zagreb Perkalian Kedua sebagai,

$$\overline{M_2}\big(AG(\mathbb{Z}_9)\big) = \prod_{(u,v)\notin E\left(AG(\mathbb{Z}_9)\right)} \deg(u) \cdot \deg(v)$$

$$\overline{M_2}\big(AG(\mathbb{Z}_9)\big) = 0$$

4.1.4 Indeks Narumi-Katayama dan Zagreb Perkalian pada Graf Annihilator $\mathbb{Z}_{10}$

Tabel Cayley Perkalian dari unsur-unsur $\mathbb{Z}_{10} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}\}$ akan disajikan sebagai berikut,

Tabel 4.4 Tabel Cayley Perkalian pada $\mathbb{Z}_{10}$

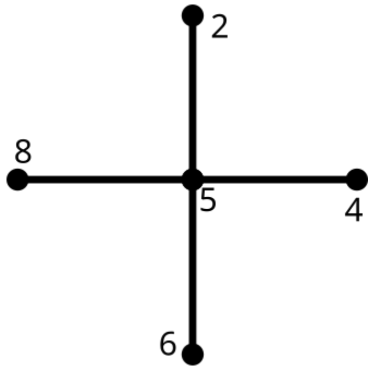
$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{8}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$
$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{8}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{9}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Dari Tabel 4.4, diperoleh $Z(\mathbb{Z}_{10}) = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{8}\}$, dimana semua elemennya merupakan simpul dari graf $AG(\mathbb{Z}_{10})$. Selanjutnya untuk mengetahui sisi dari $AG(\mathbb{Z}_{10})$, diketahui annihilator dari setiap anggota $Z(\mathbb{Z}_{10})$ adalah, $ann(\bar{2}) = ann(\bar{4}) = ann(\bar{6}) = ann(\bar{8}) = \{\bar{0}, \bar{5}\}$ dan $ann(\bar{5}) = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{0}, \bar{6}, \bar{8}\}$

Selanjutnya dua simpul berbeda u dan v dikatakan terhubung langsung jika $ann(u) \cup ann(v) \neq ann(uv)$. Keterhubungan diperoleh sebagai berikut:

1. $ann(\overline{2}) \cup ann(\overline{4}) = \{\overline{0}, \overline{5}\} = ann(\overline{8}) = ann(\overline{2} \cdot \overline{4})$ sehingga simpul $\overline{2}$ dan $\overline{4}$ tidak terhubung langsung.
2. $ann(\overline{2}) \cdot ann(\overline{5}) = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{8}\} \neq \mathbb{Z}_{10} = ann(\overline{0}) = ann(\overline{10}) = ann(\overline{2} \cdot \overline{5})$ sehingga simpul $\overline{2}$ dan $\overline{5}$ terhubung langsung.
3. $ann(\overline{2}) \cdot ann(\overline{6}) = \{\overline{0}, \overline{5}\} = ann(\overline{2}) = ann(\overline{12}) = ann(2 \cdot \overline{6})$ sehingga simpul $\overline{2}$ dan $\overline{6}$ tidak terhubung langsung.
4. $ann(\overline{2}) \cdot ann(\overline{8}) = \{\overline{0}, \overline{5}\} = ann(\overline{6}) = ann(\overline{16}) = ann(\overline{2} \cdot 8)$ sehingga simpul $\overline{2}$ dan $\overline{8}$ tidak terhubung langsung.
5. $ann(\overline{4}) \cdot ann(\overline{5}) = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{8}\} \neq \mathbb{Z}_{10} = ann(\overline{0}) = ann(2\overline{0}) = ann(\overline{4} \cdot \overline{5})$ sehingga simpul $\overline{4}$ dan $\overline{5}$ terhubung langsung.
6. $ann(\overline{4}) \cdot ann(\overline{6}) = \{\overline{0}, \overline{5}\} = ann(\overline{4}) = ann(\overline{24}) = ann(\overline{4} \cdot \overline{6})$ sehingga simpul $\overline{4}$ dan $\overline{6}$ tidak terhubung langsung.
7. $ann(\overline{4}) \cdot ann(\overline{8}) = \{\overline{0}, \overline{5}\} = ann(\overline{2}) = ann(\overline{32}) = ann(\overline{4} \cdot \overline{8})$ sehingga simpul $\overline{4}$ dan $\overline{8}$ tidak terhubung langsung.
8. $ann(\overline{5}) \cdot ann(\overline{6}) = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{8}\} \neq \mathbb{Z}_{10} = ann(\overline{0}) = ann(\overline{30}) = ann(\overline{5} \cdot \overline{6})$ sehingga simpul $\overline{6}$ dan $\overline{5}$ terhubung langsung.
9. $ann(\overline{5}) \cdot ann(\overline{8}) = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{8}\} \neq \mathbb{Z}_{10} = ann(\overline{0}) = ann(40) = ann(\overline{5} \cdot \overline{8})$ sehingga simpul $\overline{8}$ dan $\overline{5}$ terhubung langsung.
10. $ann(\overline{6}) \cdot ann(\overline{8}) = \{\overline{0}, \overline{5}\} = ann(\overline{8}) = ann(\overline{48}) = ann(\overline{6} \cdot \overline{8})$ sehingga simpul $\overline{6}$ dan $\overline{8}$ tidak terhubung langsung.

Dari perhitungan di atas, graf annihilator atas $\mathbb{Z}_{10}$ dapat digambarkan sebagai berikut,



Gambar 4.4 Graf Annihilator $\mathbb{Z}_{\mathbf{10}}$

Dari Gambar 4.4 diperoleh derajat simpul yaitu, $\deg(\bar{2}) = \deg(\bar{4}) = \deg(\bar{6}) = \deg(\bar{8}) = 1$ dan $\deg(\bar{5}) = 4$. Berdasarkan uraian tersebut diperoleh

1. Nilai indeks Narumi-Katayama sebagai,

$$NK\big(AG(\mathbb{Z}_{10})\big) = \prod_{u \in V(AG(\mathbb{Z}_{10}))} \deg(u)$$

$$NK\big(AG(\mathbb{Z}_{10})\big) = \deg(\bar{2}) \cdot \deg(\bar{4}) \cdot \deg(\bar{5}) \cdot \deg(\bar{6}) \cdot \deg(\bar{8})$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4$$

2. Nilai indeks Zagreb Perkalian Pertama sebagai,

$$M_1\big(AG(\mathbb{Z}_{10})\big) = \prod_{u \in V(AG(\mathbb{Z}_{10}))} (\deg(u))^2 = \Big(NK\big(AG(\mathbb{Z}_{10})\big)\Big)^2 = 4^2$$

$$= 16$$

3. Nilai indeks Zagreb Perkalian Kedua sebagai,

$$M_2\big(AG(\mathbb{Z}_{10})\big) = \prod_{(u,v) \in E(AG(\mathbb{Z}_{10}))} \deg(u) \cdot \deg(v)$$

$$M_2(AG(\mathbb{Z}_{10})) = (\deg(\bar{2}) \cdot \deg(\bar{5})) \cdot (\deg(\bar{4}) \cdot \deg(\bar{5}))$$
$$\cdot (\deg(\bar{6}) \cdot \deg(\bar{5})) \cdot (\deg(\bar{8}) \cdot \deg(\bar{5}))$$
$$= (1 \cdot 4) \cdot (1 \cdot 4) \cdot (1 \cdot 4) \cdot (1 \cdot 4) = 256$$

4. Nilai koindeks Zagreb Perkalian Kedua sebagai,

$$\overline{M_2}(AG(\mathbb{Z}_{10})) = \prod_{(u,v)\notin E(AG(\mathbb{Z}_{10}))} \deg(u) \cdot \deg(v)$$

$$\overline{M_2}(AG(\mathbb{Z}_{10})) = (\deg(\bar{2}) \cdot \deg(\bar{4})) \cdot (\deg(\bar{2}) \cdot \deg(\bar{6}))$$
$$\cdot (\deg(\bar{2}) \cdot \deg(\bar{8})) \cdot (\deg(\bar{4}) \cdot \deg(\bar{6}))$$
$$\cdot (\deg(\bar{4}) \cdot \deg(\bar{8})) \cdot (\deg(\bar{6}) \cdot \deg(\bar{8}))$$
$$= (1 \cdot 1) \cdot (1 \cdot 1) \cdot (1 \cdot 1) \cdot (1 \cdot 1) \cdot (1 \cdot 1) \cdot (1 \cdot 1) = 1$$

4.1.5 Indeks Narumi-Katayama dan Zagreb Perkalian pada Graf Annihilator $\mathbb{Z}_{14}$

Tabel Cayley Perkalian dari unsur-unsur $\mathbb{Z}_{14} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}\}$ akan disajikan sebagai berikut,

Tabel 4.5 Tabel Cayley Perkalian pada $\mathbb{Z}_{14}$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\overline{12}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$	$\overline{10}$	$\overline{13}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{8}$	$\overline{11}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\overline{12}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\overline{10}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\overline{12}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\overline{10}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\overline{10}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\overline{11}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\overline{12}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\overline{13}$	$\bar{4}$	$\bar{9}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\overline{12}$	$\bar{4}$	$\overline{10}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\overline{12}$	$\bar{4}$	$\overline{10}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$
$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$

$\mathbf{\bar{8}}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\overline{10}$	$\bar{4}$	$\overline{12}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\overline{10}$	$\bar{4}$	$\overline{12}$	$\bar{6}$
$\mathbf{\bar{9}}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\bar{4}$	$\overline{13}$	$\bar{8}$	$\bar{3}$	$\overline{12}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\overline{11}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\overline{10}$	$\bar{5}$
$\mathbf{\overline{10}}$	$\bar{0}$	$\overline{10}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\overline{12}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\overline{10}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\overline{12}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$
$\mathbf{\overline{11}}$	$\bar{0}$	$\overline{11}$	$\bar{8}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\overline{13}$	$\overline{10}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\overline{12}$	$\bar{9}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\mathbf{\overline{12}}$	$\bar{0}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\mathbf{\overline{13}}$	$\bar{0}$	$\overline{13}$	$\overline{12}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Dari Tabel 4.5, diperoleh $Z(\mathbb{Z}_{14}) = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}\}$, dimana semua elemennya merupakan simpul dari graf $AG(\mathbb{Z}_{14})$. Selanjutnya untuk mengetahui sisi dari $AG(\mathbb{Z}_{14})$, diketahui annihilator dari setiap anggota $Z(\mathbb{Z}_{14})$ sebagai berikut, $ann(\bar{2}) = ann(\bar{4}) = ann(\bar{6}) = ann(\bar{8}) = ann(\overline{10}) = ann(\overline{12}) = \{\bar{0}, \bar{7}\}$ dan $ann(\bar{7}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}\}$.

Selanjutnya dua simpul berbeda u dan v dikatakan terhubung langsung jika $ann(u) \cup ann(v) \neq ann(uv)$. Keterhubungan diperoleh sebagai berikut:

1. $ann(\bar{2}) \cup ann(\bar{4}) = \{\bar{0}, \bar{7}\} = ann(\bar{8}) = ann(\bar{2} \cdot \bar{4})$ sehingga simpul $\bar{2}$ dan $\bar{4}$ tidak terhubung langsung.
2. $ann(\bar{2}) \cdot ann(\bar{6}) = \{\bar{0}, \bar{7}\} = ann(\overline{12}) = ann(\bar{2} \cdot \bar{6})$ sehingga simpul $\bar{2}$ dan $\bar{6}$ tidak terhubung langsung.
3. $ann(\bar{2}) \cdot ann(\bar{7}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}\} \neq \mathbb{Z}_{14} = ann(\bar{0}) = ann(14) = ann(\bar{2} \cdot \bar{7})$ sehingga simpul $\bar{2}$ dan $\bar{7}$ terhubung langsung.
4. $ann(\bar{2}) \cdot ann(\bar{8}) = \{\bar{0}, \bar{7}\} = ann(\bar{4}) = ann(\overline{16}) = ann(\bar{2} \cdot \bar{8})$ sehingga simpul $\bar{2}$ dan $\bar{8}$ tidak terhubung langsung.
5. $ann(\bar{2}) \cdot ann(\overline{10}) = \{\bar{0}, \bar{7}\} = ann(\bar{6}) = ann(\overline{20}) = ann(\bar{2} \cdot \overline{10})$ sehingga simpul $\bar{2}$ dan $\overline{10}$ tidak terhubung langsung.

6. $ann(\overline{2}) \cdot ann(\overline{12}) = \{\overline{0}, \overline{7}\} = ann(\overline{12}) = ann(\overline{24}) = ann(\overline{2} \cdot \overline{12})$ sehingga simpul $\overline{2}$ dan $\overline{12}$ tidak terhubung langsung.

7. $ann(\overline{4}) \cdot ann(\overline{6}) = \{\overline{0}, \overline{7}\} = ann(\overline{10}) = ann(\overline{24}) = ann(\overline{4} \cdot 6)$ sehingga simpul $\overline{4}$ dan $\overline{6}$ tidak terhubung langsung.

8. $ann(\overline{4}) \cdot ann(\overline{7}) = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}\} \neq \mathbb{Z}_{14} = ann(\overline{0}) = ann(\overline{28}) = ann(\overline{4} \cdot \overline{7})$ sehingga simpul $\overline{4}$ dan $\overline{7}$ terhubung langsung.

9. $ann(\overline{4}) \cdot ann(\overline{8}) = \{\overline{0}, \overline{7}\} = ann(\overline{4}) = ann(\overline{32}) = ann(\overline{4} \cdot \overline{8})$ sehingga simpul $\overline{4}$ dan $\overline{8}$ tidak terhubung langsung.

10. $ann(\overline{4}) \cdot ann(\overline{10}) = \{\overline{0}, \overline{7}\} = ann(\overline{12}) = ann(\overline{40}) = ann(\overline{4} \cdot \overline{10})$ sehingga $\overline{4}$ dan $\overline{10}$ tidak terhubung langsung.

11. $ann(\overline{4}) \cdot ann(\overline{12}) = \{\overline{0}, \overline{7}\} = ann(\overline{6}) = ann(\overline{48}) = ann(\overline{4} \cdot 12)$ sehingga simpul $\overline{4}$ dan $\overline{12}$ tidak terhubung langsung.

12. $ann(\overline{6}) \cdot ann(\overline{7}) = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}\} \neq \mathbb{Z}_{14} = ann(\overline{0}) = ann(\overline{42}) = ann(\overline{6} \cdot \overline{7})$ sehingga simpul $\overline{6}$ dan $\overline{7}$ terhubung langsung.

13. $ann(\overline{6}) \cdot ann(\overline{8}) = \{\overline{0}, \overline{7}\} = ann(\overline{6}) = ann(\overline{48}) = ann(\overline{6} \cdot \overline{8})$ sehingga simpul $\overline{6}$ dan $\overline{8}$ tidak terhubung langsung.

14. $ann(\overline{6}) \cdot ann(\overline{10}) = \{\overline{0}, \overline{7}\} = ann(\overline{12}) = ann(\overline{60}) = ann(\overline{6} \cdot \overline{10})$ sehingga simpul $\overline{6}$ dan $\overline{10}$ tidak terhubung langsung.

15. $ann(\overline{6}) \cdot ann(\overline{12}) = \{\overline{0}, \overline{7}\} = ann(\overline{6}) = ann(\overline{72}) = ann(\overline{6} \cdot \overline{12})$ sehingga simpul $\overline{6}$ dan $\overline{12}$ tidak terhubung langsung.

16. $ann(\overline{7}) \cdot ann(\overline{8}) = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}\} \neq \mathbb{Z}_{14} = ann(\overline{0}) = ann(\overline{56}) = ann(\overline{7} \cdot \overline{8})$ sehingga simpul $\overline{8}$ dan $\overline{7}$ terhubung langsung.

17. $ann(\overline{7}) \cdot ann(\overline{10}) = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}\} \neq \mathbb{Z}_{14} = ann(\overline{0}) =$ $ann(\overline{70}) = ann(\overline{10} \cdot \overline{7})$ sehingga simpul $\overline{10}$ dan $\overline{7}$ terhubung langsung.

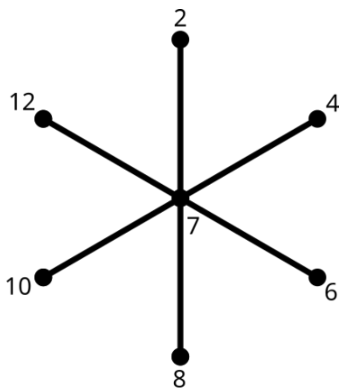
18. $ann(\overline{7}) \cdot ann(\overline{12}) = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}\} \neq \mathbb{Z}_{14} = ann(\overline{0}) =$ $ann(\overline{84}) = ann(\overline{7} \cdot \overline{12})$ sehingga simpul $\overline{12}$ dan $\overline{7}$ terhubung langsung.

19. $ann(\overline{8}) \cdot ann(\overline{10}) = \{\overline{0}, \overline{7}\} = ann(\overline{10}) = ann(\overline{80}) = ann(\overline{8} \cdot \overline{10})$ sehingga simpul $\overline{8}$ dan $\overline{10}$ tidak terhubung langsung.

20. $ann(\overline{8}) \cdot ann(\overline{12}) = \{\overline{0}, \overline{7}\} = ann(\overline{12}) = ann(\overline{96}) = ann(\overline{8} \cdot \overline{12})$ sehingga simpul $\overline{8}$ dan $\overline{12}$ tidak terhubung langsung.

21. $ann(\overline{10}) \cdot ann(\overline{12}) = \{\overline{0}, \overline{7}\} = ann(\overline{10}) = ann(\overline{120}) = ann(\overline{10} \cdot \overline{12})$ sehingga simpul $\overline{12}$ dan $\overline{10}$ tidak terhubung langsung.

Dari perhitungan di atas, graf annihilator atas $\mathbb{Z}_{14}$ dapat digambarkan sebagai berikut,



Gambar 4.5 Graf Annihilator $\mathbb{Z}_{14}$

Dari Gambar 4.5 diperoleh derajat simpul yaitu $\deg(\overline{2}) = \deg(\overline{4}) = \deg(\overline{6}) = \deg(\overline{8}) = \deg(\overline{10}) = \deg(\overline{12}) = 1$ dan $\deg(\overline{7}) = 6$. Berdasarkan uraian tersebut diperoleh:

1. Nilai indeks Narumi-Katayama sebagai,

$$NK\big(AG(\mathbb{Z}_{14})\big) = \prod_{u \in V\left(AG(\mathbb{Z}_{14})\right)} \deg(u)$$

$$NK\big(AG(\mathbb{Z}_{14})\big) = \deg(\overline{2}) \cdot \deg(\overline{4}) \cdot \deg(\overline{6}) \cdot \deg(\overline{7}) \cdot \deg(\overline{8}) \cdot \deg(\overline{10}) \cdot \deg(\overline{12}) = 1^6 \cdot 6 = 6$$

2. Nilai indeks Zagreb Perkalian Pertama sebagai,

$$M_1\big(AG(\mathbb{Z}_{14})\big) = \prod_{u \in V(AG(\mathbb{Z}_{14}))} (\deg(u))^2 = \Big(NK\big(AG(\mathbb{Z}_{14})\big)\Big)^2 = 6^2 = 36$$

3. Nilai indeks Zagreb Perkalian Kedua sebagai,

$$M_2\big(AG(\mathbb{Z}_{14})\big) = \prod_{(u,v) \in E(AG(\mathbb{Z}_{14}))} \deg(u) \cdot \deg(v)$$

$$M_2\big(AG(\mathbb{Z}_{14})\big) = (\deg(\overline{2}) \cdot \deg(\overline{7})) \cdot (\deg(\overline{4}) \cdot \deg(\overline{7})) \cdot (\deg(\overline{6}) \cdot \deg(\overline{7})) \cdot (\deg(\overline{8}) \cdot \deg(\overline{7})) \cdot (\deg(\overline{10}) \cdot \deg(\overline{7})) \cdot (\deg(\overline{12}) \cdot \deg(\overline{7})) = (1 \cdot 6)^5 = 46656$$

4. Nilai koindeks Zagreb Perkalian Kedua sebagai,

$$\overline{M_2}\big(AG(\mathbb{Z}_{14})\big) = \prod_{(u,v) \notin E(AG(\mathbb{Z}_{14}))} \deg(u) \cdot \deg(v)$$

$$\overline{M_2}\big(AG(\mathbb{Z}_{14})\big) = (\deg(\overline{2}) \cdot \deg(\overline{4})) \cdot (\deg(\overline{2}) \cdot \deg(\overline{6})) \cdot (\deg(\overline{2}) \cdot \deg(\overline{8})) \cdot (\deg(\overline{2}) \cdot \deg(\overline{10})) \cdot (\deg(\overline{2}) \cdot \deg(\overline{12})) \cdot (\deg(\overline{4}) \cdot \deg(\overline{6})) \cdot (\deg(\overline{4}) \cdot \deg(\overline{8})) \cdot (\deg(\overline{4}) \cdot \deg(\overline{10})) \cdot (\deg(\overline{4}) \cdot \deg(\overline{12})) \cdot (\deg(\overline{6}) \cdot \deg(\overline{8})) \cdot (\deg(\overline{6}) \cdot \deg(\overline{10})) \cdot (\deg(\overline{6}) \cdot \deg(\overline{12})) \cdot (\deg(\overline{10}) \cdot \deg(\overline{8})) \cdot (\deg(\overline{12}) \cdot \deg(\overline{8})) \cdot (\deg(\overline{10}) \cdot \deg(\overline{12})) = (1 \cdot 1)^{15} = 1$$

4.1.6 Indeks Narumi-Katayama dan Zagreb Perkalian pada Graf Annihilator $\mathbb{Z}_{15}$

Tabel Cayley Perkalian dari unsur-unsur $\mathbb{Z}_{15} = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7},\overline{8},\overline{9},\overline{10},\overline{11},\overline{12},\overline{13},\overline{14}\}$ akan disajikan sebagai berikut,

Tabel 4.6 Tabel Cayley Perkalian pada $\mathbb{Z}_{15}$

$\cdot$	$\overline{\mathbf{0}}$	$\overline{\mathbf{1}}$	$\overline{\mathbf{2}}$	$\overline{\mathbf{3}}$	$\overline{\mathbf{4}}$	$\overline{\mathbf{5}}$	$\overline{\mathbf{6}}$	$\overline{\mathbf{7}}$	$\overline{\mathbf{8}}$	$\overline{\mathbf{9}}$	$\overline{\mathbf{10}}$	$\overline{\mathbf{11}}$	$\overline{\mathbf{12}}$	$\overline{\mathbf{13}}$	$\overline{\mathbf{14}}$
$\overline{\mathbf{0}}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{\mathbf{1}}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$
$\overline{\mathbf{2}}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\overline{14}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$	$\overline{7}$	$\overline{9}$	$\overline{11}$	$\overline{13}$
$\overline{\mathbf{3}}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{12}$
$\overline{\mathbf{4}}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{12}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{9}$	$\overline{13}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{10}$	$\overline{14}$	$\overline{3}$	$\overline{7}$	$\overline{11}$
$\overline{\mathbf{5}}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$
$\overline{\mathbf{6}}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{3}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{3}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{3}$	$\overline{9}$
$\overline{\mathbf{7}}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{14}$	$\overline{6}$	$\overline{13}$	$\overline{5}$	$\overline{12}$	$\overline{4}$	$\overline{11}$	$\overline{3}$	$\overline{10}$	$\overline{2}$	$\overline{9}$	$\overline{1}$	$\overline{8}$
$\overline{\mathbf{8}}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{1}$	$\overline{9}$	$\overline{2}$	$\overline{10}$	$\overline{3}$	$\overline{11}$	$\overline{4}$	$\overline{12}$	$\overline{5}$	$\overline{13}$	$\overline{6}$	$\overline{14}$	$\overline{7}$
$\overline{\mathbf{9}}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{3}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{3}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{3}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$
$\overline{\mathbf{10}}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$
$\overline{\mathbf{11}}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{7}$	$\overline{3}$	$\overline{14}$	$\overline{10}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{13}$	$\overline{9}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$	$\overline{12}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$
$\overline{\mathbf{12}}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$
$\overline{\mathbf{13}}$	$\overline{0}$	$\overline{13}$	$\overline{11}$	$\overline{9}$	$\overline{7}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{14}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{\mathbf{14}}$	$\overline{0}$	$\overline{14}$	13	$\overline{12}$	11	$\overline{10}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Dari Tabel 4.6 diperoleh $Z(\mathbb{Z}_{15}) = \{\overline{3},\overline{5},\overline{6},\overline{9},\overline{10},\overline{12}\}$, dimana semua elemennya merupakan simpul dari graf $AG(\mathbb{Z}_{15})$. Selanjutnya untuk mengetahui sisi dari $AG(\mathbb{Z}_{15})$, diketahui annihilator dari setiap anggota $Z(\mathbb{Z}_{15})$ yaitu, $ann(\overline{3}) = ann(\overline{6}) = ann(\overline{9}) = ann(\overline{12}) = \{\overline{0},\overline{5},\overline{10}\}$ dan $ann(\overline{5}) = ann(\overline{10}) = \{\overline{0},\overline{3},\overline{6},\overline{9},\overline{12}\}$

Selanjutnya dua simpul berbeda u dan v dikatakan terhubung langsung jika $ann(u) \cup ann(v) \neq ann(uv)$. Keterhubungan diperoleh sebagai berikut:

1. $ann(\overline{3}) \cup ann(\overline{5}) = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{12}\} \neq \mathbb{Z}_{15} = ann(0) = ann(\overline{15}) = ann(\overline{3} \cdot \overline{5})$ sehingga simpul $\overline{3}$ dan $\overline{5}$ terhubung langsung.
2. $ann(\overline{3}) \cup ann(\overline{6}) = \{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}\} = ann(\overline{3}) = ann(\overline{18}) = ann(\overline{3} \cdot \overline{6})$ sehingga simpul $\overline{3}$ dan $\overline{6}$ tidak terhubung langsung.
3. $ann(\overline{3}) \cup ann(\overline{9}) = \{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}\} = ann(12) = ann(\overline{27}) = ann(\overline{3} \cdot \overline{9})$ sehingga simpul $\overline{3}$ dan $\overline{9}$ tidak terhubung langsung.
4. $ann(\overline{3}) \cup ann(\overline{10}) = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{12}\} \neq \mathbb{Z}_{15} = ann(\overline{0}) = ann(\overline{30}) = ann(\overline{3} \cdot \overline{10})$ sehingga simpul $\overline{3}$ dan $\overline{10}$ terhubung langsung.
5. $ann(\overline{3}) \cup ann(\overline{12}) = \{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}\} = ann(\overline{6}) = ann(\overline{36}) = ann(\overline{3} \cdot \overline{12})$ sehingga simpul $\overline{3}$ dan $\overline{12}$ tidak terhubung langsung.
6. $ann(\overline{6}) \cup ann(\overline{5}) = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{12}\} \neq \mathbb{Z}_{15} = ann(\overline{0}) = ann(\overline{30}) = ann(\overline{6} \cdot \overline{5})$ sehingga simpul $\overline{6}$ dan $\overline{5}$ terhubung langsung.
7. $ann(\overline{9}) \cup ann(\overline{5}) = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{12}\} \neq \mathbb{Z}_{15} = ann(\overline{0}) = ann(\overline{45}) = ann(\overline{9} \cdot \overline{5})$ sehingga simpul $\overline{9}$ dan $\overline{5}$ terhubung langsung.
8. $ann(\overline{10}) \cup ann(\overline{5}) = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{12}\} = ann(\overline{5}) = ann(\overline{50}) = ann(\overline{10} \cdot \overline{5})$ sehingga simpul $\overline{10}$ dan $\overline{5}$ terhubung langsung.
9. $ann(\overline{12}) \cup ann(\overline{5}) = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{12}\} \neq \mathbb{Z}_{15} = ann(0) = ann(\overline{60}) = ann(\overline{12} \cdot \overline{5})$ sehingga simpul $\overline{12}$ dan $\overline{5}$ terhubung langsung.
10. $ann(\overline{6}) \cup ann(\overline{9}) = \{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}\} = ann(\overline{9}) = ann(\overline{54}) = ann(\overline{6} \cdot \overline{9})$ sehingga simpul $\overline{6}$ dan $\overline{9}$ tidak terhubung langsung.

11. $ann(\overline{6}) \cup ann(\overline{10}) = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{12}\} \neq \mathbb{Z}_{15} = ann(\overline{0}) = ann(\overline{60}) = ann(\overline{6} \cdot \overline{10})$ sehingga simpul $\overline{6}$ dan $\overline{10}$ terhubung langsung.

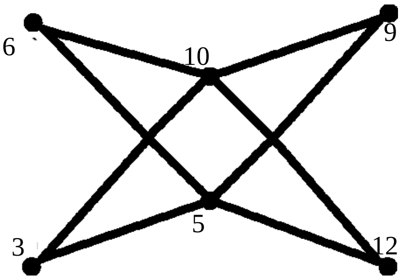
12. $ann(\overline{6}) \cup ann(\overline{12}) = \{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}\} = ann(\overline{12}) = ann(\overline{72}) = ann(\overline{6} \cdot \overline{12})$ sehingga simpul $\overline{3}$ dan $\overline{12}$ tidak terhubung langsung.

13. $ann(\overline{9}) \cup ann(\overline{10}) = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{12}\} \neq \mathbb{Z}_{15} = ann(\overline{0}) = ann(\overline{90}) = ann(\overline{9} \cdot \overline{10})$ sehingga simpul $\overline{9}$ dan $\overline{10}$ terhubung langsung.

14. $ann(\overline{9}) \cup ann(\overline{12}) = \{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}\} = ann(\overline{3}) = ann(\overline{108}) = ann(\overline{9} \cdot \overline{12})$ sehingga simpul $\overline{9}$ dan $\overline{12}$ tidak terhubung langsung.

15. $ann(\overline{12}) \cup ann(\overline{10}) = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{12}\} \neq \mathbb{Z}_{15} = ann(\overline{0}) = ann(\overline{120}) = ann(\overline{12} \cdot \overline{10})$ sehingga simpul $\overline{12}$ dan $\overline{10}$ terhubung langsung.

Dari perhitungan di atas, graf annihilator atas $\mathbb{Z}_{15}$ dapat digambarkan sebagai berikut,



Gambar 4.6 Graf Annihilator $\mathbb{Z}_{15}$

Dari Gambar 4.6 diperoleh derajat simpul adalah $\deg(\overline{3}) = \deg(\overline{6}) = \deg(\overline{9}) = \deg(\overline{12}) = 2$ dan $\deg(\overline{5}) = \deg(\overline{10}) = 4$. Berdasarkan uraian tersebut diperoleh:

1. Nilai indeks Narumi-Katayama sebagai,

$$NK\big(AG(\mathbb{Z}_{15})\big) = \prod_{u \in V(AG(\mathbb{Z}_{15}))} \deg(u)$$

$$NK\big(AG(\mathbb{Z}_{15})\big) = \deg(\overline{3}) \cdot \deg(\overline{5}) \cdot \deg(\overline{6}) \cdot \deg(\overline{9}) \cdot \deg(\overline{10}) \cdot \deg(\overline{12}) = 2^4 \cdot 4^2 = 256$$

2. Nilai indeks Zagreb Perkalian Pertama sebagai,

$$M_1\big(AG(\mathbb{Z}_{15})\big) = \prod_{u \in V\left(AG(\mathbb{Z}_{15})\right)} (\deg(u))^2 = \Big(NK\big(AG(\mathbb{Z}_{15})\big)\Big)^2 = 256^2 = 65536$$

3. Nilai indeks Zagreb Perkalian Kedua sebagai,

$$M_2\big(AG(\mathbb{Z}_{15})\big) = \prod_{(u,v) \in E\left(AG(\mathbb{Z}_{15})\right)} \deg(u) \cdot \deg(v)$$

$$\begin{aligned} M_2\big(AG(\mathbb{Z}_{15})\big) &= \big(\deg(\overline{3}) \cdot \deg(\overline{5})\big) \cdot \big(\deg(\overline{6}) \cdot \deg(\overline{5})\big) \\ &\cdot \big(\deg(\overline{9}) \cdot \deg(\overline{5})\big) \cdot \big(\deg(\overline{12}) \cdot \deg(\overline{5})\big) \\ &\cdot (\deg(\overline{3}) \cdot \deg(\overline{10})) \cdot (\deg(\overline{6}) \cdot \deg(\overline{10})) \\ &\cdot (\deg(\overline{9}) \cdot \deg(\overline{10})) \cdot (\deg(\overline{12}) \cdot \deg(\overline{10})) \\ &= (2 \cdot 4)^8 = 16777216 \end{aligned}$$

4. Nilai koindeks Zagreb Perkalian Kedua sebagai,

$$\overline{M_2}\big(AG(\mathbb{Z}_{15})\big) = \prod_{(u,v) \notin E\left(AG(\mathbb{Z}_{15})\right)} \deg(u) \cdot \deg(v)$$

$$\begin{aligned} \overline{M_2}\big(AG(\mathbb{Z}_{15})\big) &= (\deg(\overline{3}) \cdot \deg(\overline{6})) \cdot (\deg(\overline{3}) \cdot \deg(\overline{9})) \\ &\cdot (\deg(\overline{3}) \cdot \deg(\overline{12})) \cdot (\deg(\overline{6}) \cdot \deg(\overline{9})) \\ &\cdot (\deg(\overline{6}) \cdot \deg(\overline{12})) \cdot (\deg(\overline{9}) \cdot \deg(\overline{12})) \\ &\cdot \big(\deg(\overline{5}) \cdot \deg(\overline{10})\big) = (2 \cdot 2)^6 \cdot (4 \cdot 4) = 65536 \end{aligned}$$

4.1.7 Indeks Narumi-Katayama dan Zagreb Perkalian pada Graf Annihilator $\mathbb{Z}_{21}$

Tabel Cayley Perkalian dari unsur-unsur di $\mathbb{Z}_{21} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{20}\}$ akan disajikan sebagai berikut:

Tabel 4.7 Tabel Cayley Perkalian pada $\mathbb{Z}_{21}$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\overline{14}$	$\overline{16}$	$\overline{18}$	$\overline{20}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{7}$	$\bar{9}$	$\overline{11}$	$\overline{13}$	$\overline{15}$	$\overline{17}$	$\overline{19}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\overline{12}$	$\overline{15}$	$\overline{18}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\overline{12}$	$\overline{15}$	$\overline{18}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\overline{12}$	$\overline{15}$	$\overline{18}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\overline{12}$	$\overline{16}$	$\overline{20}$	$\bar{3}$	$\bar{7}$	$\overline{11}$	$\overline{15}$	$\overline{19}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\overline{10}$	$\overline{14}$	$\overline{18}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{9}$	$\overline{13}$	$\overline{17}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\overline{10}$	$\overline{15}$	$\overline{20}$	$\bar{4}$	$\bar{9}$	$\overline{14}$	$\overline{19}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\overline{13}$	$\overline{18}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\overline{12}$	$\overline{17}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\overline{11}$	$\overline{16}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\overline{12}$	$\overline{18}$	$\bar{3}$	$\bar{9}$	$\overline{15}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\overline{12}$	$\overline{18}$	$\bar{3}$	$\bar{9}$	$\overline{15}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\overline{12}$	$\overline{18}$	$\bar{3}$	$\bar{9}$	$\overline{15}$
$\bar{7}$	0	$\bar{7}$	14	$\bar{0}$	7	$\overline{14}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	14	$\bar{0}$	7	14	$\bar{0}$	7	14	$\bar{0}$	7	14	$\bar{0}$	7	14
$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\overline{16}$	$\bar{3}$	$\overline{11}$	$\overline{19}$	$\bar{6}$	$\overline{14}$	$\bar{1}$	$\bar{9}$	$\overline{17}$	$\bar{4}$	$\overline{12}$	$\overline{20}$	$\bar{7}$	$\overline{15}$	$\bar{2}$	$\overline{10}$	$\overline{18}$	$\bar{5}$	$\overline{13}$
$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\overline{18}$	$\bar{6}$	$\overline{15}$	$\bar{3}$	$\overline{12}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\overline{18}$	$\bar{6}$	$\overline{15}$	$\bar{3}$	$\overline{12}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\overline{18}$	$\bar{6}$	$\overline{15}$	$\bar{3}$	$\overline{12}$
$\overline{10}$	$\bar{0}$	$\overline{10}$	$\overline{20}$	$\bar{9}$	$\overline{19}$	$\bar{8}$	$\overline{18}$	$\bar{7}$	$\overline{17}$	$\bar{6}$	$\overline{16}$	$\bar{5}$	$\overline{15}$	$\bar{4}$	$\overline{14}$	$\bar{3}$	$\overline{13}$	$\bar{2}$	$\overline{12}$	$\bar{1}$	$\overline{11}$
$\overline{11}$	$\bar{0}$	$\overline{11}$	$\bar{1}$	$\overline{12}$	$\bar{2}$	$\overline{13}$	$\bar{3}$	$\overline{14}$	$\bar{4}$	$\overline{15}$	$\bar{5}$	$\overline{16}$	$\bar{6}$	$\overline{17}$	$\bar{7}$	$\overline{18}$	$\bar{8}$	$\overline{19}$	$\bar{9}$	$\overline{20}$	$\overline{10}$
$\overline{12}$	$\bar{0}$	$\overline{12}$	$\bar{3}$	$\overline{15}$	$\bar{6}$	$\overline{18}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\overline{12}$	$\bar{3}$	$\overline{15}$	$\bar{6}$	$\overline{18}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\overline{12}$	$\bar{3}$	$\overline{15}$	$\bar{6}$	$\overline{18}$	$\bar{9}$
$\overline{13}$	$\bar{0}$	$\overline{13}$	$\bar{5}$	$\overline{18}$	$\overline{10}$	$\bar{2}$	$\overline{15}$	$\bar{7}$	$\overline{20}$	$\overline{12}$	$\bar{4}$	$\overline{17}$	$\bar{9}$	$\bar{1}$	$\overline{14}$	$\bar{6}$	$\overline{19}$	$\overline{11}$	$\bar{3}$	$\overline{16}$	$\bar{8}$
$\overline{14}$	$\bar{0}$	$\overline{14}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\overline{14}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\overline{14}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\overline{14}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\overline{14}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\overline{14}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\overline{14}$	$\bar{7}$
$\overline{15}$	$\bar{0}$	$\overline{15}$	$\bar{9}$	$\bar{3}$	$\overline{18}$	$\overline{12}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\overline{15}$	$\bar{9}$	$\bar{3}$	$\overline{18}$	$\overline{12}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\overline{15}$	$\bar{9}$	$\bar{3}$	$\overline{18}$	$\overline{12}$	$\bar{6}$
$\overline{16}$	$\bar{0}$	$\overline{16}$	$\overline{11}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\overline{17}$	$\overline{12}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\overline{18}$	$\overline{13}$	$\bar{8}$	$\bar{3}$	$\overline{19}$	$\overline{14}$	$\bar{9}$	$\bar{4}$	$\overline{20}$	$\overline{15}$	$\overline{10}$	$\bar{5}$
$\overline{17}$	$\bar{0}$	$\overline{17}$	$\overline{13}$	$\bar{9}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\overline{18}$	$\overline{14}$	$\overline{10}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\overline{19}$	$\overline{15}$	$\overline{11}$	$\bar{7}$	$\bar{3}$	$\overline{20}$	$\overline{16}$	$\overline{12}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$
$\overline{18}$	$\bar{0}$	$\overline{18}$	$\overline{15}$	$\overline{12}$	$\bar{9}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\overline{18}$	$\overline{15}$	$\overline{12}$	$\bar{9}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\overline{18}$	$\overline{15}$	$\overline{12}$	$\bar{9}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\overline{19}$	$\bar{0}$	$\overline{19}$	$\overline{17}$	$\overline{15}$	$\overline{13}$	$\overline{11}$	$\bar{9}$	$\bar{7}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\overline{20}$	$\overline{18}$	$\overline{16}$	$\overline{14}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\overline{20}$	$\bar{0}$	$\overline{20}$	$\overline{19}$	$\overline{18}$	$\overline{17}$	$\overline{16}$	$\overline{15}$	$\overline{14}$	$\overline{13}$	$\overline{12}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Dari Tabel 4.7, diperoleh $Z(\mathbb{Z}_{21}) = \{\bar{3}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{9}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{18}\}$, dimana semua elemennya merupakan simpul dari graf $AG(\mathbb{Z}_{21})$. Selanjutnya untuk mengetahui sisi dari $AG(\mathbb{Z}_{21})$, diketahui annihilator dari setiap anggota $Z(\mathbb{Z}_{21})$

adalah, $ann(\bar{3}) = ann(\bar{6}) = ann(\bar{9}) = ann(\overline{12}) = ann(\overline{18}) = \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}\}$ dan $ann(\bar{7}) = ann(\overline{14}) = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}, \overline{18}\}$

Kemudian dua simpul berbeda u dan v dikatakan terhubung langsung jika $ann(u) \cup ann(v) \neq ann(uv)$. Keterhubungan diperoleh sebagai berikut:

1. $ann(\bar{3}) \cup ann(\bar{6}) = \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}\} = ann(18) = ann(\bar{3} \cdot \bar{6})$ sehingga simpul $\bar{3}$ dan $\bar{6}$ tidak terhubung langsung.
2. $ann(\bar{3}) \cup ann(\bar{7}) = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{9}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{18}\} \neq \mathbb{Z}_{21} = ann(\bar{0}) = ann(21) = ann(\bar{3} \cdot \bar{7})$ sehingga simpul $\bar{3}$ dan $\bar{7}$ terhubung langsung.
3. $ann(\bar{3}) \cup ann(\bar{9}) = \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}\} = ann(\bar{6}) = ann(27) = ann(\bar{3} \cdot \bar{9})$ sehingga simpul $\bar{3}$ dan $\bar{9}$ tidak terhubung langsung.
4. $ann(\bar{3}) \cup ann(\overline{12}) = \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}\} = ann\left(\overline{15}\right) = ann(36) = ann(\bar{3} \cdot \overline{12})$ sehingga simpul $\bar{3}$ dan $\overline{12}$ tidak terhubung langsung.
5. $ann(\bar{3}) \cup ann(\overline{14}) = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{9}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{18}\} \neq \mathbb{Z}_{21} = ann(\bar{0}) = ann(42) = ann(\bar{3} \cdot \overline{14})$ sehingga simpul $\bar{3}$ dan $\overline{14}$ terhubung langsung.
6. $ann(\bar{3}) \cup ann\left(\overline{15}\right) = \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}\} = ann(\bar{3}) = ann(45) = ann\left(\bar{3} \cdot \overline{15}\right)$ sehingga simpul $\bar{3}$ dan $\overline{15}$ tidak terhubung langsung.
7. $ann(\bar{3}) \cup ann(\overline{18}) = \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}\} = ann(\overline{12}) = ann(54) = ann(\bar{3} \cdot \overline{18})$ sehingga simpul $\bar{3}$ dan $\overline{18}$ tidak terhubung langsung.
8. $ann(\bar{6}) \cup ann(\bar{7}) = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{9}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{18}\} \neq \mathbb{Z}_{21} = ann(\bar{0}) = ann(42) = ann(\bar{6} \cdot \bar{7})$ sehingga simpul $\bar{6}$dan $\bar{7}$ terhubung langsung.
9. $ann(\bar{6}) \cup ann(\bar{9}) = \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}\} = ann(\overline{12}) = ann(54) = ann(\bar{6} \cdot \bar{9})$ sehingga simpul $\bar{6}$ dan $\bar{9}$ tidak terhubung langsung.

10. $ann(\bar{6}) \cup ann(\overline{12}) = \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}\} = ann(\bar{9}) = ann(72) = ann(\bar{6} \cdot \overline{12})$ sehingga simpul $\bar{6}$ dan $\overline{12}$ tidak terhubung langsung.
11. $ann(\bar{6}) \cup ann(\overline{14}) = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{9}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{18}\} \neq \mathbb{Z}_{21} = ann(0) = ann(84) = ann(\bar{6} \cdot \overline{14})$ sehingga simpul $\bar{6}$ dan $\overline{14}$ terhubung langsung.
12. $ann(\bar{6}) \cup ann\left(\overline{15}\right) = \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}\} = ann(\bar{6}) = ann(90) = ann\left(\bar{6} \cdot \overline{15}\right)$ sehingga simpul $\bar{6}$ dan $\overline{15}$ tidak terhubung langsung.
13. $ann(\bar{6}) \cup ann(\overline{18}) = \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}\} = ann(\bar{3}) = ann(108) = ann(\bar{6} \cdot \overline{18})$ sehingga simpul $\bar{6}$ dan $\overline{18}$ tidak terhubung langsung.
14. $ann(\bar{7}) \cup ann(\bar{9}) = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{9}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{18}\} \neq \mathbb{Z}_{21} = ann(\bar{0}) = ann(63) = ann(\bar{7} \cdot \bar{9})$ sehingga simpul $\bar{9}$ dan $\bar{7}$ terhubung langsung.
15. $ann(\bar{7}) \cup ann(\overline{12}) = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{9}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{18}\} \neq \mathbb{Z}_{21} = ann(\bar{0}) = ann(84) = ann(\bar{7} \cdot \overline{12})$ sehingga simpul $\bar{7}$ dan $\overline{12}$ terhubung langsung.
16. $ann(\bar{7}) \cup ann(\overline{14}) = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}, \overline{18}\} = ann(\overline{14}) = ann(\overline{98}) = ann(\bar{7} \cdot \overline{14})$ sehingga simpul $\bar{7}$ dan $\overline{14}$ tidak terhubung langsung.
17. $ann(\bar{7}) \cup ann\left(\overline{15}\right) = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{9}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{18}\} \neq \mathbb{Z}_{21} = ann(\bar{0}) = ann(105) = ann\left(\bar{7} \cdot \overline{15}\right)$ sehingga simpul $\overline{15}$ dan $\bar{7}$ terhubung langsung.
18. $ann(\bar{7}) \cup ann(\overline{18}) = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{9}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{18}\} \neq \mathbb{Z}_{21} = ann(\bar{0}) = ann(126) = ann(\bar{7} \cdot \overline{18})$ sehingga simpul $\overline{18}$ dan $\bar{7}$ terhubung langsung.
19. $ann(\bar{9}) \cup ann(\overline{12}) = \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}\} = ann(\bar{3}) = ann(108) = ann(\bar{9} \cdot \overline{12})$ sehingga simpul $\overline{12}$ dan $\bar{9}$ tidak terhubung langsung.
20. $ann(\bar{9}) \cup ann(\overline{14}) = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{9}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{18}\} \neq \mathbb{Z}_{21} = ann(\bar{0}) = ann(126) = ann(\bar{9} \cdot \overline{14})$ sehingga simpul $\bar{9}$ dan $\overline{14}$ terhubung langsung.

21. $ann(\overline{9}) \cup ann\left(\overline{15}\right) = \{\overline{0}, \overline{7}, \overline{14}\} = ann(\overline{9}) = ann(135) = ann\left(\overline{9} \cdot \overline{15}\right)$ sehingga simpul $\overline{15}$ dan $\overline{9}$ tidak terhubung langsung.

22. $ann(\overline{9}) \cup ann(\overline{18}) = \{\overline{0}, \overline{7}, \overline{14}\} = ann\left(\overline{15}\right) = ann(162) = ann(\overline{9} \cdot \overline{18})$ sehingga simpul $\overline{18}$ dan $\overline{9}$ tidak terhubung langsung.

23. $ann(\overline{12}) \cup ann(\overline{14}) = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{9}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{18}\} \neq \mathbb{Z}_{21} = ann(\overline{0}) = ann(168) = ann(\overline{12} \cdot \overline{14})$ sehingga simpul $\overline{12}$ dan $\overline{14}$ terhubung langsung.

24. $ann(\overline{12}) \cup ann\left(\overline{15}\right) = \{\overline{0}, \overline{7}, \overline{14}\} = ann(\overline{12}) = ann(180) = ann\left(\overline{12} \cdot \overline{15}\right)$ sehingga simpul $\overline{12}$ dan $\overline{15}$ tidak terhubung langsung.

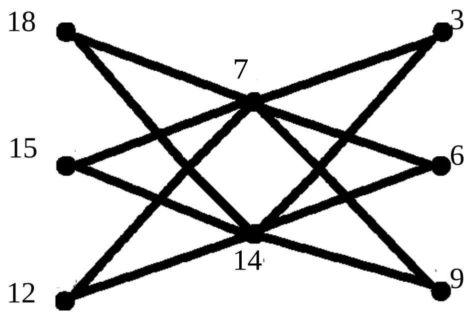
25. $ann(\overline{12}) \cup ann(\overline{18}) = \{\overline{0}, \overline{7}, \overline{14}\} = ann(\overline{6}) = ann(216) = ann(\overline{12} \cdot \overline{18})$ sehingga simpul $\overline{12}$ dan $\overline{18}$ tidak terhubung langsung.

26. $ann(\overline{14}) \cup ann\left(\overline{15}\right) = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{9}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{18}\} \neq \mathbb{Z}_{21} = ann(\overline{0}) = ann(210) = ann\left(\overline{14} \cdot \overline{15}\right)$ sehingga simpul $\overline{14}$ dan $\overline{15}$ terhubung langsung.

27. $ann(\overline{14}) \cup ann(\overline{18}) = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{9}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{18}\} \neq \mathbb{Z}_{21} = ann(\overline{0}) = ann(252) = ann(\overline{14} \cdot \overline{18})$ sehingga simpul $\overline{14}$ dan $\overline{18}$ terhubung langsung.

28. $ann\left(\overline{15}\right) \cup ann(\overline{18}) = \{\overline{0}, \overline{7}, \overline{14}\} = ann(\overline{18}) = ann(270) = ann\left(\overline{15} \cdot \overline{18}\right)$ sehingga simpul $\overline{15}$ dan $\overline{18}$ tidak terhubung langsung.

Dari perhitungan di atas, graf annihilator atas $\mathbb{Z}_{21}$ dapat digambarkan sebagai berikut,



Gambar 4.7 Graf Annihilator $\mathbb{Z}_{21}$

Dari Gambar 4.7 diperoleh derajat dari setiap simpul adalah, $\deg(\bar{3}) = \deg(\bar{6}) = \deg(\bar{9}) = \deg(\overline{12}) = \deg(\overline{15}) = \deg(\overline{18}) = 2$ dan $\deg(\bar{7}) = \deg(\overline{14}) = 6$. Berdasarkan uraian tersebut diperoleh:

1. Nilai indeks Narumi-Katayama sebagai,

$$NK\left(AG(\mathbb{Z}_{21})\right) = \prod_{u \in V\left(AG(\mathbb{Z}_{21})\right)} \deg(u)$$

$$NK\left(AG(\mathbb{Z}_{21})\right) = \deg(\bar{3}) \cdot \deg(\bar{6}) \cdot \deg(\bar{7}) \cdot \deg(\bar{9}) \cdot \deg(\overline{12})$$
$$\cdot \deg(\overline{14}) \cdot \deg(\overline{15}) \cdot \deg(\overline{18}) = 2^6 \cdot 6^2 = 2304$$

2. Nilai indeks Zagreb Perkalian Pertama sebagai,

$$M_1\left(AG(\mathbb{Z}_{21})\right) = \prod_{u \in V\left(AG(\mathbb{Z}_{21})\right)} (\deg(u))^2 = \left(NK\left(AG(\mathbb{Z}_{21})\right)\right)^2 = 2304^2$$
$$= 5308416$$

3. Nilai indeks Zagreb Perkalian Kedua sebagai,

$$M_2\big(AG(\mathbb{Z}_{21})\big) = \prod_{(u,v)\in E\left(AG(\mathbb{Z}_{21})\right)} \deg(u)\cdot\deg(v)$$

$$\begin{aligned} M_2\big(AG(\mathbb{Z}_{21})\big) &= (\deg(\bar{3})\cdot\deg(\bar{7}))\cdot(\deg(\bar{6})\cdot\deg(\bar{7})) \\ &\cdot(\deg(\bar{9})\cdot\deg(\bar{7}))\cdot(\deg(\overline{12})\cdot\deg(\bar{7})) \\ &\cdot\big(\deg(\overline{15})\cdot\deg(\bar{7})\big)\cdot(\deg(\overline{18})\cdot\deg(\bar{7})) \\ &\cdot(\deg(\bar{3})\cdot\deg(\overline{14}))\cdot(\deg(\bar{6})\cdot\deg(\overline{14})) \\ &\cdot(\deg(\bar{9}\ )\cdot\deg(\overline{14}))\cdot(\deg(\overline{12})\cdot\deg(\overline{14})) \\ &\cdot\big(\deg(\overline{15})\cdot\deg(\overline{14})\big)\cdot(\deg(\overline{18})\cdot\deg(\overline{14})) = (2\cdot 6)^{12} \\ &= 8916100448256 \end{aligned}$$

4. Nilai koindeks Zagreb Perkalian Kedua sebagai,

$$\overline{M_2}\big(AG(\mathbb{Z}_{21})\big) = \prod_{(u,v)\notin E\left(AG(\mathbb{Z}_{21})\right)} \deg(u)\cdot\deg(v)$$

$$\begin{aligned} \overline{M_2}\big(AG(\mathbb{Z}_{21})\big) &= (\deg(\bar{3})\cdot\deg(\bar{6}))\cdot(\deg(\bar{3})\cdot\deg(\bar{9})) \\ &\cdot(\deg(\bar{3})\cdot\deg(\overline{12}))\cdot\big(\deg(\bar{3})\cdot\deg(\overline{15})\big) \\ &\cdot(\deg(\bar{3})\cdot\deg(\overline{18}))\cdot(\deg(\bar{6})\cdot\deg(\bar{9})) \\ &\cdot(\deg(\bar{6})\cdot\deg(\overline{12}))\cdot\big(\deg(\bar{6})\cdot\deg(\overline{15})\big) \\ &\cdot(\deg(\bar{6})\cdot\deg(\overline{18}))\cdot(\deg(\bar{9})\cdot\deg(\overline{12})) \\ &\cdot\big(\deg(\bar{9})\cdot\deg(\overline{15})\big)\cdot(\deg(\bar{9})\cdot\deg(\overline{18})) \\ &\cdot\big(\deg(\overline{12})\cdot\deg(\overline{15})\big)\cdot(\deg(\overline{12})\cdot\deg(\overline{18})) \\ &\cdot\big(\deg(\overline{15})\cdot\deg(\overline{18})\big)\cdot(\deg(\bar{7})\cdot\deg(\overline{14})) \\ &= (2\cdot 2)^{15}\cdot(6\cdot 6) = 38654705664 \end{aligned}$$

4.1.8 Indeks Narumi-Katayama dan Zagreb Perkalian pada Graf Annihilator $\mathbb{Z}_{22}$

Tabel Cayley Perkalian unsur-unsur dari $\mathbb{Z}_{22} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \dots, \overline{18}, \overline{19}, \overline{20}, \overline{21}\}$ akan disajikan sebagai berikut

Tabel 4.8 Tabel Cayley Perkalian pada $\mathbb{Z}_{22}$

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\overline{14}$	$\overline{16}$	$\overline{18}$	$\overline{20}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\overline{14}$	$\overline{16}$	$\overline{18}$	$\overline{20}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{12}$	$\overline{15}$	$\overline{18}$	$\overline{21}$	$\overline{2}$	$\overline{5}$	$\overline{8}$	$\overline{11}$	$\overline{14}$	$\overline{17}$	$\overline{20}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{7}$	$\overline{10}$	$\overline{13}$	$\overline{16}$	$\overline{19}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{12}$	$\overline{16}$	$\overline{20}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{10}$	$\overline{14}$	$\overline{18}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{12}$	$\overline{16}$	$\overline{20}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{10}$	$\overline{14}$	$\overline{18}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{15}$	$\overline{20}$	$\overline{3}$	$\overline{8}$	$\overline{13}$	$\overline{18}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{11}$	$\overline{16}$	$\overline{21}$	$\overline{4}$	$\overline{9}$	$\overline{14}$	$\overline{19}$	$\overline{2}$	$\overline{7}$	$\overline{12}$	$\overline{17}$
$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{18}$	$\overline{2}$	$\overline{8}$	$\overline{14}$	$\overline{20}$	$\overline{4}$	$\overline{10}$	$\overline{16}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{18}$	$\overline{2}$	$\overline{8}$	$\overline{14}$	$\overline{20}$	$\overline{4}$	$\overline{10}$	$\overline{16}$
$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{14}$	$\overline{21}$	$\overline{6}$	$\overline{13}$	$\overline{20}$	$\overline{5}$	$\overline{12}$	$\overline{19}$	$\overline{4}$	$\overline{11}$	$\overline{18}$	$\overline{3}$	$\overline{10}$	$\overline{17}$	$\overline{2}$	$\overline{9}$	$\overline{16}$	$\overline{1}$	$\overline{8}$	$\overline{15}$
$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{16}$	$\overline{2}$	$\overline{10}$	$\overline{18}$	$\overline{4}$	$\overline{12}$	$\overline{20}$	$\overline{6}$	$\overline{14}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{16}$	$\overline{2}$	10	$\overline{18}$	$\overline{4}$	$\overline{12}$	$\overline{20}$	$\overline{6}$	$\overline{14}$
$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{18}$	$\overline{5}$	$\overline{14}$	$\overline{1}$	$\overline{10}$	$\overline{19}$	$\overline{6}$	$\overline{15}$	$\overline{2}$	$\overline{11}$	$\overline{20}$	$\overline{7}$	$\overline{16}$	$\overline{3}$	$\overline{12}$	$\overline{21}$	$\overline{8}$	$\overline{17}$	$\overline{4}$	$\overline{13}$
$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{20}$	$\overline{8}$	$\overline{18}$	$\overline{6}$	$\overline{16}$	$\overline{4}$	$\overline{14}$	$\overline{2}$	$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{20}$	$\overline{8}$	$\overline{18}$	$\overline{6}$	$\overline{16}$	$\overline{4}$	$\overline{14}$	$\overline{2}$	$\overline{12}$
$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$
$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{2}$	$\overline{14}$	$\overline{4}$	$\overline{16}$	$\overline{6}$	$\overline{18}$	$\overline{8}$	$\overline{20}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{2}$	$\overline{14}$	$\overline{4}$	$\overline{16}$	$\overline{6}$	$\overline{18}$	$\overline{8}$	$\overline{20}$	$\overline{10}$
$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{13}$	$\overline{4}$	$\overline{17}$	$\overline{8}$	$\overline{21}$	$\overline{12}$	$\overline{3}$	$\overline{16}$	$\overline{7}$	$\overline{20}$	$\overline{11}$	$\overline{2}$	$\overline{15}$	$\overline{6}$	$\overline{19}$	$\overline{10}$	$\overline{1}$	$\overline{14}$	$\overline{5}$	$\overline{18}$	$\overline{9}$
$\overline{14}$	$\overline{0}$	$\overline{14}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{12}$	$\overline{4}$	$\overline{18}$	$\overline{10}$	$\overline{2}$	$\overline{16}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{14}$	$\overline{6}$	$\overline{20}$	$\overline{12}$	$\overline{4}$	$\overline{18}$	$\overline{10}$	$\overline{2}$	$\overline{16}$	$\overline{8}$
$\overline{15}$	$\overline{0}$	$\overline{15}$	$\overline{8}$	$\overline{1}$	$\overline{16}$	$\overline{9}$	$\overline{2}$	$\overline{17}$	$\overline{10}$	$\overline{3}$	$\overline{18}$	$\overline{11}$	$\overline{4}$	$\overline{19}$	$\overline{12}$	$\overline{5}$	$\overline{20}$	$\overline{13}$	$\overline{6}$	$\overline{21}$	$\overline{14}$	$\overline{7}$
$\overline{16}$	$\overline{0}$	$\overline{16}$	$\overline{10}$	$\overline{4}$	$\overline{20}$	$\overline{14}$	$\overline{8}$	$\overline{2}$	$\overline{18}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{16}$	$\overline{10}$	$\overline{4}$	$\overline{20}$	$\overline{14}$	$\overline{8}$	$\overline{2}$	$\overline{18}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$
$\overline{17}$	$\overline{0}$	$\overline{17}$	$\overline{12}$	$\overline{7}$	$\overline{2}$	$\overline{19}$	$\overline{14}$	$\overline{9}$	$\overline{4}$	$\overline{21}$	$\overline{16}$	$\overline{11}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{18}$	$\overline{13}$	$\overline{8}$	$\overline{3}$	$\overline{20}$	$\overline{15}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$
$\overline{18}$	$\overline{0}$	$\overline{18}$	$\overline{14}$	$\overline{10}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{20}$	$\overline{16}$	$\overline{12}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{18}$	$\overline{14}$	$\overline{10}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{20}$	$\overline{16}$	$\overline{12}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$
$\overline{19}$	$\overline{0}$	$\overline{19}$	$\overline{16}$	$\overline{13}$	$\overline{10}$	$\overline{7}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{20}$	$\overline{17}$	$\overline{14}$	$\overline{11}$	$\overline{8}$	$\overline{5}$	$\overline{2}$	$\overline{21}$	$\overline{18}$	$\overline{15}$	$\overline{12}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$
$\overline{20}$	$\overline{0}$	$\overline{20}$	$\overline{18}$	$\overline{16}$	$\overline{14}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{20}$	$\overline{18}$	$\overline{16}$	$\overline{14}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{21}$	$\overline{20}$	$\overline{19}$	$\overline{18}$	$\overline{17}$	$\overline{16}$	$\overline{15}$	$\overline{14}$	$\overline{13}$	$\overline{12}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Dari Tabel 4.8, diperoleh $Z(\mathbb{Z}_{22}) = \{\overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}\}$, dimana semua elemennya merupakan simpul dari graf $AG(\mathbb{Z}_{22})$. Selanjutnya untuk mengetahui sisi dari $AG(\mathbb{Z}_{22})$, diketahui annihilator dari setiap anggota $Z(\mathbb{Z}_{22})$ sebagai berikut, $ann(\overline{2}) = ann(\overline{4}) = ann(\overline{6}) = ann(\overline{8}) = ann(\overline{10}) =$

$ann(\overline{12}) = ann(\overline{14}) = ann(\overline{16}) = ann(\overline{18}) = ann(\overline{20}) = \{\overline{0}, \overline{11}\}$ dan $ann(\overline{11}) = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}\}$

Kemudian dua simpul berbeda u dan v dikatakan terhubung langsung jika $ann(u) \cup ann(v) \neq ann(u \cdot v)$. Keterhubungan diperoleh sebagai berikut:

1. $ann(\overline{2}) \cup ann(\overline{4}) = \{\overline{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{8}) = ann(\overline{2} \cdot \overline{4})$ sehingga simpul $\overline{2}$ dan $\overline{4}$ tidak terhubung langsung.
2. $ann(\overline{2}) \cdot ann(\overline{6}) = \{\overline{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{12}) = ann(\overline{2} \cdot \overline{6})$ sehingga simpul $\overline{2}$ dan $\overline{6}$ tidak terhubung langsung.
3. $ann(\overline{2}) \cdot ann(\overline{8}) = \{\overline{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{16}) = ann(\overline{2} \cdot \overline{8})$ sehingga simpul $\overline{2}$ dan $\overline{8}$ tidak terhubung langsung.
4. $ann(\overline{2}) \cdot ann(\overline{10}) = \{\overline{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{20}) = ann(\overline{2} \cdot \overline{10})$ sehingga simpul $\overline{2}$ dan $\overline{10}$ tidak terhubung langsung.
5. $ann(\overline{2}) \cdot ann(\overline{11}) = \{0,2,4,6,8,10,11,12,14,16,18,20\} \neq \mathbb{Z}_{22} = ann(\overline{0}) = ann(22) = ann(\overline{2} \cdot \overline{11})$ sehingga simpul $\overline{2}$ dan $\overline{11}$ terhubung langsung.
6. $ann(\overline{2}) \cdot ann(\overline{12}) = \{\overline{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{2}) = ann(\overline{24}) = ann(\overline{2} \cdot \overline{12})$ sehingga simpul $\overline{2}$ dan $\overline{12}$ tidak terhubung langsung.
7. $ann(\overline{2}) \cdot ann(\overline{14}) = \{\overline{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{6}) = ann(\overline{28}) = ann(\overline{2} \cdot \overline{14})$ sehingga simpul $\overline{2}$ dan $\overline{14}$ tidak terhubung langsung.
8. $ann(\overline{2}) \cdot ann(\overline{16}) = \{\overline{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{10}) = ann(\overline{32}) = ann(\overline{2} \cdot \overline{16})$ sehingga simpul $\overline{2}$ dan $\overline{16}$ tidak terhubung langsung.
9. $ann(\overline{2}) \cdot ann(\overline{18}) = \{\overline{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{14}) = ann(\overline{36}) = ann(\overline{2} \cdot \overline{18})$ sehingga simpul $\overline{2}$ dan $\overline{18}$ tidak terhubung langsung.

10. $ann(\bar{2}) \cdot ann(\overline{20}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{18}) = ann(\overline{40}) = ann(\bar{2} \cdot \overline{20})$

sehingga simpul $\bar{2}$ dan $\overline{20}$ tidak terhubung langsung.

11. $ann(\bar{4}) \cdot ann(\bar{6}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\bar{2}) = ann(\overline{24}) = ann(\bar{4} \cdot \bar{6})$

sehingga simpul $\bar{4}$ dan $\bar{6}$ tidak terhubung langsung.

12. $ann(\bar{4}) \cdot ann(\bar{8}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{10}) = ann(\overline{32}) = ann(\bar{4} \cdot \bar{8})$

sehingga simpul $\bar{4}$ dan $\bar{8}$ tidak terhubung langsung.

13. $ann(\bar{4}) \cdot ann(\overline{10}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{18}) = ann(\overline{40}) = ann(\bar{4} \cdot \overline{10})$

sehingga simpul $\bar{4}$ dan $\overline{10}$ tidak terhubung langsung.

14. $ann(\bar{4}) \cdot ann(\overline{11}) = \{0,2,4,6,8,10,11,12,14,16,18,20\} \neq \mathbb{Z}_{22} = ann(\bar{0}) = ann(\overline{44}) = ann(\bar{4} \cdot \overline{11})$ sehingga simpul $\bar{4}$ dan $\overline{11}$ terhubung langsung.

15. $ann(\bar{4}) \cdot ann(\overline{12}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\bar{4}) = ann(\overline{48}) = ann(\bar{4} \cdot \overline{12})$

sehingga simpul $\bar{4}$ dan $\overline{12}$ tidak terhubung langsung.

16. $ann(\bar{4}) \cdot ann(\overline{14}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{12}) = ann\left(\overline{56}\right) = ann(\bar{4} \cdot \overline{14})$

sehingga simpul $\bar{4}$ dan $\overline{14}$ tidak terhubung langsung.

17. $ann(\bar{4}) \cdot ann(\overline{16}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{20}) = ann(\overline{64}) = ann(\bar{4} \cdot 16)$

sehingga simpul $\bar{4}$ dan 16 tidak terhubung langsung.

18. $ann(\bar{4}) \cdot ann(\overline{18}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\bar{6}) = ann(\overline{72}) = ann(\bar{4} \cdot \overline{18})$

sehingga simpul $\bar{4}$ dan $\overline{18}$ tidak terhubung langsung.

19. $ann(\bar{4}) \cdot ann(\overline{20}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{14}) = ann(\overline{80}) = ann(\bar{4} \cdot \overline{20})$

sehingga simpul $\bar{4}$ dan $\overline{20}$ tidak terhubung langsung.

20. $ann(\bar{6}) \cdot ann(\bar{8}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\bar{4}) = ann(\overline{48}) = ann(\bar{6} \cdot \bar{8})$

sehingga simpul $\bar{8}$ dan $\bar{6}$ tidak terhubung langsung.

21. $ann(\bar{6}) \cdot ann(\overline{10}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{16}) = ann(\overline{60}) = ann(\bar{6} \cdot \overline{10})$ sehingga simpul $\overline{10}$ dan $\bar{6}$ tidak terhubung langsung.

22. $ann(\bar{6}) \cdot ann(\overline{11}) = \{0,2,4,6,8,10,11,12,14,16,18,20\} \neq \mathbb{Z}_{22} = ann(\bar{0}) = ann(\overline{66}) = ann(\bar{6} \cdot \overline{11})$ sehingga simpul $\bar{6}$ dan $\overline{11}$ terhubung langsung.

23. $ann(\bar{6}) \cdot ann(\overline{12}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\bar{6}) = ann(\overline{72}) = ann(\bar{6} \cdot \overline{12})$ sehingga simpul $\overline{12}$ dan $\bar{6}$ tidak terhubung langsung.

24. $ann(\bar{6}) \cdot ann(\overline{14}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{18}) = ann(\overline{84}) = ann(\bar{6} \cdot \overline{14})$ sehingga simpul $\overline{14}$ dan $\bar{6}$ tidak terhubung langsung.

25. $ann(\bar{6}) \cdot ann(\overline{16}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(8) = ann(\overline{96}) = ann(\bar{6} \cdot \overline{16})$ sehingga simpul $\overline{16}$ dan $\bar{6}$ tidak terhubung langsung.

26. $ann(\bar{6}) \cdot ann(\overline{18}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{20}) = ann(\overline{108}) = ann(\bar{6} \cdot \overline{18})$ sehingga simpul $\overline{18}$ dan $\bar{6}$ tidak terhubung langsung.

27. $ann(\bar{6}) \cdot ann(\overline{20}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{10}) = ann(\overline{120}) = ann(\bar{6} \cdot \overline{20})$ sehingga simpul $\overline{20}$ dan $\bar{6}$ tidak terhubung langsung.

28. $ann(\bar{8}) \cdot ann(\overline{10}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{10}) = ann(\overline{80}) = ann(\bar{8} \cdot \overline{10})$ sehingga simpul $\bar{8}$ dan $\overline{10}$ tidak terhubung langsung.

29. $ann(\bar{8}) \cdot ann(\overline{11}) = \{0,2,4,6,8,10,11,12,14,16,18,20\} \neq \mathbb{Z}_{22} = ann(\bar{0}) = ann(\overline{88}) = ann(\bar{8} \cdot \overline{11})$ sehingga simpul $\bar{8}$ dan $\overline{11}$ terhubung langsung.

30. $ann(\bar{8}) \cdot ann(\overline{12}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{12}) = ann(\overline{96}) = ann(\bar{8} \cdot 12)$ sehingga simpul $\bar{8}$ dan 12 tidak terhubung langsung.

31. $ann(\bar{8}) \cdot ann(\overline{14}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\bar{2}) = ann(\overline{112}) = ann(\bar{8} \cdot \overline{14})$ sehingga simpul $\bar{8}$ dan $\overline{14}$ tidak terhubung langsung.

32. $ann(\bar{8}) \cdot ann(\overline{16}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(18) = ann(\overline{128}) = ann(\bar{8} \cdot \overline{16})$ sehingga simpul $\bar{8}$ dan $\overline{16}$ tidak terhubung langsung.

33. $ann(\bar{8}) \cdot ann(\overline{18}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{10}) = ann(\overline{142}) = ann(\bar{8} \cdot \overline{18})$ sehingga simpul $\bar{8}$ dan $\overline{18}$ tidak terhubung langsung.

34. $ann(\bar{8}) \cdot ann(\overline{20}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\bar{6}) = ann(\overline{160}) = ann(\bar{8} \cdot \overline{20})$ sehingga simpul $\bar{8}$ dan $\overline{20}$ tidak terhubung langsung.

35. $ann(\overline{10}) \cdot ann(\overline{11}) = \{0,2,4,6,8,10,11,12,14,16,18,20\} \neq \mathbb{Z}_{22} = ann(\bar{0}) = ann(\overline{110}) = ann(\overline{10} \cdot 11)$ sehingga simpul $\overline{10}$ dan $\overline{11}$ terhubung langsung.

36. $ann(\overline{10}) \cdot ann(\overline{12}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{10}) = ann(\overline{120}) = ann(\overline{10} \cdot \overline{12})$ sehingga simpul $\overline{10}$ dan $\overline{12}$ tidak terhubung langsung.

37. $ann(\overline{10}) \cdot ann(\overline{14}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\bar{8}) = ann(\overline{140}) = ann(\overline{10} \cdot 14)$ sehingga simpul $\overline{10}$ dan $\overline{14}$ tidak terhubung langsung.

38. $ann(\overline{10}) \cdot ann(\overline{16}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\bar{6}) = ann(\overline{160}) = ann(\overline{10} \cdot \overline{16})$ sehingga simpul $\overline{10}$ dan $\overline{16}$ tidak terhubung langsung.

39. $ann(\overline{10}) \cdot ann(\overline{18}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\bar{4}) = ann(\overline{180}) = ann(\overline{10} \cdot \overline{18})$ sehingga simpul $\overline{10}$ dan $\overline{18}$ tidak terhubung langsung.

40. $ann(\overline{10}) \cdot ann(\overline{20}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\bar{2}) = ann(\overline{200}) = ann(\overline{10} \cdot \overline{20})$ sehingga simpul $\overline{10}$ dan $\overline{20}$ tidak terhubung langsung.

41. $ann(\overline{11}) \cdot ann(\overline{12}) = \{0,2,4,6,8,10,11,12,14,16,18,20\} \neq \mathbb{Z}_{22} = ann(\bar{0}) = ann(\overline{132}) = ann(\overline{11} \cdot \overline{12})$ sehingga simpul $\overline{12}$ dan $\overline{11}$ terhubung langsung.

42. $ann(\overline{11}) \cdot ann(\overline{14}) = \{0,2,4,6,8,10,11,12,14,16,18,20\} \neq \mathbb{Z}_{22} = ann(\bar{0}) = ann(\overline{154}) = ann(\overline{11} \cdot \overline{14})$ sehingga simpul $\overline{14}$ dan $\overline{11}$ terhubung langsung.

43. $ann(\overline{11}) \cdot ann(\overline{16}) = \{0,2,4,6,8,10,11,12,14,16,18,20\} \neq \mathbb{Z}_{22} = ann(\bar{0}) = ann(\overline{176}) = ann(\overline{11} \cdot \overline{16})$ sehingga simpul $\overline{16}$ dan $\overline{11}$ terhubung langsung.

44. $ann(\overline{11}) \cdot ann(\overline{18}) = \{0,2,4,6,8,10,11,12,14,16,18,20\} \neq \mathbb{Z}_{22} = ann(\bar{0}) = ann(\overline{198}) = ann(\overline{11} \cdot \overline{18})$ sehingga simpul $\overline{18}$ dan $\overline{11}$ terhubung langsung.

45. $ann(\overline{11}) \cdot ann(\overline{20}) = \{0,2,4,6,8,10,11,12,14,16,18,20\} \neq \mathbb{Z}_{22} = ann(\bar{0}) = ann(\overline{220}) = ann(\overline{11} \cdot \overline{20})$ sehingga simpul $\overline{20}$ dan $\overline{11}$ terhubung langsung.

46. $ann(\overline{12}) \cdot ann(\overline{14}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{14}) = ann(\overline{168}) = ann(\overline{12} \cdot \overline{14})$ sehingga simpul $\overline{14}$ dan $\overline{12}$ tidak terhubung langsung.

47. $ann(\overline{12}) \cdot ann(\overline{16}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{16}) = ann(\overline{192}) = ann(\overline{12} \cdot \overline{16})$ sehingga simpul $\overline{16}$ dan $\overline{12}$ tidak terhubung langsung.

48. $ann(\overline{12}) \cdot ann(\overline{18}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(18) = ann(\overline{216}) = ann(\overline{12} \cdot \overline{18})$ sehingga simpul $\overline{18}$ dan $\overline{12}$ tidak terhubung langsung.

49. $ann(\overline{12}) \cdot ann(\overline{20}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{20}) = ann(\overline{240}) = ann(\overline{12} \cdot \overline{20})$ sehingga simpul $\overline{20}$ dan $\overline{12}$ tidak terhubung langsung.

50. $ann(\overline{14}) \cdot ann(\overline{16}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\bar{4}) = ann(\overline{224}) = ann(\overline{14} \cdot \overline{16})$ sehingga simpul $\overline{14}$ dan $\overline{16}$ tidak terhubung langsung.

51. $ann(\overline{14}) \cdot ann(\overline{18}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{10}) = ann(\overline{252}) = ann(\overline{14} \cdot \overline{18})$ sehingga simpul $\overline{14}$ dan $\overline{18}$ tidak terhubung langsung.

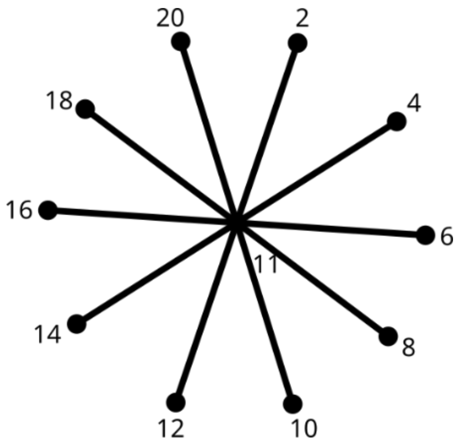
52. $ann(\overline{14}) \cdot ann(\overline{20}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{16}) = ann(\overline{280}) = ann(\overline{14} \cdot \overline{20})$ sehingga simpul $\overline{14}$ dan $\overline{20}$ tidak terhubung langsung.

53. $ann(\overline{16}) \cdot ann(\overline{18}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\bar{2}) = ann(\overline{288}) = ann(\overline{16} \cdot \overline{18})$ sehingga simpul $\overline{16}$ dan $\overline{18}$ tidak terhubung langsung.

54. $ann(\overline{16}) \cdot ann(\overline{20}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(12) = ann(320) = ann(\overline{16} \cdot 20)$ sehingga simpul $\overline{16}$ dan $\overline{20}$ tidak terhubung langsung.

55. $ann(\overline{18}) \cdot ann(\overline{20}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\bar{8}) = ann(360) = ann(\overline{20} \cdot \overline{18})$ sehingga simpul $\overline{18}$ dan $\overline{20}$ tidak terhubung langsung.

Dari perhitungan di atas, graf annihilator atas $\mathbb{Z}_{22}$ dapat digambarkan sebagai berikut,



Gambar 4.8 Graf Annihilator $\mathbb{Z}_{\mathbf{22}}$

Dari Gambar 4.8 diperoleh derajat simpul yaitu, $\deg(\bar{2}) = \deg(\bar{4}) = \deg(\bar{6}) = \deg(\bar{8}) = \deg(\overline{10}) = \deg(\overline{12}) = \deg(\overline{14}) = \deg(\overline{16}) = \deg(\overline{18}) = \deg(\overline{20}) = 1$ dan $\deg(\overline{11}) = 10$. Berdasarkan uraian tersebut diperoleh

1. Nilai indeks Narumi-Katayama sebagai,

$$NK\big(AG(\mathbb{Z}_{22})\big) = \prod_{u \in V\left(AG(\mathbb{Z}_{22})\right)} \deg(u)$$

$$NK\big(AG(\mathbb{Z}_{14})\big) = \deg(\overline{2}) \cdot \deg(\overline{4}) \cdot \deg(\overline{6}) \cdot \deg(\overline{8}) \cdot \deg(\overline{10})$$

$$\cdot \deg(\overline{11}) \cdot \deg(\overline{12}) \cdot \deg(\overline{14}) \cdot \deg(\overline{16}) \cdot \deg(\overline{18})$$

$$\cdot \deg(\overline{20}) = 1^{10} \cdot 10 = 10$$

2. Nilai indeks Zagreb Perkalian Pertama sebagai,

$$M_1\big(AG(\mathbb{Z}_{22})\big) = \prod_{u \in V(AG(\mathbb{Z}_{22}))} (\deg(u))^2 = \Big(NK\big(AG(\mathbb{Z}_{22})\big)\Big)^2 = 10^2$$

$$= 100$$

3. Nilai indeks Zagreb Perkalian Kedua sebagai,

$$M_2\big(AG(\mathbb{Z}_{22})\big) = \prod_{(u,v) \in E(AG(\mathbb{Z}_{22}))} \deg(u) \cdot \deg(v)$$

$$M_2\big(AG(\mathbb{Z}_{14})\big) = (\deg(\overline{2}) \cdot \deg(\overline{11})) \cdot (\deg(\overline{4}) \cdot \deg(\overline{11}))$$

$$\cdot (\deg(\overline{6}) \cdot \deg(\overline{11})) \cdot (\deg(\overline{8}) \cdot \deg(\overline{11}))$$

$$\cdot (\deg(\overline{10}) \cdot \deg(\overline{11})) \cdot (\deg(\overline{12}) \cdot \deg(\overline{11}))$$

$$\cdot (\deg(\overline{14}) \cdot \deg(\overline{11})) \cdot (\deg(\overline{16}) \cdot \deg(\overline{11}))$$

$$\cdot (\deg(\overline{18}) \cdot \deg(\overline{11})) \cdot (\deg(\overline{20}) \cdot \deg(\overline{11}))$$

$$= (1 \cdot 10)^{10} = 10^{10}$$

4. Nilai koindeks Zagreb Perkalian Kedua sebagai,

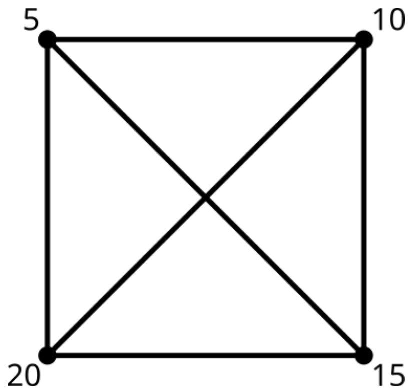
$$\overline{M_2}\big(AG(\mathbb{Z}_{22})\big) = \prod_{(u,v) \notin E(AG(\mathbb{Z}_{22}))} \deg(u) \cdot \deg(v)$$

$$
\begin{aligned}
\overline{M_2}\big(AG(\mathbb{Z}_{22})\big) = {} & (\deg(\bar{2}) \cdot \deg(\bar{4})) \cdot (\deg(\bar{2}) \cdot \deg(\bar{6})) \\
& \cdot (\deg(\bar{2}) \cdot \deg(\bar{8})) \cdot (\deg(\bar{2}) \cdot \deg(\overline{10})) \\
& \cdot (\deg(\bar{2}) \cdot \deg(\overline{12})) \cdot (\deg(\bar{2}) \cdot \deg(\overline{14})) \\
& \cdot (\deg(\bar{2}) \cdot \deg(\overline{16})) \cdot (\deg(\bar{2}) \cdot \deg(18)) \\
& \cdot (\deg(\bar{2}) \cdot \deg(20)) \cdot (\deg(\bar{4}) \cdot \deg(\bar{6})) \\
& \cdot (\deg(\bar{4}) \cdot \deg(\bar{8})) \cdot (\deg(\bar{4}) \cdot \deg(\overline{10})) \\
& \cdot (\deg(\bar{4}) \cdot \deg(\overline{12})) \cdot (\deg(\bar{4}) \cdot \deg(\overline{14})) \\
& \cdot (\deg(\bar{4}) \cdot \deg(\overline{16})) \cdot (\deg(\bar{4}) \cdot \deg(18)) \\
& \cdot (\deg(\bar{4}) \cdot \deg(\overline{20})) \cdot (\deg(\bar{6}) \cdot \deg(\bar{8})) \\
& \cdot (\deg(\bar{6}) \cdot \deg(\overline{10})) \cdot (\deg(\bar{6}) \cdot \deg(\overline{12})) \\
& \cdot (\deg(\bar{6}) \cdot \deg(\overline{14})) \cdot (\deg(\bar{6}) \cdot \deg(\overline{16})) \\
& \cdot (\deg(\bar{6}) \cdot \deg(18)) \cdot (\deg(\bar{6}) \cdot \deg(20)) \\
& \cdot (\deg(\bar{8}) \cdot \deg(\overline{10})) \cdot (\deg(\bar{8}) \cdot \deg(\overline{12})) \\
& \cdot (\deg(\bar{8}) \cdot \deg(\overline{14})) \cdot (\deg(\bar{8}) \cdot \deg(\overline{16})) \\
& \cdot (\deg(\bar{8}) \cdot \deg(18)) \cdot (\deg(\bar{8}) \cdot \deg(20)) \\
& \cdot (\deg(\overline{10}) \cdot \deg(\overline{12})) \cdot (\deg(\overline{10}) \cdot \deg(\overline{14})) \\
& \cdot (\deg(\overline{10}) \cdot \deg(\overline{16})) \cdot (\deg(\overline{10}) \cdot \deg(18)) \\
& \cdot (\deg(\overline{10}) \cdot \deg(\overline{20})) \cdot (\deg(\overline{12}) \cdot \deg(\overline{14})) \\
& \cdot (\deg(\overline{12}) \cdot \deg(\overline{16})) \cdot (\deg(\overline{12}) \cdot \deg(\overline{18})) \\
& \cdot (\deg(\overline{12}) \cdot \deg(\overline{20})) \cdot (\deg(\overline{14}) \cdot \deg(\overline{16})) \\
& \cdot (\deg(\overline{14}) \cdot \deg(\overline{18})) \cdot (\deg(\overline{14}) \cdot \deg(\overline{20})) \\
& \cdot (\deg(\overline{16}) \cdot \deg(\overline{18})) \cdot (\deg(\overline{16}) \cdot \deg(\overline{20})) \\
& \cdot (\deg(\overline{18}) \cdot \deg(\overline{20})) = (1 \cdot 1)^{45} = 1
\end{aligned}
$$

4.1.9 Indeks Narumi-Katayama dan Zagreb Perkalian pada Graf Annihilator $\mathbb{Z}_{25}$

Berdasarkan pengamatan hasil penentuan pembagi nol di $\mathbb{Z}_{25}$ dengan menggunakan bahasa pemrograman python (lihat Lampiran 1) diperoleh himpunan pembagi nol di $\mathbb{Z}_{25}$ adalah $Z(\mathbb{Z}_{25}) = \{\bar{5}, \overline{10}, \overline{15}, \overline{20}\}$ dimana semua elemennya merupakan simpul graf annihilator ring $\mathbb{Z}_{25}$ dengan annihilator dari setiap simpul sebagai berikut, $ann(\bar{5}) = ann(\overline{10}) = ann(\overline{15}) = ann(\overline{20}) = \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}, \overline{15}, \overline{20}\}$.

Selain itu, diperoleh juga himpunan sisi graf annihilator ring $\mathbb{Z}_{25}$ sebagi berikut $E(AG(\mathbb{Z}_{25})) = \{(\bar{5}, \overline{10}), (\bar{5}, \overline{15}), (\bar{5}, \overline{20}), (\overline{10}, \overline{15}), (\overline{10}, \overline{20}), (\overline{20}, \overline{15})\}$. Berdasarkan data tersebut dapat dibentuk graf annihilator sebagai berikut:



Gambar 4.9 Graf Annihilator $\mathbb{Z}_{25}$

Dari Gambar 4.9 diperoleh derajat setiap simpul yaitu, $\deg(\bar{5}) = \deg(\overline{10}) = \deg(\overline{15}) = \deg(\overline{20}) = 3$. Berdasarkan uraian tersebut diperoleh

1. Nilai indeks Narumi-Katayama sebagai,

$$NK(AG(\mathbb{Z}_{25})) = \prod_{u \in V(AG(\mathbb{Z}_{25}))} \deg(u)$$

$$NK(AG(\mathbb{Z}_{25})) = \deg(\bar{5}) \cdot \deg(\overline{10}) \cdot \deg(\overline{15}) \cdot \deg(\overline{20}) = 3^4 = 81$$

2. Nilai indeks Zagreb Perkalian Pertama sebagai,

$$M_1\big(AG(\mathbb{Z}_{25})\big) = \prod_{u \in V\left(AG(\mathbb{Z}_{25})\right)} (\deg(u))^2 = \Big(NK\big(AG(\mathbb{Z}_{25})\big)\Big)^2 = 6561$$

3. Nilai indeks Zagreb Perkalian Kedua sebagai,

$$M_2\big(AG(\mathbb{Z}_{25})\big) = \prod_{(u,v) \in E\left(AG(\mathbb{Z}_{25})\right)} \deg(u) \cdot \deg(v)$$

$$\begin{aligned} M_2\big(AG(\mathbb{Z}_{25})\big) &= \big(\deg(\overline{5}) \cdot \deg(\overline{10})\big) \cdot \big(\deg(\overline{5}) \cdot \deg(\overline{15})\big) \\ &\cdot \big(\deg(\overline{5}) \cdot \deg(\overline{20})\big) \cdot \big(\deg(\overline{10}) \cdot \deg(\overline{15})\big) \\ &\cdot (\deg(\overline{10}) \cdot \deg(\overline{20})) \cdot \big(\deg(\overline{15}) \cdot \deg(\overline{20})\big) = (3 \cdot 3)^6 \\ &= 531441 \end{aligned}$$

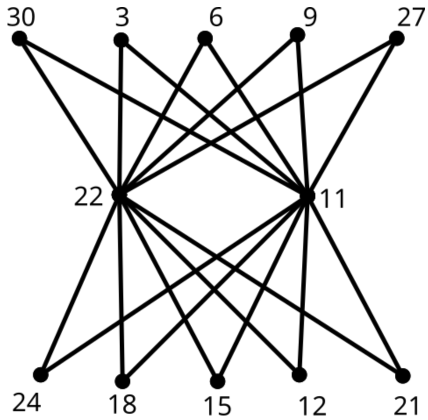
4. Nilai koindeks Zagreb Perkalian Kedua sebagai berikut, $\overline{M_2}\big(AG(\mathbb{Z}_{25})\big) = \prod_{(u,v) \notin E\left(AG(\mathbb{Z}_{25})\right)} \deg(u) \cdot \deg(v) = 0$ karena semua simpul terhubung langsung dengan semua simpul yang berbeda.

4.1.10 Indeks Narumi-Katayama dan Zagreb Perkalian pada Graf Annihilator $\mathbb{Z}_{33}$

Berdasarkan pengamatan hasil penentuan pembagi nol di $\mathbb{Z}_{33}$ dengan menggunakan bahasa pemrograman python (lihat Lampiran 1) diperoleh himpunan pembagi nol di $\mathbb{Z}_{33}$ adalah $Z(\mathbb{Z}_{33}) = \{\overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{15}, \overline{18}, \overline{21}, \overline{22}, \overline{24}, \overline{27}, \overline{30}\}$ dimana semua elemennya merupakan simpul graf annihilator ring $\mathbb{Z}_{33}$ dengan annihilator dari setiap simpul sebagai berikut, $ann(\overline{3}) = ann(\overline{6}) = ann(\overline{9}) = ann(\overline{12}) = ann(\overline{14}) = ann(\overline{18}) =$

$ann(\overline{21}) = ann(\overline{24}) = ann(\overline{27}) = ann(\overline{30}) = \{\overline{0}, \overline{11}, \overline{22}\}$ dan $ann(\overline{11}) = ann(\overline{22}) = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{12}, \overline{15}, \overline{18}, \overline{21}, \overline{24}, \overline{27}, \overline{30}\}$.

Selain itu, diperoleh juga himpunan sisi graf annihilator ring $\mathbb{Z}_{33}$ sebagai berikut $E(AG(\mathbb{Z}_{33}))$ ={($\overline{11}$,$\overline{3}$), ($\overline{3}$,$\overline{22}$), ($\overline{11}$,$\overline{6}$), ($\overline{6}$,$\overline{22}$), ($\overline{9}$,$\overline{11}$), ($\overline{9}$,$\overline{22}$), ($\overline{11}$,$\overline{12}$), ($\overline{11}$,$\overline{15}$), ($\overline{18}$,$\overline{11}$), ($\overline{11}$,$\overline{21}$), ($\overline{24}$,$\overline{11}$), ($\overline{27}$,$\overline{11}$), ($\overline{11}$,$\overline{30}$), ($\overline{12}$,$\overline{22}$), ($\overline{22}$,$\overline{15}$), ($\overline{18}$,$\overline{22}$), ($\overline{21}$,$\overline{22}$), ($\overline{24}$,$\overline{22}$), ($\overline{27}$,$\overline{22}$), ($\overline{22}$,$\overline{30}$)}. Berdasarkan data tersebut dapat dibentuk graf annihilator sebagai berikut:



Gambar 4.10 Graf Annihilator $\mathbb{Z}_{33}$

Dari Gambar 4.10 diperoleh derajat setiap simpul adalah $\deg(\overline{3}) = \deg(\overline{6}) = \deg(\overline{9}) = \deg(\overline{12}) = \deg(\overline{15}) = \deg(\overline{18}) = \deg(\overline{21}) = \deg(\overline{24}) = \deg(\overline{27}) = \deg(\overline{30}) = 2$ dan $\deg(\overline{11}) = \deg(\overline{22}) = 10$. Berdasarkan uraian tersebut diperoleh:

1. Nilai indeks Narumi-Katayama sebagai,

$$NK(AG(\mathbb{Z}_{33})) = \prod_{u \in V(AG(\mathbb{Z}_{33}))} \deg(u)$$

$$NK(AG(\mathbb{Z}_{33})) = \deg(\overline{3}) \cdot \deg(\overline{6}) \cdot \deg(\overline{9}) \cdot \deg(\overline{12}) \cdot \deg(\overline{15})$$

$$\cdot \deg(\overline{18}) \cdot \deg(\overline{21}) \cdot \deg(\overline{24}) \cdot \deg(\overline{27}) \cdot \deg(\overline{30})$$

$$= 2^{10} \cdot 10^2 = 102400$$

2. Nilai indeks Zagreb Perkalian Pertama sebagai,

$$M_1\big(AG(\mathbb{Z}_{33})\big) = \prod_{u \in V(AG(\mathbb{Z}_{33}))} (\deg(u))^2 = \Big(NK\big(AG(\mathbb{Z}_{33})\big)\Big)^2$$

$$= 10485760000$$

3. Nilai indeks Zagreb Perkalian Kedua sebagai,

$$M_2\big(AG(\mathbb{Z}_{33})\big) = \prod_{(u,v) \in E(AG(\mathbb{Z}_{33}))} \deg(u) \cdot \deg(v)$$

$$\begin{aligned} M_2\big(AG(\mathbb{Z}_{33})\big) &= (\deg(\overline{3}) \cdot \deg(\overline{11})) \cdot (\deg(\overline{6}) \cdot \deg(\overline{11})) \\ &\cdot (\deg(\overline{9}) \cdot \deg(\overline{11})) \cdot (\deg(\overline{12}) \cdot \deg(\overline{11})) \\ &\cdot \big(\deg(\overline{15}) \cdot \deg(\overline{11})\big) \cdot (\deg(\overline{18}) \cdot \deg(\overline{11})) \\ &\cdot (\deg(\overline{21}) \cdot \deg(\overline{11})) \cdot (\deg(\overline{24}) \cdot \deg(\overline{11})) \\ &\cdot (\deg(\overline{27}) \cdot \deg(\overline{11})) \cdot (\deg(\overline{30}) \cdot \deg(\overline{11})) \\ &\cdot (\deg(\overline{3}) \cdot \deg(\overline{22})) \cdot (\deg(\overline{6}) \cdot \deg(\overline{22})) \\ &\cdot (\deg(\overline{9}) \cdot \deg(\overline{22})) \cdot (\deg(\overline{12}) \cdot \deg(\overline{22})) \\ &\cdot \big(\deg(\overline{15}) \cdot \deg(\overline{22})\big) \cdot (\deg(\overline{18}) \cdot \deg(\overline{22})) \\ &\cdot (\deg(\overline{21}) \cdot \deg(\overline{22})) \cdot (\deg(\overline{24}) \cdot \deg(\overline{22})) \\ &\cdot (\deg(\overline{27}) \cdot \deg(\overline{22})) \cdot (\deg(\overline{30}) \cdot \deg(\overline{22})) \\ &= (2 \cdot 10)^{20} = 20^{20} \end{aligned}$$

4. Nilai koindeks Zagreb Perkalian Kedua sebagai,

$$\overline{M_2}\big(AG(\mathbb{Z}_{33})\big) = \prod_{(u,v) \notin E(AG(\mathbb{Z}_{33}))} \deg(u) \cdot \deg(v)$$

$$
\begin{aligned}
\overline{M_2}\big(AG(\mathbb{Z}_{33})\big) = {} & (\deg(\bar{3}) \cdot \deg(\bar{6})) \cdot (\deg(\bar{9}) \cdot \deg(\bar{3})) \\
& \cdot (\deg(\bar{3}) \cdot \deg(\overline{12})) \cdot \big(\deg(\bar{3}) \cdot \deg(\overline{15})\big) \\
& \cdot (\deg(\overline{18}) \cdot \ \deg(\bar{3})) \cdot (\deg(\bar{3}) \cdot \deg(\overline{21})) \\
& \cdot (\deg(\overline{24}) \cdot \deg(\bar{3})) \cdot (\deg(\overline{27}) \cdot \deg(\bar{3})) \\
& \cdot (\deg(\bar{3}) \cdot \deg(\overline{30})) \cdot (\deg(\bar{9}) \cdot \ \deg(\bar{6})) \\
& \cdot (\deg(\overline{12}) \cdot \ \deg(\bar{6})) \cdot \big(\deg(\bar{6}) \cdot \deg(\overline{15})\big) \\
& \cdot (\deg(\overline{18}) \cdot \deg(\bar{6})) \cdot (\deg(\overline{21}) \cdot \deg(\bar{6})) \\
& \cdot (\deg(\overline{24}) \cdot \deg(\bar{6})) \cdot (\deg(\overline{27}) \cdot \deg(\bar{6})) \\
& \cdot (\deg(\bar{6}) \cdot \ \deg(\overline{27})) \cdot (\deg(\bar{9}) \cdot \deg(\overline{12})) \\
& \cdot \big(\deg(\bar{9}) \cdot \deg(\overline{15})\big) \cdot (\deg(\bar{9}) \cdot \deg(\overline{18})) \\
& \cdot (\deg(\bar{9}) \cdot \deg(\overline{21})) \cdot (\deg(\overline{24}) \cdot \deg(\bar{9})) \\
& \cdot (\deg(\bar{9}) \cdot \deg(\overline{27})) \cdot (\deg(\bar{9}) \cdot \deg(\overline{27})) \\
& \cdot (\deg(\overline{11}) \cdot \ \deg(\overline{22})) \cdot \big(\deg(\overline{12}) \cdot \deg(\overline{15})\big) \\
& \cdot (\deg(\overline{18}) \cdot \deg(\overline{12})) \cdot (\deg(\overline{12}) \cdot \deg(\overline{21})) \\
& \cdot (\deg(\overline{24}) \cdot \deg(\overline{12})) \cdot (\deg(\overline{27}) \cdot \deg(\overline{12})) \\
& \cdot (\deg(\overline{12}) \cdot \deg(\overline{27})) \cdot \big(\deg(\overline{18}) \cdot \deg(\overline{15})\big) \\
& \cdot \big(\deg(\overline{21}) \cdot \deg(\overline{15})\big) \cdot \big(\deg(\overline{24}\,) \cdot \deg(\overline{15})\big) \\
& \cdot \big(\deg(\overline{27}) \cdot \deg(\overline{15})\big) \cdot \big(\deg(\overline{27}) \cdot \deg(\overline{15})\big) \\
& \cdot (\deg(\overline{18}) \cdot \deg(\overline{21})) \cdot (\deg(\overline{24}) \cdot \deg(\overline{18})) \\
& \cdot (\deg(\overline{18}) \cdot \deg(\overline{27})) \cdot (\deg(\overline{18}) \cdot \deg(\overline{27})) \\
& \cdot (\deg(\overline{24}) \cdot \deg(\overline{21})) \cdot (\deg(\overline{27}) \cdot \deg(\overline{21})) \\
& \cdot (\deg(\overline{21}) \cdot \deg(\overline{27})) \cdot (\deg(\overline{24}) \cdot \deg(\overline{27})) \\
& \cdot (\deg(\overline{24}) \cdot \deg(\overline{30})) \cdot (\deg(\overline{27}) \cdot \deg(\overline{30}))
\end{aligned}
$$

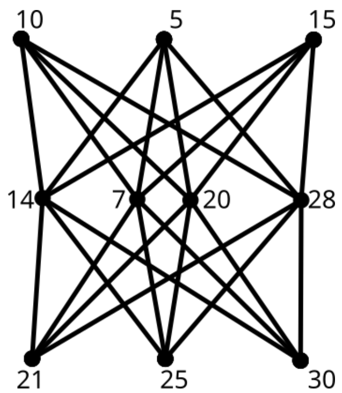
$$= (2 \cdot\ 2)^{45} \cdot (10 \cdot 10) = 2^{90} \cdot 10^{2}$$

4.1.11 Indeks Narumi-Katayama dan Zagreb Perkalian pada Graf Annihilator $\mathbb{Z}_{35}$

Berdasarkan pengamatan hasil penentuan pembagi nol di $\mathbb{Z}_{35}$ dengan menggunakan bahasa pemrograman python (lihat Lampiran 1) diperoleh himpunan pembagi nol di $\mathbb{Z}_{35}$ adalah $Z(\mathbb{Z}_{35}) = \{\overline{5},\overline{7},\overline{10},\overline{14},\overline{15},\overline{20},\overline{21},\overline{25},\overline{28},\overline{30}\}$ dimana semua elemennya merupakan simpul graf annihilator ring $\mathbb{Z}_{35}$ dengan annihilator dari setiap simpul sebagai berikut, $ann(\overline{5}) = ann(\overline{10}) = ann(\overline{15}) = ann(\overline{20}) = ann(\overline{25}) = ann(\overline{30}) = \{\overline{0},\overline{7},\overline{14},\overline{21},\overline{28}\}$ dan $ann(\overline{7}) = ann(\overline{14}) = ann(\overline{21}) = ann(\overline{28}) = \{\overline{0},\overline{5},\overline{10},\overline{15},\overline{20},\overline{25},\overline{30}\}$.

Selain itu, diperoleh juga himpunan sisi graf annihilator ring $\mathbb{Z}_{35}$ sebagai berikut $E(AG(\mathbb{Z}_{35}))$ = { $(\overline{5},\overline{7})$, $(\overline{5},\overline{14})$, $(\overline{21},\overline{5})$, $(\overline{28},\overline{5})$, $(\overline{10}, \overline{7})$,$(\overline{15}, \overline{7})$,$(\overline{20}, \overline{7})$,$(\overline{25},\overline{7})$, $(\overline{30},\overline{7})$, $(\overline{10},\overline{14})$, $(\overline{10},\overline{21})$, $(\overline{10},\overline{28})$, $(\overline{14},\overline{15})$, $(\overline{20},\overline{14})$, $(\overline{25},\overline{14})$, $(\overline{14}, \overline{30})$, $(\overline{21}, \overline{15})$, $(\overline{28},\overline{15})$, $(\overline{20},\overline{21})$, $(\overline{20},\overline{28})$, $(\overline{21},\overline{30})$, $(\overline{25},\overline{21})$, $(\overline{25},\overline{28})$, $(\overline{28},\overline{30})$.

Berdasarkan data tersebut dapat dibentuk graf annihilator sebagai berikut:



Gambar 4.11 Graf Annihilator $\mathbb{Z}_{35}$

Dari Gambar 4.11 diperoleh derajat setiap simpul adalah, $\deg(\overline{5}) = \deg(\overline{10}) = \deg(\overline{15}) = \deg(\overline{20}) = \deg(\overline{25}) = \deg(\overline{30}) = 4$ dan $\deg(\overline{7}) = \deg(\overline{14}) = \deg(\overline{21}) = \deg(\overline{28}) = 6$. Berdasarkan uraian tersebut diperoleh:

1. Nilai indeks Narumi-Katayama sebagai,

$$NK\big(AG(\mathbb{Z}_{35})\big) = \prod_{u \in V\left(AG(\mathbb{Z}_{35})\right)} \deg(u)$$

$$\begin{aligned} NK\big(AG(\mathbb{Z}_{35})\big) &= \deg(5) \cdot \deg(7) \cdot \deg(10) \cdot \deg(14) \cdot \deg(15) \\ &\quad \cdot \deg(20) \cdot \deg(21) \cdot \deg(25) \cdot \deg(28) \cdot \deg(30) \\ &= 4^6 \cdot 6^4 = 5308416 \end{aligned}$$

2. Nilai indeks Zagreb Perkalian Pertama sebagai,

$$\begin{aligned} M_1\big(AG(\mathbb{Z}_{35})\big) &= \prod_{u \in V\left(AG(\mathbb{Z}_{35})\right)} (\deg(u))^2 = \Big(NK\big(AG(\mathbb{Z}_{35})\big)\Big)^2 \\ &= 28179280429056 \end{aligned}$$

3. Nilai indeks Zagreb Perkalian Kedua sebagai,

$$M_2\big(AG(\mathbb{Z}_{35})\big) = \prod_{(u,v) \in E\left(AG(\mathbb{Z}_{35})\right)} \deg(u) \cdot \deg(v)$$

$$\begin{aligned} M_2\big(AG(\mathbb{Z}_{35})\big) = {} & \big(\deg(\overline{5}) \cdot \deg(\overline{7})\big) \cdot \big(\deg(\overline{5}) \cdot \deg(\overline{14})\big) \cdot \\ & \big(\deg(\overline{5}) \cdot \deg(\overline{21})\big) \cdot \big(\deg(\overline{5}) \cdot \deg(\overline{28})\big) \cdot \\ & (\deg(\overline{10}) \cdot \deg(\overline{7})) \cdot (\deg(\overline{10}) \cdot \deg(\overline{14})) \cdot \\ & (\deg(\overline{10}) \cdot \deg(\overline{21})) \cdot (\deg(\overline{10}) \cdot \deg(\overline{28})) \cdot \\ & \big(\deg(\overline{15}) \cdot \deg(\overline{7})\big) \cdot \big(\deg(\overline{15}) \cdot \deg(\overline{14})\big) \cdot \\ & \big(\deg(\overline{15}) \cdot \deg(\overline{21})\big) \cdot \big(\deg(\overline{15}) \cdot \deg(\overline{28})\big) \cdot \\ & (\deg(\overline{20}) \cdot \deg(\overline{7})) \cdot (\deg(\overline{20}) \cdot \deg(\overline{14})) \cdot \\ & (\deg(\overline{20}) \cdot \deg(\overline{21})) \cdot (\deg(\overline{20}) \cdot \deg(\overline{28})) \cdot \end{aligned}$$

$$\left(\deg(\overline{25}) \cdot \deg(\overline{7})\right) \cdot \left(\deg(\overline{25}) \cdot \deg(\overline{14})\right) \cdot$$

$$\left(\deg(\overline{25}) \cdot \deg(\overline{21})\right) \cdot \left(\deg(\overline{25}) \cdot \deg(\overline{28})\right) \cdot$$

$$(\deg(\overline{30}) \cdot \deg(\overline{7})) \cdot (\deg(\overline{30}) \cdot \deg(\overline{14})) \cdot$$

$$(\deg(\overline{30}) \cdot \deg(\overline{21})) \cdot (\deg(\overline{30}) \cdot \deg(\overline{28}))$$

$$M_2\left(AG(\mathbb{Z}_{35})\right) = (4 \cdot 6)^{24} = 24^{24}$$

4. Nilai koindeks Zagreb Perkalian Kedua sebagai,

$$\overline{M_2}\left(AG(\mathbb{Z}_{35})\right) = \prod_{(u,v) \notin E\left(AG(\mathbb{Z}_{35})\right)} \deg(u) \cdot \deg(v)$$

$$\overline{M_2}\left(AG(\mathbb{Z}_{35})\right) = \left(\deg(\overline{5}) \cdot \deg(\overline{10})\right) \cdot \left(\deg(\overline{5}) \cdot \deg(\overline{15})\right)$$

$$\cdot \left(\deg(\overline{5}) \cdot \deg(\overline{20})\right) \cdot \left(\deg(\overline{5}) \cdot \deg(\overline{25})\right)$$

$$\cdot \left(\deg(\overline{5}) \cdot \deg(\overline{30})\right) \cdot \left(\deg(\overline{10}) \cdot \deg(\overline{15})\right)$$

$$\cdot (\deg(\overline{10}) \cdot \deg(\overline{20})) \cdot \left(\deg(\overline{10}) \cdot \deg(\overline{25})\right)$$

$$\cdot (\deg(\overline{10}) \cdot \deg(\overline{30})) \cdot \left(\deg(\overline{15}) \cdot \deg(\overline{20})\right)$$

$$\cdot \left(\deg(\overline{15}) \cdot \deg(\overline{25})\right) \cdot \left(\deg(\overline{15}) \cdot \deg(\overline{30})\right)$$

$$\cdot \left(\deg(\overline{20}) \cdot \deg(\overline{25})\right) \cdot (\deg(\overline{20}) \cdot \deg(\overline{30}))$$

$$\cdot \left(\deg(\overline{25}) \cdot \deg(\overline{30})\right) \cdot (\deg(\overline{7}) \cdot \deg(\overline{14}))$$

$$\cdot (\deg(\overline{7}) \cdot \deg(\overline{21})) \cdot (\deg(\overline{7}) \cdot \deg(\overline{28}))$$

$$\cdot (\deg(\overline{14}) \cdot \deg(\overline{21})) \cdot (\deg(\overline{14}) \cdot \deg(\overline{28}))$$

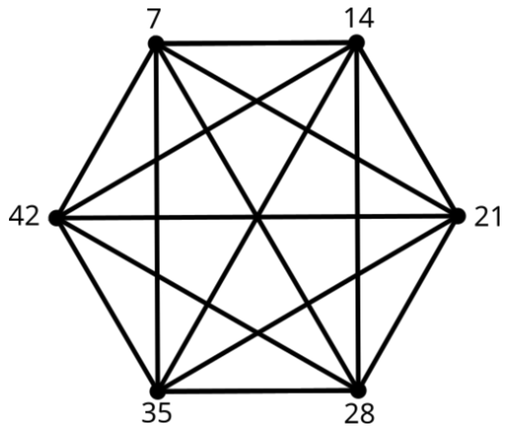
$$\cdot (\deg(\overline{21}) \cdot \deg(\overline{28}))$$

$$\overline{M_2}\left(AG(\mathbb{Z}_{35})\right) = (4 \cdot 4)^{15} \cdot (6 \cdot 6)^{6} = 4^{30} \cdot 6^{12}$$

4.1.12 Indeks Narumi-Katayama dan Zagreb Perkalian pada Graf Annihilator $\mathbb{Z}_{49}$

Berdasarkan pengamatan hasil penentuan pembagi nol di $\mathbb{Z}_{35}$ dengan menggunakan bahasa pemrograman python (lihat Lampiran 1) diperoleh himpunan pembagi nol di $\mathbb{Z}_{49}$ adalah $Z(\mathbb{Z}_{49}) = \{\overline{7}, \overline{14}, \overline{21}, \overline{28}, \overline{35}, \overline{42}\}$ dimana semua elemennya merupakan simpul graf annihilator ring $\mathbb{Z}_{49}$. Dengan bantuan program komputer, diperoleh annihilator dari setiap simpul sebagai berikut, $ann(\overline{7}) = ann(\overline{14}) = ann(\overline{21}) = ann(\overline{28}) = ann(\overline{35}) = ann(\overline{42}) =$ $\{\overline{0}, \overline{7}, \overline{14}, \overline{21}, \overline{28}, \overline{35}, \overline{42}\}$.

Selain itu, diperoleh juga himpunan sisi graf annihilator ring $\mathbb{Z}_{49}$ diperoleh $E(AG(\mathbb{Z}_{49})) = \{(\overline{14},\overline{7}), (\overline{21},\overline{7}), (\overline{28},\overline{7}), (\overline{35},\overline{7}), (42,\overline{7}), (\overline{21},\overline{14}), (\overline{28},\overline{14}), (\overline{35},\overline{14}), (\overline{42},\overline{14}), (\overline{28},\overline{21}), (\overline{35},\overline{21}), (\overline{42},\overline{21}), (\overline{35},\overline{28}), (\overline{42}, \overline{28}), (\overline{42},\overline{35})\}$. Berdasarkan data tersebut dapat dibentuk graf annihilator sebagai berikut:



Gambar 4.12 Graf Annihilator $\mathbb{Z}_{49}$

Dari Gambar 4.12 diperoleh derajat setiap simpul sebagai berikut, $\deg(\overline{7}) = \deg(\overline{14}) = \deg(\overline{21}) = \deg(\overline{28}) = \deg(\overline{35}) = \deg(\overline{42}) = 6$.

Berdasarkan uraian tersebut diperoleh:

1. Nilai indeks Narumi-Katayama sebagai,

$$NK\big(AG(\mathbb{Z}_{49})\big) = \prod_{u \in V\left(AG(\mathbb{Z}_{49})\right)} \deg(u)$$

$$NK\big(AG(\mathbb{Z}_{49})\big) = \deg(\overline{7}) \cdot \deg(\overline{14}) \cdot \deg(\overline{21}) \cdot \deg(\overline{28}) \cdot \deg(\overline{35}) \cdot \deg(\overline{42}) = 5^6 = 15625$$

2. Nilai indeks Zagreb Perkalian Pertama sebagai,

$$M_1\big(AG(\mathbb{Z}_{49})\big) = \prod_{u \in V\left(AG(\mathbb{Z}_{49})\right)} (\deg(u))^2 = \Big(NK\big(AG(\mathbb{Z}_{49})\big)\Big)^2 = 244140625$$

3. Nilai indeks Zagreb Perkalian Kedua sebagai,

$$M_2\big(AG(\mathbb{Z}_{49})\big) = \prod_{(u,v) \in E\left(AG(\mathbb{Z}_{49})\right)} \deg(u) \cdot \deg(v)$$

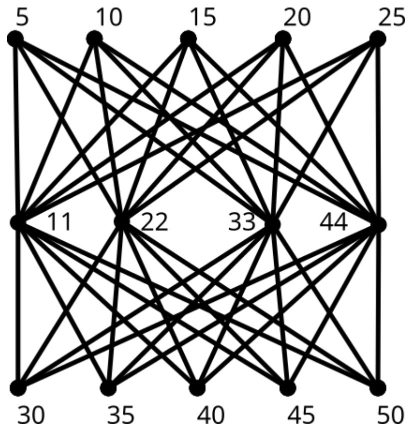
$$\begin{aligned} M_2\big(AG(\mathbb{Z}_{49})\big) = {} & (\deg(\overline{7}) \cdot \deg(\overline{14})) \cdot (\deg(\overline{7}) \cdot \deg(\overline{21})) \\ & \cdot (\deg(\overline{7}) \cdot \deg(\overline{28})) \cdot \big(\deg(\overline{7}) \cdot \deg(\overline{35})\big) \\ & \cdot (\deg(\overline{7}) \cdot \deg(\overline{42})) \cdot (\deg(\overline{14}) \cdot \deg(\overline{21})) \\ & \cdot (\deg(\overline{14}) \cdot \deg(\overline{28})) \cdot \big(\deg(\overline{14}) \cdot \deg(\overline{35})\big) \\ & \cdot (\deg(\overline{14}) \cdot \deg(\overline{42})) \cdot (\deg(\overline{21}) \cdot \deg(\overline{28})) \\ & \cdot \big(\deg(\overline{21}) \cdot \deg(\overline{35})\big) \cdot (\deg(\overline{21}) \cdot \deg(\overline{42})) \\ & \cdot \big(\deg(\overline{28}) \cdot \deg(\overline{35})\big) \cdot (\deg(\overline{28}) \cdot \deg(\overline{42})) \\ & \cdot \big(\deg(\overline{35}) \cdot \deg(\overline{42})\big) = (5 \cdot 5)^{15} = 5^{30} \end{aligned}$$

4. Nilai koindeks Zagreb Perkalian Kedua sebagai berikut, $\overline{M_2}\big(AG(\mathbb{Z}_{49})\big) = \prod_{(u,v) \notin E\left(AG(\mathbb{Z}_{49})\right)} \deg(u) \cdot \deg(v) = 0$ karena semua simpul terhubung langsung dengan semua simpul yang berbeda.

4.1.13 Indeks Narumi-Katayama dan Zagreb Perkalian pada Graf Annihilator $\mathbb{Z}_{55}$

Berdasarkan pengamatan hasil penentuan pembagi nol di $\mathbb{Z}_{35}$ dengan menggunakan bahasa pemrograman python (lihat Lampiran 1) diperoleh himpunan pembagi nol di $\mathbb{Z}_{55}$ adalah $Z(\mathbb{Z}_{55}) = \{\overline{5}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{15}, \overline{20}, \overline{22}, \overline{25}, \overline{30}, \overline{33}, \overline{35}, \overline{40}, \overline{44}, \overline{45}, \overline{50}\}$ dimana semua elemennya merupakan simpul graf annihilator ring $\mathbb{Z}_{55}$ dengan annihilator dari setiap simpul sebagai berikut, $ann(\overline{5}) = ann(\overline{10}) = ann(15) = ann(20) = ann(25) = ann(30) = ann(35) = ann(40) = ann(45) = ann(50) = \{\overline{0}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{33}, \overline{44}\}$ dan $ann(11) = ann(22) = ann(33) = ann(44) = \{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}, \overline{15}, \overline{20}, \overline{25}, \overline{30}, \overline{35}, \overline{40}, \overline{45}, \overline{50}\}$.

Selain itu, diperoleh juga himpunan sisi graf annihilator ring $\mathbb{Z}_{55}$ sebagai berikut $E\big(AG(\mathbb{Z}_{55})\big)$ = { $(\overline{11}, \overline{5})$,$(\overline{5}, \overline{22})$,$(\overline{33}, \overline{5})$,$(\overline{44}, \overline{5})$,$(\overline{10}, \overline{11})$,$(\overline{10}, \overline{22})$,$(\overline{33}, \overline{10})$,$(\overline{10}, \overline{44})$,$(\overline{11}, \overline{15})$,$(\overline{11}, \overline{20})$,$(\overline{25}, \overline{11})$,$(\overline{11}, \overline{30})$,$(\overline{35}, \overline{11})$,$(\overline{40}, \overline{11})$,$(\overline{11}, \overline{45})$,$(\overline{50}, \overline{11})$,$(\overline{22}, \overline{15})$,$(\overline{33}, \overline{15})$,$(\overline{44}, \overline{15})$,$(\overline{20}, \overline{22})$,$(\overline{33}, \overline{20})$,$(\overline{20}, \overline{44})$,$(\overline{25}, \overline{22})$,$(\overline{22}, \overline{30})$,$(\overline{35}, \overline{22})$,$(\overline{40}, \overline{22})$,$(\overline{45}, \overline{22})$,$(\overline{50}, \overline{22})$,$(\overline{25}, \overline{33})$,$(\overline{25}, \overline{44})$,$(\overline{33}, \overline{30})$,$(\overline{44}, \overline{30})$,$(\overline{33}, \overline{35})$,$(\overline{40}, \overline{33})$,$(\overline{33}, \overline{45})$,$(\overline{33}, \overline{50})$,$(\overline{35}, \overline{44})$,$(\overline{40}, \overline{44})$,$(\overline{44}, \overline{45})$,$(\overline{50}, \overline{44})$}. Berdasarkan data tersebut dapat dibentuk graf annihilator sebagai berikut:



Gambar 4.13 Graf Annihilator $\mathbb{Z}_{55}$

Dari Gambar 4.13 diperoleh derajat setiap simpul sebagai berikut, $\deg(\overline{5}) = \deg(\overline{10}) = \deg(\overline{15}) = \deg(\overline{20}) = \deg(\overline{25}) = \deg(\overline{30}) = \deg(\overline{35}) = \deg(\overline{40}) = \deg(\overline{45}) = \deg(\overline{50}) = 4$ dan $\deg(\overline{11}) = \deg(\overline{22}) = \deg(\overline{33}) = \deg(\overline{44}) = 10$. Berdasarkan uraian tersebut diperoleh:

1. Nilai indeks Narumi-Katayama sebagai,

$$NK\big(AG(\mathbb{Z}_{55})\big) = \prod_{u \in V(AG(\mathbb{Z}_{55}))} \deg(u)$$

$$\begin{aligned} NK\big(AG(\mathbb{Z}_{55})\big) &= \deg(\overline{5}) \cdot \deg(\overline{10}) \cdot \deg(\overline{11}) \cdot \deg(\overline{15}) \cdot \deg(\overline{20}) \\ &\cdot \deg(\overline{22}) \cdot \deg(\overline{25}) \cdot \deg(\overline{30}) \cdot \deg(\overline{33}) \cdot \deg(\overline{35}) \\ &\cdot \deg(\overline{40}) \cdot \deg(\overline{44}) \cdot \deg(\overline{45}) \cdot \deg(\overline{50}) = 4^{10} \cdot 10^{4} \\ &= 10485760000 \end{aligned}$$

2. Nilai indeks Zagreb Perkalian Pertama sebagai,

$$M_1\big(AG(\mathbb{Z}_{55})\big) = \prod_{u \in V(AG(\mathbb{Z}_{55}))} (\deg(u))^2 = \Big(NK\big(AG(\mathbb{Z}_{55})\big)\Big)^2$$

$$= 109951162777600000000$$

3. Nilai indeks Zagreb Perkalian Kedua sebagai,

$$M_2\big(AG(\mathbb{Z}_{55})\big) = \prod_{(u,v) \in E(AG(\mathbb{Z}_{55}))} \deg(u) \cdot \deg(v)$$

$$M_2\big(AG(\mathbb{Z}_{55})\big) = \big(\deg(\overline{5}) \cdot \deg(\overline{11})\big) \cdot \big(\deg(\overline{5}) \cdot \deg(\overline{22})\big)$$
$$\cdot \big(\deg(\overline{5}) \cdot \deg(\overline{33})\big) \cdot \big(\deg(\overline{5}) \cdot \deg(\overline{44})\big)$$
$$\cdot (\deg(\overline{10}) \cdot \deg(\overline{11})) \cdot (\deg(\overline{10}) \cdot \deg(\overline{22}))$$
$$\cdot (\deg(\overline{10}) \cdot \deg(\overline{33})) \cdot (\deg(\overline{10}) \cdot \deg(\overline{44}))$$
$$\cdot \big(\deg(\overline{15}) \cdot \deg(\overline{11})\big) \cdot \big(\deg(\overline{15}) \cdot \deg(\overline{22})\big)$$
$$\cdot \big(\deg(\overline{15}) \cdot \deg(\overline{33})\big) \cdot \big(\deg(\overline{15}) \cdot \deg(\overline{44})\big)$$
$$\cdot (\deg(\overline{20}) \cdot \deg(\overline{11})) \cdot (\deg(\overline{20}) \cdot \deg(\overline{22}))$$
$$\cdot (\deg(\overline{20}) \cdot \deg(\overline{33})) \cdot (\deg(\overline{20}) \cdot \deg(\overline{44}))$$
$$\cdot \big(\deg(\overline{25}) \cdot \deg(\overline{11})\big) \cdot \big(\deg(\overline{25}) \cdot \deg(\overline{22})\big) \cdot$$
$$\big(\deg(\overline{25}) \cdot \deg(\overline{33})\big) \cdot \big(\deg(\overline{25}) \cdot \deg(\overline{44})\big) \cdot$$
$$(\deg(\overline{30}) \cdot \deg(\overline{11})) \cdot (\deg(\overline{30}) \cdot \deg(\overline{22})) \cdot$$
$$(\deg(\overline{30}) \cdot \deg(\overline{33})) \cdot (\deg(\overline{30}) \cdot \deg(\overline{44})) \cdot$$
$$\big(\deg(\overline{35}) \cdot \deg(\overline{11})\big) \cdot \big(\deg(\overline{35}) \cdot \deg(\overline{22})\big) \cdot$$
$$\big(\deg(\overline{35}) \cdot \deg(\overline{33})\big) \cdot \big(\deg(\overline{35}) \cdot \deg(\overline{44})\big) \cdot$$
$$(\deg(\overline{40}) \cdot \deg(\overline{11})) \cdot (\deg(\overline{40}) \cdot \deg(\overline{22})) \cdot$$
$$(\deg(\overline{40}) \cdot \deg(\overline{33})) \cdot (\deg(\overline{40}) \cdot \deg(\overline{44})) \cdot$$
$$\big(\deg(\overline{45}) \cdot \deg(\overline{11})\big) \cdot \big(\deg(\overline{45}) \cdot \deg(\overline{22})\big) \cdot$$
$$\big(\deg(\overline{45}) \cdot \deg(\overline{33})\big) \cdot \big(\deg(\overline{45}) \cdot \deg(\overline{44})\big) \cdot$$
$$\big(\deg(\overline{50}) \cdot \deg(\overline{11})\big) \cdot \big(\deg(\overline{50}) \cdot \deg(\overline{22})\big) \cdot$$
$$\big(\deg(\overline{50}) \cdot \deg(\overline{33})\big) \cdot \big(\deg(\overline{50}) \cdot \deg(\overline{44})\big)$$

$$M_2\big(AG(\mathbb{Z}_{55})\big) = (4 \cdot 10)^{40}$$

4. Nilai koindeks Zagreb Perkalian Kedua sebagai,

$$\overline{M_2}\big(AG(\mathbb{Z}_{55})\big) = \prod_{(u,v)\notin E(AG(\mathbb{Z}_{55}))} \deg(u) \cdot \deg(v)$$

$$\begin{aligned}
\overline{M_2}\big(AG(\mathbb{Z}_{55})\big) = {} & \big(\deg(\overline{5}) \cdot \deg(\overline{10})\big) \cdot \big(\deg(\overline{5}) \cdot \deg(\overline{15})\big) \\
& \cdot \big(\deg(\overline{5}) \cdot \deg(\overline{20})\big) \cdot \big(\deg(\overline{5}) \cdot \deg(\overline{25})\big) \\
& \cdot \big(\deg(\overline{5}) \cdot \deg(\overline{30})\big) \cdot \big(\deg(\overline{5}) \cdot \deg(\overline{35})\big) \\
& \cdot \big(\deg(\overline{5}) \cdot \deg(\overline{40})\big) \cdot \big(\deg(\overline{5}) \cdot \deg(\overline{45})\big) \\
& \cdot \big(\deg(\overline{5}) \cdot \deg(\overline{50})\big) \cdot \big(\deg(\overline{10}) \cdot \deg(\overline{15})\big) \cdot \\
& (\deg(\overline{10}) \cdot \deg(\overline{20})) \cdot \big(\deg(\overline{10}) \cdot \deg(\overline{25})\big) \cdot \\
& (\deg(\overline{10}) \cdot \deg(\overline{30})) \cdot \big(\deg(\overline{10}) \cdot \deg(\overline{35})\big) \cdot \\
& (\deg(\overline{10}) \cdot \deg(\overline{40})) \cdot \big(\deg(\overline{10}) \cdot \deg(\overline{45})\big) \cdot \\
& \big(\deg(\overline{10}) \cdot \deg(\overline{50})\big) \cdot \big(\deg(\overline{15}) \cdot \deg(\overline{20})\big) \cdot \\
& \big(\deg(\overline{15}) \cdot \deg(\overline{25})\big) \cdot \big(\deg(\overline{15}) \cdot \deg(\overline{30})\big) \cdot \\
& \big(\deg(\overline{15}) \cdot \deg(\overline{35})\big) \cdot \big(\deg(\overline{15}) \cdot \deg(\overline{40})\big) \cdot \\
& \big(\deg(\overline{15}) \cdot \deg(\overline{45})\big) \cdot \big(\deg(\overline{15}) \cdot \deg(\overline{50})\big) \cdot \\
& \big(\deg(\overline{20}) \cdot \deg(\overline{25})\big) \cdot (\deg(\overline{20}) \cdot \deg(\overline{30})) \cdot \\
& \big(\deg(\overline{20}) \cdot \deg(\overline{35})\big) \cdot (\deg(\overline{20}) \cdot \deg(\overline{40})) \cdot \\
& \big(\deg(\overline{20}) \cdot \deg(\overline{45})\big) \cdot \big(\deg(\overline{20}) \cdot \deg(\overline{50})\big) \cdot \\
& \big(\deg(\overline{25}) \cdot \deg(\overline{30})\big) \cdot \big(\deg(\overline{25}) \cdot \deg(\overline{35})\big) \cdot \\
& \big(\deg(\overline{25}) \cdot \deg(\overline{40})\big) \cdot \big(\deg(\overline{25}) \cdot \deg(\overline{45})\big) \cdot \\
& \big(\deg(\overline{25}) \cdot \deg(\overline{50})\big) \cdot \big(\deg(\overline{30}) \cdot \deg(\overline{35})\big) \cdot \\
& (\deg(\overline{30}) \cdot \deg(\overline{40})) \cdot \big(\deg(\overline{30}) \cdot \deg(\overline{45})\big) \cdot \\
& \big(\deg(\overline{30}) \cdot \deg(\overline{50})\big) \cdot \big(\deg(\overline{35}) \cdot \deg(\overline{40})\big) \cdot
\end{aligned}$$

$$\left(\deg(\overline{35}) \cdot \deg(\overline{45})\right) \cdot \left(\deg(\overline{35}) \cdot \deg(\overline{50})\right) \cdot$$
$$\left(\deg(\overline{40}) \cdot \deg(\overline{45})\right) \cdot \left(\deg(\overline{40}) \cdot \deg(\overline{50})\right) \cdot$$
$$\left(\deg(\overline{35}) \cdot \deg(\overline{50})\right) \cdot (\deg(\overline{11}) \cdot \deg(\overline{22})) \cdot$$
$$(\deg(\overline{11}) \cdot \deg(\overline{33})) \cdot (\deg(\overline{11}) \cdot \deg(\overline{44})) \cdot$$
$$(\deg(\overline{22}) \cdot \deg(\overline{33})) \cdot (\deg(\overline{22}) \cdot \deg(\overline{44})) \cdot$$
$$(\deg(\overline{33}) \cdot \deg(\overline{44}))$$

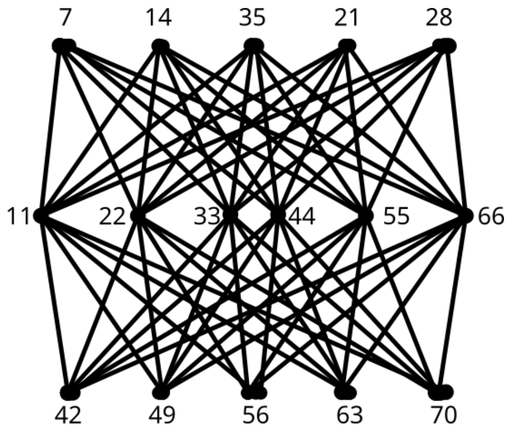
$$\overline{M_2}\left(AG(\mathbb{Z}_{55})\right) = (4 \cdot 4)^{45} \cdot (10 \cdot 10)^{6} = 4^{90} \cdot 10^{12}$$

4.1.14 Indeks Narumi-Katayama dan Zagreb Perkalian pada Graf Annihilator $\mathbb{Z}_{77}$

Berdasarkan pengamatan hasil penentuan pembagi nol di $\mathbb{Z}_{35}$ dengan menggunakan bahasa pemrograman python (lihat Lampiran 1) diperoleh himpunan pembagi nol di $\mathbb{Z}_{77}$ adalah $Z(\mathbb{Z}_{77}) = \{\overline{7}, \overline{11}, \overline{14}, \overline{21}, \overline{22}, \overline{28}, \overline{33}, \overline{35}, \overline{42}, \overline{44}, \overline{49}, \overline{55}, \overline{56}, \overline{63}, \overline{66}, \overline{70}\}$ dimana semua elemennya merupakan simpul graf annihilator ring $\mathbb{Z}_{77}$ dengan annihilator dari setiap simpul sebagai berikut, $ann(\overline{7}) = ann(\overline{14}) = ann(\overline{21}) = ann(\overline{28}) = ann(\overline{35}) = ann(\overline{42}) = ann(\overline{49}) = ann(\overline{56}) = ann(\overline{63}) = ann(\overline{70}) = \{\overline{0}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{33}, \overline{44}, \overline{55}, \overline{66}\}$ dan $ann(\overline{11}) = ann(\overline{22}) = ann(\overline{33}) = ann(\overline{44}) = ann(\overline{55}) = ann(\overline{66}) = \{\overline{0}, \overline{7}, \overline{14}, \overline{21}, \overline{28}, \overline{35}, \overline{42}, \overline{49}, \overline{56}, \overline{63}, \overline{70}\}$.

Selain itu, diperoleh juga himpunan sisi graf annihilator ring $\mathbb{Z}_{77}$ sebgai berikut $E\left(AG(\mathbb{Z}_{77})\right) = \{ (\overline{11}, \overline{7}), (\overline{22}, \overline{7}), (\overline{33}, \overline{7}), (\overline{44}, \overline{7}), (\overline{55}, \overline{7}), (\overline{66}, \overline{7}), (\overline{11}, \overline{14}), (\overline{11}, \overline{21}), (\overline{11}, \overline{28}), (\overline{35}, \overline{11}), (\overline{42}, \overline{11}), (\overline{49}, \overline{11}), (\overline{56}, \overline{11}), (\overline{11}, \overline{63}), (\overline{11}, \overline{70}), (\overline{14}, \overline{22}), (33, \overline{14}), (\overline{44}, \overline{14}), (\overline{14}, \overline{55}), (\overline{66}, \overline{14}), (\overline{21}, \overline{22}), (\overline{33}, \overline{21}), (\overline{44}, \overline{21}), (\overline{21}, \overline{55}), (\overline{66}, \overline{21}), (\overline{28}, \overline{22}), (\overline{35}, \overline{22}), (\overline{42}, \overline{22}), (\overline{49}, \overline{22}), (\overline{56}, \overline{22}),$

$(\overline{22},\overline{63})$, $(\overline{70},\overline{22})$, $(\overline{33},\overline{28})$, $(\overline{28},\overline{44})$, $(\overline{28},\overline{55})$, $(\overline{66},\overline{28})$, $(\overline{33},\overline{35})$, $(\overline{33},\overline{42})$, $(\overline{33},\overline{49})$, $(\overline{56},\overline{33})$, $(\overline{33},\overline{63})$, $(\overline{33},\overline{70})$, $(\overline{35},\overline{44})$, $(\overline{35},\overline{55})$, $(\overline{66},\overline{35})$, $(\overline{42},\overline{44})$, $(\overline{42},\overline{55})$, $(\overline{42},\overline{66})$, $(\overline{49},\overline{44})$, $(\overline{56},\overline{44})$, $(\overline{44},\overline{63})$, $(\overline{44},\overline{70})$, $(\overline{49},\overline{55})$, $(\overline{49},\overline{66})$, $(\overline{56},\overline{55})$, $(\overline{63},\overline{55})$, $(\overline{70},\overline{55})$, $(\overline{56},\overline{66})$, $(\overline{66},\overline{63})$, $(\overline{66},\overline{70})\}$. Berdasarkan data tersebut dapat dibentuk graf annihilator sebagai berikut:



Gambar 4.14 Graf Annihilator $\mathbb{Z}_{77}$

Dari Gambar 4.14 diperoleh derajat setiap simpul sebagai berikut, $\deg(\overline{7}) = \deg(\overline{14}) = \deg(\overline{21}) = \deg(\overline{28}) = \deg(\overline{35}) = \deg(\overline{42}) = \deg(\overline{49}) = \deg(\overline{56}) = \deg(\overline{63}) = \deg(\overline{70}) = 6$ dan $\deg(\overline{11}) = \deg(\overline{22}) = \deg(\overline{33}) = \deg(\overline{44}) = \deg(\overline{55}) = \deg(\overline{66}) = 10$. Berdasarkan uraian tersebut diperoleh:

1. Nilai indeks Narumi-Katayama sebagai,

$$NK(AG(\mathbb{Z}_{77})) = \prod_{u\in V(AG(\mathbb{Z}_{77}))} \deg(u)$$

$$\begin{aligned} NK(AG(\mathbb{Z}_{77})) &= \deg(\overline{7})\cdot\deg(\overline{11})\cdot\deg(\overline{14})\cdot\deg(\overline{21})\cdot\deg(\overline{22}) \\ &\cdot\deg(\overline{28})\cdot\deg(\overline{33})\cdot\deg(\overline{35})\cdot\deg(\overline{42})\cdot\deg(\overline{44}) \\ &\cdot\deg(\overline{49})\cdot\deg(\overline{55})\cdot\deg(\overline{56})\cdot\deg(\overline{63})\cdot\deg(\overline{66}) \\ &\cdot\deg(\overline{70}) = 6^{10}\cdot 10^{6} = 60466176000000 \end{aligned}$$

2. Nilai indeks Zagreb Perkalian Pertama sebagai,

$$M_1\big(AG(\mathbb{Z}_{77})\big) = \prod_{u\in V\left(AG(\mathbb{Z}_{77})\right)} (\deg(u))^2 = \Big(NK\big(AG(\mathbb{Z}_{77})\big)\Big)^2$$

$$= 36561584400629760000000000000$$

3. Nilai indeks Zagreb Perkalian Kedua sebagai,

$$M_2\big(AG(\mathbb{Z}_{77})\big) = \prod_{(u,v)\in E\left(AG(\mathbb{Z}_{77})\right)} \deg(u)\cdot\deg(v)$$

$$\begin{aligned}
M_2\big(AG(\mathbb{Z}_{77})\big) = {} & (\deg(\overline{7})\cdot\deg(\overline{11}))\cdot(\deg(\overline{7})\cdot\deg(\overline{22})) \\
& \cdot(\deg(\overline{7})\cdot\deg(\overline{33}))\cdot(\deg(\overline{7})\cdot\deg(\overline{44})) \\
& \cdot\big(\deg(\overline{7})\cdot\deg(\overline{55})\big)\cdot(\deg(\overline{7})\cdot\deg(\overline{66})) \\
& \cdot(\deg(\overline{14})\cdot\deg(\overline{11}))\cdot(\deg(\overline{14})\cdot\deg(\overline{22})) \\
& \cdot(\deg(\overline{14})\cdot\deg(\overline{33}))\cdot(\deg(\overline{14})\cdot\deg(\overline{44})) \\
& \cdot\big(\deg(\overline{14})\cdot\deg(\overline{55})\big)\cdot(\deg(\overline{14})\cdot\deg(\overline{66})) \\
& \cdot(\deg(\overline{21})\cdot\deg(\overline{11}))\cdot(\deg(\overline{21})\cdot\deg(\overline{22})) \\
& \cdot(\deg(\overline{21})\cdot\deg(\overline{33}))\cdot(\deg(\overline{21})\cdot\deg(\overline{44})) \\
& \cdot\big(\deg(\overline{21})\cdot\deg(\overline{55})\big)\cdot(\deg(\overline{21})\cdot\deg(\overline{66})) \\
& \cdot(\deg(\overline{28})\cdot\deg(\overline{11}))\cdot(\deg(\overline{28})\cdot\deg(\overline{22})) \\
& \cdot(\deg(\overline{28})\cdot\deg(\overline{33}))\cdot(\deg(\overline{28})\cdot\deg(\overline{44})) \\
& \cdot\big(\deg(\overline{28})\cdot\deg(\overline{55})\big)\cdot(\deg(\overline{28})\cdot\deg(\overline{66}))\cdot \\
& \big(\deg(\overline{35})\cdot\deg(\overline{11})\big)\cdot\big(\deg(\overline{35})\cdot\deg(\overline{22})\big)\cdot \\
& \big(\deg(\overline{35})\cdot\deg(\overline{33})\big)\cdot\big(\deg(\overline{35})\cdot\deg(\overline{44})\big)\cdot \\
& \big(\deg(\overline{35})\cdot\deg(\overline{55})\big)\cdot\big(\deg(\overline{35})\cdot\deg(\overline{66})\big)\cdot \\
& (\deg(\overline{42})\cdot\deg(\overline{11}))\cdot(\deg(\overline{42})\cdot\deg(\overline{22}))\cdot \\
& (\deg(\overline{42})\cdot\deg(\overline{33}))\cdot(\deg(\overline{42})\cdot\deg(\overline{44}))\cdot
\end{aligned}$$

$$\left(\deg(\overline{42}) \cdot \deg(\overline{55})\right) \cdot (\deg(\overline{42}) \cdot \deg(\overline{66})) \cdot$$
$$(\deg(\overline{49}) \cdot \deg(\overline{11})) \cdot (\deg(\overline{49}) \cdot \deg(\overline{22})) \cdot$$
$$(\deg(\overline{49}) \cdot \deg(\overline{33})) \cdot (\deg(\overline{49}) \cdot \deg(\overline{44})) \cdot$$
$$\left(\deg(\overline{49}) \cdot \deg(\overline{55})\right) \cdot (\deg(\overline{49}) \cdot \deg(\overline{66})) \cdot$$
$$\left(\deg(\overline{56}) \cdot \deg(\overline{11})\right) \cdot \left(\deg(\overline{56}) \cdot \deg(\overline{22})\right) \cdot$$
$$\left(\deg(\overline{56}) \cdot \deg(\overline{33})\right) \cdot \left(\deg(\overline{56}) \cdot \deg(\overline{44})\right) \cdot$$
$$\left(\deg(\overline{56}) \cdot \deg(\overline{55})\right) \cdot \left(\deg(\overline{56}) \cdot \deg(\overline{66})\right) \cdot$$
$$(\deg(\overline{63}) \cdot \deg(\overline{11})) \cdot (\deg(\overline{63}) \cdot \deg(\overline{22})) \cdot$$
$$(\deg(\overline{63}) \cdot \deg(\overline{33})) \cdot (\deg(\overline{63}) \cdot \deg(\overline{44})) \cdot$$
$$\left(\deg(\overline{63}) \cdot \deg(\overline{55})\right) \cdot (\deg(\overline{63}) \cdot \deg(\overline{66})) \cdot$$
$$(\deg(\overline{70}) \cdot \deg(\overline{11})) \cdot (\deg(\overline{70}) \cdot \deg(\overline{22})) \cdot$$
$$(\deg(\overline{70}) \cdot \deg(\overline{33})) \cdot (\deg(\overline{70}) \cdot \deg(\overline{44})) \cdot$$
$$\left(\deg(\overline{70}) \cdot \deg(\overline{55})\right) \cdot (\deg(\overline{70}) \cdot \deg(\overline{66}))$$

$$M_2\left(AG(\mathbb{Z}_{77})\right) = (6 \cdot 10)^{60} = 60^{60}$$

4. Nilai koindeks Zagreb Perkalian Kedua sebagai,

$$\overline{M_2}\left(AG(\mathbb{Z}_{77})\right) = \prod_{(u,v)\notin E\left(AG(\mathbb{Z}_{77})\right)} \deg(u) \cdot \deg(v)$$

$$
\begin{aligned}
\left(AG(\mathbb{Z}_{77})\right) = {} & \left(\deg(\overline{7}) \cdot \deg(\overline{14})\right) \cdot \left(\deg(\overline{7}) \cdot \deg(\overline{21})\right) \\
& \cdot \left(\deg(\overline{7}) \cdot \deg(\overline{28})\right) \cdot \left(\deg(\overline{7}) \cdot \deg(\overline{35})\right) \\
& \cdot \left(\deg(\overline{7}) \cdot \deg(\overline{42})\right) \cdot \left(\deg(\overline{7}) \cdot \deg(\overline{49})\right) \\
& \cdot \left(\deg(\overline{7}) \cdot \deg(\overline{56})\right) \cdot (\deg(\overline{7}) \cdot \deg(\overline{63})) \\
& \cdot (\deg(\overline{7}) \cdot \deg(\overline{70})) \cdot \left(\deg(\overline{14}) \cdot \deg(\overline{21})\right) \\
& \cdot \left(\deg(\overline{14}) \cdot \deg(\overline{28})\right) \cdot \left(\deg(\overline{14}) \cdot \deg(\overline{35})\right) \\
& \cdot \left(\deg(\overline{14}) \cdot \deg(\overline{42})\right) \cdot \left(\deg(\overline{14}) \cdot \deg(\overline{49})\right) \\
& \cdot \left(\deg(\overline{14}) \cdot \deg(\overline{56})\right) \cdot (\deg(\overline{14}) \cdot \deg(\overline{63})) \\
& \cdot (\deg(\overline{14}) \cdot \deg(\overline{70})) \cdot \left(\deg(\overline{21}) \cdot \deg(28)\right) \\
& \cdot \left(\deg(\overline{21}) \cdot \deg(\overline{35})\right) \cdot \left(\deg(\overline{21}) \cdot \deg(\overline{42})\right) \\
& \cdot \left(\deg(\overline{21}) \cdot \deg(\overline{49})\right) \cdot \left(\deg(\overline{21}) \cdot \deg(\overline{56})\right) \\
& \cdot (\deg(\overline{21}) \cdot \deg(\overline{63})) \cdot (\deg(\overline{21}) \cdot \deg(\overline{70})) \\
& \cdot \left(\deg(\overline{28}) \cdot \deg(\overline{35})\right) \cdot \left(\deg(\overline{28}) \cdot \deg(\overline{42})\right) \\
& \cdot \left(\deg(\overline{28}) \cdot \deg(\overline{49})\right) \cdot \left(\deg(\overline{28}) \cdot \deg(\overline{56})\right) \\
& \cdot (\deg(\overline{28}) \cdot \deg(\overline{63})) \ \cdot (\deg(\overline{28}) \cdot \deg(\overline{70})) \\
& \cdot \left(\deg(\overline{35}) \cdot \deg(\overline{42})\right) \cdot \left(\deg(\overline{35}) \cdot \deg(\overline{49})\right) \\
& \cdot \left(\deg(\overline{35}) \cdot \deg(\overline{56})\right) \cdot \left(\deg(\overline{35}) \cdot \deg(\overline{63})\right) \\
& \cdot \left(\deg(\overline{35}) \cdot \deg(\overline{70})\right) \cdot \left(\deg(\overline{42}) \cdot \deg(\overline{49})\right) \\
& \cdot \left(\deg(\overline{42}) \cdot \deg(\overline{56})\right) \cdot (\deg(\overline{42}) \cdot \deg(\overline{63})) \\
& \cdot (\deg(\overline{42}) \cdot \deg(\overline{70})) \cdot \left(\deg(\overline{49}) \cdot \deg(\overline{56})\right)
\end{aligned}
$$

$$\cdot (\deg(\overline{49}) \cdot \deg(\overline{63})) \cdot (\deg(\overline{49}) \cdot \deg(\overline{70}))$$
$$\cdot \left(\deg\left(\overline{56}\right) \cdot \deg(\overline{63})\right) \cdot \left(\deg\left(\overline{56}\right) \cdot \deg(\overline{70})\right)$$
$$\cdot (\deg(\overline{63}) \cdot \deg(\overline{70})) \cdot (\deg(\overline{11}) \cdot \deg(\overline{22}))$$
$$\cdot (\deg(\overline{11}) \cdot \deg(\overline{33})) \cdot (\deg(\overline{11}) \cdot \deg(\overline{44}))$$
$$\cdot \left(\deg(\overline{11}) \cdot \deg\left(\overline{55}\right)\right) \cdot (\deg(\overline{11}) \cdot \deg(\overline{66}))$$
$$\cdot (\deg(\overline{22}) \cdot \deg(\overline{33})) \cdot (\deg(\overline{22}) \cdot \deg(\overline{44}))$$
$$\cdot \left(\deg(\overline{22}) \cdot \deg\left(\overline{55}\right)\right) \cdot (\deg(\overline{22}) \cdot \deg(\overline{66}))$$
$$\cdot (\deg(\overline{33}) \cdot \deg(\overline{44})) \cdot \left(\deg(\overline{33}) \cdot \deg\left(\overline{55}\right)\right)$$
$$\cdot (\deg(\overline{33}) \cdot \deg(\overline{66})) \cdot \left(\deg(\overline{44}) \cdot \deg\left(\overline{55}\right)\right)$$
$$\cdot (\deg(\overline{44}) \cdot \deg(\overline{66})) \cdot \left(\deg\left(\overline{55}\right) \cdot \deg(\overline{66})\right)$$

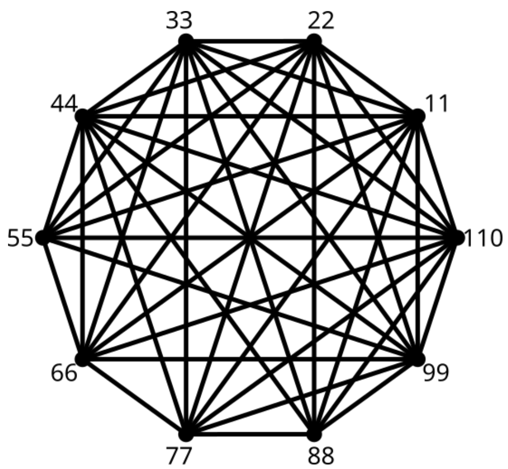
$$\overline{M_2}\left(AG(\mathbb{Z}_{77})\right) = (6 \cdot 6)^{45} \cdot (10 \cdot 10)^{15} = 6^{90} \cdot 10^{30}$$

4.1.15 Indeks Narumi-Katayama dan Zagreb Perkalian pada Graf Annihilator $\mathbb{Z}_{121}$

Berdasarkan pengamatan hasil penentuan pembagi nol di $\mathbb{Z}_{35}$ dengan menggunakan bahasa pemrograman python (lihat Lampiran 1) diperoleh himpunan pembagi nol di $\mathbb{Z}_{121}$ adalah $Z(\mathbb{Z}_{121}) = \left\{\overline{11}, \overline{22}, \overline{33}, \overline{44}, \overline{55}, \overline{66}, \overline{77}, \overline{88}, \overline{99}, \overline{110}\right\}$ dimana semua elemennya merupakan simpul graf annihilator ring $\mathbb{Z}_{121}$ dengan annihilator dari setiap simpul sebagai berikut, $ann(\overline{11}) = ann(\overline{22}) = ann(\overline{33}) = ann(\overline{44}) = ann\left(\overline{55}\right) = ann(\overline{66}) = ann(\overline{77}) = ann(\overline{88}) = ann(\overline{99}) = ann(\overline{110}) = \left\{\overline{0}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{33}, \overline{44}, \overline{55}, \overline{66}, \overline{77}, \overline{88}, \overline{99}, \overline{110}\right\}$.

Selain itu, diperoleh juga himpunan sisi graf annihilator ring $\mathbb{Z}_{121}$ diperoleh $E\left(AG(\mathbb{Z}_{121})\right)$ ={($\overline{11}$,$\overline{22}$), ($\overline{33}$,$\overline{11}$), ($\overline{11}$,$\overline{44}$), ($\overline{11}$, $\overline{55}$), ($\overline{66}$, $\overline{11}$), ($\overline{11}$,

$\overline{77})$, $(\overline{88}, \overline{11})$, $(\overline{99},\overline{11})$, $(\overline{11},\overline{110})$, $(\overline{33},\overline{22})$, $(\overline{44},\overline{22})$, $(\overline{22},\overline{55})$, $(\overline{66},\overline{22})$, $(\overline{77},\overline{22})$, $(\overline{88},\overline{22})$, $(\overline{99},\overline{22})$, $(\overline{110},\overline{22})$, $(\overline{33},\overline{44})$, $(\overline{33},\overline{55})$, $(\overline{33},\overline{66})$, $(\overline{33},\overline{77})$, $(\overline{88}, \overline{33})$, $(\overline{33},\overline{99})$, $(\overline{33},\overline{110})$, $(\overline{44},\overline{55})$, $(\overline{66},\overline{44})$, $(\overline{44},\overline{77})$, $(\overline{88},44)$, $(\overline{99},\overline{44})$, $(\overline{44},\overline{110})$, $(\overline{66},\overline{55})$, $(77,\overline{55})$, $(\overline{88},\overline{55})$, $(\overline{99},\overline{55})$, $(\overline{110},\overline{55})$, $(\overline{66},\overline{77})$, $(\overline{88},\overline{66})$, $(\overline{66},\overline{99})$, $(66,\overline{110})$, $(\overline{88},\overline{77})$, $(\overline{99},\overline{77})$, $(\overline{77},\overline{110})$, $(\overline{88},\overline{99})$, $(\overline{88},\overline{110})$, $(\overline{99},\overline{110})\}$. Berdasarkan data tersebut dapat dibentuk graf annihilator sebagai berikut:



Gambar 4.15 Graf Annihilator $\mathbb{Z}_{\mathbf{121}}$

Dari Gambar 4.15 diperoleh derajat setiap simpul sebagai berikut, $\deg(\overline{11}) = \deg(\overline{22}) = \deg(\overline{33}) = \deg(\overline{44}) = \deg\left(\overline{55}\right) = \deg(\overline{66}) = \deg(\overline{77}) = \deg(\overline{88}) = \deg(\overline{99}) = \deg(\overline{110}) = 9$. Berdasarkan uraian tersebut diperoleh:

1. Nilai indeks Narumi-Katayama sebagai,

$$NK\big(AG(\mathbb{Z}_{121})\big) = \prod_{u \in V\left(AG(\mathbb{Z}_{121})\right)} \deg(u)$$

$$NK\big(AG(\mathbb{Z}_{121})\big)$$

$$= \deg(\overline{11}) \cdot \deg(\overline{22}) \cdot \deg(\overline{33}) \cdot \deg(\overline{44}) \cdot \deg\left(\overline{55}\right)$$

$$\cdot \deg(\overline{66}) \cdot \deg(\overline{77}) \cdot \deg(\overline{88}) \cdot \deg(\overline{99}) \cdot \deg(\overline{110})$$

$$= 9^{10} = 3486784401$$

2. Nilai indeks Zagreb Perkalian Pertama sebagai,

$$M_1\big(AG(\mathbb{Z}_{121})\big) = \prod_{u \in V\left(AG(\mathbb{Z}_{121})\right)} (\deg(u))^2 = \Big(NK\big(AG(\mathbb{Z}_{121})\big)\Big)^2$$

$$= 12157665459056928801$$

3. Nilai indeks Zagreb Perkalian Kedua sebagai,

$$M_2\big(AG(\mathbb{Z}_{121})\big) = \prod_{(u,v) \in E\left(AG(\mathbb{Z}_{121})\right)} \deg(u) \cdot \deg(v)$$

$$\begin{aligned}
M_2\big(AG(\mathbb{Z}_{121})\big) = {} & (\deg(\overline{11}) \cdot \deg(\overline{22})) \cdot (\deg(\overline{11}) \cdot \deg(\overline{33})) \cdot \\
& (\deg(\overline{11}) \cdot \deg(\overline{44})) \cdot \big(\deg(\overline{11}) \cdot \deg(\overline{55})\big) \cdot \\
& (\deg(\overline{11}) \cdot \deg(\overline{66})) \cdot (\deg(\overline{11}) \cdot \deg(\overline{77})) \cdot \\
& (\deg(\overline{11}) \cdot \deg(\overline{88})) \cdot (\deg(\overline{11}) \cdot \deg(\overline{99})) \cdot \\
& (\deg(\overline{11}) \cdot \deg(\overline{110})) \cdot (\deg(\overline{22}) \cdot \deg(\overline{33})) \cdot \\
& (\deg(\overline{22}) \cdot \deg(\overline{44})) \cdot \big(\deg(\overline{22}) \cdot \deg(\overline{55})\big) \cdot \\
& (\deg(\overline{22}) \cdot \deg(\overline{66})) \cdot (\deg(\overline{22}) \cdot \deg(\overline{77})) \cdot \\
& (\deg(\overline{22}) \cdot \deg(\overline{88})) \cdot (\deg(\overline{22}) \cdot \deg(\overline{99})) \cdot \\
& (\deg(\overline{22}) \cdot \deg(\overline{110})) \cdot (\deg(\overline{33}) \cdot \deg(\overline{44})) \cdot \\
& \big(\deg(\overline{33}) \cdot \deg(\overline{55})\big) \cdot (\deg(\overline{33}) \cdot \deg(\overline{66})) \cdot \\
& (\deg(\overline{33}) \cdot \deg(\overline{77})) \cdot (\deg(\overline{33}) \cdot \deg(\overline{88})) \cdot \\
& (\deg(\overline{33}) \cdot \deg(\overline{99})) \cdot (\deg(\overline{33}) \cdot \deg(\overline{110})) \cdot \\
& \big(\deg(\overline{44}) \cdot \deg(\overline{55})\big) \cdot (\deg(\overline{44}) \cdot \deg(\overline{66})) \cdot \\
& (\deg(\overline{44}) \cdot \deg(\overline{77})) \cdot (\deg(\overline{44}) \cdot \deg(\overline{88})) \cdot \\
& (\deg(\overline{44}) \cdot \deg(\overline{99})) \cdot (\deg(\overline{44}) \cdot \deg(\overline{110})) \cdot \\
& \big(\deg(\overline{55}) \cdot \deg(\overline{66})\big) \cdot \big(\deg(\overline{55}) \cdot \deg(\overline{77})\big) \cdot \\
& \big(\deg(\overline{55}) \cdot \deg(\overline{88})\big) \cdot \big(\deg(\overline{55}) \cdot \deg(\overline{99})\big) \cdot
\end{aligned}$$

$$\left(\deg(\overline{55}) \cdot \deg(\overline{110})\right) \cdot (\deg(\overline{66}) \cdot \deg(\overline{77})) \cdot$$

$$(\deg(\overline{66}) \cdot \deg(\overline{88})) \cdot (\deg(\overline{66}) \cdot \deg(\overline{99})) \cdot$$

$$(\deg(\overline{66}) \cdot \deg(\overline{110})) \cdot (\deg(\overline{77}) \cdot \deg(\overline{88})) \cdot$$

$$(\deg(\overline{77}) \cdot \deg(\overline{99})) \cdot (\deg(\overline{77}) \cdot \deg(\overline{110})) \cdot$$

$$(\deg(\overline{88}) \cdot \deg(\overline{99})) \cdot (\deg(\overline{88}) \cdot \deg(\overline{110})) \cdot$$

$$(\deg(\overline{99}) \cdot \deg(\overline{110}))$$

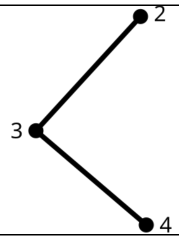
$$M_2\left(AG(\mathbb{Z}_{121})\right) = (9 \cdot 9)^{45} = 9^{90}$$

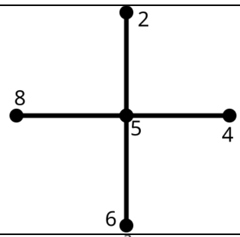
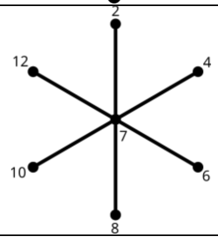
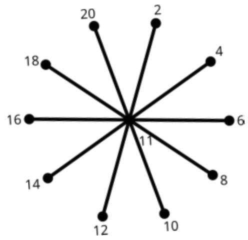
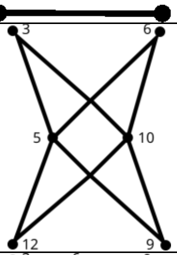
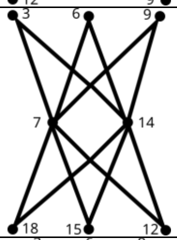
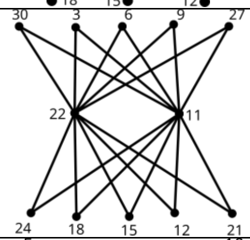
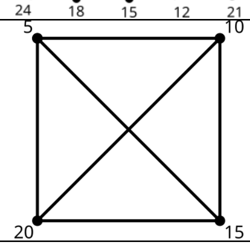
4. Nilai koindeks Zagreb Perkalian Kedua sebagai, $\overline{M_2}\left(AG(\mathbb{Z}_{121})\right) = \prod_{(u,v)\notin E\left(AG(\mathbb{Z}_{121})\right)} \deg(u) \cdot \deg(v) = 0$ karena semua simpul terhubung langsung dengan semua simpul yang berbeda.

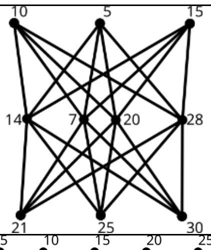
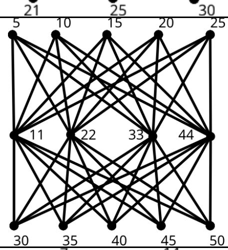
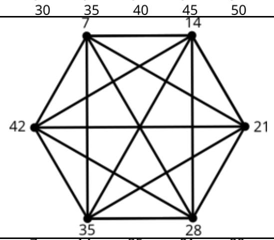
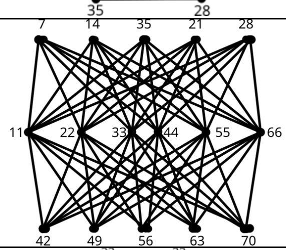
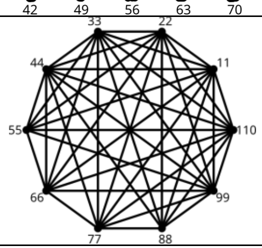
4.1.16 Tabulasi Data Indeks Narumi-Katayama dan Zagreb Perkalian pada Graf Annihilator $\mathbb{Z}_{pq}$, dengan $p, q \in \{2, 3, 5, 7, 11\}$

Berdasarkan perhitungan diatas, diperoleh data yang berkaitan dengan graf annihilator $\mathbb{Z}_{pq}$ dan Indeks Narumi-Katayama dan Zagreb Perkalian pada graf annihilator $\mathbb{Z}_{pq}$ dengan $p, q \in \{2,3,5,7,11\}$, sebagai berikut:

Tabel 4.9 Tabulasi Data 1

p	q	$AG(\mathbb{Z}_{pq})$
2	2	
2	3	

2	5	
2	7	
2	11	
3	3	
3	5	
3	7	
3	11	
5	5	

5	7	
5	11	
7	7	
7	11	
11	11	

Tabel 4.10 Tabulasi Data 2

p	q	$NK(AG(\mathbb{Z}_{pq}))$	$M_1\ (AG(Z_{pq}))$	$M_2\ (AG(Z_{pq}))$	$\bar{M}_2\ (AG(Z_{pq}))$
2	2	0	0	0	0
2	3	2	2^2	4	1
2	5	4	4^2	4^4	1
2	7	6	6^2	6^6	1
2	11	10	10^2	10^{10}	1
3	3	1	1	1	0
3	5	$2^4 \cdot 4^2$	$2^8 \cdot 4^4$	8^8	$2^{12} \cdot 4^2$
3	7	$2^6 \cdot 6^2$	$2^{12} \cdot 6^8$	12^{12}	$2^{30} \cdot 6^2$
3	11	$2^{10} \cdot 10^2$	$2^{20} \cdot 10^4$	20^{20}	$2^{90} \cdot 10^2$
5	5	3^4	3^8	3^{12}	0
5	7	$4^6 \cdot 6^4$	$4^{12} \cdot 6^8$	24^{24}	$4^{30} \cdot 6^{12}$
5	11	$4^{10} \cdot 10^4$	$4^{20} \cdot 10^8$	40^{40}	$4^{90} \cdot 10^{12}$
7	7	5^6	5^{12}	5^{30}	0
7	11	$6^{10} \cdot 10^6$	$6^{20} \cdot 10^{12}$	60^{60}	$6^{90} \cdot 10^{30}$
11	11	9^{10}	9^{20}	9^{90}	0

Dari Tabel 4.9 dan Tabel 4.10, diperolehs dugaan rumus umum tentang graf annihilator ring bilangan bulat modulo pq dengan p, q bilangan prima yang mendukung pembuktian rumus indeks Narumi-Katayama, indeks Zagreb Perkalian Pertama, indeks Zagreb Perkalian Kedua, dan koindeks Zagreb Perkalian Kedua pada graf annihilator ring bilangan bulat modulo pq dengan p, q bilangan prima. Dugaan tersebut akan dijelaskan pada subbab selanjutnya.

4.2 Lemma Pendukung

Pada subbab ini, akan dijelaskan mengenai enam lemma yang dapat digunakan untuk mendukung pembuktian rumus umum dari indeks Narumi-Katayama, indeks Zagreb Perkalian Pertama, indeks Zagreb Perkalian Kedua, dan koindeks Zagreb Perkalian Kedua pada graf annihilator ring bilangan bulat modulo pq dengan p, q bilangan prima. Enam lemma pendukung akan disajikan sebagai berikut:

Lemma 4.1

Misalkan p, q merupakan bilangan prima maka $Z(\mathbb{Z}_{pq}) = \{np|\ n = 1,2,3, \dots, q-1\} \cup \{mq|m = 1,2,3, \dots, p-1\}$.

Bukti:

Pertama, akan dibuktikan bahwa $\{np|\ n = 1,2,3, \dots, q-1\} \cup \{mq|m = 1,2,3, \dots, p-1\} \subseteq Z(\mathbb{Z}_{pq})$ dengan p, q bilangan prima. Perhatikan bahwa $np \cdot q = n \cdot pq \equiv 0\ (mod\ pq)$ untuk setiap $n = 1,2,3 \dots, q-1$ dan $mq \cdot p = m \cdot qp = m \cdot pq \equiv 0\ (mod\ pq)$. Jadi terbukti bahwa $\{np|\ n = 1,2,3, \dots, q-1\} \cup \{mq|m = 1,2,3, \dots, p-1\} \subseteq Z(\mathbb{Z}_{pq})$.

Kedua, akan dibuktikan bahwa $\{np|\ n = 1,2,3, \dots, q-1\} \cup \{mq|m = 1,2,3, \dots, p-1\} \supseteq Z(\mathbb{Z}_{pq})$. Misal $\{np|\ n = 1,2,3, \dots, q-1\} \cup \{mq|m = 1,2,3, \dots, p-1\} \not\supseteq Z(\mathbb{Z}_{pq})$, maka ada $u \in \mathbb{Z}_{pq}$ namun $u \notin \{np|\ n = 1,2,3, \dots, q-1\} \cup \{mq|m = 1,2,3, \dots, p-1\}$ sedemikian sehingga $x \cdot u \equiv 0\ (mod\ pq)$ untuk semua $x \in \mathbb{Z}$. Namun, diketahui bahwa $FPB(u, pq) = 1$ dimana $u \notin \{np|\ n = 1,2,3, \dots, q-1\} \cup \{mq|m = 1,2,3, \dots, p-1\}$, maka berdasarkan Teorema 2.1, x hanya memiliki solusi tunggal yaitu 0. Akibatnya $u \notin Z(\mathbb{Z}_{pq})$. Sehingga pengandaian salah. Jadi $\{np|\ n = 1,2,3, \dots, q-1\} \cup \{mq|m = 1,2,3, \dots, p-1\} \supseteq Z(\mathbb{Z}_{pq})$.

Karena $\{np|\ n = 1,2,3, \dots, q-1\} \cup \{mq|m = 1,2,3, \dots, p-1\} \subseteq Z(\mathbb{Z}_{pq})$ dan $\{np|\ n = 1,2,3, \dots, q-1\} \cup \{mq|m = 1,2,3, \dots, p-1\} \supseteq Z(\mathbb{Z}_{pq})$, dapat disimpulkan $Z(\mathbb{Z}_{pq}) = \{np|\ n = 1,2,3, \dots, q-1\} \cup \{mq|m = 1,2,3, \dots, p-1\}$.

Lemma 4.2

Misal p, q bilangan prima. Untuk setiap $u \in \mathbb{Z}_{pq}$ berlaku

$$ann(u) = \begin{cases} \{mq |\ m = 0,1,2,3, \dots, p-1\}, u = np \\ \{np |\ n = 0,1,2,3 \dots, q-1\}, u = mq \end{cases}$$

dengan $n = 1,2,3, \dots, q-1$ dan $m = 1,2,3, \dots, p-1$.

Bukti:

Pertama, jika $u = np$ dengan $n = 1,2,3, \dots, q-1$, maka $ann(u) = \{mq |\ m = 0,1,2,3, \dots p-1\}$. Perhatikan bahwa $FPB(u, pq) = p$, sehingga berlaku $p \cdot x \equiv 0\ (mod\ pq)$ memiliki sebanyak p solusi. Kemudian yang memenuhi solusi tersebut adalah mq dimana $m = 0,1,2,3, \dots, p-1$.

Kedua, jika $u = mq$ dengan $m = 1,2, \dots, p-1$, maka $ann(u) = \{np | n = 0,1,2,3 \dots, q-1\}$. Perhatikan bahwa $FPB(u, pq) = q$, sehingga berlaku $q \cdot x \equiv 0\ (mod\ pq)$ memiliki sebanyak q solusi. Kemudian yang memenuhi solusi tersebut adalah np dengan $n = 0,1,2,3, \dots, q-1$. Jadi diperoleh

$$ann(u) = \begin{cases} \{mq |\ m = 0,1,2,3, \dots, p-1\}, u = np \\ \{np |\ n = 0,1,2,3, \dots, q-1\}, u = mq \end{cases}$$

Lemma 4.3

Misal u, v simpul berbeda di $AG(\mathbb{Z}_{pq})$ dengan p, q bilangan prima berbeda, maka $v = np$ hanya akan terhubung langsung dengan $u = mq$ dengan $n = 1,2,3 \dots, q-1$ dan $m = 1,2,3, \dots, p-1$.

Bukti:

Pertama, akan dibuktikan np terhubung langsung dengan mq dengan $n = 1,2,3 \dots, q-1$ dan $m = 1,2,3, \dots, p-1$. Berdasarkan Lemma 4.2, diketahui $ann(np) = \{mq \mid m = 0,1,2,3, \dots, p-1\}$ dan $ann(mq) = \{np \mid n = 0,1,2,3, \dots, q-1\}$. Perhatikan $ann(np) \cup ann(mq) = \{mq \mid m =$

$0,1,2,3, \dots, p-1\} \cup \{np \mid n = 0,1,2,3, \dots, q-1\}$ dan $ann(np \cdot mq) = ann(0) = \mathbb{Z}_{pq}$. Sehingga $ann(np) \cup ann(mq) \neq ann(np \cdot mq)$. Maka terbukti bahwa np terhubung langsung dengan mq dimana $n = 1,2,3 \dots, q-1$ dan $m = 1,2,3, \dots, p-1$.

Kedua, akan dibuktikan np tidak terhubung langsung dengan mp dengan $n = 1,2,3 \dots, q-1$ dan $m = 1,2,3 \dots, q-1$, $n \neq m$. Berdasarkan Lemma 4.2, diketahui $ann(np) = \{kq \mid k = 0,1,2,3, \dots, q-1\}$ dan $ann(mp) = \{kq \mid k = 0,1,2,3, \dots, p-1\}$. Perhatikan bahwa $ann(np) \cup ann(mp) = \{kq \mid k = 0,1,2, \dots, p-1\}$ dan $ann(np \cdot mp) = ann(nmp \cdot p) = ann(u \cdot p) = \{kq \mid k = 0,1,2,3, \dots, p-1\}$ dengan $u = nmp$. Sehingga $ann(np) \cup ann(mp) = ann(np \cdot mp)$. Maka np tidak terhubung langsung dengan mp dimana $n = 1,2,3 \dots, q-1$ dan $m = 1,2,3 \dots, q-1$, dan $n \neq m$.

Ketiga, akan dibuktikan kq tidak terhubung langsung dengan lq dengan $k = 1,2,3, \dots, p-1$ dan $l = 1,2,3, \dots, p-1$, dan $l \neq m$. Berdasarkan Lemma 4.2, diketahui $ann(kq) = \{np \mid n = 0,1,2,3, \dots, q-1\}$ dan $ann(lq) = \{np \mid n = 0,1,2,3, \dots, q-1\}$. Perhatikan bahwa $ann(kq) \cup ann(lq) = \{np \mid n = 0, 1,2,3, \dots, q-1\}$ dan $ann(kq \cdot lq) = ann(klq \cdot q) = ann(u \cdot q) = \{np \mid n = 0,1,2,3, \dots, q-1\}$ dengan $u = klq$. Sehingga $ann(kq) \cup ann(lq) = ann(kq \cdot lq)$. Maka kq tidak terhubung langsung dengan lq dimana $k = 1,2,3, \dots, p-1$ dan $l = 1,2,3, \dots, p-1$, dan $l \neq m$.

Jadi dapat disimpulkan bahwa u, v simpul berbeda di $AG\left(\mathbb{Z}_{pq}\right)$ dengan p, q bilangan prima berbeda, maka $v = np$ hanya akan terhubung langsung dengan $u = mq$ dengan $n = 1,2,3 \dots, q-1$ dan $m = 1,2,3, \dots, p-1$.

Lemma 4.4

Misal $AG(\mathbb{Z}_{pq})$ adalah graf annihilator pada $\mathbb{Z}_{pq}$ dengan p, q bilangan prima dan $p = q$ maka $AG(\mathbb{Z}_{pq})$ graf lengkap.

Bukti:

Karena $p = q$, maka $\mathbb{Z}_{p^2} = \mathbb{Z}_{pq} = \mathbb{Z}_{q^2}$. Sehingga dalam pembuktian ini akan digunakan $\mathbb{Z}_{p^2}$. Akan dibuktikan bahwa setiap $v \in V\left(AG(\mathbb{Z}_{p^2})\right)$ saling terhubung langsung dimana $V\left(AG(\mathbb{Z}_{p^2})\right)$ adalah himpunan simpul di $AG(\mathbb{Z}_{p^2})$. Perhatikan bahwa $V\left(AG(\mathbb{Z}_{p^2})\right) = \{np \mid n = 1,2,3, \dots q-1\}$, sehingga berdasarkan Lemma 4.2, untuk setiap $v \in V\left(AG(\mathbb{Z}_{p^2})\right), ann(v) = \{mq \mid m = 0,1,2,3, \dots, p-1\}$. Misal $u, v \in V\left(AG(\mathbb{Z}_{p^2})\right)$ dengan u, v simpul berbeda. Perhatikan bahwa $ann(u) \cup ann(v) = \{mq \mid m = 0,1,2,3, \dots, p-1\}$ dan $ann(u \cdot v) = ann(np \cdot mp) = ann(nm \cdot p^2) = ann(0) = \mathbb{Z}_{p^2}$. Sehingga $ann(u) \cup ann(v) \neq ann(u \cdot v)$. Akibatnya setiap $u \in V\left(AG(\mathbb{Z}_{p^2})\right)$ terhubung langsung dengan setiap $v \in V\left(AG(\mathbb{Z}_{p^2})\right)$ dimana $u \neq v$. Sehingga $AG(\mathbb{Z}_{pq})$ merupakan graf lengkap.

Lemma 4.5

Misal $AG(\mathbb{Z}_{pq})$ adalah graf annihilator pada $\mathbb{Z}_{pq}$, ukuran dari $AG(\mathbb{Z}_{pq})$ adalah

$$\left|E\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right)\right| = \begin{cases} \frac{(p-1)(p-2)}{2}, p = q \\ (p-1)(q-1), p \neq q \end{cases}$$

.

Bukti:

Misal p, q bilangan prima dan $E\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right)$ himpunan sisi di $AG(\mathbb{Z}_{pq})$. Pertama, akan dibuktikan bahwa jika $p = q$, maka $\left|E\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right)\right| = \frac{(p-1)(p-2)}{2}$. Berdasarkan Lemma 4.4, $AG(\mathbb{Z}_{pq})$ merupakan graf lengkap sehingga diperoleh ukuran $AG(\mathbb{Z}_{pq})$ adalah $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$.

Kedua, akan dibuktikan bahwa jika $p \neq q$, maka $\left|E\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right)\right| = (p-1)(q-1)$. Berdasarkan Lemma 4.3, setiap $u, v \in V\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right)$ $u = np$ hanya terhubung langsung dengan $v = mq$ dengan $n = 1,2,3, \dots, q-1$ dan $m = 1,2,3, \dots, p-1$, sehingga diperoleh banyaknya sisi $AG(\mathbb{Z}_{pq})$ adalah $(p-1)(q-1)$.

Lemma 4.6

Misal $AG(\mathbb{Z}_{pq})$ adalah graf annihilator pada $\mathbb{Z}_{pq}$ dimana p, q bilangan prima dan $V\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right)$ adalah himpunan simpul di $AG(\mathbb{Z}_{pq})$, maka derajat $u \in V\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right)$ dengan $p \neq q$ adalah

$$\deg(u) = \begin{cases} p-1, u = np \\ q-1, u = mq \end{cases}$$

dengan $n = 1,2,3 \dots, q-1$ dan $m = 1,2,3, \dots, p-1$, dan derajat $u \in V\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right)$ dengan $p = q$ adalah $\deg(u) = p-2$

Bukti:

Misal $u \in V\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right)$ dimana $V\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right)$ himpunan simpul di $AG(\mathbb{Z}_{pq})$. Pertama, Akan dibuktikan bahwa jika $p = q$, maka

$\deg(u) = p-2$. Berdasarkan Lemma 4.4, $AG(\mathbb{Z}_{pq})$ merupakan graf lengkap. Sehingga diperoleh $\deg(u) = p-1-1 = p-2$.

Kedua, Akan dibuktikan bahwa jika $p \neq q$, maka $\deg(u) = \begin{cases} p-1, u = np \\ q-1, u = mq \end{cases}$. Berdasarkan Lemma 4.3, $u = np \in V\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right)$ dengan $n = 1,2,3,\dots,q-1$ hanya terhubung dengan $v \in V\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right)$ dimana $v = mq$ dengan $m = 1,2,3,\dots,p-1$, sehingga diperoleh

$$\deg(u) = \begin{cases} p-1, u = np \\ q-1, u = mq \end{cases}$$

dengan $n = 1,2,3,\dots q-1$ dan $m = 1,2,3,\dots,p-1$.

4.3 Indeks Narumi-Katayama pada Graf Annihilator Ring Bilangan Bulat Modulo *pq* dengan *p, q* bilangan prima

Pembahasan selanjutnya mengenai rumus dari indeks Narumi-Katayama pada graf annihilator ring bilangan bulat modulo pq dimana p, q merupakan bilangan prima.

Teorema 4.3.1

Misal $AG(\mathbb{Z}_{pq})$ adalah graf annihilator pada ring bilangan bulat dengan p, q bilangan prima. Indeks Narumi Katayama pada $AG(\mathbb{Z}_{pq})$ adalah

$$NK\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right) = \begin{cases} (p-1)^{q-1}(q-1)^{p-1}, p \neq q \\ (p-2)^{p-1}, p = q \end{cases}$$

Bukti:

Berdasarkan definisi $NK\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right) = \prod_{v \in V\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right)} \deg(v)$. Pertama, akan dibuktikan $NK\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right) = (p-2)^{p-1}$ jika $p = q$. Berdasarkan Lemma

4.6, diperoleh $\deg(v) = p - 2$, dengan $v \in V\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right)$ dan berdasarkan Lemma 4.4, diperoleh $\left|V\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right)\right| = p - 1$. Dari fakta di atas diperoleh

$$\begin{aligned} NK\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right) &= \prod_{v \in V\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right)} \deg(v) \\ &= p - 2 \cdot \ldots \cdot p - 2 \\ &= (p-2)^{p-1} \end{aligned}$$

Kedua, akan dibuktikan $NK\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right) = (p-1)^{q-1} \cdot (q-1)^{p-1}$ jika $p \neq q$. Berdasarkan Lemma 4.6, diperoleh $\deg(v) = \begin{cases} p-1, v = np \\ q-1, v = mq \end{cases}$ dengan $n = 1,2,3, \ldots, q-1$ dan $m = 1,2,3, \ldots, p-1$. Berdasarkan Lemma 4.1, diperoleh $Z(\mathbb{Z}_{pq}) = \{\overline{np}, \overline{mq} \mid n = 1,2,3, \ldots, q-1, m = 1,2,3, \ldots, p-1\}$. Jika diperinci, maka $|\overline{np}| = q - 1$ dan $|\overline{mq}| = p - 1$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} NK\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right) &= \prod \deg(v) \\ &= \prod_{v=np} \deg(v) \cdot \prod_{v=mq} \deg(v) \\ &= p - 1 \cdot \ldots \cdot p - 1 \cdot q - 1 \cdot \ldots \cdot q - 1 \\ &= (p-1)^{q-1} \cdot (q-1)^{p-1} \end{aligned}$$

4.4 Indeks Zagreb Perkalian Pertama pada Graf Annihilator Ring Bilangan Bulat Modulo *pq* dengan *p*, *q* bilangan prima

Pembahasan selanjutnya mengenai rumus dari indeks Zagreb Perkalian Pertama pada graf annihilator ring bilangan bulat modulo pq dimana p, q merupakan bilangan prima.

Teorema 4.4.1

Misal $AG(\mathbb{Z}_{pq})$ merupakan graf annihilator ring bilangan bulat modulo pq dengan p, q bilangan prima. Indeks Zagreb Perkalian Pertama atas $AG(\mathbb{Z}_{pq})$ adalah

$$M_1\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right) = \begin{cases} (p-1)^{2q-2}(q-1)^{2p-2}, p \neq q \\ (p-2)^{2p-2}, \qquad p = q \end{cases}$$

Bukti:

Berdasarkan definisi $M_1(G) = \prod_{v \in V(G)} (\deg(v))^2$. Misal u simpul di $AG(\mathbb{Z}_{pq})$. Pertama, akan dibuktikan jika $p = q$, maka $M_1\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right) = (p-2)^{2p-2}$. Berdasarkan Lemma 4.6 diperoleh bahwa $\deg(u) = p - 2$. Berdasarkan Lemma 4.1, order dari $AG(\mathbb{Z}_{pq})$ adalah $p - 1$. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} M_1\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right) &= \prod_{v \in AG(\mathbb{Z}_{pq})} (\deg(v))^2 \\ &= \prod_{1}^{p-1} (p-2)^2 \\ &= (p-2)^2 \cdot \ldots \cdot (p-2)^2 \\ &= ((p-2)^2)^{p-1} = (p-2)^{2(p-1)} \\ &= (p-2)^{2p-2} \end{aligned}$$

Kedua, akan dibuktikan jika $p \neq q$, maka $M_1\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right) = (p-1)^{2q-2}(q-1)^{2p-2}$. Berdasarkan Lemma 4.6, $\deg(u) = (p-1)(q-1)$. Berdasarkan Lemma 4.1, Berdasarkan Lemma 4.1, diperoleh $Z(\mathbb{Z}_{pq}) = \{np, mq \mid n = 1,2,3, \ldots, q-1, m = 1,2,3, \ldots, p-1\}$. Jika diperinci, maka $|\overline{np}| = q - 1$ dan $|\overline{mq}| = p - 1$. Sehingga diperoleh

$$M_1\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right) = \prod_{v\in AG(\mathbb{Z}_{pq})} (\deg(v))^2$$

$$= \prod_{1}^{p-1}(q-1)^2 \cdot \prod_{1}^{q-1}(p-1)^2$$

$$= (p-1)^2 \cdot \ldots \cdot (p-1)^2 \cdot (q-1)^2 \cdot \ldots$$

$$\cdot\, (q-1)^2$$

$$= ((q-1)^2)^{p-1} \cdot ((p-1)^2)^{q-1}$$

$$= (p-1)^{2(q-1)} \cdot (q-1)^{2(p-1)}$$

$$= (p-1)^{2q-2} \cdot (q-1)^{2p-2}$$

4.5 Indeks Zagreb Perkalian Kedua pada Graf Annihilator Ring Bilangan Bulat Modulo *pq* dengan *p, q* bilangan prima

Pembahasan selanjutnya mengenai rumus dari indeks Zagreb Perkalian Kedua atas graf annihilator ring bilangan bulat modulo pq dimana p, q merupakan bilangan prima.

Teorema 4.5.1

Misal $AG(\mathbb{Z}_{pq})$ merupakan graf annihilator ring bilangan bulat modulo pq dengan p, q bilangan prima. Indeks Zagreb Perkalian Kedua atas $AG(\mathbb{Z}_{pq})$ adalah

$$M_2\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right) = \begin{cases} (p-1)(q-1)^{(p-1)(q-1)}, & p \neq q \\ (p-2)^{(p-1)(p-2)}, & p = q \end{cases}$$

Bukti:

Berdasarkan definisi rumus indeks Zagreb Perkalian Kedua sebagai berikut,

$$M_2(G) = \prod_{(u,v)\in V(G)} \deg(u) \cdot \deg(v)$$

Pertama, akan dibuktikan jika $p = q$, maka $M_2\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right) = (p-2)^{(p-1)(p-2)}$. Perhatikan bahwa berdasarkan Lemma 4.4, $AG(\mathbb{Z}_{pq})$ merupakan graf lengkap. Berdasarkan Lemma 4.6 $\deg(u) = p-2$. Berdasarkan Lemma 4.5 ukuran dari $AG(\mathbb{Z}_{pq})$ adalah $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$ sehingga diperoleh

$$M_2\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right) = \prod_{(u,v)\in V\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right)} \deg(u) \cdot \deg(v)$$

$$= \prod_{(u,v)\in E\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right)} (p-2 \cdot p-2) \cdot \ldots$$

$$\cdot (p-2 \cdot p-2)$$

$$= (p-2)^2 \cdot \ldots \cdot (p-2)^2$$

$$= (p-2)^{2\left(\frac{(p-1)(p-2)}{2}\right)}$$

$$= (p-2)^{(p-1)(p-2)}$$

Kedua, akan dibuktikan jika $p \neq q$, maka $M_2\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right) = \left((p-1) \cdot (q-1)\right)^{(p-1)(q-1)}$. Perhatikan bahwa, berdasarkan Lemma 4.6, $\deg(u) = \begin{cases} p-1, & \text{jika } u = np \\ q-1, & \text{jika } u = mq \end{cases}$ dengan $n = 1,2,3 \ldots, q-1$ dan $m = 1,2,3, \ldots, p-1$. Berdasarkan Lemma 4.3, $u, v \in V\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right)$ dimana $u = np$ hanya akan terhubung langsung dengan v jika $v = mq$ dengan $n = 1,2,3 \ldots, q-1$ dan $m = 1,2,3, \ldots, p-1$ dan berdasarkan Lemma 4.5, diketahui bahwa $\left|E\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right)\right| = (p-1)(q-1)$ sehingga diperoleh

$$M_2\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right) = \prod_{(u,v)\in V\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right)} \deg(u)\ \cdot \deg(v)$$

$$= \prod_{(u,v)\in E\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right)} (p-1\cdot q-1)\cdot \ldots \cdot (p-1\ \cdot q-1)$$

$$= \left((p-1)\cdot(q-1)\right)\cdot \ldots \cdot \left((p-1)\cdot(q-1)\right)$$

$$= \left((p-1)\cdot(q-1)\right)^{(p-1)(q-1)}$$

4.6 Koindeks Zagreb Perkalian Kedua pada Graf Annihilator Ring Bilangan Bulat Modulo *pq* dengan *p, q* bilangan prima

Pembahasan selanjutnya mengenai rumus dari indeks Zagreb Perkalian Kedua atas graf annihilator ring bilangan bulat modulo pq dimana p, q merupakan bilangan prima.

Teorema 4.6.1

Misal $AG(\mathbb{Z}_{pq})$ merupakan graf annihilator ring bilangan bulat modulo pq dengan p, q bilangan prima. Koindeks Zagreb Perkalian Kedua atas $AG(\mathbb{Z}_{pq})$ adalah

$$\bar{M}_2\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right) = \begin{cases}(p-1)^{(q-1)(q-2)}\cdot(q-1)^{(p-1)(p-2)}, & p\neq q\\ 0, & p=q\end{cases}$$

Bukti:

Berdasarkan definisi

$$\overline{M_2}(G) = \prod_{(u,v)\notin E(G)} \deg(u)\cdot\deg(v)$$

Pertama, jika $p = q$, maka $\bar{M}_2\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right) = 0$. Berdasarkan Lemma 4.4, $AG(\mathbb{Z}_{pq})$ merupakan graf lengkap yang semua simpulnya terhubung ke setiap simpul yang berbeda sehingga tidak ada simpul yang tidak terhubung langsung. Jadi $\overline{M}_2\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right) = 0$.

Kedua, jika $p \neq q$. Berdasarkan Lemma 4.3, diperoleh $u, v \in V\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right)$ sehingga u, v tak terhubung langsung jika $u = np$ dan $v = kp$ atau $u = mq$ dan $v = lq$ dengan $n = k = 1,2,3 \dots, q-1$ dan $m = l = 1,2,3, \dots, p-1$. Misal $\bar{E}_{np}$ adalah himpunan pasangan simpul yang tak terhubung kelipatan p dan $\bar{E}_{mq}$ adalah himpunan pasangan simpul yang tak terhubung kelipatan q, maka $\left|\bar{E}_{np}\right| = \binom{q-1}{2} = \frac{(q-1)!}{2!(q-3)!} = \frac{(q-1)(q-2)}{2}$, dan $\left|\bar{E}_{mq}\right| = \binom{p-1}{2} = \frac{(p-1)!}{2!(p-3)!} = \frac{(p-1)(p-2)}{2}$. Berdasarkan Lemma 4.6, diketahui $\deg(u) = \begin{cases} p-1, u = np \\ q-1, u = mq \end{cases}$ dengan $n = 1,2,3, \dots, q-1$ dan $m = 1,2,3, \dots, p-1$. Dari fakta tersebut, diperoleh

$$\begin{aligned}
\overline{M}_2\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right) &= \prod_{(u,v)\notin E\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right)} \deg(u) \cdot \deg(v) \\
&= \prod_{u,v \in \bar{E}_{np}} \deg(u) \cdot \deg(v) \cdot \prod_{u,v \in \bar{E}_{mp}} \deg(u) \cdot \deg(v) \\
&= \left((p-1) \cdot (p-1)\right) \cdot \dots \cdot \left((p-1) \cdot (p-1)\right) \\
&\quad \cdot \left((q-1) \cdot (q-1)\right) \cdot \dots \cdot \left((q-1) \cdot (q-1)\right) \\
&= (p-1)^2 \cdot \dots (p-1)^2 \cdot (q-1)^2 \cdot \dots (q-1)^2 \\
&= (p-1)^{2 \cdot \frac{(q-1)(q-2)}{2}} \cdot (q-1)^{2 \cdot \frac{(p-1)(p-2)}{2}} \\
&= (p-1)^{(q-1)(q-2)} \cdot (q-1)^{(p-1)(p-2)}
\end{aligned}$$

4.7 Kajian Keislaman dengan Hasil Penelitian

Dalam surah Al-Qomar ayat 49 Allah berfirman (Lajnah Pentashihan Mushaf Al-Quran, 2019):

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: "Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran".

Ayat tersebut menunjukkan bahwa Allah SWT menciptakan segala sesuatu di dunia ini dengan penuh perhitungan. Allah tidak asal cipta tanpa memperhitungkan kegunaan dan fungsinya dalam kehidupan di dunia ini (Shihab, 2000). Semua makhluk sudah ditetapkan baik waktu, keadaan, bahkan ukuran (al-Qurthubi, 2006). Ini juga berarti menunjukkan kesinambungan diantara makhluk-makhluk Allah. Allah tidak hanya memperhitungkan hal-hal yang besar dan tampak oleh mata saja, tapi juga hal-hal kecil yang mata biasa tidak bisa melihatnya. Allah berfirman dalam surah Al-Zalzalah ayat 7-8 (Al-Qur'an dan Terjemahannya, 2019):

فَمَنْ يَعْمَلْ مِثْقَالَ ذَرَّةٍ خَيْرًا يَرَهُ ﴿٧﴾ وَمَنْ يَعْمَلْ مِثْقَالَ ذَرَّةٍ شَرًّا يَرَهُ ﴿٨﴾

Artinya: "Barang siapa yang melakukan kebaikan seberat dzarrah pun, niscaya dia akan melihat (balasan)nya. Dan barangsiapa yang mengerjakan kejahatan sebesar dzarrah pun, niscaya dia akan melihat (balasan)nya pula".

Kata *"dzarrah"* dapat diartikan sebagai sesuatu yang sangat kecil termasuk juga atom (Sabarni, 2014).

Kedua ayat tersebut memiliki korelasi terhadap penelitian ini. Penelitian ini meneliti tentang rumus umum dari indeks Narumi-Katayama dan Zagreb Perkalian pada graf annihilator ring bilangan bulat modulo. Hasil dari penelitian ini berupa rumus umum yang sesuai dengan firman Allah surah Al-Qomar ayat 49 yaitu semua yang ada di dunia ini sudah diperhitungkan oleh Allah sehingga jika ditelaah maka akan ditemukan rumus umum atau aturan tersebut. Sedangkan pada bidang kimia, indeks Narumi-Katayama dan Zagreb berkalian sering digunakan untuk menentukan rumus umum dari suatu molekul yang sesuai dengan surah Al-Zalzalah ayat 7-8 yang menerangkan bahwa Allah juga memperhatikan semua ciptaannya bahkan sampai tingkat atom.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan uraian pada pembahasan, dapat disimpulkan bahwa indeks Narumi-Katayama, indeks Zagreb Perkalian Pertama, indeks Zagreb Perkalian Kedua, dan Koindeks Zagreb Perkalian Kedua pada graf annihilator ring komutatif dengan unsur kesatuan menghasilkan rumus umum sebagai berikut:

1. Indeks Narumi-Katayama (NK) pada graf annihilator ring bilangan bulat modulo pq, dinotasikan $AG(\mathbb{Z}_{pq})$, dengan p, q bilangan prima adalah

$$NK\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right) = \begin{cases} (p-1)^{q-1}(q-1)^{p-1}, p \neq q \\ (p-2)^{p-1}, \quad p = q \end{cases}$$

2. Indeks Zagreb Perkalian Pertama (M_1) pada graf annihilator ring bilangan bulat modulo pq, dinotasikan $AG(\mathbb{Z}_{pq})$, dengan p, q bilangan prima adalah

$$M_1\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right) = \begin{cases} (p-1)^{2q-2}(q-1)^{2p-2}, p \neq q \\ (p-2)^{2p-2}, \quad p = q \end{cases}$$

3. Indeks Zagreb Perkalian Kedua (M_2) pada graf annihilator ring bilangan bulat modulo pq, dinotasikan $AG(\mathbb{Z}_{pq})$, dengan p, q bilangan prima adalah

$$M_2\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right) = \begin{cases} (p-1)(q-1)^{(p-1)(q-1)}, p \neq q \\ (p-2)^{(p-1)(p-2)}, \quad p = q \end{cases}$$

4. Koindeks Zagreb Perkalian Kedua $(\overline{M}_2)$ pada graf annihilator ring bilangan bulat modulo pq, dinotasikan $AG(\mathbb{Z}_{pq})$, dengan p, q bilangan prima adalah

$$\overline{M}_2\left(AG(\mathbb{Z}_{pq})\right) = \begin{cases} (p-1)^{(q-1)(q-2)} \cdot (q-1)^{(p-1)(p-2)}, p \neq q \\ 0, \quad p = q \end{cases}$$

5.2 Saran

Penelitian ini hanya dilakukan pada graf annihilator ring bilangan bulat modulo pq dimana p,q merupakan bilangan prima. Indeks topologi yang digunakan merupakan indeks Narumi-Katayama dan Zagreb Perkalian. Peneliti menyarankan untuk mengkaji indeks lain yang berbasis jarak, seperti indeks Schultz dan indeks Weiner.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir, Azizah, N. N., & Nofandika, F. F. (2009). *Teori Graf.* Malang: UIN-Malang Press.

Ahmadi, V., & Darafshe, M. R. (2018). Zagreb, multiplicative zagreb indices and coindices of [nc] _n (k) and [ca] _3 (c_6) graphs. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matem'atica*, 9-15.

Alfuraidan, M. R., Vetrík, T., & Balachandran, S. (2020). General Multiplicative Zagreb Indices of Graphs with a Small Number of Cycles. *Symmetry*, 514.

al-Qurthubi, M. b. (2006). *Tafsir al-Qurthubi.* Beirut: Al-Resalah Publisher.

Atiyah, M. F., & Macdonald, I. G. (2018). *Introduction to Commutative Algebra.* Boca Rato: CRC Press Taylor Francis Group.

Badawi, A. (2014). On the annihilator graph of a commutative ring. *Communications in Algebra*, 108-121.

Cancan, M., Mondal, S., De, N., & Pal, A. (2020). Multiplicative degree based topological indices of some chemical structures in drug. *Proyecciones (Antofagasta)*, 1347-1364.

Cayley, A. (1875). On the theory of the analytical forms called trees. *n the Analytical Forms Called Trees: With Application to the Theory of Chemical Combinations.* Retrieved from http://rcin.org.pl/Content/173708/PDF/WA35_185808_12807-3_art-45.

Chartrand, G., & Zhang, P. (2012). *A First Course in Graph Theory.* New York: Dover.

Chartrand, G., Lesniak, L., & Zhang, P. (2015). *Graphs & Digraphs* (6th ed.). Chapman & Hall/CRC.

D, S. N., Kanna, M. R., & Kumar, R. P. (2016). Narumi-Katayama and Multiplicative Zagreb Indices of Dutch Windmill Graph. *International Journal of Scientific & Engineering Research*, *7*(5), 32-33.

Das, K. C., Akgunes, N., Togan, M., Yurttas, A., Cangul, I. N., & Cevik, A. S. (2016). On the first Zagreb index and multiplicative Zagreb coindices of graphs. *Analele Universitatii" Ovidius" Constanta-Seria Matematica*, 153-176.Dutta, S., & Lanong, C. (2017). On annihilator graph of a finite commutative ring. *Transactions on Combinatorics*, 1-11.

Farkoush, I. G., Alaeiyan, M., & Maghasedi, M. (2020). Computing the Narumi-Katayama indices and its modified version of some nanostar dendrimers. *Eurasian Chemical Communications*, 771-775.

Fournier, J.-C. (2006). *Graph Theory and Applications with Exercises and Problems.* London: ISTE Ltd and John Wiley & Sons, Inc.

Galian, J. (2016). *Contemporary Abstract Algebra.* Boston: Brooks/Cole, Cengage Learning.

Gutman, I. (2011). Multiplicative Zagreb indices of trees. *Bull. Soc. Math. Banja Luka*, 17-23.

Hengki, W., Irawan, & dkk. (2014). *Pengantarr Teori Bilangan.* Malang: UIN Maliki Press.

Kwun, Y. C., Virk, A. U., Nazeer, W., Rehman, M., & Kang, S. M. (2018). On the multiplicative degree-based topological indices of silicon-carbon Si2C3-I [p, q] and Si2C3-II [p, q]. *Symmetry*, 320.

Lajnah Pentashihan Mushaf Al-Quran. (2019). *Al-Qur'an dan Terjemahannya.*

Mahboob, A. a., Jaradat, M. M., Nigar, N., & Siddique, I. (2021). On Some Properties of Multiplicative Topological Indices in Silicon-Carbon. *Journal of Mathematics*, -.

Masoed, F. (2013). *Stuktur Aljabar.* Jakarta Barat: Akademia Permata.

Narumi, H., & Katayama, M. (1984). Simple topological index: a newly devised index characterizing the topological nature of structural isomers of saturated hydrocarbons. *Memoirs of the Faculty of Engineering, Hokkaido University, 16*(3), 209-214.

Nikandish, R., Nikmehr, M., & Bakhtyiari, M. (2016). Coloring of the annihilator graph of a commutative ring. *Journal of Algebra and Its Applications, 15*, 1650124.

Putra, G. L., Ginting, K. B., & Purnamasari, N. (2021). Graf Prima pada RIng. *JURNAL DIFERENSIAL*, 41-49.

Riyanti, B., Kiftah, M., & Fran, F. (2018). Graf Pembagi Nol dan Graf Total pada Kode Genetik. *Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya*, 369-378.

Sabarni. (2014). Atom dan Molekul Berdasarkan Ilmu Kimia dan Perspektif Al-Quran. *Lantanida Journal, II*(2).

Shihab, M. Q. (2000). *Tafsir Al Misbah.* Jakarta: Lentera Hati.

SYLVESTER, J. J. (1878). Chemistry and Algebra. *Nature*, 284.

Todeschini, R., & Consonni, V. (2010). New local vertex invariants and molecular descriptors based on functions of the vertex degrees. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem*, 359-372.

Tomovi'c, Ẑeljko, & Gutman, I. (2001). Narumi-Katayama index of phenylenes. *Journal of the Serbian Chemical Society*, 243-247.

Xu, K. D. (2013). On the multiplicative Zagreb coindex of graphs. *Opuscula Mathematica*, 191-204.

LAMPIRAN

Lampiran 1 Kode pemrograman perhitungan graf annihilator pada ring bilangan bulat modulo

```
class GrafAnnihilator:
    def __init__(self, ring):
        self.ring = ring
    def getNumber(self):
        return int(self.ring.split("_")[-1])
    def zeroDivisor(self):
        return list(set(x for x in range(1, self.getNumber())
                        for j in range(1, self.getNumber()) if x*j
% self.getNumber() == 0))
    def ann(self, x):
        return list(set(r for r in range(self.getNumber()) if x*r
% self.getNumber() == 0 and r != x))
    def getVertex(self):
        return self.zeroDivisor()
    def getEdge(self):
        edge = {(i,j) for i in self.getVertex() for j in
self.getVertex() if i<j and self.union(self.ann(i), self.ann(j))
!= self.ann(i*j)}
        return list(edge)
    def union(self, arr1, arr2):
        return list(set(arr1+arr2))

    def run(self):
        ring = self.ring
        print('---program start---')
        print(f'zero divisor dari {self.ring}\t:\n
{self.zeroDivisor()}')
        print('-----------------------')
        print(f'annihilator dari elemen zero divisor')
        for i in self.zeroDivisor():
            print(f'ann({i})\t:{self.ann(i)}')
        print(f'sisi dari graf annihilator
{self.ring}\t:\n{self.getEdge()}')

g = GrafAnnihilator('Z_25')
g.run()
```

RIWAYAT HIDUP

Dzulfikri Alwi Muhammad lahir di Kediri pada tanggal 27 September 2000 biasa dipanggil Fikri. Tinggal di Dusun Ngampel RT/RW 02/02 Desa Selodono Kecamatan Ringinrejo, Kabupaten Kediri. Anak pertama dari empat bersaudara, putra Burhanudin Al Imron dan Sofiyah.

Penulis telah menempuh pendidikan formal mulai dari RA Kusuma Mulia Ngampel dan lulus tahun 2006. Setelah itu, penulis menempuh pendidikan dasar di MI Hidayatul Ulum Ngampel dan lulus tahun 2012. Selanjutnya penulis menempuh pendidikan menengah di MTs Negeri Kanigoro (MTs Negeri 2 Kab. Kediri) dan lulus pada tahun 2015. Penulis melanjutkan pendidikan menengah atas di SMA Islam Sunan Gunung Jati Ngunut dan lulus pada tahun 2018. Selanjutnya penulis menempuh pendidikan tinggi di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada tahun 2018.

Selain menempuh pendidikan formal, penulis juga meempuh pendidikan non-formal di Pondok Pesantern Hidayatul Mubtadi-ien Ngunut Kab. Tulungagung pada tahun 2015-2018. Kemudian, penulis melanjutkan pendidikan agamanya ke Pondok Pesantren Sabilurrosyad Gasek, Malang.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama	:	Dzulfikri Alwi Muhammad
NIM	:	18610001
Fakultas / Jurusan	:	Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi	:	Indeks Narumi-Katayama dan Zagreb Perkalian pada Graf Annihilator Ring Bilangan Bulat Modulo
Pembimbing I	:	Intan Nisfulaila, M.Si.
Pembimbing II	:	Erna Herawati, M.Pd.

No.	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	15 April 2022	Konsultasi Bab 1	1.
2.	22 April 2022	Konsultasi Bab 1 dan 2	2.
3.	29 April 2022	Konsultasi Bab 1, 2 dan 3	3.
4.	11 Mei 2022	Konsultasi Bab 2	4.
5.	19 Mei 2022	Konsultasi Bab 2 dan 3	5.
6.	31 Mei 2022	Konsultasi Kajian Agama	6.
7.	7 Juni 2022	Konsultasi Kajian Agama	7.
8.	10 Juni 2022	ACC Seminar Proposal	8.
9.	26 September 2022	Konsultasi Bab 4	9.
10.	30 September 2022	Konsultasi Kajian Agama	10.
11.	4 Oktober 2022	Konsultasi Bab 4 dan 5	11.
12.	19 Oktober 2022	Konsultasi Bab 4 dan 5	12.
13.	9 November 2022	Konsultasi Kajian Agama	13.
14.	9 November 2022	ACC Seminar Hasil	14.
15.	29 November 2022	Konsultasi Bab 4 dan 5	15.
16.	1 Desember 2022	Konsultasi Bab 4 dan 5	16.
17.	23 Desember 2022	ACC Sidang Skripsi	17.

Malang, 23 Desember 2022
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005