

**ANALISIS DINAMIK MODEL PENYEBARAN COVID-19
PADA POPULASI SIHCR DENGAN WAKTU TUNDA**

SKRIPSI

**OLEH
IFA SARIFATUS HIDAYATI
NIM. 18610062**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022**

**ANALISIS DINAMIK MODEL PENYEBARAN COVID-19
PADA POPULASI SIHCR DENGAN WAKTU TUNDA**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Ifa Sarifatus Hidayati
NIM. 18610062**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022**

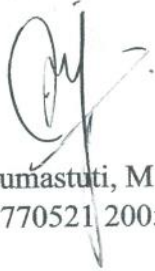
**ANALISIS DINAMIK MODEL PENYEBARAN COVID-19
PADA POPULASI SIHCR DENGAN WAKTU TUNDA**

SKRIPSI

Oleh
Ifa Sarifatus Hidayati
NIM. 18610062

Telah Diperiksa dan Disetujui Untuk Diuji
Tanggal 14 September 2022

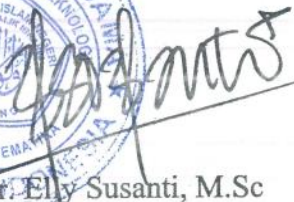
Dosen Pembimbing I



Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si
NIP. 19770521 200501 2 004

Dosen Pembimbing II


Erna Herawati, M.Pd
NIDT. 19760723 20180201 2 222

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika


Dr. Ely Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005



The stamp is circular with a blue border. The outer ring contains the text 'KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, DAN KEMASYARAKATAN REPUBLIK INDONESIA'. The inner ring contains 'FAKULTAS TEKNOLOGI DAN INFORMATIKA'. The center contains the logo of Universitas Islam Negeri Maulana Wahid Hادی and the text 'UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA WAHID HADY' and 'JURUSAN MATEMATIKA'.

ANALISIS DINAMIK MODEL PENYEBARAN COVID-19 PADA POPULASI SIHCR DENGAN WAKTU TUNDA

SKRIPSI

Oleh
Ifa Sarifatus Hidayati
NIM. 18610062

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 21 September 2022

Ketua Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si

.....

Anggota Penguji 1 : Dr. Heni Widayani, M.Si

.....

Anggota Penguji 2 : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si

.....

Anggota Penguji 3 : Erna Herawati, M.Pd

.....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Ely Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Ifa Sarifatus Hidayati

NIM : 18610062

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Analisis Dinamik Model Penyebaran COVID-19 Pada Populasi
SIHCR Dengan Waktu Tunda

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri. Bukan merupakan pengambilan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 14 September 2022

Yang membuat pernyataan,



Ifa Sarifatus Hidayati

NIM. 18610062

MOTO DAN PERSEMBAHAN

“Jangan katakan pada Allah ‘aku punya masalah besar’, tetapi katakan pada masalah bahwa ‘aku punya Allah Yang Maha Besar’.”-Ali bin Abi Thalib R.A.

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Orang tua penulis yaitu Bapak Samsuri dan Ibu Ani Astutik, kakak penulis Muhammad Rizzal Anhadi dan Siska Nanda Aprilia, adik cantik Hilya Ismatuzzahra, serta semua keluarga yang senantiasa mendoakan, memberi semangat, nasihat, dan kasih sayang yang tak terhingga. Sehingga menjadi motivasi bagi penulis untuk semangat menyelesaikan pendidikan.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji dan syukur bagi Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, hidayah, dan inayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul “Analisis Dinamik Model Penyebaran COVID-19 Pada Populasi SIHCR Dengan Waktu Tunda”. Shalawat serta salam senantiasa terlimpahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah menuntun umat manusia dari zaman Jahiliyah menuju ke zaman keselamatan.

Penyusunan skripsi ini tidak terlepas dari bimbingan, arahan dan sumbangan pemikiran dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dengan segala hormat penulis menyampaikan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, arahan, nasihat serta doa dalam menyelesaikan skripsi ini.
5. Erna Herawati, M.Pd, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, arahan, nasihat serta doa dalam menyelesaikan skripsi ini.
6. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku dosen penguji dalam ujian skripsi yang telah memberikan saran dan kritikan yang bermanfaat bagi penulis.
7. Dr. Heni Widayani, M.Si, selaku dosen penguji dalam ujian skripsi yang telah memberikan saran dan kritikan yang bermanfaat bagi penulis.
8. Seluruh Dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim yang telah memberikan segala ilmu dan bimbingannya.
9. Orang tua dan seluruh keluarga yang telah memberikan motivasi dan doa dalam menyelesaikan skripsi ini.

10. Seluruh mahasiswa Program Studi Matematika angkatan 2018 yang telah memberi motivasi dan bantuan dalam menyelesaikan skripsi ini.

Semoga segala yang telah diberikan kepada penulis mendapatkan balasan terbaik dari Allah SWT. Penulis berharap skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis pada khususnya dan bagi para pembaca pada umumnya.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 2 Agustus 2022

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGAJUAN	ii
HALAMAN PERSETUJUAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	v
MOTO DAN PERSEMBAHAN	vi
KATA PENGANTAR.....	vii
DAFTAR ISI.....	ix
DAFTAR TABEL	xi
DAFTAR GAMBAR.....	xii
DAFTAR SIMBOL	xiii
DAFTAR LAMPIRAN	xiv
ABSTRAK	xv
ABSTRACT.....	xvi
مستخلص البحث.....	xvii
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian.....	4
1.4 Manfaat Penelitian.....	5
1.5 Batasan Masalah.....	5
1.6 Definisi Istilah	7
BAB II KAJIAN TEORI	8
2.1 Teori Pendukung	8
2.1.1 Model SIHCR dengan Waktu Tunda	8
2.1.2 Persamaan Diferensial	15
2.1.3 Sistem Persamaan Diferensial	17
2.1.4 Persamaan Diferensial dengan Waktu Tunda	17
2.1.5 Titik Keseimbangan	18
2.1.6 Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)	19
2.1.7 Linierisasi	20
2.1.8 Nilai Eigen dan Vektor Eigen	23
2.1.9 Kestabilan Titik Keseimbangan	23
2.1.10 Kriteria Routh-Hurwitz	24
2.1.11 Nilai Kritis Waktu Tunda	25
2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Quran dan Hadits.....	26
2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung	29
BAB III METODE PENELITIAN	30
3.1 Jenis Penelitian	30
3.2 Pra Penelitian.....	30
3.3 Tahapan Penelitian	30
3.4 Penetapan Kesimpulan	31
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	32
4.1 Analisis Dinamik Model SIHCR dengan Waktu Tunda.....	32
4.1.1 Titik Keseimbangan	32

4.1.2	Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)	38
4.1.3	Analisis Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan.....	41
4.2	Simulasi Model SIHCR Tanpa dan Dengan Waktu Tunda.....	62
4.2.1	Simulasi Model SIHCR Dalam Kondisi Bebas Penyakit.....	62
4.2.2	Simulasi Model SIHCR Dalam Kondisi Endemik	69
BAB V	PENUTUP	76
5.1	Kesimpulan.....	76
5.2	Saran untuk Penelitian Lanjutan	77
DAFTAR PUSTAKA	78
LAMPIRAN	80
RIWAYAT HIDUP	95

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Nilai Awal Model SIHCR dengan Waktu Tunda (corona.jakarta.go.id, 2021)	12
Tabel 2.2	Nilai Awal Parameter Model SIHCR dengan Waktu Tunda	13
Tabel 2.3	Jenis Kestabilan Titik Tetap Sistem Linier	24
Tabel 4.1	Nilai Parameter Waktu Tunda τ	64

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Diagram Kompartemen Model SIHCR dengan Waktu Tunda....	9
Gambar 4.1	Grafik Model SIHCR Tanpa Waktu Tunda Ketika $R_0 < 1$	63
Gambar 4.2	Grafik Model SIHCR Dengan Waktu Tunda Ketika $R_0 < 1$ dengan $\tau = 0.01$	65
Gambar 4.3	Grafik Model SIHCR Dengan Waktu Tunda Ketika $R_0 < 1$ dengan $\tau = 0.05$	66
Gambar 4.4	Grafik Model SIHCR Dengan Waktu Tunda Ketika $R_0 < 1$ dengan $\tau = 0.1$	67
Gambar 4.5	Grafik Kelas <i>Infected</i> Dengan dan Tanpa Waktu Tunda Ketika $R_0 < 1$	68
Gambar 4.6	Grafik Model SIHCR Tanpa Waktu Tunda Ketika $R_0 > 1$	70
Gambar 4.7	Grafik Model SIHCR Dengan Waktu Tunda Ketika $R_0 > 1$ dengan $\tau = 0.01$	71
Gambar 4.8	Grafik Model SIHCR Dengan Waktu Tunda Ketika $R_0 > 1$ dengan $\tau = 0.05$	72
Gambar 4.9	Grafik Model SIHCR Dengan Waktu Tunda Ketika $R_0 > 1$ dengan $\tau = 0.1$	73
Gambar 4.10	Grafik Kelas <i>Infected</i> Dengan dan Tanpa Waktu Tunda Ketika $R_0 > 1$	75

DAFTAR SIMBOL

N	: Total populasi
S	: Subpopulasi individu yang rentan terinfeksi COVID-19
I	: Subpopulasi individu yang terinfeksi COVID-19
H	: Subpopulasi individu yang dirawat inap di rumah sakit
C	: Subpopulasi individu yang kritis sehingga membutuhkan perawatan intensif di ICU
R	: Subpopulasi individu yang sembuh dari COVID-19
Λ	: Laju kelahiran alami
β	: Laju penularan dari individu rentan menjadi individu terinfeksi
γ	: Laju kesembuhan dari individu terinfeksi
μ_S	: Laju kematian alami individu rentan
μ_I	: Laju kematian alami individu terinfeksi
μ_R	: Laju kematian alami individu sembuh
α_I	: Probabilitas individu terinfeksi untuk dirawat inap di rumah sakit karena kondisi semakin memburuk
α_H	: Probabilitas individu yang dirawat inap menjadi individu kritis karena memburuknya kondisi sehingga membutuhkan perawatan intensif di ICU
θ_H	: Laju kesembuhan individu dirawat inap
θ_C	: Laju kesembuhan individu kritis
δ_C	: Laju kematian individu kritis
t	: Waktu
τ_1	: Tundaan waktu untuk individu terinfeksi menjadi individu yang dirawat inap
τ_2	: Tundaan waktu untuk individu yang dirawat inap menjadi individu kritis

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1	Perhitungan Maple Untuk Titik Keseimbangan dan Bilangan Reproduksi Dasar	80
Lampiran 2	Perhitungan Maple Untuk Analisis Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan Bebas Penyakit dan Endemik	82
Lampiran 3	Perhitungan Maple Untuk Nilai Eigen dan Vektor Eigen	86
Lampiran 4	M-File Untuk Simulasi Model SIHCR Tanpa dan Dengan Waktu Tunda Dalam Kondisi Bebas Penyakit	89
Lampiran 5	M-File Untuk Simulasi Model SIHCR Tanpa dan Dengan Waktu Tunda Dalam Kondisi Endemik	92

ABSTRAK

Hidayati, Ifa Sarifatus. 2022. **Analisis Dinamik Model Penyebaran COVID-19 Pada Populasi SIHCR Dengan Waktu Tunda**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si, (2) Erna Herawati, M.Pd.

Kata Kunci: model matematika SIHCR, analisis dinamik, bilangan reproduksi dasar, waktu tunda, bebas penyakit, endemik.

Penelitian ini membahas tentang analisis dinamik model penyebaran COVID-19 pada populasi SIHCR dengan waktu tunda. Penelitian ini dilakukan untuk merepresentasikan perilaku penyebaran COVID-19 dengan adanya waktu tunda. Model SIHCR membagi populasi manusia menjadi lima subpopulasi, yaitu *Susceptible* (S), *Infected* (I), *Hospitalized* (H), *Critical* (C), dan *Recovered* (R). Analisis dinamik dilakukan dengan menentukan titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar (R_0), dan analisis kestabilan titik kesetimbangan. Hasil dari penelitian ini diperoleh dua titik kesetimbangan yaitu, titik kesetimbangan bebas penyakit (E_0) dan titik kesetimbangan endemik (E_1). Kemudian menghitung bilangan reproduksi dasar (R_0) dengan menggunakan parameter yang diberikan dan menghasilkan $R_0 > 1$, sehingga penyakit COVID-19 menjadi endemik. Analisis kestabilan dapat diperoleh dengan cara linierisasi di sekitar titik kesetimbangan. Titik kesetimbangan bebas penyakit (E_0) bersifat tidak stabil dan titik kesetimbangan endemik (E_1) bersifat stabil asimtotik lokal. Selanjutnya, dilakukan simulasi model SIHCR dengan dan tanpa waktu tunda dalam kondisi bebas penyakit dan endemik. Simulasi dilakukan dengan menggunakan variasi nilai waktu tunda untuk mengetahui perilaku dinamik dari model. Pada kondisi bebas penyakit dan endemik, menunjukkan perbedaan perilaku dinamik dari model. Semakin kecil waktu tunda, maka kondisi tersebut hampir sama dengan kondisi model SIHCR tanpa waktu tunda dalam menuju kestabilan. Sedangkan semakin besar waktu tunda, maka model SIHCR semakin lama menuju kestabilan. Sehingga dapat disimpulkan bahwa adanya waktu tunda mempengaruhi kestabilan model SIHCR.

ABSTRACT

Hidayati, Ifa Sarifatus. 2022. **The Dynamic Analysis of the COVID-19 Spread Model in the SIHCR Population with Time Delay**. Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisor: (1) Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si, (2) Erna Herawati, M.Pd.

Keywords: mathematical model of SIHCR, dynamic analysis, basic reproduction number, time delay, disease-free, endemic.

This study discusses the dynamic analysis of the COVID-19 spread model in the SIHCR population with time delay. This study was conducted to represent the behavior of the spread of COVID-19 with time delay. The SIHCR model divides the human population into five subpopulations, namely Susceptible (S), Infected (I), Hospitalized (H), Critical (C), and Recovered (R). The dynamic analysis is carried out by determining the equilibrium point, the basic reproduction number (R_0), and stability analysis of the equilibrium point. The result of this study is two equilibrium points, namely the disease-free equilibrium point (E_0) and the endemic equilibrium point (E_1). Then the basic reproduction number (R_0) was calculated using the given parameters and produce $R_0 > 1$, so that COVID-19 disease becomes endemic. The stability analysis can be obtained by linearization around the equilibrium points. The disease-free equilibrium point (E_0) is unstable and the endemic equilibrium point (E_1) is locally asymptotically stable. Next, simulation of the SIHCR model with and without time delay was carried out under disease-free and endemic conditions. Simulations are carried out using variations in the value of the delay time to determine the dynamic behavior of the model. In disease-free and endemic conditions, it shows differences in the dynamic behavior of the model. The smaller the delay time, the condition is almost the same as the SIHCR model without time delay towards stability. Meanwhile, the greater the delay time, the longer the SIHCR model leads to stability. So it can be concluded that the time delay affects the stability of the SIHCR model.

مستخلص البحث

هداية ، إيفا شريفة . ٢٠٢٢ . تحليل ديناميك نموذج إنتشار كوفيد-١٩ في مجتمع (SIHCR) مع تأخير الوقت .
البحث الجامعي . قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية
الحكومية مالانج . المشرف : (١) أري كوسوماستوتي، الماجستير، (٢) إرنا هيراواتي، الماجستير .

الكلمات المفتاحية: النموذج الرياضي (SIHCR)، التحليل الديناميكي، الأرقام الإنجابية الأساسية، وقت التأخير،
الخالي من الأمراض، المتوطن.

في هذه الدراسة، ناقش التحليل الديناميكي لنموذج انتشار كوفيد-١٩ مع تأخير الوقت. أجريت هذه الدراسة لتمثيل سلوك انتشار كوفيد-١٩ مع تأخير الوقت. يقسم النموذج (SIHCR) البشر إلى خمسة مجموعات سكانية فرعية، وهي حساسة (S)، مصابة (I)، في المستشفى (H)، الحرجة (C)، والمسترد (R). يتم إجراء التحليل الديناميكي من خلال تحديد نقطة الاتزان، رقم الانجاب الأساسي (R_0)، و تحليل استقرار نقطة الاتزان. النتيجة من هذه الدراسة على نقطتي توازن و هما نقطة الاتزان الخالي من المرض (E_0) و نقطة الاتزان المستوطنة (E_1). ثم احسب رقم الانجاب الأساسي (R_0) باستخدام المعلمات المحددة وأنتج $R_0 > 1$ ، بحيث يصبح مرض كوفيد-١٩ متوطن. يمكن الحصول على تحليل الاستقرار عن طريق الخطية حول نقطة الاتزان. نقطة الاتزان الخالي من المرض (E_0) غير مستقرة ونقطة الاتزان المستوطنة (E_1) مستقرة محلياً. وبعد ذلك، تم إجراء محاكاة لنموذج (SIHCR) مع وبدون وقت التأخير في تكون الظروف خالية من الأمراض و متوطنة. يتم إجراء عمليات المحاكاة باستخدام الاختلافات في قيمة وقت التأخير لتحديد السلوك الديناميكي للنموذج. في الظروف الخالية من الأمراض والمتوطنة، فإنه يظهر اختلافات في السلوك الديناميكي للنموذج. كلما قل وقت التأخير، تكون الحالة تقريبا ماثلة لنموذج (SIHCR) دون وقت التأخير نحو الاستقرار. وفي الوقت نفسه، كلما زاد وقت التأخير، زاد طول نموذج (SIHCR) مما يؤدي إلى الاستقرار. لذلك، يمكن استنتاج أن وقت التأخير يؤثر على استقرار نموذج (SIHCR).

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Seiring dengan terus berkembangnya penyebaran COVID-19 di berbagai belahan dunia, mengakibatkan jumlah kasus harian COVID-19 semakin meningkat. Hal ini berdampak pada tingkat keterisian tempat tidur rawat inap dan ICU di rumah sakit. Indonesia khususnya DKI Jakarta adalah daerah yang mengalami peningkatan keterisian tempat tidur rawat inap dan ICU di rumah sakit pasca gelombang kedua COVID-19 (Kemkes.go.id). Penyebaran COVID-19 dapat direpresentasikan dengan model matematika pada populasi SIHCR. Model SIHCR membagi populasi individu menjadi lima kompartemen yaitu: *Susceptible (S)* adalah individu yang rentan terhadap COVID-19, *Infected (I)* adalah individu yang terinfeksi dan dapat menularkan COVID-19 namun tidak dirawat di rumah sakit, *Hospitalized (H)* adalah individu yang positif COVID-19 dan dirawat inap di rumah sakit, *Critical (C)* adalah individu yang positif COVID-19 dan mendapatkan perawatan intensif di ICU karena kondisi yang semakin kritis, dan *Recovered (R)* adalah individu yang telah sembuh dari COVID-19.

Secara intuitif kenaikan keterisian tempat tidur rawat inap dan ICU di rumah sakit disebabkan oleh banyaknya jumlah individu yang terinfeksi. Namun meskipun jumlah individu terinfeksi semakin meningkat, tapi masih tersedia tempat tidur rawat inap maupun ICU yang kosong. Strateginya adalah dengan menambah jumlah ketersediaan tempat tidur rawat inap dan ICU di rumah sakit. Jadi, meskipun jumlah individu terinfeksi meningkat namun masih cukup untuk dirawat di rumah sakit.

Model SIHCR pada penelitian ini menggunakan tundaan waktu (τ). Waktu tunda digunakan untuk mengetahui seberapa cepat laju penyebaran penyakit dari *Infected (I)* menjadi *Hospitalized (H)* dan *Hospitalized (H)* menjadi *Critical (C)*. Penggunaan waktu tunda dapat mempertimbangkan model penyebaran COVID-19 di mana laju penyebarannya tidak hanya bergantung pada waktu sekarang (t) melainkan juga bergantung pada waktu lampau ($t - \tau$).

Penelitian serupa mengenai penyebaran COVID-19 dengan waktu tunda telah dilakukan oleh (Kozyreff, 2021) yang mengkaji tentang dinamika rawat inap COVID-19 di Belgia, Prancis, Italia, Swiss dan Kota New York menggunakan model $SIPP_{ICU}R$. Waktu tunda diaplikasikan pada kompartemen P dan P_{ICU} . Hasil analisis menunjukkan bahwa untuk data Kota New York membutuhkan waktu rawat inap yang jauh lebih singkat dibandingkan dengan negara-negara di Eropa. Kemudian, penelitian oleh (Radha & Balamuralitharan, 2020) tentang analisis stabilitas model SEIR dengan waktu tunda. Hasil penelitian diperoleh nilai bilangan reproduksi dasar kurang dari satu, di mana secara efektif dapat mengendalikan wabah infeksi COVID-19 dan dapat merepresentasikan pola penyebaran infeksi. Lalu penelitian lain oleh (Ebraheem, Alkhateeb, Badran, & Sultan, 2021) mengkaji tentang model SIR dengan waktu tunda untuk COVID-19. Waktu tunda yang diaplikasikan pada model menghasilkan perilaku dinamis model yang akurat seperti data asli.

Penelitian ini menggunakan model SIHCR yang merujuk pada penelitian (Kozyreff, 2021), di mana kompartemen P dan P_{ICU} masing-masing dimisalkan sebagai kompartemen *Hospitalized (H)* dan *Critical (C)*. Model SIHCR akan dianalisis menggunakan analisis dinamik. Kemudian dilakukan simulasi model

dengan dan tanpa waktu tunda pada populasi SIHCR di DKI Jakarta. Simulasi dilakukan dengan memasukkan nilai waktu tunda yang berbeda-beda guna mengetahui perilaku dinamik dari model. Data yang digunakan tersaji dalam bentuk data sekunder, yaitu data kasus harian COVID-19 di DKI Jakarta pada bulan Oktober-Desember 2021 yang bersumber dari (corona.jakarta.go.id) dan data ketersediaan tempat tidur rumah sakit yang bersumber dari (Kemkes.go.id).

Semua penyakit yang terjadi di dunia ini semata-mata atas kehendak dari Allah SWT, dan Allah juga yang dapat menyembuhkan penyakit tersebut. Seperti firman Allah SWT pada Al-Qur'an Surat Asy-Syu'ara ayat 80 yang artinya:

Artinya: "dan apabila aku sakit, Dialah yang menyembuhkan aku," (QS. Asy-Syu'ara 26:80).

Ayat tersebut menyatakan apabila ada seseorang yang sakit, maka hanya Allah yang bisa menyembuhkan sehingga kesehatannya kembali pulih (Shihab, 2002). Seperti wabah COVID-19 yang terjadi saat ini. Seseorang yang terinfeksi COVID-19 bisa sembuh atas kehendak Allah, namun juga harus diiringi dengan usaha dalam proses penyembuhan. Salah satu cara yaitu berobat di rumah sakit agar seseorang yang terinfeksi COVID-19 mendapatkan perawatan yang optimal.

Penelitian terkait penyebaran COVID-19 dengan menggunakan data yang ada pada corona.jakarta.go.id tahun 2021 dengan waktu tunda ini perlu dilakukan untuk mengetahui apakah model SIHCR dengan waktu tunda sudah cukup mendekati data asli. Selain itu untuk mengetahui apakah model penyebaran COVID-19 dengan waktu tunda memiliki tingkat keakuratan yang lebih baik dibandingkan model penyebaran COVID-19 yang tanpa waktu tunda.

Berdasarkan latar belakang tersebut, penelitian ini akan mengkaji tentang analisis dinamik model penyebaran COVID-19 pada populasi SIHCR dengan waktu tunda di DKI Jakarta.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang sudah dijelaskan, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana analisis dinamik model penyebaran COVID-19 pada populasi SIHCR dengan waktu tunda menggunakan data yang tersedia pada corona.jakarta.go.id tahun 2021?
2. Bagaimana simulasi model penyebaran COVID-19 pada populasi SIHCR dengan dan tanpa waktu tunda menggunakan data yang tersedia pada corona.jakarta.go.id tahun 2021?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, maka tujuan penelitian pada penelitian ini adalah:

1. Mengetahui analisis dinamik model penyebaran COVID-19 pada populasi SIHCR dengan waktu tunda menggunakan data yang tersedia pada corona.jakarta.go.id tahun 2021.
2. Mengetahui hasil simulasi model penyebaran COVID-19 pada populasi SIHCR dengan dan tanpa waktu tunda menggunakan data yang tersedia pada corona.jakarta.go.id tahun 2021.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diperoleh dari penelitian ini adalah:

1. Menambah ilmu pengetahuan yang berhubungan dengan penerapan model penyebaran COVID-19 pada populasi SIHCR dengan waktu tunda menggunakan data yang tersedia pada corona.jakarta.go.id tahun 2021.
2. Dapat digunakan sebagai informasi tambahan untuk instansi terkait mengenai penyelesaian model penyebaran COVID-19 pada populasi SIHCR dengan dan tanpa waktu tunda menggunakan data yang tersedia pada corona.jakarta.go.id tahun 2021.

1.5 Batasan Masalah

Penelitian ini diberikan batasan masalah agar pembahasan terstruktur, sehingga batasan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Model matematika yang digunakan adalah model SIHCR dari penelitian (Kozyreff, 2021) yang telah dimodifikasi, yaitu:

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta SI - \mu_S S$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \alpha_I I(t - \tau_1) - \gamma I - \mu_I I$$

$$\frac{dH}{dt} = \alpha_I I(t - \tau_1) - \alpha_H H(t - \tau_2) - \theta_H H$$

$$\frac{dC}{dt} = \alpha_H H(t - \tau_2) - \theta_C C - \delta_C C$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I + \theta_H H + \theta_C C - \mu_R R$$

2. Populasi diasumsikan tertutup, artinya tidak ada individu yang masuk ataupun keluar dari suatu populasi sehingga total populasi dianggap konstan.

3. Diasumsikan individu pada kompartemen *Infected (I)* atau individu yang terinfeksi adalah individu yang dinyatakan positif COVID-19.
4. Diasumsikan individu pada kompartemen *Infected (I)* atau individu yang terinfeksi bisa sembuh tanpa dirawat di rumah sakit.
5. Diasumsikan individu pada kompartemen *Hospitalized (I)* atau individu yang dirawat inap dinyatakan positif COVID-19 dengan gejala ringan sampai sedang.
6. Diasumsikan individu pada kompartemen *Critical (C)* atau individu yang kritis telah dinyatakan positif COVID-19 dengan gejala berat.
7. Diasumsikan individu pada kompartemen *Recovered (R)* atau individu yang telah sembuh akan mempunyai kekebalan dan tidak dapat kembali menjadi individu yang rentan terhadap COVID-19.
8. Diasumsikan bahwa $\tau_1 = \tau_2 = \tau$.
9. Parameter yang digunakan pada penelitian ini merujuk pada penelitian yang dilakukan oleh (Ebraheem, Alkhateeb, Badran, & Sultan, 2021) dan (Mbogo & Odhiambo, 2021).
10. Simulasi dari model penyebaran COVID-19 pada populasi SIHCR dilakukan dengan dan tanpa waktu tunda, serta memasukkan nilai waktu tunda yang berbeda-beda guna mengetahui perilaku dinamik dari model.
11. Data yang digunakan adalah data sekunder, yaitu data kasus harian COVID-19 DKI Jakarta pada bulan Oktober-Desember 2021 yang bersumber dari (corona.jakarta.go.id) dan data ketersediaan tempat tidur rumah sakit yang bersumber dari ([Kemkes.go.id](https://kemkes.go.id)) tahun 2021.

1.6 Definisi Istilah

Berdasarkan rumusan masalah dan judul penelitian maka penjelasan definisi istilah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Analisis perilaku dinamik adalah analisis model matematika yang merepresentasikan perilaku suatu fenomena dalam sistem persamaan diferensial bergantung waktu dan dilakukan simulasi untuk mendapatkan hasil dari solusi model (Boyce & DiPrima, 2001).
2. Model SIHCR adalah model matematika epidemiologi yang membagi populasi individu menjadi lima subpopulasi yaitu: *Susceptible (S)*, *Infected (I)*, *Hospitalized (H)*, *Critical (C)*, dan *Recovered (R)*.
3. Persamaan diferensial dengan waktu tunda adalah persamaan yang tidak hanya bergantung pada waktu sekarang (t) melainkan juga bergantung pada waktu lampau ($t - \tau$) di mana τ menunjukkan tundaan waktu (Alfionita, 2016).

BAB II

KAJIAN TEORI

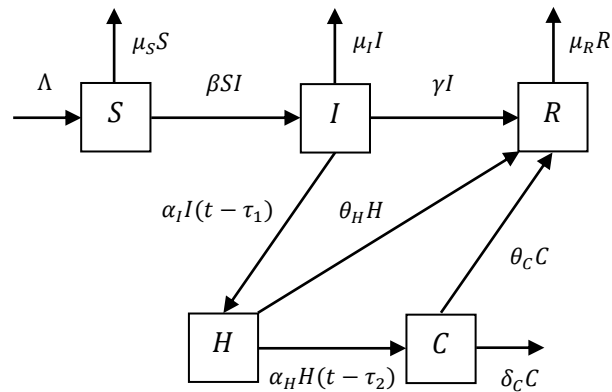
2.1 Teori Pendukung

2.1.1 Model SIHCR dengan Waktu Tunda

Model matematika penyebaran COVID-19 pada penelitian ini menggunakan model SIHCR, di mana model ini adalah modifikasi dari model SIR dengan penambahan subpopulasi pada kompartemen *Hospitalized* (H) dan *Critical* (C). Model SIHCR membagi populasi individu menjadi lima subpopulasi yaitu: *Susceptible* (S) adalah individu yang rentan terinfeksi COVID-19, *Infected* (I) adalah individu yang terinfeksi COVID-19 tapi tidak dirawat inap di rumah sakit, *Hospitalized* (H) adalah individu yang dirawat inap di rumah sakit, *Critical* (C) adalah individu kritis yang membutuhkan perawatan intensif di ICU, dan *Recovered* (R) adalah individu yang sembuh dan kebal dari COVID-19.

Penelitian ini menggunakan model dengan waktu tunda yang memiliki peran penting dalam permasalahan nyata karena keputusan yang diperoleh berdasarkan suatu realita pada kondisi sebelumnya. Penggunaan waktu tunda dalam perhitungan model pertumbuhan populasi adalah hal yang penting sebab laju pertumbuhan suatu populasi tidak hanya bergantung pada waktu sekarang (t) melainkan juga bergantung pada waktu lampau ($t - \tau$) di mana τ menunjukkan tundaan waktu atau waktu tunda (Fuad & Arizona, 2014).

Secara skematis model matematika penyebaran COVID-19 pada populasi SIHCR dengan waktu tunda dapat diilustrasikan sebagai berikut:



Gambar 2.1 Diagram Kompartemen Model SIHCR dengan Waktu Tunda

Berdasarkan diagram pada Gambar 2.1 dapat dilihat bahwa perubahan populasi individu pada masing-masing kompartemen dipengaruhi oleh beberapa faktor, yaitu:

- a) Perubahan populasi individu pada kompartemen individu rentan (S)

Perubahan populasi individu pada kompartemen individu rentan (S) dipengaruhi oleh penambahan jumlah individu karena laju kelahiran alami sebesar Λ . Lalu, berkurangnya populasi individu rentan disebabkan oleh kontak langsung antara individu yang rentan dengan individu terinfeksi dengan laju penularan sebesar βSI dan laju kematian alami sebesar $\mu_S S$. Dengan demikian didapatkan perubahan populasi individu pada kompartemen individu rentan (S) terhadap waktu adalah

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta SI - \mu_S S \quad (2.1)$$

- b) Perubahan populasi individu pada kompartemen individu terinfeksi (I)

Penambahan populasi individu pada kompartemen individu terinfeksi (I) dipengaruhi oleh adanya kontak langsung antara individu yang rentan dengan individu terinfeksi dengan laju penularan sebesar βSI . Selanjutnya, populasi individu terinfeksi akan berkurang karena individu terinfeksi bisa

sembuh dari penyakit dengan laju kesembuhan sebesar γI . Kemudian juga dipengaruhi oleh probabilitas individu terinfeksi untuk dirawat inap di rumah sakit karena kondisi semakin memburuk sebesar α_I pada waktu t dengan tundaan waktu τ_1 sebanyak jumlah populasi individu terinfeksi. Waktu tunda digunakan untuk mengidentifikasi penyebaran penyakit di mana terdapat individu terinfeksi sehingga individu tersebut dirawat inap. Lalu dipengaruhi oleh laju kematian alami sebesar $\mu_I I$. Dengan demikian didapatkan perubahan populasi individu pada kompartemen individu terinfeksi (I) terhadap waktu adalah

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \alpha_I I(t - \tau_1) - \gamma I - \mu_I I \quad (2.2)$$

- c) Perubahan populasi individu pada kompartemen individu dirawat inap (H)
- Perubahan populasi individu pada kompartemen individu dirawat inap (H) dipengaruhi oleh probabilitas individu terinfeksi untuk dirawat inap di rumah sakit karena kondisi semakin memburuk sebesar α_I pada waktu t dengan tundaan waktu τ_1 sebanyak jumlah populasi individu terinfeksi. Lalu populasi individu dirawat inap berkurang karena probabilitas individu yang dirawat inap menjadi individu kritis karena memburuknya kondisi sebesar α_H pada waktu t dengan tundaan waktu τ_2 sebanyak jumlah populasi individu dirawat inap. Waktu tunda digunakan untuk mengidentifikasi penyebaran penyakit di mana terdapat individu yang dirawat inap sehingga individu tersebut harus mendapatkan perawatan intensif di ICU. Kemudian dipengaruhi juga oleh laju kesembuhan individu yang dirawat inap sebesar $\theta_H H$. Dengan demikian didapatkan perubahan

populasi individu pada kompartemen individu dirawat inap (H) terhadap waktu adalah

$$\frac{dH}{dt} = \alpha_I I(t - \tau_1) - \alpha_H H(t - \tau_2) - \theta_H H \quad (2.3)$$

- d) Perubahan populasi individu pada kompartemen individu kritis (C)

Perubahan populasi individu pada kompartemen individu kritis (C) dipengaruhi oleh probabilitas individu yang dirawat inap menjadi individu kritis karena memburuknya kondisi sebesar α_H pada waktu t dengan tundaan waktu τ_2 sebanyak jumlah populasi individu dirawat inap. Waktu tunda digunakan untuk mengidentifikasi penyebaran penyakit di mana terdapat individu yang dirawat inap sehingga individu tersebut harus mendapatkan perawatan intensif di ICU. Kemudian individu yang kritis akan berkurang karena laju kesembuhan individu yang kritis sebesar $\theta_C C$ dan laju kematian individu yang kritis sebesar $\delta_C C$. Dengan demikian didapatkan perubahan populasi individu pada kompartemen individu kritis (C) terhadap waktu adalah

$$\frac{dC}{dt} = \alpha_H H(t - \tau_2) - \theta_C C - \delta_C C \quad (2.4)$$

- e) Perubahan populasi individu pada kompartemen individu sembuh (R)

Populasi individu pada kompartemen individu sembuh (R) akan bertambah karena individu terinfeksi bisa sembuh dari penyakit dengan laju kesembuhan sebesar γI . Lalu terdapat individu yang dirawat inap menjadi individu sembuh dengan laju kesembuhan sebesar $\theta_H H$. Begitu pula pada individu yang kritis menjadi individu sembuh dengan laju kesembuhan sebesar $\theta_C C$. Kemudian berkurangnya individu sembuh dipengaruhi oleh

laju kematian alami sebesar $\mu_R R$. Sehingga didapatkan perubahan populasi individu pada kompartemen individu sembuh (R) terhadap waktu adalah

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I + \theta_H H + \theta_C C - \mu_R R \quad (2.5)$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa model matematika penyebaran COVID-

19 pada populasi SIHCR dengan waktu tunda adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \Lambda - \beta SI - \mu_S S \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \alpha_I I(t - \tau_1) - \gamma I - \mu_I I \\ \frac{dH}{dt} &= \alpha_I I(t - \tau_1) - \alpha_H H(t - \tau_2) - \theta_H H \\ \frac{dC}{dt} &= \alpha_H H(t - \tau_2) - \theta_C C - \delta_C C \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I + \theta_H H + \theta_C C - \mu_R R \end{aligned} \quad (2.6)$$

di mana $N(t) = S(t) + I(t) + H(t) + C(t) + R(t)$ adalah total populasi individu pada waktu tertentu.

Nilai awal variabel dan parameter yang digunakan pada model penyebaran COVID-19 pada populasi SIHCR dengan waktu tunda adalah sebagai berikut:

Tabel 2.1 Nilai Awal Model SIHCR dengan Waktu Tunda (corona.jakarta.go.id, 2021)

Variabel	Keterangan	Nilai Awal
$N(0)$	Populasi individu DKI Jakarta	10609681 jiwa
$S(0)$	Subpopulasi awal individu yang rentan terinfeksi COVID-19	8907422 jiwa
$I(0)$	Subpopulasi awal individu yang terinfeksi COVID-19	858198 jiwa
$H(0)$	Subpopulasi awal individu yang dirawat inap di rumah sakit	984 jiwa
$C(0)$	Subpopulasi awal individu yang kritis	148 jiwa
$R(0)$	Subpopulasi awal individu yang sembuh dari COVID-19	842929 jiwa

Tabel 2.2 Nilai Awal Parameter Model SIHCR dengan Waktu Tunda

Parameter	Keterangan	Nilai	Satuan	Sumber
Λ	Laju kelahiran alami	0.001	Individu Perhari	jakarta.bps.go.id
β	Laju penularan dari individu rentan menjadi individu terinfeksi	0.17	Individu Perhari	(Ebraheem, Alkhateeb, Badran, & Sultan, 2021)
γ	Laju kesembuhan dari individu terinfeksi	0.05	Individu Perhari	(Ebraheem, Alkhateeb, Badran, & Sultan, 2021)
μ_S	Laju kematian alami individu rentan	0.001	Individu Perhari	corona.jakarta.go.id
μ_I	Laju kematian alami individu terinfeksi	0.003	Individu Perhari	corona.jakarta.go.id
μ_R	Laju kematian alami individu sembuh	0.002	Individu Perhari	corona.jakarta.go.id
α_I	Probabilitas individu terinfeksi untuk dirawat inap di rumah sakit karena kondisi semakin memburuk	0.01	Persen	(Mbogo & Odhiambo, 2021)
α_H	Probabilitas individu yang dirawat inap menjadi individu kritis karena memburuknya kondisi sehingga membutuhkan perawatan intensif di ICU	2×10^{-5}	Persen	(Mbogo & Odhiambo, 2021)
θ_H	Laju kesembuhan individu dirawat inap	0.027	Individu Perhari	(Mbogo & Odhiambo, 2021)
θ_C	Laju kesembuhan individu kritis	0.0009	Individu Perhari	(Mbogo & Odhiambo, 2021)
δ_C	Laju kematian individu kritis	0.003	Individu Perhari	(Mbogo & Odhiambo, 2021)
t	Waktu	90	Hari	corona.jakarta.go.id
τ_1	Tundaan waktu untuk individu terinfeksi menjadi individu yang dirawat inap	Bervariasi	Hari	Berdasarkan simulasi
τ_2	Tundaan waktu untuk individu yang dirawat inap menjadi individu kritis	Bervariasi	Hari	Berdasarkan simulasi

Laju kematian alami pada populasi manusia (μ_S, μ_I, μ_R) dapat dihitung dengan menggunakan rumus *Crude Death Rate* (Angka Kematian Dasar) yang dinyatakan sebagai:

$$\text{Crude Death Rate (CDR)} = \frac{D}{P} \times 1000$$

di mana:

D = Jumlah kematian dalam satu tahun (corona.jakarta.go.id, 2021)

P = Jumlah seluruh penduduk di suatu wilayah dalam satu tahun

1000 = Konstanta

Perhitungan nilai parameter laju kematian alami (μ_S, μ_I, μ_R) dapat dilakukan dengan cara sebagai berikut:

- a. Parameter laju kematian alami individu rentan (μ_S)

$$CDR = \frac{D}{P} \times 1000$$

$$\Leftrightarrow \frac{3718}{10609681} \times 1000$$

$$\Leftrightarrow 0.35$$

Berdasarkan hasil di atas, laju kematian alami individu rentan di tahun tersebut sebesar 0.35 per seribu jiwa. Lalu untuk menentukan laju kematian alami perhari, maka 0.35 dibagi dengan 365 sehingga diperoleh nilai 0.001. Artinya laju kematian alami individu rentan di tahun tersebut sebesar 0.001 perhari.

- b. Parameter laju kematian alami individu terinfeksi (μ_I)

$$CDR = \frac{D}{P} \times 1000$$

$$\Leftrightarrow \frac{13588}{10609681} \times 1000$$

$$\Leftrightarrow 1.28$$

Berdasarkan hasil di atas, laju kematian alami individu terinfeksi di tahun tersebut sebesar 1.28 per seribu jiwa. Lalu untuk menentukan laju kematian alami perhari, maka 1.28 dibagi dengan 365 sehingga diperoleh nilai 0.003. Artinya laju kematian alami individu terinfeksi di tahun tersebut sebesar 0.003 perhari.

- c. Parameter laju kematian alami individu sembuh (μ_R)

$$CDR = \frac{D}{P} \times 1000$$

$$\Leftrightarrow \frac{6326}{10609681} \times 1000$$

$$\Leftrightarrow 0.6$$

Berdasarkan hasil di atas, laju kematian alami individu sembuh di tahun tersebut sebesar 0.6 per seribu jiwa. Lalu untuk menentukan laju kematian alami perhari, maka 0.6 dibagi dengan 365 sehingga diperoleh nilai 0.002. Artinya laju kematian alami individu sembuh di tahun tersebut sebesar 0.002 perhari.

Berdasarkan perhitungan tersebut diperoleh nilai parameter laju kematian alami individu rentan (μ_S), individu terinfeksi (μ_I), dan individu sembuh (μ_R) masing-masing sebesar 0.001, 0.003, dan 0.002.

2.1.2 Persamaan Diferensial

Persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel terikat untuk satu atau lebih variabel bebas dalam suatu fungsi yang tidak diketahui disebut sebagai persamaan diferensial (Murtafi'ah & Apriandi, 2018). Berdasarkan jumlah variabel bebasnya, persamaan diferensial dibagi menjadi dua yaitu persamaan

diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu variabel bebas suatu fungsi yang tidak diketahui disebut persamaan diferensial biasa. Menurut (Waluya, 2006) dalam bukunya, dinyatakan bahwa bentuk umum persamaan diferensial biasa orde n adalah

$$F(t, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots) = 0 \quad (2.7)$$

Persamaan (2.7) dikatakan linear jika F merupakan fungsi linear terhadap variabel $t, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots$. Persamaan diferensial dikatakan linear jika tidak ada perkalian antara variabel terikat dan turunannya, artinya koefisiennya merupakan fungsi terhadap variabel bebas saja. Secara umum persamaan diferensial linear dapat dinyatakan dalam bentuk

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_0(t) = f(t) \quad (2.8)$$

di mana $a_i(t)$ dengan $i = 0, 1, 2, \dots, n$ hanya bergantung pada variabel t , dan f adalah fungsi terhadap t saja, jika tidak memenuhi maka disebut persamaan diferensial nonlinear. Berikut adalah contoh persamaan diferensial:

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I \quad (2.9)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I \quad (2.10)$$

Persamaan (2.9) dan (2.10) merupakan persamaan diferensial biasa bergantung waktu karena memuat turunan dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu variabel bebas saja. Kemudian persamaan (2.9) merupakan persamaan diferensial biasa nonlinear karena terdapat perkalian variabel terikat S dengan variabel terikat I . Sedangkan persamaan (2.10) merupakan persamaan diferensial biasa linear karena tidak ada perkalian antar variabel terikat.

2.1.3 Sistem Persamaan Diferensial

Kumpulan dari dua atau lebih persamaan diferensial disebut sebagai sistem persamaan diferensial. Sistem persamaan diferensial dapat dituliskan dalam bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}\tag{2.11}$$

di mana t adalah variabel bebas dan x_1, x_2, \dots, x_n adalah variabel terikat.

Berikut adalah salah satu contoh sistem persamaan diferensial yaitu pada model matematika SIR sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I\end{aligned}\tag{2.12}$$

di mana S, I, R adalah variabel terikat dan t adalah variabel bebas, sehingga dapat dituliskan dalam bentuk $S(t), I(t), R(t)$.

2.1.4 Persamaan Diferensial dengan Waktu Tunda

Menurut (Alfionita, 2016) persamaan diferensial disebut sebagai persamaan diferensial dengan waktu tunda jika persamaan tersebut tidak hanya bergantung pada waktu sekarang melainkan juga bergantung pada waktu sebelumnya. Artinya, suatu fenomena yang terjadi berdasarkan informasi pada fenomena yang

sebelumnya. Bentuk umum persamaan diferensial dengan waktu tunda adalah sebagai berikut:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_n)), \quad (2.13)$$

di mana $\tau \geq 0$ menunjukkan lama tundaan waktu, dengan $x(t)$ bergantung pada waktu sekarang dan $x(t - \tau_n)$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$ bergantung pada waktu lampau $(t - \tau)$.

Waktu tunda menarik untuk dikaji dan memiliki peran penting dalam permasalahan nyata karena keputusan yang diperoleh berdasarkan suatu realita. Penggunaan waktu tunda dalam perhitungan model pertumbuhan populasi adalah hal yang penting sebab laju pertumbuhan suatu populasi tidak hanya bergantung pada waktu sekarang (t) melainkan juga bergantung pada waktu lampau $(t - \tau)$ di mana τ menunjukkan tundaan waktu atau waktu tunda (Fuad & Arizona, 2014).

2.1.5 Titik Keseimbangan

Titik keseimbangan dari suatu sistem adalah titik keseimbangan yang membuat sistem tersebut tidak mengalami perubahan terhadap waktu atau stabil (Resmawan & Yahya, 2020). Misal diberikan suatu sistem persamaan diferensial orde satu $\dot{x} = f(x)$, yang memiliki solusi, dengan nilai awal $x(0) = x_0$. Suatu vektor \bar{x} yang memenuhi $f(\bar{x}) = 0$ disebut titik keseimbangan (Boyce, DiPrima, & Meade, 2017). Artinya titik keseimbangan dapat diperoleh dengan mensubstitusikan ke titik-titik lainnya. Titik keseimbangan dibagi dalam dua jenis yaitu titik keseimbangan bebas penyakit dan titik keseimbangan endemik. Titik keseimbangan bebas penyakit adalah kondisi saat tidak terjadi infeksi penyakit dalam sebuah populasi. Sedangkan titik keseimbangan endemik adalah kondisi saat terjadi infeksi penyakit dalam sebuah populasi.

2.1.6 Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Bilangan reproduksi dasar adalah banyaknya infeksi baru yang dihasilkan dari setiap individu terinfeksi dalam suatu populasi rentan dan dinotasikan sebagai R_0 . Bilangan reproduksi dasar digunakan untuk mengetahui kondisi ambang batas untuk menentukan terjadinya endemik atau bebas dari penyakit dalam suatu populasi. Jika R_0 tinggi, maka tingkat penyebaran penyakit semakin cepat. Begitupun sebaliknya, jika R_0 kecil maka tingkat penyebaran penyakit semakin lambat. Menurut (Giesecke, 2002) nilai R_0 dibagi menjadi tiga, yaitu:

1. $R_0 < 1$, artinya jumlah kasus baru terus berkurang dari waktu ke waktu hingga wabah penyakit berakhir.
2. $R_0 = 1$, artinya kasus stabil.
3. $R_0 > 1$, artinya wabah menjadi endemik dan akan terus berlanjut jika mengabaikan pengendalian yang efektif.

Bilangan reproduksi dasar dapat diperoleh dari nilai eigen maksimum dengan mengkonstruksi *the next generation matrix*. Pengkonstruksian *the next generation matrix* dilakukan pada kompartemen penyakit, artinya terdapat individu terinfeksi di dalam kompartemen tersebut. Misalkan n adalah jumlah individu terinfeksi dan m adalah jumlah individu sehat. Lalu misalkan x adalah kompartemen yang terinfeksi penyakit dan y adalah kompartemen yang tidak terinfeksi penyakit, dengan $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$, dan $m, n \in \mathbb{R}^n$. Sehingga diperoleh model kompartemen sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= F_i(x, y) - V_i(x, y) & \text{di mana } i = 1, 2, \dots, n & \quad x \in \mathbb{R}^n \\ \dot{y}_j &= g_j(x, y) & \text{di mana } j = 1, 2, \dots, m & \quad y \in \mathbb{R}^m \end{aligned} \quad (2.14)$$

di mana F_i adalah laju penambahan jumlah individu terinfeksi dan V_i adalah laju penurunan jumlah individu terinfeksi.

Perhitungan R_0 diperoleh dari linierisasi pada kompartemen terinfeksi menggunakan titik kesetimbangan bebas penyakit. Berikut ditunjukkan hasil linierisasi dari kompartemen terinfeksi

$$\dot{x}_i = (\mathbf{F} - \mathbf{V})x \quad (2.15)$$

di mana \mathbf{F} dan \mathbf{V} adalah matriks dengan ukuran $n \times n$ yang didefinisikan sebagai

$$\mathbf{F} = \left[\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_j}(0, y_0) \right] \quad \text{dan} \quad \mathbf{V} = \left[\frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial x_j}(0, y_0) \right] \quad (2.16)$$

di mana $(0, y_0)$ menyatakan titik kesetimbangan bebas penyakit. Selanjutnya definisikan matriks \mathbf{K} sebagai

$$\mathbf{K} = \mathbf{FV}^{-1} \quad (2.17)$$

matriks \mathbf{K} juga bisa disebut *next generation matrix*. Nilai yang digunakan sebagai bilangan reproduksi dasar adalah radius spektral atau nilai eigen absolut dominan dari matriks \mathbf{K} (Van den Driessche & Watmough, 2002), yaitu

$$R_0 = \rho(\mathbf{FV}^{-1}) \quad (2.18)$$

di mana ρ adalah nilai eigen dominan.

2.1.7 Linierisasi

Analisis kestabilan pada sistem persamaan diferensial nonlinier dapat diperoleh dengan cara linierisasi menggunakan Deret Taylor guna mengetahui perilaku sistem di sekitar titik kesetimbangan. Menurut (Boyce & DiPrima, 2001) linierisasi adalah proses pendekatan persamaan diferensial nonlinier dengan persamaan linier. Berikut diberikan contoh linierisasi pada sistem $f(x, y)$ dan $g(x, y)$ yang merupakan sistem nonlinier, kemudian dilakukan pendekatan di

sekitar titik kesetimbangan (x^*, y^*) menggunakan ekspansi Deret Taylor untuk menghilangkan suku nonliniernya sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial t} = f(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*) \\ \frac{\partial y}{\partial t} = g(x, y) &= \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*)\end{aligned}\tag{2.19}$$

Selanjutnya dengan memisalkan $a = (x - x^*)$, dan $b = (y - y^*)$, maka linierisasi dari sistem persamaan (2.19) menjadi

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)a + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)b \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)a + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)b\end{aligned}\tag{2.20}$$

Sistem persamaan (2.20) dapat ditulis dalam bentuk matriks, diperoleh

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\ J &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{2.21}$$

Persamaan (2.21) disebut sebagai matriks Jacobi. Jumlah persamaan pada sistem persamaan diferensial berpengaruh dalam menentukan ukuran matriks Jacobi.

Misal diberikan sistem persamaan diferensial nonlinier dengan waktu tunda,

$$\dot{x} = f(x(t - \tau))\tag{2.22}$$

maka linierisasi dari sistem persamaan (2.22) yaitu $\dot{x} = J(f(x^*))x$. Bentuk umum persamaan diferensial dengan waktu tunda (Rohamah, 2020), adalah

$$\frac{\partial X}{\partial t} = f(X, U) \quad (2.23)$$

di mana $U(t) = X(t - \tau)$, $F: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$, dan titik kesetimbangan yang memenuhi yaitu $F(X^*, X^*) = 0$. Titik kesetimbangan akan stabil asimtotik jika sistem stabil linier. Misal diberikan dua matriks ukuran $n \times n$ sebagai berikut

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) \equiv \frac{\partial F_i}{\partial x_j}, \mathbf{B} = (b_{ij}) \equiv \frac{\partial F_i}{\partial u_j}$$

di mana \mathbf{A} dan \mathbf{B} dilinierisasi di sekitar titik kesetimbangan, sehingga diperoleh hasil linierisasi

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \mathbf{A}Y(t) + \mathbf{B}Y(t - \tau) \quad (2.24)$$

Misalkan solusi $Y(t) = Ve^{\lambda t}$, dengan V merupakan konstanta vektor. Apabila λ bernilai real negatif maka disebut solusi menurun, sedangkan apabila λ bernilai real positif maka disebut solusi meningkat. Selanjutnya substitusikan Y ke persamaan (2.24), sehingga diperoleh

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{B}e^{-\lambda\tau})V = 0 \quad (2.25)$$

Persamaan (2.25) adalah persamaan linier dari V , artinya persamaan tersebut memiliki solusi jika dan hanya jika determinannya bernilai nol yaitu

$$H(\lambda) \equiv \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{B}e^{-\lambda\tau}) = 0 \quad (2.26)$$

Dengan demikian, persamaan transendel (2.26) harus dicari solusinya dan apabila memuat satu variabel waktu tunda maka

$$H(\lambda) = P(\lambda) + Q(\lambda)e^{-\lambda\tau} \quad (2.27)$$

Persamaan (2.27) merupakan bentuk eksak dari teorema Braures. Hal tersebut menunjukkan bahwa terdapat bermacam-macam teorema yang digunakan untuk mencari akar polinomial yang bernilai real negatif.

2.1.8 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Jika A adalah matriks $n \times n$, maka vektor tak nol $x \in \mathbb{R}^n$ disebut sebagai vektor eigen dari matriks A jika Ax adalah sebuah kelipatan skalar dari x , atau dapat dituliskan dalam bentuk

$$Ax = \lambda x \quad (2.28)$$

di mana λ adalah sebarang skalar. Skalar λ merupakan nilai eigen dari matriks A dan x merupakan vektor dari matriks A yang bergantung dengan λ . Nilai eigen dari matriks A diperoleh dari persamaan (2.28) yang dapat ditulis kembali menjadi

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda Ix \\ (A - \lambda I)x &= 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

di mana I merupakan matriks identitas (Waluya, 2006). Nilai eigen dapat diperoleh apabila persamaan (2.29) memiliki solusi tak nol jika dan hanya jika

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (2.30)$$

Persamaan (2.30) disebut persamaan karakteristik dari matriks A yang menghasilkan persamaan polinomial terhadap variabel λ . Skalar λ yang memenuhi persamaan karakteristik dinamakan nilai eigen dari matriks A .

2.1.9 Kestabilan Titik Keseimbangan

Sifat kestabilan titik kesetimbangan pada sistem persamaan diferensial dapat dilihat dari akar-akar karakteristik yang bernilai real. Berikut adalah jenis-jenis kestabilan titik tetap sistem linier menurut (Boyce & DiPrima, 2001):

Tabel 2.3 Jenis Kestabilan Titik Tetap Sistem Linier

Nilai Eigen	Kestabilan Titik Tetap	Jenis Titik Tetap (x^*, y^*)
$\lambda_{1,2} > 0$	Tidak stabil	Titik simpul (<i>Node</i>)
$\lambda_{1,2} < 0$	Stabil asimtotik	Titik simpul (<i>Node</i>)
$\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2 < 0$	Tidak stabil	Titik pelana (<i>Saddle</i>)
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Tidak stabil	Titik bintang (<i>Star</i>)
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Stabil asimtotik	Titik simpul (<i>Node</i>)
$\lambda_{1,2} = k \pm bi$, dengan $k > 0$ $k < 0$	Tidak stabil	Titik spiral
	Stabil asimtotik	Titik spiral
$\lambda_1 = bi$ dan $\lambda_2 = -bi$ dengan $I \neq 0$	Stabil	Titik pusat (<i>Center</i>)

Kestabilan titik kesetimbangan yang memiliki bentuk nilai eigen kompleks dapat dijumpai pada beberapa permasalahan. Sehingga untuk mengatasi hal tersebut, maka digunakan metode Routh-Hurwitz untuk menentukan jenis kestabilan titik kesetimbangan agar diperoleh nilai eigen yang real.

2.1.10 Kriteria Routh-Hurwitz

Kriteria Routh-Hurwitz adalah salah satu cara untuk menentukan kestabilan titik kesetimbangan. Misal diberikan persamaan karakteristik sebagai berikut (Nddi, 2018)

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n \quad (2.31)$$

di mana $a_0 = 1$ dan a_i dengan $i = 1, 2, \dots, n$ adalah konstanta real. Definisikan n matriks Routh-Hurwitz menggunakan koefisien a_i berdasarkan persamaan (2.31).

$$H_1 = [a_1], \quad H_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix},$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix}, \dots, H_n = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

di mana $a_j = 0$ jika $j > n$. Semua akar dari polinomial $P(\lambda)$ bernilai negatif atau terdapat konstanta real negatif jika dan hanya jika determinan dari semua matriks Hurwitz bernilai positif, atau dinotasikan dalam bentuk

$$\det H_j > 0, j = 1, 2, \dots, n$$

Misalkan $n = 2$, maka kriteria Routh $\det H_1 = a_1 > 0$ dan $\det H_2 = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_0 \\ a_2 & a_1 \end{bmatrix} = a_1 a_2 > 0$ atau $a_1 > 0$ dan $a_2 > 0$. Lalu, kriteria Routh-Hurwitz untuk polinomial derajat $n = 3, 4, 5$ adalah sebagai berikut:

1. $n = 3$, maka $a_1 > 0, a_3 > 0$, dan $a_1 a_2 > a_3$
2. $n = 4$, maka $a_1 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0$ dan $a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4$
3. $n = 5$, maka $a_i > 0$ dengan $i = 1, 2, 3, 4, 5$ dan $a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4, (a_1 a_4 - a_5)(a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4 > a_5)(a_1 a_2 - a_3)^2 + a_1 a_5^2$

2.1.11 Nilai Kritis Waktu Tunda

Misalkan terdapat sistem persamaan diferensial waktu tunda dengan $\tau \neq 0$, maka akar karakteristik λ mengalami perubahan (Forde, 2005). Penambahan waktu tunda pada sistem persamaan mengakibatkan adanya nilai kritis waktu tunda yang dapat mempengaruhi kestabilan titik kesetimbangan. Misal diberikan sistem persamaan sebagai berikut (Kar, 2003):

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \alpha X(t) - \beta Y(t) \\ \frac{dY}{dt} &= -\mu Y(t) + \beta X(t) - \delta Y(t - \tau) \end{aligned} \tag{2.32}$$

di mana $\tau \geq 0$. Kemudian persamaan (2.32) dilinierisasi disekitar titik kesetimbangan, sehingga diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$\Delta(\lambda, \tau) = \lambda^2 + a\lambda + c + (b\lambda + d)e^{-\lambda\tau} = 0 \tag{2.33}$$

Jika $\lambda = i\omega, \omega > 0$ adalah akar persamaan karakteristik (2.33), maka diperoleh

$$(i\omega)^2 + ai\omega + c + (bi\omega + d)e^{-i\omega\tau} = 0 \quad (2.34)$$

Karena $e^{-i\omega\tau} = \cos(\omega\tau) - i \sin(\omega\tau)$ dan $i^2 = -1$, maka diperoleh

$$-\omega^2 + ai\omega + c + (bi\omega + d)(\cos(\omega\tau) - i \sin(\omega\tau)) = 0 \quad (2.35)$$

Selanjutnya pisahkan bagian real dan imajiner dari persamaan (2.35), diperoleh

$$\begin{aligned} -\omega^2 + c + b\omega \sin(\omega\tau) + d \cos(\omega\tau) &= 0 \\ a\omega + b\omega \cos(\omega\tau) - d \sin(\omega\tau) &= 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

Lalu kuadratkan masing-masing ruas persamaan (2.36) kemudian jumlahkan hasil pengkuadratan dan dikelompokkan sesuai pangkat ω dengan $\sin^2(\omega\tau) + \cos^2(\omega\tau) = 1$, sehingga diperoleh polinomial berderajat empat sebagai berikut

$$\omega^4 + (a^2 - b^2 - 2c)\omega^2 + c^2 - d^2 = 0 \quad (2.37)$$

Kemudian untuk menentukan nilai kritis waktu tunda τ_k^\pm , substitusikan ω_\pm^2 yang diperoleh dari persamaan (2.37) ke dalam persamaan (2.36).

2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Quran dan Hadits

Islam mengajarkan manusia untuk senantiasa hidup sehat secara jasmani maupun rohani. Sehat merupakan salah satu nikmat yang patut disyukuri yang diberikan oleh Allah kepada manusia. Ada baiknya manusia untuk menghindari penyakit dan ketika merasakan sakit maka segeralah pergi berobat. Sebisa mungkin manusia harus berusaha untuk menghindari penyakit dan menjauhi perbuatan yang dapat menimbulkan penyakit. Segala jenis penyakit pasti ada obatnya atau bisa disembuhkan kecuali kematian. Sebagaimana firman Allah SWT dalam Al-Qur'an surat Yunus ayat 49 yang artinya:

“Katakanlah (Nabi Muhammad), “Aku tidak kuasa (menolak) mudarat dan tidak pula (mendatangkan) manfaat kepada diriku, kecuali apa yang Allah kehendaki.” Setiap umat mempunyai ajal (batas waktu). Apabila ajalnya tiba, mereka tidak dapat meminta penundaan sesaat pun dan tidak (pula) dapat meminta percepatan.” (QS. Yunus 10:49).

Lafadz “*ajal*” menunjukkan waktu berakhirnya sesuatu seperti usia manusia, kegiatan maupun peristiwa. Lalu huruf *sin* dan *ta* pada lafadz “*yasta’khirun*” dan “*yastaqdimun*” dapat dimaknai manusia tiada kemampuan untuk melakukan dan dapat juga dimaknai kesungguhan, yaitu manusia tidak akan mampu untuk melakukan percepatan atau penundaan terhadap sesuatu yang telah ditentukan oleh Allah walaupun bersungguh-sungguh (Sholikhah, 2018). Setiap manusia akan menemui ajal yang telah ditentukan waktunya oleh Allah. Siapapun selain Allah tidak dapat mengetahui waktu tibanya ajal. Apabila ajal telah tiba, maka manusia tidak mampu menundanya maupun memajukan waktunya dari waktu yang telah ditentukan (Kemenag, 2019).

Selain itu, sabda Rasulullah SAW pada hadits No. 5246 sebagai berikut:

مَا أَنْزَلَ اللَّهُ دَاءً إِلَّا أَنْزَلَ لَهُ شِفَاءً (رواه البخاري)

Artinya: “*Tidaklah Allah SWT menurunkan suatu penyakit, kecuali Dia juga yang menurunkan penawarnya*” (HR. Bukhari).

Berdasarkan hadits tersebut dapat dikatakan bahwa segala jenis penyakit yang diderita manusia pasti ada pula obatnya. Hal ini juga selaras dengan penjelasan dalam Al-Qur’an surat Asy-Syu’ara ayat 80 yang artinya:

“*dan apabila aku sakit, Dialah yang menyembuhkan aku,*” (QS. Asy-Syu’ara 26:80).

Ayat tersebut menjelaskan bahwa apabila ada seseorang yang sakit, maka hanya Dia (Allah) pula yang menyembuhkan sehingga kesehatannya kembali pulih. Ayat ini merupakan salah satu bukti kekuasaan Allah bahwa Dialah yang memiliki hak untuk menyembuhkan atau tidak menyembuhkan penyakit yang menimpa hamba-Nya. Menurut Tafsir Al-Misbah, pada lafadz “*waidza maridtu*” mempunyai makna “dan apabila aku sakit” bukan “dan apabila Allah menjadikan

aku sakit”. Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya bahwa untuk urusan sembuh atau tidaknya penyakit hanyalah Allah yang dapat menentukannya (Shihab, 2002).

Begitu pula menurut Wahbah az-Zuhaili yang menafsirkan ayat tersebut bahwa bukanlah Allah yang memberi manusia itu sakit, melainkan sakit itu datang dari manusia itu sendiri (Rezyika, 2021). Namun, perlu ditekankan juga bahwa bukan berarti manusia tidak perlu usaha untuk bisa sembuh dari penyakit. Justru manusia dituntut untuk berusaha bagaimana cara memperoleh kesembuhan dengan cara menemukan obatnya. Sebagaimana sabda Rasulullah SAW yang tertuang dalam hadits Shahih Muslim No. 4084 sebagai berikut:

لِكُلِّ دَاءٍ دَوَاءٌ فَإِذَا أُصِيبَ دَوَاءُ الدَّاءِ بَرَأَ بِإِذْنِ اللَّهِ عَزَّ وَجَلَّ (رواه مسلم)

Artinya: “Setiap penyakit itu ada obatnya. Apabila ditemukan obat yang tepat untuk suatu penyakit, akan sembuhlah penyakit itu dengan izin Allah 'azza wajalla.” (HR. Muslim).

Syaikh Abdul Qadir Al-Jailani menafsirkan hadits tersebut bahwa terdapat bermacam-macam ramuan yang dapat digunakan sebagai obat dari berbagai jenis penyakit. Manusia bisa mencari obat dari segala sumber, seperti resep kimia tertentu atau resep tradisional dari tanaman herbal. Namun, sejatinya hanya Allah yang tahu dan menentukan atas kehendak-Nya bagaimana cara manusia itu bisa sembuh dari penyakit. Jika mengonsumsi obat yang tepat dan konsisten, maka Allah ridha untuk memberikan kesembuhan (Lestari, 2019). Selain berikhtiar menghindari penyakit dan mencari obat jika sakit, perlu juga berdoa kepada Allah SWT agar diberi nikmat sehat dan memohon kesembuhan jika terkena penyakit.

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa sebagai manusia seharusnya senantiasa berikhtiar dan berdoa dalam kondisi apapun. Ketika ditimpa suatu penyakit, maka berdoalah kepada Allah SWT untuk diberi kesehatan dan dijauhkan dari segala jenis penyakit. Selalu ambil hikmah atas apapun yang terjadi, seperti

ketika sedang ditimpa penyakit. Contohnya wabah COVID-19 yang sedang terjadi saat ini. Allah mampu untuk menyembuhkan seseorang yang terinfeksi COVID-19, namun juga harus diiringi dengan usaha dalam proses penyembuhan. Jika terinfeksi sebaiknya melakukan karantina atau isolasi mandiri agar tidak menularkan virus ke orang lain, atau segera berobat ke rumah sakit agar mendapatkan perawatan yang optimal.

2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung

Topik yang dibahas pada penelitian ini yaitu melakukan analisis dinamik dan simulasi model matematika dengan dan tanpa waktu tunda pada populasi SIHCR di DKI Jakarta. Lalu untuk menunjang proses penelitian, maka diperlukan teori pendukung untuk menyelesaikan permasalahan sesuai topik penelitian. Model matematika SIHCR dengan waktu tunda pada penelitian ini merupakan model epidemik untuk penyebaran COVID-19, di mana model tersebut berbentuk sistem persamaan diferensial biasa bergantung waktu. Oleh karena itu, diperlukan teori pendukung terkait penyelesaian analisis dinamik dan simulasi dari model yang digunakan.

Teori pendukung untuk menyelesaikan analisis dinamik adalah teori titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar, linierisasi, nilai eigen dan vektor eigen, kestabilan titik kesetimbangan, dan kriteria Routh – Hurwitz (Boyce & DiPrima, 2001). Selanjutnya dilanjutkan simulasi terhadap model matematika SIHCR untuk penyebaran COVID-19 dengan dan tanpa waktu tunda. Simulasi pada model SIHCR dilakukan dengan memasukkan nilai waktu tunda yang berbeda-beda guna mengetahui perilaku dinamik dari model.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini menggunakan 60% penelitian kualitatif dan 40% penelitian kuantitatif. Penelitian kualitatif pada penelitian ini yaitu melakukan analisis dinamik pada model matematika SIHCR. Kemudian penelitian kuantitatif pada penelitian ini adalah melakukan simulasi dari model matematika SIHCR dengan dan tanpa waktu tunda.

3.2 Pra Penelitian

Pra penelitian adalah tahapan penulis untuk menunjang penelitian. Pada tahapan ini penulis mencari berbagai informasi yang berkaitan dengan topik penelitian. Informasi dapat bersumber dari buku, jurnal atau artikel, website resmi maupun sumber relevan lainnya. Kemudian data yang digunakan pada penelitian ini adalah data sekunder, yaitu data kasus harian COVID-19 di DKI Jakarta pada bulan Oktober-Desember 2021 yang bersumber dari website resmi COVID-19 Jakarta (corona.jakarta.go.id) dan data ketersediaan tempat tidur rumah sakit yang bersumber dari website resmi Kemenkes RI (Kemkes.go.id) tahun 2021.

3.3 Tahapan Penelitian

Langkah-langkah atau tahapan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Analisis dinamik model penyebaran COVID-19 pada populasi SIHCR dengan waktu tunda
 - a. Menentukan titik kesetimbangan bebas penyakit, di mana model penyebaran COVID-19 dalam kondisi tidak ada penyebaran penyakit

dalam populasi, sehingga $I = 0$. Selanjutnya menentukan titik kesetimbangan endemik, di mana model penyebaran COVID-19 menunjukkan adanya penyebaran penyakit dalam populasi. Sehingga populasi $S^* \neq 0$, $I^* \neq 0$, $H^* \neq 0$, $C^* \neq 0$, dan $R^* \neq 0$.

- b. Menentukan bilangan reproduksi dasar menggunakan matriks Jacobi dengan melakukan linierisasi. Lalu akan diperoleh akar persamaan karakteristik dan nilai eigen maksimum. Nilai eigen maksimum tersebut yang akan menjadi bilangan reproduksi dasar.
 - c. Menganalisis kestabilan lokal titik kesetimbangan bebas penyakit. Pada tahap ini analisis kestabilan dihitung berdasarkan nilai eigen maksimum yang diperoleh dari bilangan reproduksi dasar. Selanjutnya menganalisis kestabilan lokal titik kesetimbangan endemik. Pada tahap ini analisis kestabilan dihitung berdasarkan nilai eigen maksimum yang diperoleh dari bilangan reproduksi dasar.
2. Simulasi model penyebaran COVID-19 pada populasi SIHCR
 - a. Melakukan simulasi model SIHCR tanpa waktu tunda
 - b. Melakukan simulasi model SIHCR dengan waktu tunda

3.4 Penetapan Kesimpulan

Pada tahap ini penulis menarik kesimpulan dari hasil dan pembahasan penelitian, serta memberikan saran untuk pembaca agar melanjutkan dan mengembangkan penelitian.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Analisis Dinamik Model SIHCR dengan Waktu Tunda

4.1.1 Titik Keseimbangan

Pada penelitian ini model yang disajikan pada sistem persamaan (2.6) akan dikaji pada dua kondisi, yakni kondisi bebas penyakit dan kondisi endemik. Oleh karena itu dalam kajian titik keseimbangan penelitian ini akan mengeksplorasi pada dua titik keseimbangan yakni titik keseimbangan bebas penyakit dan titik keseimbangan endemik. Kedua analisis titik keseimbangan mengasumsikan tidak ada perubahan semua populasi terhadap waktu. Artinya perubahan populasinya dianggap konstan, yaitu: $\frac{dS}{dt} = 0$, $\frac{dI}{dt} = 0$, $\frac{dH}{dt} = 0$, $\frac{dC}{dt} = 0$, dan $\frac{dR}{dt} = 0$. Pada masalah bebas penyakit diasumsikan ($I = 0$) yang selanjutnya nilai ini disubstitusikan pada semua persamaan (2.6), selanjutnya dilakukan iterasi untuk mendapatkan nilai *Susceptible, Infected, Hospitalized, Critical, dan Recovered* secara berturut-turut. Di lain pihak pada masalah endemik diasumsikan bahwa banyaknya populasi terinfeksi ($I \neq 0$). Sehingga iterasi dijalankan dengan menghitung banyaknya populasi terinfeksi terlebih dahulu yang selanjutnya proses iterasi dilanjutkan untuk mendapatkan nilai semua variabel yang lain secara berturut-turut.

Dari paparan di atas, masalah perhitungan titik keseimbangan bebas penyakit dan endemik pada penelitian ini didasarkan pada model (Kozyreff, 2021), sebagai berikut:

$$\Lambda - \beta SI - \mu_S S = 0 \quad (4.1)$$

$$\beta SI - \alpha_I I(t - \tau_1) - \gamma I - \mu_I I = 0 \quad (4.2)$$

$$\alpha_I I(t - \tau_1) - \alpha_H H(t - \tau_2) - \theta_H H = 0 \quad (4.3)$$

$$\alpha_H H(t - \tau_2) - \theta_C C - \delta_C C = 0 \quad (4.4)$$

$$\gamma I + \theta_H H + \theta_C C - \mu_R R = 0 \quad (4.5)$$

Pada bagian ini akan dikaji terlebih dahulu analisis titik kesetimbangan bebas penyakit sebagai berikut:

a. Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Suatu model yang memuat persamaan diferensial dengan waktu tunda akan memiliki titik kesetimbangan yang stabil jika nilai waktu tunda sama dengan nol dan atau nilai waktu tundanya positif dan mendekati nol. Hal ini terjadi karena persamaan karakteristiknya yang bergantung pada nilai waktu tunda (Toaha, 2008). Oleh karena itu, untuk memperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit diasumsikan titik kesetimbangan ketika model tanpa waktu tunda di mana $\tau_1 = \tau_2 = 0$. Ambil persamaan (4.2) sebagai tahap awal untuk memperoleh titik kesetimbangan, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \beta SI - \alpha_I I(t - \tau_1) - \gamma I - \mu_I I &= 0 \\ \Leftrightarrow \beta SI - \alpha_I I(t - 0) - \gamma I - \mu_I I &= 0 \\ \Leftrightarrow \beta SI - \alpha_I I - \gamma I - \mu_I I &= 0 \\ \Leftrightarrow I(\beta S - \alpha_I - \gamma - \mu_I) &= 0 \\ \Leftrightarrow I_0 &= 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Untuk $\frac{dS}{dt} = 0$ substitusikan persamaan (4.6) ke dalam persamaan (4.1) maka diperoleh

$$\begin{aligned} \Lambda - \beta SI - \mu_S S &= 0 \\ \Leftrightarrow \Lambda - \beta S(0) - \mu_S S &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \Lambda &= \mu_S S \\ \Leftrightarrow S_0 &= \frac{\Lambda}{\mu_S} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Selanjutnya, untuk $\frac{dH}{dt} = 0$ substitusikan persamaan (4.6) ke dalam persamaan (4.3) maka diperoleh

$$\begin{aligned} \alpha_I I(t - \tau_1) - \alpha_H H(t - \tau_2) - \theta_H H &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha_I I(t - 0) - \alpha_H H(t - 0) - \theta_H H &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha_I I - \alpha_H H - \theta_H H &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha_I(0) - \alpha_H H - \theta_H H &= 0 \\ \Leftrightarrow -\alpha_H H - \theta_H H &= 0 \\ \Leftrightarrow H(-\alpha_H - \theta_H) &= 0 \\ \Leftrightarrow H_0 &= 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Selanjutnya, untuk $\frac{dC}{dt} = 0$ substitusikan persamaan (4.8) ke dalam persamaan (4.4) maka diperoleh

$$\begin{aligned} \alpha_H H(t - \tau_2) - \theta_C C - \delta_C C &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha_H H(t - 0) - \theta_C C - \delta_C C &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha_H H - \theta_C C - \delta_C C &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha_H(0) - \theta_C C - \delta_C C &= 0 \\ \Leftrightarrow C(-\theta_C - \delta_C) &= 0 \\ \Leftrightarrow C_0 &= 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Terakhir, untuk $\frac{dR}{dt} = 0$ substitusikan persamaan (4.6), (4.8), dan (4.9) ke dalam persamaan (4.5) maka diperoleh

$$\gamma I + \theta_H H + \theta_C C - \mu_R R = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \gamma(0) + \theta_H(0) + \theta_C(0) - \mu_R R = 0 \\
&\Leftrightarrow -\mu_R R = 0 \\
&\Leftrightarrow R_0 = 0
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Berdasarkan perhitungan tersebut diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu

$$E_0(S_0, I_0, H_0, C_0, R_0) = E_0\left(\frac{\Lambda}{\mu_S}, 0, 0, 0, 0\right) \tag{4.11}$$

Persamaan (4.11) berlaku untuk setiap $\frac{\Lambda}{\mu_S} \neq 0$. Berikutnya dianalisis titik kesetimbangan endemik sebagai berikut:

b. Titik Kesetimbangan Endemik

Titik kesetimbangan endemik menunjukkan kondisi di mana terdapat penyebaran penyakit dalam populasi. Artinya, dalam suatu populasi terdapat individu yang terinfeksi penyakit. Sehingga pada kondisi ini, populasi $I \neq 0$. Sehingga proses iterasi dilakukan secara runtut mulai dari variabel *Susceptible* dilanjutkan pada variabel *Infected*, *Hospitalized*, *Critical*, dan *Recovered*.

Berdasarkan persamaan (4.2) diperoleh

$$\begin{aligned}
&\beta SI - \alpha_I I - \gamma I - \mu_I I = 0 \\
&\Leftrightarrow (\beta S - (\alpha_I + \gamma + \mu_I))I = 0 \\
&\Leftrightarrow \beta S - (\alpha_I + \gamma + \mu_I) = 0 \\
&\Leftrightarrow \beta S = \alpha_I + \gamma + \mu_I \\
&\Leftrightarrow S^* = \frac{\alpha_I + \gamma + \mu_I}{\beta}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Selanjutnya, substitusikan persamaan (4.12) ke dalam persamaan (4.1) maka diperoleh

$$\begin{aligned}
& \Lambda - \beta SI - \mu_S S = 0 \\
& \Leftrightarrow \Lambda - \mu_S S = \beta SI \\
& \Leftrightarrow \Lambda - \frac{\mu_S(\alpha_I + \gamma + \mu_I)}{\beta} = \frac{\beta(\alpha_I + \gamma + \mu_I)I}{\beta} \\
& \Leftrightarrow \Lambda\beta - \mu_S(\alpha_I + \gamma + \mu_I) = \beta(\alpha_I + \gamma + \mu_I)I \\
& \Leftrightarrow I^* = \frac{\Lambda\beta - \mu_S(\alpha_I + \gamma + \mu_I)}{\beta(\alpha_I + \gamma + \mu_I)} \tag{4.13}
\end{aligned}$$

Selanjutnya, substitusikan persamaan (4.13) ke dalam persamaan (4.3) maka diperoleh

$$\begin{aligned}
& \alpha_I I - \alpha_H H - \theta_H H = 0 \\
& \Leftrightarrow \frac{\alpha_I(\Lambda\beta - \mu_S(\alpha_I + \gamma + \mu_I))}{\beta(\alpha_I + \gamma + \mu_I)} - (\alpha_H + \theta_H)H = 0 \\
& \Leftrightarrow \frac{\alpha_I(\Lambda\beta - \mu_S(\alpha_I + \gamma + \mu_I))}{\beta(\alpha_I + \gamma + \mu_I)} = (\alpha_H + \theta_H)H \\
& \Leftrightarrow H^* = \frac{\alpha_I(\Lambda\beta - \mu_S(\alpha_I + \gamma + \mu_I))}{\beta(\alpha_I + \gamma + \mu_I)(\alpha_H + \theta_H)} \tag{4.14}
\end{aligned}$$

Selanjutnya, substitusikan persamaan (4.14) ke dalam persamaan (4.4) maka diperoleh

$$\begin{aligned}
& \alpha_H H - \theta_C C - \delta_C C = 0 \\
& \Leftrightarrow \frac{\alpha_H \alpha_I (\Lambda\beta - \mu_S(\alpha_I + \gamma + \mu_I))}{\beta(\alpha_I + \gamma + \mu_I)(\alpha_H + \theta_H)} - \theta_C C - \delta_C C = 0 \\
& \Leftrightarrow \frac{\alpha_H \alpha_I (\Lambda\beta - \mu_S(\alpha_I + \gamma + \mu_I))}{\beta(\alpha_I + \gamma + \mu_I)(\alpha_H + \theta_H)} = C(\theta_C + \delta_C) \\
& \Leftrightarrow C^* = \frac{\alpha_H \alpha_I (\Lambda\beta - \mu_S(\alpha_I + \gamma + \mu_I))}{\beta(\theta_C + \delta_C)(\alpha_I + \gamma + \mu_I)(\alpha_H + \theta_H)} \tag{4.15}
\end{aligned}$$

Terakhir, substitusikan persamaan (4.13), (4.14) dan (4.15) ke dalam persamaan (4.5) maka diperoleh

$$\begin{aligned}
& \gamma I + \theta_H H + \theta_C C - \mu_R R = 0 \\
\Leftrightarrow & \frac{\gamma(\Lambda\beta - \mu_S(\alpha_I + \gamma + \mu_I))}{\beta(\alpha_I + \gamma + \mu_I)} + \frac{\theta_H \alpha_I (\Lambda\beta - \mu_S(\alpha_I + \gamma + \mu_I))}{\beta(\alpha_I + \gamma + \mu_I)(\alpha_H + \theta_H)} \\
& \quad + \frac{\theta_C \alpha_H \alpha_I (\Lambda\beta - \mu_S(\alpha_I + \gamma + \mu_I))}{\beta(\theta_C + \delta_C)(\alpha_I + \gamma + \mu_I)(\alpha_H + \theta_H)} - \mu_R R = 0 \\
\Leftrightarrow & \frac{\gamma(\Lambda\beta - \mu_S(\alpha_I + \gamma + \mu_I))}{\beta(\alpha_I + \gamma + \mu_I)} + \frac{\theta_H \alpha_I (\Lambda\beta - \mu_S(\alpha_I + \gamma + \mu_I))}{\beta(\alpha_I + \gamma + \mu_I)(\alpha_H + \theta_H)} \\
& \quad + \frac{\theta_C \alpha_H \alpha_I (\Lambda\beta - \mu_S(\alpha_I + \gamma + \mu_I))}{\beta(\theta_C + \delta_C)(\alpha_I + \gamma + \mu_I)(\alpha_H + \theta_H)} = \mu_R R \\
\Leftrightarrow & \gamma(\Lambda\beta - \mu_S(\alpha_I + \gamma + \mu_I))(\theta_C + \delta_C)(\alpha_H + \theta_H) \\
& \quad + \theta_H \alpha_I (\Lambda\beta - \mu_S(\alpha_I + \gamma + \mu_I))(\theta_C + \delta_C) \\
& \quad + \theta_C \alpha_H \alpha_I (\Lambda\beta - \mu_S(\alpha_I + \gamma + \mu_I)) \\
& \quad = (\mu_R \beta (\theta_C + \delta_C) (\alpha_I + \gamma + \mu_I) (\alpha_H + \theta_H)) R \\
\Leftrightarrow & R^* = \\
& \frac{\gamma(\Lambda\beta - \mu_S(\alpha_I + \gamma + \mu_I))(\theta_C + \delta_C)(\alpha_H + \theta_H) + \theta_H \alpha_I (\Lambda\beta - \mu_S(\alpha_I + \gamma + \mu_I))(\theta_C + \delta_C) \\
& \quad + \theta_C \alpha_H \alpha_I (\Lambda\beta - \mu_S(\alpha_I + \gamma + \mu_I))}{(\mu_R \beta (\theta_C + \delta_C) (\alpha_I + \gamma + \mu_I) (\alpha_H + \theta_H))} \\
\Leftrightarrow & R^* = \frac{(\Lambda\beta - \mu_S(\alpha_I + \gamma + \mu_I)) (\gamma(\theta_C + \delta_C)(\alpha_H + \theta_H) + \theta_H \alpha_I (\theta_C + \delta_C) + \theta_C \alpha_H \alpha_I)}{\mu_R \beta (\theta_C + \delta_C) (\alpha_I + \gamma + \mu_I) (\alpha_H + \theta_H)} \quad (4.16)
\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (4.12), (4.13), (4.14), (4.15), dan (4.16) diperoleh titik kesetimbangan endemik $E_1(S^*, I^*, H^*, C^*, R^*)$ di mana:

$$\begin{aligned}
S^* &= \frac{\alpha_I + \gamma + \mu_I}{\beta} \\
I^* &= \frac{\Lambda\beta - \mu_S(\alpha_I + \gamma + \mu_I)}{\beta(\alpha_I + \gamma + \mu_I)} \quad (4.17)
\end{aligned}$$

dengan $\Lambda\beta - \mu_S(\alpha_I + \gamma + \mu_I) > 0$ dan $\Lambda\beta > \mu_S(\alpha_I + \gamma + \mu_I)$

$$H^* = \frac{\alpha_I(\Lambda\beta - \mu_S(\alpha_I + \gamma + \mu_I))}{\beta(\alpha_I + \gamma + \mu_I)(\alpha_H + \theta_H)}$$

$$C^* = \frac{\alpha_H\alpha_I(\Lambda\beta - \mu_S(\alpha_I + \gamma + \mu_I))}{\beta(\theta_C + \delta_C)(\alpha_I + \gamma + \mu_I)(\alpha_H + \theta_H)}$$

$$R^* = \frac{(\Lambda\beta - \mu_S(\alpha_I + \gamma + \mu_I))(\gamma(\theta_C + \delta_C)(\alpha_H + \theta_H) + \theta_H\alpha_I(\theta_C + \delta_C) + \theta_C\alpha_H\alpha_I)}{\mu_R\beta(\theta_C + \delta_C)(\alpha_I + \gamma + \mu_I)(\alpha_H + \theta_H)}$$

4.1.2 Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Bilangan reproduksi dasar adalah banyaknya infeksi baru yang dihasilkan dari setiap individu terinfeksi dalam suatu populasi rentan. Bilangan reproduksi dasar dapat diperoleh dari nilai eigen maksimum dengan mengkonstruksi matriks generasi selanjutnya (*next generation matrix*). Pengkonstruksian dilakukan pada kompartemen penyakit, artinya terdapat individu terinfeksi di dalam kompartemen tersebut. Sistem persamaan (2.6) pada kompartemen penyakit yaitu I, H, C dengan titik kesetimbangan bebas penyakit $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu_S}, 0, 0, 0, 0\right)$ digunakan untuk menentukan bilangan reproduksi dasar.

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \alpha_I I - \gamma I - \mu_I I = f_2(S, I, H, C, R)$$

$$\frac{dH}{dt} = \alpha_I I - \alpha_H H - \theta_H H = f_3(S, I, H, C, R) \quad (4.18)$$

$$\frac{dC}{dt} = \alpha_H H - \theta_C C - \delta_C C = f_4(S, I, H, C, R)$$

Selanjutnya dilakukan linierisasi pada sistem (4.18) terhadap titik kesetimbangan bebas penyakit, sehingga diperoleh matriks Jacobian sebagai berikut

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial I} & \frac{\partial f_2}{\partial H} & \frac{\partial f_2}{\partial C} \\ \frac{\partial f_3}{\partial I} & \frac{\partial f_3}{\partial H} & \frac{\partial f_3}{\partial C} \\ \frac{\partial f_4}{\partial I} & \frac{\partial f_4}{\partial H} & \frac{\partial f_4}{\partial C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta S - \alpha_I - \gamma - \mu_I & 0 & 0 \\ \alpha_I & -\alpha_H - \theta_H & 0 \\ 0 & \alpha_H & -\theta_C - \delta_C \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Lalu susbtitusikan titik kesetimbangan bebas penyakit $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu_S}, 0, 0, 0, 0\right)$ ke dalam persamaan (4.19), sehingga diperoleh

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial I} & \frac{\partial f_2}{\partial H} & \frac{\partial f_2}{\partial C} \\ \frac{\partial f_3}{\partial I} & \frac{\partial f_3}{\partial H} & \frac{\partial f_3}{\partial C} \\ \frac{\partial f_4}{\partial I} & \frac{\partial f_4}{\partial H} & \frac{\partial f_4}{\partial C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\beta \Lambda}{\mu_S} - \alpha_I - \gamma - \mu_I & 0 & 0 \\ \alpha_I & -\alpha_H - \theta_H & 0 \\ 0 & \alpha_H & -\theta_C - \delta_C \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Kemudian dilakukan dekomposisi matriks Jacobi menjadi $J = F - V$, di mana F adalah matriks transmisi yaitu laju penambahan jumlah individu terinfeksi dan V adalah matriks transisi laju penurunan jumlah individu terinfeksi, diperoleh

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\beta \Lambda}{\mu_S} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} \alpha_I + \gamma + \mu_I & 0 & 0 \\ -\alpha_I & \alpha_H + \theta_H & 0 \\ 0 & -\alpha_H & \theta_C + \delta_C \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Selanjutnya hitung V^{-1} , diperoleh

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha_I + \gamma + \mu_I} & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_I}{(\alpha_I + \gamma + \mu_I)(\alpha_H + \theta_H)} & \frac{1}{\alpha_H + \theta_H} & 0 \\ \frac{\alpha_I \alpha_H}{(\alpha_I + \gamma + \mu_I)(\alpha_H + \theta_H)(\theta_C + \delta_C)} & \frac{\alpha_H}{(\alpha_H + \theta_H)(\theta_C + \delta_C)} & \frac{1}{\theta_C + \delta_C} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Dari persamaan (4.21) dan (4.22) didapatkan matriks generasi selanjutnya (K), yaitu:

$$K = FV^{-1}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{\beta\Lambda}{\mu_S} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha_I + \gamma + \mu_I} & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_I}{(\alpha_I + \gamma + \mu_I)(\alpha_H + \theta_H)} & \frac{1}{\alpha_H + \theta_H} & 0 \\ \frac{\alpha_I \alpha_H}{(\alpha_I + \gamma + \mu_I)(\alpha_H + \theta_H)(\theta_C + \delta_C)} & \frac{\alpha_H}{(\alpha_H + \theta_H)(\theta_C + \delta_C)} & \frac{1}{\theta_C + \delta_C} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{\beta\Lambda}{\mu_S(\alpha_I + \gamma + \mu_I)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Selanjutnya, nilai yang digunakan sebagai bilangan reproduksi dasar adalah radius spektral atau nilai eigen absolut dominan dari matriks \mathbf{K} , yaitu $R_0 = \rho(\mathbf{FV}^{-1})$.

Nilai eigen absolut dominan matriks \mathbf{K} dapat diperoleh dari persamaan berikut ini

$$\det|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{FV}^{-1}| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\beta\Lambda}{\mu_S(\alpha_I + \gamma + \mu_I)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{array}{ccc} \lambda - \frac{\beta\Lambda}{\mu_S(\alpha_I + \gamma + \mu_I)} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{array} \right| = 0$$

Sehingga diperoleh persamaan polinomial pangkat tiga sebagai berikut

$$\left(\lambda - \frac{\beta\Lambda}{\mu_S(\alpha_I + \gamma + \mu_I)} \right) \lambda^2 = 0$$

Dari persamaan polinomial tersebut didapatkan nilai eigen absolut dominan yaitu

$$\lambda_1 = \frac{\beta\Lambda}{\mu_S(\alpha_I + \gamma + \mu_I)}, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$$

Sehingga, bilangan reproduksi dasar yang didapatkan dari nilai eigen absolut dominan adalah

$$R_0 = \frac{\beta\Lambda}{\mu_S(\alpha_I + \gamma + \mu_I)}$$

4.1.3 Analisis Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan

a. Linierisasi Model SIHCR Dengan Waktu Tunda

Analisis kestabilan titik kesetimbangan pada sistem persamaan (2.6) dapat diperoleh dengan cara linierisasi menggunakan Deret Taylor untuk menghilangkan suku nonlinier disekitar titik kesetimbangan. Diasumsikan bahwa $\tau_1 = \tau_2 = \tau$. Langkah awal yaitu mendefinisikan sistem persamaan (2.6) dalam bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \Lambda - \beta SI - \mu_S S = f_1(S, I, H, C, R) \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \alpha_I I(t - \tau) - \gamma I - \mu_I I = f_2(S, I, H, C, R) \\ \frac{dH}{dt} &= \alpha_I I(t - \tau) - \alpha_H H(t - \tau) - \theta_H H = f_3(S, I, H, C, R) \\ \frac{dC}{dt} &= \alpha_H H(t - \tau) - \theta_C C - \delta_C C = f_4(S, I, H, C, R) \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I + \theta_H H + \theta_C C - \mu_R R = f_5(S, I, H, C, R)\end{aligned}\tag{4.24}$$

Selanjutnya dilakukan linierisasi pada sistem persamaan nonlinier (4.24) di sekitar titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik. Pertama, sistem persamaan nonlinier (4.24) dilinierisasi di sekitar titik kesetimbangan bebas penyakit menggunakan Deret Taylor untuk menghilangkan suku nonliniernya, diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} = f_1(E_0) &= \frac{\partial f_1}{\partial S}|_{E_0} (S - S_0) + \frac{\partial f_1}{\partial I}|_{E_0} (I - I_0) + \frac{\partial f_1}{\partial H}|_{E_0} (H - H_0) \\ &+ \frac{\partial f_1}{\partial C}|_{E_0} (C - C_0) + \frac{\partial f_1}{\partial R}|_{E_0} (R - R_0)\end{aligned}\tag{4.25}$$

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} = f_2(E_0) &= \frac{\partial f_2}{\partial S|_{E_0}} (S - S_0) + \frac{\partial f_2}{\partial I|_{E_0}} (I - I_0) + \frac{\partial f_2}{\partial H|_{E_0}} (H - H_0) \\ &\quad + \frac{\partial f_2}{\partial C|_{E_0}} (C - C_0) + \frac{\partial f_2}{\partial R|_{E_0}} (R - R_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} = f_3(E_0) &= \frac{\partial f_3}{\partial S|_{E_0}} (S - S_0) + \frac{\partial f_3}{\partial I|_{E_0}} (I - I_0) + \frac{\partial f_3}{\partial H|_{E_0}} (H - H_0) \\ &\quad + \frac{\partial f_3}{\partial C|_{E_0}} (C - C_0) + \frac{\partial f_3}{\partial R|_{E_0}} (R - R_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} = f_4(E_0) &= \frac{\partial f_4}{\partial S|_{E_0}} (S - S_0) + \frac{\partial f_4}{\partial I|_{E_0}} (I - I_0) + \frac{\partial f_4}{\partial H|_{E_0}} (H - H_0) \\ &\quad + \frac{\partial f_4}{\partial C|_{E_0}} (C - C_0) + \frac{\partial f_4}{\partial R|_{E_0}} (R - R_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} = f_5(E_0) &= \frac{\partial f_5}{\partial S|_{E_0}} (S - S_0) + \frac{\partial f_5}{\partial I|_{E_0}} (I - I_0) + \frac{\partial f_5}{\partial H|_{E_0}} (H - H_0) \\ &\quad + \frac{\partial f_5}{\partial C|_{E_0}} (C - C_0) + \frac{\partial f_5}{\partial R|_{E_0}} (R - R_0) \end{aligned}$$

Selanjutnya dengan memisalkan

$$\begin{array}{ll} v = S - S_0 & v_\tau = S(t - \tau) - S_0 \\ w = I - I_0 & w_\tau = I(t - \tau) - I_0 \\ x = H - H_0 & x_\tau = H(t - \tau) - H_0 \\ y = C - C_0 & y_\tau = C(t - \tau) - C_0 \\ z = R - R_0 & z_\tau = R(t - \tau) - R_0 \end{array}$$

di mana v, w, x, y, z menunjukkan deviasi titik kesetimbangan dan

$v_\tau, w_\tau, x_\tau, y_\tau, z_\tau$ menunjukkan deviasi titik kesetimbangan dengan waktu tunda,

maka derivatifnya adalah $\frac{dS}{dt} = \frac{dv}{dt}, \frac{dI}{dt} = \frac{dw}{dt}, \frac{dH}{dt} = \frac{dx}{dt}, \frac{dC}{dt} = \frac{dy}{dt}, \frac{dR}{dt} = \frac{dz}{dt}$.

Sehingga persamaan (4.25) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dt} &= \frac{\partial f_1}{\partial S|_{E_0}} v + \frac{\partial f_1}{\partial I|_{E_0}} w + \frac{\partial f_1}{\partial H|_{E_0}} x + \frac{\partial f_1}{\partial C|_{E_0}} y + \frac{\partial f_1}{\partial R|_{E_0}} z \\
\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial f_2}{\partial S|_{E_0}} v + \frac{\partial f_2}{\partial I|_{E_0}} w + \frac{\partial f_2}{\partial H|_{E_0}} x + \frac{\partial f_2}{\partial C|_{E_0}} y + \frac{\partial f_2}{\partial R|_{E_0}} z \\
\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial f_3}{\partial S|_{E_0}} v + \frac{\partial f_3}{\partial I|_{E_0}} w + \frac{\partial f_3}{\partial H|_{E_0}} x + \frac{\partial f_3}{\partial C|_{E_0}} y + \frac{\partial f_3}{\partial R|_{E_0}} z \\
\frac{dy}{dt} &= \frac{\partial f_4}{\partial S|_{E_0}} v + \frac{\partial f_4}{\partial I|_{E_0}} w + \frac{\partial f_4}{\partial H|_{E_0}} x + \frac{\partial f_4}{\partial C|_{E_0}} y + \frac{\partial f_4}{\partial R|_{E_0}} z \\
\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial f_5}{\partial S|_{E_0}} v + \frac{\partial f_5}{\partial I|_{E_0}} w + \frac{\partial f_5}{\partial H|_{E_0}} x + \frac{\partial f_5}{\partial C|_{E_0}} y + \frac{\partial f_5}{\partial R|_{E_0}} z
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Persamaan (4.26) adalah persamaan yang telah dilinerisasi. Lalu substitusikan $f_1(S, I, H, C, R), f_2(S, I, H, C, R), f_3(S, I, H, C, R), f_4(S, I, H, C, R), f_5(S, I, H, C, R)$

ke dalam persamaan (4.26), diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dt} &= \frac{\partial f_1}{\partial S|_{E_0}} v + \frac{\partial f_1}{\partial I|_{E_0}} w + \frac{\partial f_1}{\partial H|_{E_0}} x + \frac{\partial f_1}{\partial C|_{E_0}} y + \frac{\partial f_1}{\partial R|_{E_0}} z \\
\Leftrightarrow \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial(\Lambda - \beta SI - \mu_S S)}{\partial S} v + \frac{\partial(\Lambda - \beta SI - \mu_S S)}{\partial I} w + \\
&\quad \frac{\partial(\Lambda - \beta SI - \mu_S S)}{\partial H} x + \frac{\partial(\Lambda - \beta SI - \mu_S S)}{\partial C} y + \\
&\quad \frac{\partial(\Lambda - \beta SI - \mu_S S)}{\partial R} z \\
\Leftrightarrow \frac{dv}{dt} &= -(\beta I_0 + \mu_S)v - \beta S_0 w
\end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial f_2}{\partial S|_{E_0}} v + \frac{\partial f_2}{\partial I|_{E_0}} w + \frac{\partial f_2}{\partial H|_{E_0}} x + \frac{\partial f_2}{\partial C|_{E_0}} y + \frac{\partial f_2}{\partial R|_{E_0}} z \\
\Leftrightarrow \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial(\beta SI - \alpha_I I(t - \tau) - \gamma I - \mu_I I)}{\partial S} v + \\
&\quad \frac{\partial(\beta SI - \alpha_I I(t - \tau) - \gamma I - \mu_I I)}{\partial I} w +
\end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(\beta SI - \alpha_I I(t - \tau) - \gamma I - \mu_I I)}{\partial H} x + \\
& \frac{\partial(\beta SI - \alpha_I I(t - \tau) - \gamma I - \mu_I I)}{\partial C} y + \\
& \frac{\partial(\beta SI - \alpha_I I(t - \tau) - \gamma I - \mu_I I)}{\partial R} z \\
\Leftrightarrow \frac{dw}{dt} &= \beta I_0 v + (\beta S_0 - (\gamma + \mu_I)) w - \alpha_I w_\tau \\
\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial f_3}{\partial S|_{E_0}} v + \frac{\partial f_3}{\partial I|_{E_0}} w + \frac{\partial f_3}{\partial H|_{E_0}} x + \frac{\partial f_3}{\partial C|_{E_0}} y + \frac{\partial f_3}{\partial R|_{E_0}} z \\
\Leftrightarrow \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial(\alpha_I I(t - \tau) - \alpha_H H(t - \tau) - \theta_H H)}{\partial S} v + \\
& \frac{\partial(\alpha_I I(t - \tau) - \alpha_H H(t - \tau) - \theta_H H)}{\partial I} w + \\
& \frac{\partial(\alpha_I I(t - \tau) - \alpha_H H(t - \tau) - \theta_H H)}{\partial H} x + \\
& \frac{\partial(\alpha_I I(t - \tau) - \alpha_H H(t - \tau) - \theta_H H)}{\partial C} y + \\
& \frac{\partial(\alpha_I I(t - \tau) - \alpha_H H(t - \tau) - \theta_H H)}{\partial R} z \\
\Leftrightarrow \frac{dx}{dt} &= \alpha_I w_\tau - \theta_H x - \alpha_H x_\tau \tag{4.29}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \frac{\partial f_4}{\partial S|_{E_0}} v + \frac{\partial f_4}{\partial I|_{E_0}} w + \frac{\partial f_4}{\partial H|_{E_0}} x + \frac{\partial f_4}{\partial C|_{E_0}} y + \frac{\partial f_4}{\partial R|_{E_0}} z \\
\Leftrightarrow \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial(\alpha_H H(t - \tau) - \theta_C C - \delta_C C)}{\partial S} v + \\
& \frac{\partial(\alpha_H H(t - \tau) - \theta_C C - \delta_C C)}{\partial I} w + \\
& \frac{\partial(\alpha_H H(t - \tau) - \theta_C C - \delta_C C)}{\partial H} x + \tag{4.30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(\alpha_H H(t-\tau) - \theta_C C - \delta_C C)}{\partial C} y + \\
& \frac{\partial(\alpha_H H(t-\tau) - \theta_C C - \delta_C C)}{\partial R} z \\
\Leftrightarrow \frac{dy}{dt} &= \alpha_H x_\tau - \theta_C y \\
\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial f_5}{\partial S|_{E_0}} v + \frac{\partial f_5}{\partial I|_{E_0}} w + \frac{\partial f_5}{\partial H|_{E_0}} x + \frac{\partial f_5}{\partial C|_{E_0}} y + \frac{\partial f_5}{\partial R|_{E_0}} z \\
\Leftrightarrow \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial(\gamma I + \theta_H H + \theta_C C - \mu_R R)}{\partial S} v + \\
& \frac{\partial(\gamma I + \theta_H H + \theta_C C - \mu_R R)}{\partial I} w + \\
& \frac{\partial(\gamma I + \theta_H H + \theta_C C - \mu_R R)}{\partial H} x + \\
& \frac{\partial(\gamma I + \theta_H H + \theta_C C - \mu_R R)}{\partial C} y + \\
& \frac{\partial(\gamma I + \theta_H H + \theta_C C - \mu_R R)}{\partial R} z \\
\Leftrightarrow \frac{dz}{dt} &= yw + \theta_H x + \theta_C y - \mu_R z \tag{4.31}
\end{aligned}$$

Persamaan (4.27), (4.28), (4.29), (4.30), (4.31) dapat ditulis ulang menjadi

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dt} &= -(\beta I_0 + \mu_S)v - \beta S_0 w \\
\frac{dw}{dt} &= \beta I_0 v + (\beta S_0 - (\gamma + \mu_I))w - \alpha_I w_\tau \\
\frac{dx}{dt} &= \alpha_I w_\tau - \theta_H x - \alpha_H x_\tau \\
\frac{dy}{dt} &= \alpha_H x_\tau - \theta_C y \\
\frac{dz}{dt} &= yw + \theta_H x + \theta_C y - \mu_R z
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Persamaan karakteristik dapat diperoleh dengan mengubah persamaan (4.32) ke dalam bentuk matriks, yaitu

$$\begin{bmatrix} \frac{dv}{dt} \\ \frac{dw}{dt} \\ \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta I_0 - \mu_S & -\beta S_0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta I_0 & \beta S_0 - \gamma - \mu_I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta_H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\theta_C & 0 \\ 0 & \gamma & \theta_H & \theta_C & -\mu_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_I & -\alpha_H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_\tau \\ w_\tau \\ x_\tau \\ y_\tau \\ z_\tau \end{bmatrix}$$

Misalkan $A = \begin{bmatrix} -\beta I_0 - \mu_S & -\beta S_0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta I_0 & \beta S_0 - \gamma - \mu_I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta_H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\theta_C & 0 \\ 0 & \gamma & \theta_H & \theta_C & -\mu_R \end{bmatrix}$ dan $B =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_I & -\alpha_H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ maka didapatkan matriks sebagai berikut}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dv}{dt} \\ \frac{dw}{dt} \\ \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} v_\tau \\ w_\tau \\ x_\tau \\ y_\tau \\ z_\tau \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Jika penyelesaian $v = c_1 e^{\lambda t}$, $w = c_2 e^{\lambda t}$, $x = c_3 e^{\lambda t}$, $y = c_4 e^{\lambda t}$, $z = c_5 e^{\lambda t}$ di mana c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 adalah konstanta, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \lambda c_1 e^{\lambda t} \\ \lambda c_2 e^{\lambda t} \\ \lambda c_3 e^{\lambda t} \\ \lambda c_4 e^{\lambda t} \\ \lambda c_5 e^{\lambda t} \end{bmatrix} &= \mathbf{A} \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda t} \\ c_2 e^{\lambda t} \\ c_3 e^{\lambda t} \\ c_4 e^{\lambda t} \\ c_5 e^{\lambda t} \end{bmatrix} + \mathbf{B} \begin{bmatrix} c_1 e^{-\lambda \tau} \\ c_2 e^{-\lambda \tau} \\ c_3 e^{-\lambda \tau} \\ c_4 e^{-\lambda \tau} \\ c_5 e^{-\lambda \tau} \end{bmatrix} \\
\lambda \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} &= \mathbf{A} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} + \mathbf{B} e^{-\lambda \tau} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} \\
[\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{B} e^{-\lambda \tau}] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.35}
\end{aligned}$$

Misalkan $\mathbf{J}_{E_0} = [\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{B} e^{-\lambda \tau}]$, maka persamaan (4.35) menjadi

$$\mathbf{J}_{E_0} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.36}$$

Persamaan (4.36) memiliki solusi jika determinan matriks \mathbf{J}_{E_0} bernilai nol, yaitu

$$\begin{aligned}
|[\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{B} e^{-\lambda \tau}]| &= 0 \\
\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -\beta I_0 - \mu_S & -\beta S_0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta I_0 & \beta S_0 - \gamma - \mu_I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta_H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\theta_C & 0 \\ 0 & \gamma & \theta_H & \theta_C & -\mu_R \end{vmatrix} \\
- e^{-\lambda \tau} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_I & -\alpha_H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} &= 0 \\
\begin{vmatrix} \lambda + \beta I_0 + \mu_S & \beta S_0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta I_0 & \lambda - \beta S_0 + \gamma + \mu_I + \alpha_I e^{-\lambda \tau} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_I e^{-\lambda \tau} & \lambda + \theta_H + \alpha_H e^{-\lambda \tau} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_H e^{-\lambda \tau} & \lambda + \theta_C + \delta_C & 0 \\ 0 & -\gamma & -\theta_H & -\theta_C & \lambda + \mu_R \end{vmatrix} &= 0 \tag{4.37}
\end{aligned}$$

Persamaan (4.37) merupakan hasil linierisasi di sekitar titik kesetimbangan bebas penyakit dari sistem persamaan nonlinier (4.24).

Kemudian dengan cara yang sama diperoleh linierisasi sistem persamaan nonlinier (4.24) di sekitar titik kesetimbangan endemik, yaitu

$$J_{E_1} = \begin{vmatrix} \lambda + \beta I^* + \mu_S & \beta S^* & 0 & 0 & 0 \\ -\beta I^* & \lambda - \beta S^* + \gamma + \mu_I + \alpha_I e^{-\lambda\tau} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_I e^{-\lambda\tau} & \lambda + \theta_H + \alpha_H e^{-\lambda\tau} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_H e^{-\lambda\tau} & \lambda + \theta_C + \delta_C & 0 \\ 0 & -\gamma & -\theta_H & -\theta_C & \lambda + \mu_R \end{vmatrix} \quad (4.38)$$

$$= 0$$

Persamaan (4.37) dan (4.38) digunakan untuk menganalisis kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik. Terlebih dahulu akan dianalisis kestabilan lokal titik kesetimbangan bebas penyakit sebagai berikut:

b. Analisis Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Titik kesetimbangan bebas penyakit pada sistem persamaan (2.6) disebut stabil asimtotik lokal $\forall \tau$ di Ω_2 jika $R_0 < 1$, dan tidak stabil jika $R_0 > 1$.

Substitusikan $E_0 = (S_0, I_0, H_0, C_0, R_0)$ ke dalam persamaan (4.37), diperoleh

$$J_{E_0} = \begin{vmatrix} \lambda + \mu_S & \frac{\beta\Lambda}{\mu_S} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - \frac{\beta\Lambda}{\mu_S} + \gamma + \mu_I + \alpha_I e^{-\lambda\tau} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_I e^{-\lambda\tau} & \lambda + \theta_H + \alpha_H e^{-\lambda\tau} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_H e^{-\lambda\tau} & \lambda + \theta_C + \delta_C & 0 \\ 0 & -\gamma & -\theta_H & -\theta_C & \lambda + \mu_R \end{vmatrix} \quad (4.39)$$

$$= 0$$

Misalkan $\tau = 0$, maka persamaan karakteristik yang diperoleh adalah

$$a_0 \lambda^5 + a_1 \lambda^4 + a_2 \lambda^3 + a_3 \lambda^2 + a_4 \lambda + a_5 = 0 \quad (4.40)$$

di mana

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = \frac{1}{\mu_S} (\mu_I \mu_S + \mu_R \mu_S + \mu_S^2 + \mu_S \gamma + \mu_S \alpha_H + \mu_S \alpha_I + \mu_S \delta_C + \mu_S \theta_C + \mu_S \theta_H - \Lambda \beta)$$

$$\begin{aligned}
a_2 = \frac{1}{\mu_S} & (\mu_I \mu_R \mu_S + \mu_I \mu_S^2 + \mu_I \mu_S \alpha_H + \mu_I \mu_S \delta_C + \mu_I \mu_S \theta_C + \mu_I \mu_S \theta_H + \mu_R \mu_S^2 \\
& + \mu_R \mu_S \gamma + \mu_R \mu_S \alpha_H + \mu_R \mu_S \alpha_I + \mu_R \mu_S \delta_C + \mu_R \mu_S \theta_C + \mu_R \mu_S \theta_H \\
& - \mu_R \Lambda \beta + \mu_S^2 \gamma + \mu_S^2 \alpha_H + \mu_S^2 \alpha_I + \mu_S^2 \delta_C + \mu_S^2 \theta_C + \mu_S^2 \theta_H - \mu_S \Lambda \beta \\
& + \mu_S \gamma \alpha_H + \mu_S \gamma \delta_C + \mu_S \gamma \theta_C + \mu_S \gamma \theta_H + \mu_S \alpha_H \alpha_I + \mu_S \alpha_H \delta_C \\
& + \mu_S \alpha_H \theta_C + \mu_S \alpha_I \delta_C + \mu_S \alpha_I \theta_C + \mu_S \alpha_I \theta_H + \mu_S \delta_C \theta_H + \mu_S \theta_C \theta_H \\
& - \Lambda \beta \alpha_H - \Lambda \beta \delta_C - \Lambda \beta \theta_C - \Lambda \beta \theta_H)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_3 = \frac{1}{\mu_S} & (\mu_I \mu_S \alpha_H \delta_C + \mu_I \mu_S \theta_H \delta_C - \mu_S \Lambda \beta \delta_C + \mu_S \alpha_H \alpha_I \delta_C + \mu_S \alpha_I \delta_C \theta_H \\
& - \Lambda \beta \alpha_H \delta_C - \Lambda \beta \delta_C \theta_H + \mu_I \mu_S \alpha_H \theta_C + \mu_I \mu_S \theta_C \theta_H - \mu_S \Lambda \beta \theta_C \\
& + \mu_S \alpha_H \alpha_I \theta_C + \mu_S \alpha_I \theta_C \theta_H - \Lambda \beta \alpha_H \theta_C - \Lambda \beta \theta_C \theta_H + \mu_R \mu_I \mu_S \alpha_H \\
& + \mu_R \mu_I \mu_S \delta_C + \mu_R \mu_I \mu_S \theta_C + \mu_R \mu_I \mu_S \theta_H - \mu_R \mu_S \Lambda \beta + \mu_R \mu_S \alpha_H \alpha_I \\
& + \mu_R \mu_S \alpha_H \delta_C + \mu_R \mu_S \alpha_H \theta_C + \mu_R \mu_S \alpha_I \delta_C + \mu_R \mu_S \alpha_I \theta_C + \mu_I \mu_S^2 \delta_C \\
& + \mu_R \mu_S \alpha_I \theta_H + \mu_R \mu_S \delta_C \theta_H + \mu_R \mu_S \theta_C \theta_H - \mu_R \Lambda \beta \alpha_H - \mu_R \Lambda \beta \delta_C \\
& - \mu_R \Lambda \beta \theta_C - \mu_R \Lambda \beta \theta_H - \mu_S \Lambda \beta \alpha_H - \mu_S \Lambda \beta \theta_H + \gamma \mu_S \alpha_H \delta_C \\
& + \gamma \mu_S \delta_C \theta_H + \gamma \mu_S \alpha_H \theta_C + \gamma \mu_S \theta_C \theta_H + \mu_R \gamma \mu_S \alpha_H + \mu_R \gamma \mu_S \delta_C \\
& + \mu_R \gamma \mu_S \theta_C + \mu_R \gamma \mu_S \theta_H + \mu_S^2 \alpha_H \delta_C + \mu_S^2 \alpha_I \delta_C + \mu_S^2 \delta_C \theta_H \\
& + \mu_I \mu_S^2 \theta_C + \mu_S^2 \alpha_H \theta_C + \mu_S^2 \alpha_I \theta_C + \mu_S^2 \theta_C \theta_H + \mu_R \mu_S^2 \alpha_H + \mu_R \mu_I \mu_S^2 \\
& + \mu_R \mu_S^2 \alpha_I + \mu_R \mu_S^2 \delta_C + \mu_R \mu_S^2 \theta_C + \mu_R \mu_S^2 \theta_H + \mu_I \mu_S^2 \alpha_H + \mu_I \mu_S^2 \theta_H \\
& + \mu_S^2 \alpha_H \alpha_I + \mu_S^2 \alpha_I \theta_H + \mu_R \gamma \mu_S^2 + \gamma \mu_S^2 \alpha_H + \gamma \mu_S^2 \theta_H + \gamma \mu_S^2 \theta_C \\
& + \gamma \mu_S^2 \delta_C)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_4 = \frac{1}{\mu_S} & (\mu_I \mu_S^2 \alpha_H \delta_C + \mu_I \mu_S^2 \delta_C \theta_H + \mu_S^2 \alpha_H \alpha_I \delta_C + \mu_S^2 \alpha_I \delta_C \theta_H + \mu_I \mu_S^2 \alpha_H \theta_C \\
& + \mu_I \mu_S^2 \theta_C \theta_H + \mu_S^2 \alpha_H \alpha_I \theta_C + \mu_S^2 \alpha_I \theta_C \theta_H + \mu_R \mu_I \mu_S^2 \alpha_H \\
& + \mu_R \mu_I \mu_S^2 \delta_C + \mu_R \mu_I \mu_S^2 \theta_C + \mu_R \mu_I \mu_S^2 \theta_H + \mu_R \mu_S^2 \alpha_H \alpha_I \\
& + \mu_R \mu_S^2 \alpha_H \delta_C + \mu_R \mu_S^2 \alpha_H \theta_C + \mu_R \mu_S^2 \delta_C \alpha_I + \mu_R \mu_S^2 \theta_C \alpha_I \\
& + \mu_R \mu_S^2 \theta_H \alpha_I + \mu_R \mu_S^2 \theta_H \delta_C + \mu_R \mu_S^2 \theta_H \theta_C + \mu_R \gamma \mu_S^2 \alpha_H \\
& + \mu_R \gamma \mu_S^2 \theta_C + \mu_R \gamma \mu_S^2 \theta_H + \gamma \mu_S^2 \alpha_H \delta_C + \gamma \mu_S^2 \delta_C \theta_H + \gamma \mu_S^2 \alpha_H \theta_C \\
& + \gamma \mu_S^2 \theta_C \theta_H - \mu_S \Lambda \beta \alpha_H \theta_C - \mu_S \Lambda \beta \theta_C \theta_H + \mu_R \mu_I \mu_S \alpha_H \delta_C \\
& + \mu_R \mu_I \mu_S \delta_C \theta_H - \mu_R \mu_S \Lambda \beta \delta_C + \mu_R \mu_S \alpha_H \alpha_I \delta_C + \mu_R \mu_S \alpha_I \delta_C \theta_H \\
& - \mu_R \Lambda \beta \alpha_H \delta_C - \mu_R \Lambda \beta \delta_C \theta_H + \mu_R \mu_I \mu_S \alpha_H \theta_C + \mu_R \mu_I \mu_S \theta_C \theta_H \\
& - \mu_R \mu_S \Lambda \beta \alpha_H - \mu_R \mu_S \Lambda \beta \theta_C - \mu_R \mu_S \Lambda \beta \theta_H + \mu_R \mu_S \alpha_H \alpha_I \theta_C \\
& + \mu_R \mu_S \alpha_I \theta_C \theta_H - \mu_R \Lambda \beta \alpha_H \theta_C - \mu_R \Lambda \beta \theta_C \theta_H + \mu_R \gamma \mu_S \alpha_H \delta_C \\
& + \mu_R \gamma \mu_S \theta_H \delta_C + \mu_R \gamma \mu_S \alpha_H \theta_C + \mu_R \gamma \mu_S \theta_H \theta_C - \mu_S \Lambda \beta \alpha_H \delta_C \\
& - \mu_S \Lambda \beta \delta_C \theta_H)
\end{aligned}$$

$$a_5 = (\mu_I \mu_S + \mu_S \gamma + \mu_S \alpha_I - \Lambda \beta)(\alpha_H + \theta_H)(\delta_C + \theta_C) \mu_R$$

Perhitungan $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ dapat dilihat pada Lampiran 2. Perhatikan bahwa nilai akar-akar persamaan karakteristik (4.40) dapat dianalisis kestabilannya jika memenuhi syarat kestabilan berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz untuk $n = 5$, yaitu

$$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 > 0$$

Selanjutnya adalah menentukan nilai akar-akar persamaan karakteristik (4.40) berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz. Substitusikan nilai parameter pada Tabel 2.2 untuk melihat kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit secara khusus, sehingga diperoleh

$$a_0 = 1 > 0$$

$$a_1 = -0.07308 < 0$$

$$a_2 = -0.003429302 < 0$$

$$a_3 = -0.000021036792 < 0$$

$$a_4 = -4.0232462 \times 10^{-8} < 0$$

$$a_5 = -2.2550892 \times 10^{-11} < 0$$

Berdasarkan hasil tersebut dapat diketahui bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat tidak stabil, karena terdapat kriteria Routh-Hurwitz yang tidak terpenuhi yaitu $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 < 0$. Perubahan tanda dari positif atau sebaliknya pada kriteria Routh-Hurwitz menunjukkan banyaknya akar-akar positif dari persamaan karakteristik. Selanjutnya akan dihitung nilai eigen dari persamaan karakteristik (4.40) dengan menggunakan nilai-nilai parameter pada Tabel 2.2, diperoleh

$$\lambda_1 = -0.001$$

$$\lambda_2 = -0.002$$

$$\lambda_3 = -0.0039$$

$$\lambda_4 = -0.02702$$

$$\lambda_5 = 0.107$$

Perhitungan nilai eigen dapat dilihat pada Lampiran 3. Berdasarkan hasil tersebut dapat diketahui bahwa terdapat nilai eigen yang memiliki satu akar real positif yaitu $\lambda_5 > 0$ dan empat akar negatif yaitu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 < 0$. Dengan demikian, sifat titik kesetimbangan bebas penyakit pada populasi SIHCR adalah tidak stabil. Berikutnya dilakukan analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan endemik sebagai berikut:

c. Analisis Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Endemik

Titik kesetimbangan endemik pada sistem persamaan (2.6) disebut stabil asimtotik lokal untuk setiap τ di Ω_2 jika $R_0 > 1$, dan tidak stabil jika $R_0 < 1$.

Substitusikan $E_1 = (S^*, I^*, H^*, C^*, R^*)$ ke dalam persamaan (4.38), diperoleh

$$J_{E_1} = \begin{vmatrix} \lambda + A_1 + \mu_S & \alpha_I + \gamma + \mu_I & 0 & 0 & 0 \\ -A_1 & \lambda - \alpha_I + \alpha_I e^{-\lambda\tau} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_I e^{-\lambda\tau} & \lambda + \theta_H + \alpha_H e^{-\lambda\tau} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_H e^{-\lambda\tau} & \lambda + \theta_C + \delta_C & 0 \\ 0 & -\gamma & -\theta_H & -\theta_C & \lambda + \mu_R \end{vmatrix} \quad (4.41)$$

$$= 0$$

dengan

$$A_1 = \frac{\Lambda\beta - \mu_S(\alpha_I + \gamma + \mu_I)}{(\alpha_I + \gamma + \mu_I)}$$

Pertama dicari kestabilan lokal titik kesetimbangan endemik ketika $\tau = 0$.

Persamaan karakteristik yang diperoleh dari matriks (4.41) adalah

$$b_0\lambda^5 + b_1\lambda^4 + b_2\lambda^3 + b_3\lambda^2 + b_4\lambda + b_5 = 0 \quad (4.42)$$

dengan bantuan *software Maple* yang disajikan pada Lampiran 2, diperoleh

$$b_0 = 1$$

$$b_1 = \frac{1}{\alpha_I + \gamma + \mu_I} (\mu_I\mu_R + \mu_I\alpha_H + \mu_I\delta_C + \mu_I\theta_C + \mu_I\theta_H + \mu_R\gamma + \mu_R\alpha_I + \Lambda\beta$$

$$+ \gamma\alpha_H + \gamma\delta_C + \gamma\theta_C + \gamma\theta_H + \alpha_H\alpha_I + \alpha_I\delta_C + \alpha_I\theta_C + \alpha_I\theta_H)$$

$$b_2 = \frac{-1}{\alpha_I + \gamma + \mu_I} (\mu_I^2\mu_S - \mu_I\mu_R\alpha_H - \mu_I\mu_R\delta_C - \mu_I\mu_R\theta_C - \mu_I\mu_R\theta_H + 2\mu_I\mu_S\gamma$$

$$+ 2\mu_I\mu_S\alpha_I - \mu_I\Lambda\beta - \mu_I\alpha_H\delta_C - \mu_I\alpha_H\theta_C - \mu_I\delta_C\theta_H - \mu_I\theta_C\theta_H$$

$$- \mu_R\Lambda\beta - \mu_R\gamma\alpha_H - \mu_R\gamma\delta_C - \mu_R\gamma\theta_C - \mu_R\gamma\theta_H - \mu_R\alpha_H\alpha_I$$

$$- \mu_R\alpha_I\delta_C - \mu_R\alpha_I\theta_C - \mu_R\alpha_I\theta_H + \mu_S^2\gamma + 2\mu_S\gamma\alpha_I + \mu_S\alpha_I^2 - \Lambda\beta\gamma$$

$$- \Lambda\beta\alpha_H - \Lambda\beta\alpha_I - \Lambda\beta\delta_C - \Lambda\beta\theta_C - \Lambda\beta\theta_H - \gamma\alpha_H\delta_C - \gamma\theta_H\delta_C$$

$$- \gamma\alpha_H\theta_C - \gamma\theta_H\theta_C - \alpha_H\alpha_I\delta_C - \alpha_I\delta_C\theta_H - \alpha_H\alpha_I\theta_C - \alpha_I\theta_C\theta_H)$$

$$\begin{aligned}
b_3 = & \frac{-1}{\alpha_I + \gamma + \mu_I} (2\mu_I\mu_S\alpha_H\alpha_I + 2\mu_I\mu_R\mu_S\alpha_I + 2\mu_S\gamma\mu_I\alpha_H + 2\mu_S\gamma\alpha_I\alpha_H \\
& + 2\mu_S\gamma\mu_I\theta_H + 2\mu_S\gamma\alpha_I\theta_H + 2\mu_S\gamma\mu_I\delta_C + 2\mu_S\gamma\alpha_I\delta_C - \alpha_H\Lambda\beta\gamma \\
& + 2\mu_S\gamma\mu_I\theta_C + 2\mu_S\gamma\alpha_I\theta_C + 2\mu_S\gamma\mu_I\mu_R + 2\mu_S\gamma\alpha_I\mu_R - \theta_H\Lambda\beta\gamma \\
& + 2\mu_I\mu_S\theta_H\alpha_I + 2\mu_I\mu_S\delta_C\alpha_I + 2\mu_I\mu_S\theta_C\alpha_I - \mu_I\mu_R\delta_C\alpha_H \\
& - \mu_I\mu_R\delta_C\theta_H - \mu_I\mu_R\theta_C\alpha_H - \mu_I\mu_R\theta_C\theta_H - \delta_C\Lambda\beta\gamma - \theta_C\Lambda\beta\gamma \\
& - \mu_R\alpha_H\alpha_I\delta_C - \mu_I\Lambda\beta\alpha_H - \mu_R\alpha_I\delta_C\theta_H - \mu_R\alpha_H\alpha_I\theta_C - \mu_R\Lambda\beta\gamma \\
& - \gamma\mu_R\alpha_H\delta_C - \gamma\mu_R\theta_H\delta_C - \gamma\mu_R\alpha_H\theta_C - \gamma\mu_R\theta_H\theta_C - \Lambda\beta\alpha_H\alpha_I \\
& - \mu_I\Lambda\beta\theta_H - \Lambda\beta\theta_H\alpha_I - \mu_I\Lambda\beta\delta_C - \Lambda\beta\delta_C\alpha_I - \mu_I\Lambda\beta\theta_C \\
& - \Lambda\beta\theta_C\alpha_I - \mu_I\mu_R\Lambda\beta - \mu_R\Lambda\beta\alpha_I + \mu_I^2\mu_S\delta_C + \alpha_I^2\mu_S\delta_C \\
& - \mu_R\alpha_I\theta_C\theta_H - \mu_R\Lambda\beta\alpha_H - \mu_R\Lambda\beta\delta_C - \mu_R\Lambda\beta\theta_C - \mu_R\Lambda\beta\theta_H \\
& - \Lambda\beta\alpha_H\delta_C - \Lambda\beta\theta_H\delta_C - \Lambda\beta\alpha_H\theta_C - \Lambda\beta\theta_H\theta_C + \mu_I^2\mu_S\alpha_H \\
& + \alpha_I^2\mu_S\alpha_H + \mu_I^2\mu_S\theta_H + \alpha_I^2\mu_S\theta_H + \mu_I^2\mu_S\theta_C + \alpha_I^2\mu_S\theta_C + \mu_I^2\mu_S\mu_R \\
& + \alpha_I^2\mu_S\mu_R + \gamma^2\mu_S\alpha_H + \gamma^2\mu_S\theta_H + \gamma^2\mu_S\delta_C + \gamma^2\mu_S\theta_C \\
& + \gamma^2\mu_S\mu_R)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_4 = & \frac{-1}{\alpha_I + \gamma + \mu_I} (2\gamma\mu_I\mu_R\mu_S\alpha_H + 2\gamma\mu_I\mu_R\mu_S\delta_C + 2\gamma\mu_I\mu_R\mu_S\theta_C + 2\gamma\mu_S\alpha_I\theta_C\theta_H \\
& + 2\gamma\mu_I\mu_R\mu_S\theta_H + 2\gamma\mu_S\mu_I\alpha_H\delta_C + 2\gamma\mu_I\mu_S\delta_C\theta_H + 2\gamma\mu_S\mu_I\alpha_H\theta_C \\
& + 2\gamma\mu_I\mu_S\theta_C\theta_H + 2\gamma\mu_R\mu_S\alpha_H\alpha_I + 2\gamma\mu_R\mu_S\alpha_I\delta_C + 2\gamma\mu_R\mu_S\alpha_I\theta_C \\
& + 2\gamma\mu_R\mu_S\alpha_I\theta_H + 2\gamma\mu_S\alpha_I\alpha_H\delta_C + 2\gamma\mu_S\alpha_I\delta_C\theta_H + 2\gamma\mu_S\alpha_I\alpha_H\theta_C \\
& - \gamma\mu_R\Lambda\beta\alpha_H - \gamma\mu_R\Lambda\beta\theta_H + \gamma^2\mu_S\alpha_H\theta_C - \gamma\mu_R\Lambda\beta\theta_C \\
& - \gamma\Lambda\beta\alpha_H\delta_C - \gamma\Lambda\beta\theta_H\delta_C - \gamma\Lambda\beta\alpha_H\theta_C - \gamma\Lambda\beta\theta_H\theta_C + \gamma^2\mu_S\mu_R\alpha_H \\
& + \gamma^2\mu_R\mu_S\delta_C + \gamma^2\mu_R\mu_S\theta_C + \gamma^2\mu_R\mu_S\theta_H + \gamma^2\mu_S\alpha_H\delta_C \\
& + 2\mu_S\mu_I\mu_R\alpha_I\alpha_H + \gamma^2\mu_S\theta_H\delta_C - \gamma\mu_R\Lambda\beta\delta_C + 2\mu_S\mu_I\mu_R\alpha_I\delta_C \\
& + 2\mu_S\mu_I\mu_R\alpha_I\theta_C + \gamma^2\mu_S\theta_H\theta_C + \mu_I^2\mu_R\mu_S\alpha_H + \mu_I^2\mu_R\mu_S\delta_C \\
& + 2\mu_S\mu_I\mu_R\alpha_I\theta_H + \mu_I^2\mu_R\mu_S\theta_C + \mu_I^2\mu_S\mu_R\theta_H + \mu_I^2\mu_S\alpha_H\delta_C \\
& + 2\mu_S\mu_I\alpha_I\alpha_H\delta_C + \mu_I^2\mu_S\theta_H\delta_C + \mu_I^2\mu_S\alpha_H\theta_C + \mu_I^2\mu_S\theta_H\theta_C \\
& + 2\mu_S\mu_I\alpha_I\theta_H\delta_C + \alpha_I^2\mu_R\mu_S\alpha_H + \alpha_I^2\mu_R\mu_S\delta_C + 2\mu_S\mu_I\alpha_I\alpha_H\theta_C \\
& + 2\mu_S\mu_I\alpha_I\theta_H\theta_C + \alpha_I^2\mu_R\mu_S\theta_C + \alpha_I^2\mu_S\mu_R\theta_H + \alpha_I^2\mu_S\alpha_H\delta_C \\
& - \mu_I\mu_R\Lambda\beta\alpha_H + \alpha_I^2\mu_S\theta_H\delta_C + \alpha_I^2\mu_S\alpha_H\theta_C + \alpha_I^2\mu_S\theta_H\theta_C \\
& - \mu_I\mu_R\Lambda\beta\theta_H - \mu_I\alpha_H\Lambda\beta\delta_C - \mu_I\mu_R\Lambda\beta\delta_C - \mu_I\mu_R\Lambda\beta\theta_C \\
& - \mu_I\alpha_H\Lambda\beta\theta_C - \mu_I\Lambda\beta\theta_H\delta_C - \mu_I\Lambda\beta\theta_H\theta_C - \mu_R\Lambda\beta\alpha_H\alpha_I \\
& - \mu_R\Lambda\beta\delta_C\alpha_I - \mu_R\Lambda\beta\theta_C\alpha_I - \mu_R\Lambda\beta\theta_H\alpha_I - \Lambda\beta\alpha_H\alpha_I\delta_C \\
& - \Lambda\beta\delta_C\alpha_I\theta_H - \mu_R\Lambda\beta\delta_C\alpha_H - \mu_R\Lambda\beta\delta_C\theta_H - \Lambda\beta\alpha_H\alpha_I\theta_C \\
& - \Lambda\beta\theta_C\alpha_I\theta_H - \mu_R\Lambda\beta\theta_C\alpha_H - \mu_R\Lambda\beta\theta_C\theta_H)
\end{aligned}$$

$$b_5 = -(\mu_I\mu_S + \mu_S\gamma + \mu_S\alpha_I - \Lambda\beta)(\alpha_H + \theta_H)(\delta_C + \theta_C)\mu_R$$

Perhatikan bahwa nilai akar-akar persamaan karakteristik (4.42) dapat dianalisis kestabilannya jika memenuhi syarat kestabilan berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz untuk $n = 5$, yaitu

- i. $b_0 > 0$
- ii. $b_1 > 0$
- iii. $b_1b_2 - b_0b_3 > 0$
- iv. $c_1 > 0$
- v. $d_1 > 0$

di mana

$$c_1 = \frac{(b_1b_2 - b_0b_3)b_3 - (b_1b_4 - b_0b_5)b_1}{b_1b_2 - b_0b_3}$$

$$d_1 = \frac{(b_1b_4 - b_0b_5)c_1 - \frac{(b_1b_2 - b_0b_3)b_5}{b_1b_2 - b_0b_3}}{c_1}$$

Selanjutnya adalah menentukan nilai akar-akar persamaan karakteristik (4.42) berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz. Substitusikan nilai parameter pada Tabel 2.2 untuk melihat kestabilan titik kesetimbangan endemik secara khusus, sehingga diperoleh

$$b_0 = 1 > 0$$

$$b_1 = 0.0356184127 > 0$$

$$b_1b_2 - b_0b_3 = 0.000008746836505 > 0$$

$$c_1 = 0.000001598597917 > 0$$

$$d_1 = 5.116130591 \times 10^{-10} > 0$$

Berdasarkan hasil tersebut dapat diketahui bahwa titik kesetimbangan endemik bersifat stabil, karena memenuhi kriteria Routh-Hurwitz. Selanjutnya akan dihitung nilai eigen dari persamaan karakteristik (4.42) dengan menggunakan nilai-nilai parameter pada Tabel 2.2, sehingga diperoleh

$$\lambda_1 = -0.002$$

$$\lambda_2 = -0.0039$$

$$\lambda_3 = -0.02702$$

$$\lambda_4 = -0.001349206349 + 0.0102557126618201 I$$

$$\lambda_5 = -0.001349206349 - 0.0102557126618201 I$$

Perhitungan nilai eigen dapat dilihat pada Lampiran 3. Berdasarkan hasil tersebut dapat diketahui bahwa semua nilai eigen memiliki bagian real negatif. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa sifat titik kesetimbangan endemik pada populasi SIHCR ketika $\tau = 0$ adalah stabil asimtotik lokal.

Selanjutnya akan dicari kestabilan lokal titik kesetimbangan endemik ketika $\tau \neq 0$ atau ($\tau > 0$). Langkah awal adalah mencari determinan dari matriks (4.41) dengan menggunakan metode ekspansi kofaktor, diperoleh

$$(\lambda + \mu_R) \begin{vmatrix} \lambda + A_1 + \mu_S & \alpha_I + \gamma + \mu_I & 0 & 0 \\ -A_1 & \lambda - \alpha_I + \alpha_I e^{-\lambda\tau} & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_I e^{-\lambda\tau} & \lambda + \theta_H + \alpha_H e^{-\lambda\tau} & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_H e^{-\lambda\tau} & \lambda + \theta_C + \delta_C \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda + \mu_R) \left[(\lambda + \theta_C + \delta_C) \begin{vmatrix} \lambda + A_1 + \mu_S & \alpha_I + \gamma + \mu_I & 0 \\ -A_1 & \lambda - \alpha_I + \alpha_I e^{-\lambda\tau} & 0 \\ 0 & -\alpha_I e^{-\lambda\tau} & \lambda + \theta_H + \alpha_H e^{-\lambda\tau} \end{vmatrix} \right] = 0$$

$$(\lambda + \mu_R) \left[(\lambda + \theta_C + \delta_C) \left((\lambda + A_1 + \mu_S) \begin{vmatrix} \lambda - \alpha_I + \alpha_I e^{-\lambda\tau} & 0 \\ -\alpha_I e^{-\lambda\tau} & \lambda + \theta_H + \alpha_H e^{-\lambda\tau} \end{vmatrix} \right. \right.$$

$$\left. \left. - (-A_1) \begin{vmatrix} \alpha_I + \gamma + \mu_I & 0 \\ -\alpha_I e^{-\lambda\tau} & \lambda + \theta_H + \alpha_H e^{-\lambda\tau} \end{vmatrix} \right) \right] = 0$$

di mana

$$A_1 = \frac{\Lambda\beta - \mu_S(\alpha_I + \gamma + \mu_I)}{(\alpha_I + \gamma + \mu_I)}$$

Dari ekspansi kofaktor tersebut diperoleh nilai eigen sebagai berikut

$$\lambda_1 = -A_1 - \mu_S, \lambda_2 = -\mu_R, \lambda_3 = -\theta_C - \delta_C$$

Jika disubstitusikan nilai-nilai parameter pada Tabel 2.2, maka diperoleh

$$\lambda_1 = -0.002698412698$$

$$\lambda_2 = -0.002$$

$$\lambda_3 = -0.0039$$

dapat dilihat bahwa nilai eigen λ_1, λ_2 dan λ_3 memiliki bagian real negatif. Dua nilai eigen lainnya dicari dengan menggunakan persamaan berikut

$$\lambda^2 + 0.01702\lambda + 0.01e^{-\lambda\tau} - 0.0003 + 0.0002702e^{-\lambda\tau} = 0 \quad (4.43)$$

Jika $\tau = 0$, maka sistem persamaan (2.6) akan menjadi persamaan diferensial biasa yang jenis kestabilannya dapat dianalisis menggunakan kriteria berdasarkan Tabel 2.3. Menurut (Forde, 2005), jika $\tau \neq 0$ maka akar karakteristik λ akan mengalami perubahan. Misalkan $\lambda = \mu \pm i\omega$, maka berdasarkan kriteria kestabilan pada Tabel 2.3 yakni sistem persamaan (2.6) bersifat stabil jika $\mu < 0$ dan tidak stabil jika $\mu > 0$. Penambahan waktu tunda pada sistem persamaan (2.6) mengakibatkan adanya nilai kritis waktu tunda. Nilai kritis menyebabkan terjadinya transisi dari $\mu < 0$ ke $\mu > 0$. Dengan demikian, untuk mengamati terjadinya transisi tersebut maka dipilih $\mu = 0$. Oleh karena itu, akar persamaan karakteristik dari persamaan karakteristik (4.43) berbentuk kompleks murni di mana bagian real dari akar persamaan adalah nol.

Berdasarkan penjelasan tersebut, solusi persamaan karakteristik (4.43) dari linierisasi sistem (4.24) berbentuk imajiner murni yaitu $\lambda = i\omega$ dengan $\omega > 0$ dan $i = \sqrt{-1}$. Kemudian substitusikan $\lambda = i\omega$ ke dalam persamaan karakteristik (4.43), diperoleh

$$(i\omega)^2 + 0.01702i\omega + 0.01i\omega e^{-(i\omega)\tau} - 0.0003 + 0.0002702e^{-(i\omega)\tau} = 0 \quad (4.44)$$

Dengan mengganti suku eksponensial menjadi trigonometri $e^{-(i\omega)\tau} = \cos(\omega\tau) - i \sin(\omega\tau)$, maka persamaan (4.44) menjadi

$$\begin{aligned}
& -\omega^2 + 0.01702i\omega + 0.01i\omega(\cos(\omega\tau) - i\sin(\omega\tau)) - 0.0003 \\
& \quad + 0.0002702(\cos(\omega\tau) - i\sin(\omega\tau)) = 0 \\
& -\omega^2 + 0.01702i\omega + 0.01i\omega\cos(\omega\tau) + 0.01\omega\sin(\omega\tau) - 0.0003 \\
& \quad + 0.0002702\cos(\omega\tau) - 0.0002702i\sin(\omega\tau) = 0 \\
& (-\omega^2 + 0.01\omega\sin(\omega\tau) - 0.0003 + 0.0002702\cos(\omega\tau)) \\
& \quad + i(0.01702\omega + 0.01\omega\cos(\omega\tau) - 0.0002702\sin(\omega\tau)) = 0
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Bagian real dari ruas kiri persamaan (4.45) harus sama dengan nol, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
& -\omega^2 + 0.01\omega\sin(\omega\tau) - 0.0003 + 0.0002702\cos(\omega\tau) = 0 \\
& \Leftrightarrow -\omega^2 - 0.0003 = -0.01\omega\sin(\omega\tau) - 0.0002702\cos(\omega\tau)
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Bagian imajiner dari ruas kiri persamaan (4.45) harus sama dengan nol, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
& 0.01702\omega + 0.01\omega\cos(\omega\tau) - 0.0002702\sin(\omega\tau) = 0 \\
& \Leftrightarrow 0.01702\omega = -0.01\omega\cos(\omega\tau) + 0.0002702\sin(\omega\tau)
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Parameter ω dan τ harus memenuhi persamaan (4.46) dan (4.47). Untuk menyederhanakan, maka dilakukan dengan cara mengeliminasi fungsi trigonometri terhadap $\sin(\omega\tau)$ dan $\cos(\omega\tau)$. Kuadrat dari persamaan (4.46) dan (4.47) adalah

$$(-\omega^2 - 0.0003)^2 = (-0.01\omega\sin(\omega\tau) - 0.0002702\cos(\omega\tau))^2 \tag{4.48}$$

$$(0.01702\omega)^2 = (-0.01\omega\cos(\omega\tau) + 0.0002702\sin(\omega\tau))^2 \tag{4.49}$$

Hasil pengkuadratan dari persamaan (4.48) dan (4.49) adalah

$$\begin{aligned}
\omega^4 + 0.0006\omega^2 + 0.0003^2 &= 0.01^2\omega^2\sin^2(\omega\tau) + 0.0002702^2\cos^2(\omega\tau) \\
& \quad + 0.000005404\omega\sin(\omega\tau)\cos(\omega\tau)
\end{aligned} \tag{4.50}$$

$$0.01702^2 \omega^2 = 0.01^2 \omega^2 \cos^2(\omega\tau) + 0.0002702^2 \sin^2(\omega\tau) - 0.000005404 \omega \sin(\omega\tau) \cos(\omega\tau) \quad (4.51)$$

Untuk mengeliminasi fungsi trigonometri pada kedua persamaan tersebut, hasil pengkuadratan dari persamaan (4.50) dan (4.51) dijumlahkan sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \omega^4 + (0.01702^2 + 0.0006)\omega^2 + 0.0003^2 &= 0.01^2 \omega^2 \sin^2(\omega\tau) \\ &+ 0.0002702^2 \cos^2(\omega\tau) + 0.01^2 \omega^2 \cos^2(\omega\tau) + 0.0002702^2 \sin^2(\omega\tau) \\ \omega^4 + (0.01702^2 + 0.0006)\omega^2 + 0.0003^2 &= 0.01^2 \omega^2 (\sin^2(\omega\tau) + \cos^2(\omega\tau)) \\ &+ 0.0002702^2 (\sin^2(\omega\tau) + \cos^2(\omega\tau)) \end{aligned} \quad (4.52)$$

Dengan menggunakan identitas trigonometri $\sin^2(\omega\tau) + \cos^2(\omega\tau) = 1$, maka diperoleh hasil

$$\omega^4 + (0.01702^2 + 0.0006)\omega^2 + 0.0003^2 = 0.01^2 \omega^2 + 0.0002702^2$$

Dengan demikian diperoleh polinomial derajat empat sebagai berikut

$$\begin{aligned} \omega^4 + (0.01702^2 + 0.0006)\omega^2 + 0.0003^2 &= 0.01^2 \omega^2 + 0.0002702^2 \\ \Leftrightarrow \omega^4 + (0.01702^2 - 0.01^2 + 0.0006)\omega^2 + 0.0003^2 - 0.0002702^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \omega^4 + 0.00079\omega^2 + 1.699 \times 10^{-8} &= 0 \end{aligned} \quad (4.53)$$

Langkah selanjutnya adalah mencari akar persamaan (4.53). Dengan bantuan *software* Maple yang disajikan pada Lampiran 3, diperoleh nilai ω sebagai berikut:

$$\omega_1 = 0.02770455301$$

$$\omega_2 = -0.02770455301$$

$$\omega_3 = 0.004705118773$$

$$\omega_4 = -0.004705118773$$

Perhatikan bahwa akar persamaan karakteristik berbentuk imajiner murni yaitu

$\lambda = i\omega$, sehingga diperoleh nilai λ sebagai berikut:

$$\lambda_1 = 0.02770455301 I$$

$$\lambda_2 = -0.02770455301 I$$

$$\lambda_3 = 0.004705118773 I$$

$$\lambda_4 = -0.004705118773 I$$

Kemudian mencari nilai waktu tunda τ dengan mensubstitusikan masing-masing nilai ω yang telah diperoleh ke dalam persamaan (4.46) dan (4.47).

Terlebih dahulu dicari nilai waktu tunda τ dengan mensubstitusikan masing-masing nilai ω ke dalam persamaan (4.46) sebagai berikut:

Substitusikan $\omega_1 = 0.02770455301$ ke dalam persamaan (4.46), diperoleh

$$\begin{aligned} 0.0004675422575 &= -0.0002770455301 \sin(0.02770455301\tau_1) \\ &\quad -0.0002702 \cos(0.02770455301\tau_1) \end{aligned} \quad (4.54)$$

Substitusikan $\omega_2 = -0.02770455301$ ke dalam persamaan (4.46), diperoleh

$$\begin{aligned} 0.0004675422575 &= 0.0002770455301 \sin(-0.02770455301\tau_2) \\ &\quad -0.0002702 \cos(-0.02770455301\tau_2) \end{aligned} \quad (4.55)$$

Substitusikan $\omega_3 = 0.004705118773$ ke dalam persamaan (4.46), diperoleh

$$\begin{aligned} 0.0002778618573 &= -0.00004705118773 \sin(0.004705118773\tau_3) \\ &\quad -0.0002702 \cos(0.004705118773\tau_3) \end{aligned} \quad (4.56)$$

Substitusikan $\omega_4 = -0.004705118773$ ke dalam persamaan (4.46), diperoleh

$$\begin{aligned} 0.0002778618573 &= 0.00004705118773 \sin(-0.004705118773\tau_4) \\ &\quad -0.0002702 \cos(-0.004705118773\tau_4) \end{aligned} \quad (4.57)$$

Selanjutnya dicari nilai waktu tunda τ dengan mensubstitusikan masing-masing nilai ω ke dalam persamaan (4.47) sebagai berikut:

Substitusikan $\omega_1 = 0.02770455301$ ke dalam persamaan (4.47), diperoleh

$$0.0004715314922 = -0.0002770455301 \cos(0.02770455301\tau_1) + 0.0002702 \sin(0.02770455301\tau_1) \quad (4.58)$$

Substitusikan $\omega_2 = -0.02770455301$ ke dalam persamaan (4.47), diperoleh

$$-0.0004715314922 = 0.0002770455301 \cos(-0.02770455301\tau_2) + 0.0002702 \sin(-0.02770455301\tau_2) \quad (4.59)$$

Substitusikan $\omega_3 = 0.004705118773$ ke dalam persamaan (4.47), diperoleh

$$0.00008008112152 = -0.00004705118773 \cos(0.004705118773\tau_3) + 0.0002702 \sin(0.004705118773\tau_3) \quad (4.60)$$

Substitusikan $\omega_4 = -0.004705118773$ ke dalam persamaan (4.47), diperoleh

$$-0.00008008112152 = 0.00004705118773 \cos(-0.004705118773\tau_4) + 0.0002702 \sin(-0.004705118773\tau_4) \quad (4.61)$$

Kemudian dengan menggunakan bantuan *software* Maple yang disajikan pada Lampiran 3, diperoleh nilai waktu tunda τ sebagai berikut:

Nilai waktu tunda dari persamaan (4.54) dan (4.58) berkaitan dengan ω_1 dan τ_1 dan nilai waktu tunda dari persamaan (4.55) dan (4.59) berkaitan dengan ω_2 dan τ_2 , setelah dilakukan perhitungan diperoleh

$$\tau_1 = \tau_2 = 177$$

Nilai waktu tunda dari persamaan (4.56) dan (4.60) berkaitan dengan ω_3 dan τ_3 dan nilai waktu tunda dari persamaan (4.57) dan (4.61) berkaitan dengan ω_4 dan τ_4 , setelah dilakukan perhitungan diperoleh

$$\tau_3 = \tau_4 = 100$$

Nilai waktu tunda yang telah diperoleh tidak digunakan ketika simulasi model karena memiliki nilai yang terlalu besar, sehingga membutuhkan spesifikasi *software* Matlab yang tinggi. Oleh karena itu, ketika simulasi akan digunakan

nilai waktu tunda yang kecil di mana akan dijelaskan pada pembahasan selanjutnya.

4.2 Simulasi Model SIHCR Tanpa dan Dengan Waktu Tunda

4.2.1 Simulasi Model SIHCR Dalam Kondisi Bebas Penyakit

Simulasi Model SIHCR dalam kondisi bebas penyakit dilakukan ketika bilangan reproduksi dasar $R_0 < 1$. Artinya, tingkat penyebaran penyakit semakin lambat sehingga mengakibatkan jumlah infeksi baru terus berkurang dari waktu ke waktu hingga wabah penyakit berakhir. Kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit dikatakan stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$. Pada sistem persamaan (2.6) tidak memuat variabel N yaitu total populasi, di mana $N = S + I + H + C + R$. Sehingga pada simulasi ini digunakan nilai awal yang berskala dari 0 sampai 1. Cara menentukan nilai awal tersebut adalah dengan membagi setiap subpopulasi dengan total populasi, yakni

$$S(0) = \frac{S}{N}; I(0) = \frac{I}{N}; H(0) = \frac{H}{N}; C(0) = \frac{C}{N}; R(0) = \frac{R}{N}$$

Berdasarkan Tabel 2.1 diperoleh nilai awal sebagai berikut: $S(0) = 0.84; I(0) = 0.081; H(0) = 0.000093; C(0) = 0.000014; R(0) = 0.08$ dengan $N = 1$.

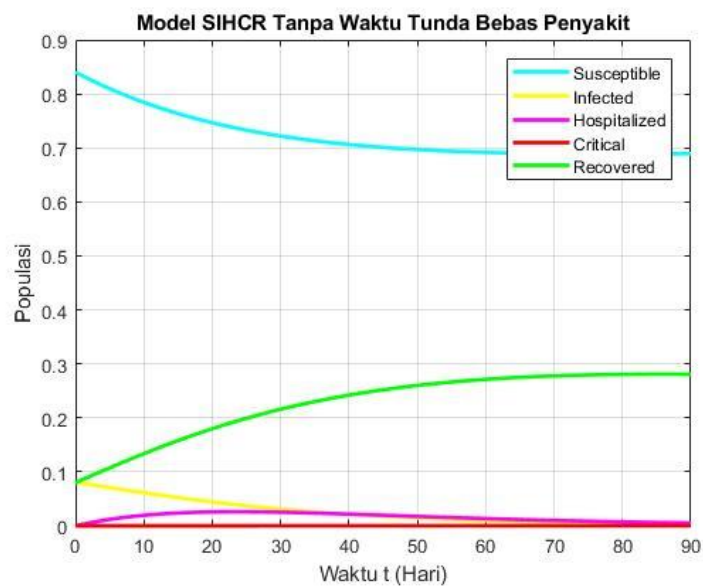
Selanjutnya nilai parameter pada Tabel 2.2 menghasilkan jenis kestabilan bebas penyakit yang bersifat tidak stabil. Hal ini disebabkan oleh bilangan reproduksi dasar yang menggunakan nilai parameter pada Tabel 2.2 akan menghasilkan $R_0 > 1$. Sedangkan kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit akan asimtotik lokal jika $R_0 < 1$. Oleh karena itu digunakan nilai parameter baru yang merupakan asumsi nilai parameter untuk menghasilkan titik kesetimbangan bebas penyakit yang bersifat stabil asimtotik lokal. Dengan demikian, nilai parameter yang digunakan adalah sebagai berikut:

$$\Lambda = 0.001; \beta = 0.1; \gamma = 0.07; \mu_S = 0.001; \mu_I = 0.003; \mu_R = 0.002;$$

$$\alpha_I = 0.036; \alpha_H = 0.000083; \theta_H = 0.054; \theta_C = 0.0015; \delta_C = 0.003$$

Berdasarkan parameter tersebut diperoleh nilai $R_0 = 0.9174311927 < 1$, sehingga titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik lokal. Selanjutnya dilakukan simulasi dalam kondisi bebas penyakit menggunakan model SIHCR tanpa dan dengan waktu tunda. Pertama akan dilakukan terlebih dahulu simulasi model SIHCR tanpa waktu tunda dalam kondisi bebas penyakit sebagai berikut:

a. Simulasi Model SIHCR Tanpa Waktu Tunda Dalam Kondisi Bebas Penyakit



Gambar 4.1 Grafik Model SIHCR Tanpa Waktu Tunda Ketika $R_0 < 1$

Berdasarkan Gambar 4.1, populasi *Susceptible* mengalami penurunan populasi. Pada populasi *Infected* mengalami penurunan populasi dan terus menurun menuju kondisi setimbang. Selanjutnya, populasi *Hospitalized* meningkat hingga hari ke-20, lalu terjadi penurunan populasi hingga menuju ke

nol. Populasi *Critical* terlihat stabil selama 90 hari, karena ketika $R_0 < 1$ setiap individu terinfeksi dapat menularkan penyakit rata-rata kurang dari satu individu rentan. Artinya hampir tidak ada penyebaran penyakit dalam populasi, sehingga populasi *Critical* terlihat konstan. Populasi *Recovered* meningkat hingga hari ke-80, lalu terjadi penurunan populasi menuju titik stabil. Perhatikan bahwa populasi *Infected*, *Hospitalized*, dan *Critical* menurun menuju kondisi setimbang. Berdasarkan hal tersebut menunjukkan bahwa hampir tidak ada penyebaran penyakit dalam populasi, sehingga jumlah infeksi baru terus berkurang dari waktu ke waktu hingga penyakit menghilang.

Berikutnya dilakukan simulasi model SIHCR dengan waktu tunda dalam kondisi bebas penyakit sebagai berikut:

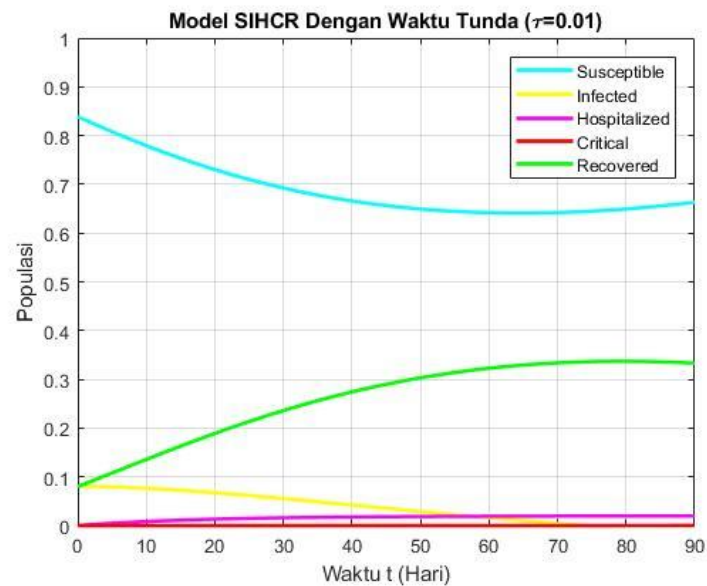
b. Simulasi Model SIHCR Dengan Waktu Tunda Dalam Kondisi Bebas Penyakit

Pada bagian ini dilakukan tiga simulasi dengan menggunakan variasi nilai parameter waktu tunda yang disajikan dalam Tabel 4.1 sebagai berikut:

Tabel 4.1 Nilai Parameter Waktu Tunda (τ)

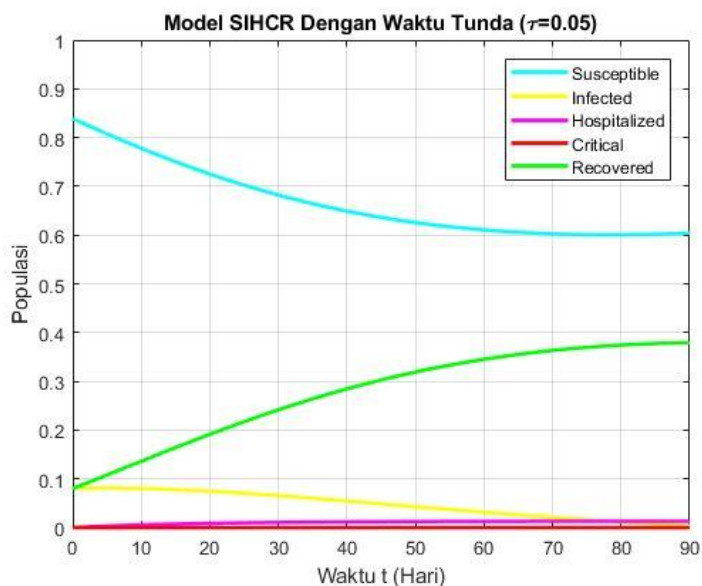
Parameter	Simulasi 1	Simulasi 2	Simulasi 3
τ	0.01	0.05	0.1

Berikut adalah grafik hasil setiap simulasi dari model SIHCR dengan waktu tunda ketika bebas penyakit.



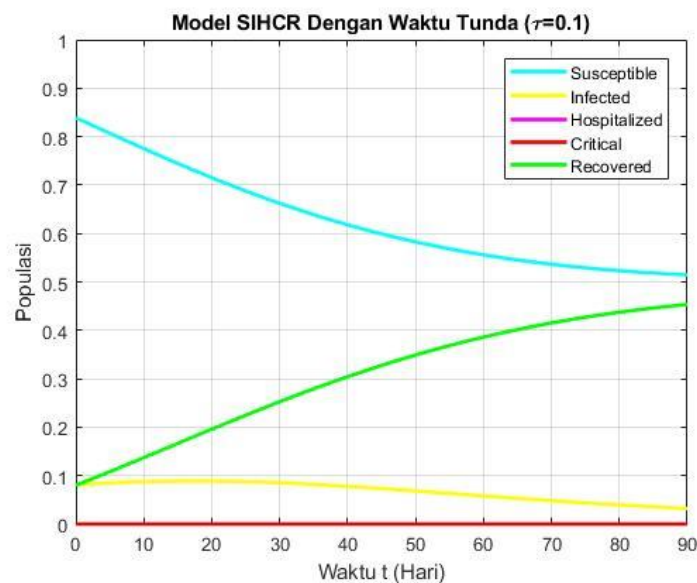
Gambar 4.2 Grafik Model SIHCR Dengan Waktu Tunda Ketika $R_0 < 1$ dengan $\tau = 0.01$

Berdasarkan Gambar 4.2, dengan diberikannya tundaan waktu $\tau = 0.01$ dapat dilihat bahwa populasi *Susceptible* menurun dalam kurun waktu 65 hari. Kemudian pada hari ke-66 dan seterusnya populasi *Susceptible* mengalami kenaikan populasi. Lalu, pada populasi *Infected* terjadi penurunan populasi menuju kondisi stabil pada hari ke-73. Populasi *Hospitalized* meningkat landai hingga mencapai kestabilan sekitar hari ke-40. Ketika waktu simulasi diperpanjang, populasi *Hospitalized* menurun mulai hari ke-110 dan terus menurun menuju kondisi setimbang. Selanjutnya, populasi *Critical* terlihat stabil selama 90 hari, karena ketika $R_0 < 1$ setiap individu terinfeksi dapat menularkan penyakit rata-rata kurang dari satu individu rentan. Artinya hampir tidak ada penyebaran penyakit dalam suatu populasi, sehingga populasi *Critical* akan stabil menuju kondisi setimbang. Terakhir, populasi *Recovered* meningkat hingga hari ke-80 yang kemudian mengalami penurunan populasi dan akan terus menurun menuju titik stabil.



Gambar 4.3 Grafik Model SIHCR Dengan Waktu Tunda Ketika $R_0 < 1$ dengan $\tau = 0.05$

Berdasarkan Gambar 4.3, dengan diberikannya tundaan waktu $\tau = 0.05$ dapat dilihat bahwa populasi *Susceptible* menurun dalam kurun waktu 80 hari. Kemudian pada hari ke-81 dan selanjutnya, populasi *Susceptible* mengalami kenaikan populasi secara landai. Sementara itu, populasi *Infected* mengalami penurunan populasi dan akan terus menurun menuju kondisi setimbang. Populasi *Hospitalized* meningkat landai hingga mencapai kestabilan sekitar hari ke-70. Ketika waktu simulasi diperpanjang, populasi *Hospitalized* menurun mulai hari ke-115 dan terus menurun menuju kondisi setimbang. Kemudian populasi *Critical* terlihat stabil selama 90 hari, karena ketika $R_0 < 1$ setiap individu terinfeksi dapat menularkan penyakit rata-rata kurang dari satu individu rentan. Artinya hampir tidak ada penyebaran penyakit dalam suatu populasi, sehingga populasi *Critical* akan stabil menuju kondisi setimbang. Terakhir, populasi *Recovered* mengalami kenaikan jumlah populasi hingga hari ke-90. Ketika waktu simulasi diperpanjang, populasi *Recovered* menurun mulai hari ke-100 dan terus menurun menuju kondisi setimbang.



Gambar 4.4 Grafik Model SIHCR Dengan Waktu Tunda Ketika $R_0 < 1$ dengan $\tau = 0.1$

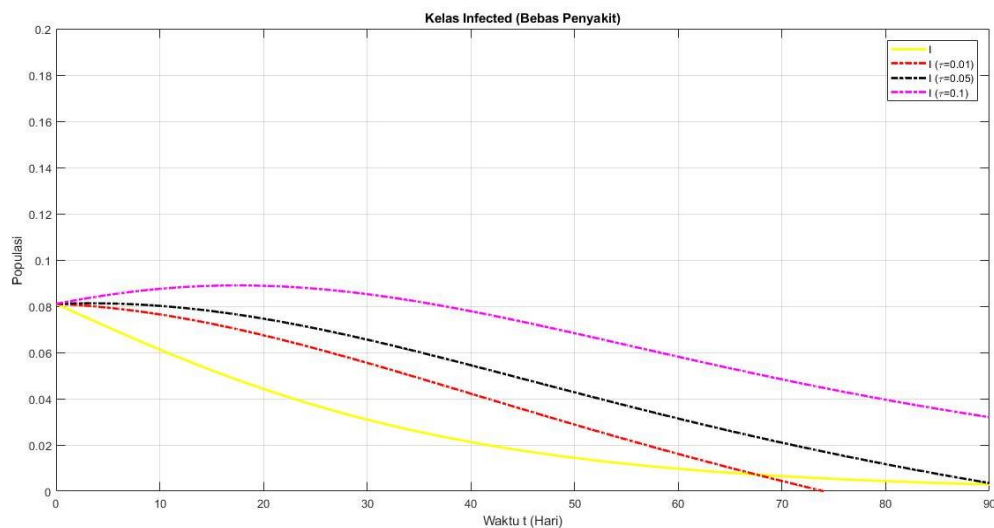
Berdasarkan Gambar 4.4, dengan diberikannya tundaan waktu $\tau = 0.1$ dapat dilihat bahwa populasi *Susceptible* menurun dalam kurun waktu 90 hari. Pada populasi *Infected* terjadi penurunan populasi dan akan terus menurun menuju kondisi setimbang. Kemudian, pada populasi *Hospitalized* dan *Critical* terlihat stabil selama 90 hari, karena ketika $R_0 < 1$ setiap individu terinfeksi dapat menularkan penyakit rata-rata kurang dari satu individu rentan. Artinya hampir tidak ada penyebaran penyakit dalam suatu populasi, sehingga populasi *Hospitalized* dan *Critical* akan stabil menuju kondisi setimbang. Terakhir, populasi *Recovered* mengalami kenaikan jumlah populasi hingga hari ke-90. Ketika waktu simulasi diperpanjang, populasi *Recovered* menurun mulai hari ke-110 dan terus menurun menuju kondisi setimbang.

Dari hasil simulasi 1, simulasi 2, dan simulasi 3 untuk model SIHCR dengan waktu tunda dalam kondisi bebas penyakit, dapat disimpulkan bahwa terdapat perbedaan perilaku masing-masing populasi terhadap waktu ketika menggunakan variasi nilai waktu tunda. Semakin kecil tundaan waktu yang

diberikan, maka model SIHCR semakin cepat menuju kestabilan. Sebaliknya semakin besar tundaan waktu yang diberikan, maka model SIHCR semakin lama menuju kestabilan.

c. Simulasi Kelas *Infected* Dengan dan Tanpa Waktu Tunda Dalam Kondisi Bebas Penyakit

Pada bagian ini dilakukan simulasi pada kelas *Infected* dengan dan tanpa waktu tunda dalam kondisi bebas penyakit. Waktu tunda yang digunakan untuk simulasi seperti pada Tabel 4.1. Berikut adalah grafik hasil setiap simulasi dari kelas *Infected* dengan dan tanpa waktu tunda ketika bebas penyakit.



Gambar 4.5 Grafik Kelas *Infected* Dengan dan Tanpa Waktu Tunda Ketika $R_0 < 1$

Pada Gambar 4.5, populasi *Infected* tanpa waktu tunda mengalami penurunan populasi menuju kondisi setimbang. Selanjutnya, populasi *Infected* dengan $\tau = 0.01$ mengalami puncak infeksi sekitar hari ke-3, kemudian populasinya menurun menuju kondisi setimbang sekitar hari ke-73. Lalu pada populasi *Infected* dengan $\tau = 0.05$ mengalami puncak infeksi sekitar hari ke-5, kemudian populasinya menuju kondisi setimbang dalam kurun waktu 90 hari.

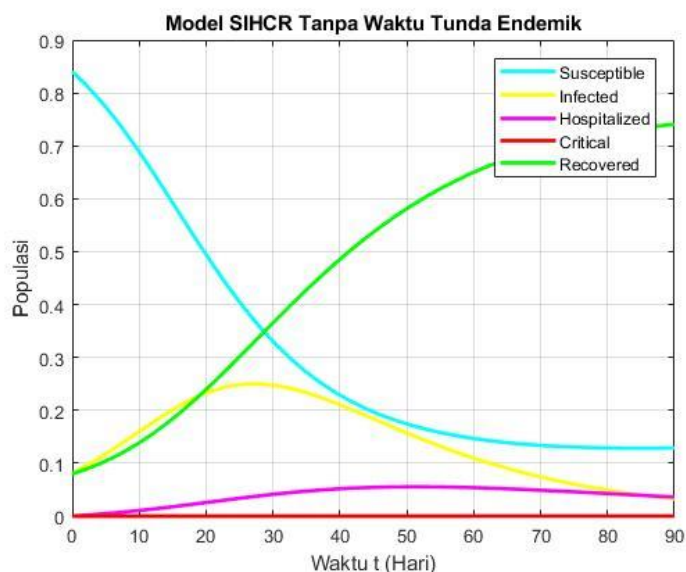
Sedangkan pada populasi *Infected* dengan $\tau = 0.1$ mengalami puncak infeksi sekitar hari ke-20, kemudian populasinya mengalami penurunan namun hingga hari ke-90 belum mencapai kondisi setimbang. Berdasarkan Gambar 4.5, terdapat perbedaan perilaku dari kelas *Infected* dengan dan tanpa waktu tunda ketika bebas penyakit. Kelas *Infected* dengan waktu tunda menunjukkan lebih lama mencapai hari puncak infeksi dan kestabilan dibandingkan kelas *Infected* tanpa waktu tunda.

4.2.2 Simulasi Model SIHCR Dalam Kondisi Endemik

Simulasi Model SIHCR dalam kondisi endemik dilakukan ketika bilangan reproduksi dasar $R_0 > 1$. Artinya, terjadi penyebaran penyakit dalam suatu populasi sehingga mengakibatkan peningkatan jumlah infeksi baru dari waktu ke waktu hingga wabah menjadi endemik. Kestabilan titik kesetimbangan endemik dikatakan stabil asimtotik lokal jika $R_0 > 1$. Nilai awal untuk setiap subpopulasi yang digunakan pada simulasi ketika endemik sama dengan nilai awal yang digunakan pada simulasi ketika bebas penyakit.

Nilai parameter yang digunakan untuk simulasi model SIHCR dalam kondisi endemik sesuai pada Tabel 2.2. Berdasarkan nilai parameter pada Tabel 2.2 diperoleh nilai $R_0 = 2.698412698 > 1$, sehingga titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik lokal dan penyakit COVID-19 menjadi endemik. Selanjutnya dilakukan simulasi dalam kondisi endemik menggunakan model SIHCR tanpa dan dengan waktu tunda. Pertama dilakukan simulasi model SIHCR tanpa waktu tunda dalam kondisi endemik sebagai berikut:

a. Simulasi Model SIHCR Tanpa Waktu Tunda Dalam Kondisi Endemik



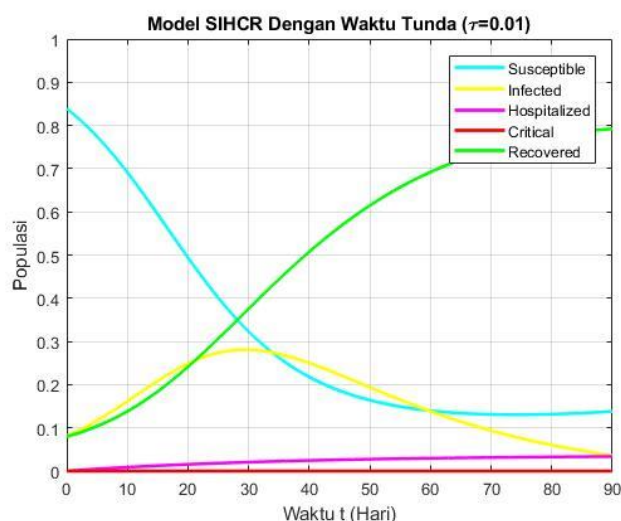
Gambar 4.6 Grafik Model SIHCR Tanpa Waktu Tunda Ketika $R_0 > 1$

Berdasarkan Gambar 4.6, dapat dilihat bahwa populasi *Susceptible* menurun hingga hari ke-90. Populasi *Infected* meningkat hingga hari ke-26, karena adanya interaksi langsung antara individu rentan dengan individu terinfeksi. Kemudian populasi *Infected* terus menurun karena adanya kematian alami dan kesembuhan pada individu terinfeksi. Populasi *Hospitalized* meningkat hingga hari ke-50, karena individu terinfeksi dilarikan ke rumah sakit untuk mendapatkan perawatan karena kondisi yang semakin memburuk. Kemudian populasi *Hospitalized* juga menurun karena adanya kesembuhan dari individu yang dirawat inap. Populasi *Critical* terlihat stabil, karena jumlah individu kritis pada waktu ke- t konstan dan atau terjadi kenaikan ataupun penurunan jumlah individu kritis yang lumayan kecil. Populasi *Recovered* meningkat hingga hari ke-90 karena adanya kesembuhan dari individu terinfeksi, individu yang dirawat inap, dan individu kritis. Populasi *Recovered* juga menurun karena adanya kematian alami individu sembuh. Perhatikan bahwa

perubahan jumlah populasi pada setiap kompartemen menunjukkan terjadinya penyebaran penyakit dalam populasi. Berikutnya dilakukan simulasi model SIHCR dengan waktu tunda dalam kondisi endemik sebagai berikut:

b. Simulasi Model SIHCR Dengan Waktu Tunda Dalam Kondisi Endemik

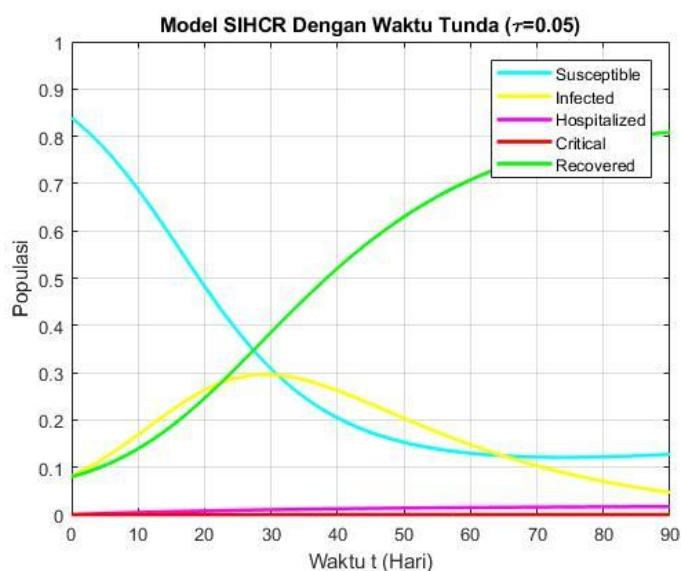
Pada bagian ini dilakukan tiga simulasi dengan menggunakan variasi nilai parameter waktu tunda yang disajikan dalam Tabel 4.1. Berikut adalah grafik hasil setiap simulasi dari model SIHCR dengan waktu tunda ketika endemik.



Gambar 4.7 Grafik Model SIHCR Dengan Waktu Tunda Ketika $R_0 > 1$ dengan $\tau = 0.01$

Berdasarkan Gambar 4.7, dengan diberikannya tundaan waktu $\tau = 0.01$ dapat dilihat bahwa populasi *Susceptible* menurun hingga hari ke-65. Kemudian populasi *Susceptible* mengalami kenaikan populasi yang landai. Populasi *Infected* meningkat hingga hari ke-27, karena adanya interaksi langsung antara individu rentan dengan individu terinfeksi. Lalu populasi *Infected* menurun menuju nol, tapi hingga hari ke-90 belum mencapai kestabilan. Hal ini dipengaruhi oleh individu terinfeksi menjadi individu dirawat

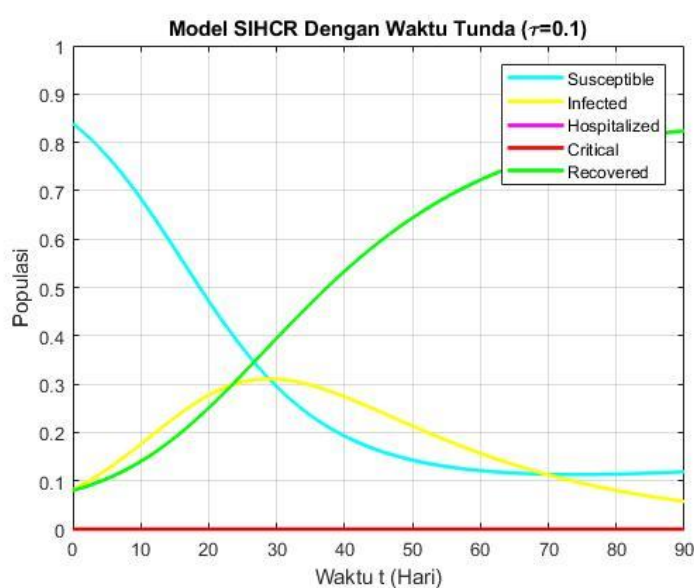
inap karena memburuknya kondisi, kematian alami dan kesembuhan individu terinfeksi. Populasi *Hospitalized* meningkat landai hingga mencapai kestabilan sekitar hari ke-70. Hal ini dipengaruhi oleh individu terinfeksi menjadi individu dirawat inap karena memburuknya kondisi. Lalu populasi *Critical* terlihat stabil selama 90 hari. Populasi *Recovered* meningkat hingga hari ke-90, karena adanya kesembuhan dari individu terinfeksi, individu yang dirawat di rumah sakit, dan individu kritis.



Gambar 4.8 Grafik Model SIHCR Dengan Waktu Tunda Ketika $R_0 > 1$ dengan $\tau = 0.05$

Berdasarkan Gambar 4.8, dengan diberikannya tundaan waktu $\tau = 0.05$ dapat dilihat bahwa populasi *Susceptible* menurun hingga hari ke-70. Kemudian populasi *Susceptible* mengalami kenaikan populasi yang landai. Populasi *Infected* meningkat hingga hari ke-29, karena adanya interaksi langsung antara individu rentan dengan individu terinfeksi. Lalu populasi *Infected* menurun menuju nol, tapi hingga hari ke-90 belum mencapai kestabilan. Hal ini dipengaruhi oleh individu terinfeksi menjadi individu dirawat inap karena memburuknya kondisi, kematian alami dan kesembuhan individu

terinfeksi. Populasi *Hospitalized* dan *Critical* terlihat stabil, karena jumlah individu dirawat inap dan kritis pada waktu ke- t konstan dan atau terjadi kenaikan ataupun penurunan jumlah individu dirawat inap dan kritis yang lumayan kecil. Populasi *Recovered* meningkat hingga hari ke-90, karena adanya kesembuhan dari individu terinfeksi, individu yang dirawat di rumah sakit, dan individu kritis.



Gambar 4.9 Grafik Model SIHCR Dengan Waktu Tunda Ketika $R_0 > 1$ dengan $\tau = 0.1$

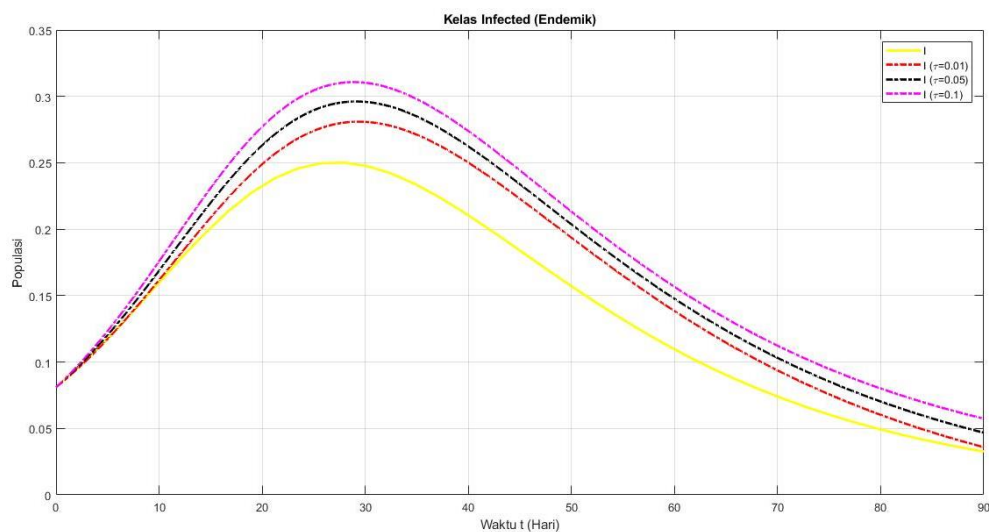
Berdasarkan Gambar 4.9, dengan diberikannya tundaan waktu $\tau = 0.1$ dapat dilihat bahwa populasi *Susceptible* menurun hingga hari ke-75. Kemudian populasi *Susceptible* mengalami kenaikan populasi yang landai. Populasi *Infected* meningkat hingga hari ke-30, karena adanya interaksi langsung antara individu rentan dengan individu terinfeksi. Lalu populasi *Infected* menurun menuju nol, tapi hingga hari ke-90 belum mencapai kestabilan. Hal ini dipengaruhi oleh individu terinfeksi menjadi individu dirawat inap karena memburuknya kondisi, kematian alami dan kesembuhan individu

terinfeksi. Populasi *Hospitalized* dan *Critical* terlihat stabil selama 90 hari. Hal ini dipengaruhi oleh jumlah individu dirawat inap dan kritis pada waktu ke- t konstan dan atau terjadi kenaikan ataupun penurunan jumlah individu dirawat inap dan kritis yang lumayan kecil. Populasi *Recovered* mengalami kenaikan populasi hingga hari ke-90. Hal ini dipengaruhi oleh adanya kesembuhan dari individu terinfeksi, individu yang dirawat di rumah sakit, dan individu kritis. Perlu diketahui juga bahwa populasi *Recovered* juga mengalami penurunan populasi karena adanya kematian alami individu sembuh.

Dari grafik hasil simulasi 1, simulasi 2, dan simulasi 3 untuk model SIHCR dengan waktu tunda dalam kondisi endemik, dapat disimpulkan bahwa terdapat perbedaan perilaku masing-masing populasi terhadap waktu ketika menggunakan variasi nilai waktu. Semakin kecil tundaan waktu yang diberikan, maka model SIHCR semakin cepat menuju kestabilan. Sebaliknya semakin besar tundaan waktu yang diberikan, maka model SIHCR semakin lama menuju kestabilan.

c. Simulasi Kelas *Infected* Dengan dan Tanpa Waktu Tunda Dalam Kondisi Endemik

Pada bagian ini dilakukan simulasi pada kelas *Infected* dengan dan tanpa waktu tunda dalam kondisi endemik. Waktu tunda yang digunakan untuk simulasi seperti pada Tabel 4.1. Berikut adalah grafik hasil setiap simulasi dari kelas *Infected* dengan dan tanpa waktu tunda ketika endemik.



Gambar 4.10 Grafik Kelas *Infected* Dengan dan Tanpa Waktu Tunda Ketika $R_0 > 1$

Pada Gambar 4.10, populasi *Infected* tanpa waktu tunda meningkat hingga hari ke-26. Kemudian di hari selanjutnya populasi *Infected* mengalami penurunan populasi. Populasi *Infected* dengan $\tau = 0.01$ mengalami puncak infeksi sekitar hari ke-27 yang kemudian menurun hingga hari ke-90 dan belum terlihat mencapai kestabilan. Lalu pada populasi *Infected* dengan $\tau = 0.05$ mengalami puncak infeksi sekitar hari ke-29 yang kemudian menurun hingga hari ke-90 dan belum terlihat mencapai kestabilan. Sedangkan populasi *Infected* dengan $\tau = 0.1$ mengalami puncak infeksi sekitar hari ke-30 yang kemudian menurun hingga hari ke-90 dan belum terlihat mencapai kestabilan. Berdasarkan Gambar 4.10, dapat disimpulkan bahwa terdapat perbedaan perilaku dari kelas *Infected* dengan dan tanpa waktu tunda ketika endemik. Kelas *Infected* dengan waktu tunda menunjukkan lebih lama mencapai hari puncak infeksi dan kestabilan dibandingkan kelas *Infected* tanpa waktu tunda.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan tujuan dan hasil pembahasan pada bab sebelumnya, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Berdasarkan analisis dinamik model penyebaran COVID-19 pada populasi *SIHCR* dengan dan tanpa waktu tunda diperoleh:

- a. Titik kesetimbangan bebas penyakit, yaitu $E_0(S_0, I_0, H_0, C_0, R_0) = E_0\left(\frac{\Lambda}{\mu_S}, 0, 0, 0, 0\right)$. Analisis kestabilan pada titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat tidak stabil berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz dan nilai eigennya.

- b. Titik kesetimbangan endemik, yaitu $E_1(S^*, I^*, H^*, C^*, R^*) = E_1\left(\frac{\alpha_I + \gamma + \mu_I}{\beta},$

$$\frac{\Lambda\beta - \mu_S(\alpha_I + \gamma + \mu_I)}{\beta(\alpha_I + \gamma + \mu_I)}, \frac{\alpha_I(\Lambda\beta - \mu_S(\alpha_I + \gamma + \mu_I))}{\beta(\alpha_I + \gamma + \mu_I)(\alpha_H + \theta_H)}, \frac{\alpha_H\alpha_I(\Lambda\beta - \mu_S(\alpha_I + \gamma + \mu_I))}{\beta(\theta_C + \delta_C)(\alpha_I + \gamma + \mu_I)(\alpha_H + \theta_H)},$$

$$\frac{(\Lambda\beta - \mu_S(\alpha_I + \gamma + \mu_I))(\gamma(\theta_C + \delta_C)(\alpha_H + \theta_H) + \theta_H\alpha_I(\theta_C + \delta_C) + \theta_C\alpha_H\alpha_I)}{\mu_R\beta(\theta_C + \delta_C)(\alpha_I + \gamma + \mu_I)(\alpha_H + \theta_H)}\bigg). \text{ Analisis kestabilan}$$

pada titik kesetimbangan endemik ketika $\tau = 0$ dan $\tau \neq 0$ bersifat stabil asimtotik lokal berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz dan nilai eigennya.

- c. Bilangan reproduksi dasar yang diperoleh adalah $R_0 = 2.698412698 > 1$ (corona.jakarta.go.id, 2021), sehingga mengakibatkan penyakit COVID-19 menjadi endemik.

2. Berdasarkan hasil simulasi numerik model *SIHCR* dengan dan tanpa waktu tunda, diperoleh:

a. Pada kondisi bebas penyakit

Berdasarkan hasil simulasi ketika $R_0 < 1$, menunjukkan perbedaan perilaku dinamik model *SIHCR* dengan waktu tunda dan tanpa waktu tunda. Semakin kecil tundaan waktu, maka kondisi tersebut hampir sama dengan kondisi model *SIHCR* tanpa tundaan waktu dalam menuju kondisi stabil. Sedangkan semakin besar tundaan waktu, maka model *SIHCR* semakin lama menuju kestabilan.

b. Pada kondisi endemik

Berdasarkan hasil simulasi ketika $R_0 > 1$, menunjukkan perbedaan perilaku dinamik model *SIHCR* dengan waktu tunda dan tanpa waktu tunda. Semakin kecil tundaan waktu, maka kondisi tersebut hampir sama dengan kondisi model *SIHCR* tanpa tundaan waktu dalam menuju kondisi stabil. Sedangkan semakin besar tundaan waktu, maka model *SIHCR* semakin lama menuju kestabilan.

5.2 Saran untuk Penelitian Lanjutan

Pada penelitian ini telah membahas model penyebaran COVID-19 pada populasi *SIHCR* dengan waktu tunda. Model tersebut dianalisis kestabilan titik kesetimbangannya secara lokal berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz dan nilai eigen dan dilakukan simulasi menggunakan variasi nilai parameter waktu tunda τ untuk mengetahui perilaku dinamik dari model. Diharapkan pada penelitian selanjutnya dapat ditambahkan analisis kestabilan global titik kesetimbangan menggunakan metode Lyapunov dan melakukan simulasi ketika $\tau_1 \neq \tau_2$.

DAFTAR PUSTAKA

- Alfionita, F. R. (2016). Penyelesaian Persamaan Diferensial Tunda Linier Orde 1 Dengan Metode Karakteristik. *Jurnal Matematika UNAND*, 5(2), 45-49.
- Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2001). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* (7th ed.). New York: Von Hoffman Press.
- Boyce, W. E., DiPrima, R. C., & Meade, D. B. (2017). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* (11th ed.). New Jersey: Wiley.
- BPS Provinsi DKI Jakarta. (2021). *Registrasi Kelahiran Kematian Perkawinan Perceraian dan Pengesahan/Pengakuan Anak Menurut Kabupaten/Kota di Provinsi DKI Jakarta 2019-2021*. Retrieved from [jakarta.bps.go.id: https://jakarta.bps.go.id/indicator/12/418/1/registrasi-kelahiran-kematian-perkawinan-perceraian-dan-pengesahan-pengakuan-anak-menurut-kabupaten-kota-di-provinsi-dki-jakarta.html](https://jakarta.bps.go.id/indicator/12/418/1/registrasi-kelahiran-kematian-perkawinan-perceraian-dan-pengesahan-pengakuan-anak-menurut-kabupaten-kota-di-provinsi-dki-jakarta.html)
- Ebraheem, H. K., Alkhateeb, N., Badran, H., & Sultan, E. (2021). Delayed Dynamics of SIR Model for COVID-19. *Open Journal of Modelling and Simulation*, 9(2), 146-158.
- Erneux, T. (2009). *Applied Delay Differential Equations*. New York: Springer Science & Business Media.
- Forde, J. E. (2005). *Delay Differential Equation Models in Mathematical Biology*. United States: University of Michigan.
- Fuad, Y., & Arizona, P. (2014). Analisis Stabilitas Model Sel Imun-Tumor Dengan Tundaan Waktu. *MATHunesa*, 3(2), 31-38.
- Giesecke, J. (2002). *Modern Infectious Disease Epidemiology* (2nd ed.). Florida: CRC Press.
- Jakarta Smart City. (2021). *Peta Persebaran Positif COVID-19*. Retrieved from <https://corona.jakarta.go.id/id>: <https://corona.jakarta.go.id/id/peta-persebaran>
- Kar, T. K. (2003). Selective Harvesting in a Prey-Predator Fishery with Time Delay. *Mathematical and Computer Modelling*, 38(3-4), 449-458.
- Kemenag. (2019). *Qur'an Kemenag*. Jakarta: LPMQ.
- KEMENKES. (2021). *Data Ketersediaan Tempat Tidur RS COVID-19*. Retrieved from [Kemkes.go.id: https://www.kemkes.go.id/article/view/21081700003/Data-Ketersediaan-Tempat-Tidur-RS-COVID-19.html](https://www.kemkes.go.id/article/view/21081700003/Data-Ketersediaan-Tempat-Tidur-RS-COVID-19.html)

- Kozyreff, G. (2021). Hospitalization Dynamics During the First COVID-19 Pandemic Wave: SIR Modelling Compared to Belgium, France, Italy, Switzerland and New York City Data. *Infectious Disease Modelling*, 6, 398-404.
- Lestari, C. F. (2019). Penafsiran Ayat-Ayat Syifa dalam Al-Qur'an (Studi Komparatif Tafsir Al-Jailâni dan Al-Assâs). *Institut Ilmu Al-Qur'an (IIQ) Jakarta*.
- Mbogo, R. W., & Odhiambo, J. W. (2021). COVID-19 Outbreak, Social Distancing and Mass Testing in Kenya-Insights from a Mathematical Model. *Afrika Matematika*, 32(5), 757-772.
- Murtafi'ah, W., & Apriandi, D. (2018). *Persamaan Diferensial Biasa Dan Aplikasinya*. Madiun: UNIPMA Press.
- Ndii, M. Z. (2018). *Pemodelan Matematika Dinamika Populasi Dan Penyebaran Penyakit Teori, Aplikasi, Dan Numerik*. Deepublish.
- Radha, M., & Balamuralitharan, S. (2020). A Study on COVID-19 Transmission Dynamics: Stability Analysis of SEIR Model with Hopf Bifurcation for Effect of Time Delay. *Advances in Difference Equations*, 2020(1), 1-20.
- Resmawan, R., & Yahya, L. (2020). Sensitivity Analysis of Mathematical Model of Coronavirus Disease (COVID-19) Transmission. *Cauchy*, 6(2), 91-99.
- Rezyika, I. (2021). Penafsiran Ayat-Ayat Syifa' Dalam Tafsir Al-Munir (Kitab Tafsir Al-Munir Karya Wahbah Az-Zuhaili). *Doctoral dissertation, UIN Fatmawati Sukarno*.
- Rohamah. (2020). Analisis Kestabilan Global Model SEIQR Dengan Periode Laten. *Doctoral dissertation, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim*.
- Shihab, M. Q. (2002). *Tafsir Al-Misbah: Pesan, Kesan, dan Keserasian Al-Qur'an*. Jakarta: Lentera Hati.
- Sholikhah, B. (2018). Waktu Dalam Al-Qur'an (Studi Analisis Penafsiran Quraish Shihab Terhadap Term Waktu Dalam Tafsir Al-Misbah). *Skripsi Program Studi Tafsir Hadits Jurusan Ilmu Ushuluddin Fakultas Ushuluddin Dan Humaniora Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang*.
- Toaha, S. (2008). Model Dengan Tundaan Waktu. *Jurnal Matematika, Statistika, dan Komputasi*, 4(2), 66-75.
- Van den Driessche, P., & Watmough, J. (2002). Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission. *Mathematical biosciences*, 180(1-2), 29-48.
- Waluya, S. B. (2006). *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

LAMPIRAN

Lampiran 1 Perhitungan Maple Untuk Titik Kesetimbangan dan Bilangan Reproduksi Dasar

TITIK KESETIMBANGAN

> *restart* : *with(linalg) : unprotect(gamma, rho, lambda) : gamma := 'gamma': rho := 'rho': lambda := 'lambda': with(VectorCalculus) :*

> **local** Zeta :

> $dS := \Lambda - \beta \cdot S \cdot In - \mu S \cdot S :$

> $dIn := \beta \cdot S \cdot In - \alpha In \cdot In - \gamma \cdot In - \mu In \cdot In :$

> $dH := \alpha In \cdot In - \alpha H \cdot H - \theta H \cdot H :$

> $dC := \alpha H \cdot H - \theta C \cdot C - \delta C \cdot C :$

> $dR := \gamma \cdot In + \theta H \cdot H + \theta C \cdot C - \mu R \cdot R :$

> $TTK := solve(\{dS, dIn = 0, dH, dC, dR\}, \{S, In, H, C, R\}) :$

> $DFE := TTK[1];$

$$DFE := \left\{ C = 0, H = 0, In = 0, R = 0, S = \frac{\Lambda}{\mu S} \right\}$$

> $END := TTK[2];$

$$END := \left\{ C = -(\alpha H \alpha In (\mu In \mu S + \mu S \gamma + \mu S \alpha In - \Lambda \beta)) / (\beta (\mu In \alpha H \delta C + \mu In \alpha H \theta C + \mu In \delta C \theta H + \mu In \theta C \theta H + \gamma \alpha H \delta C + \gamma \alpha H \theta C + \gamma \delta C \theta H + \gamma \theta C \theta H + \alpha H \alpha In \delta C + \alpha H \alpha In \theta C + \alpha In \delta C \theta H + \alpha In \theta C \theta H)), H = \frac{(\mu In \mu S + \mu S \gamma + \mu S \alpha In - \Lambda \beta) \alpha In}{(\mu In \alpha H + \mu In \theta H + \gamma \alpha H + \gamma \theta H + \alpha H \alpha In + \alpha In \theta H) \beta}, In = \frac{\mu In \mu S + \mu S \gamma + \mu S \alpha In - \Lambda \beta}{(\mu In + \gamma + \alpha In) \beta}, R = -((\gamma \alpha H \delta C + \gamma \alpha H \theta C + \gamma \delta C \theta H + \gamma \theta C \theta H + \alpha H \alpha In \theta C + \alpha In \delta C \theta H + \alpha In \theta C \theta H) (\mu In \mu S + \mu S \gamma + \mu S \alpha In - \Lambda \beta)) / (\mu R (\mu In + \gamma + \alpha In) (\alpha H \delta C + \alpha H \theta C + \delta C \theta H + \theta C \theta H) \beta), S = \frac{\mu In + \gamma + \alpha In}{\beta} \right\}$$

BILANGAN REPRODUKSI DASAR

> $J := Jacobian([dIn, dH, dC], [In, H, C]);$

$$J := \begin{bmatrix} S\beta - \mu In - \gamma - \alpha In & 0 & 0 \\ \alpha In & -\alpha H - \theta H & 0 \\ 0 & \alpha H & -\delta C - \theta C \end{bmatrix}$$

> $JacJ := subs(DFE, J);$

$$JacJ := \begin{bmatrix} \frac{\beta \Lambda}{\mu S} - \mu I_n - \gamma - \alpha I_n & 0 & 0 \\ \alpha I_n & -\alpha H - \theta H & 0 \\ 0 & \alpha H & -\delta C - \theta C \end{bmatrix}$$

> $F := \text{Jacobian}([\beta \cdot S \cdot I_n, 0, 0], [I_n, H, C]);$

$$F := \begin{bmatrix} \beta S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> $F_{sub} := \text{subs}(DFE, F);$

$$F_{sub} := \begin{bmatrix} \frac{\beta \Lambda}{\mu S} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> $V := \text{Jacobian}([-1 \cdot (-\alpha I_n \cdot I_n - \gamma \cdot I_n - \mu I_n \cdot I_n), -1 \cdot (\alpha I_n \cdot I_n - \alpha H \cdot H - \theta H \cdot H), -1 \cdot (\alpha H \cdot H - \theta C \cdot C - \delta C \cdot C)], [I_n, H, C]);$

$$V := \begin{bmatrix} \mu I_n + \gamma + \alpha I_n & 0 & 0 \\ -\alpha I_n & \alpha H + \theta H & 0 \\ 0 & -\alpha H & \delta C + \theta C \end{bmatrix}$$

> $V1 := \text{inverse}(V);$

$$V1 := \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu I_n + \gamma + \alpha I_n} & 0 & 0 \\ \frac{\alpha I_n}{(\mu I_n + \gamma + \alpha I_n)(\alpha H + \theta H)} & \frac{1}{\alpha H + \theta H} & 0 \\ \frac{\alpha H \alpha I_n}{(\mu I_n + \gamma + \alpha I_n)(\alpha H + \theta H)(\delta C + \theta C)} & \frac{\alpha H}{(\alpha H + \theta H)(\delta C + \theta C)} & \frac{1}{\delta C + \theta C} \end{bmatrix}$$

> $K = \text{evalm}(F_{sub}, V1);$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{\beta \Lambda}{\mu S (\mu I_n + \gamma + \alpha I_n)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> $RO := \frac{\beta \cdot \Lambda}{\mu S \cdot (\mu I_n + \gamma + \alpha I_n)};$

$$RO := \frac{\beta \Lambda}{\mu S (\mu I_n + \gamma + \alpha I_n)}$$

Lampiran 2 Perhitungan Maple Untuk Analisis Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan Bebas Penyakit dan Endemik

ANALISIS KESTABILAN LOKAL TITIK KESETIMBANGAN BEBAS PENYAKIT

- > *restart* : *with*(*linalg*) : *unprotect*(*gamma*, *rho*, *lambda*) : *gamma* := 'gamma': *rho* := 'rho':
lambda := 'lambda': *with*(*VectorCalculus*) :
- > **local** *Zeta* :
- > $dS := \Lambda - \beta \cdot S \cdot In - \mu S \cdot S$:
- > $dIn := \beta \cdot S \cdot In - \alpha In \cdot In - \gamma \cdot In - \mu In \cdot In$:
- > $dH := \alpha In \cdot In - \alpha H \cdot H - \theta H \cdot H$:
- > $dC := \alpha H \cdot H - \theta C \cdot C - \delta C \cdot C$:
- > $dR := \gamma \cdot In + \theta H \cdot H + \theta C \cdot C - \mu R \cdot R$:
- > $TTK := \text{solve}(\{dS, dIn = 0, dH, dC, dR\}, \{S, In, H, C, R\})$:
- > $DFE := TTK[1]$:
- > $END := TTK[2]$:
- > $J := \text{Jacobian}([dS, dIn, dH, dC, dR], [S, In, H, C, R])$:
- > $JE0 := \text{subs}(DFE, J)$:
- > $L1 := \text{Matrix}(5, 5, [[\lambda, 0, 0, 0, 0], [0, \lambda, 0, 0, 0], [0, 0, \lambda, 0, 0], [0, 0, 0, \lambda, 0], [0, 0, 0, 0, \lambda]])$:
- > $A := L1 - JE0$;

$$A := \begin{vmatrix} \lambda + \mu S & \frac{\beta \Lambda}{\mu S} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - \frac{\beta \Lambda}{\mu S} + \mu In + \gamma + \alpha In & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha In & \lambda + \alpha H + \theta H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha H & \lambda + \delta C + \theta C & 0 \\ 0 & -\gamma & -\theta H & -\theta C & \lambda + \mu R \end{vmatrix}$$

- > $poli1 := \text{collect}(\text{charpoly}(JE0, \lambda), \lambda)$:
- > $a0 := \text{factor}(\text{coeff}(poli1, \lambda, 5))$;
- $a0 := 1$
- > $a1 := \text{factor}(\text{coeff}(poli1, \lambda, 4))$;
- $$a1 := \frac{\mu In \mu S + \mu R \mu S + \mu S^2 + \mu S \gamma + \mu S \alpha H + \mu S \alpha In + \mu S \delta C + \mu S \theta C + \mu S \theta H - \Lambda \beta}{\mu S}$$
- > $a2 := \text{factor}(\text{coeff}(poli1, \lambda, 3))$;
- $$a2 := \frac{1}{\mu S} (\mu In \mu R \mu S + \mu In \mu S^2 + \mu In \mu S \alpha H + \mu In \mu S \delta C + \mu In \mu S \theta C + \mu In \mu S \theta H + \mu R \mu S^2$$
- $$+ \mu R \mu S \gamma + \mu R \mu S \alpha H + \mu R \mu S \alpha In + \mu R \mu S \delta C + \mu R \mu S \theta C + \mu R \mu S \theta H - \mu R \Lambda \beta$$
- $$+ \mu S^2 \gamma + \mu S^2 \alpha H + \mu S^2 \alpha In + \mu S^2 \delta C + \mu S^2 \theta C + \mu S^2 \theta H - \mu S \Lambda \beta + \mu S \gamma \alpha H + \mu S \gamma \delta C$$
- $$+ \mu S \gamma \theta C + \mu S \gamma \theta H + \mu S \alpha H \alpha In + \mu S \alpha H \delta C + \mu S \alpha H \theta C + \mu S \alpha In \delta C + \mu S \alpha In \theta C$$
- $$+ \mu S \alpha In \theta H + \mu S \delta C \theta H + \mu S \theta C \theta H - \Lambda \beta \alpha H - \Lambda \beta \delta C - \Lambda \beta \theta C - \Lambda \beta \theta H)$$
- > $a3 := \text{factor}(\text{coeff}(poli1, \lambda, 2))$;

$$\begin{aligned}
a3 := & \frac{1}{\mu S} (\mu I_n \mu S \alpha H \delta C + \mu I_n \mu S \delta C \theta H - \mu S \Lambda \beta \delta C + \mu S \alpha H \alpha I_n \delta C + \mu S \alpha I_n \delta C \theta H \\
& - \Lambda \beta \alpha H \delta C - \Lambda \beta \delta C \theta H + \mu I_n \mu S \alpha H \theta C + \mu I_n \mu S \theta C \theta H - \mu S \Lambda \beta \theta C + \mu S \alpha H \alpha I_n \theta C \\
& + \mu S \alpha I_n \theta C \theta H - \Lambda \beta \alpha H \theta C - \Lambda \beta \theta C \theta H + \mu R \mu I_n \mu S \alpha H + \mu R \mu I_n \mu S \delta C \\
& + \mu R \mu I_n \mu S \theta C + \mu R \mu I_n \mu S \theta H - \mu R \mu S \Lambda \beta + \mu R \mu S \alpha H \alpha I_n + \mu R \mu S \alpha H \delta C \\
& + \mu R \mu S \alpha H \theta C + \mu R \mu S \alpha I_n \delta C + \mu R \mu S \alpha I_n \theta C + \mu R \mu S \alpha I_n \theta H + \mu R \mu S \delta C \theta H \\
& + \mu R \mu S \theta C \theta H - \mu R \Lambda \beta \alpha H - \mu R \Lambda \beta \delta C - \mu R \Lambda \beta \theta C - \mu R \Lambda \beta \theta H - \mu S \Lambda \beta \alpha H \\
& - \mu S \Lambda \beta \theta H + \gamma \mu S \alpha H \delta C + \gamma \mu S \delta C \theta H + \gamma \mu S \alpha H \theta C + \gamma \mu S \theta C \theta H + \mu R \gamma \mu S \alpha H \\
& + \mu R \gamma \mu S \delta C + \mu R \gamma \mu S \theta C + \mu R \gamma \mu S \theta H + \mu S^2 \alpha I_n \delta C + \mu S^2 \alpha I_n \theta C + \mu S^2 \alpha H \theta C \\
& + \mu I_n \mu S^2 \delta C + \mu S^2 \delta C \theta H + \mu S^2 \alpha H \delta C + \mu S^2 \theta C \theta H + \mu I_n \mu S^2 \theta C + \mu R \mu I_n \mu S^2 \\
& + \mu R \mu S^2 \alpha H + \mu R \mu S^2 \alpha I_n + \mu R \mu S^2 \delta C + \mu R \mu S^2 \theta C + \mu R \mu S^2 \theta H + \mu I_n \mu S^2 \alpha H \\
& + \mu I_n \mu S^2 \theta H + \mu S^2 \alpha H \alpha I_n + \mu S^2 \alpha I_n \theta H + \gamma \mu S^2 \theta C + \gamma \mu S^2 \delta C + \mu R \gamma \mu S^2 + \gamma \mu S^2 \alpha H \\
& + \gamma \mu S^2 \theta H)
\end{aligned}$$

$$\text{> } a4 := \text{factor}(\text{coeff}(\text{poli1}, \lambda, 1));$$

$$\begin{aligned}
a4 := & \frac{1}{\mu S} (-\mu S \Lambda \beta \alpha H \delta C - \mu S \Lambda \beta \delta C \theta H - \mu S \Lambda \beta \alpha H \theta C - \mu S \Lambda \beta \theta C \theta H \\
& + \mu R \mu I_n \mu S \alpha H \delta C + \mu R \mu I_n \mu S \delta C \theta H - \mu R \mu S \Lambda \beta \delta C + \mu R \mu S \alpha H \alpha I_n \delta C \\
& + \mu R \mu S \alpha I_n \delta C \theta H - \mu R \Lambda \beta \alpha H \delta C - \mu R \Lambda \beta \delta C \theta H + \mu R \mu I_n \mu S \alpha H \theta C \\
& + \mu R \mu I_n \mu S \theta C \theta H - \mu R \mu S \Lambda \beta \theta C + \mu R \mu S \alpha H \alpha I_n \theta C + \mu R \mu S \alpha I_n \theta C \theta H \\
& - \mu R \Lambda \beta \alpha H \theta C - \mu R \Lambda \beta \theta C \theta H - \mu R \mu S \Lambda \beta \alpha H - \mu R \mu S \Lambda \beta \theta H + \mu R \gamma \mu S \alpha H \delta C \\
& + \mu R \gamma \mu S \delta C \theta H + \mu R \gamma \mu S \alpha H \theta C + \mu R \gamma \mu S \theta C \theta H + \mu R \mu S^2 \alpha I_n \theta C + \mu R \mu S^2 \alpha H \theta C \\
& + \mu R \mu I_n \mu S^2 \delta C + \mu R \mu S^2 \delta C \theta H + \mu R \mu S^2 \alpha H \delta C + \mu R \mu S^2 \theta C \theta H + \mu R \mu I_n \mu S^2 \theta C \\
& + \mu R \mu I_n \mu S^2 \alpha H + \mu R \mu I_n \mu S^2 \theta H + \mu R \mu S^2 \alpha H \alpha I_n + \mu R \mu S^2 \alpha I_n \theta H + \mu R \gamma \mu S^2 \delta C \\
& + \mu R \gamma \mu S^2 \alpha H + \mu R \gamma \mu S^2 \theta H + \gamma \mu S^2 \alpha H \delta C + \gamma \mu S^2 \delta C \theta H + \gamma \mu S^2 \alpha H \theta C + \gamma \mu S^2 \theta C \theta H \\
& + \mu R \gamma \mu S^2 \theta C + \mu I_n \mu S^2 \alpha H \delta C + \mu I_n \mu S^2 \delta C \theta H + \mu S^2 \alpha H \alpha I_n \delta C + \mu S^2 \alpha I_n \delta C \theta H \\
& + \mu I_n \mu S^2 \alpha H \theta C + \mu I_n \mu S^2 \theta C \theta H + \mu S^2 \alpha H \alpha I_n \theta C + \mu S^2 \alpha I_n \theta C \theta H + \mu R \mu S^2 \alpha I_n \delta C)
\end{aligned}$$

$$\text{> } a5 := \text{factor}(\text{coeff}(\text{poli1}, \lambda, 0));$$

$$a5 := (\mu I_n \mu S + \mu S \gamma + \mu S \alpha I_n - \Lambda \beta) (\alpha H + \theta H) (\delta C + \theta C) \mu R$$

ANALISIS KESTABILAN LOKAL TITIK KESETIMBANGAN ENDEMIK

$$\text{> } JE1 := \text{subs}(\text{END}, J);$$

$$JE1 :=$$

$$\begin{bmatrix}
\frac{\mu I_n \mu S + \mu S \gamma + \mu S \alpha I_n - \Lambda \beta}{\mu I_n + \gamma + \alpha I_n} - \mu S & -\mu I_n - \gamma - \alpha I_n & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{\mu I_n \mu S + \mu S \gamma + \mu S \alpha I_n - \Lambda \beta}{\mu I_n + \gamma + \alpha I_n} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \alpha I_n & -\alpha H - \theta H & 0 & 0 \\
0 & 0 & \alpha H & -\delta C - \theta C & 0 \\
0 & \gamma & \theta H & \theta C & -\mu R
\end{bmatrix}$$

> $L2 := \text{Matrix}(5, 5, [[\lambda, 0, 0, 0, 0], [0, \lambda, 0, 0, 0], [0, 0, \lambda, 0, 0], [0, 0, 0, \lambda, 0], [0, 0, 0, 0, \lambda]]) :$

> $B := L2 - JE1;$

$$B := \begin{bmatrix} \lambda - \frac{\mu I n \mu S + \mu S \gamma + \mu S \alpha I n - \Lambda \beta}{\mu I n + \gamma + \alpha I n} + \mu S, \mu I n + \gamma + \alpha I n, 0, 0, 0 \\ \frac{\mu I n \mu S + \mu S \gamma + \mu S \alpha I n - \Lambda \beta}{\mu I n + \gamma + \alpha I n}, \lambda, 0, 0, 0 \\ 0, -\alpha I n, \lambda + \alpha H + \theta H, 0, 0 \\ 0, 0, -\alpha H, \lambda + \delta C + \theta C, 0 \\ 0, -\gamma, -\theta H, -\theta C, \lambda + \mu R \end{bmatrix}$$

> $\text{poli2} := \text{collect}(\text{charpoly}(JE1, \lambda), \lambda) :$

> $b0 := \text{factor}(\text{coeff}(\text{poli2}, \lambda, 5));$

$$b0 := 1$$

> $b1 := \text{factor}(\text{coeff}(\text{poli2}, \lambda, 4));$

$$b1 := \frac{1}{\mu I n + \gamma + \alpha I n} (\mu I n \mu R + \mu I n \alpha H + \mu I n \delta C + \mu I n \theta C + \mu I n \theta H + \mu R \gamma + \mu R \alpha I n + \Lambda \beta + \gamma \alpha H + \gamma \delta C + \gamma \theta C + \gamma \theta H + \alpha H \alpha I n + \alpha I n \delta C + \alpha I n \theta C + \alpha I n \theta H)$$

> $b2 := \text{factor}(\text{coeff}(\text{poli2}, \lambda, 3));$

$$b2 := -\frac{1}{\mu I n + \gamma + \alpha I n} (\mu I n^2 \mu S - \mu I n \mu R \alpha H - \mu I n \mu R \delta C - \mu I n \mu R \theta C - \mu I n \mu R \theta H + 2 \mu I n \mu S \gamma + 2 \mu I n \mu S \alpha I n - \mu I n \Lambda \beta - \mu I n \alpha H \delta C - \mu I n \alpha H \theta C - \mu I n \delta C \theta H - \mu I n \theta C \theta H - \mu R \Lambda \beta - \mu R \gamma \alpha H - \mu R \gamma \delta C - \mu R \gamma \theta C - \mu R \gamma \theta H - \mu R \alpha H \alpha I n - \mu R \alpha I n \delta C - \mu R \alpha I n \theta C - \mu R \alpha I n \theta H + \mu S \gamma^2 + 2 \mu S \gamma \alpha I n + \mu S \alpha I n^2 - \Lambda \beta \gamma - \Lambda \beta \alpha I n - \Lambda \beta \alpha I n - \Lambda \beta \delta C - \Lambda \beta \theta C - \Lambda \beta \theta H - \gamma \alpha H \delta C - \gamma \alpha H \theta C - \gamma \delta C \theta H - \gamma \theta C \theta H - \alpha H \alpha I n \delta C - \alpha H \alpha I n \theta C - \alpha I n \delta C \theta H - \alpha I n \theta C \theta H)$$

> $b3 := \text{factor}(\text{coeff}(\text{poli2}, \lambda, 2));$

$$b3 := -\frac{1}{\mu I n + \gamma + \alpha I n} (-\Lambda \alpha H \alpha I n \beta + 2 \mu I n \mu S \alpha H \alpha I n + 2 \gamma \mu S \alpha H \alpha I n - \Lambda \beta \alpha H \delta C - \Lambda \beta \delta C \theta H - \Lambda \beta \alpha H \theta C - \Lambda \beta \theta C \theta H - \mu R \Lambda \beta \alpha H - \mu R \Lambda \beta \delta C - \mu R \Lambda \beta \theta C - \mu R \Lambda \beta \theta H + \gamma^2 \mu R \mu S + \gamma^2 \mu S \delta C + \gamma^2 \mu S \alpha H + \gamma^2 \mu S \theta H + \gamma^2 \mu S \theta C + \mu I n^2 \mu S \theta H + \mu I n^2 \mu S \delta C + \mu I n^2 \mu S \alpha H + \mu I n^2 \mu R \mu S + \mu R \mu S \alpha I n^2 + \mu S \alpha I n^2 \theta C + \mu I n^2 \mu S \theta C + \mu S \alpha I n^2 \delta C + \mu S \alpha I n^2 \theta H + 2 \gamma \mu I n \mu S \alpha H - \gamma \Lambda \beta \alpha H + 2 \gamma \mu I n \mu S \theta H + 2 \gamma \mu S \alpha I n \theta H - \gamma \Lambda \beta \theta H + 2 \gamma \mu I n \mu S \delta C + 2 \gamma \mu S \alpha I n \delta C - \gamma \Lambda \beta \delta C + 2 \gamma \mu I n \mu S \theta C + 2 \gamma \mu S \alpha I n \theta C - \gamma \Lambda \beta \theta C + 2 \gamma \mu I n \mu R \mu S + 2 \gamma \mu R \mu S \alpha I n - \gamma \mu R \Lambda \beta - \gamma \mu R \alpha H \delta C - \gamma \mu R \alpha H \theta C - \gamma \mu R \delta C \theta H - \gamma \mu R \theta C \theta H - \mu I n \Lambda \beta \alpha H + 2 \mu I n \mu S \alpha I n \theta H - \mu I n \Lambda \beta \theta H - \Lambda \beta \alpha I n \theta H + 2 \mu I n \mu S \alpha I n \delta C - \mu I n \Lambda \beta \delta C - \Lambda \beta \alpha I n \delta C + 2 \mu I n \mu S \alpha I n \theta C - \mu I n \Lambda \beta \theta C - \Lambda \beta \alpha I n \theta C + 2 \mu I n \mu R \mu S \alpha I n - \mu I n \mu R \Lambda \beta - \mu R \Lambda \beta \alpha I n - \mu I n \mu R \alpha H \delta C - \mu I n \mu R \alpha H \theta C - \mu I n \mu R \delta C \theta H - \mu I n \mu R \theta C \theta H - \mu R \alpha H \alpha I n \delta C - \mu R \alpha H \alpha I n \theta C - \mu R \alpha I n \delta C \theta H - \mu R \alpha I n \theta C \theta H + \mu S \alpha H \alpha I n^2)$$

> $b4 := \text{factor}(\text{coeff}(\text{poli2}, \lambda, 1));$

$$\begin{aligned}
 b4 := & -\frac{1}{\mu I n + \gamma + \alpha I n} \left(2 \gamma \mu S \alpha H \alpha I n \delta C + 2 \gamma \mu S \alpha H \alpha I n \theta C + 2 \gamma \mu S \alpha I n \delta C \theta H \right. \\
 & + 2 \gamma \mu S \alpha I n \theta C \theta H - \gamma \Lambda \beta \alpha H \delta C - \gamma \Lambda \beta \alpha H \theta C - \gamma \Lambda \beta \delta C \theta H - \gamma \Lambda \beta \theta C \theta H \\
 & + 2 \gamma \mu I n \mu R \mu S \alpha H + 2 \gamma \mu I n \mu R \mu S \delta C + 2 \gamma \mu I n \mu R \mu S \theta C + 2 \gamma \mu I n \mu R \mu S \theta H \\
 & + 2 \gamma \mu I n \mu S \alpha H \delta C + 2 \gamma \mu I n \mu S \alpha H \theta C + 2 \gamma \mu I n \mu S \delta C \theta H + 2 \gamma \mu I n \mu S \theta C \theta H \\
 & + 2 \gamma \mu R \mu S \alpha H \alpha I n + 2 \gamma \mu R \mu S \alpha I n \delta C + 2 \gamma \mu R \mu S \alpha I n \theta C + 2 \gamma \mu R \mu S \alpha I n \theta H \\
 & - \gamma \mu R \Lambda \beta \alpha H - \gamma \mu R \Lambda \beta \delta C - \gamma \mu R \Lambda \beta \theta C - \gamma \mu R \Lambda \beta \theta H + 2 \mu I n \mu R \mu S \alpha H \alpha I n \\
 & + 2 \mu I n \mu R \mu S \alpha I n \delta C + 2 \mu I n \mu R \mu S \alpha I n \theta C + 2 \mu I n \mu R \mu S \alpha I n \theta H - \mu I n \mu R \Lambda \beta \alpha H \\
 & - \mu I n \mu R \Lambda \beta \delta C - \mu I n \mu R \Lambda \beta \theta C - \mu I n \mu R \Lambda \beta \theta H + 2 \mu I n \mu S \alpha H \alpha I n \delta C \\
 & + 2 \mu I n \mu S \alpha H \alpha I n \theta C + 2 \mu I n \mu S \alpha I n \delta C \theta H + 2 \mu I n \mu S \alpha I n \theta C \theta H - \mu I n \Lambda \beta \alpha H \delta C \\
 & - \mu I n \Lambda \beta \alpha H \theta C - \mu I n \Lambda \beta \delta C \theta H - \mu I n \Lambda \beta \theta C \theta H - \mu R \Lambda \beta \alpha H \alpha I n - \mu R \Lambda \beta \alpha I n \delta C \\
 & - \mu R \Lambda \beta \alpha I n \theta C - \mu R \Lambda \beta \alpha I n \theta H - \Lambda \beta \alpha H \alpha I n \delta C - \Lambda \beta \alpha H \alpha I n \theta C - \Lambda \beta \alpha I n \delta C \theta H \\
 & - \Lambda \beta \alpha I n \theta C \theta H - \mu R \Lambda \beta \alpha H \delta C - \mu R \Lambda \beta \delta C \theta H - \mu R \Lambda \beta \alpha H \theta C - \mu R \Lambda \beta \theta C \theta H \\
 & + \gamma^2 \mu R \mu S \alpha H + \gamma^2 \mu R \mu S \delta C + \gamma^2 \mu R \mu S \theta C + \gamma^2 \mu R \mu S \theta H + \gamma^2 \mu S \alpha H \delta C \\
 & + \gamma^2 \mu S \alpha H \theta C + \gamma^2 \mu S \delta C \theta H + \gamma^2 \mu S \theta C \theta H + \mu I n^2 \mu R \mu S \alpha H + \mu I n^2 \mu R \mu S \delta C \\
 & + \mu I n^2 \mu R \mu S \theta C + \mu I n^2 \mu R \mu S \theta H + \mu I n^2 \mu S \alpha H \delta C + \mu I n^2 \mu S \alpha H \theta C + \mu I n^2 \mu S \delta C \theta H \\
 & + \mu I n^2 \mu S \theta C \theta H + \mu R \mu S \alpha H \alpha I n^2 + \mu R \mu S \alpha I n^2 \delta C + \mu R \mu S \alpha I n^2 \theta C + \mu R \mu S \alpha I n^2 \theta H \\
 & \left. + \mu S \alpha H \alpha I n^2 \delta C + \mu S \alpha H \alpha I n^2 \theta C + \mu S \alpha I n^2 \delta C \theta H + \mu S \alpha I n^2 \theta C \theta H \right)
 \end{aligned}$$

> $b5 := \text{factor}(\text{coeff}(\text{poli2}, \lambda, 0));$

$$b5 := -(\mu I n \mu S + \mu S \gamma + \mu S \alpha I n - \Lambda \beta) (\alpha H + \theta H) (\delta C + \theta C) \mu R$$

Lampiran 3 Perhitungan Maple Untuk Nilai Eigen dan Vektor Eigen

- > *restart* : *with*(*linalg*) : *unprotect*(*gamma*, *rho*, *lambda*) : *gamma* := 'gamma': *rho* := 'rho':
lambda := 'lambda': *with*(*VectorCalculus*) :
- > *local* *Zeta* :
- > $\Lambda := 0.001$: $\beta := 0.17$: $\gamma := 0.05$: $\mu S := 0.001$: $\mu In := 0.003$: $\mu R := 0.002$: $\alpha In := 0.01$
 $\alpha H := 0.00002$: $\theta H := 0.027$: $\theta C := 0.0009$: $\delta C := 0.003$:
- > $dS := \Lambda - \beta \cdot S \cdot In - \mu S \cdot S$:
- > $dIn := \beta \cdot S \cdot In - \alpha In \cdot In - \gamma \cdot In - \mu In \cdot In$:
- > $dH := \alpha In \cdot In - \alpha H \cdot H - \theta H \cdot H$:
- > $dC := \alpha H \cdot H - \theta C \cdot C - \delta C \cdot C$:
- > $dR := \gamma \cdot In + \theta H \cdot H + \theta C \cdot C - \mu R \cdot R$:
- > *TTK* := *solve*({*dS*, *dIn*, *dH*, *dC*, *dR*}, {*S*, *In*, *H*, *C*, *R*}) :
- > *DFE* := *TTK*[1] :
- > *END* := *TTK*[2] :
- > *J* := *Jacobian*([*dS*, *dIn*, *dH*, *dC*, *dR*], [*S*, *In*, *H*, *C*, *R*]);
- $$J := \begin{bmatrix} -0.17 In - 0.001 & -0.17 S & 0 & 0 & 0 \\ 0.17 In & 0.17 S - 0.063 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & -0.02702 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00002 & -0.0039 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0.027 & 0.0009 & -0.002 \end{bmatrix}$$
- > *JE0* := *subs*(*DFE*, *J*);
- $$JE0 := \begin{bmatrix} -0.001 & -0.17 & 0 & 0 & 0 \\ 0. & 0.107 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & -0.02702 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00002 & -0.0039 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0.027 & 0.0009 & -0.002 \end{bmatrix}$$
- > *eigenvalues*(*JE0*);
- 0.001000000000000000, -0.002000000000000000, -0.003900000000000000,
-0.027020000000000000, 0.107000000000000000
- > *eigenvectors*(*JE0*);
- [-0.0039, 1, { [-0. 0 0 1 -0.4736842105] }], [-0.02702, 1,
{ [-0. 0 1 -0.0008650519031 -1.079105574] }], [-0.001, 1, { [1 0 0 0 0] }],
[0.107, 1, { [-1.574074074 1 0.07461572900 0.00001345639838 0.4771985027] }], [-0.002, 1, { [-0. 0 0 0 1] }]
- > *JE1* := *subs*(*END*, *J*);
- $$JE1 := \begin{bmatrix} -0.002698412698 & -0.06300000000 & 0 & 0 & 0 \\ 0.001698412698 & 0. & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & -0.02702 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00002 & -0.0039 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0.027 & 0.0009 & -0.002 \end{bmatrix}$$
- > *eigenvalues*(*JE1*);
- 0.002000000000000000, -0.003900000000000000, -0.027020000000000000,
-0.00134920634900000 + 0.0102557126618201 I, -0.00134920634900000
- 0.0102557126618201 I
- > *eigenvectors*(*JE1*);

- $$\begin{aligned} & [-0.0039, 1, \{ [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -0.4736842105] \}], [-0.02702, 1, \\ & \{ [0 \ 0 \ 1 \ -0.0008650519031 \ -1.079105574] \}], [-0.002, 1, \{ [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \}], [\\ & -0.001349206349 - 0.010255712661, 1, \{ [0. - 1. 1, 0.1627890898 \\ & + 0.021415973791, 0.05181167469 + 0.029041773931, -0.00002966941519 \\ & + 0.00010841899401, -0.1213704206 + 0.93775346661] \}], [-0.001349206349 \\ & + 0.010255712661, 1, \{ [0. + 1. 1, 0.1627890898 - 0.021415973791, 0.05181167469 \\ & - 0.029041773931, -0.00002966941519 - 0.00010841899401, -0.1213704206 \\ & - 0.93775346661] \}] \end{aligned}$$
- > $p1 := -\omega^2 - 0.0003 = -0.01 \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot \tau) - 0.0002702 \cdot \cos(\omega \cdot \tau); p2 := 0.01702 \cdot \omega = -0.01 \cdot \alpha$
 $\cdot \cos(\omega \cdot \tau) + 0.0002702 \cdot \sin(\omega \cdot \tau);$
- $$p1 := -\omega^2 - 0.0003 = -0.01 \omega \sin(\omega \tau) - 0.0002702 \cos(\omega \tau)$$
- $$p2 := 0.01702 \omega = -0.01 \omega \cos(\omega \tau) + 0.0002702 \sin(\omega \tau)$$
- > $a := (-\omega^2 - 0.0003)^2 = (-0.01 \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot \tau) - 0.0002702 \cdot \cos(\omega \cdot \tau))^2;$
 $a := (-\omega^2 - 0.0003)^2 = (-0.01 \omega \sin(\omega \tau) - 0.0002702 \cos(\omega \tau))^2$
- > $b := (0.01702 \cdot \omega)^2 = (-0.01 \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot \tau) + 0.0002702 \cdot \sin(\omega \cdot \tau))^2;$
 $b := 0.0002896804 \omega^2 = (-0.01 \omega \cos(\omega \tau) + 0.0002702 \sin(\omega \tau))^2$
- > $expand(a);$
 $\omega^4 + 0.0006 \omega^2 + 9 \cdot 10^{-8} = 0.0001 \omega^2 \sin(\omega \tau)^2 + 0.000005404 \omega \sin(\omega \tau) \cos(\omega \tau)$
 $+ 7.300804 \cdot 10^{-8} \cos(\omega \tau)^2$
- > $expand(b);$
 $0.0002896804 \omega^2 = 0.0001 \omega^2 \cos(\omega \tau)^2 - 0.000005404 \omega \sin(\omega \tau) \cos(\omega \tau)$
 $+ 7.300804 \cdot 10^{-8} \sin(\omega \tau)^2$
- > $c := expand(a) + expand(b);$
 $c := \omega^4 + 0.0008896804 \omega^2 + 9 \cdot 10^{-8} = 0.0001 \omega^2 \sin(\omega \tau)^2 + 7.300804 \cdot 10^{-8} \cos(\omega \tau)^2$
 $+ 0.0001 \omega^2 \cos(\omega \tau)^2 + 7.300804 \cdot 10^{-8} \sin(\omega \tau)^2$
- > $d := \omega^4 + 0.0008896804 \cdot \omega^2 + 9 \cdot 10^{-8} = (0.0001 \cdot \omega^2 + 7.300804 \cdot 10^{-8}) \cdot (\sin(\omega \cdot \tau))^2$
 $+ \cos(\omega \cdot \tau)^2) :$
- > $e := subs(\sin(\omega \cdot \tau)^2 + \cos(\omega \cdot \tau)^2 = 1, d);$
 $e := \omega^4 + 0.0008896804 \omega^2 + \frac{9}{100000000} = 0.0001 \omega^2 + 7.300804000 \cdot 10^{-8}$
- > $f := \omega^4 + (0.0008896804 - 0.0001) \cdot \omega^2 + 9 \cdot 10^{-8} - 7.300804000 \cdot 10^{-8};$
 $f := \omega^4 + 0.0007896804 \omega^2 + 1.699196000 \cdot 10^{-8}$
- > $solve(f);$
 $0.027704553011, -0.027704553011, 0.0047051187731, -0.0047051187731$
- > $A1 := subs(\omega = 0.02770455301 \cdot I, p1);$

```

A1 := 0.0004675422575 = -0.0002770455301 I sin(0.02770455301 I τ)
      - 0.0002702 cos(0.02770455301 I τ)

> solve(A1);
      -19.49125288 + 113.3962585 I, 177.6349944

> A2 := subs(ω = -0.02770455301 · I, p1);
A2 := 0.0004675422575 = 0.0002770455301 I sin(-0.02770455301 I τ) - 0.0002702 cos(
      -0.02770455301 I τ)

> solve(A2);
      -19.49125288 + 113.3962585 I, 177.6349944

> A3 := subs(ω = 0.004705118773 · I, p1);
A3 := -0.0002778618573 = -0.00004705118773 I sin(0.004705118773 I τ)
      - 0.0002702 cos(0.004705118773 I τ)

> solve(A3);
      100.4299468, -25.64862904

> A4 := subs(ω = -0.004705118773 · I, p1);
A4 := -0.0002778618573 = 0.00004705118773 I sin(-0.004705118773 I τ) - 0.0002702 cos(
      -0.004705118773 I τ)

> solve(A4);
      100.4299468, -25.64862904

> B1 := subs(ω = 0.02770455301 · I, p2);
B1 := 0.0004715314922 I = -0.0002770455301 I cos(0.02770455301 I τ)
      + 0.0002702 sin(0.02770455301 I τ)

> solve(B1);
      177.6349944 + 113.3962585 I, -19.49125286 + 113.3962585 I

> B2 := subs(ω = -0.02770455301 · I, p2);
B2 := -0.0004715314922 I = 0.0002770455301 I cos(-0.02770455301 I τ) + 0.0002702 sin(
      -0.02770455301 I τ)

> solve(B2);
      177.6349944 + 113.3962585 I, -19.49125286 + 113.3962585 I

> B3 := subs(ω = 0.004705118773 · I, p2);
B3 := 0.00008008112152 I = -0.00004705118773 I cos(0.004705118773 I τ)
      + 0.0002702 sin(0.004705118773 I τ)

> solve(B3);
      100.4299468, -25.64862911 + 667.6967799 I

> B4 := subs(ω = -0.004705118773 · I, p2);
B4 := -0.00008008112152 I = 0.00004705118773 I cos(-0.004705118773 I τ)
      + 0.0002702 sin(-0.004705118773 I τ)

> solve(B4);
      100.4299468, -25.64862911 + 667.6967799 I

```

Lampiran 4 M-File Untuk Simulasi Model SIHCR Tanpa dan Dengan Waktu Tunda Dalam Kondisi Bebas Penyakit

```

function udot=rhs(~,u)
    global a beta gamma mu1 mu2 mu3 alpha1 alpha2 theta1 theta2
    delta;
    S=u(1); I=u(2); H=u(3); C=u(4); R=u(5);
    %N=S+I+H+C+R;
    Sdash=a-beta*S*I-mu1*S;
    Idash=beta*S*I-alpha1*I-gamma*I-mu2*I;
    Hdash=alpha1*I-alpha2*H-theta1*H;
    Cdash=alpha2*H-theta2*C-delta*C;
    Rdash=gamma*I+theta1*H+theta2*C-mu3*R;
    udot=[Sdash;Idash;Hdash;Cdash;Rdash];
end

clc; clear all; close all;
global a beta gamma mu1 mu2 mu3 alpha1 alpha2 theta1 theta2 delta;
% Nilai Parameter Ketika Kondisi Bebas Penyakit
a=0.001; beta=0.1; gamma=0.07; mu1=0.001; mu2=0.003; mu3=0.002;
alpha1=0.036; alpha2=0.000083; theta1=0.054; theta2=0.0015;
delta=0.003;

% Model SIHCR Tanpa Waktu Tunda Dalam Kondisi Bebas Penyakit
tn=90;
u0=[0.84; 0.081; 0.000093; 0.000014; 0.08];
[tsol,usol]=ode45(@rhs,[0,tn],u0);
Ssol=usol(:,1); Isol=usol(:,2); Hsol=usol(:,3); Csol=usol(:,4);
Rsol=usol(:,5);

% Plot Grafik Model SIHCR Tanpa Waktu Tunda Dalam Kondisi Bebas
Penyakit
figure(1);
plot(tsol,Ssol,'c','LineWidth',2);hold on;
plot(tsol,Isol,'y','LineWidth',2);
plot(tsol,Hsol,'m','LineWidth',2);
plot(tsol,Csol,'r','LineWidth',2);
plot(tsol,Rsol,'g','LineWidth',2);hold off;
grid on
title('Model SIHCR Tanpa Waktu Tunda Bebas Penyakit');
legend('Susceptible','Infected','Hospitalized','Critical','Recovered');
xlabel('Waktu t (Hari)');
ylabel('Populasi');

% Model SIHCR Dengan Waktu Tunda Dalam Kondisi Bebas Penyakit
global tau;
tau=0.01;
m=input('batas akhir m = ');
dt=0.1;
t=0:dt:m;
pt=length(t);
ymax=1;
S=zeros(1,pt);
I=zeros(1,pt);
H=zeros(1,pt);
C=zeros(1,pt);
R=zeros(1,pt);

```

```

% nilai awal
S(1)=0.84;
I(1)=0.081;
H(1)=0.000093;
C(1)=0.000014;
R(1)=0.08;

for i=1:pt-1
    dS=a-beta*S(i)*I(i)-mu1*S(i);
    S(i)=1-I(i)-H(i)-C(i)-R(i);
    dI=beta*S(i)*I(i)-alpha1*tau-gamma*I(i)-mu2*I(i);
    I(i+1)=I(i)+dI*dt;
    dH=alpha1*tau-alpha2*tau-theta1*H(i);
    H(i+1)=H(i)+dH*dt;
    dC=alpha2*tau-theta2*C(i)-delta*C(i);
    C(i+1)=C(i)+dC*dt;
    dR=gamma*I(i)+theta1*H(i)+theta2*C(i)-mu3*R(i);
    R(i+1)=R(i)+dR*dt;
end
S(pt)=1-I(pt)-H(pt)-C(pt)-R(pt);

% Plot Grafik Model SIHCR Dengan Waktu Tunda Dalam Kondisi Bebas
Penyakit
figure(2);
plot(t,S,'c','LineWidth',2);hold on;
plot(t,I,'y','LineWidth',2);
plot(t,H,'m','LineWidth',2);
plot(t,C,'r','LineWidth',2);
plot(t,R,'g','LineWidth',2);hold off;
grid on; axis([0 m 0 ymax]);
title('Model SIHCR Dengan Waktu Tunda (\tau=0.01');
legend('Susceptible','Infected','Hospitalized','Critical','Recovered');
xlabel('Waktu t (Hari)');
ylabel('Populasi');

global tao;
tao=0.05;
n=input('batas akhir n = ');
xt=0.1;
time=0:xt:n;
nt=length(time);
ymaks=0.2;
s=zeros(1,nt);
i=zeros(1,nt);
h=zeros(1,nt);
c=zeros(1,nt);
r=zeros(1,nt);

% nilai awal
s(1)=0.84;
i(1)=0.081;
h(1)=0.000093;
c(1)=0.000014;
r(1)=0.08;

for j=1:nt-1
    ds=a-beta*s(j)*i(j)-mu1*s(j);

```



```

s(j)=1-i(j)-h(j)-c(j)-r(j);
di=beta*s(j)*i(j)-alpha1*tao-gamma*i(j)-mu2*i(j);
i(j+1)=i(j)+di*xt;
dh=alpha1*tao-alpha2*tao-theta1*h(j);
h(j+1)=h(j)+dh*xt;
dc=alpha2*tao-theta2*c(j)-delta*c(j);
c(j+1)=c(j)+dc*xt;
dr=gamma*i(j)+theta1*h(j)+theta2*c(j)-mu3*r(j);
r(j+1)=r(j)+dr*xt;
end
s(nt)=1-i(nt)-h(nt)-c(nt)-r(nt);

global delay;
delay=0.1;
p=input('batas akhir p = ');
qt=0.1;
waktu=0:qt:p;
rt=length(waktu);
s1=zeros(1,rt);
i1=zeros(1,rt);
h1=zeros(1,rt);
c1=zeros(1,rt);
r1=zeros(1,rt);

% nilai awal
s1(1)=0.84;
i1(1)=0.081;
h1(1)=0.000093;
c1(1)=0.000014;
r1(1)=0.08;

for k=1:rt-1
    ds1=a-beta*s1(k)*i1(k)-mu1*s1(k);
    s1(k)=1-i1(k)-h1(k)-c1(k)-r1(k);
    di1=beta*s1(k)*i1(k)-alpha1*delay-gamma*i1(k)-mu2*i1(k);
    i1(k+1)=i1(k)+di1*qt;
    dh1=alpha1*delay-alpha2*delay-theta1*h1(k);
    h1(k+1)=h1(k)+dh1*qt;
    dc1=alpha2*delay-theta2*c1(k)-delta*c1(k);
    c1(k+1)=c1(k)+dc1*qt;
    dr1=gamma*i1(k)+theta1*h1(k)+theta2*c1(k)-mu3*r1(k);
    r1(k+1)=r1(k)+dr1*qt;
end
s1(rt)=1-i1(rt)-h1(rt)-c1(rt)-r1(rt);

% Plot Grafik Kelas Infected Tanpa dan Dengan Waktu Tunda Dalam
Kondisi Bebas Penyakit
figure(3);
plot(tsol,Isol,'y','LineWidth',2);hold on;
plot(t,I,'r-.','LineWidth',2);
plot(time,i,'k-.','LineWidth',2);
plot(waktu,i1,'m-.','LineWidth',2);hold off;
grid on; axis([0 90 0 ymaks]);
title('Kelas Infected (Bebas Penyakit)');
legend('I','I (\tau=0.01)','I (\tau=0.05)','I (\tau=0.1)');
xlabel('Waktu t (Hari)');
ylabel('Populasi');

```

Lampiran 5 M-File Untuk Simulasi Model SIHCR Tanpa dan Dengan Waktu Tunda Dalam Kondisi Endemik

```

function udot=rhs(~,u)
    global a beta gamma mu1 mu2 mu3 alpha1 alpha2 theta1 theta2
    delta;
    S=u(1); I=u(2); H=u(3); C=u(4); R=u(5);
    %N=S+I+H+C+R;
    Sdash=a-beta*S*I-mu1*S;
    Idash=beta*S*I-alpha1*I-gamma*I-mu2*I;
    Hdash=alpha1*I-alpha2*H-theta1*H;
    Cdash=alpha2*H-theta2*C-delta*C;
    Rdash=gamma*I+theta1*H+theta2*C-mu3*R;
    udot=[Sdash;Idash;Hdash;Cdash;Rdash];
end

clc; clear all; close all;
global a beta gamma mu1 mu2 mu3 alpha1 alpha2 theta1 theta2 delta;
% Nilai Parameter Ketika Kondisi Endemik
a=0.001; beta=0.17; gamma=0.05; mu1=0.001; mu2=0.003; mu3=0.002;
alpha1=0.01; alpha2=0.00002; theta1=0.027; theta2=0.0009;
delta=0.003;

% Model SIHCR Tanpa Waktu Tunda Dalam Kondisi Endemik
tn=90;
u0=[0.84; 0.081; 0.000093; 0.000014; 0.08];
[tsol,usol]=ode45(@rhs,[0,tn],u0);
Ssol=usol(:,1); Isol=usol(:,2); Hsol=usol(:,3); Csol=usol(:,4);
Rsol=usol(:,5);

% Plot Grafik Model SIHCR Tanpa Waktu Tunda Dalam Kondisi Endemik
figure(1);
plot(tsol,Ssol,'c','LineWidth',2);hold on;
plot(tsol,Isol,'y','LineWidth',2);
plot(tsol,Hsol,'m','LineWidth',2);
plot(tsol,Csol,'r','LineWidth',2);
plot(tsol,Rsol,'g','LineWidth',2);hold off;
grid on
title('Model SIHCR Tanpa Waktu Tunda Endemik');
legend('Susceptible','Infected','Hospitalized','Critical','Recovered');
xlabel('Waktu t (Hari)');
ylabel('Populasi');

% Model SIHCR Dengan Waktu Tunda Dalam Kondisi Endemik
global tau;
tau=0.01;
m=input('batas akhir m = ');
dt=0.1;
t=0:dt:m;
pt=length(t);
ymax=1;
S=zeros(1,pt);
I=zeros(1,pt);
H=zeros(1,pt);
C=zeros(1,pt);
R=zeros(1,pt);

```

```

% nilai awal
S(1)=0.84;
I(1)=0.081;
H(1)=0.000093;
C(1)=0.000014;
R(1)=0.08;

for i=1:pt-1
    dS=a-beta*S(i)*I(i)-mu1*S(i);
    S(i)=1-I(i)-H(i)-C(i)-R(i);
    dI=beta*S(i)*I(i)-alpha1*tau-gamma*I(i)-mu2*I(i);
    I(i+1)=I(i)+dI*dt;
    dH=alpha1*tau-alpha2*tau-theta1*H(i);
    H(i+1)=H(i)+dH*dt;
    dC=alpha2*tau-theta2*C(i)-delta*C(i);
    C(i+1)=C(i)+dC*dt;
    dR=gamma*I(i)+theta1*H(i)+theta2*C(i)-mu3*R(i);
    R(i+1)=R(i)+dR*dt;
end
S(pt)=1-I(pt)-H(pt)-C(pt)-R(pt);

% Plot Grafik Model SIHCR Dengan Waktu Tunda Dalam Kondisi Endemik
figure(2);
plot(t,S,'c','LineWidth',2);hold on;
plot(t,I,'y','LineWidth',2);
plot(t,H,'m','LineWidth',2);
plot(t,C,'r','LineWidth',2);
plot(t,R,'g','LineWidth',2);hold off;
grid on; axis([0 m 0 ymax]);
title('Model SIHCR Dengan Waktu Tunda (\tau=0.01');
legend('Susceptible','Infected','Hospitalized','Critical','Recovered');
xlabel('Waktu t (Hari)');
ylabel('Populasi');

global tao;
tao=0.05;
n=input('batas akhir n = ');
xt=0.1;
time=0:xt:n;
nt=length(time);
ymaks=0.35;
s=zeros(1,nt);
i=zeros(1,nt);
h=zeros(1,nt);
c=zeros(1,nt);
r=zeros(1,nt);

% nilai awal
s(1)=0.84;
i(1)=0.081;
h(1)=0.000093;
c(1)=0.000014;
r(1)=0.08;

for j=1:nt-1
    ds=a-beta*s(j)*i(j)-mu1*s(j);
    s(j)=1-i(j)-h(j)-c(j)-r(j);

```

```

    di=beta*s(j)*i(j)-alpha1*tao-gamma*i(j)-mu2*i(j);
    i(j+1)=i(j)+di*xt;
    dh=alpha1*tao-alpha2*tao-theta1*h(j);
    h(j+1)=h(j)+dh*xt;
    dc=alpha2*tao-theta2*c(j)-delta*c(j);
    c(j+1)=c(j)+dc*xt;
    dr=gamma*i(j)+theta1*h(j)+theta2*c(j)-mu3*r(j);
    r(j+1)=r(j)+dr*xt;
end
s(nt)=1-i(nt)-h(nt)-c(nt)-r(nt);

global delay;
delay=0.1;
p=input('batas akhir p = ');
qt=0.1;
waktu=0:qt:p;
rt=length(waktu);
s1=zeros(1,rt);
i1=zeros(1,rt);
h1=zeros(1,rt);
c1=zeros(1,rt);
r1=zeros(1,rt);

% nilai awal
s1(1)=0.84;
i1(1)=0.081;
h1(1)=0.000093;
c1(1)=0.000014;
r1(1)=0.08;

for k=1:rt-1
    ds1=a-beta*s1(k)*i1(k)-mu1*s1(k);
    s1(k)=1-i1(k)-h1(k)-c1(k)-r1(k);
    di1=beta*s1(k)*i1(k)-alpha1*delay-gamma*i1(k)-mu2*i1(k);
    i1(k+1)=i1(k)+di1*qt;
    dh1=alpha1*delay-alpha2*delay-theta1*h1(k);
    h1(k+1)=h1(k)+dh1*qt;
    dc1=alpha2*delay-theta2*c1(k)-delta*c1(k);
    c1(k+1)=c1(k)+dc1*qt;
    dr1=gamma*i1(k)+theta1*h1(k)+theta2*c1(k)-mu3*r1(k);
    r1(k+1)=r1(k)+dr1*qt;
end
s1(rt)=1-i1(rt)-h1(rt)-c1(rt)-r1(rt);

% Plot Grafik Kelas Infected Tanpa dan Dengan Waktu Tunda Dalam
Kondisi Endemik
figure(3);
plot(tsol,Isol,'y','LineWidth',2);hold on;
plot(t,I,'r-.','LineWidth',2);
plot(time,i,'k-.','LineWidth',2);
plot(waktu,i1,'m-.','LineWidth',2);hold off;
grid on; axis([0 90 0 ymaks]);
title('Kelas Infected (Endemik)');
legend('I','I (\tau=0.01)','I (\tau=0.05)','I (\tau=0.1)');
xlabel('Waktu t (Hari)');
ylabel('Populasi');

```

RIWAYAT HIDUP



Ifa Sarifatus Hidayati yang akrab dipanggil Ifa, lahir di Banyuwangi pada tanggal 23 Juli 2000. Anak kedua dari dua bersaudara dari Bapak Samsuri dan Ibu Ani Astutik, serta merupakan adik dari Muhammad Rizzal Anhadi. Pendidikan dasar ditempuh di SDN 1 Kabat dan lulus pada tahun 2012, setelah itu melanjutkan pendidikan menengah pertama di SMPN 2 Rogojampi dan lulus pada tahun 2015. Pendidikan selanjutnya penulis tempuh di SMAN 1 Banyuwangi dari tahun 2015 dan lulus pada tahun 2018. Pada tahun yang sama penulis melanjutkan pendidikan ke jenjang yang lebih tinggi di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dengan mengambil Program Studi Matematika. Selama menempuh pendidikan di perguruan tinggi, penulis pernah menjadi anggota *Mathematics English Club* (MEC) dan anggota tim soal dari sebuah acara yang diselenggarakan oleh HMJ “Integral Matematika” yaitu Kompetisi Olimpiade Matematika (KOMET) Nasional pada tahun 2021.



BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Ifa Sarifatus Hidayati
NIM : 18610062
Fakultas / Program Studi : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Analisis Dinamik Model Penyebaran COVID-19 Pada
Populasi SIHCR Dengan Waktu Tunda
Pembimbing I : Ari Kusumastuti M.Pd., M.Si
Pembimbing II : Erna Herawati, M.Pd

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	13 Januari 2022	Konsultasi Bab I	1.
2.	10 Februari 2022	Konsultasi Revisi Bab I	2.
3.	18 Februari 2022	Konsultasi Bab II dan III	3.
4.	1 Maret 2022	Konsultasi Revisi Bab II dan III	4.
5.	14 Maret 2022	Konsultasi Kajian Agama	5.
6.	18 Maret 2022	Konsultasi Revisi Kajian Agama	6.
7.	8 April 2022	Konsultasi Bab IV	7.
8.	18 April 2022	Konsultasi Kajian Agama	8.
9.	11 Mei 2022	Konsultasi Bab IV	9.
10.	14 Mei 2022	Konsultasi Revisi Kajian Agama	10.
11.	2 Juni 2022	Konsultasi Revisi Bab I, II, dan III	11.
12.	14 Juni 2022	Konsultasi Bab IV dan V	12.
13.	16 Juni 2022	Konsultasi Revisi Bab IV dan V	13.
14.	26 Juli 2022	Konsultasi Kajian Agama	14.
15.	26 September 2022	ACC Keseluruhan	15.

Malang, 26 September 2022

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc

NIP. 19741129 200012 2 005