

**STUDI PERSAMAAN DIRAC VERSI DUAL PADA PARTIKEL
ELEKTRON**

SKRIPSI

Oleh:
LAILUR RIZQY
NIM. 18640023



**PROGRAM STUDI FISIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022**

HALAMAN PENGAJUAN

STUDI PERSAMAAN DIRAC VERSI DUAL PADA PARTIKEL ELEKTRON

SKRIPSI

Diajukan Kepada:

Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana (S.Si)

Oleh:

LAILUR RIZQY
NIM. 18640023

**PROGRAM STUDI FISIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022**

HALAMAN PERSETUJUAN

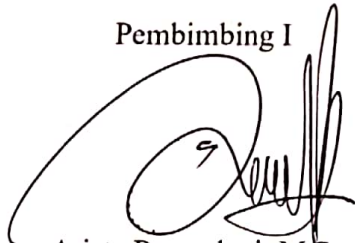
STUDI PERSAMAAN DIRAC VERSI DUAL PADA PARTIKEL ELEKTRON

SKRIPSI

Oleh:
LAILUR RIZQY
NIM. 18640023

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Pada Tanggal, 17 November 2022

Pembimbing I



Arista Romadani, M.Sc
NIP. 19900905 201903 1 018

Pembimbing II



Dr. H. Agus Mulyono, M.Kes
NIP. 19750808 199903 1 003

Mengetahui,
Ketua Program Studi



Dr. Irfan Tazi, M.Si.
NIP. 19740730 200312 1 002

HALAMAN PENGESAHAN

STUDI PERSAMAAN DIRAC VERSI DUAL PADA PARTIKEL ELEKTRON



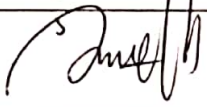

SKRIPSI

Oleh:

LAILUR RIZQY

NIM. 18640023

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 23 November 2022

Penguji Utama	<u>Ahmad Luthfin, S.Si, M.Si</u> NIP. 19860504 201903 1 009	
Ketua Penguji	<u>Muhammad Taufiqi, M.Si</u> NIP. LB. 64021	
Sekretaris Penguji	<u>Arista Romadani, M.Sc</u> NIP. 19900905 201903 1 018	
Anggota Penguji	<u>Dr. H. Agus Mulyono, M.Kes</u> NIP. 19750808 199903 1 003	

Mengesahkan,

Ketua Program Studi



Dr. Imam Tazi, M.Si.

NIP. 19740730 200312 1 002

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Lailur Rizqy

NIM : 18640023

Program Studi : Fisika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Penelitian: Studi Persamaan Dirac Versi Dual pada Partikel Elektron

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa hasil penelitian saya ini tidak terdapat unsur-unsur penjiplakan karya penelitian atau karya ilmiah yang pernah dilakukan atau dibuat oleh orang lain, kecuali yang tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka. Apabila ternyata hasil penelitian ini terbukti terdapat unsur-unsur jiplakan maka saya bersedia untuk menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 12 Desember 2022

Yang Membuat Pernyataan



Lailur Rizqy

NIM. 18640023

MOTTO

وَلَمْ أَكُنْ بِدُعَائِكَ رَبِّ شَقِيًّا

Dan aku belum pernah kecewa dalam berdoa kepada-Mu Ya Tuhanku

Akupun begitu yakin, sebab Rabb-ku sangatlah hebat dalam menentukan takdir. Dan aku begitu percaya bahwa cara Allah mengatur segala urusan hidupku sangatlah sempurna

“Penolakan Doa mu adalah Hakikat Pemberian Allah”

HALAMAN PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah, dan segala puji bagi-Nya, karya ini
Saya persembahkan kepada kedua orang tua Saya

Ayah Drs. H. Saikfu, MM. dan Ibu Hj. Hikmatu Saidah

Yang telah dan tak pernah peduli lelah untuk mengasah, mengasuh,
mendidik, membimbing, mengasihi, menyayangi, menguatkan, dan
senantiasa melangitkan doa dan harapan untuk kebersamaan langkah-
langkah Saya. Serta, kakak tercinta dan ketiga adik Saya

*Sailatur Rohmah, Amd. Keb. , Amita Hidayati, Musfitha Sari, dan Madizatul
Azmi*

Yang selalu memberikan doa, dukungan dan motivasi Saya untuk
terus bertambah dan bertumbuh

KATA PENGANTAR

Bismillah, Alhamdulillah, puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT atas limpahan rahmat, taufik, hidayah, dan ridlo-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul **“Studi Persamaan Dirac Versi Dual pada Partikel Elektron”** ini pada waktunya. Sholawat dan salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW serta keluarga, sahabat, dan para ummatnya sampai kelak hari kiamat.

Terselesaikannya susunan skripsi ini, pastinya tidak lepas dari bantuan dan pertolongan Alloh SWT yang dikirimkan melalui berbagai pihak. Baik pihak yang telah membantu secara langsung maupun tidak langsung. Oleh karena itu, penulis menghaturkan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Dr. Imam Tazi, M.Si selaku Ketua Program Studi Fisika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
2. Arista Romadani, M.Sc selaku dosen di bidang minat Fisika Teori sekaligus dosen pembimbing I yang telah dengan sabar membimbing dan memberi pengarahan kepada penulis sejak mulai menyelami bidang minat teori ini.
3. Muhammad Taufiqi, M.Si selaku dosen di bidang minat Fisika Teori, karena senantiasa meluangkan waktunya untuk memberi pengarahan kepada penulis ketika menemui kebuntuan dan ketidakpahaman tentang sesuatu selama proses penyelesaian tugas akhir ini.
4. Ibu, Ayah, Kakak, dan Adik-adik penulis yang senantiasa memberikan dukungan, semangat, dan doa-doa yang tak pernah putus untuk menemani setiap langkah penulis.
5. Segenap dosen, karyawan, dan alumni keluarga besar Program Studi Fisika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah membantu,

baik memberi saran maupun menjawab pertanyaan-pertanyaan yang sering kali penulis ajukan.

6. Keluarga besar Pondok Pesantren Tahfidz Oemah Al-Quran: Ustadz Abu Samsudin, M.ThI, Dr. Ustadzah Nur Chanifah, M.Pd, beserta keluarga, dan para pengurus pondok masa khidmah 2021/2022 beserta teman seperjuangan dalam memperjuangkan kalam-Nya Allah, yang selalu mendoakan, memberikan dukungan, memberikan semangat, bahkan memberikan banyak sekali saran dan bantuan kepada penulis selama proses penyelesaian skripsi.
7. Rekan-rekan Fisika UIN Malang angkatan 2018, khususnya sahabat-sahabat seperjuangan di Fisika Teori, Fitri, Fira, Trisna, Anis, yang senantiasa memberikan dukungan dan semangat serta menjadi inspirator penulis agar segera menyelesaikan skripsi.
8. Khusus untuk teman hidup saya M. Takjil Kirom, S.Ab. beserta Umik, Abi, dan Adik yang senantiasa menyayangi, mendoakan, serta memberikan dukungan sehingga bisa menyelesaikan skripsi ini dengan sangat penuh semangat.
9. Tak lupa juga sahabat, kerabat, penasihat (guru), kakak tingkat, teman dekat, dan semua malaikat-malaikat yang sayapnya tak terlihat yang namanya tidak dapat penulis sebutkan satu per satu, atas semua doa dan dukungan, ilmu dan pengalaman, serta kenangan dan kenang-kenangan yang telah diberikan.

Semoga Allah SWT memberikan balasan pahala yang tak terhingga, keberkahan yang tiada habisnya, kenikmatan yang berlipat ganda di dunia maupun di akhirat dan dibukakan pintu rahmat untuk menuju surga-Nya. Aamiin.

Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat, tambahan ilmu pengetahuan, dan menjadi inspirasi bagi penulis maupun bagi para pembaca, serta memberikan

kontribusi bagi perkembangan ilmu pengetahuan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan dari para pembaca demi kebaikan tulisan-tulisan selanjutnya.

Malang, 12 Desember 2022

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN PENGAJUAN	ii
HALAMAN PERSETUJUAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	v
MOTTO	vi
HALAMAN PERSEMBAHAN	vii
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	xi
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR TABEL	xiv
DAFTAR LAMPIRAN	xv
ABSTRAK	xvi
ABSTRACT	xvii
ملخص البحث	xviii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah.....	6
1.3 Tujuan Penelitian	6
1.4 Batasan Masalah	6
1.5 Manfaat Penelitian.....	6
BAB II KAJIAN PUSTAKA	7
2.1. Teori Kuantum	7
2.1.1 Waktu Teori Relativitas dalam Kajian Islam	7
2.1.2 Partikel Elektron dalam Kajian Islam	9
2.1.3 Teori Kuantum Nonrelativistik	11
2.1.4 Teori Kuantum Relativistik.....	14
2.2. Teori versi Dual	21
2.2.1 Waktu dalam versi Dual.....	22
2.2.2 Teori Partikel versi Dual	24
2.2.3 Teori Maxwell versi Dual	26
2.3. Teori Kuantum Relativistik Versi Dual.....	27
2.4. Teori Relativitas Partikel Elektron	28
2.4.1 Persamaan Dirac Elektron bebas.....	28
2.4.2 Persamaan Dirac Elektron dalam Medan Elektromagnetik	29
2.4.3 Spin Elektron.....	33
2.5. Momen Magnetik Anomali	37
BAB III PERSAMAAN DIRAC VERSI DUAL	41
3.1. Persamaan Dirac	41

3.2. Transformasi Kanonik Hamiltonian Dirac.....	45
3.3. Hamiltonian Dirac Versi Dual.....	47
3.4. Eigen State Persamaan Dirac versi Dual.....	49
3.5. Persamaan Eigen Value	56
BAB IV MOMEN MAGNETIK ANOMALI PADA PARTIKEL ELEKTRON	58
4.1 Persamaan Dirac Versi Dual Partikel Elektron	58
4.2 Momen Magnetik Elektron.....	69
4.3 Faktor-g partikel elektron	72
4.4 Momen Magnetik Anomali pada Partikel Elektron Versi Dual	77
BAB V PENUTUP	88
5.1 Kesimpulan.....	88
5.2 Saran.....	89
DAFTAR PUSTAKA	90
LAMPIRAN	

DAFTAR GAMBAR

Gambar 3. 1	Penciptaan pasangan partikel-antipartikel dalam tafsiran lautan Dirac	51
Gambar 4. 1	Produksi pasangan foton yang berenergi cukup tinggi menjelma menjadi pasangan elektron positron	59
Gambar 4. 2	a) Momen magnetik sosok arus yang melingkungi bidang seluas A . b) Momen magnetik elektron yang berputar pada suatu orbit yang berputar pada suatu orbi dengan momentum sudutnya L	71
Gambar 4. 3	Dipol kuantum di sekitar muatan listrik, seperti elektron, cenderung berputar dalam satu arah dalam bidang tertentu untuk mencapai keadaan polarisasi yang benar dengan jumlah energi yang dikeluarkan paling sedikit	73
Gambar 4. 4	Peta Konsep momen magnetik anomali pada partikel elektron dengan persamaan Dirac versi Dual.....	84

DAFTAR TABEL

Tabel 4. 1 Tabel perbandingan nilai eksperimen dan teori	81
--	----

DAFTAR LAMPIRAN

- Lampiran A. Batas Non-Relativistik Persamaan Dirac
- Lampiran B. Hamiltonian Dual Dirac
- Lampiran C. Persamaan Slater
- Lampiran D. Momen Magnetik Anomali dengan QED

ABSTRAK

Rizqy, Lailur, 2022. **Studi Persamaan Dirac Versi Dual pada Partikel Elektron.** Skripsi. Program Studi Fisika, Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing (I) Arista Romadani, M.Sc, (II) Dr. H. Agus Mulyono, M.Kes.

Kata Kunci: Persamaan Dirac versi Dual, Momen Magnetik Anomali, Elektron.

Nilai momen magnetik anomali partikel elektron dapat diturunkan secara teoritis dengan menggunakan persamaan Dirac versi dual dengan nilai yang mendekati hasil eksperimen. Oleh karena itu, dilakukan penelitian pada persamaan Dirac versi dual dengan menentukan *eigen-state* dan *eigen-value* sehingga didapatkan nilai momen magnetic anomali pada partikel elektron. Kajian teoritik ini mengkaji tentang persamaan Dirac versi dual dengan mendefinisikan waktu dalam versi dualnya, dilakukan secara analitik dengan menentukan persamaan gelombang persamaan Dirac versi dual sehingga didapatkan *eigen-value* dan *eigen-state*. Persamaan *eigen value* yang masih general dilakukan pemisahan antara partikel dan anti-partikel sehingga didapatkan *eigen-value* untuk partikel Elektron. Dari hasil perhitungan tersebut diperoleh bahwa sebagian dari suku *eigen-value* persamaan Dirac versi dual tersebut dapat dirumuskan faktor-g dan momen magnetik anomali partikel elektron. Dengan nilai faktor-g dari persamaan dirac tepat 2, persamaan dirac versi dualnya bernilai -2.00057148136154, dan hasil eksperimen -2.00231930436256. Sehingga dapat disimpulkan persamaan dirac versi dual lebih mendekati eksperimen. Faktor-g sendiri berperan penting pada pembentukan citra MRI (*Magnetik Resonance Imaging*), kecepatan/frekuensi presisi atom hidrogen tergantung pada kuat medan magnet yang diberikan pada jaringan dan nilai faktor-g dari atom. Semakin besar kuat medan magnet dan nilai faktor-g maka semakin cepat presisi proton.

ABSTRACT

Rizqy, Lailur, 2022. **Study of the Dual Version of the Dirac Equation on Electron Particles.** Thesis. Physics Study Program, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisor (I) Arista Romadani, M.Sc, (II) Dr. H. Agus Mulyono, M.Kes.

Keywords: Dual version of the Dirac Equation, Anomaly Magnetic Moment, Electron.

The value of the anomalous magnetic moment of the electron particle can be derived theoretically by using the dual version of the Dirac equation with a value close to the experimental results. Therefore, a study was carried out on the dual version of the Dirac equation by determining the eigen-state and eigen-value in order to obtain the anomalous magnetic moment values for the electron particles. This theoretical study examines the dual version of the Dirac equation by defining time in its dual version, carried out analytically by determining the wave equation of the dual version of the Dirac equation so that eigen-values and eigen-states are obtained. The eigenvalue equation, which is still general, is separated between particles and anti-particles in order to obtain the eigen-value for the electron particle. From the results of these calculation it is found that some of the eigen-value terms of the dual version of the Dirac equation can be formulated for the g-factor and the magnetic moment anomaly of the electron particle. With the g-factor value of the dirac equation exactly 2, the dual version of the dirac equation is -2.00057148136154, and the experimental result is -2.00231930436256. So, it can be concluded that the dual version of the dirac equation is closer to the experiment. The g-factor itself plays an important role in the formation of MRI (Magnetic Resonance Imaging) images, the precision speed/frequency of the hydrogen atom depends on the strength of the magnetic field applied to the tissue and the value of the g-factor of the atom. The greater the magnetic field strength and the g-factor value, the faster the proton precision.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pada akhir abad ke 19 dan awal abad ke 20, semakin jelas bahwa konsep-konsep fisika memerlukan revisi atau penyempurnaan. Hal ini disebabkan semakin banyaknya hasil-hasil eksperimen dan gejala-gejala fisika yang teramati yang tidak bisa dijelaskan dengan konsep-konsep fisika klasik yang telah dikuasai pada saat itu, sekalipun dengan pendekatan. Masalah-masalah yang dimaksud di atas muncul terutama pada obyek-obyek fisis yang berukuran mikroskopik, seperti partikel-partikel elementer dan atom serta interaksinya dengan radiasi atau medan elektromagnetik. Perbedaan-perbedaan dalam eksperimen fisika mula-mula dapat diatasi dengan postulat-postulat dan hipotesis-hipotesis. Namun karena jumlahnya semakin banyak dan persoalannya dipandang mendasar, menuntut dan mendorong fisikawan untuk melakukan penyempurnaan, dan bila perlu perubahan pada formulasi dan konsep-konsep fisika. Hasilnya adalah konsep yang dinamakan "Mekanika Kuantum" (Yosi, 2022).

Mekanika relativistik adalah ilmu yang mempelajari gerak benda yang kecepatan relatifnya mendekati kecepatan cahaya, atau yang energi kinetiknya sebanding dengan produk massa m dan kuadrat kecepatan cahaya, atau mc^2 . Benda-benda seperti itu dikatakan relativistik, dan ketika gerakannya dipelajari, penting untuk memperhitungkan gerak Einstein atau teori relativitas khusus. Partikel relativistik sendiri merupakan partikel yang bergerak dengan kecepatan relativistik, yaitu kecepatan yang sebanding dengan kecepatan cahaya. Hal ini dicapai oleh foton sejauh efek yang dijelaskan oleh teori relativitas

khusus mampu menggambarkan efek partikel itu sendiri. Beberapa pendekatan ada sebagai sarana untuk menggambarkan gerakan partikel relativistik tunggal dan ganda, dengan contoh yang menonjol adalah postulat melalui persamaan Dirac dari gerakan partikel tunggal (Gibbons, 2021).

Partikel berdasarkan nilai spin dibagi menjadi dua, yaitu partikel dasar fermion yang memiliki spin setengah bulat, dan partikel dasar boson memiliki spin bulat. Pada partikel dasar fermion dibagi menjadi dua, yaitu quark dan lepton. Adapun lepton terdiri dari neutrino, elektron, tau, pion, tanon, dan muon (Rizqiyah, 2013). Elektron merupakan partikel elementer yang memiliki spin $\frac{1}{2}$. Titik awal menemukan pembenaran yang tepat untuk spin elektron adalah persamaan Dirac, yang akan diperoleh dengan linearisasi dari generalisasi relativistik dari persamaan Schrödinger (Nolting, 2017).

Persamaan Dirac merupakan persamaan gelombang relativistik yang merumuskan solusi dari salah satu kasus yang ditelaah dalam mekanika kuantum. yang menggambarkan gerakan partikel relativistik bermuatan yang dipengaruhi medan elektromagnetik eksternal memberikan dasar untuk mekanika kuantum relativistik dan elektrodinamika kuantum (QED), serta kemungkinan perluasannya yang meliputi bidang lain dan antar tindakan, atau dimensi ruang-waktu lainnya baik di dalam maupun di luar teori Lorentz-invarian dan lokal (Bagrov, 2010). Fenomena fisika akan lebih menarik apabila partikel bergerak dalam suatu sistem yang dipengaruhi medan atau dalam kondisi yang lebih kompleks, semisal sistem beberapa partikel dimana ada interaksi antar partikel dan sistem yang mendapat pengaruh medan elektromagnetik eksternal. Persamaan Dirac mengalami modifikasi akibat pengaruh medan elektromagnetik yang dihadirkan dan pendekatan matriks

telah diaplikasikan untuk mendapatkan representasi energi dan spinor eigennya (Romadani, 2019).

Dalam teori mekanika kuantum relativistiknya, Paul Dirac meramalkan bahwa faktor-g partikel spin-1/2 elementer, seperti elektron, adalah tepat dua. Faktor-g muncul sebagai faktor *fudge* yang diperlukan saat menghitung momen magnetik elektron. Dalam pemodelan awal momen magnetik elektron, fisikawan menganggap elektron sebagai permukaan bola yang berputar dari muatan dan menghitung momen magnetik secara tepat. Apa yang mereka sadari adalah bahwa momen magnet elektron sedikit lebih dari dua kali lipat dari yang diharapkan berdasarkan model sederhana ini. Pada awal munculnya persamaan Dirac masih belum dikenal istilah momen magnetik anomali dan nilainya dianggap nol. Akan tetapi pada tahun 1947 penyimpangan kecil terlihat dalam struktur *hyperfine* hidrogen dan deuterium. Pada tahun 1948 Julian Schwinger menghitung bahwa dalam elektrodinamika kuantum (QED), fluktuasi menyebabkan perubahan kecil pada faktor-g. Faktor-g elektron yang diturunkan dari teori Dirac tepat merupakan bilangan bulat dua, dan perbedaan antara nilai factor-g terukur secara eksperimen dan nilai 2 dari persamaan Dirac tersebut disebut momen magnetik anomali, $a = \frac{g-2}{2} = a/(2\pi)$, di mana $a \approx 1/137$ adalah konstanta struktur halus (Teubner, 2018).

Teori relativitas khusus Einstein dan teori medan Maxwell memiliki versi dual yang setara secara matematis. Dual disini merupakan dua versi yang bukan sama sekali berbeda, ada perbedaan namun masih berhubungan. Dual didasarkan pada identitas yang berhubungan dengan waktu pengamat dengan *proper-time* sebagai transformasi kontak pada ruang konfigurasi yang meninggalkan ruang fase

invariant. Teori khusus memiliki versi dual dalam arti bahwa untuk setiap partikel n , setiap pengamat memiliki 2 set unik variable global (\mathbf{X}, t) dan (\mathbf{X}, τ) untuk menggambarkan dinamika. Dimana \mathbf{X} adalah pusat massa kanonik. Teori Dual ini muncul akibat dari kurangnya pembenaran fisika terhadap waktu sebagai koordinat keempat sesuai dengan postulat yang diusulkan oleh Minkowski. (Tepper 2020). Dari teori klasik versi dual tersebut maka akan dibuktikan teori kuantum relativistic versi dual yang sesuai dengan teori relativitas khusus Einstein dan teori medan Maxwell. Persamaan gelombang relativistik dual direduksi menjadi persamaan Schrödinger, dan nantinya akan ditemukan juga persamaan Dirac dual (Tepper, 2021).

Penelitian tentang versi Dual dapat menjelaskan secara tersirat bahwa ada rahasia Allah SWT dalam hal waktu. Terdapat perbedaan waktu pengamat biasa dan juga *proper-time*. Adanya relativitas waktu ini sesungguhnya telah dijelaskan dalam Al-Quran:

تَعْرُجُ الْمَلَائِكَةُ وَالرُّوحُ إِلَيْهِ فِي يَوْمٍ كَانَ مِقْدَارُهُ خَمْسِينَ أَلْفَ سَنَةٍ

“Para Malaikat dan Jibril naik (menghadap) kepada Tuhan, dalam sehari setara dengan limapuluh ribu tahun” (QS. Al-Ma'arij: 4)

Ayat ini dalam terjemah secara umum memberi gambaran relativitas waktu Einstein bahwa dalam satu kasus tertentu, para pengamat yang bergerak pada kecepatan yang berbeda akan menatap peristiwa-peristiwa secara berbeda. Konsep kecepatan waktu dalam hal ini didefinisikan sebagai relativitas waktu/dilatasi waktu dalam teori relativitas khusus Einstein. Adanya kerangka acuan diam menjadi pokok penyebab relatifnya pengukuran waktu, hal ini tersirat dari hasil perbandingan penafsiran para mufassir Q.S Al-Ma'ârij ayat 4 terkait konsep kecepatan waktu, dalam tafsir Al-Maraghi, Al-Azhar dan Al-Misbah. Jika suatu kerangka acuan

bergerak relatif terhadap kerangka acuan lain yang diam, maka waktu yang dialami oleh seseorang di kerangka acuan yang bergerak tersebut akan berbeda waktu dengan waktu pada kerangka acuan yang diam (Jumini 2015).

Metode penelitian yang digunakan pada penelitian ini adalah metode analitik dengan mengonstruksi model matematis dan memperoleh penyelesaian dengan pendekatan matriks yang akan diaplikasikan untuk mendapatkan representasi energi dan spinor eigen dari persamaan Dirac versi dual. Secara garis besar proses pencarian solusi atas masalah yang telah dipaparkan, kemudian berangkat dari persamaan Schrödinger, dilakukan modifikasi persamaan Klein-Gordon dan Dirac akibat adanya medan elektromagnetik. Selanjutnya dengan merumuskan formulasi persamaan Hamiltonian versi Dual termodifikasi akibat medan elektromagnet dan menentukan *eigen-state* dan *eigen-value* dan representasi energi akibat medan elektromagnet untuk partikel fermion (Romadani, 2019).

Berdasarkan hasil tinjauan beberapa hasil jurnal diatas maka akan dikaji ulang secara teoritis dalam skripsi ini tentang teori klasik dan kuantum relativitas mekanik versi dual yang mana untuk mendapatkan solusi persamaan Dirac versi dual. Maka akan didapatkan formula momen magnetik anomali dari partikel elektron (Tepper, 2021). Pertama akan dijabarkan solusi persamaan pada teori klasik versi dual dengan menggunakan persamaan partikel tunggal versi dual sesuai dengan teori relativitas khusus Einstein. Dari tinjauan klasik tersebut akan didapatkan solusi persamaan Dirac versi dual serta didapatkan *eigen-value* dan *eigen-state* dari persamaan Dirac versi dual. Adapun persamaan Dirac versi dual bisa digunakan untuk mendapatkan formula momen magnetik anomali untuk partikel bermuatan khususnya partikel elektron.

1.2 Rumusan Masalah

Adapun penelitian ini merumuskan sebagai berikut:

1. Bagaimana menentukan *Eigen-state* dan *Eigen-value* dari persamaan Dirac versi dual?
2. Bagaimana menentukan formula momen magnetik anomali partikel elektron menggunakan persamaan Dirac versi dual?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun dari rumusan masalah diatas maka tujuan dilakukan penelitian adalah sebagai berikut:

1. Untuk menentukan *Eigen-state* dan *Eigen-value* dari persamaan Dirac versi dual.
2. Untuk menentukan formula momen magnetik anomali partikel elektron menggunakan persamaan Dirac versi dual.

1.4 Batasan Masalah

Penelitian ini hanya mengkaji secara teoritik formula momen magnetik anomali partikel elektron dengan menggunakan persamaan Dirac versi dual.

1.5 Manfaat Penelitian

Dari pemaparan secara teorikal ini, diharapkan dapat memberikan dasar untuk kajian lebih lanjut tentang solusi persamaan teori kuantum relativistik versi dual khususnya dibidang fisika partikel.

BAB II KAJIAN PUSTAKA

2.1. Teori Kuantum

Pada awal abad 20 para fisikawan menyadari bahwa hukum-hukum makroskopik dalam Fisika tidak mampu menjelaskan perilaku partikel pada tingkat mikroskopik. Hal itu mendorong para Fisikawan untuk mengembangkan suatu bidang Fisika yang disebut Mekanika Kuantum atau Fisika Kuantum. Pada hakikatnya, Fisika Kuantum bertolak dari sifat gelombang partikel. Jika bentuk potensial yang mempengaruhi partikel serta batasannya diketahui maka akan diperoleh fungsi gelombang dan peluang keberadaannya, serta energi dan sifat-sifat lainnya (Siregar, 2014).

2.1.1 Waktu Teori Relativitas dalam Kajian Islam

Al-Quran merupakan sumber ilmu pengetahuan, fakta ilmiah dalam Al-Quran telah terbukti kebenarannya yang banyak ditemukan oleh para ilmuwan (Sabrani, 2019). Ungkapan Einstein yang terkenal tentang ilmu dan agama yakni “ilmu tanpa agama akan buta sedangkan agama tanpa ilmu akan lumpuh”, ungkapan tersebut dianggap sebagai regilitasnya (Wardhana, 2006) Salah satu Teori yang dikemukakan oleh Einstein yang disebut sebagai “Teori relativitas Khusus Einstein” adalah sebuah teori yang menunjukkan adanya suatu konsep kecepatan waktu, yaitu “kecepatan membuat waktu bersifat relatif”.

Waktu sebagai salah satu variabel fisis turut juga dipengaruhi oleh tidak adanya kerangka acuan lain yang universal. Jika suatu kerangka acuan bergerak relatif terhadap kerangka acuan lain yang diam, maka waktu yang dialami oleh seseorang dikerangka acuan yang bergerak tersebut akan berbeda waktu dengan

waktu pada kerangka acuan yang diam. Tetapi hal ini hanya berlaku jika gerak tersebut mempunyai kecepatan yang mendekati cahaya. Perbedaan waktu tersebut kemudian dikenal sebagai konsep dilatasi waktu (Jumini, 2015). Sebagaimana dijelaskan dalam surat *As-Sajdah* ayat 5:

يُدَبِّرُ الْأُمْرَ مِنَ السَّمَاءِ إِلَى الْأَرْضِ ثُمَّ يَعْرُجُ إِلَيْهِ فِي يَوْمٍ كَانَ مِقْدَارُهُ أَلْفَ سَنَةٍ مِمَّا تَعُدُّونَ

“Dia mengatur segala urusan dari langit ke bumi, kemudian (urusan) itu naik kedapa-Nya dalam satu hari yang kadarnya (lamanya) adalah seribu tahun menurut perhitunganmu” (As-Sajdah: 5)

Dijelaskan dalam kitab tafsirul Kasyaf karya Imam Abi Qasim Mahmud bin Umar Az-Zamakhsyari Al-Khawarizmi, tafsiran surat *As-Sajdah* ayat 5 tersebut bahwa wahyu diturunkan bersama malaikat Jibril dari langit ke bumi, kemudian malaikat Jibril kembali ke langit untuk menerima dan memberikan wahyu. Dan hal ini terjadi dalam satu waktu yang hakikatnya 1000 tahun karena jarak perjalanan 1000 tahun itu naik dan turun. Karena jarak antara langit dan bumi yaitu 500 tahun. Peristiwa tersebut seperti halnya sehari karena sangat cepatnya malaikat Jibril karena dia menempuh perjalanan 1000 tahun dalam sehari (Qasim, 1143).

Secara eksplisit menjelaskan bahwa perbedaan antara waktu yang hakikat 1000 tahun ditempuh oleh malaikat Jibril dalam waktu sehari, karena faktor kecepatan dari malaikat Jibril dan manusia yang berada di bumi berjalan terlalu lambat dibandingkan makhluk ciptaan Allah yang bernama malaikat (Qasim, 1143). Pengaruh kecepatan terhadap perbedaan waktu cukup berarti pada kecepatan yang tinggi (kecepatan mendekati cahaya) (Wiyatmo, 2010).

Mekanika baru dari relativitas yang menyiratkan kaitan yang sangat erat mengenai waktu. Uraian waktu fisis menyatakan bahwa para pengamat yang bergerak dalam suatu kerangka acuan yang sama akan menatap suatu peristiwa acuan relatif singkat. Hal ini merupakan hukum alam yang dapat terjadi pada setiap

makhluk yang diam di bumi, dimana setiap makhluk hidup memiliki waktu yang relatif singkat karena Allah SWT telah menetapkannya sebagai zat yang Maha Kuasa atas segalanya (Jumini, 2015).

2.1.2 Partikel Elektron dalam Kajian Islam

Menurut fisika atom atau fisika inti, telah ditemukan pasang pasangan yang sangat menggemparkan para ahli, seperti elektron dan positron, proton dan anti-proton, neutron dan anti- neutron dan berbagai partikel dan anti partikel lainnya. Dengan demikian terbukalah kemungkinan adanya anti materi di samping materi yang biasa, atau adanya anti atom disamping atom-atom yang biasa. Kesemuanya itu menguatkan (membenarkan) apa yang telah difirmankan dalam Al-Qur'an;

سُبْحٰنَ الَّذِيْ خَلَقَ الْاَزْوَاجَ كُلَّهَا مِمَّا تُنْبِتُ الْاَرْضُ وَمِنْ اَنْفُسِهِمْ وَمِمَّا لَا يَعْلَمُوْنَ

“Mahasuci (Allah) yang telah menciptakan semua berpasang-pasangan, baik dari apa yang ditumbuhkan oleh bumi dan dari diri mereka sendiri, meskipun dari apa yang mereka tidak ketahui.” (Yasin: 36)

Allah menciptakan segala sesuatu berpasangan, baik berupa tumbuhan, manusia, atau sesuatu yang tidak diketahui. Dalam kitab tafsirul Jalalain dijelaskan tafsiran kalimat *مِمَّا لَا يَعْلَمُونَ* memiliki makna *من المخلوقات العجيبة الغريبة* yang artinya “dari makhluk-makhluk yang ajaib dan menakjubkan” (Al-Mahali, 1505). Selain itu dijelaskan juga dalam kitab Tafsir Al-Qurtubi dijelaskan mengenai makna dari suatu yang berpasangan dari makhluk yang tidak diketahui dijelaskan “semua jenis ciptaan-Nya di darat, laut, langit, dan bumi. Maka boleh jadi apa yang diciptakannya tidak diketahui manusia dan para malaikat mengetahuinya” (Al-Qurtubi, 1273). Dan benar adanya bahwa partikel energi positif dan energi negatif yang saling berpasangan menguatkan kebenaran firman Allah. Adanya partikel dan anti partikel merupakan makhluk ajaib Allah yang boleh jadi diciptakan oleh Allah

tidak diketahui banyak manusia, akan tetapi partikel dan anti-partikel tersebut memang benar adanya.

وَمِنْ كُلِّ شَيْءٍ خَلَقْنَا زَوْجَيْنِ لَعَلَّكُمْ تَذَكَّرُونَ

“Dan segala sesuatu kami ciptakan berpasang-pasangan agar kamu mengingat (kebesaran Allah).” (Adh-Dhariyat: 49)

Anti-partikel memiliki sifat-sifat yang berlawanan dengan partikel. Misalnya, elektron bermuatan positif merupakan partikel, dan positron bermuatan berlawanan dengan elektron yakni negatif merupakan anti-partikel. Fakta ini dinyatakan dalam sebuah sumber ilmiah sebagaimana berikut “setiap partikel memiliki anti-partikel dengan muatan yang berlawanan dan hubungan ketidakpastian mengatakan kepada kita bahwa penciptaan berpasangan dan pemusnahan berpasangan terjadi di dalam vakum di setiap saat, di setiap tempat.” (Romlah, 2011).

Dalam bidang fisika teoritis terdapat persamaan yang menjelaskan tentang partikel dan anti-partikel yang dinyatakan secara matematis oleh Paul Dirac dalam persamaannya yang terkenal yaitu Persamaan Dirac. Selain dapat menjelaskan adanya partikel dan anti-partikel sebagaimana dijelaskan pada ayat sebelumnya, ternyata persamaan Dirac juga berhasil menjelaskan sebagian sifat elektron seperti spin, momentum sudut, momen magnetik. Dalam Al-Quran secara tersirat Allah telah memaparkan tentang konfigurasi elektron yang mana elektron memiliki gerakan sebagaimana dibahasakan secara fisika teoritis oleh Paul Dirac, yaitu surah Yaasin ayat 40:

لَا الشَّمْسُ يَنْبَغِي لَهَا أَنْ تُدْرِكَ الْقَمَرَ وَلَا اللَّيْلُ سَابِقُ النَّهَارِ ۚ وَكُلٌّ فِي فَلَكٍ يَسْبَحُونَ

“Tidaklah mungkin bagi matahari mendapatkan bulan dan malampun tidak dapat mendahului siang dan masing-masing beredar pada garis edarnya. (Yasin: 40)

Ayat di atas menjelaskan bahwa segalanya sudah diatur oleh Allah SWT. Hal ini juga sama seperti sebuah atom dan pergerakannya yang sama dengan pergerakan galaksi. Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya bahwa elektron terus berputar mengelilingi inti atom karena muatan listrik yang dimilikinya. Semua elektron bergerak mengelilingi intinya melewati sebuah orbit, yang mana karena energi yang terdapat dalam elektron tersebut sehingga elektron tetap berada pada garis orbitnya (Sabarni, 2019).

2.1.3 Teori Kuantum Nonrelativistik

Persamaan Schrödinger merupakan persamaan pokok dalam mekanika kuantum. Seperti halnya hukum gerak kedua yang merupakan persamaan pokok dalam mekanika Newton dan seperti persamaan fisika umumnya, persamaan Schrödinger berbentuk persamaan differensial. Bentuk khusus persamaan Schrödinger yaitu persamaan Schrödinger tak-bergantung waktu. Bentuk ini lebih sering digunakan karena energi medan potensial sistem fisika umumnya hanya bergantung pada posisi (Humaidi, 2016)

Langkah awal memahami lebih jelas tentang kuantum, ditinjau terlebih dahulu prosedur untuk mendapatkan persamaan Schrödinger untuk partikel bebas pada ruang satu dimensi. Fungsi gelombang partikel bebas diberikan oleh persamaan $\Psi(x, t) = A \exp[i(p_x x - Et)/\hbar]$. Energi partikel bebas dalam mekanika klasik berkaitan dengan momentum sesuai dengan relasi,

$$E = \frac{p_x^2}{2m} \quad 2.1$$

Dengan p momentum partikel dan m merupakan massa dari partikel. Jika kita kerjakan turunan parsial dua kali terhadap x pada fungsi gelombang persamaan partikel kita memperoleh,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) = \left[-\frac{p_x^2}{\hbar^2} \right] \Psi(x, t) \quad 2.2$$

dan seperti sebelumnya turunan parsial terhadap t , kita mendapatkan

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \left[-\frac{iE}{\hbar} \right] \Psi(x, t) \quad 2.3$$

Menggunakan relasi $E = \frac{p_x^2}{2m}$, kita dapat menyatukan persamaan (2.2) dan (2.3) dengan cara sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) &= \left[-\frac{ip_x^2}{2m\hbar} \right] \Psi(x, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) &= \left[\frac{i\hbar}{2m} \right] \left[-\frac{p_x^2}{\hbar^2} \right] \Psi(x, t) \end{aligned} \quad 2.4$$

Substitusi dengan persamaan (2.2), kemudian dihasilkan persamaan akhir yaitu,

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \left[\frac{i\hbar}{2m} \right] \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) \quad 2.5$$

Untuk menyederhanakan persamaan ini, kita kalikan kedua sisinya dengan $i\hbar$ sehingga kita peroleh

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) \quad 2.6$$

Mari kita kaji persamaan ini dengan memperhatikan definisi operator momentum \mathbf{p}_x dan operator energi \mathbf{E} . Persamaan ini dapat ditulis kembali dengan menggunakan operator momentum dan energi menjadi

$$\mathbf{E} \Psi(x, t) = \frac{1}{2m} [\mathbf{p}_x]^2 \Psi(x, t) \quad 2.7$$

Generalisasi untuk ruang tiga dimensi dapat dilakukan dengan cara yang sama dan menggunakan hubungan energi dan momentum (mekanika klasik),

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad 2.8$$

dapat diperoleh persamaan gerak untuk partikel bebas yaitu

$$E \Psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2m} \mathbf{p}_x^2 \Psi(\mathbf{r}, t)$$

Atau

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}, t) \quad 2.9$$

di mana Laplacian ∇^2 ,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad 2.10$$

Generalisasi untuk sebuah partikel yang berada pada sebuah potensial $V(\mathbf{r}, t)$ didapat dari hubungan energi,

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}, t) \quad 2.11$$

dan melakukan penggantian variabel klasik dengan operator, kita dapat tuliskan persamaan geraknya

$$E\Psi(\mathbf{r}, t) = \left[\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}, t) \right] \Psi(\mathbf{r}, t)$$

Atau

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}, t) \Psi(\mathbf{r}, t) \quad 2.12$$

Persamaan inilah yang dinamakan persamaan Schrödinger yang bergantung waktu. Persamaan ini menentukan evolusi fungsi gelombang.

Untuk formulasi yang lebih umum, kita perhatikan bahwa operator-operator pada sisi kanan persamaan (2.12) adalah operator Hamiltonian,

$$\mathbf{H} = \mathbf{T} + \mathbf{V} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r}, t) \quad 2.13$$

Dengan \mathbf{T} operator energy kinetic dan \mathbf{V} operator energy potensial. Jadi persamaan Schrödinger yang berlaku untuk semua keadaan adalah (Sudiarta, 2012):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}\Psi(\mathbf{r}, t) \quad 2.14$$

Akan tetapi, ketika kecepatan elektron mendekati kecepatan cahaya, maka persamaan Schrödinger tidak berlaku lagi. Persamaan gerak elektron harus diubah menjadi persamaan Schrödinger Relativistik (Persamaan Klein-Gordon). Perbedaan kedua persamaan tersebut terletak pada energi yang dimiliki oleh elektron (Humaidi, 2016).

2.1.4 Teori Kuantum Relativistik

2.1.4.1. Persamaan Klein Gordon (Partikel Spin 0)

Persamaan Schrödinger merupakan persamaan gelombang yang mampu menjelaskan perilaku elektron termasuk menentukan tingkat-tingkat energinya. Akan tetapi, ketika gerak elektron diasumsikan sebagai gerak relativistik ($v \approx c$), maka persamaan Schrödinger harus diubah menjadi persamaan Klein-Gordon (persamaan Schrödinger relativistik) (Humaidi, 2016). Didalam mekanika kuantum yang telah kita pelajari selama ini, sistem partikel secara diam-diam dianggap bergerak dengan laju rendah yakni jauh lebih kecil dari laju cahaya.

Persamaan utama didalam teori kuantum adalah persamaan Schrödinger pada persamaan (2.14). Persamaan ini menggambarkan perilaku dinamis sistem fisis yang digambarkan oleh Hamiltonian sesuai dengan persamaan (2.13). Sedangkan fungsi gelombang $\psi(\mathbf{r}, t)$ menyimpan semua informasi dari sistem.

Setelah didapatkan persamaan (2.13) Peralihan dilakukan dengan menggantikan besaran energi dan momentum dengan operator.

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}; \mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla \quad 2.15$$

Peralihan ini memberi ungkapan operator bagi energi kinetik sistem yaitu sesuai dengan persamaan (2.8) dan (2.9).

Pertanyaan yang muncul kemudian adalah bagaimana perilaku kuantumik atau bagaimana teori kuantum bagi sistem partikel yang bergerak dengan laju tinggi atau mendekati cahaya. Teori relativitas khusus adalah teori yang telah mapan (well established). Karena itu sistem partikel makroskopik yang bergerak dengan laju tinggi selain memenuhi gambaran atau sifat kuantum diharapkan juga memenuhi sifat-sifat relativistik.

Mengingat persamaan Schrödinger tidak lain adalah ungkapan dari operator energi total yakni Hamiltonian maka starting point perluasan kuantum didalam konteks teori relativitas adalah energi relativistik.

Energi relativistik partikel bebas bermassa m adalah

$$E^2 = (\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4) \quad 2.16$$

Pengalihan dengan $\Psi(\mathbf{r}, t)$ dari sebelah kanan memberikan

$$E^2 \Psi(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4) \Psi(\mathbf{r}, t) \quad 2.17$$

Selanjutnya, penerapan hubungan (2.15) memberikan

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(\mathbf{r}, t) = (-\hbar^2 \nabla^2 c^2 + m^2 c^4) \Psi(\mathbf{r}, t) \quad 2.18$$

Setelah dari dikalikan dengan factor $\frac{1}{\hbar^2 c^2}$ dan diatur kembali, didapatkan persamaan sehingga diperoleh

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \Psi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad 2.19$$

Persamaan ini pertama kali dirumuskan oleh O. Klien, V. Fock, dan W. Gordon, dan disebut persamaan Klein-Gordon.

Persamaan kuantum relativistik pertama ini ternyata menyimpan masalah setidaknya dalam sudut pandang Schrödinger. Persamaan Schrödinger memenuhi persamaan kontinuitas.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad 2.20$$

Dengan ρ adalah rapat probabilitas dan \mathbf{j} rapat arus probabilitas. Rapat probabilitas ρ

$$\rho = |\psi(x)|^2 \quad 2.21$$

Menyatakan besar kemungkinan mendapatkan partikel diposisi x , karena itu nilainya selalu positif.

Persamaan Klein-Gordon juga memenuhi persamaan Kontinuitas dengan rapat probabilitas

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2} \left\{ \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \left(\frac{\partial \psi^2}{\partial t} \right) \psi(x) \right\} \quad 2.22$$

Dan rapat arus probabilitas \mathbf{j}

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2im} \{ \psi^* \nabla \psi - (\nabla \psi^*) \psi \} \quad 2.23$$

Jelas bahwa rapat probabilitas ρ dari persamaan Klien-Gordon tidak selalu positif. Dengan demikian kuantitas ini tidak dapat ditafsirkan sebagai nilai kemungkinan mendapatkan suatu partikel di x .

Kesulitan lain yang ditimbulkan oleh persamaan Klien-Gordon adalah kehadiran spektrum energi negatif. Persamaan Klien-Gordon mempunyai solusi,

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t) \quad 2.24$$

Substitusi solusi ini kedalam persamaan Klien-Gordon memberikan

$$E = \hbar\omega_k = \pm c\sqrt{\hbar^2\mathbf{k}^2 + m^2c^2} \quad 2.25$$

Yakni spectrum energi positif dan negatif yang terpisah oleh jurang energi selebar $\Delta E = 2mc^2$

Untuk mengatasi kesulitan diatas P.A.M Dirac mengajukan persamaan seperti persamaan Schrödinger (Rani, 2004).

Persamaan Dirac (Partikel Spin $\frac{1}{2}$)

Paul Adrien Maurice Dirac mencoba mengajukan teori kuantum baru untuk mengatasi beberapa permasalahan yang muncul pada persamaan Klein-Gordon dengan strategi yang berbeda, yaitu merumuskan persamaan gelombang relativistik dalam bentuk persamaan diferensial orde pertama. Hasil perumusan persamaan gelombang relativistik yang dilakukan oleh Paul Dirac kemudian disebut dengan persamaan Dirac dan berhasil dirumuskan pada tahun 1928 (Griffiths, 2008).

Selain berhasil dalam merumuskan persamaan gelombang relativistik, persamaan Dirac juga berhasil menjelaskan tentang gerakan elektron dan memprediksi keberadaan antipartikel dari elektron, yaitu positron, yang memiliki sifat serupa dengan elektron tetapi muatannya berlawanan. Keberadaan positron akhirnya berhasil dibuktikan empat tahun setelah kemunculan prediksi Dirac oleh Anderson pada tahun 1932 ketika mempelajari jejak yang ditinggalkan oleh sinar kosmik di ruang awan (Zettili, 2009).

Persamaan energi relativistik partikel bebas pada persamaan (2.16), c merupakan kecepatan cahaya, m_e adalah massa elektron, dan \mathbf{p} adalah momentum mekanik relativistiknya:

$$\mathbf{p} = \gamma m_e \mathbf{v}; \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \quad 2.26$$

v adalah kecepatan elektron. Dalam bagian sebelumnya kita mendapatkan dari hubungan klasik non-relativistik konsep mekanika kuantum yang sesuai, misalnya dengan menggunakan aturan korespondensi, di mana operator yang diperkenalkan harus diterapkan pada fungsi gelombang bergantung waktu dan posisi $\psi(\mathbf{r}, t)$. Dalam kasus transformasi relativistik, hukum klasik yang sesuai menjadi Mekanika Kuantum, kovariannya harus dipertahankan. Ini berarti bahwa, bahkan setelah kuantisasi, hukum harus berbentuk invarian di bawah transformasi Lorentz karena kesetaraan mendasar dari semua sistem inersia. Bentuk invariants di bawah transformasi Lorentz dijamin jika semua suku aditif dari suatu persamaan adalah tensor empat dengan rank yang sama. Dalam pengertian ini, hukum energi klasik partikel bebas di atas dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut:

$$p^\mu p_\mu = m_e^2 c^2 \quad 2.27$$

p^μ adalah empat-momentum kontravarian dan m_e merupakan masa dari partikel elektron. Dengan demikian sebagai vektor itu adalah tensor rank pertama:

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \gamma m_e v_x, \gamma m_e v_y, \gamma m_e v_z \right)$$

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \gamma m_e \mathbf{v} \right) \quad 2.28$$

Apa yang disebut kovarian empat momentum p_μ berbeda dari p^μ hanya dengan tanda berlawanan dari komponen-ruang. Kuadrat dari norma empat

momentum p^μ adalah, sebagai ruas kanan (2.27), sebuah skalar empat. Hukum energi dengan demikian dalam bentuk kovarian yang benar.

Tapi empat Gradien kontravarian

$$\partial^\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \nabla \right) \quad 2.29$$

Sekarang memungkinkan juga untuk menggabungkan dua aturan korespondensi dalam bentuk kovarian relativistik:

$$p^\mu \rightarrow i\hbar\partial^\mu \quad 2.30$$

dengan aturan korespondensi relativistik ini, kuadrat dari norma empat momentum berbunyi:

$$p^\mu p_\mu \rightarrow -\hbar^2 \partial^\mu \partial_\mu = \hbar^2 \square \quad 2.31$$

\square yang merupakan operator

d'Alembert

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

sebagai produk skalar tentu saja empat skalar. Jelas bahwa dengan kuantisasi (2.27), dalam hal ini juga, kita harus menerapkan operator yang dihasilkan ke fungsi gelombang, yang menggambarkan keadaan partikel. Fungsi ini akan tergantung pada empat posisi:

$$x^\mu = (ct, x, y, z) \quad 2.32$$

dan dengan demikian akhirnya kembali pada r dan t . Oleh karena itu, kami memilih, seperti sebelumnya, notasi $|\psi(r, t)\rangle$. Keluar dari hukum energi, maka berikut, generalisasi relativistik dari persamaan Schrödinger:

$$(\hbar^2 \square - m_e^2 c^2) |\psi(r, t)\rangle = 0 \quad 2.33$$

yang dalam bentuk berikut disebut persamaan Klein-Gordon:

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{m_e^2 c^2}{\hbar^2} \right) |\psi(r, t)\rangle = 0 \quad 2.34$$

Persamaan gelombang ini bagaimanapun akan menimbulkan masalah yang tidak signifikan. Ini merupakan persamaan diferensial orde kedua terhadap waktu. Solusinya dengan demikian membutuhkan kondisi awal untuk $|\psi\rangle$ dan $|\dot{\psi}\rangle$. Persamaan Schrödinger non-relativistik, sebaliknya adalah orde pertama dalam waktu. Orang pasti dapat mempertanyakan apakah penyertaan efek relativistik memang harus mengarah pada perubahan drastis seperti itu dalam informasi awal yang dibutuhkan. Oleh karena itu, ide Dirac pada awalnya adalah untuk melinierkan persamaan awal dengan ansatz:

$$\begin{aligned} & \left(E - c \sum_i \hat{\alpha}_i p_i + \hat{\beta} m_e c^2 \right) \left(E - c \sum_j \hat{\alpha}_j p_j \right. \\ & \quad \left. + \hat{\beta} m_e c^2 \right) = 0 \\ & i, j \in \{x, y, z\} \end{aligned} \quad 2.35$$

Kuantitas baru $\hat{\alpha}$ dan $\hat{\beta}$ harus memenuhi hubungan berikut:

$$\begin{aligned} [\hat{\alpha}_i, \hat{\alpha}_j]_+ &= 2\delta_{ij}\mathbb{I} \\ [\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}]_+ &= 0, \hat{\beta}^2 = \mathbb{I} \end{aligned} \quad 2.36$$

Hal ini tentu saja tidak dapat dicapai dengan bilangan normal \mathbb{R} atau \mathbb{C} . Oleh karena itu, nanti kita akan mencoba menafsirkan $\hat{\alpha}$ dan $\hat{\beta}$ sebagai matriks kuadrat. Ini harus, setelah transisi ke formulasi mekanika kuantum, secara imperatif bolak-balik dengan operator momentum, agar (2.35) tetap valid. Secara khusus,

mereka tidak boleh bergantung pada posisi. Kami tentu saja akan kembali nanti ke penetapan eksplisit $\hat{\alpha}_i$ dan $\hat{\beta}$.

$$\left(E \mp c \sum_i \hat{\alpha}_i p_i + \hat{\beta} m_e c^2 \right) = 0 \quad 2.37$$

tentu saja juga merupakan solusi untuk (2.35). Itu mengarah, dengan aturan korespondensi (2.30) (Nolting, 2017). Sudah jelaskan turunan matematis dalam persamaan Dirac dalam waktu biasa (waktu pengamat biasa). Dalam penelitian ini akan dibahas mengenai persamaan Dirac versi Dual yang mana menggunakan proper-time (waktu pengamat dalam versi Dual). Oleh karena itu, akan dijelaskan lebih lanjut mengenai makna fisis dan matematis dari versi Dual itu sendiri.

Teori versi Dual

Sebagaimana telah dijelaskan sebelumnya mengenai versi Dual yang menjadi variabel inti dalam penelitian ini. Versi dual sendiri mengadopsi dari konsekuensi Teori Relativitas mengenai konsep dilatasi waktu. Awal mula munculnya teori Dual ini berawal dari Minkowski yang membuat postulat ketiga yang menyatakan bahwa kedua postulat Einstein yang benar adalah menyatakan waktu sebagai koordinat keempat dan membatasi hubungan antara komponen untuk memenuhi invariant alami yang diinduksi grup Lorentz. Dalam hal ini Minkowski mempertahankan pendapatnya bahwa waktu dan ruang memiliki sifat yang berbeda, meskipun banyak fisikawan yang masih mempertahankan bahwa waktu adalah mutlak, dan kecepatan cahaya konstan (Tepper, 1997).

Ternyata pada penelitian selanjutnya oleh Tepper disebutkan bahwa teori Dual ini muncul akibat dari kurangnya pembenaran fisika terhadap waktu sebagai

koordinat keempat sesuai dengan postulat yang diusulkan oleh Minkowski. Oleh karena itu teori Dual dari Teori Relativitas Khusus Einstein dan Teori Maxwell ini muncul (Tepper 2020). Untuk memberikan gambaran umum mengenai hubungan antara ruang waktu pengamat biasa dan waktu pengamat dalam ruang Dual, akan dijelaskan terlebih dahulu bagaimana teori Dual ini mengadopsi konsep dilatasi waktu.

2.2.1 Waktu dalam versi Dual

Dalam penelitian ini akan dibahas mengenai objek berukuran mikroskopik yakni partikel elektron. Sebelum menginjak pembahasan partikel akan dijelaskan terlebih dahulu tentang teori Dual dalam benda-benda berukuran makroskopik (dengan konsep dilatasi waktu) dengan menggunakan istilah teori klasik versi Dual. Untuk mengembangkan teori klasik versi dual, kita asumsikan partikel berinteraksi klasik yang didefinisikan pada ruang fase dengan variabel $(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ dan Hamiltonian H seperti yang terlihat oleh pengamat O dalam bingkai inersia (dalam pengaturan standar). Jika \mathbf{w} adalah kecepatan partikel, misalkan $\gamma^{-1}(\mathbf{w}) = \sqrt{1 - w^2/c^2}$.

Waktu tepat klasik didefinisikan oleh $d\tau = \sqrt{1 - w^2/c^2} dt$

$$w = \frac{dx}{dt}, \quad d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2} dx^2 \quad 2.38$$

Maka akan didapatkan

$$dt^2 = d\tau^2 + \frac{1}{c^2} dx^2$$

$$cdt = \sqrt{u^2 + c^2} d\tau, \quad 2.39$$

$$u = \frac{dx}{d\tau} = \gamma(w)w$$

Jika kita misalkan $b = \sqrt{u^2 + c^2}$, suku pertama dari persamaan diatas menjadi $cdt = bd\tau$. Ini mengarah pada identitas pertama

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \equiv \frac{1}{b} \frac{d}{d\tau} \quad 2.40$$

Identitasnya memberikan cara yang benar untuk mendefinisikan hubungan antara waktu yang tepat dan waktu pengamat untuk partikel. Jika kita menerapkan identitas ke x , kita memperoleh identitas baru kedua, menunjukkan bahwa transformasi meninggalkan konfigurasi (atau tangen) ruang invarian:

$$\frac{w}{c} = \frac{1}{c} \frac{dx}{dt} \equiv \frac{1}{b} \frac{dx}{d\tau} = \frac{u}{b} \quad 2.41$$

Koordinat partikel baru adalah (x, τ) . Dalam representasi ini, posisi x didefinisikan secara unik relatif terhadap O , sedangkan didefinisikan secara unik oleh partikel. Momentum partikel dapat direpresentasikan sebagai $p = \gamma(w)w = mu$, di mana m adalah massa diam partikel. Jadi, variabel ruang fase (x, p) , dibiarkan invarian. Untuk penggunaan selanjutnya, kita juga memiliki $(w) = H/mc^2$. Ini memungkinkan kita untuk juga menulis (Tepper, 2021)

$$d\tau = \frac{mc^2}{H} dt \quad 2.42$$

Telah didapatkan hubungan antara waktu pengamat biasa dengan waktu pengamat dalam versi dual dan telah dipaparkan juga representasi dengan momentum dan Energi (dalam bentuk Hamiltonian).

2.2.2 Teori Partikel versi Dual

Pada penjelasan sebelumnya sudah dipaparkan mengenai makna versi dual dalam dunia klasik. Untuk kompatibilitas dengan teori kuantum, maka hasil yang telah didapatkan dan pembahasan 2.2.1 dirubah menjadi Kanonik. Konsep kunci untuk pendekatan ini dilihat dengan memeriksa evolusi waktu dari parameter dinamis $W(x, \mathbf{p})$, melalui formulasi standar dalam kurung Poisson:

$$\frac{dW}{dt} = \{H, W\} \quad 2.43$$

Untuk merepresentasikan dinamika melalui waktu partikel yang tepat, digunakan representasi persamaan (2.42) maka dari itu,

$$\frac{dW}{d\tau} = \frac{dW}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{H}{mc^2} \{H, W\} \quad 2.44$$

Dengan menggunakan energi diam invarian mc^2 , kita menentukan *proper-time* Hamiltonian kanonik (K) sedemikian rupa sehingga:

$$\{K, W\} = \frac{H}{mc^2} \{H, W\}, \quad K|_{p=0} = H|_{p=0} = mc^2 \quad 2.45$$

Dari

$$\begin{aligned} \{K, W\} &= \left[\frac{H}{mc^2} \frac{\partial H}{\partial p} \right] \frac{dW}{dx} - \left[\frac{H}{mc^2} \frac{\partial H}{\partial x} \right] \frac{dW}{dp} \\ &= \frac{d}{dp} \left[\frac{H}{2mc^2} + a \right] \frac{dW}{dx} - \frac{d}{dx} \left[\frac{H}{2mc^2} + a' \right] \frac{dW}{dp} \end{aligned} \quad 2.46$$

kita lihat bahwa $a = a' = \frac{1}{2} mc^2$. Jadi dengan asumsi tidak bergantung waktu eksplisit, maka:

$$K = \frac{H}{mc^2} + \frac{mc^2}{2}, \quad \frac{dW}{d\tau} = \{K, W\} \quad 2.47$$

karena τ tetap invariant selama interaksi, maka diasumsikan K juga tetap invariant.

Jadi jika $\sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4} \rightarrow \sqrt{c^2 \pi^2 + m^2 c^4} + V$, dimana $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{p} - \frac{e}{c} \boldsymbol{A}$, dengan \boldsymbol{A}

potensial vektor, dan V Energi potensial. Dalam hal ini, K menjadi

$$K = \frac{\pi^2}{2m} + mc^2 + \frac{V^2}{2mc^2} \frac{V\sqrt{c^2\pi^2 + m^2c^4}}{mc^2} \quad 2.48$$

Jika kita gunakan $H_0 = \sqrt{c^2\pi^2 + m^2c^4}$, menggunakan identitas vektor standar

dengan $\nabla \times \boldsymbol{\pi} = -\frac{e}{c} \boldsymbol{B}$, dan menghitung persamaan Hamiltonian, akan didapatkan:

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{\partial K}{\partial p} = \frac{H}{mc^2} \left(\frac{c^2 \pi}{H_0} \right) = \frac{b}{c} \left(\frac{c^2 \pi}{H_0} \right) \Rightarrow \frac{dx}{d\tau} = \frac{b}{c} \frac{dx}{dt}$$

Dan

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\tau} &= \frac{b}{c} \left[\frac{(c^2 \pi \cdot \nabla) A + \frac{e}{b} (c^2 \pi \times B)}{H_0} \right] - \frac{b}{c} \nabla V \\ &= \frac{b}{c} \left[(u \cdot \nabla) A + \frac{e}{b} (u \times B) \right] - \frac{b}{c} \nabla V \\ &= \frac{b}{c} \left[eE + \frac{e}{b} (u \times B) + \frac{e}{b} \frac{dA}{d\tau} \right] \Rightarrow \\ \frac{c}{b} \frac{d\pi}{d\tau} &= \left[eE + \frac{e}{b} (u \times B) \right] = \left[eE + \frac{e}{c} (w \times B) \right] = \frac{d\pi}{dt} \quad 2.49 \end{aligned}$$

Persamaan 2.49 diatas menunjukkan bahwa persamaan gerak standar dan persamaan gerak dual secara matematis setara (Tepper, 2021). Persamaan 2.49 hanya untuk membuktikan bahwa versi dual telah dibuktikan pada penelitian sebelumnya. Akan tetapi persamaan yang akan sangat dibutuhkan dalam penelitian ini terdapat dalam persamaan 2.48 dimana didapatkan Hamiltonian dalam versi Dualnya, yang biasa disebut dengan Hamiltonian Kanonik.

2.2.3 Teori Maxwell versi Dual

Teori Maxwell versi Dual yang akan dibahas dalam penelitian ini diharapkan akan bisa menjelaskan mengenai medan magnetik pada partikel elektron yang bisa didapatkan dari persamaan elektron versi dual. Untuk mempelajari medan partikel, dapat dituliskan persamaan Maxwell (dalam satuan cgs):

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi\rho\mathbf{w} \right]\end{aligned}\quad 2.50$$

Dengan \mathbf{B} medan magnet, dan \mathbf{E} medan listrik. Menggunakan persamaan (2.40) dan (2.41), kita mendapatkan (representasi yang identik secara matematis):

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{b} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \tau} & \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{b} \left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \tau} + 4\pi\rho\mathbf{u} \right]\end{aligned}\quad 2.51$$

Jadi, kita memperoleh himpunan persamaan Maxwell yang ekuivalen secara matematis menggunakan waktu lokal partikel untuk menggambarkan medannya. Untuk menurunkan persamaan gelombang yang sesuai, kami mengambil *curl* dari dua persamaan terakhir di (2.51), dan menggunakan identitas vektor standar, untuk mendapatkan (Tepper, 2021):

$$\begin{aligned}\frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial \tau^2} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{b^4} \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \tau} \right] - \nabla^2 \cdot \mathbf{B} &= \frac{1}{b} [4\pi \nabla \times (\rho\mathbf{u})] \\ \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \tau^2} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{b^4} \left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \tau} \right] - \nabla^2 \cdot \mathbf{E} &= -\nabla(4\pi\rho) - \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{4\pi(\rho\mathbf{u})}{b} \right]\end{aligned}\quad 2.52$$

Dari beberapa persamaan yang didapatkan akan dijelaskan lebih lanjut dalam pembahasan mengenai medan magnetik partikel elektron pada akhir penelitian ini.

2.2. Teori Kuantum Relativistik Versi Dual

Pada pembahasan ini dijelaskan teori kuantum relativistik versi Dual untuk memberikan gambaran umum untuk lebih mudah memahami bagaimana versi dual pada persamaan Dirac. Persamaan Klein-Gordon dan Dirac pertama kali ditemukan dalam upaya awal untuk membuat mekanika kuantum kompatibel dengan perumusan Minkowski tentang teori relativitas khusus. Keduanya sebagian berhasil tetapi tidak bisa lagi diartikan sebagai persamaan partikel. Solusi lengkap membutuhkan teori medan kuantum dan masalah terkaitnya. Pada bagian ini kami memperkenalkan teori kuantum relativistik dual, yang selalu memiliki teori partikel tunggal. Menggunakan (2.48),:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = K\Psi = \left[\frac{H^2}{2mc^2} + \frac{mc^2}{2} \right] \Psi \quad 2.53$$

Selain Dirac Hamiltonian, ada dua kemungkinan Hamiltonian lainnya, tergantung pada cara potensi muncul dengan operator akar kuadrat, dengan operator

helicity $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix}$ dan σ merupakan matriks Pauli:

$$\begin{aligned} & \hat{\beta} \sqrt{c^2 \pi^2 - ec\hbar \Sigma \cdot \mathbf{B} + m^2 c^4 + V} \\ & \hat{\beta} \sqrt{c^2 \pi^2 - ec\hbar \Sigma \cdot \mathbf{B} + (mc^2 + \hat{\beta}V)^2} \end{aligned} \quad 2.54$$

Ini memberi kemungkinan persamaan partikel relativistik versi dual untuk partikel spin- 1/2 (Tepper, 2004):

1. Versi dual dari persamaan akar kuadrat, menggunakan kemungkinan pertama:
2. Versi dual dari persamaan akar kuadrat, menggunakan kemungkinan kedua:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[\frac{\pi^2}{2m} + V + mc^2 - \frac{e\hbar}{2mc} \Sigma \cdot \mathbf{B} + \frac{V^2}{2mc^2} \right] \Psi \quad 2.56$$

2.3. Teori Relativitas Partikel Elektron

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = & \left[\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} - \frac{e\hbar}{2mc} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{B} + mc^2 + \frac{V^2}{2mc^2} \right] \Psi \\
 & + \frac{V\hat{\beta}\sqrt{c^2\boldsymbol{\pi}^2 - e\hbar\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{B} + m^2c^4}}{2mc^2} \Psi \\
 & + \frac{\hat{\beta}\sqrt{c^2\boldsymbol{\pi}^2 - e\hbar\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{B} + m^2c^4}}{2mc^2} V\Psi
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

Titik awal menemukan pembenaran yang tepat untuk spin elektron adalah persamaan Dirac, yang akan kita peroleh dengan linearisasi dari generalisasi relativistik dari persamaan Schrödinger. Namun, untuk tujuan ini harus meninggalkan Mekanika Kuantum non-relativistik, dan memanfaatkan beberapa konsep dan teorema Teori Relativitas Khusus. Ini sangat diperlukan, karena spin, momen spin, dan interaksi spin-orbit ternyata hanya sifat partikel murni yang dapat dibenarkan secara relativistik. (Nolting, 2017).

2.4.1 Persamaan Dirac Elektron bebas

Persamaan Dirac pada partikel elektron yang digunakan dalam penelitian ini yaitu elektron yang dipengaruhi oleh medan elektromagnetik. Sebelum menginjak pembahasan Persamaan Dirac yang dipengaruhi medan elektromagnetik akan lebih dulu dipaparkan persamaan Dirac elektron bebas yang memiliki persamaan

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + i\hbar c \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \hat{\beta} m_e c^2 \right) |\psi(\mathbf{r}, t)\rangle = 0 \tag{2.57}$$

Dimana $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ dan $\hat{\beta}$ merupakan matriks Dirac. Segera kita akan mengenali bahwa persamaan linier kedua, yang dibandingkan untuk persamaan lainnya, penjumlahan kedua dan ketiga. Keduanya memiliki tanda yang berlawanan mengarah ke pernyataan fisik yang sama. Oleh karena itu, kita hanya perlu menganalisis satu dari dua persamaan. Jika $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ dan $\hat{\beta}$ benar-benar matriks $n \times n$, maka

fungsi gelombang $|\psi(\mathbf{r}, t)\rangle$ harus merupakan vektor komponen-n. Agar (2.57) secara formal mendapatkan struktur persamaan Schrödinger yang bergantung waktu, kami memperkenalkan (Nolting, 2017)

$$H_D^{(0)} = c\hat{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \hat{\beta}m_e c^2 \quad 2.58$$

$H_D^{(0)}$ Hamiltonian Dirac partikel bebas, dengan menggunakan operator ini kita merumuskan persamaan Dirac yang bergantung waktu dan tidak bergantung waktu:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(\mathbf{r}, t)\rangle = H_D^{(0)} |\psi(\mathbf{r}, t)\rangle$$

$$H_D^{(0)} |\psi(\mathbf{r}, t)\rangle = E |\psi(\mathbf{r}, t)\rangle \quad 2.59$$

Status yang sama dari komponen posisi dan waktu adalah tipikal untuk teori relativitas, yang sudah memanifestasikan dirinya dalam matriks transformasi Lorentz. Persamaan gelombang relativistik karenanya harus simetris terhadap koordinat ruang dan waktu. Khususnya untuk koordinat ruang juga, menggunakan persamaan diferensial orde pertama. Itu jelas dijamin oleh persamaan Dirac (2.58).

2.4.2 Persamaan Dirac Elektron dalam Medan Elektromagnetik

Setelah dipaparkan mengenai Persamaan Dirac untuk elektron bebas yang mana menjelaskan keadaan elektron dalam keadaan tanpa potensial, kemudian dideskripsikan elektron dalam medan elektromagnetik (potensial vektor $A(\mathbf{r}, t)$, potensial skalar $\varphi(\mathbf{r}, t)$) dengan hanya perlu melakukan dalam hubungan turunan sejauh ini, substitusi biasa (Nolting, 2017),

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + e\mathbf{A} \quad ; \quad E \rightarrow E + e\varphi \quad 2.60$$

Persamaan 2.60 Ini dapat digabungkan dengan A^μ empat-potensial menjadi:

$$p^\mu \rightarrow p^\mu + eA^\mu$$

$$A^\mu = \left(\frac{1}{c} \varphi, \mathbf{A} \right) \quad 2.61$$

Sehingga diperoleh persamaan Dirac dalam medan elektromagnetik

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \left(\frac{\hbar}{i} \nabla + e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right) - \hat{\beta}m_e c^2 + e\varphi(\mathbf{r}, t) \right] |\psi(\mathbf{r}, t)\rangle = 0 \quad 2.62$$

Operator Dirac H_D dipengaruhi medan elektromagnetik yang sesuai kemudian dalam bentuk:

$$H_D = c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) + \hat{\beta}m_e c^2 + e\varphi \quad 2.63$$

Operator inilah yang akan sangat dibutuhkan dalam penelitian ini dengan mentransformasikan menjadi persamaan Dirac versi dua untuk partikel elektron dalam medan elektromagnetik. Masih ada tugas untuk memperbaiki Matriks Dirac $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ dan $\hat{\beta}$ dan menggunakan kondisi (2.36). Perlu kita ingat bahwa matriks spin Pauli mematuhi

$$\boldsymbol{\sigma}_x^2 = \boldsymbol{\sigma}_y^2 = \boldsymbol{\sigma}_z^2 = \mathbb{I}_2$$

$$[\boldsymbol{\sigma}_x, \boldsymbol{\sigma}_y]_+ = [\boldsymbol{\sigma}_y, \boldsymbol{\sigma}_z]_+ = [\boldsymbol{\sigma}_z, \boldsymbol{\sigma}_x]_+ = 0$$

hubungan yang sama dengan tiga komponen $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$. Dengan pilihan berikut, (2.36) dapat dipenuhi

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_2 \end{pmatrix} \quad 2.64$$

Komponen dari operator putaran $\boldsymbol{\sigma}$ adalah matriks Pauli 2x2-spin. \mathbb{I}_2 adalah matriks 2×2 . Untuk operator spin terkadang juga menulis:

$$S = \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma}; \boldsymbol{\sigma} \equiv (\boldsymbol{\sigma}_x, \boldsymbol{\sigma}_y, \boldsymbol{\sigma}_z)$$

Komponen dari operator vektor $\boldsymbol{\sigma}$ adalah **matriks spin Pauli**:

$$\boldsymbol{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \boldsymbol{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \boldsymbol{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Operator Dirac (2.58) dengannya menjadi matriks 4×4 :

$$H_D^{(0)} \equiv \begin{pmatrix} m_e c^2 & 0 & c p_z & c(p_x - p_y) \\ 0 & m_e c^2 & c(p_x + p_y) & -c p_z \\ c p_z & c(p_x - p_y) & -m_e c^2 & 0 \\ c(p_x + p_y) & -c p_z & 0 & -m_e c^2 \end{pmatrix} \quad 2.65$$

Sejalan dengan itu, fungsi gelombang $|\psi(\mathbf{r}, t)\rangle$ juga harus merupakan besaran empat komponen. Satu membaca dari (2.58) bahwa $H_D^{(0)}$ bolak-balik dengan operator momentum. Oleh karena itu, ansatz berikut untuk $|\psi\rangle$ tampak sedikit menjanjikan:

$$\begin{aligned} |\psi(\mathbf{r}, t)\rangle &= \hat{\alpha} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p^\mu x_\mu\right) \\ &= \hat{\alpha} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et)\right) \end{aligned} \quad 2.66$$

Hal tersebut tidak lain adalah *eigen-function* gelombang bidang yang ditulis secara relativistik-kovarian dari momentum, dikalikan dengan vektor kolom,

$$\hat{\alpha} \equiv \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \quad 2.67$$

dengan empat komponen *position-independent*. Seseorang menyebut $\hat{\alpha}$ atau juga $|\psi(\mathbf{r}, t)\rangle$ sebagai spinor Dirac (*Dirac Spinor*). Jika kita menerapkan ansatz ini dalam persamaan Dirac *time-independent* (2.59) maka kita sampai pada sistem persamaan homogen berikut:

$$\begin{pmatrix} m_e c^2 - E & 0 & c p_z & c(p_x - p_y) \\ 0 & m_e c^2 - E & c(p_x + p_y) & -c p_z \\ c p_z & c(p_x - p_y) & -m_e c^2 - E & 0 \\ c(p_x + p_y) & -c p_z & 0 & -m_e c^2 - E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 2.68$$

Berbeda dengan (2.65) momentum p_x, p_y, p_z dalam matriks ini bukan lagi operator akan tetapi angka, yang keluar sebagai *eigen-value* setelah penerapan

operator di (2.65) ke gelombang bidang (2.66). Angka nol dari determinan matriks koefisien pada (2.68),

$$0 \doteq \{(m_e c^2)^2 - E^2 + c^2 p^2\}^2 \quad 2.69$$

sesuai dengan nilai energi-eigen dari operator Dirac,

$$E_\eta = \eta E_p \quad ; \quad \eta = \pm \quad ; \quad E_p = \sqrt{c^2 \mathbf{p}^2 + m_e^2 c^4} \quad 2.70$$

Untuk masing-masing dari dua *eigen-value* E_+ dan E_- terdapat dua spinor eigen independen linier $\hat{a}_{1,2}^\pm$ yang akan kita bedakan. Pertama, dengan indeks yang lebih rendah 1 dan 2. Untuk menentukannya, kita memiliki untuk menerima (2.61) $E = E_\pm$. Diketahui bahwa, misalnya terdapat dua baris pertama matriks saling ortogonal sedangkan baris ketiga dan keempat dapat ditulis sebagai kombinasi linier dari dua baris pertama. Sebaliknya, baris ketiga dan keempat adalah ortogonal, dan baris pertama dan kedua adalah kombinasi linier dari mereka. Jika kita, untuk saat ini, mengabaikan normalisasi, maka kita dapat dengan cepat memperbaikinya dengan pengaturan awal ($\hat{a}_{1,1}^+ = 1, \hat{a}_{1,2}^+ = 0$), ($\hat{a}_{2,1}^+ = 0, \hat{a}_{2,2}^+ = 1$), ($\hat{a}_{1,3}^- = 1, \hat{a}_{1,4}^- = 0$), ($\hat{a}_{2,3}^- = 0, \hat{a}_{2,4}^- = 1$) masing-masing dua spinor lainnya $\hat{a}_1^\pm, \hat{a}_2^\pm$ dengan menggunakan (2.68):

$$\hat{a}_1^+ \equiv d \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_z}{\hat{E}} \\ \frac{cp_+}{\hat{E}} \end{pmatrix}, \hat{a}_2^+ \equiv d \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{cp_-}{\hat{E}} \\ -\frac{cp_z}{\hat{E}} \end{pmatrix},$$

$$\hat{a}_1^- \equiv d \begin{pmatrix} -\frac{cp_z}{\hat{E}} \\ -\frac{cp_+}{\hat{E}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{a}_2^- \equiv d \begin{pmatrix} -\frac{cp_-}{\hat{E}} \\ \frac{cp_z}{\hat{E}} \\ \hat{E} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 2.71$$

Di sini kami telah menulis untuk singkatan:

$$\hat{E} = E_p + m_e c^2; p_{\pm} = p_x \pm i p_y \quad 2.72$$

Konstanta normalisasi d dapat dipilih sebagai real, dan kemudian sama untuk keempat spinor:

$$d = \frac{E_p + m_e c^2}{\sqrt{(m_e c^2 + E_p)^2 + c^2 p^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{c^2 p^2}{\hat{E}^2}}} \xrightarrow{v \ll c} 1 \quad 2.73$$

Empat vektor kolom jelas ortogonal berpasangan. Oleh karena itu, vektor \hat{a}_1^+ dan \hat{a}_2^+ membangun basis dari ruang E_+ eigen \hat{a}_1^- dan \hat{a}_2^- merentang ruang eigen dari *eigen-value* E_- . Kombinasi linear sembarang dari \hat{a}_1^{\pm} dan \hat{a}_2^{\pm} tentu saja juga merupakan solusi eigen untuk energi E_{\pm} . Persamaan Dirac (2.57) dengan demikian pada prinsipnya diselesaikan. Kemudian mencari tahu lebih banyak tentang solusi degenerasi $\hat{a}_{1,2}^+$ dan $\hat{a}_{1,2}^-$. Kita harus mencari yang dapat diamati, yang pengukurannya menghilangkan degenerasi yang masih ada. Di sisi lain, yang dapat diamati harus bolak-balik dengan operator Dirac $H_D^{(0)}$, untuk membangun bersama dengannya satu set lengkap yang dapat diamati yang kompatibel (Nolting, 2017). Persamaan (2.64-73) dipaparkan untuk sedikit menggambarkan tentang pemisahan energi antara partikel dan anti-partikel yang akan dijelaskan lebih lanjut pada pembahasan penelitian ini.

2.4.3 Spin Elektron

Spin merupakan besaran pada elektron yang tidak bisa dijelaskan secara klasik yang merupakan unsur intrinsik dari sebuah momentum sudut pada partikel elektron. Untuk menunjukkan bahwa momen magnet partikel elektron juga terkait dengan putaran kuantitas, maka diperkenalkan menggunakan untuk pertimbangan secara langsung operator Dirac (2.57) untuk elektron dalam medan

elektromagnetik. Untuk tujuan ini, maka pembahasan ini dibatasi pada subruang solusi dengan energi positif (elektron).

Sekarang menguraikan spinor Dirac empat komponen umum menjadi dua vektor dua komponen:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\psi} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix} \quad 2.74$$

dengan

$$|\hat{\psi}\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}; |\chi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad 2.75$$

Persamaan 2.75 pada awalnya hanya notasi yang sedikit berubah dari 2.74, untuk mempermudah dalam kondisi tertentu. Ini misalnya kasus ketika komponen $|\hat{\psi}\rangle$ dan $|\chi\rangle$ memiliki orde yang berbeda. Dalam analisis terakhir, benar-benar tertarik pada Mekanika Kuantum non-relativistik, yaitu pada kasus pembatas non-relativistik yang sesuai $v \ll c$ dari teori Dirac. Dalam batas ini, *Eigen-value* energi E_p dari elektron bebas (2.70) hanya berbeda sedikit dari energi diamnya $m_e c^2$.

Perbedaan,

$$T = E_p - m_e c^2 = m_e c^2 \left(\sqrt{1 + \frac{p^2}{m_e^2 c^2}} - 1 \right) = \frac{p^2}{2m_e} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \right] \quad 2.76$$

maka hanya ekspresi terkenal dari energi kinetik elektron. Mari kita perkirakan dengan demikian orde relatif dari dua komponen $|\hat{\psi}\rangle$ dan $|\chi\rangle$. Karena $|\hat{\psi}\rangle$ dapat ditulis sebagai kombinasi linier dari keadaan basis (2.71) dengan koefisien orde satu, kita dapat melakukan estimasi yang dimaksud juga secara langsung dengan komponen dalam (2.71):

$$\begin{aligned} \left| \frac{\hat{a}_{13}^{(+)}}{\hat{a}_{11}^{(+)}} \right|^2 &= \left| \frac{\hat{a}_{24}^{(+)}}{\hat{a}_{22}^{(+)}} \right|^2 = \frac{c^2 p_z^2}{(E_p + m_e c^2)^2} \\ &\leq \frac{c^2 p_z^2}{(E_p + m_e c^2)^2} = \frac{E_p - m_e c^2}{E_p + m_e c^2} = \frac{T}{T + 2m_e c^2} = \mathcal{O} \left[\left(\frac{v^2}{c^2} \right) \right] \end{aligned} \quad 2.77$$

Secara analog, seseorang menemukan:

$$\left| \frac{\hat{a}_{14}^{(+)}}{\hat{a}_{11}^{(+)}} \right|^2 = \left| \frac{\hat{a}_{23}^{(+)}}{\hat{a}_{22}^{(+)}} \right|^2 = \frac{c^2 (p_x^2 + p_y^2)}{(E_p + m_e c^2)^2} \mathcal{O} \left[\left(\frac{v^2}{c^2} \right) \right] \quad 2.78$$

Komponen $\hat{a}_{13}^{(+)}$, $\hat{a}_{14}^{(+)}$ dan $\hat{a}_{23}^{(+)}$, $\hat{a}_{24}^{(+)}$ dengan demikian menjadi dalam limit non-relativistik yang sangat kecil dibandingkan dengan $\hat{a}_{11}^{(+)}$ dan $\hat{a}_{22}^{(+)}$. Itu segera ditransfer ke spinor umum (2.74). Magnitudo $|\psi_{3,4}|$ akan jauh lebih kecil dari $|\psi_{1,2}|$. Fakta ini, yang telah diperkirakan di sini untuk elektron bebas, akan tidak berubah secara substansial bahkan ketika kita menyalakan medan elektromagnetik 'normal'. Pada akhirnya, inilah motif penguraian (2.74), karena dengan demikian teori Dirac menjadi dalam batas *non-relativistik* yang setara dengan teori dua komponen, yang disebut teori Pauli, yang sekarang ingin dibahas. Kami menerapkan operator Dirac H_D dari (2.62) ke spinor empat komponen (2.74). Jika aksi matriks Dirac $\hat{\alpha}$ dan $\hat{\beta}$, menurut (2.63), sudah dibuat, maka tetap sebagai persamaan nilai eigen

$$H_D \begin{pmatrix} \hat{\psi} \\ \chi \end{pmatrix} = c(\mathbf{p} + e\mathbf{A}) \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & \chi \\ \boldsymbol{\sigma} & \hat{\psi} \end{pmatrix} + m_e c^2 \begin{pmatrix} \hat{\psi} \\ -\chi \end{pmatrix} - e\varphi \begin{pmatrix} \hat{\psi} \\ \chi \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \hat{\psi} \\ \chi \end{pmatrix} \quad 2.79$$

Ini mengarah ke sistem persamaan berikut:

$$(E - m_e c^2 + e\varphi) |\hat{\psi}\rangle = c(\mathbf{p} + e\mathbf{A}) \cdot \boldsymbol{\sigma} |\chi\rangle \quad 2.80$$

$$(E + m_e c^2 + e\varphi) |\chi\rangle = c(\mathbf{p} + e\mathbf{A}) \cdot \boldsymbol{\sigma} |\hat{\psi}\rangle \quad 2.81$$

Sejauh ini semuanya tepat. Persamaan terakhir menunjukkan sekali lagi urutan besarnya yang berbeda:

$$|\chi\rangle = (E + m_e c^2 + e\varphi)^{-1} c(\mathbf{p} + e\mathbf{A}) \cdot \boldsymbol{\sigma} |\hat{\psi}\rangle \quad 2.82$$

Eigen-value dari elektron-Dirac dalam medan elektromagnetik normal tentu saja, seperti elektron bebas E_p , juga berorde $m_e c^2$. Oleh karena itu, seseorang dapat memperkirakan:

$$E \approx m_e c^2 + e\varphi \approx m_e c^2; \quad E + m_e c^2 \approx 2m_e c^2 \quad 2.83$$

Persamaan yang masih eksak dapat disederhanakan

$$|\chi\rangle = \frac{1}{2m_e c^2} (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) \cdot \boldsymbol{\sigma} |\hat{\psi}\rangle + \mathcal{O}\left[\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right] \quad 2.84$$

Karena $|\chi\rangle \approx \mathcal{O}(v/c)|\psi$, notasi komponen kecil untuk $|\chi\rangle$ dan komponen besar untuk $|\hat{\psi}\rangle$ telah ditetapkan dalam literatur. atau teori Pauli sebagai kasus pembatas non-relativistik dari teori Dirac, estimasi (2.78) untuk komponen kecil sudah cukup. Dengan memasukkan ekspresi ini ke dalam (2.74) kita memperoleh persamaan *eigen-value* untuk komponen besar $|\hat{\psi}\rangle$:

$$H_p |\hat{\psi}\rangle = (E - m_e c^2) |\hat{\psi}\rangle$$

$$H_p = \frac{1}{2m_e} [(\mathbf{p} + e\mathbf{A}) \cdot \boldsymbol{\sigma}] [(\mathbf{p} + e\mathbf{A}) \cdot \boldsymbol{\sigma}] - e\varphi \mathbb{I}_2 \quad 2.85$$

H_p disebut sebagai *operator Pauli-Hamilton*. Karena matriks spin Pauli bolak-balik dengan \mathbf{p} dan \mathbf{A} kita dapat menerapkan untuk reformulasi lebih lanjut hubungan,

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \mathbb{I}_2 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad 2.86$$

Dengan demikian masih dibutuhkan:

$$(\mathbf{p} + e\mathbf{A}) \times (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) = e(\mathbf{p} \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{p}) \quad 2.87$$

$$\begin{aligned}
&= e \left(\frac{\hbar}{i} \times \nabla A - \mathbf{A} \times \mathbf{p} + \mathbf{A} \times \mathbf{p} \right) \\
&= e \frac{\hbar}{i} \mathbf{B}
\end{aligned}$$

$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ adalah seperti biasa induksi magnet. Operator Pauli-Hamilton, yang akhirnya mewakili matriks 2×2 , memiliki bentuk:

$$H_p = \left[\frac{1}{2m_e} (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 - e\varphi \right] \mathbb{I}_2 + \frac{e\hbar}{2m_e} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \quad 2.88$$

Itu adalah operator Hamilton dari partikel bermassa m_e , muatan $q = -e$ dan momen magnetik:

$$\mu_s = -2 \frac{\mu_B}{\hbar} \mathbf{S} = \frac{e\hbar}{2m_e} \boldsymbol{\sigma} = -\mu_B \boldsymbol{\sigma} \quad 2.89$$

H_p persis dengan operator Hamilton dari persamaan Pauli, yang secara empiris dibenarkan. Dengan putaran momentum sudut, yang diturunkan dari teori Dirac, ada momen magnet terkait \mathbf{S} , yang memiliki struktur persis dengan evaluasi eksperimental efek Zeeman menghasilkan (Nolting, 2017):

$$\mu_s(e^-) = -g \frac{\mu_B}{\hbar}$$

2.4. Momen Magnetik Anomali

Momentum sudut pada partikel elektron memiliki unsur intrinsik yang bernama spin, yang mana spin ini yang akan menciptakan adanya momen magnetik pada elektron. Akan tetapi momen magnetik anomali kali ini berbeda dengan momen magnetik biasa dan akan dijelaskan dalam pembahasan ini. Pada tahun 1928, pada usia 25, Dirac memperkenalkan persamaannya yang sekarang terkenal yang menggambarkan fungsi gelombang elektron 4 komponen (spinor), $\psi(x)$ dalam potensial elektromagnetik ($A_\mu(x)$) (Pauli, 1958):

$$i \left(\partial_\mu - ie A_\mu(x) \right) \gamma^\mu \psi(x) = m_e \psi(x) \quad 2.90$$

di mana γ^μ adalah matriks Dirac 4×4 . Persamaan sederhana itu secara elegan menggabungkan mekanika kuantum, relativitas khusus, dan putaran dengan prinsip invarian pengukur elektromagnetik.

Persamaan Dirac terkenal karena prediksi revolusionernya bahwa antipartikel harus ada sebagai solusi energi negatif. Keberhasilan langsungnya adalah dalam memberikan penjelasan mengapa rasio giromagnetik (factor-g) yang memparametrikkan antara momen magnetik elektron ($\boldsymbol{\mu}_e$) dan spin intrinsiknya (\boldsymbol{S}) sebagai berikut:

$$\boldsymbol{\mu}_e = \frac{g_e e}{2m_e} \boldsymbol{S} \quad 2.91$$

g_e sama dengan 2. Persamaan Dirac memberikan landasan teoretis alami untuk nilai itu

Seseorang dapat membedakan $g_e = 2$ dengan menerapkan operator $(\partial_\nu - ieA_\nu(x))\gamma^\nu$ ke persamaan (2.90). Setelah beberapa manipulasi, kita menemukan bahwa setiap komponen dari $\psi(x)$ mematuhi persamaan skalar Klein-Gordon tetapi ada istilah tambahan yang menggambarkan momen magnet dengan $g_e = 2$ berinteraksi dengan medan magnet.

Tentu saja, Dirac dapat mengakomodasi penyimpangan besar atau kecil dari $g_e = 2$ dengan menambahkan apa yang disebut istilah interaksi Pauli:

$$-\frac{e}{2m_e} a_e F_{\mu\nu}(x) \boldsymbol{\sigma}^{\mu\nu} \psi(x) \quad 2.92$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu; \quad \boldsymbol{\sigma}^{\mu\nu} = \frac{i}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu) \quad 2.93$$

a_e merupakan momen magnetik anomal, dari persamaan (2.90), maka akan menghasilkan (Marciano, 2004):

$$g_e = 2 (1 + a_e)$$

$$a_e = \frac{g_e - 2}{2} \quad 2.94$$

Momen magnetik anomali elektron ditemukan pada tahun 1947 oleh P. Kusch dan H. M. Foley. Spektrum Zeeman dari atom galium dalam medan magnet konstan diukur, dan rasio giromagnetik (faktor-g) elektron ditentukan. Jika nilai orbital g diasumsikan satu seperti yang diprediksi oleh teori Dirac, nilai spin g elektron ditentukan sebagai:

$$g = 2 \times (1,001\,19 \pm 0,000\,05) \quad 2.95$$

Faktor-g elektron yang diturunkan dari teori Dirac persis bilangan bulat dua, dan perbedaan antara factor g terukur dan faktor-g Dirac yang dua tersebut disebut momen magnetik anomali elektron:

$$a_e = \frac{g - 2}{2} \quad 2.96$$

Penyimpangan kecil 0,1% dari elektron g ini, serta pergeseran Lamb dari atom hidrogen yang ditemukan satu tahun sebelumnya adalah pencapaian kemajuan mutakhir dalam pengukuran frekuensi pada waktu itu.

Teori partikel bermuatan dan foton, disebut sebagai elektrodinamika kuantum (QED), juga dikembangkan di era yang sama. Ini harus dibedakan dari versi lamanya dari tahun 1920-an, yang mengalami masalah divergensi yang terkait dengan perhitungan perturbatif. Ide baru renormalisasi, memungkinkan kita untuk menghitung kuantitas fisik terbatas dari teori gangguan QED dengan presisi tinggi. Schwinger menunjukkan bahwa nilai momen magnetik anomali elektron a_e dapat

dikaitkan dengan efek satu putaran QED. Perbandingan presisi antara pengukuran dan teori pada tahun 1947–1948 adalah titik awal pengujian QED yang ketat dan model standar partikel elementer. Presisi sangat tinggi yang dicapai dalam pengujian a_e adalah konsekuensi dari nilai kecil dari konstanta struktur halus (*hyperfine*) dan massa elektron yang kecil. pergeseran Lamb tidak dapat berfungsi sebagai uji QED presisi tinggi karena bergantung pada kuantitas lain seperti interaksi hadron dan massa hadron. (Aoyama, 2018).

BAB III

PERSAMAAN DIRAC VERSI DUAL

3.1. Persamaan Dirac

Fisikawan yang mendalami mekanika kuantum telah menetapkan beberapa postulat yang menjadi dasar untuk perumusan persamaan gerak yang dapat menjelaskan perilaku partikel yang memiliki sifat ganda. Partikel-partikel berukuran mikro tidak dapat diketahui dengan pasti bagaimanakah bentuk fisiknya, posisinya, momentumnya, energinya, dan juga berapa lamakah partikel tersebut berperilaku sebagai partikel atau berperilaku sebagai gelombang. Karena ketidakpastian terhadap beberapa besaran fisis tersebut, bentuk dan perilaku partikel mikroskopik tidak mungkin ditunjukkan dalam bentuk gambar nyata sebagaimana yang dilakukan terhadap besaran fisis dalam mekanika klasik.

Sebagai contoh interaksi antara dua kelereng, dalam mekanika klasik secara nyata dapat ditunjukkan gambarnya, namun bagaimana kita dapat menggambarkan interaksi antara gelombang Elektomagnetik dengan elektron diam (pada percobaan efek Compton), sementara bentuk foton gelombang Elektomagnetik dan bentuk elektron tidak pernah dilihat. Salah satu cara untuk menjelaskan fenomena-fenomena yang terjadi dalam dunia mikroskopik adalah melalui diagram dan bahasa matematika (Halim, 2019).

Persamaan Dirac merupakan persamaan gelombang relativistik berbentuk persamaan diferensial yang jika diselesaikan akan menghasilkan solusi berupa fungsi gelombang $\psi(x)$. Fungsi gelombang sendiri merupakan pendeskripsi keadaan gerak sistem yang memuat informasi tentang sistem yang dimaksud. Karena dengan melalui fungsi gelombang dapat diketahui distribusi probabilitas

partikel dalam ruang waktu tertentu serta momentum linier yang dimiliki partikel. Mengingat bahwa besaran-besaran dinamis seperti gaya, energi kinetik, energi potensial, momentum sudut, dan sejenisnya dapat dinyatakan sebagai fungsi posisi dan momentum sudut (Sutopo, 2005).

Besaran-besaran dinamis tersebut dapat diketahui atau ditentukan nilainya melalui pengukuran. Postulat tentang pengukuran menyatakan bahwa mengukur dalam konteks fisika kuantum adalah mengerjakan operator yang mewakili besaran fisika yang diukur pada fungsi gelombang yang mendeskripsikan keadaan sistem saat pengukuran (Sutopo, 2005).

Salah satu keberhasilan persamaan Dirac adalah dapat menurunkan secara teoritis faktor-g dari partikel elektron dengan nilai persis 2 dan belum terdapat istilah momen magnetik anomali. Akan tetapi 20 tahun setelah penemuan persamaan Dirac tersebut, terdapat tes presisi QED yang mana dapat membuktikan nilai faktor-g dari partikel elektron secara eksperimen. Dari hasil eksperimen faktor-g tersebut dibandingkan dengan faktor-g yang diturunkan secara teoritis oleh persamaan Dirac. Oleh karena ada perbedaan tersebut maka didefinisikan terdapat perbedaan kecil antara hasil eksperimen dan secara teoritis nilai dari faktor-g partikel elektron disebut dengan istilah momen magnetik anomaly. Persamaan Dirac yang masih belum mengenal istilah momen magnetik anomaly berbeda dengan persamaan Dirac versi dual yang akan dipaparkan dalam penelitian ini.

Operator untuk energi sistem ditentukan oleh fungsi Hamiltonian $H(r, p, t)$. Untuk sistem dengan satu partikel, operator Hamilton yaitu

$$H = T + V(r) \quad 3.1$$

Pada mekanika klasik, energi total dari suatu sistem yang diekspresikan dalam bentuk variabel koordinat dan momentum disebut dengan fungsi Hamilton atau Hamiltonian,

$$\begin{aligned} E &= H(r, p, t) \\ &= T(r, p, t) + V(r, t) \end{aligned} \quad 3.2$$

Dari fungsi Hamilton, operator Hamilton diperoleh dengan melakukan penggantian variabel momentum dengan operator momentum (Sudiarta. 2019). Dapat kita lihat dari solusi persamaan Dirac (2.37) dirubah kedalam bentuk fungsi gelombang relativistik:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = (c\hat{\alpha} \cdot \mathbf{p} + mc^2\hat{\beta})\Psi \quad 3.3$$

Atau bisa dituliskan dalam bentuk operator Hamiltonian Dirac sebagaimana pada persamaan (2.58)

$$H_D = (c\hat{\alpha} \cdot \mathbf{p} + mc^2\hat{\beta}) \quad 3.4$$

Banyak ide dalam relativitas dan fisika kuantum yang konsisten dengan eksperimen, walaupun tidak cocok dengan konsep klasik. Dalam tahun 1929 sifat pokok spin elektron dikokohkan oleh pengembangan mekanika kuantum Paul Dirac. Dimulai dengan persamaan energi non-relativistik $E = \frac{p^2}{2m} + V$ seperti yang dilakukan dengan Schrödinger, Dirac memakai persamaan relativistik

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} + V \quad 3.5$$

Didapatkan bahwa sebuah partikel yang mempunyai massa dan muatan seperti elektron harus memiliki momentum sudut intrinsik dan momen magnetik seperti yang diusulkan oleh Goudsmit dan Uhlenbeck (Beiser, 2001). Oleh karena itu dapat dituliskan kembali Persamaan Dirac pada (3.3) dengan pengaruh Potensial

Energi V sesuai yang dirumuskan Dirac pada persamaan kuantum relativistik yang serupa dengan persamaan (2.63):

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = (c\hat{\alpha} \cdot \mathbf{p} + mc^2\hat{\beta} + V)\Psi \quad 3.6$$

Pemisahan analitik langsung pada persamaan gelombang relativistik sebenarnya cukup sederhana dan memberikan pengetahuan tambahan tentang komponen partikel dan antipartikel. Misalkan $A(\mathbf{x}, t)$ dan $V(x)$ diberikan potensial vektor dan skalar, dan membuat transformasi sesuai dengan persamaan 2.60 untuk membedakan antara persamaan Dirac partikel bebas dan persamaan Dirac yang dipegaruhi medan elektromagnetik, maka menggunakan operator $\boldsymbol{\pi}$ sebagai bentuk operator momentum $\mathbf{p} \rightarrow \boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} - \left(\frac{e}{c}\right)\mathbf{A}$, begitu juga operator energi λ . Ditulis persamaan Dirac dan pemisahan langsung antara partikel dan anti-partikel dalam bentuk matriks dua komponen dengan $\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}_i \\ \boldsymbol{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix}; \hat{\beta} = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}$ dapat dituliskan

$$\lambda \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = [(c\hat{\alpha} \cdot \boldsymbol{\pi} + mc^2\hat{\beta}) + V_0] \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \quad 3.7a$$

$$\lambda \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}_i \\ \boldsymbol{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\pi} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} + V_0 \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \quad 3.7b$$

Secara eksplisit dapat dituliskan untuk energi partikel (ψ_1)

$$\begin{aligned} \lambda\psi_1 &= c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})\psi_2 + mc^2\psi_1 + V_0\psi_1 \\ \lambda\psi_1 - mc^2\psi_1 - V_0\psi_1 &= c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})\psi_2 \\ (\lambda - mc^2 - V_0)\psi_1 &= c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})\psi_2 \end{aligned} \quad 3.8$$

Dan energi antipartikel (ψ_2)

$$\lambda\psi_2 = c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})\psi_1 - mc^2\psi_2 + V_0\psi_2 \quad 3.9$$

$$\lambda\psi_1 + mc^2\psi_1 - V_0\psi_1 = c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})\psi_2$$

$$(\lambda + mc^2 - V_0)\psi_1 = c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})\psi_2$$

Persamaan 3.8 dan 3.9 merupakan pemisahan analitik pada persamaan Dirac yaitu persamaan gelombang relativistik spin $\frac{1}{2}$. Untuk ψ_1 mewakili komponen partikel sedangkan ψ_2 mewakili komponen anti-partikel. Pemisahan analitik ini dapat menjelaskan elektron dan positron yang akan dijelaskan pada pembahasan selanjutnya dengan menggunakan persamaan Dirac versi dual.

3.2. Transformasi Kanonik Hamiltonian Dirac

Dalam pandangan dunia Feynman, alam semesta adalah gambar bergerak tiga dimensi di mana semakin banyak masa depan yang muncul seiring dengan perkembangan waktu. Waktu adalah variabel yang didefinisikan secara fisik dengan sifat yang berbeda dari tiga variabel spasial. Pandangan ini tidak konsisten dengan pandangan dunia Minkowski, di mana waktu merupakan koordinat tambahan untuk geometri ruang-waktu.

Dimulainya penyelidikan tentang kemungkinan adanya formulasi alternatif teori klasik dan kuantum, yang mengkodekan pandangan dunia Feynman. Ditemukan pendekatan kanonik *proper-time* untuk elektrodinamika klasik (Tepper 2015). Transformasi pada penjelasan ini adalah proses pembentukan suatu sistem koordinat dari satu sistem koordinat ke sistem koordinat lain yang dalam hal ini adalah pembentukan set koordinat baru dari satu set koordinat yang lama dengan suatu persamaan $Q = Q(q, t)$. Konsep dari transformasi dari koordinat ini harus melibatkan transformasi dari koordinat lama q_i dan momentum lama p_i , yang independen menjadi koordinat baru Q_i dan momentum baru P_i independen (Goldstein, 1950) dengan persamaan transformasi

$$Q_i = Q_i(q, p, t)$$

$$P_i = P_i(q, p, t)$$

Suatu transformasi disebut transformasi kanonik jika didalamnya terdapat fungsi Hamiltonian K dalam koordinat baru dengan hubungan

$$P_i = -\frac{d_0 K}{d_0 Q_i}, Q_i = \frac{d_0 K}{d_0 P_i}$$

Definisi kanonik berasal dari Gill dan Lindsay sebagai upaya untuk mendefinisikan *proper-time* dalam teori kuantum. Meskipun masuk akal akan tetapi terdapat masalah dalam kasus klasik, Kanonik menjadi operator pada kuantisasi. Oleh karena itu, maka digunakan

$$H = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{W}{c}\right)^2}} = \sqrt{c^2 \mathbf{p}^2 + m^2 c^4} \Rightarrow$$

$$d\tau = \left(\frac{mc^2}{H}\right) dt = \frac{mc^2}{(\sqrt{c^2 \mathbf{p}^2 + m^2 c^4})} dt \quad 3.10$$

Ditunjukkan bahwa pendekatan ini dapat bekerja jika memperlakukan transformasi pada tingkat klasik sebagai perubahan kanonik variabel. Untuk melihat bagaimana hal ini dilakukan dalam kasus bebas, misalkan W adalah sembarang klasik yang dapat diamati sehingga braket Poisson mendefinisikan persamaan Hamilton dalam kerangka x dengan

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{p}} = \{H, W\} \quad 3.11$$

Maka dari itu,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, H = \sqrt{c^2 \mathbf{p}^2 + m^2 c^4} \quad 3.12$$

Selanjutnya, dengan menggunakan persamaan (2.42) dihasilkan $dt = \left(\frac{H}{mc^2}\right) d\tau$, kita menemukan evolusi waktu dari fungsi W dengan aturan rantai pada persamaan (2.44). Oleh karena itu, konjugasi fungsional energi K ke *proper time* τ harus

memenuhi $\{K, W\} = \frac{H}{mc^2} \{H, W\}$ sesuai pada persamaan (2.45). Adapun solusi paling umum adalah:

$$K = mc^2 + \int_{mc^2}^H \left(\frac{dt}{d\tau} \right) dH' = mc^2 + \int_{mc^2}^H \left(\frac{H'}{mc^2} \right) dH' \quad 3.13$$

Jika massa m tetap dan kita membiarkan kerangka Lorentz berubah-ubah, kita peroleh

$$K = \frac{H^2}{2mc^2} + \frac{mc^2}{2} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + mc^2 \quad 3.14$$

Bentuk Hamiltonian ini terlihat seperti kasus non-relativistik, akan tetapi persamaan 3.14 sepenuhnya relativistik dan menghilangkan masalah yang terkait dengan masalah akar kuadrat dalam implementasi standar. Persamaan (3.14) memiliki kelebihan yaitu menghasilkan hubungan yang jelas dengan kasus nonrelativistik. (Tepper, 1998).

3.3. Hamiltonian Dirac Versi Dual

Telah ditunjukkan pada beberapa penelitian sebelumnya bahwa divergensi ultra-violet dalam elektrodinamika kuantum (QED) disebabkan oleh pelanggaran hubungan waktu-energi yang tidak pasti, karena asumsi implisit informasi waktu sangat kecil (dugaan Dyson). Selain itu pada penelitian yang lain juga ditunjukkan bahwa teori relativitas khusus Einstein dan teori medan Maxwell memiliki versi dual yang setara secara matematis. Oleh karena itu muncul versi dual yang menghubungkan waktu pengamat dengan *proper-time*.

Didalam fisika dikenal berbagai macam besaran fisis (observabel) yang dapat diwakilkan oleh sebuah operator. Operator-operator tersebut bersifat invariant terhadap transformasi tertentu. Sebagai contoh, operator Hamiltonian invariant terhadap transformasi koordinat (pencerminan, rotasi dan translasi). Persamaan

Klein-Gordon dan Dirac pertama kali ditemukan dalam upaya awal untuk membuat mekanika kuantum kompatibel dengan perumusan Minkowski tentang teori relativitas khusus. Keduanya sebagian berhasil tetapi tidak bisa lagi ditafsirkan sebagai persamaan partikel dan teori yang lengkap membutuhkan medan kuantum dan masalah terkait.

Pada bagian ini diperkenalkan ekstensi kanonik dari persamaan Dirac. Untuk menghasilkan operator Dirac versi Dual maka dengan cara mensubstitusikan Hamiltonian Dirac elektron dalam medan elektromagnetik (3.6) pada persamaan hasil transformasi kanonik operator Hamiltonian (3.14):

$$\begin{aligned} K_D &= \frac{H_D^2}{2mc^2} + \frac{mc^2}{2} \\ &= \frac{[(c\hat{\alpha} \cdot \boldsymbol{\pi} + mc^2\hat{\beta}) + V_0]^2}{2mc^2} + \frac{mc^2}{2} \end{aligned} \quad 3.15$$

Kemudian persamaan 3.15 dijabarkan dengan menggunakan Hamiltonian tanpa pengaruh elektromagnetik $H_0 = (c\hat{\alpha} \cdot \boldsymbol{\pi} + mc^2\hat{\beta})$ dengan menggunakan aturan pada matriks spin Pauli $\hat{\alpha}\hat{\beta} + \hat{\beta}\hat{\alpha} = 0$

$$K_D = \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{e\hbar c \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{B}}{2mc^2} + \frac{mc^2}{2} + \frac{V_0^2}{2mc^2} + \frac{H_0 V_0 + V_0 H_0}{2mc^2} + \frac{mc^2}{2}$$

atau

$$K_D = \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{e\hbar \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{B}}{2mc} + \frac{V_0^2}{2mc^2} + V + mc^2 \quad 3.16$$

Dimana $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{\sigma}$ merupakan matriks Pauli. V menunjukkan energi Hamiltonian yang telah dipengaruhi oleh Energi Potesial berbeda dengan dengan V_0 yang hanya menunjukkan Energi potensial tanpa pengaruh apapun. mengekspansi bentuk $H_0 V_0 + V_0 H_0$ dengan mensubstitusikan nilai H_0 untuk

memudahkan melakukan pemisahan antara partikel dan antipartikel (dengan matriks Pauli)

$$\begin{aligned}
 K_D &= \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{e\hbar\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{B}}{2mc} + \frac{V_0^2}{2mc^2} + \frac{(c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \boldsymbol{\pi} + mc^2\hat{\beta})V_0}{2mc^2} \\
 &\quad + \frac{V_0(c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \boldsymbol{\pi} + mc^2\hat{\beta})}{2mc^2} + mc^2 \\
 &= \left[\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{e\hbar\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{B}}{2mc} + \frac{V_0^2}{2mc^2} + \hat{\beta}V_0 + \frac{V_0\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \boldsymbol{\pi}}{mc} + \frac{i\hbar\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \nabla V_0}{2mc} + mc^2 \right] \quad 3.17
 \end{aligned}$$

Hamiltonian kanonik Dirac (3.17) merupakan operator yang akan digunakan untuk menentukan fungsi gelombang pada persamaan Dirac versi dual

$$K_D = \left[\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{e\hbar\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{B}}{2mc} + \frac{V_0^2}{2mc^2} + \hat{\beta}V_0 + \frac{V_0\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \boldsymbol{\pi}}{mc} + \frac{i\hbar\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \nabla V_0}{2mc} + mc^2 \right] \quad 3.18$$

Jika $V = 0$, maka persamaan menjadi

$$K_D = \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + mc^2 + \frac{e\hbar\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{B}}{2mc}$$

Hubungan yang dekat dengan operator Schrödinger, memudahkan untuk melihat bahwa, dalam kasus ini K pasti positif. Dalam istilah matematika, suku-suku orde bawah relatif terbatas terhadap $\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m}$. Dalam persamaan di atas, dapat diasumsikan bahwa V tidak tergantung waktu.

3.4. Eigen State Persamaan Dirac versi Dual

Eigen fungsi atau *Eigen-State* berkaitan erat dengan besaran-besaran fisis seperti posisi, momentum, dan energi. Setiap besaran fisis suatu partikel selalu dikaitkan dengan operasinya, misalnya operator dari momentum, sehubungan dengan operator besaran fisis berlaku istilah sebagai berikut (Halim, 2019):

(i) Harga suatu besaran fisis adalah *Eigen-Value* dari operasinya

(ii) *Eigen-Value* dari suatu operator besaran fisis berkaitan dengan suatu *Eigen-State*; *Eigen-Value* adalah riil. Dalam persamaan *Eigen-Value* berlaku:

$$H\psi(x) = E\psi(x) \quad 3.19$$

Berdasarkan (i) dan (ii). E adalah harga besaran fisis yakni energi, dan itu merupakan *Eigen-Value* dari operator H , dan $E\psi$ adalah *Eigen-State* dari operator tersebut. Karena E adalah harga eigen dari operator H dengan *Eigen-State* $\psi(x)$ maka E adalah energi yang tetap dari partikel. sehingga $\psi(x) = \psi(x) \exp(-\frac{iEt}{\hbar})$ adalah keadaan stasioner, *Eigen-State* seperti itu disebut fungsi keadaan partikel.

(iii) Harga rata-rata suatu besaran fisis pada fungsi keadaannya memenuhi persamaan

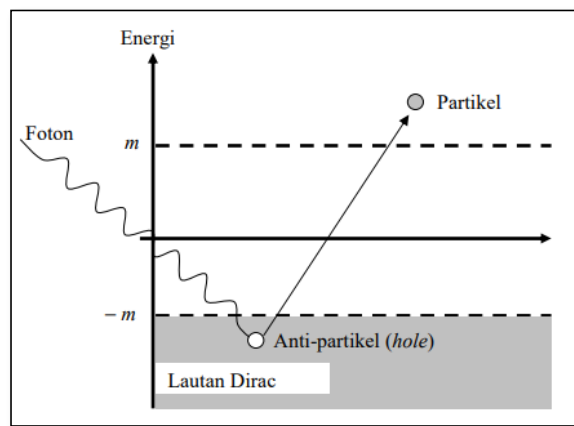
$$\langle A \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \hat{A} \psi(x) dx \quad 3.20$$

Dalam hal ini, \hat{A} adalah operator dari besaran fisis, dan $\langle A \rangle$ adalah harga rata-ratanya dengan fungsi gelombang (keadaan) partikel bersangkutan yang ternormalisasi (Halim, 2019). Adapun dengan menggunakan operator Hamiltonian Dirac Versi Dual (3.17) dapat dituliskan persamaan Dirac versi Dual yang bergantung waktu:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial \tau} \Psi = \left[\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{e\hbar \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{B}}{2mc} + \frac{V_0^2}{2mc^2} + \hat{\beta} V_0 + \frac{V_0 \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \boldsymbol{\pi}}{mc} + \frac{i\hbar \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \nabla V_0}{2mc} + mc^2 \right] \Psi \quad 3.21$$

Eigen State dari persamaan Dirac versi Dual diatas dapat dinyakan dalam bentuk komponen spinor sebagai $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$. Dalam pendekatan ini, $\psi_1 = (\psi_A, \psi_B)$ mewakili komponen partikel (energi positif) spin $1/2$, dan $\psi_2 = (\psi_C, \psi_D)$, mewakili komponen antipartikel (energi negatif) spin $1/2$ (Thaller, 1992), dimana komponen

besar ψ_1 dan ψ_2 terdiri dari dua komponen vektor yang menggambarkan dua partikel yang memiliki keadaan *spin up* dan *spin down* yaitu $\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $\psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Tidak semua partikel memiliki kemungkinan keadaan partikel berjumlah dua, hanya saja untuk partikel spin $\frac{1}{2}$ memiliki jumlah kemungkinan keadaan hanya dua, yaitu *spin-up* dan *spin-down*. Dari kenyataan ini dapat disimpulkan bahwa persamaan Dirac bukan persamaan yang menggambarkan persamaan untuk partikel tunggal tetapi persamaan untuk partikel dan anti partikel.



Gambar 3. 1 Penciptaan pasangan partikel-antipartikel dalam tafsiran lautan Dirac

Persamaan Dirac mengalami modifikasi akibat pengaruh medan elektromagnetik yang dihidangkan dan pendekatan matriks telah diaplikasikan untuk mendapatkan representasi energi dan spinor eigennya. Maka persamaan 3.18 dapat dituliskan menjadi bentuk matriks yaitu (Bhattacharya, 2008):

$$E \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \left[\frac{\pi^2}{2m} + \frac{e\hbar \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix} \cdot \mathbf{B}}{2mc} + \frac{V_0^2}{2mc^2} + \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} V_0 \right. \\ \left. + \frac{V_0 \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\pi}}{mc} + \frac{i\hbar \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \cdot \nabla V_0}{2mc} + mc^2 \right] \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad 3.22$$

Maka dapat diperoleh dua buah persamaan simultan sebagai pemisahan antara partikel dan anti-partikel. Secara eksplisit ψ_1 (partikel/energi positif) dapat dituliskan menjadi:

$$\begin{aligned}
E\psi_1 &= \left[\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{e\hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}}{2mc} + \frac{V_0^2}{2mc^2} + V + mc^2 \right] \psi_1 \\
&\quad + \left(\frac{V_0\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\pi}}{mc} - \frac{i\hbar\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \nabla V_0}{2mc} \right) \psi_2 \\
\left\{ E - \left[\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{e\hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}}{2mc} + \frac{V_0^2}{2mc^2} + V + mc^2 \right] \right\} \psi_1 \\
&= \left(\frac{V_0\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\pi}}{mc} - \frac{i\hbar\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \nabla V_0}{2mc} \right) \psi_2
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Sehingga didapatkan

$$\psi_1 = \frac{\left(\frac{V_0\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\pi}}{mc} - \frac{i\hbar\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \nabla V_0}{2mc} \right)}{\left\{ E - \left[\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{e\hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}}{2mc} + \frac{V_0^2}{2mc^2} + V + mc^2 \right] \right\}} \psi_2 \tag{3.24}$$

Maka dengan jelas didapatkan $\psi_1 = (\psi_A, \psi_B)$ mewakili komponen partikel (energi positif) spin $\frac{1}{2}$. Selanjutnya secara eksplisit ψ_2 (anti-partikel/energi negatif) juga dapat dituliskan

$$\begin{aligned}
E\psi_2 &= \left[\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{e\hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}}{2mc} + \frac{V_0^2}{2mc^2} - V + mc^2 \right] \psi_2 \\
&\quad + \left(\frac{V_0\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\pi}}{mc} - \frac{i\hbar\hat{\alpha} \cdot \nabla V_0}{2mc} \right) \psi_1 \\
\left\{ E - \left[\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{e\hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}}{2mc} + \frac{V_0^2}{2mc^2} - V + mc^2 \right] \right\} \psi_2 \\
&= \left(\frac{V_0\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\pi}}{mc} - \frac{i\hbar\hat{\alpha} \cdot \nabla V_0}{2mc} \right) \psi_1
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Sehingga didapatkan

$$\psi_2 = \frac{\left(\frac{V_0 \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\pi}}{mc} - \frac{i \hbar \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \nabla V_0}{2mc} \right)}{\left\{ E - \left[\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{e \hbar \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}}{2mc} + \frac{V_0^2}{2mc^2} - V + mc^2 \right] \right\}} \psi_1 \quad 3.26$$

Persamaan 3.26 mewakili komponen antipartikel (energi negatif) spin 1/2.

Kemudian menjabarkan bentuk operator $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})$ dan $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla V_0)$

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}) &= (\boldsymbol{\sigma}_x \cdot \pi_x + \boldsymbol{\sigma}_y \cdot \pi_y + \boldsymbol{\sigma}_z \cdot \pi_z) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \pi_x + \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \pi_y + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \pi_z \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \pi_x \\ \pi_x & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -i\pi_y \\ i\pi_y & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \pi_z & 0 \\ 0 & -\pi_z \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \pi_z & \pi_x - i\pi_y \\ \pi_x + i\pi_y & -\pi_z \end{pmatrix} \\ (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla V_0) &= (\boldsymbol{\sigma}_x \cdot V_{0x} + \boldsymbol{\sigma}_y \cdot V_{0y} + \boldsymbol{\sigma}_z \cdot V_{0z}) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} V_{0x} + \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} V_{0y} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} V_{0z} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & V_{0x} \\ V_{0x} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -iV_{0y} \\ iV_{0y} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{0z} & 0 \\ 0 & -V_{0z} \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} V_{0z} & V_{0x} - iV_{0y} \\ V_{0x} + iV_{0y} & -V_{0z} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad 3.27$$

Karena ψ_2 dan ψ_2 masih merupakan fungsi bebas maka pemilihan komponen-komponen dari persamaan 3.22 akan menghasilkan empat buah solusi: dua buah solusi untuk solusi energi positif dan dua buah untuk solusi energi negatif.

Berdasarkan persamaan yang diperoleh pada (3.25) maka diperoleh untuk $\psi_2 =$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ atau partikel dengan spin-up, maka

$$\psi_1 = \frac{\left(\frac{V_0 \begin{pmatrix} \pi_z & \pi_x - i\pi_y \\ \pi_x + i\pi_y & -\pi_z \end{pmatrix}}{mc} - \frac{i\hbar \begin{pmatrix} V_{0z} & V_{0x} - iV_{0y} \\ V_{0x} + iV_{0y} & -V_{0z} \end{pmatrix}}{2mc} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\{ E - \left[\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{e\hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}}{2mc} + \frac{V_0^2}{2mc^2} + V + mc^2 \right] \right\}} \quad (1) \quad 3.28$$

Dan untuk $\psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ partikel dengan spin-down

$$\psi_1 = \frac{\left(\frac{V_0 \begin{pmatrix} \pi_z & \pi_x - i\pi_y \\ \pi_x + i\pi_y & -\pi_z \end{pmatrix}}{mc} - \frac{i\hbar \begin{pmatrix} V_{0z} & V_{0x} - iV_{0y} \\ V_{0x} + iV_{0y} & -V_{0z} \end{pmatrix}}{2mc} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\{ E - \left[\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{e\hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}}{2mc} + \frac{V_0^2}{2mc^2} + V + mc^2 \right] \right\}} \quad (1) \quad 3.29$$

Oleh karena itu, solusi untuk energi positif menjadi

$$\psi_A = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \left(\frac{V_0\pi_z}{mc} - \frac{i\hbar V_{0z}}{2mc} \right) \\ \hline \left\{ E - \left[\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{e\hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}}{2mc} + \frac{V_0^2}{2mc^2} + V + mc^2 \right] \right\} \\ \left(\frac{V_0(\pi_x + i\pi_y)}{mc} - \frac{i\hbar(V_{0x} + iV_{0y})}{2mc} \right) \\ \hline \left\{ E - \left[\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{e\hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}}{2mc} + \frac{V_0^2}{2mc^2} + V + mc^2 \right] \right\} \end{array} \right] \quad 3.30$$

$$\psi_B = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \left(\frac{V_0(\pi_x - i\pi_y)}{mc} - \frac{i\hbar(V_{0x} - iV_{0y})}{2mc} \right) \\ \hline \left\{ E - \left[\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{e\hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}}{2mc} + \frac{V_0^2}{2mc^2} + V + mc^2 \right] \right\} \\ \left(\frac{V_0(-\pi_z)}{mc} - \frac{i\hbar(-V_{0z})}{2mc} \right) \\ \hline \left\{ E - \left[\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{e\hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}}{2mc} + \frac{V_0^2}{2mc^2} + V + mc^2 \right] \right\} \end{array} \right] \quad 3.31$$

Persamaan ini berturut-turut menggambarkan persamaan keadaan partikel spin 1/2 dengan spin-up dan spin-down. Dengan cara yang sama untuk solusi energi negatif atau anti partikel diperoleh, untuk $\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ yaitu dengan spin-up maka

$$\psi_2 = \frac{\left(\frac{V_0 \begin{pmatrix} \pi_z & \pi_x - i\pi_y \\ \pi_x + i\pi_y & -\pi_z \end{pmatrix}}{mc} - \frac{i\hbar \begin{pmatrix} V_{0z} & V_{0x} - iV_{0y} \\ V_{0x} + iV_{0y} & -V_{0z} \end{pmatrix}}{2mc} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\{ E - \left[\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{e\hbar\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{B}}{2mc} + \frac{V_0^2}{2mc^2} - V + mc^2 \right] \right\}} \quad 3.32$$

Dan untuk $\psi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ yaitu dengan spin down maka

$$\psi_2 = \frac{\left(\frac{V_0 \begin{pmatrix} \pi_z & \pi_x - i\pi_y \\ \pi_x + i\pi_y & -\pi_z \end{pmatrix}}{mc} - \frac{i\hbar \begin{pmatrix} V_{0z} & V_{0x} - iV_{0y} \\ V_{0x} + iV_{0y} & -V_{0z} \end{pmatrix}}{2mc} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\{ E - \left[\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{e\hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}}{2mc} + \frac{V_0^2}{2mc^2} - V + mc^2 \right] \right\}} \quad 3.33$$

Sehingga solusi Fungsi Eigen dalam spinor 4 diberikan

$$\psi_c = \begin{pmatrix} \frac{\left(\frac{V_0\pi_z}{mc} - \frac{i\hbar V_{0z}}{2mc} \right)}{\left\{ E - \left[\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{e\hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}}{2mc} + \frac{V_0^2}{2mc^2} - V + mc^2 \right] \right\}} \\ \frac{\left(\frac{V_0(\pi_x + i\pi_y)}{mc} - \frac{i\hbar (V_{0x} + iV_{0y})}{2mc} \right)}{\left\{ E - \left[\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{e\hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}}{2mc} + \frac{V_0^2}{2mc^2} - V + mc^2 \right] \right\}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 3.34$$

$$\psi_D = \begin{bmatrix} \left(\frac{V_0(\pi_x - i\pi_y)}{mc} - \frac{i\hbar(V_{0x} - iV_{0y})}{2mc} \right) \\ \left\{ E - \left[\frac{\pi^2}{2m} + \frac{e\hbar\sigma \cdot \mathbf{B}}{2mc} + \frac{V_0^2}{2mc^2} - V + mc^2 \right] \right\} \\ \left(\frac{V_0(-\pi_z)}{mc} - \frac{i\hbar(-V_{0z})}{2mc} \right) \\ \left\{ E - \left[\frac{\pi^2}{2m} + \frac{e\hbar\sigma \cdot \mathbf{B}}{2mc} + \frac{V_0^2}{2mc^2} - V + mc^2 \right] \right\} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad 3.35$$

Persamaan 3.34 dan 3.35 berturut-turut menggambarkan persamaan keadaan anti-partikel (energi negatif) dengan spin-up dan spin-down. Spin up sendiri merupakan vektor di beberapa ruang abstrak acak yang menunjuk ke arah atas, dan spin down merupakan vektor yang ortogonal atau tegak lurus terhadap vektor yang berarti harus menunjuk ke kanan ataupun ke kiri atau masuk bahkan keluar layar itu sama saja. Karena menyatakan suatu sistem dapat berada ketika sistem diukur dapat diwakili oleh vektor dalam ruang matematika abstrak tertentu dalam ruang abstrak semua hasil yang mungkin dari pengukuran tertentu adalah vektor yang tegak lurus satu sama lain. Solusi energi negatif dapat ditafsirkan pula sebagai keadaan anti-partikel dari energi positif.

3.5. Persamaan Eigen Value

Vektor ψ_A dan ψ_B membangun basis dari ruang E_+ eigen; ψ_C dan ψ_D merentang ruang eigen dari *Eigen-Value* E_- . Kombinasi linear sembarang dari $\psi_A, \psi_B, \psi_C,$ dan ψ_D tentu saja juga merupakan solusi eigen untuk energi E Persamaan Dirac (2.63) dengan demikian pada prinsipnya diselesaikan. Untuk mencari tahu lebih banyak tentang solusi degenerasi keempat vektor kolom, maka harus mencari yang dapat diamati, dimana pengukurannya menghilangkan degenerasi yang masih ada. Di sisi lain, yang dapat diamati harus bolak-balik

dengan operator Dirac $H_D^{(0)}$, untuk membangun bersama dengannya satu set lengkap yang dapat diamati yang kompatibel (Nolting, 2017) Diketahui Hamiltonian (Kanonik) pada persamaan Dirac versi dual pada persamaan (3.17). Berdasarkan persamaan $H\psi(x) = E\psi(x)$ Maka dapat dituliskan Persamaan *Eigen-Value* dengan mengubah bentuk energinya, sesuai dengan persamaan 2.15 pada persamaan Dirac versi Dual yang telah didapatkan (3.20) sebelumnya:

$$E\Psi = \left[\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{e\hbar\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{B}}{2mc} + \frac{V_0^2}{2mc^2} + \hat{\beta}V_0 + \frac{V_0\hat{\alpha} \cdot \boldsymbol{\pi}}{mc} + \frac{i\hbar\hat{\alpha} \cdot \nabla V_0}{2mc} + mc^2 \right] \Psi \quad 3.36$$

Persamaan 3.36 adalah bentuk umum dari masalah *Eigen-Value* pada persamaan Dirac versi dual. Untuk menjelaskan pemisahan antara partikel (elektron) dan antipartikel (positron) maka fungsi gelombang terlebih dahulu ditetapkan, dan akan dijelaskan lebih lanjut untuk nilai yang tepat dari *Eigen-value* pada pembahasan selanjutnya di subbab 4.1.

BAB IV

MOMEN MAGNETIK ANOMALI PADA PARTIKEL ELEKTRON

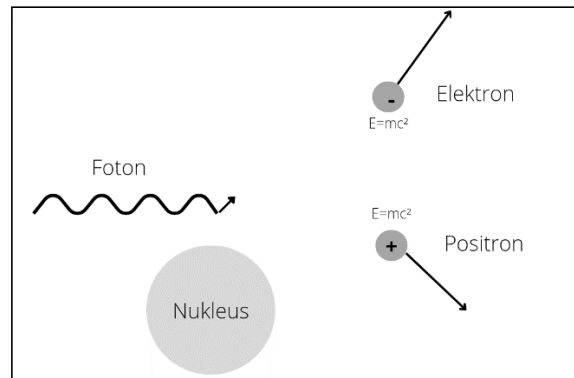
4.1 Persamaan Dirac Versi Dual Partikel Elektron

Pada pembahasan sebelumnya pemaparan mengenai persamaan *Eigen-Value* masih belum dapat menghasilkan *Eigen-value* yang tepat karna masih dalam bentuk persamaan. Kemudian dalam pembahasan ini akan dijelaskan lebih rinci, khusus mengenai partikel elektron dengan menggunakan beberapa sifat elektron dari eksperimen-eksperimen sebelumnya disubstitusikan sehingga akan didapatkan *Eigen-Value* dari persamaan Dirac versi Dual.

Lepton adalah partikel "elementer" yang paling sederhana secara alamiah, dengan tidak terdapat petunjuk adanya struktur internal, bahkan ditemukannya ukuran dalam ruang juga tidak didapatkan. Partikel ini hampir mendekati partikel-titik, sejauh pengukuran yang telah dilakukan. Dari partikel-partikel yang telah diketahui seperti elektron dan neutrino merupakan lepton. Elektron adalah partikel elementer yang pertama yang teorinya di usulkan oleh P.A.M. Dirac dalam tahun 1928.

Dirac mendapatkan persamaan gelombang untuk partikel bermuatan dalam medan elektromagnetik dengan memasukkan efek relativitas khusus. Ketika massa dan muatan elektron hasil pengamatan dimasukkan dalam solusi yang sesuai dari persamaan itu, momentum sudut elektron didapatkan $\frac{1}{2} h$ (spinnya $\frac{1}{2}$) dan momen magnetiknya didapatkan $\frac{eh}{2m}$, satu magneton Bohr. Dugaan ini cocok dengan eksperimen, dan kecocokan ini merupakan bukti yang kuat dari kebenaran teori Dirac.

Hasil dari teori Dirac ialah memprediksi adanya elektron positif sebagaimana elektron negatif. Mula-mula diduga proton adalah partikel positif nya, walaupun terdapat perbedaan massa, tetapi dalam tahun 1932 elektron positif dapat dideteksi dalam fluks radiasi kosmik pada permukaan bumi. Elektron positif biasanya disebut positron.



Gambar 4. 1 Produksi pasangan foton yang berenergi cukup tinggi menjelma menjadi pasangan elektron positron

Materialisasi pasangan elektron-positron dari sebuah foton yang berenergi cukup ($> 1.02 \text{ MeV}$) dan termusnahnya sebuah elektron dan sebuah positron ketika bergabung diterangkan dalam pembahasan Produksi Pasangan dari sifat partikel dari gelombang dimana,

$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma \quad 4.1$$

Hampir semua partikel elektron, karena positron dapat bergabung dan musnah. Positron sering disebut sebagai antipartikel dari mempunyai antipartikel bernama elektron. Hampir semua partikel elementer yang dikenal mempunyai antipartikel, kecuali foton dan pion yang bersifat netral. Antipartikel dari suatu partikel mempunyai massa, spin dan umur yang sama, tetapi muatannya (jika ada) bertanda berlawanan dan penjajaran atau anti-penjajaran antara spinnya dan momen magnetiknya selalu berlawanan dengan partikelnya. (Beisur, 2001)

Dalam penelitian ini dilakukan pemisahan partikel dan antipartikel dengan menggunakan persamaan Dirac pada ruang *proper-time*, atau persamaan Dirac versi dual. Setelah mensubstitusikan Operator Hamiltonian Dirac dalam medan elektromagnetik pada persamaan Hamiltonian Kanonik yang diperoleh pada persamaan (3.17). Sehingga didapatkan Persamaan Dirac versi Ganda (3.20). Kemudian dilakukan pemisahan energi menjadi dua bagian, sebagaimana pada persamaan yang diperoleh pada (3.21). Adapun dalam bentuk matriks dengan membuat transformasi energy kinetik $\mathbf{p} \rightarrow \boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} - \left(\frac{e}{c}\right)\mathbf{A}$ maka diperoleh:

$$E \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \left[\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{e\hbar \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{B}}{2mc} + \frac{V_0^2}{2mc^2} + \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} V_0 + \frac{V_0 \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}_i \\ \boldsymbol{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\pi}}{mc} + \frac{i\hbar \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}_i \\ \boldsymbol{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix} \cdot \nabla V_0}{2mc} + mc^2 \right] \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad 4.2$$

Maka secara eksplisit persamaan 4.2 dapat dituliskan pemisahan antara partikel dan antipartikel,

$$E\psi_1 = \left[\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{e\hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}}{2mc} + \frac{V_0^2}{2mc^2} + V + mc^2 \right] \psi_1 + \left(\frac{V_0\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}}{mc} - \frac{i\hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla V_0}{2mc} \right) \psi_2 \quad 4.3$$

$$E\psi_2 = \left[\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{e\hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}}{2mc} + \frac{V_0^2}{2mc^2} - V + mc^2 \right] \psi_2 + \left(\frac{V_0\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}}{mc} - \frac{i\hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla V_0}{2mc} \right) \psi_1 \quad 4.4$$

Meskipun terdapat pemisahan antara Energi positif (Partikel) dan Negatif (Antipartikel) $\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ akan tetapi untuk pembahasan pada penelitian ini hanya

menggunakan ψ_1 karena kita akan fokus pada pembahasan partikel, lebih tepatnya partikel elektron.

Dipertimbangkan kembali analisis standar persamaan Dirac untuk masalah atom hidrogen dari sudut pandang yang tepat. Dengan menggunakan $\psi_2 = \frac{c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})}{(\lambda - V + mc^2)} \psi_1$ (Persamaan 3.8) Maka mensubstitusikan persamaan pertama diatas pada persamaan kedua (Eliminasi ψ_2 pada suku ψ_1) sehingga akan menghilangkan energi negatif (ψ_2) dan hanya menghasilkan energi positif (ψ_1)

$$\begin{aligned}
 E\psi_1 &= \left[\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{e\hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}}{2mc} + \frac{V_0^2}{2mc^2} + V_0 + mc^2 \right] \psi_1 \\
 &\quad + \left(\frac{V_0\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}}{mc} - \frac{i\hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla V_0}{2mc} \right) \psi_2 \\
 &= \left[\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{e\hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}}{2mc} + \frac{V_0^2}{2mc^2} + V_0 + mc^2 \right] \psi_1 \\
 &\quad + \left(\frac{V_0\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}}{mc} - \frac{i\hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla V_0}{2mc} \right) \frac{c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})}{(\lambda - V + mc^2)} \psi_1
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Persamaan 4.5 hanya mengandung energi positif (ψ_1). Untuk lebih fokus pada pembahasan partikel yaitu elektron maka untuk mempermudah pembahasan secara teoritis, simbol ψ_1 diganti menggunakan simbol ψ , sehingga didapatkan,

$$\begin{aligned}
 E\psi &= \left[\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{e\hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}}{2mc} + \frac{V_0^2}{2mc^2} + V_0 + mc^2 \right] \psi \\
 &\quad + \left(\frac{V_0\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}}{mc} - \frac{i\hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla V_0}{2mc} \right) \frac{c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})}{(\lambda - V + mc^2)} \psi
 \end{aligned}$$

Telah diperoleh Persamaan Dirac versi Dual untuk partikel elektron (partikel bermuatan spin 1/2). Sehingga dengan mudah dapat diperoleh *Eigen-value* dari persamaan dirac versi dual

$$\begin{aligned}
& \left\{ E - \left[\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{e\hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}}{2mc} + \frac{V_0^2}{2mc^2} + V_0 + mc^2 \right] \right. \\
& \quad \left. - \left(\frac{V_0\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}}{mc} - \frac{i\hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla V_0}{2mc} \right) \frac{c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})}{(\lambda - V + mc^2)} \right\} \psi = 0 \\
E &= \left[\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{e\hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}}{2mc} + \frac{V_0^2}{2mc^2} + V_0 + mc^2 \right] \\
& \quad + \left(\frac{V_0\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}}{mc} - \frac{i\hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla V_0}{2mc} \right) \frac{c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})}{(\lambda - V + mc^2)} \tag{4.6}
\end{aligned}$$

Persamaan Slater (Lampiran C) pertama kali digunakan oleh salah satu muridnya pada awal 1940, dan muncul di bukunya, pertama diterbitkan pada tahun 1960. Akibat terlalu sulit memahami dan mengingat minat historis yang berkelanjutan dalam persamaan Dirac, dapat diadopsi pekerjaan Slater pada 4.6, sehingga didapatkan (Tepper, 2005)

$$\begin{aligned}
E &= \left[\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{e\hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}}{2mc} + \frac{V_0^2}{2mc^2} + V_0 + mc^2 \right] \\
& \quad - \frac{i\hbar(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla V_0)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})}{2m(\lambda - V + mc^2)} + \frac{V_0(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}V_0)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})}{m(\lambda - V + mc^2)^2} \\
& \quad + \frac{V_0(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})}{m(\lambda - V + mc^2)} \tag{4.7}
\end{aligned}$$

Jika kita menghilangkan suku tengah dan mengganti $(\lambda - V + mc^2)$ dengan $2mc^2$. Seperti disebutkan sebelumnya, persamaan Pauli digunakan untuk mengekstrak bagian pemisahan *hyperfine* dari spektrum hidrogen untuk melengkapi prediksi QED. Terdapat probabilitas terbatas untuk menemukan elektron pada titik asal dalam *s-state*, tetapi kondisi yang diperlukan untuk validitas hubungan dengan medan magnet adalah $(\lambda - V + mc^2) \ll 2mc^2$ Jadi, kondisi ini tidak terpenuhi untuk kalkulasi *s-state* manapun. Oleh karena itu, dari sudut pandang dasar, penggunaan persamaan Pauli untuk menghitung pemisahan

hyperfine dari *s-state* masih tidak bisa digunakan. Di sisi lain, kondisi tersebut mudah terlihat terpenuhi untuk semua *state* bagian lainnya. Pendekatan yang lebih masuk akal adalah dengan menggunakan $|mc^2 - \lambda| \ll 2mc^2$ untuk menggantikan $(\lambda - V + mc^2)$ dengan $2mc^2 \left(1 + \frac{r_0}{r}\right)$, di mana $r_0 = \frac{e^2}{\lambda + mc^2} \cong \frac{e^2}{2mc^2}$. Kondisi di atas selalu terpenuhi (13ev dibandingkan dengan 0.5Mev).

Pendekatan ini juga memiliki keuntungan tambahan menghilangkan masalah *Eigen-Value* nonlinier yang ditimbulkan persamaan 4.7 tanpa secara substansial mempengaruhi hasil akhir.

$$E = \left\{ \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + V_0 + mc^2 - \frac{e\hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}}{2mc} + \frac{V_0^2}{2mc^2} \right\} + \frac{i\hbar(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla V_0)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})}{4m^2c^2 \left(1 + \frac{r_0}{2r}\right)} + \frac{V_0(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}V_0)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})}{4m^3c^4 \left(1 + \frac{r_0}{2r}\right)^2} + \frac{V_0(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})}{2m^2c^2 \left(1 + \frac{r_0}{2r}\right)} \quad 4.8$$

Untuk mempermudah perhitungan, maka dilakukan pemisahan suku pada persamaan (4.8), dengan mendistribusikan beberapa suku dengan menggunakan aturan matematis $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{X})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}) = \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{X} \times \mathbf{Y})$ sesuai terdapat dalam $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ didapatkan (Nolting, 2017)

$$\begin{aligned} (c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \boldsymbol{\pi})^2 &= (\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot c\boldsymbol{\pi})^2 \\ &= (\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot c\boldsymbol{\pi})(\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot c\boldsymbol{\pi}) \\ &= \left(\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot c \left[\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right]\right) \left(\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot c \left[\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right]\right) \\ &= (\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot (c\mathbf{p} - e\mathbf{A}))(\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot (c\mathbf{p} - e\mathbf{A})) \\ (c\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \times (c\mathbf{p} - e\mathbf{A}) &= -ce(\mathbf{A} \times \mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{A}) \\ &= -ce \left(\frac{\hbar}{i} \text{curl}\mathbf{A} - \mathbf{A} \times \mathbf{p} + \mathbf{A} \times \mathbf{p}\right) \\ &= ie\hbar c\mathbf{B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{\sigma} \cdot (c\mathbf{p} - e\mathbf{A})]^2 &= (c\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 - i\boldsymbol{\sigma} \cdot ie\hbar c\mathbf{B} \\
&= (c\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + e\hbar c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Maka pendistribusian suku terakhir pada persamaan (4.8),

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}) &= \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\pi} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\pi}) \\
&= \boldsymbol{\pi}^2 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\frac{ie\hbar}{c}\right)\mathbf{B} \\
&= \boldsymbol{\pi}^2 - \frac{e\hbar}{c}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Dan pada suku kedua,

$$\begin{aligned}
(-i\hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}V_0)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}) &= -i\hbar\nabla V_0 \cdot \boldsymbol{\pi} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\hbar\nabla V_0 \times \boldsymbol{\pi}) \\
&= -i\hbar\boldsymbol{\sigma}V_0 \cdot \boldsymbol{\pi} + \hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{\sigma}V_0 \times \boldsymbol{\pi}) \\
&= -i\hbar\boldsymbol{\sigma}V_0 \cdot \mathbf{p} + \hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{\sigma}V_0) \\
&\quad + \frac{ie\hbar}{c}[(\boldsymbol{\sigma}V_0 \cdot \mathbf{A}) + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{\sigma}V_0 \times \mathbf{A})]
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Dimisalkan $\mathbf{A} \propto e_\phi$, maka dapat kita lihat bahwa $\nabla V_0 \cdot \mathbf{A} \propto e_r \cdot e_\phi = 0$ dan $\boldsymbol{\pi} =$

$\mathbf{p} - \left(\frac{e}{c}\right)\mathbf{A}$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}
(-i\hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla V_0)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}) &= -i\hbar(\nabla V_0 \cdot \mathbf{p}) + \hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla V_0 \times \mathbf{p}) \\
&\quad - \frac{e\hbar}{c}\boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla V_0 \times \mathbf{A})
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Selanjutnya pada suku ketiga dengan menggunakan cara yang sama seperti suku

kedua dengan $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} - \left(\frac{e}{c}\right)\mathbf{A}$,

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}V_0)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}) &= \mathbf{p}V_0 \cdot \boldsymbol{\pi} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p}V_0 \times \boldsymbol{\pi}) \\
&= -\mathbf{p}V_0 \cdot \mathbf{p} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p}V_0) \times \mathbf{p} \\
&\quad + \frac{e}{c}[(\mathbf{p}V_0 \cdot \mathbf{A}) + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p}V_0 \times \mathbf{A})] \\
&= -i\hbar(\mathbf{p}V_0 \cdot \mathbf{p}) + \hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p}V_0 \times \mathbf{p})
\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$-\frac{e\hbar}{c} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p}V_0 \times \mathbf{A})$$

Kemudian mempertimbangkan kembali analisis standar persamaan Dirac untuk masalah atom hidrogen dari sudut pandang yang tepat dengan mengasumsikan $A = \frac{(\boldsymbol{\mu}_r \times \mathbf{r})}{r^3}$, $V = -\hbar c \gamma / r$, dan $\gamma = \frac{e^2}{\hbar c}$, maka didapatkan beberapa komponen antara lain potensial,

$$V_0 = -\frac{\hbar c \gamma}{r} = -\frac{\hbar c e^2}{\hbar c r} = -\frac{e^2}{r} \quad 4.14$$

Selain itu juga didapatkan Orientasi spin sepanjang sumbu z (Teppler, 2021):

$$A_r = A_\theta = 0$$

$$A_\phi = \frac{2\mu_p s_p \sin \theta}{r^2} \quad 4.15$$

Setelah didapatkan beberapa komponen (Persamaan 4.9 - 4.15.), maka dapat disubstitusikan pada beberapa suku pada persamaan (4.8) Untuk suku kedua didapatkan,

$$\begin{aligned} -\frac{i\hbar(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla V_0)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})}{2m^2 c^2 \left(1 + \frac{r_0}{2r}\right)} &= \frac{-i\hbar(\nabla V_0 \cdot \mathbf{p}) + \hbar \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla V_0 \times \mathbf{p}) - \frac{e\hbar}{c} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla V_0 \times \mathbf{A})}{2m^2 c^2 \left(1 + \frac{r_0}{2r}\right)} \\ &= \frac{-i\hbar \left(e_r \frac{\partial V_0}{\partial r} \cdot \left[-i\hbar \left(e_r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] \right) - \hbar \frac{e^2}{r^3} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} - \frac{e\hbar e^2}{c r^4} 2\mu_p |s_p| \sin \theta (\boldsymbol{\sigma} \cdot e_\theta)}{2m^2 c^2 \left(1 + \frac{r_0}{2r}\right)} \\ &= \frac{\frac{e\hbar e^2}{c r^4} 2\mu_p |s_p| \sin \theta (\boldsymbol{\sigma} \cdot e_\theta)}{2m^2 c^2 \left(1 + \frac{r_0}{2r}\right)} \\ &= \frac{e^2 \hbar^2}{2m^2 c^2 \left(1 + \frac{r_0}{2r}\right) r^2} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{e^2 \hbar}{2m^2 c^2 \left(1 + \frac{r_0}{2r}\right)} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} \\ &\quad - \frac{e^3 \hbar \mu_p |s_p|}{m^2 c^3 \left(1 + \frac{r_0}{2r}\right) r^4} \sin \theta (\boldsymbol{\sigma} \cdot e_\theta) \end{aligned} \quad 4.16$$

L merupakan momen sudut partikel elektron dengan $L = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, Untuk suku ketiga didapatkan,

$$\begin{aligned}
\frac{V_0(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})}{m^2 c^2 \left(1 + \frac{r_0}{2r}\right)} &= \frac{V_0 \left(\pi^2 - \frac{e\hbar}{c} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}\right)}{m^2 c^2 \left(1 + \frac{r_0}{2r}\right)} \\
&= -\frac{e^2 \hbar^2 \mathbf{p}^2}{m^2 c^2 r \left(1 + \frac{r_0}{2r}\right)} - \frac{e^3 \hbar^2 \mathbf{A}^2}{m^2 c^3 r \left(1 + \frac{r_0}{2r}\right)} \\
&\quad + \frac{e^3 \hbar \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}}{m^2 c^3 r \left(1 + \frac{r_0}{2r}\right)}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Untuk suku terakhir didapatkan,

$$\begin{aligned}
\frac{V_0(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}V_0)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})}{m^2 c^2 \left(1 + \frac{r_0}{2r}\right)} &= \frac{V_0 \left(-i\hbar(\mathbf{p}V_0 \cdot \mathbf{p}) + \hbar \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p}V_0 \times \mathbf{p}) - \frac{e\hbar}{c} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p}V_0 \times \mathbf{A})\right)}{m^2 c^2 \left(1 + \frac{r_0}{2r}\right)} \\
&= \frac{V_0 \left(-i\hbar \left(i\hbar \frac{e^2}{r^2} \left[-i\hbar \left(e_r \frac{\partial V_0}{\partial r}\right)\right]\right) - \hbar \frac{e^2}{r^3} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} - \frac{e\hbar e^2 2\mu_p |s_p| \sin \theta}{c r^2 r^2} (\boldsymbol{\sigma} \cdot e_\theta)\right)}{m^2 c^2 \left(1 + \frac{r_0}{2r}\right)} \\
&= \frac{\left(\frac{\hbar^2 e^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} - \hbar \frac{e^2}{r^3} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} - \frac{e\hbar e^2 2\mu_p |s_p| \sin \theta}{c r^2 r^2} (\boldsymbol{\sigma} \cdot e_\theta)\right)}{m^2 c^2 \left(1 + \frac{r_0}{2r}\right)} \\
&= \frac{e^4 \hbar^2}{m^3 c^4 \left(1 + \frac{r_0}{2r}\right) r^3} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{e^4 \hbar}{m^3 c^4 \left(1 + \frac{r_0}{2r}\right)^2 r^4} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} \\
&\quad - \frac{2e^5 \hbar \mu_p |s_p|}{m^3 c^5 \left(1 + \frac{r_0}{2r}\right)^2 r^5} \sin \theta (\boldsymbol{\sigma} \cdot e_\theta)
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Dari persamaan yang telah didapatkan pada persamaan (4.16-18) maka jika $A = 0$ didapatkan pada suku pertama (Persamaan 4.16)

$$-\frac{i\hbar(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla V_0)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})}{2m^2c^2 \left(1 + \frac{r_0}{2r}\right)} = \frac{e^2\hbar^2}{2m^2c^2 \left(1 + \frac{r_0}{2r}\right) r^2} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{e^2\hbar}{2m^2c^2 \left(1 + \frac{r_0}{2r}\right)} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} \quad 4.19$$

Pada suku kedua (Persamaan 4.17) didapatkan,

$$\frac{V_0(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})}{m^2c^2 \left(1 + \frac{r_0}{2r}\right)} = -\frac{e^2\hbar^2\mathbf{p}^2}{m^2c^2r \left(1 + \frac{r_0}{2r}\right)} \quad 4.20$$

Pada suku ketiga (persamaan 4.18) didapatkan,

$$\frac{V_0(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}V_0)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})}{m^2c^2 \left(1 + \frac{r_0}{2r}\right)} = \frac{e^4\hbar^2}{m^3c^4 \left(1 + \frac{r_0}{2r}\right) r^3} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{e^4\hbar}{m^3c^4 \left(1 + \frac{r_0}{2r}\right)^2 r^4} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} \quad 4.21$$

Suku-suku di dalam kurung kurawal pertama (3.20) pada dasarnya adalah suku-suku utama untuk persamaan Schrödinger (bila $A = 0$). Untuk pembuktian konsep, suku-suku yang tersisa yang tersisa (3.20) akan diperlakukan sebagai gangguan orde pertama. Akan tetapi suku-suku baru yang muncul (4.19-4.21) dengan menggunakan kondisi $A = 0$ sebagaimana pada kurung kurawal pertama pada persamaan (3.20) yang dapat menghasilkan persamaan Schrödinger, akan tetapi untuk suku yang tersisa (3.20) ternyata memisahkan persamaan (4.16-18) dari persamaan Schrödinger. Adapun ketika $A \neq 0$ maka didapatkan,

$$\begin{aligned} E &= \frac{2e^2\mu_p^2|s_p|^2 \sin^2 \theta}{mc^2r^4} \psi - \frac{e\hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}}{2mc} \psi - \frac{e^3\hbar\mu_p|s_p|}{m^2c^3 \left(1 + \frac{r_0}{2r}\right) r^4} \sin \theta (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_\theta) \\ &\quad - \frac{e^2\hbar^2A^2}{m^2c^3r \left(1 + \frac{r_0}{2r}\right)} + \frac{e^3\hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}}{m^2c^3r \left(1 + \frac{r_0}{2r}\right)} \\ &\quad - \frac{2e^5\hbar\mu_p|s_p|}{m^3c^5 \left(1 + \frac{r_0}{2r}\right)^2 r^5} \sin \theta (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_\theta) \psi \\ &= \frac{2e^2\mu_p^2|s_p|^2 \sin^2 \theta}{mc^2r^4} - \frac{e\hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}}{2mc} - \frac{e^3\hbar\mu_p|s_p|}{m^2c^3 \left(1 + \frac{r_0}{2r}\right) r^4} \sin \theta (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_\theta) \end{aligned} \quad 4.22$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{e^3 \hbar^2 \left(\frac{2\mu_p |s_p| \sin \theta}{r^2} \right)^2}{m^2 c^3 r \left(1 + \frac{r_0}{2r} \right)} + \frac{e^3 \hbar \sigma \cdot \mathbf{B}}{m^2 c^3 r \left(1 + \frac{r_0}{2r} \right)} \\
& = \frac{2e^2 \mu_p^2 |s_p|^2 \sin^2 \theta}{m c^2 r^4} - \frac{e \hbar \sigma \cdot \mathbf{B}}{2mc} - \frac{e^3 \hbar \mu_p |s_p|}{m^2 c^3 \left(1 + \frac{r_0}{2r} \right) r^4} \sin \theta (\sigma \cdot e_\theta) \\
& - \frac{4e^3 \hbar^2 \mu_p^2 |s_p|^2 \sin^2 \theta}{m^2 c^3 r^5 \left(1 + \frac{r_0}{2r} \right)} + \frac{e^3 \hbar \sigma \cdot \mathbf{B}}{m^2 c^3 r \left(1 + \frac{r_0}{2r} \right)} \\
& - \frac{2e^5 \hbar \mu_p |s_p|}{m^3 c^5 \left(1 + \frac{r_0}{2r} \right)^2 r^5} \sin \theta (\sigma \cdot e_\theta)
\end{aligned}$$

Kemudian pada persamaa 4.22 ini ternyata terdapat beberapa komponen yang dapat di kelompokkan dan diatur ulang, sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}
E & = \frac{2e^2 \mu_p^2 |s_p|^2 \sin^2 \theta}{m c^2 r^4} - \frac{4e^3 \hbar^2 \mu_p^2 |s_p|^2 \sin^2 \theta}{m^2 c^3 r^5 \left(1 + \frac{r_0}{2r} \right)} - \frac{e \hbar \sigma \cdot \mathbf{B}}{2mc} \\
& + \frac{e^3 \hbar \sigma \cdot \mathbf{B}}{m^2 c^3 r \left(1 + \frac{r_0}{2r} \right)} - \frac{e^3 \hbar \mu_p |s_p|}{m^2 c^3 \left(1 + \frac{r_0}{2r} \right) r^4} \sin \theta (\sigma \cdot e_\theta) \\
& - \frac{2e^5 \hbar \mu_p |s_p|}{m^3 c^5 \left(1 + \frac{r_0}{2r} \right)^2 r^5} \sin \theta (\sigma \cdot e_\theta)
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Jadi kondisi $A \neq 0$ dilakukan guna untuk menemukan persamaan Schrodinger yang mana kondisi $A = 0$ pada persamaan 3.20 memisahkan persamaan Dirac versi dual dengan persamaan Schrödinger. Ternyata dari kondisi tersebut ditemukan salah satu komponen untuk memperoleh momen magnetik pada partikel elektron.

Yaitu dengan menggunakan komponen pada persamaan 4.23 yaitu $\frac{e^3 \hbar \sigma \cdot \mathbf{B}}{m^2 c^3 r \left(1 + \frac{r_0}{2r} \right)}$ -

$\frac{e \hbar \sigma \cdot \mathbf{B}}{2mc}$ sehingga akan didapatkan momen magnetik anomali pada partikel elektron.

4.2 Momen Magnetik Elektron

Momen magnetik dan momen magnetik anomali pada partikel elektron merupakan dua hal yang berbeda, akan tetapi masih berhubungan. Sebelum menginjak ke pembahasan momen magnetik anomali yang menjadi hasil dari pembahasan ini, akan dijelaskan terlebih dahulu mengenai momen magnetik elektron yang berhubungan dengan akan munculnya faktor-g dari partikel elektron. Dengan kata lain faktor-g ini merupakan konstanta tak berdimensi dari momentum sudut sehingga menghasilkan momen magnetik partikel elektron.

Keadaan-keadaan s (s -state) pada partikel elektron dengan momentum sudut orbit $l = 0$ tidak mempunyai momen magnetik orbit. Oleh karena itu, sebuah atom berelektron tunggal seharusnya mempunyai sifat diamagnetik dalam keadaan dasar, bilamana atom itu mempunyai elektron valensi satu dalam kulit luar dan semua kulit lainnya tertutup. Tetapi, atom-atom ini sebenarnya bersifat paramagnetik. Penalaran tersebut muncul karena adanya spin elektron dan momen magnetik yang terkait dengannya (Sumardi, 2018).

Momen magnetik yang terkait dengan putaran partikel atau atom telah memainkan peran sentral dalam pengembangan teori atom dan elektrodinamika kuantum. Konsep bilangan kuantum spin dalam satuan $\frac{\hbar}{2}$ diperkenalkan oleh Goudsmit dan Uhlenbeck pada tahun 1925 dan pengamatan kuantisasi momen magnetik terkait oleh Stern dan Gerlach pada tahun 1922 menyebabkan pemahaman tentang efek Zeeman anomali dan pemisahan struktur halus dari garis spektrum.

Efek Zeeman: Dalam medan magnetik eksternal \mathbf{B} , sebuah dwikutub magnetik mempunyai energi potensial yang bergantung dari besar momen magnetik μ dan orientasi momen ini terhadap medan. Gerak magnetik elektron orbital dalam

sebuah atom hidrogen bergantung dari momentum sudut \mathbf{L} , besar dan arah \mathbf{L} terhadap medan menentukan berapa besar sumbangan magnetik pada energi total atom jika terletak pada medan magnetik. Momen magnetik sebuah sosok arus (current loop) ialah

$$\mu = IA \quad 4.24$$

Dengan I menyatakan arus dan A menyatakan luas yang dilingkunginya. Sebuah elektron yang melakukan ν putaran/s dalam orbit lingkaran berjari-jari r setara dengan arus $-e\nu$ (karena muatan elektron adalah $-e$) dan momen magnetiknya menjadi

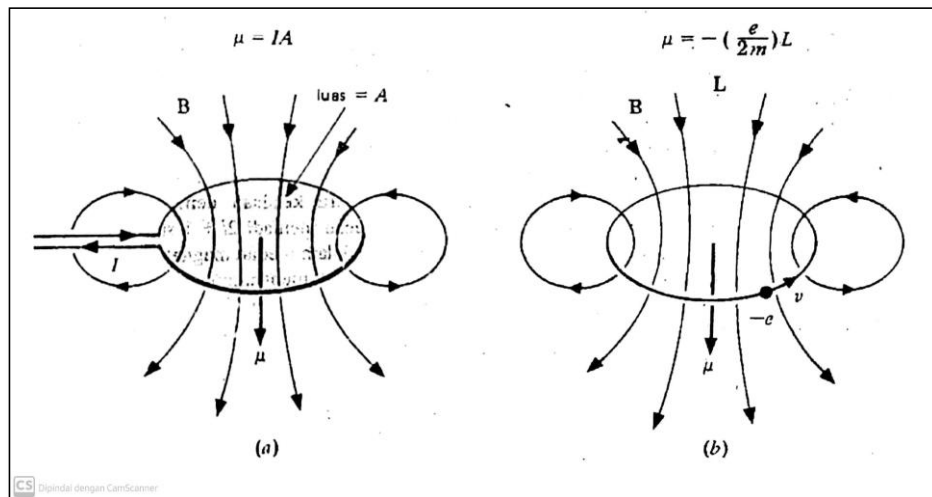
$$\mu = -e\nu\pi r^2 \quad 4.25$$

Kelajuan linear v dari elektron itu ialah $2\pi\nu r$, sehingga momentum sudutnya menjadi

$$L = mvr = 2\pi m\nu r^2 \quad 4.26$$

Dengan membandingkan rumus momen magnetik dan momentum sudut \mathbf{L} , kita lihat momen magnetik dari elektron (Beiser, 1990)

$$\mu = -\left(\frac{e}{2m}\right) \mathbf{L} \quad 4.27$$



Gambar 4. 2 a) Momen magnetik sosok arus yang melingkungi bidang seluas A .
 b) Momen magnetik elektron yang berputar pada suatu orbit yang berputar pada suatu orbi dengan momentum sudutnya L .

untuk elektron orbital (Gambar 4.1), Kuantitas $-\left(\frac{e}{2m}\right)$ yang bergantung hanya pada muatan dan massa elektron disebut **rasio giromagnetik**. Tanda minus berarti bahwa arah μ berlawanan dengan L . Rumusan tersebut untuk momen magnetik elektron orbital di peroleh secara klasik, namun ternyata mekanika kuantum pun mendapatkan hasil yang sama. Jadi, energi potensial magnetik sebuah atom dalam medan magnetik ialah

$$V_m = \left(\frac{e}{2m}\right) \mathbf{L} \mathbf{B} \cos \theta \quad 4.28$$

yang merupakan fungsi dari B dan θ .

Dari Gambar 4.1 kita lihat bahwa sudut θ antara arah L dan arah z hanya boleh berharga tertentu yang diterapkan oleh hubungan

$$\cos \theta = \frac{m_l}{\sqrt{l(l+1)}} \quad 4.29$$

sedangkan harga L yang dizinkan ialah

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$$

Untuk mendapatkan energi magnetik sebuah atom yang mempunyai bilangan kuantum magnetik m_l , jika atom itu terletak dalam medan magnetik \mathbf{B} , kita masukkan rumus untuk $\cos \theta$ dan menghasilkan energi magnetik:

$$V_m = m_l \left(\frac{e\hbar}{2m} \right) B \quad 4.30$$

Kuantitas $\frac{e\hbar}{2m}$ disebut magneton Bohr (μ_B).

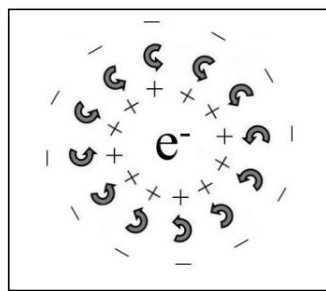
4.3 Faktor-g partikel elektron

Momen magnetik partikel elektron yang menjadi penyebab munculnya faktor-g, pada tahun 1928 Dirac menunjukkan bahwa spin partikel elektron (yang menjadi unsur intrinsik momentum sudut partikel elektron) merupakan konsekuensi dari teori Kuantum relativistik. Kemudian faktor-g sama dengan dua juga dapat diturunkan. Perbedaan sedikit antara nilai dua yang diramalkan dan nilai empiris hanya dapat difahami jika interaksi elektron dan medan radiasinya sendiri diperhitungkan melalui elektrodinamika kuantum. Sebagaimana yang ditunjukkan pertama kali oleh eksperimen Stern dan Gerlach, spin hanya dapat mempunyai dua arah dalam medan magnetik luar \mathbf{B} (Sumardi, 2018). Rasio Giromagnetik atau faktor-g untuk sebuah elektron dapat mendefinisikan momen magnetiknya, yaitu kopling spin ke medan magnet.

$$\mu_s = g \frac{-e}{2mc} \mathbf{s} = -g\mu_B \mathbf{s} \cong \mu_B, \text{ dimana } \mathbf{s} = \frac{\hbar\boldsymbol{\sigma}}{2} \quad 4.31$$

Momen magnetik spin elektron (μ_s) dinyatakan dalam faktor-g (g), muatan listrik ($-e$), kuantum spin (\mathbf{s}) dan massa elektron (m). Secara alternatif dapat dinyatakan dalam bentuk magneton Bohr (μ_B) dan konstanta Planck tereduksi (\hbar). Dan itu kira-kira sama dengan magneton Bohr

Pertanyaan besar lainnya yang belum terjawab dalam fisika adalah mengapa faktor-g kira-kira sama dengan dua? Faktor-g muncul sebagai faktor *fudge* yang diperlukan saat menghitung momen magnetik elektron. Dalam pemodelan awal momen magnetik elektron. Fisikawan menganggap elektron sebagai permukaan bola yang berputar dari muatan dan menghitung momen magnetik secara tepat. Apa yang mereka sadari adalah bahwa momen magnetik elektron sedikit lebih dari dua kali lipat dari yang diharapkan berdasarkan model sederhana ini.



Gambar 4. 3 Dipol kuantum di sekitar muatan listrik, seperti elektron, cenderung berputar dalam satu arah dalam bidang tertentu untuk mencapai keadaan polarisasi yang benar dengan jumlah energi yang dikeluarkan paling sedikit

Faktor-g tidak persis sama dengan dua karena ada faktor koreksi kecil karena sifat-sifat medan kuantum termasuk energi-diri elektron. Istilah-istilah koreksi tersebut secara tidak mengejutkan memberi tahu kita bahwa ada hubungan erat antara momen magnetik dan medan kuantum. Jika kita melihat lagi pada Gambar 4.3, kita dapat melihat mengapa faktor-g mendekati dua, bukan satu. Dalam penjelasan putaran medan kuantum elektron itu terdiri dari dipol kuantum yang berputar karena terpolarisasi. Dipol memiliki muatan negatif dan positif, jadi kita tidak memiliki model sederhana dari kumpulan muatan negatif pada permukaan bola yang tampak berputar dalam satu arah. Sebagai gantinya kita harus memodelkannya sebagai dua permukaan bola dengan permukaan bermuatan negatif di dalam permukaan bermuatan positif. Muatan negatif berputar dalam satu arah dan muatan positif

berputar ke arah yang berlawanan secara efektif menggandakan kekuatan medan magnet untuk kuantum momentum sudut tertentu. Dari situlah faktor dua berasal (Fleming, 2018).

Sebelum dipaparkan penjelasan faktor-g dengan menggunakan persamaan Dirac versi dual, berikut akan dijelaskan faktor-g dari sudut pandang persamaan Dirac. Pada perluasan teori Dirac diperlukan memeriksa hasil dari persamaan Dirac dengan menggunakan limit nonrelativistik atau batas nonrelativistik (Lampiran A).

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi = \left[\frac{\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}\right)^2}{2m_0} - \frac{e\hbar}{2m_0 c} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} + eA_0 \right] \varphi \quad 4.32$$

Persamaan 4.32 disebut dengan persamaan Pauli. Oleh karena itu, dua komponen φ menggambarkan derajat kebebasan spin. Persamaan Pauli ini (4.32), menghasilkan faktor-giromagnetik (faktor-g) yang benar dari $g = 2$ untuk elektron bebas. Ini dapat ditunjukkan sekali lagi dengan menyalakan medan magnet homogen yang lemah

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{x} \quad 4.33$$

di mana suku-suku kuadrat dari \mathbf{A} dalam (4.33) telah diabaikan. Dengan

$$\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}\right)^2 = \left(\mathbf{p} - \frac{e}{2c} \mathbf{B} \times \mathbf{x}\right)^2 \approx \mathbf{p}^2 - \frac{e}{c} (\mathbf{B} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{p} \quad 4.34$$

di mana $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ adalah operator momentum sudut orbital, dan

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \hbar \boldsymbol{\sigma}$$

adalah operator spin, berikut untuk persamaan Pauli (2.82) bahwa

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi = \left[\frac{\mathbf{p}^2}{2m_0} - \frac{e}{2m_0 c} (\mathbf{L} + 2\mathbf{S}) \cdot \mathbf{B} + eA_0 \right] \varphi \quad 4.35$$

Bentuk ini menunjukkan secara eksplisit faktor-g adalah 2. Namun, hasil yang paling penting adalah bahwa dalam limit nonrelativistik, persamaan Dirac diubah menjadi persamaan Pauli, ke persamaan gelombang nonrelativistik yang tepat untuk partikel spin-1/2. Karena spin ada pada keduanya, baik pada kecepatan rendah maupun kecepatan tinggi, ini menyiratkan bahwa persamaan Dirac menggambarkan partikel dengan spin 1/2. Berbeda dengan persamaan Klein-Gordon, berlaku untuk partikel spin-0. Sekarang kita telah menemukan persamaan gelombang relativistik untuk partikel spin 1/2. (Greiner, 2001)

Setelah ditinjau bahwa persamaan Dirac dapat membuktikan faktor-g pada partikel elektron dengan menggunakan limit nonrelativistic, dilanjutkan pada pembahasan hubungan antara persamaan Dirac versi dual dengan faktor-g. Dituliskan kembali persamaan Dirac versi dual partikel elektron pada persamaan (4.23) dapat dikelompokkan dan diatur ulang dengan mensubstitusikan jari-jari dari

partikel elektron $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$

$$\begin{aligned}
\frac{e^3 \hbar \sigma \cdot \mathbf{B}}{m^2 c^3 r \left(1 + \frac{r_0}{2r}\right)} - \frac{e \hbar \sigma \cdot \mathbf{B}}{2mc} &= + \frac{4er_0 \hbar \sigma \cdot \mathbf{B}}{4mc \left(r + \frac{r_0}{2}\right)} - \frac{e \hbar \sigma \cdot \mathbf{B}}{2mc} \\
&= + \frac{4er_0 \hbar \sigma \cdot \mathbf{B}}{2mc(2r + r_0)} - \frac{e \hbar \sigma \cdot \mathbf{B}}{2mc} \\
&= - \left[\mathbf{1} - \frac{4r_0}{(2r + r_0)} \right] \frac{e \hbar \sigma \cdot \mathbf{B}}{2mc} \tag{4.36}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{2e^2 \mu_p^2 |s_p|^2 \sin^2 \theta}{mc^2 r^4} - \frac{4e^3 \hbar^2 \mu_p^2 |s_p|^2 \sin^2 \theta}{m^2 c^3 r^5 \left(1 + \frac{r_0}{2r}\right)} &= \frac{2r_0 \mu_p^2 |s_p|^2 \sin^2 \theta}{r^4} - \frac{4er_0 \hbar^2 \mu_p^2 |s_p|^2 \sin^2 \theta}{mcr^5 \left(1 + \frac{r_0}{2r}\right)} \\
&= 2r_0 \mu_p^2 |s_p|^2 \left[\mathbf{1} - \frac{4e \hbar^2}{mc(2r + r_0)} \right] \tag{4.37}
\end{aligned}$$

$$-\frac{e^3 \hbar \mu_p |s_p|}{m^2 c^3 \left(1 + \frac{r_0}{2r}\right) r^4} \sin \theta (\sigma \cdot e_\theta) - \frac{2e^5 \hbar \mu_p |s_p|}{m^3 c^5 \left(1 + \frac{r_0}{2r}\right)^2 r^5} \sin \theta (\sigma \cdot e_\theta) \tag{4.38}$$

$$= \frac{2er_0 \hbar \mu_p |s_p|}{mc(2r+r_0)} \left[1 + \frac{4r_0}{2r+r_0} \right] \frac{\sin \theta}{r^3} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_\theta)$$

Pada persamaan 4.37 dan 4.28 terdapat komponen $\sin^2 \theta$ dan $\sin \theta$, dimana sudut θ yang kecil, maka $\sin \theta \approx 0$. Jika $\sin \theta$ kecil maka $\sin^2 \theta$ akan semakin kecil. Oleh karena itu, komponen pada persamaan 4.37 dan 4.38 yang terdapat bentuk $\sin^2 \theta$ dan $\sin \theta$ masih tidak digunakan dalam langkah mencari solusi momen magnetik anomali dikarenakan nilainya yang sangat kecil dan menuju nol. Sehingga hanya menggunakan persamaan 4.36 untuk menjelaskan tentang momen magnetik anomali pada partikel elektron. Pemilihan hanya dua suku ini (4.36) bisa jadi mempengaruhi hasil akhir dari momen magnetik anomaly pada partikel elektron nantinya. Mungkin jika nilai pada 4.37 dan 4.38 disubstitusikan maka nilai yang dihasilkan akan lebih tepat atau teliti.

Pada bagian ini menyelidiki persamaan (3.20) dengan asumsi bahwa partikel spin-1/2 bermuatan tidak memiliki struktur internal (partikel Dirac). Dalam hal ini, momen magnet spin diberikan pada persamaan (2.91) $\boldsymbol{\mu} = g \frac{e}{2mc} \mathbf{s} = g\mu_B \mathbf{s}$, dimana $\mathbf{s} = \frac{\hbar \boldsymbol{\sigma}}{2}$ adalah operator spin intrinsik, maka dapat dituliskan persamaan (4.12) :

$$\begin{aligned} H_a &= - \left[\mathbf{1} - \frac{4r_0}{(2r+r_0)} \right] \frac{e\hbar \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}}{2mc} \\ &= 2 \left[\mathbf{1} - \frac{4r_0}{(2r+r_0)} \right] \mu_B \mathbf{s} \cdot \mathbf{B} \end{aligned} \quad 4.39$$

H_a merupakan sebagian komponen *Eigen-value* yang mengandung medan magnetik (\mathbf{B}) dan diperkirakan akan menghasilkan momen magnetik anomali pada partikel bermuatan spin $\frac{1}{2}$. Dengan menggunakan formula rasio giromagnetik (faktor- g) pada persamaan (2.94),

$$g_r = 2 \left[1 - \frac{4r_0}{(2r + r_0)} \right] \quad 4.40$$

maka diperoleh faktor-g dari penurunan rumus persamaan Dirac versi Dual. Persamaan 4.40 ini umum untuk faktor-g dari partikel bermuatan spin 1/2 seperti elektron, positron, muon, pion, dan lain sebagainya. Akan dijelaskan lebih lanjut mengenai hubungan faktor-g dengan momen magnetik anomali khususnya partikel elektron pada subbab selanjutnya.

4.4 Momen Magnetik Anomali pada Partikel Elektron Versi Dual

Setelah didapatkan faktor-g dari persamaan Dirac versi dual maka langkah selanjutnya yaitu kita menentukan momen magnetik anomali pada partikel elektron. Pada awalnya tahun 1947 (hampir 20 tahun setelah persamaan Dirac diperkenalkan), efek anomali kecil mulai diamati dalam studi presisi spektroskopi *hyperfine* dalam hidrogen dan deuterium (pada tingkat 0,1%). Gregory Breit menyarankan berdasarkan empiris bahwa pergeseran kecil dapat dijelaskan jika nilai g menyimpang sedikit dari 2. Schwinger kemudian mendemonstrasikan kekuatan QED dengan menghitung kontribusi loop kuantum yang diprediksi ke a_e

$$a_e = \frac{\alpha}{2\pi} \approx 0.00112 \quad 4.41$$

Hasil yang terbatas dan tidak ambigu itu sesuai dengan eksperimen. Ini mewakili kemenangan kuantitatif yang luar biasa untuk QED dan teori medan kuantum. Ini juga mengantarkan era pengukuran eksperimental yang sangat tepat yang digunakan untuk menguji validitas QED ke banyak angka penting dan mencari penyimpangan yang berasal dari efek "*New Physics*". Sangat menarik untuk dicatat bahwa derivasi baru (menggunakan formalisme Hamilton) dari hasil Schwinger dalam hasil (4.41) diberikan oleh Dirac dalam kuliahnya tahun 1964 tentang teori

medan kuantum. Saat ini, perhitungan $a_e = \frac{\alpha}{2\pi}$ adalah latihan dasar pada dasarnya semua kursus teori medan kuantum (Marciano, 2004).

Untuk mendapatkan momen magnetik anomali pada persamaan Dirac versi dual, perlu diketahui terlebih dahulu formula momen magnetik dari partikel lepton (termasuk partikel spin $\frac{1}{2}$ atau fermion) bermuatan antara lain elektron, neutrino-elektron, muon, neutrino-muon, tau dan neutrino-tau):

$$\boldsymbol{\mu}_\ell = \frac{g_\ell e}{2m_\ell} \mathbf{s} \quad 4.42$$

Dimana g_ℓ adalah g-faktor dari partikel, m_ℓ adalah massa, dan \mathbf{s} adalah operator spin. Dalam persamaan di atas e adalah muatan dasar (positif). Untuk lepton yang bermuatan negatif maka untuk penulisan faktor g_ℓ ditandai dengan tanda negatif. Sehingga didapatkan formula faktor g partikel lepton bermuatan:

$$|g_\ell| = 2(1 + a_\ell) \quad 4.43$$

Maka untuk momen magnetik anomaly partikel lepton (termasuk elektron) didapatkan (Mohr, 2012),

$$a_e = \frac{|g_e| - 2}{2} \quad 4.44$$

Dimana persamaan Dirac (waktu pengamat biasa) memberikan $a_e = 0$. Faktanya anomali tidak nol, tetapi diberikan oleh nilai hasil eksperimen yang akan dijelaskan dalam pembahasan ini. Nilai persis 2 pada Faktor-g elektron ini diturunkan dari teori Dirac sebagaimana dijelaskan pada subbab sebelumnya (persamaan 4.39). Adapun untuk menyamakan sistem sebagaimana definisi momen magnetik anomali pada umumnya dan menggunakan langkah-langkah sebagai berikut. Awal mula menentukan nilai dari jari-jari klasik partikel elektron, didapatkan

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}$$

$$r_0 = \frac{e^2}{mc^2} \quad 4.45$$

Dengan ϵ_0 permeabilitas ruang hampa. Jika dihubungkan dengan jari-jari klasik Bohr dan struktur *hyperfine* dituliskan berturut-urut nilai hasil eksperimen dari keduanya

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} = \frac{1}{137.036}$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = 5.29177 \times 10^{-11} \quad 4.46$$

Sehingga didapatkan jari-jari elektron klasik (Griffits, 2005)

$$r_e = a_0 \alpha^2 \quad 4.47$$

Maka didapatkan nilai yang tepat dari jari-jari elektron klasik $r_0 = 2.81793916543359 \times 10^{-15}$, sehingga dapat disubstitusikan pada persamaan 4.40 dengan mengambil $r_e = 0.499857150068631 \times r_0$ (Tepper, 2021), maka didapatkan nilai faktor-g dari partikel elektron

$$g_e = 2 \left[1 - \frac{4r_0}{(2r_e + r_0)} \right]$$

$$= 2 \left[1 - \frac{4(5.63748896068943 \times 10^{-15})}{2 \times 2.81793916543359 \times 10^{-15} + (5.63748896068943 \times 10^{-15})} \right]$$

$$= 2(1 - 2.00028574068077)$$

$$= -2.00057148136154 \quad 4.47$$

Maka didapatkan nilai faktor-g dari partikel elektron dengan menggunakan sebagian komponen dari *eigen-value* yang didapatkan dari persamaan Dirac versi Dual. Menurut teori yang sudah dipaparkan diawal bab makna momen magnetik anomali adalah perbedaan antara nilai faktor-g yang didapatkan dari hasil teoritis

persamaan dirac (versi dual) dengan faktor-g yang sudah terukur secara eksperimental (Tepper, 2021)

$$g_r = 2 \left[1 - \frac{4r_0}{(2r + r_0)} \right] = -2.00231930436256 \quad 4.48$$

Maka untuk mendapatkan momen magnetik anomali, dapat dituliskan persamaan 4.40 dengan menggunakan faktor-g pada persamaan 4.47:

$$\begin{aligned} a_e &= \frac{|g_e| - 2}{2} \\ &= \frac{2.00057148136154 - 2}{2} \\ &= \frac{0.00057148136154}{2} \\ &= 0.00028574068077 \end{aligned} \quad 4.49$$

Jika dibandingkan dengan nilai eksperimental (CODATA) dari momen magnetik anomali pada partikel elektron memiliki nilai (Lampiran D)

$$a_e^{exp} = 0.00115965218073$$

Committee on Data for Science and Technology (CODATA) adalah suatu organisasi yang dibentuk pada tahun 1966 sebagai sebuah "komisi interdisipliner" dari Dewan Internasional untuk Ilmu Pengetahuan. Tujuannya adalah untuk memperbaiki kompilasi, evaluasi kritis, juga penyimpanan dan pengambilan data yang penting bagi sains dan teknologi. Himpunan CODATA dipublikasikan pertama kali pada tahun 1973, kemudian pada tahun 1986, 1998, 2002 dan yang kelima tahun 2006. Versi terakhir adalah Versi 6.0 disebut "2010 CODATA". Nilai konstanta fisika fundamental yang direkomendasikan oleh CODATA dipublikasikan pada *NIST Reference on Constants, Units, and Uncertainty* (Mohr, 2012).

Momen magnetik anomali elektron dan positron telah diukur dalam serangkaian eksperimen klasik di *University of Washington* di mana masing-masing elektron atau positron disimpan dalam *Penning trap* yang direndam dalam bak helium cair pada 4,2 K dalam kerapatan fluks magnet terapan dengan urutan 5 T (Van Dyck, Schwinger, dan Dehmelt, 1986, 1991; Van Dyck, 1990). Anomali diperoleh dari relasi $a_e = f_a/f_c$ dengan mengukur, dalam kerapatan fluks magnetik B yang sama, frekuensi perbedaan anomali $f_a = f_s - f_c$ dan frekuensi siklotron $f_c = eB/2\pi m_e$, di mana $f_s = g_e \mu_B B/h$ adalah elektron *spin-flip* (sering disebut precesi) frekuensi. Dalam praktiknya, frekuensi terukur f'_a , dan f'_c digeser dari nilai ruang bebasnya f_a , dan f_c , oleh medan elektrostatik yang diperlukan untuk mengurung elektron dalam perangkap, dan koreksi untuk pergeseran ini harus dibuat dari pengukuran frekuensi gerak aksial elektron f_z (Mohr, 1998).

Tabel 4. 1 Tabel perbandingan nilai eksperimen dan teori

Partikel elektron	Eksperimen (CODATA)	Teori	
		Persamaan Dirac	Persamaan Dirac versi Dual
Faktor-g	-2.00231930436256	-2	-2.00057148136154
Momen magnetik anomali	0.00115965218073	0	0.00028574068077

Setelah dibandingkan antara nilai eksperimen dan nilai secara teoritik baik untuk persamaan Dirac (waktu pengamat biasa) dengan persamaan Dirac versi dual maka secara tidak langsung menjelaskan bahwa nilai faktor-g dan momen magnetik anomali pada partikel elektron yang didapatkan dari persamaan Dirac versi Dual lebih mendekati hasil eksperimen dari pada menggunakan persamaan Dirac (waktu

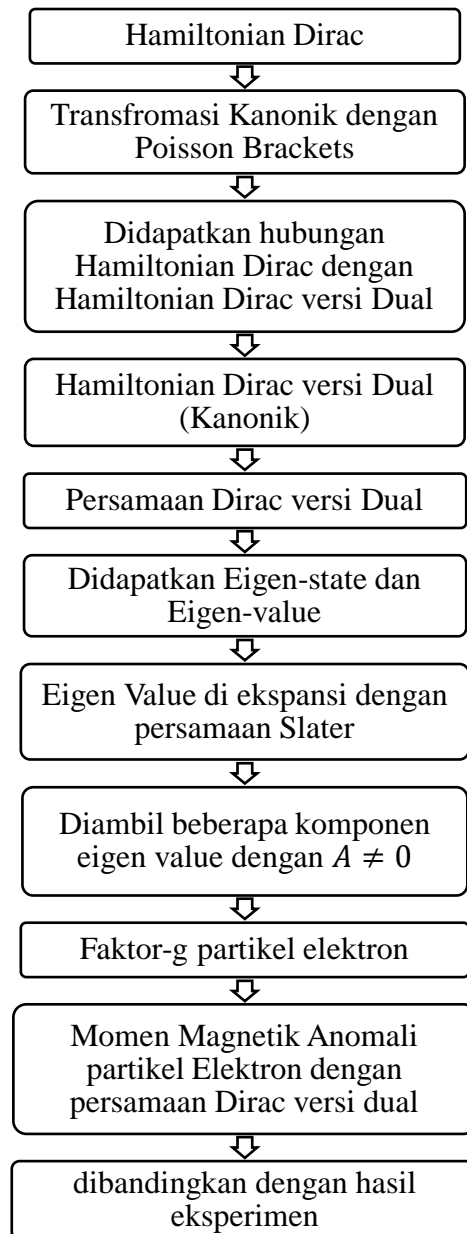
pengamat biasa). Bisa jadi penghilangan suku 4.37 dan 4.38 dapat mempengaruhi hasil teoritis dari persamaan Dirac versi dual, dan akan lebih teliti lagi jika mensubstitusikan persamaan 4.37 dan 4.38 sehingga hasil dari momen magnetik anomali partikel elektron dengan menggunakan persamaan Dirac versi dual lebih mendekati lagi untuk nilai hasil eksperimen (CODATA). Hal ini menunjukkan bahwa persamaan Dirac versi dual lebih baik dari pada persamaan dirac (waktu pengamat biasa).

Penelitian ini dapat mendukung postulat yang diusulkan Minkowski yang memberikan postulat ketiga sebagai implementasi dari kedua postulat Einstein dengan mengasumsikan bahwa waktu yang lebih baik digunakan adalah dengan menggunakan *proper-time*. Minkowski mempertahankan pendapatnya bahwa waktu dan ruang memiliki sifat yang berbeda, meskipun fisikawan pada jaman tersebut masih mempertahankan bahwa waktu adalah relatif bergantung pada pengamat. Hal ini menunjukkan bahwa persamaan dirac versi dual lebih baik daripada persamaan dirac dalam ruang waktu *observer-time*. Disebutkan dalam sebuah jurnal yang berjudul *Time Ordered Operators and Feynman-Dyson Algebras* yang mana Dyson menyebutkan bahwa penggunaan waktu sebagai koordinat keempat merupakan penyebab utama masalah dalam penggabungan antara relativitas dan Mekanika Kuantum.

Teori khusus yang memiliki versi dual memiliki makna bahwa dalam setiap partikel, setiap pengamat memiliki dua set variabel global (\mathbf{X}, t) dan (\mathbf{X}, τ) untuk menggambarkan dinamika, di mana \mathbf{X} adalah pusat massa kanonik. Pada variabel (\mathbf{X}, t) , waktu bersifat relatif dan kecepatan cahaya bersifat mutlak atau tertentu, sedangkan pada variabel (\mathbf{X}, τ) , waktu bersifat tertentu dan kecepatan cahaya

bersifat relatif tanpa batas atas. (Tepper, 2021). Versi dual merupakan teori alternatif dari sebuah teori khusus yang mendefinisikan suatu partikel memiliki dua kemungkinan dalam ruang waktu, yaitu *observer time* dan *proper time*. Arti versi dual ini sendiri fokus menjelaskan sebuah teori khusus dalam ruang waktu *proper time* (τ). Adanya penelitian ini hanya mengenalkan persamaan Dirac dalam versi dual. Akan tetapi dengan adanya versi dual ini tidak mengabaikan keberhasilan persamaan Dirac yang sudah ada sehingga dapat menjelaskan pemisahan antara partikel dan antipartikel dari partikel bermuatan. Hanya jika kita lihat dari hasil penelitian mengenai faktor-g dan ditemukannya momen magnetik anomali partikel elektron dapat disimpulkan bahwa persamaan Dirac versi dual ini lebih baik dari pada persamaan Dirac (*observer time*), khususnya dalam menjelaskan faktor-g dan momen magnetik anomali partikel elektron, sehingga dapat dijadikan alternatif dalam penggunaan persamaan Dirac (*observer time*).

Jika penggunaan persamaan Dirac lebih umum (*general*), maka persamaan Dirac versi dual memungkinkan dijadikan persamaan koreksi untuk persamaan Dirac (*observer time*). Dan untuk saat ini penelitian ini dibatasi hanya sampai pada nilai momen magnetik anomali pada partikel elektron. Mungkin pada penelitian selanjutnya akan di jelaskan lebih kompleks alasan mengapa kita membutuhkan teori versi dual ini terutama pada persamaan Dirac. Berikut urutan proses didapatkannya perbandingan faktor-g dan momen magnetik anomali partikel elektron dengan menggunakan persamaan Dirac versi dual:



Gambar 4. 4 Peta Konsep momen magnetik anomali pada partikel elektron dengan persamaan Dirac versi Dual

4.5 Versi Dual dalam Prespektif Islam

Seorang peneliti bernama Tepper L Gill sangat mendukung adanya postulat yang diusulkan oleh Minkowski, sehingga muncul istilah “versi Dual”. Dalam salah satu penelitiannya pada tahun 1998 yang berjudul *Proper Time formulation of Classical Electrodynamics* mengansumsikan bahwa postulat kedua yang bertumpu

pada *proper time* (versi dual) adalah yang lebih benar. Ternyata hal tersebut telah Allah tegaskan dalam surat *Al-Hajj* ayat 47:

وَيَسْتَعْجِلُونَكَ بِالْعَذَابِ وَلَنْ يُخْلِفَ اللَّهُ وَعْدَهُ وَإِنَّ يَوْمًا عِنْدَ رَبِّكَ كَأَلْفِ سَنَةٍ مِّمَّا تَعُدُّونَ

“Dan mereka meminta kepadamu (Muhammad) agar azab itu disegerakan, padahal Allah tidak menyalahi janji-Nya. Dan sesungguhnya sehari disisi Tuhanmu adalah seperti seribu tahun menurut perhitunganmu” (QS. Al-Hajj: 47)

Ayat ini dalam terjemah secara umum memberi gambaran relativitas waktu Einstein bahwa dalam satu kasus tertentu, para pengamat yang bergerak pada kecepatan yang berbeda akan menatap peristiwa-peristiwa secara berbeda. Konsep kecepatan waktu dalam hal ini didefinisikan sebagai relativitas waktu/dilatasi waktu dalam teori relativitas khusus Einstein. Ayat diatas sebenarnya telah mendahului penemuan hukum relativitas, yaitu bahwa waktu yang ada ini adalah nisbi.

Waktu yang berkaitan erat dengan kehidupan kita, akan terus berjalan sampai batas yang telah ditentukan oleh Sang Maha Kuasa. Kebangkitan akal budi manusia telah secara perlahan mengenal suatu pribadi dan kehendak tertinggi, telah mengalahkan keinginan untuk mengkaji alam semesta. Ungkapan Einsten yang terkenal tentang ilmu dan agama yakni “ilmu tanpa agama akan buta sedangkan agama tanpa ilmu akan lumpuh”, ungkapan tersebut dianggap sebagai regilitasnya (Wardhana, 2006). Terdapat kandungan ayat Al-Quran yang menyatakan bahwa waktu merupakan hal yang sangat penting:

وَالْعَصْرِ

“Demi Masa” (QS. Al-Asr: 1)

Surat *Al-Asr* merupakan surat yang sangat istimewa. Allah mengawali surat ini dengan kalimat *qasam* atau kalimat sumpah, yang menunjukkan setelah kalimat *qasam* ini sesuatu yang sangat penting yang harus diperhatikan dan diyakini. Sebagian besar pendapat ulama mengartikan *Al-Asr* memiliki arti zaman, waktu,

atau masa. Pendapat ini dikuatkan oleh Bapaknya Ilmu Tafsir yaitu Imam At-Tabari.

Maka yang dimaksud dengan *qasam* al-Quran adalah salah satu dari ilmu-ilmu al-Quran yang membahas tentang arti, maksud, rahasia, dan hikmah sumpah-sumpah Allah yang terdapat dalam al-Quran. *Qasam* dapat pula diartikan sebagai bahasa Al-Quran dalam menegaskan atau menguatkan suatu pesan atau pernyataan dengan menyebut nama Allah atau ciptaanNya sebagai *muqsam bih*. Dalam Al-Quran, penyebutan kalimat *qasam* kadangkala dengan memakai kata *aqsama*, dan adakalanya dengan menggunakan kata *halafa* atau *yamana* (Nasution, 2022).

وَإِنَّهُ لَفَسَمٌ لَوْ تَعْلَمُونَ عَظِيمٌ

Artinya: “*Sesungguhnya sumpah itu adalah sumpah yang besar kalau kamu mengetahui*” (Al-Waqi'ah: 76)

Dengan Allah menjadikan *Al-Asr* sebagai *muqsam bih* Allah menguatkan pesan betapa berharganya waktu. Relativitas waktu merupakan pengembangan Teori relativitas Einstein yang terbukti secara ilmiah. Salah satu Teori yang dikemukakan oleh Einstein yang disebut sebagai “Teori relativitas Khusus Einstein” adalah sebuah teori yang menunjukkan adanya suatu konsep kecepatan waktu, yaitu “kecepatan membuat waktu bersifat relatif”. Waktu sebagai salah satu variabel fisis turut juga dipengaruhi oleh tidak adanya kerangka acuan lain yang universal. Jika suatu kerangka acuan bergerak relatif terhadap kerangka acuan lain yang diam, maka waktu yang dialami oleh seseorang dikerangka acuan yang bergerak tersebut akan berbeda waktu dengan waktu pada kerangka acuan yang diam. Tetapi hal ini hanya berlaku jika gerak tersebut mempunyai kecepatan yang mendekati cahaya. Perbedaan waktu tersebut kemudian dikenal sebagai konsep dilatasi waktu (Jumini, 2015).

Dari konsep dilatasi waktu ini muncul istilah *proper-time* (versi Dual) yang menjadi pembahasan utama pada penelitian ini. Sebagaimana pada pembahasan sebelumnya berulang kali menyebutkan faktor-g dari partikel elektron yang dapat menghasilkan momen magnetik anomali. Faktor-g ternyata memiliki manfaat pada kehidupan sehari-hari, yang kita sering dengar salah satu alat kesehatan yang bernama MRI. MRI (*Magnetik Resonance Imaging*) merupakan pemeriksaan organ tubuh dengan menggunakan teknologi magnet dan gelombang radio. MRI adalah suatu teknik pencitraan yang menghasilkan citra potongan melintang obyek yang menggunakan medan magnet kuat, fluktuasi gradien yang berulang dan cepat secara tegak lurus, serta radiasi elektromagnetik dalam bentuk gelombang radio (energi radiofrekuensi). Faktor-g berperan penting pada pembentukan citra MRI, kecepatan/frekuensi presisi atom hidrogen tergantung pada kuat medan magnet yang diberikan pada jaringan dan nilai faktor-g dari atom. Semakin besar kuat medan magnet dan nilai faktor-g maka semakin cepat presisi proton. Frekuensi presisi ini merupakan dasar terjadinya resonansi pada MRI.

Pada penelitian ini menyebutkan bahwa nilai faktor-g pada partikel elektron yang dihasilkan dari persamaan Dirac versi dual ternyata lebih mendekati nilai eksperimen dari pada faktor-g yang diturunkan secara teoritis oleh persamaan Dirac. Hal ini tidak menutup kemungkinan bahwa nilai faktor-g dengan menggunakan persamaan versi Dual dapat digunakan dalam pengembangan teknologi pada masa mendatang dengan adanya alat MRI seperti yang sudah ada saat ini.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Persamaan Dirac versi Dual adalah persamaan Dirac yang berada pada ruang *proper-time* dengan cara mentransformasikan bentuk hamiltonian Dirac dengan menggunakan transformasi kanonik, sehingga didapatkan persamaan Dirac versi Dual yang didapatkan pada persamaan 3.21. Dari persamaan Dirac versi Dual tersebut didapatkan *Eigen-state* dengan empat keadaan energi partikel dan antipartikel. Masing-masing dalam keadaan spin up pada persamaan 3.30 dan 3.31 dan spin-down pada persamaan 3.34 dan 3.35, dan *Eigen-value* yang didapatkan pada persamaan 4.6.
2. Persamaan *Eigen-value* yang didapatkan pada persamaan Dirac versi dual masih perlu dilakukan pemisahan antara partikel untuk menghasilkan *Eigen-value* khusus pada partikel (elektron). Dari *Eigen-value* tersebut didapatkan nilai faktor-g. Sehingga didapatkan formula baru pada momen magnetik anomali dengan menggunakan persamaan Dirac versi dual, sehingga didapatkan nilai momen magnetik anomali dai partikel elektron $a_e = 0.00028574068077$. Nilai momen magnetik anomali dengan menggunakan persamaan dirac (observer time) bernilai nol, akan tetapi berbeda dengan menggunakan persamaan Dirac versi dual yang lebih mendekati nilai eksperimen.

5.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya dapat dikembangkan menggunakan partikel yang lebih kompleks seperti pada partikel moun atau neutrino-muon dengan menggunakan persamaan Dirac versi dual.

DAFTAR PUSTAKA

- Abu Qasim Mahmud bin Umar Az- Zamakhsyari Al-Khawarizmi. 1143. *Tafsirul Kasyaf 'Ala haqiqit Tanzil wa Uyuniil Aqowil Fii Wujuuhit Ta'wil*. Darul Ma'rifah, Beirut Libanon.
- Al-Mahali, Jalaludin, Jalaludin as-Suyuti. 1505. *Tafsirul Jalalain Asbabun Nuzul Lis Suyuti*. Dar Kutub al Ilmiyah. Beirut, Libanon.
- Al-Qurtubi, Abu Abdullah. 1273. *Tafsir Al-Qurtubi al-Jami' li Ahkam Al-Quran*. Dar Kutub Al Ilmiyah. Beirut, Libanon.
- Aoyama, Tatsumi, dkk. 2018. *Theory of the Anomalous Magnetik Moment of the Elektron* 1, 2, 3, 2,6,* 27 November)
- Bagrov, Vladislav G. 2010. *The Dirac Equation and its Solution: Volume 4*. CPI books GmbH Leck, Jerman.
- K. Bhattacharya, Solution of The Dirac Equation in Presence of An Uniform Magnetic Field, Mexico, Universidad Nacional Autonoma de Mexico, 2008.
- Beiser, Artur, The How Liong. 2001. *Konsep Fisika Modern, Edisi Keempat*. Jakarta: Erlanga.
- Cohen, E Richard. *The 1986 CODATA Recommended Values of The Fundamental Physical Constant*. Journal of Physical and Reference Data. AIP Publishing
- Fleming, Ray. 2018. *Particle Spin and Magnetik Moment as Quantum Field*. The general Science Journal.
- Goldstein. 1950. *Classical Mechanics*. Newyork: Addison-Wesley Publishing Company
- Greiner, Walter. 2001. *Relativistic Quantum Mechanics: Wave Equations, Third Edition*. Germany: Springer
- Griffiths, David J. 2005. *Introduction to Quantum Mechanics Second Edition*. Pearson Prentice Hall: USA.
- Halim, A, Fitri Herlianan. 2019. *Pengantar Fisika Kuantum, Buku Ajar Perguruan Tinggi*. Aceh: Syiah Kuala University Press.
- Humaidi, Syahrul dkk. 2016. *Analisis dan Visualisasi Persamaan Klien-Gordon pada Elektron dalam Sumur Potensial dengan Menggunakan Program Mathematic 10*. Prosiding Seminar Nasional Fisika SNF201. Volume V, Oktober 2016.
- Jumini, Sri. 2015. *Relativitas Einstein Terhadap Waktu Ditinjau dari Al-Quran Surat Al-Ma'arij Ayat 4*. Syariat Jurnal Studi Al-Quran dan Hukum. Vol I No.02, November 2015.
- Kusch, P.; Foley, 1947. H.M. *Precision Measurement of the Ratio of the Atomic 'g Values' in the $2P_{3/2}$ and $2P_{1/2}$ States of Gallium*. Phys. Rev. 1947, 72, 1256–1257)

- Marciano, William J. 2004. *Anomalous magnetik moment*. International journal of Modern Physics A. vol. 19, World scientific Publishing Company: Weinheim
- Mohr, Peter J dkk. 1998. *CODATA recommended values of the Fundamental Physics constants:1998*. Review of modern Physics, Vol. 84, November 2012. National institute of Sandards and Technology, Gaitherburg, Maryland, USA.
- Mohr, Peter J dkk. 2012. *CODATA recommended values of the Fundamental Physics constants:2010*. Review of modern Physics, Vol. 84, November 2012. National institute of Sandards and Technology, Gaitherburg, Maryland, USA.
- Nasution, Hasan Mansur. 2002. *Rahasia Sumpah Allah dalam Al-Quran* Jakarta: Khazanah Baru.
- Nolting, Wolfgang. 2017. *Theoretical Physics 7: Quantum Mechanics, Methods and Aplications Third Edition*. Institute of Physics Humboldt-University Springer International Publishing: Berlin.
- Pauli, Dirac. 1958 in: *Handbuch der Physik*, Bd.5. Springer: Berlin, Gottingen and Heidelberg.
- Romadani, Arista, E Rani. 2020. *Pengaruh Medan Elektromagnet terhadap Partikel Dirac dan Klien Gordon dalam Potensial Penghalang Periodik Satu Dimensi*. Malang: JPSE (Journal of Physical Science and Engineering), Vol. 4, No. 1, 2019, Page 8 – 17.
- Romlah, 2011. *Ayat-Ayat Al-Quran dan Fisika*. Harakindo Publishing, Bandar Lampung.
- Sabarni, 2019. *Struktur Atom Berdasarkan Ilmu Kimia dan Prespektif Al-Quran*. Lantanida Journal, Vol.7 No.1 (2019)1-100, UIN Ar-Raniry, Banda Aceh
- Schiff, Leonard I. 1949. *Quantum Mecanics: First Edition*. NewYork: McGraww-Hill Book Company.
- Steven, J Leon. 1998. *Aljabar Linear dan Aplikasinya, Edisi Kelima*. Jakarta: Erlangga.
- Sturm, Sven, Gunter Werth, and Klaus Blaum. 2013. *Elektron g-factor determinations in Penning traps Annalen der Physik*. Ann. Phys. 525, No. 8–9, 620–635 (2013)): Berlin.
- Sudiarta, I Wayan, 2012. *Mekanika Kuantum*. Fakultas Matematika dan Ilmu Alam Universitas Mataram: Mataram.
- Sudiarta, I Wayan. 2019. *Mekanika Kuantum, Edisi Pertama*. Mataram: CV Garuda Ilmu
- Sumardi, Yosaphat. 2018. *Fisika Atom*. Yogyakarta: UNY Press.
- Sutopo. 2005. *Pengantar Fisika Kuantum*. Malang: UM Press.

- Tepper L Gill, 1997. *ProperTime Formulation of Classical Electrodynamics*. Mathematics and Computational Physics Laboratory, Howard University: Washington
- Tepper L Gill, W.W. Zachary. 2005 *Analytic Representation of Relativistic Wave Equations I: The Dirac Case*. Washington: Department of Electrical and Computer Engineering, Department of Mathematics Howard University.
- Tepper L Gill. 2004. *Analytic Representation of the Square-Root Operator*. Mathematics and Computational Physics Laboratory, Howard University: Washington
- Tepper L Gill. 2020. *The Einstein Dual Theory of Relativity*. Mathematics and Computational Physics Laboratory, Howard University: Washington.
- Tepper, 1998- *Canonical Proper time formulation of relativistic particle dynamics II*
- Tepper, L Gill. 2021. *Dual Relativistic Quantum Mechanics I*. Mathematics and Computational Physics Laboratory, Howard University: Washington.
- Teubner, Thomas.2018. *The Anomalous Anomaliy*. Department of Mathematical Sciences, University of Liverpool. Nature Physics: Liverpool, UK.
- Wardhana, Wisnu Arya. 2009. *Melacak Teori Einsten dalam Al-Qur`an*. Yogyakarta: Pustaka Pelajar
- Yosi, R. 2022. *Pedalaman Materi Fisika: Mekanika Kuantum*. Jurnal Pendidikan Fisika Universitas Negeri Yogyakarta: Yogyakarta.
- Zetilli, Neurodine. 2009. *Quantum Mechanics: Concepts and Applications, Second Edition*. United Kingdom: Jhon Wiley & Sons, Ltd

LAMPIRAN

LAMPIRAN A

BATAS NON-RELATIVISTIK PERSAMAAN DIRAC

Sebelum kita melanjutkan lebih jauh dengan perluasan teori Dirac, penting untuk memeriksa apakah persamaan Dirac menghasilkan hasil yang wajar secara fisik dalam kasus pembatas nonrelativistik. Pertama kita mempelajari kasus elektron dalam keadaan diam; dalam hal ini kita peroleh persamaan Dirac dengan menetapkan $\hat{p}\psi = 0$ dalam persamaan gelombang kovarian relativistik dalam bentuk Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[\frac{\hbar c}{i} \left(\hat{\alpha}_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \hat{\alpha}_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \hat{\alpha}_3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) + \hat{\beta} m_0 c^2 \right] \psi = \hat{H}_f \psi \quad 1$$

Maka diperoleh,

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{\beta} m_0 c^2 \psi \quad 2$$

Dalam representasi khusus dengan

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \quad 3$$

kita dapat menuliskan empat solusi

$$\begin{aligned} \psi^1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \exp \left[-i \left(\frac{m_0 c^2}{\hbar} \right) t \right] \\ \psi^2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \exp \left[-i \left(\frac{m_0 c^2}{\hbar} \right) t \right] \\ \psi^3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp \left[+i \left(\frac{m_0 c^2}{\hbar} \right) t \right] \\ \psi^4 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp \left[+i \left(\frac{m_0 c^2}{\hbar} \right) t \right] \end{aligned} \quad 4$$

dua fungsi gelombang yang pertama sesuai dengan positif, dua terakhir untuk nilai energi negatif. Penafsiran solusi dengan energi negatif masih menimbulkan masalah dan ditunda $E = \mathcal{E} = \pm E_p$; namun, interpretasi yang benar mengarah pada kemenangan besar teori kuantum relativistik dengan meramalkan dan mendeskripsikan antipartikel. Oleh karena itu pada awalnya kami membatasi diri

pada solusi energi positif. Untuk menunjukkan bahwa persamaan Dirac mereproduksi persamaan Pauli dua komponen dalam batas nonrelativistik, kami memperkenalkan empat potensial elektromagnetik

$$A^\mu = \{A_0(x), A(x)\} \quad 5$$

ke dalam persamaan Dirac (2.2). Kita tahu bahwa kopling minimal

$$\hat{p}^\mu \rightarrow \hat{p}^\mu - \frac{e}{c} A^\mu \equiv \hat{\Pi}^\mu \quad 6$$

memastikan invarians gauge dari teori, di mana $\hat{\Pi}^\mu$ adalah momentum kinetik dan \hat{p}^μ momentum kanonik. Jadi kita pasti dipandu ke persamaan Dirac dengan potensi elektromagnetik

$$c \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial ct} - \frac{e}{c} A \right) \psi = \left[c\hat{\alpha} \cdot \left(\hat{p} - \frac{e}{c} A \right) + \hat{\beta} m_0 c^2 \right] \psi \quad 7$$

Atau

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left[c\hat{\alpha} \cdot \left(\hat{p} - \frac{e}{c} A \right) + eA_0 + \hat{\beta} m_0 c^2 \right] \psi \quad 8$$

Ini berisi interaksi dengan medan elektromagnetik

$$\hat{H}' = -\frac{e}{c} c\hat{\alpha} \cdot A + eA_0 = -\frac{e}{c} \hat{v} \cdot A + eA_0 \quad 9$$

Dimana,

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} [\hat{x}, \hat{H}_f]_- = \frac{1}{i\hbar} [\hat{x}, c(\hat{\alpha} \cdot \hat{p}) + \hat{\beta} m_0 c^2] \\ &= \frac{c}{i\hbar} [\hat{x}, \hat{\alpha}, \hat{p}] = c\hat{\alpha} = \hat{v} \end{aligned} \quad 10$$

adalah operator kecepatan relativistik. Ekspresi (9) sesuai dengan interaksi klasik dari partikel seperti titik bermuatan yang bergerak dengan medan elektromagnetik. Operator kecepatan, bagaimanapun, adalah operator formal \hat{v} yang berisi Zitterbewegung.

Kasus pembatas nonrelativistik dari (8) dapat dipelajari dengan paling efisien dalam representasi

$$\psi = \begin{pmatrix} \bar{\varphi} \\ \bar{\chi} \end{pmatrix} \quad 11$$

dimana spinor empat komponen \sim didekomposisi menjadi dua spinor dua komponen $\bar{\varphi}$ dan $\bar{\chi}$. Maka persamaan Dirac (8) menjadi

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \bar{\varphi} \\ \bar{\chi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\hat{\sigma} \cdot \hat{\Pi} \bar{\chi} \\ c\hat{\sigma} \cdot \hat{\Pi} \bar{\varphi} \end{pmatrix} + eA_0 \begin{pmatrix} \bar{\varphi} \\ \bar{\chi} \end{pmatrix} + m_0 c^2 \begin{pmatrix} \bar{\varphi} \\ \bar{\chi} \end{pmatrix} \quad 12$$

$\hat{\alpha}_i$ begitu juga dengan $\hat{\beta}_i$ matriks-matriks yang telah disisipkan menurut (3). Jika energi diam m_0c^2 , sebagai energi terbesar yang terjadi, juga dipisahkan oleh

$$\begin{pmatrix} \bar{\varphi} \\ \bar{\chi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \exp \left[-i \left(\frac{m_0c^2}{\hbar} \right) t \right] \quad 13$$

kemudian (12) mengambil bentuk

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\hat{\sigma} \cdot \hat{\Pi} \chi \\ c\hat{\sigma} \cdot \hat{\Pi} \varphi \end{pmatrix} + eA_0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} + 2m_0c^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix} \quad 14$$

Mari kita pertimbangkan terlebih dahulu yang lebih rendah (kedua) dari persamaan di atas. Untuk kondisi $|i\hbar\partial\chi/\partial t| \ll |m_0c^2\chi|$ dan $|eA_0\chi| \ll |m_0c^2\chi|$ (yaitu jika energi kinetik serta energi potensial kecil dibandingkan dengan energi yang lain) kita peroleh dari komponen yang lebih rendah dari (14)

$$\chi = \frac{\hat{\sigma} \cdot \hat{\Pi}}{2m_0c} \varphi \quad 15$$

Persamaan ini berarti bahwa χ mewakili komponen kecil dari fungsi gelombang ψ , sebuah hasil yang sudah kita ketahui dari subbab partikel dirac yang bergerak bebas $\chi_0 = \frac{c(\hat{\sigma} \cdot \mathbf{p})}{m_0c + \mathcal{E}} \varphi_0$, sedangkan φ mewakili komponen besar $\sim (v/2c)\varphi$. Penyisipan (15) ke dalam persamaan pertama (14) menghasilkan nonrelativistic fungsi gelombang untuk φ

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{(\hat{\sigma} \cdot \hat{\Pi})(\hat{\sigma} \cdot \hat{\Pi})}{2m_0} \varphi + eA_0\varphi \quad 16$$

Dengan bantuan $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{X})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}) = \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{X} \times \mathbf{Y})$ kami melanjutkan perhitungan,

$$\begin{aligned} (\hat{\sigma} \cdot \hat{\Pi})(\hat{\sigma} \cdot \hat{\Pi}) &= \hat{\Pi}^2 + i\hat{\sigma} \cdot [(\hat{\Pi}) \times (\hat{\Pi})] \\ &= \left(\hat{p} - \frac{e}{c}A \right)^2 + i\hat{\sigma} \cdot \left[\left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}A \right) \times \left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}A \right) \right] \\ &= \left(\hat{p} - \frac{e}{c}A \right)^2 + \frac{e}{c} \hbar \hat{\sigma} \cdot (\nabla \times A) \\ &= \left(\hat{p} - \frac{e}{c}A \right)^2 + \frac{e}{c} \hbar \hat{\sigma} \cdot B \end{aligned} \quad 17$$

LAMPIRAN B

HAMILTONIAN DUAL DIRAC

Operator untuk energy system ditentukan oleh fungsi Hamiltonian $H(r,p,t)$.

Operator Hamilton yaitu

$$H_D = H_0 + V_0 = (c\hat{\alpha} \cdot \mathbf{p} + mc^2\hat{\beta} + V_0) \quad 1$$

Dengan menggunakan

$$V = \frac{H_0 V_0 + V_0 H_0}{2mc^2} \quad 2$$

Setelah dilakukan transformasi Kanonik sebagaimana pada subbab 3.3 didapatkan Hamiltonian Kanonik, yaitu operator Hamiltonian versi Dual secara umum

$$K_D = \frac{H_D^2}{2mc^2} + \frac{mc^2}{2} \quad 3$$

Dengan mensubstitusikan operator Hamiltonian persamaan 1, maka didapatkan

$$\begin{aligned} K_D &= \frac{H_D^2}{2mc^2} + \frac{mc^2}{2} \\ &= \frac{[(c\hat{\alpha} \cdot \pi + mc^2\hat{\beta}) + V_0]^2}{2mc^2} + \frac{mc^2}{2} \\ &= \frac{(c\hat{\alpha} \cdot \pi)^2 + (mc^2\hat{\beta})^2 + (c\hat{\alpha} \cdot \pi)(mc^2\hat{\beta}) + (mc^2\hat{\beta})(c\hat{\alpha} \cdot \pi) +}{2mc^2} \\ &\quad \frac{V_0^2 + H_0 V_0 + V_0 H_0}{2mc^2} + \frac{mc^2}{2} \end{aligned} \quad 4$$

Dengan menggunakan aturan Pauli (2.64) didapatkan

$$\begin{aligned} K_D &= \frac{c^2\pi^2 + e\hbar c\Sigma B + m^2c^4 + 0 + 0 + V_0^2 + H_0 V_0 + V_0 H_0}{2mc^2} + \frac{mc^2}{2} \\ &= \frac{\pi^2}{2m} + \frac{e\hbar c\Sigma B}{2mc^2} + \frac{mc^2}{2} + \frac{V_0^2}{2mc^2} + \frac{H_0 V_0 + V_0 H_0}{2mc^2} + \frac{mc^2}{2} \\ &= \frac{\pi^2}{2m} + \frac{e\hbar\Sigma B}{2mc} + \frac{V_0^2}{2mc^2} + \frac{H_0 V_0 + V_0 H_0}{2mc^2} + mc^2 \\ &= \frac{\pi^2}{2m} + \frac{e\hbar\Sigma B}{2mc} + \frac{V_0^2}{2mc^2} + V + mc^2 \end{aligned} \quad 5$$

Kemudian dijabarkan dengan menggunakan $H_0 = (c\hat{\alpha} \cdot \pi + mc^2\hat{\beta})$ dengan menggunakan aturan pada matriks spin Pauli $\hat{\alpha}\hat{\beta} + \hat{\beta}\hat{\alpha} = 0$

$$\begin{aligned}
K_D &= \frac{\pi^2}{2m} + \frac{e\hbar\Sigma B}{2mc} + \frac{V_0^2}{2mc^2} + \frac{H_0V_0 + V_0H_0}{2mc^2} + mc^2 \\
&= \frac{\pi^2}{2m} + \frac{e\hbar\Sigma B}{2mc} + \frac{V_0^2}{2mc^2} + \frac{(c\hat{\alpha} \cdot \pi + mc^2\hat{\beta})V_0}{2mc^2} + \\
&\quad \frac{V_0(c\hat{\alpha} \cdot \pi + mc^2\hat{\beta})}{2mc^2} + mc^2 \\
&= \left[\frac{\pi^2}{2m} + \frac{e\hbar\Sigma B}{2mc} + \frac{V_0^2}{2mc^2} + \hat{\beta}V_0 + \frac{V_0\hat{\alpha} \cdot \pi}{mc} + \frac{i\hbar\hat{\alpha} \cdot \nabla V_0}{2mc} + mc^2 \right] \quad 6
\end{aligned}$$

Maka didapatkan Hamiltonian Kanonik (versi Dual) sehingga dapat diketahui Persamaan Dirac Versi Dual dengan menggunakan operator tersebut.

LAMPIRAN C

PERSAMAAN SLATER (HYDROGEN ATOM)

Pada bagian ini, kami mempertimbangkan kembali analisis standar persamaan Dirac untuk masalah atom hidrogen dari sudut pandang yang tepat. Kita asumsikan bahwa $A = \frac{(\mu_r \times r)}{r^3}$, $V = -\hbar c \gamma / r$, dan $\gamma = \frac{e^2}{\hbar c}$. Tulis ulang

$$i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = (V + mc^2)\psi_1 + c(\sigma \cdot \pi)\psi_2 \quad 1$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = (V - mc^2)\psi_2 + c(\sigma \cdot \pi)\psi_1 \quad 2$$

dalam bentuk nilai eigen:

$$(\lambda - V - mc^2)\psi_1 = c(\sigma \cdot \pi)\psi_2 \quad 3$$

$$(\lambda - V + mc^2)\psi_2 = c(\sigma \cdot \pi)\psi_1 \quad 4$$

Menghilangkan ψ_1 dalam hal ψ_2 dan sebaliknya, kita memperoleh persamaan berikut(18 a b):

$$(\lambda - V - mc^2)\psi_1 = \frac{c^2(\sigma \cdot \mathbf{p}V_0)(\sigma \cdot \boldsymbol{\pi})}{(\lambda - V + mc^2)^2}\psi_1 + \frac{c^2(\sigma \cdot \boldsymbol{\pi})(\sigma \cdot \boldsymbol{\pi})}{(\lambda - V + mc^2)}\psi_1 \quad 5$$

$$(\lambda - V + mc^2)\psi_2 = \frac{c^2(\sigma \cdot \mathbf{p}V_0)(\sigma \cdot \boldsymbol{\pi})}{(\lambda - V + mc^2)^2}\psi_2 + \frac{c^2(\sigma \cdot \boldsymbol{\pi})(\sigma \cdot \boldsymbol{\pi})}{(\lambda - V + mc^2)}\psi_2 \quad 6$$

Kami juga mendapatkan diatas dari persamaan melalui integrasi langsung, menggunakan Lemma Riemann-Lebesgue.

$$i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = (V + mc^2)\psi_1 + \left[\frac{c^2(\sigma \cdot \boldsymbol{\pi})}{i\hbar} \right] \int_{-\infty}^t \exp\{= iB(t - \tau)\}(\sigma \cdot \boldsymbol{\pi}) \psi_1(\tau) d\tau \quad 7$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = (V - mc^2)\psi_2 + \left[\frac{c^2(\sigma \cdot \boldsymbol{\pi})}{i\hbar} \right] \int_{-\infty}^t \exp\{= iB(t - \tau)\}(\sigma \cdot \boldsymbol{\pi}) \psi_2(\tau) d\tau \quad 8$$

Kami menyebut (18a) dan (18b) persamaan Slater karena pertama kali digunakan oleh salah satu muridnya pada awal 1940, dan muncul di bukunya, pertama diterbitkan pada tahun 1960. Sulit untuk memahami, mengingat minat historis yang berkelanjutan dalam persamaan Dirac, mengapa pekerjaan Slater pada persamaan ini tidak diketahui dengan baik. Untuk alasan yang jelas, kami berkonsentrasi pada (18a). Pertama, perhatikan bahwa, jika kita menghilangkan suku tengah dan

mengganti $(\lambda - V - mc^2)$ dengan $2mc^2$, kita mendapatkan aproksimasi Pauli untuk persamaan Dirac (19):

$$(\lambda - V - mc^2)\psi_1 = -\frac{e\hbar}{2mc} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B})\psi_1 + \frac{\pi}{2m}\psi_1 \quad 9$$

Seperti disebutkan sebelumnya, persamaan Pauli digunakan untuk mengekstrak bagian pemisahan hiperhalus dari spektrum hidrogen untuk melengkapi prediksi QED. Oleh karena itu, kondisi yang membenarkan aproksimasi Pauli dan penurunan suku tengah (18a) keduanya sangat penting untuk fondasi QED.

Ada sejumlah persamaan lain dan/atau aproksimasi “jelas” yang telah diberi nama dan/atau digunakan sebagai pengganti persamaan Pauli (misalnya, Greiner, Mizushima atau Bethe dan Salpeter). Kami tidak mempertimbangkan persamaan ini karena, meskipun mereka terkait dengan persamaan Dirac, mereka tidak memberikan informasi tambahan dan jauh dari jelas bahwa mereka memiliki pembenaran matematis atau fisik ketika diterapkan pada satu-satunya perhitungan yang penting, *s-state* dari hidrogen. Ingat bahwa ada probabilitas terbatas untuk menemukan elektron pada titik asal dalam *s-state*, tetapi kondisi yang diperlukan untuk validitas (19) adalah $(\lambda - V - mc^2) \ll 2mc^2$. Jadi, kondisi ini tidak terpenuhi untuk kalkulasi *s-state* manapun. Oleh karena itu, dari sudut pandang dasar, penggunaan persamaan Pauli untuk menghitung pemisahan hiperhalus dari *s-state* masih jauh dari Meyakinkan. Di sisi lain, kondisi tersebut mudah terlihat terpenuhi untuk semua negara bagian lainnya. Pendekatan yang lebih masuk akal adalah dengan menggunakan $|mc^2 - \lambda| \ll 2mc^2$ untuk menggantikan $(\lambda - V + mc^2)$ dengan $2mc^2 \left(1 + \frac{r_0}{r}\right)$, di mana $r_0 = \frac{e^2}{\lambda + mc^2} \cong \frac{e^2}{2mc^2}$. Kondisi di atas selalu terpenuhi (13ev dibandingkan dengan 0.5Mev). Pendekatan ini juga memiliki keuntungan tambahan menghilangkan masalah nilai eigen nonlinier yang ditimbulkan oleh (18a) tanpa secara substansial mempengaruhi hasil akhir. Dalam hal ini kita memiliki

$$(\lambda - V - mc^2)\psi_1 = \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}V_0)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})}{4m^2c^2 \left(1 + \frac{r_0}{r}\right)^2}\psi_1 + \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})}{2m \left(1 + \frac{r_0}{r}\right)}\psi_1 \quad 10$$

Menggunakan perhitungan standar, kita mendapatkan (lihat Slater, $\hbar\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ adalah momentum sudut, dan $\hbar\mathbf{S}$ adalah putaran, $\mathbf{S} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}$)

LAMPIRAN D

PENGUKURAN MOMEN MAGNETIK ANOMALI PARTIKEL ELEKTRON DENGAN UJI PRESISI QED

Anomali momen magnetik elektron kemungkinan adalah yang paling tepat secara eksperimental kuantitas yang diketahui. Selama hampir 20 tahun nilainya didasarkan pada ketepatan yang luar biasa pengukuran momen magnetik anomali elektron dan positron

$$\begin{aligned} a_{e^-}^{exp} &= 0.001\,159\,652\,188\,4(43) \\ a_{e^+}^{exp} &= 0.001\,159\,652\,187\,9(43), \end{aligned} \quad 1$$

oleh Van Dyck dkk. (1987). Eksperimen tersebut menggunakan teknik perangkap ion, yang memungkinkan untuk mempelajari satu elektron dengan presisi yang ekstrem. Hasilnya secara mengesankan menegaskan konservasi CPT (*Charge Conjugation Parity Time reversal*: pertukaran antar partikel dan anti partikel secara mirroring pada pembalikan waktu): $a_{e^+} = a_{e^-}$ Menjadi prediksi dasar dari setiap QFT (*Quantum Field Theory*), simetri CPT akan dianggap berlaku sebagai berikut. Hal ini memungkinkan kita untuk rata-rata nilai elektron dan positron dengan hasil

$$a_e = \frac{\mu_e}{\mu_B} - 1 = \frac{(g_e - 2)}{2} = 1.159\,652\,1883(42) \times 10^{-3} \quad 2$$

Sebuah langkah maju yang besar telah dicapai baru-baru ini oleh Gabrielse dkk. dalam percobaan di Universitas Harvard menggunakan siklotron kuantum satu elektron. Hasil barunya adalah

$$a_e = 1.159\,652\,180\,73(28)[0.24 \text{ ppb}] \times 10^{-3} \quad 3$$

dengan akurasi hampir 15 kali lebih baik daripada (2) dan menggeser nilai pusat a_e sebesar 1,8 standar deviasi

Pengukuran a_e , tidak hanya memainkan peran kunci dalam sejarah pengujian presisi QED pada khususnya, dan konsep QFT secara umum, hari ini kita dapat menggunakan momen magnetik anomali elektron untuk mendapatkan pengukuran tidak langsung yang paling tepat dari partikel halus. konstanta struktur α . Kemungkinan ini tentu saja bergantung pada kemampuan kita untuk menjabarkan prediksi teoretis dengan akurasi yang sangat tinggi. Memang a_e , jauh lebih aman untuk diprediksi secara andal daripada a_μ . Alasannya adalah bahwa efek hadronik non-gangguan serta kepekaan terhadap fisika yang tidak diketahui di luar SM

ditekan oleh faktor besar $\frac{m_\mu^2}{m_e^2} \cong 42.753$ dibandingkan dengan a_μ . Penindasan ini harus dimasukkan ke dalam perspektif dengan presisi 2250 kali lebih tinggi yang kita ketahui a_e . Dengan demikian kita dapat mengatakan bahwa secara efektif a_e adalah faktor 19 yang kurang sensitif terhadap model fisika yang bergantung daripada a_μ .

Alasan mengapa sangat menarik untuk memiliki pengukuran a_e yang tepat seperti itu tentu saja karena dapat dihitung dengan akurasi yang sebanding dalam teori. Prediksi diberikan oleh ekspansi gangguan bentuk

$$a_e = \sum_{n=1}^N C_n \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^n \quad 4$$

dengan persyaratan hingga lima loop, $N = 5$, dalam pertimbangan. Presisi eksperimental a_e , membutuhkan pengetahuan tentang koefisien dengan akurasi $\delta C_2 \sim 5 \times 10^{-5}$, $\delta C_3 \sim 2 \times 10^{-5}$, $\delta C_4 \sim 1 \times 10^{-2}$ dan $\delta C_5 \sim 4$. Sebenarnya, Aoyama, Hayakawa, Kinoshita dan Nio belum lama ini mencapai pencapaian yang luar biasa kemajuan dalam menghitung kontribusi QED empat dan lima putaran yang hilang. Selain istilah C_5 universal terkemuka, sejauh ini kontribusi μ dan τ lepton yang bergantung pada massa yang hilang telah dievaluasi. Mengenai kontribusi yang bergantung pada massa, situasi untuk elektron sangat berbeda dari muon. Karena elektron adalah lepton yang paling ringan, kontribusi "loop internal ringan" yang berpotensi besar tidak ada. Untuk a_e , muon adalah partikel berat $m_\mu \gg m_e$ dan kontribusinya adalah jenis "loop internal berat" yang ditekan oleh daya ekstra $\frac{m_\mu^2}{m_e^2}$. Kenyataannya μ -loop cenderung terpisah dan karena itu hanya menghasilkan suku-suku kecil. Kita dapat mengevaluasinya hanya dengan mengganti $m_\mu \rightarrow m_e$, $m_\tau \rightarrow m_\mu$ dalam rumus kontribusi loop- τ ke a_e . Koreksi karena μ -loop internal ditekan sebagai $O\left(\frac{2\alpha m_\mu^2}{\pi m_e^2}\right) \cong 1,1 \times 10^{-7}$ relatif terhadap suku awal dan τ -loop praktis tidak memainkan peran sama sekali.

Mengumpulkan hasil yang kita miliki

$$a_e^{QED} = a_e^{uni} + a_e(\mu) + a_e(\tau) + a_e(\mu, \tau) \quad 5$$

dengan istilah universal yang diberikan maka

$$\begin{aligned}
a_e(\mu) &= 5.197\,386\,76(26) \times 10^{-7} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 - 7.373\,941\,70(27) \\
&\quad \times 10^{-6} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 + 9.161\,970\,703(373) \times 10^{-4} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 \\
&\quad - 0.00382(39) \times 10^{-6} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^5 \\
a_e(\tau) &= 1.83798(33) \times 10^{-9} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 - 6.5830(11) \times 10^{-8} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 \\
&\quad + 7.429\,24(118) \times 10^{-6} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 \\
a_e(\mu, \tau) &= 0.190982(34) \times 10^{-12} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 + 7.4687(28) \times 10^{-7} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4
\end{aligned}$$

Secara keseluruhan ekspansi mengganggu untuk prediksi QED dari a_e , diberikan oleh

$$\begin{aligned}
a_e^{QED} &= \frac{\alpha}{2\pi} - 0.328\,478\,444\,002\,54(33) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \\
&\quad + 1.181\,234\,016\,816(11) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 - 1.91134(182) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 \\
&\quad + 7.791(580) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^5
\end{aligned} \tag{6}$$

Peningkatan koefisien C_4 dan mengetahui C_5 sekarang penting untuk penentuan tepat α dari a_e^{exp} di bawah. Untuk nilai akurat kami untuk konstanta struktur halus yang telah ditentukan dengan mencocokkan prediksi SM dari a_e , di bawah ini dengan a_e^{exp} , kami memperoleh

$$\begin{aligned}
a_e^{QED} &= a_e^{uni} + 0.00000000000268 \\
&= 0.00115965217910(26)(0)(4)[26]
\end{aligned} \tag{7}$$

yang menunjukkan bahwa bagian QED (Quantum Electro Dynamics) dari prediksi SM dari a_e , sangat didominasi oleh bagian universal.

Apa yang masih hilang adalah kontribusi hadronik dan lemah, yang keduanya secara substansial berkurang relatif terhadap a_μ . Harus dicatat bahwa kontribusi ini tidak diukur dengan faktor $\left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2$ seperti yang bisa ditebak secara naif. Perkiraan menghasilkan $a_e^{had} 1,697(12) \times 10^{-12}$ dan $a_e^{weak} = 0,030 \times 10^{-12}$ lemah masing-masing. Dengan peningkatan hasil eksperimen untuk a_e , dan peningkatan perhitungan QED yang tersedia, kontribusi hadronik sekarang mulai signifikan, namun, tidak seperti pada a_μ^{had} untuk muon, a_e^{had} diketahui dengan akurasi yang

cukup dan bukan merupakan faktor pembatas di sini. Akibatnya a_e pada dasarnya hanya bergantung pada QED perturbatif, sedangkan kontribusi hadronik, lemah dan fisika baru (NP) ditekan oleh $\left(\frac{m_e}{M}\right)^2$. di mana M adalah skala fisika lemah, hadronik atau baru. Akibatnya a_e , pada ini tingkat akurasi secara teoritis terkendali dengan baik (hampir objek QED murni) dan oleh karena itu merupakan pengamatan yang sangat baik untuk mengekstraksi α_{QED} berdasarkan prediksi SM

$$\alpha_e^{SM} = \alpha_e^{QED} + 1.721(12) \times 10^{-12} \text{ (hadronic \& weak)} \quad 8$$

Kami sekarang membandingkan hasil ini dengan pengukuran presisi luar biasa terbaru dari momen magnetik anomali elektron

$$\alpha_e^{exp} = 0.001\,159\,652\,180\,73(28) \quad 9$$

yang menghasilkan

$$\alpha^{-1}(a_e) = 137.035\,999\,1547(331)(0)(27)(14)[333]$$

yang mendekati [55-39 dalam 10^{-9}] dengan nilai (3,29) yang diberikan sebelumnya. Jika seseorang mengadopsi nilai yang direkomendasikan CODATA $\alpha_e^{exp} = 0,001\,159\,652\,180\,76(27)$ sebagai input yang diperoleh

$$\alpha^{-1}(a_e) = 137.035\,999\,1512(320)(0)(27)(14)[321] \quad 10$$

Kesalahan pertama adalah kesalahan eksperimental dari α_e^{exp} , yang kedua dan ketiga adalah angka ketidakpastian Eksperimental dari α^4 dan α^5 , masing-masing. Yang terakhir adalah ketidakpastian hadronik, yang sama sekali dapat diabaikan. Ini sekarang merupakan penentuan α yang paling tepat dan kami akan menggunakan varian yang direkomendasikan di seluruh perhitungan a_μ , di bawah ini.



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

JURUSAN FISIKA

Jl. Gajayana No. 50 Malang 65144 Telp / Fax (0341) 558933
Website : <http://fisika.um-malang.ac.id>, e-mail : Fis@um-malang.ac.id

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Lailur Rizqy
NIM : 18690023
Fakultas/Program Studi : Sains dan Teknologi / Fisika
Judul Skripsi : Studi Persamaan Dirac Versi Dual pada Partikel Elektron
Pembimbing 1 : Arista Romadani, M.Sc.
Pembimbing 2 : Dr. H. Agus Mulyono, M.Kes.

• Konsultasi Fisika

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	17 Februari 2022	Konsultasi Judul	
2	1 Maret 2022	Konsultasi BAB I	
3	21 Maret 2022	Konsultasi BAB II & III	
4	4 April 2022	Revisi Proposal	
5	13 April 2022	ACC Sempro	
6	5 September 2022	Konsultasi BAB IV & V & VI	
7	17 Oktober 2022	Revisi BAB III & IV & V	
8	17 November 2022	ACC Skripsi	
9			
10			

• Konsultasi Integrasi

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	31 Agustus 2022	Konsultasi Integrasi BAB I & II	
2	18 Oktober 2022	Konsultasi Integrasi BAB III & IV	
3	29 November 2022	ACC Skripsi	

Malang, 02 Desember 2022
Mengetahui,
Ketua Jurusan,
Dr. Imam Tazi, M.Si