KAJIAN TERHADAP K-ALJABAR

SKRIPSI

OLEH
MOH. IRFAN KAMIL
NIM. 09610058

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016

KAJIAN TERHADAP K-ALJABAR

SKRIPSI

Diajukan kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh
Moh. Irfan Kamil
NIM. 09610058

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERIMAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016

KAJIAN TERHADAP K-ALJABAR

SKRIPSI

Oleh
Moh. Irfan Kamil
NIM. 09610058

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 14 Juni 2016

Pembimbing I,

Evawati Alisah, M.Pd
NIP. 19720604 199903 2 001

Pembimbing II,

Fachrur Rozi, M.Si
NIP. 19800527 200801 1 012

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

KAJIAN TERHADAP K-ALJABAR

SKRIPSI

Oleh
Moh. Irfan Kamil
NIM. 09610058

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 23 Juni 2016

Penguji Utama	: Dr. Abdussakir, M.Pd	....
Ketua Penguji	: Hairur Rahman, M.Si	....
Sekretaris Penguji	: Evawati Alisah, M.Pd	....
Anggota Penguji	: Fachrur Rozi, M.Si	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Moh. Irfan Kamil
NIM	: 09610058
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Kajian terhadap K-Aljabar

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 14 Juni 2016
Yang membuat pernyataan,

Moh. Irfan Kamil
NIM. 09610058

MOTO

بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَـٰنِ لرَّحِيمِ

Man Jadda Wajada

"Barang siapa yang bersunggguh-sungguh, maka akan berhasil"

PERSEMBAHAN

Untuk:

" Ayah tercinta Moh. Zahri Mahfuddin dan Ibunda tersayang Rohimah

yang telah memberi kasih sayang tak terhingga dan do’a yang

tiada henti untuk penulis.

Semoga menjadi orang tua yang selalu dirindu surga. Amin …”

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Syukur alhamdulillah penulis haturkan ke hadirat Allah Swt. yang telah memberikan segala kemudahan dan hidayah-Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, sekaligus menyelesaikan penulisan skripsi dengan judul **"Kajian terhadap K-Aljabar"** dengan baik. Shalawat dan salam penulis persembahkan kepada Nabi Muhammad Saw. berkat perjuangannya yang telah menghadirkan pencerahan untuk umat manusia dan menjadi motivasi bagi penulis untuk belajar, berusaha dan menjadi yang terbaik.

Dalam menyelesaikan skripsi ini, penulis berusaha dengan sekuat tenaga dan pikiran, namun penulis menyadari bahwa tanpa partisipasi dari banyak pihak skripsi ini tidak dapat terselesaikan. Dengan iringan do'a dan kerendahan hati penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

4. Evawati Alisah, M.Pd selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagai pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Fachrur Rozi, M.Si, selaku dosen pembimbing II skripsi dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Atas bimbingan dan sarannya penulis sampaikan *jazakumullahahsanuljaza'*.
6. Seluruh dosen Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, khususnya dosen matematika dan seluruh civitas jurusan matematika yang telah memberikan bimbingan, motivasi serta inspirasi kepada penulis.
7. Ayahanda Moh. Zahri Mahfuddin dan Ibunda Rohimah yang selalu memberikan kasih sayangnya.
8. Teman-teman seperjuangan di Jurusan Matematika khususnya angkatan 2009.
9. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebutkan satu persatu, terima kasih atas keikhlasan bantuan moral dan spiritual yang sudah diberikan pada penulis.

Akhirnya semoga skripsi ini menjadi khasanah kepustakaan baru yang akan memberi celah manfaat bagi semua pihak. *Amin Ya Rabbal 'Alamin.*

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, Juni 2016

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Kamil, Moh Irfan. 2016. **Kajian terhadap K-Aljabar.** Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) EvawatiAlisah, M.Pd, (II) FachrurRozi, M.Si

Kata kunci: *Grup, Subgrup, K-Aljabar, K-Subaljabar, dan K-Homomorfisme*

K-Aljabar dibangun atas suatu grup dengan menggunakan operasi biner $\odot$ pada $(G,*)$, sehingga untuk setiap x, y di G didefinisikan $x \odot y = x * y^{-1}$ dan e adalah unsur identitas di G, $(G,*,\odot, e)$ memenuhi aksioma-aksioma tertentu disebut K-aljabar. Dalam penelitian ini diperoleh sifat-sifat K-aljabar, K-subaljabar dan K-homomorfisme, misalkan suatu himpunan bagian tidak kosong H dari K-aljabar $(G,*,\odot, e)$ disebut K-subaljabar jika:

1. $e \in H$
2. $h_1 \odot h_2 \in H, \forall\, h_1, h_1 \in H$

Misalkan K_1 dan K_2 merupakan K-aljabar. Suatu pemetaan φ dari K_1 ke K_2, dinotasikan dengan $\varphi: K_1 \to K_2$, disebut K-homomorfisme jika $\forall\, x_1, y_1 \in K_1$ berlaku $\varphi(x_1 \odot y_1) = \varphi(x_1) \odot \varphi(y_1)$, dimana $\varphi(x_1), \varphi(y_1) \in K_2$.

ABSTRACT

Kamil, Moh Irfan. 2016. **Study of the K-algebra**. Thesis. Department of Mathematics Faculty of Science and Technology State Islamic University (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
Supervisor: (I) EvawatiAlisah, M. Pd, (II) FachrurRozi, M.Si.

Keywords: *Group, Subgroup, K-Algebra, K-Sub algebra, and K-Homomorphism*

K-algebra is built on a group by using binary operations $\odot$ on $(G,*)$, so that for every x, y in G defined $x \odot y = x * y^{-1}$ and e is the identity element in G, $(G,*,\odot,e)$ satisfies certain axioms called K-algebra. In this research, the properties of K-algebra, K-sub algebra, and K-homomorphism, for example a non-empty subset H of K-algebra $(G,*,\odot,e)$ is called K-sub algebra if:

1. $e \in H$
2. $h_1 \odot h_2 \in H, \forall h_1, h_1 \in H$

Like $K_1$and K_2 are K-algebra. A mapping φ of K_1 to K_2, denoted by $\varphi: K_1 \rightarrow K_2$ called K-homomorphism if $\forall\, x_1, y_1 \in K_1$ applied $\varphi(x_1 \odot y_1) = \varphi(x_1) \odot \varphi(y_1)$, where $\varphi(x_1), \varphi(y_1) \in K_2$.

ملخص

كامل، محمد عرفان. 2016.**دراسة ك-الجبر**. بحث جامعى. شعبة الرياضيات كلية العلوم وتكنولوجيا جامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج.

المشرفون: أيفاواتى عالسة، الماجستيرة و فحر الرزي، الماجستير

كلمات الرئيسية: مجموعة، مجموعة فرعية، ك-الجبر ، ك-الجبر فرعية، و ك-مفهوم التشاكل

بنيك-الجبر على مجموعة باستخدام العمليات الثنائية $\odot$ على $(G,*)$, بحيث لكل x,y في G تعرف $x \odot y = x * y^{-1}$ و e هو عنصر الهوية في G، $(G,*,\odot,e)$. يلبي بعض البديهيات دعا ك- الجبر.في هذا البحث، وخصائص ك-الجبر، ك-الجبر فرعية ، ك-مفهوم التشاكل ، على سبيل المثال مجموعة فرعية H غير فارغة من ك-الجبر $(G,*,\odot,e)$ ويسمى ك-الجبر فرعية إذا:

1. $e \in H$
2. $h_1 \odot h_2 \in H, \forall\, h_1, h_1 \in H$

مثل K_1 و K_2 هو ك-الجبر .و φ رسم خرائط K_1 إلى K_2، الرمز بواسطة $\varphi: K_1 \to K_2$، ودعا ك-مفهوم التشاكل إذا $\forall x_1, y_1 \in K_1$ تطبيق $\varphi(x_1 \odot y_1) = \varphi(x_1) \odot \varphi(y_1)$ حيث $\varphi(x_1), \varphi(y_1) \in K_2$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ada pepatah yang mengatakan, *"Jika ingin mengenal suatu bangsa, maka kuasailah bahasanya"*. Maksudnya, ketika ingin memahami atau berdialog dengan suatu bangsa, maka kuasailah bahasa yang digunakan. Jika ingin berdialog dengan orang Inggris, gunakanlah bahasa Inggris. Jika ingin berdialog dengan orang Jepang, gunakanlah bahasa Jepang. Jika ingin menguasai al-Quran, maka kuasailah bahasa Arab. Jika ingin memahami atau berdialog dengan alam semesta, jagat raya, dan seisinya, maka juga harus menguasai bahasanya yaitu Matematika.

Alam semesta memuat bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta isinya diciptakan Allah dengan ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdussakir, 2007:79). Dalam al-Quran disebutkan,

إِنَّا كُلَّ شَيۡءٍ خَلَقۡنَٰهُ بِقَدَرٖ ٤٩

Artinya: "*Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran*" (Q.S. al-Qamar/54:49).

Ayat di atas menjelaskan bahwa alam dan isinya diciptakan oleh Allah dengan ukuran, takaran, dan hitungan yang seimbang. Jadi matematika sebenarnya telah ada sejak zaman dahulu, manusia hanya menyimbolkan dari fenomena-fenomena yang ada dalam kehidupan sehari-hari.

Adapun ayat lain yang menjelaskan tentang adanya ilmu matematika adalah al-Quran surat al-Kahfi/18:25 disebutkan,

وَلَبِثُواْ فِي كَهۡفِهِمۡ ثَلَٰثَ مِاْئَةٖ سِنِينَ وَٱزۡدَادُواْ تِسۡعٗا ٢٥

Artinya: " *dan mereka tinggal dalam gua mereka tiga ratus tahun dan ditambah Sembilan tahun (lagi)"* (QS. al-Kahfi/18: 25).

Dari ayat tersebut terdapat operasi penjumlahan yaitu tiga ratus tahun dan ditambah sembilan tahun. Hanya saja, agar lebih mudah pernyataan tersebut dalam dunia matematika sering dinotasikan dengan menggunakan simbol-simbol (angka, huruf dan simbol matematika lainnya).

Struktur aljabar adalah suatu himpunan tak kosong dengan satu atau lebih operasi biner dan memenuhi beberapa aksioma. Selama ini mungkin hanya diketahui grup dan ring saja yang merupakan salah satu contoh dari struktur aljabar, ternyata masih banyak sekali struktur aljabar yang lain salah satunya yaitu K-Aljabar.

Di dalam K-Aljabar dibagi menjadi dua kelas besar berdasarkan grup pembangunnya, yaitu Q-Aljabar apabila grup yang membangun K-Aljabar adalah grup yang komutatif dan B-Aljabar apabila grup yang membangun K-Aljabar adalah grup yang tidak komutatif. Kemudian Q-Aljabar masih dibagi lagi menjadi beberapa kelas, yaitu BCK-Aljabar, BCI-Aljabar dan BCH-Aljabar (Dar & Akram, 2006).

BCK-Aljabar pertama kali diperkenalkan ke dalam matematika oleh Y. Imai dan K. Is$\acute{e}$ki pada tahun 1966. Dari tahun ketahun, ilmu pengetahuan berkembang semakin pesat, begitu juga dengan BCK-Aljabar. Sehingga Imai dan is$\acute{e}$ki memperluas kelas BCK-Aljabar yaitu subkelas dari BCI-Aljabar. Sedangkan Hu dan Li memperluas kelas dalam aljabar abstrak yaitu BCH-Aljabar. Adapun BCI-Aljabar merupakan subkelas dari BCH-Aljabar (Dar & Akram, 2006).

Gagasan mengenai K-Aljabar $(G, *, \odot, e)$ pertama kali diperkenalkan oleh K. H. Dar dan M. Akram (2006). Mereka menjabarkan lebih luas dalam struktur aljabar pada grup $(G,*)$ yaitu K-Aljabar. Adapun K-Aljabar merupakan suatu struktur aljabar yang di bangun atas suatu grup G, dengan e adalah unsur identitas pada G untuk setiap $x, y \in G$. Adapun operasi biner yang digunakan adalah operasi $\odot$, yang didefinisikan sebagai $x \odot y = x * y^{-1} = xy^{-1}$ untuk semua $x, y \in G$ dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu (Dar & Akram, 2006).

Fenomena menarik yang dapat dikaji dari K-Aljabar adalah K-Aljabar juga mempunyai konsep yang hampir sama dengan konsep grup. Jika di dalam grup terdapat konsep subgrup dan homomorfisme, maka dalam K-Aljabar juga akan berlaku yaitu K-Subaljabar dan K-Homomorfisme. Adapun K-Homomorfisme sebenarnya telah dibahas dalam karya ilmiah yang ditulis oleh K. H. Dar dan M. Akram pada tahun 2007. Namun untuk pengembangan pembahasannya, maka dalam penelitian ini akan mengkaji dan membuktikan mengenai beberapa teorema-teorema yang terdapat pada K-Aljabar. Oleh karena itu, maka penulis tertarik untuk mengambil judul **"Kajian terhadap K-Aljabar".**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah yang telah diuraikan di atas, maka penulis merumuskan permasalahan dalam penelitian ini adalah "Bagaimana sifat-sifat yang terkait dengan K- Aljabar?"

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan latar belakang dan rumusan masalah yang tertulis di atas, maka tujuan dari pembahasan penelitian ini adalah untuk mendeskripsikan sifat-sifat yang terkait dengan K-Aljabar.

1.4 Manfaat Penelitian

Hasil penelitian yang berupa pembahasan masalah ini diharapkan dapat memberikan manfaat di antaranya :

a. Menambah pengetahuan dan keilmuan tentang hal-hal yang berkaitan dengan K-Aljabar.

b. Mengembangkan wawasan keilmuan tentang pendeskripsian dan sifat-sifat mengenai K-Aljabar.

1.5 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan (*library research*) atau kajian pustaka, yakni melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi-informasi serta objek-objek yang digunakan dalam pembahasan masalah tersebut.

Adapun langkah-langkah yang akan digunakan oleh peneliti, sebagai berikut:

1. Menelaah dari definisi Aljabar biasa (Aljabar konvensional).
2. Menelaah definisi beberapa pengembangan Aljabar, diantaranya : K-Aljabar, Q-Aljabar, BCK-Aljabar, dll
3. Merumuskan definisi K-Aljabar dengan contoh-contoh dari Aljabar biasa (Aljabar konvensional)
4. Menurunkan sifat-sifat K-Aljabar dengan teorema, lema, bukti serta contohnya.

1.6 Sistematika Penulisan

Agar dalam membaca hasil penelitian ini pembaca mudah memahami dan tidak menemukan kesulitan, maka dalam penyajiannya ditulis berdasarkan suatu sistematika yang secara garis besar dibagi menjadi empat bab, yaitu:

Bab I Pendahuluan

Bagian pendahuluan meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang himpunan, pemetaan, teori grup, sifat-sifat grup, subgrup, homomorfisme grup, K-Aljabar, dan Konsep Himpunan dalam Islam.

Bab III Pembahasan

Pada bagian pembahasan berisi tentang sifat-sifat yang terkait dengan K-Aljabar, serta keterkaitan konsep aljabar dengan penciptaan alam semesta.

Bab IV Penutup

Pada bab ini berisi tentang kesimpulan dan beberapa saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

Bab ini akan diberikan definisi-definisi dan teorema-teorema yang pembahasan, diantaranya adalah himpunan, pemetaan, teori grup, sifat-sifat grup, subgrup, homomorfisme grup, isomorfisme grup, Definisi dari K-Aljabar. Berdasarkan definisi K-Aljabar akan diturunkan sifat-sifat dari K-Aljabar.

2.1 Himpunan

Istilah himpunan seringkali dijumpai ketika mempelajari aljabar abstrak. Hal ini dikarenakan himpunan merupakan dasar dari berbagai pembahasan mengenai struktur aljabar. Definisi himpunan dapat dilihat sebagai berikut:

Definisi 2.1

Himpunan (*set)* didefinisikan sebagai kumpulan atau koleksi objek-objek yang terdefinisi dengan jelas (*well defined)*. Maka "objek" dalam definisi tersebut sangat luas. Objek dapat berupa objek nyata dan dapat juga berupa objek abstrak. Objek dapat berbentuk orang, nama orang, hewan, benda, bilangan, planet, nama hari atau lainnya. Sebagai contoh kumpulan nama-nama hari dalam satu minggu. Himpunan dapat dinyatakan dengan mendaftar semua anggotanya di dalam tanda kurung kurawal yaitu $\{\ \}$ (Abdussakir, 2009:4).

Untuk lebih mempertajam, ada tiga pengertian dasar yaitu himpunan, anggota dan relasi keanggotaan $\in$. Misalkan X himpunan dan a anggota. Penulisan $a \in X$ berarti a anggota X, atau X memuat a. Sebaliknya, penulisan $a \notin X$ berarti a bukan anggota X atau X tidak memuat a. Anggota himpunan X dapat dikatakan juga sebagai unsur himpunan X. Maka ada anggota a yang memenuhi $a \in X$, sehingga X

mempunyai anggota, atau himpunan tak hampa. Sebaliknya, dalam hal himpunan X tidak mempunyai anggota, himpunan X disebut *himpunan hampa* dan ditandai $\emptyset$ (Arifin, 2000:1).

Suatu himpunan dikatakan hingga atau tak hingga sesuai banyaknya anggota yang dikandung. Himpunan bilangan asli antara 1 dan 100 merupakan contoh untuk himpunan hingga. Himpunan yang tidak mempunyai anggota atau himpunan hampa juga merupakan suatu himpunan hingga. Sedangkan himpunan semua bilangan asli merupakan contoh himpunan tak hingga (Arifin, 2000:1).

Contoh:

Didefinisikan himpunan *software under windows*, maka dapat ditulis:

$$A = \{MsWord, MsExcel, Ms\ Power\ Point, \ldots\}$$

atau

$$A = \{x | x: software\ under\ windows\}$$

Masing-masing objek dalam himpunan A disebut anggota atau elemen himpunan dan dapat ditulis,

$$x \in A \text{ artinya } x \text{ anggota himpunan } A$$

Definisi 2.2

Misalkan A dan B himpunan. Himpunan B dinyatakan himpunan bagian (*subset*) dari A, ditulis $B \subseteq A$, jika setiap anggota himpunan B juga merupakan anggota himpunan A.

Dapat dibaca juga bahwa B himpunan bagian dari A, B subset A, B termuat di A, A memuat B. Secara simbolik ditulis

$$B \subseteq A \Leftrightarrow (x \in B \Rightarrow x \in A)$$

Berdasarkan definisi tersebut, jika A sebarang himpunan tak kosong, maka diperoleh bahwa,

$$A \subseteq A \qquad \text{dan} \qquad \emptyset \subseteq A$$

Misalkan A dan B himpunan. Himpunan B dikatakan bukan himpunan bagian dari A ditulis:

$$B \nsubseteq A$$

Jika ada anggota himpunan B yang bukan anggota himpunan A (Abdussakir, 2009:10).

Contoh:

Misalkan $A = \{1,2,3,4,5\}$ dan $B = \{2,4,6\}$.

Maka B bukan himpunan bagian A, karena ada anggota B yang bukan merupakan anggota A, yaitu 6. Jadi dapat ditulis $B \nsubseteq A$.

2.2 Pemetaan

Pemetaan merupakan hal terpenting dalam matematika. Dalam kalkulus, dipelajari pemetaan dengan mengaitkan bilangan real pada bilangan real. Banyak pendekatan yang ditempuh untuk mendefinisikan suatu fungsi. Dalam aljabar fungsi akan didefinisikan langsung berdasarkan dua himpunan A dan himpunan B.

Definisi 2.3

Suatu fungsi dari himpunan S ke T adalah aturan yang mengaitkan setiap unsur S dengan tepat satu unsur T. Unsur S disebut domain dari fungsi, dan himpunan T disebut kodomain (Durbin, 1992:12).

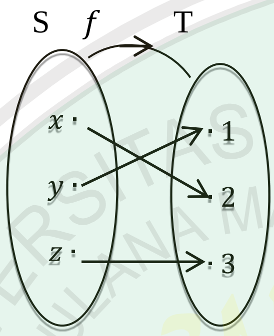
Suatu fungsi f dari himpunan S ke himpunan T didefinisikan sebagai aturan yang memasangkan masing-masing anggota S dengan tepat satu anggota T. Jika $a \in S$ oleh f dipasangkan dengan $b \in T$, maka ditulis $f(a) = b$. Secara umum dapat dinotasikan sebagai:

$$f: S \rightarrow T$$

notasi tersebut menunjukkan bahwa ada suatu fungsi f yang memetakan himpunan S ke himpunan T (Durbin, 1992:12).

Contoh:

Misalkan $S = \{x, y, z\}$dan $T = \{1,2,3\}$. Misal $f: S \rightarrow T$ seperti pada diagram berikut:



Maka, himpunan f diperoleh $f\{(x, 2), (y, 1), (z, 3)\}$, maka f suatu pemetaan dari S ke T.

Definisi 2.4 (Injektif):

Pemetaan $f: S \rightarrow T$ dikatakan satu-satu atau injektif, jika untuk setiap unsur x_1 dan x_2 di S yang dipetakan sama oleh f, yaitu $f(x_1) = f(x_2)$ berlaku $x_1 = x_2$ (Arifin, 2000: 8).

Contoh:

Misalkan pemetaan $f: R \rightarrow R$ dengan$f(x) = 3x + 2$. Akan ditunjukkan bahwa f fungsi injektif atau satu-satu.

Bukti:

Ambil sebarang $x, y \in R$, dengan $f(x) = 3x + 2$.

Misalkan $f: R \rightarrow R$. Karena $f(x) = f(y)$, maka

$$3x + 2 = 3y + 2$$

$$3x + 2 - 2 = 3y + 2 - 2 \qquad \text{(kedua ruas dioperasikan -2)}$$

$$3x = 3y \qquad \text{(dikalikan} \tfrac{1}{3}\text{)}$$

$$x = y \qquad \text{(terbukti)}$$

maka pemetaan $f: R \to R$ dengan $f(x) = 3x + 2$

jadi terbukti bahwa f merupakan fungsi injektif.

Definisi 2.5 (Surjektif):

Pemetaan $f: S \to T$ dikatakan pada atau surjektif, jika untuk setiap unsur $y \in T$ terdapat unsur $x \in S$ yang memenuhi $f(x) = y$ (Arifin, 2000:8).

Contoh:

Misalkan A himpunan bilangan riil dan B himpunan bilangan riil non negatif. Dibentuk pemetaan f dari A ke B yang didefinisikan sebagai $f(x) = x^2$, maka fungsi f merupakan fungsi surjektif.

Bukti:

Misalkan $f: A \to B$ dan didefinisikan $f(x) = x^2$.

Ambil $y \in B$, maka $y \in R$ dan $y \geq 0$.

Akan dibuktikan $x \in R$, sehingga $x^2 = y \geq 0$.

Jadi ada $x \in A$ sehingga $f(x) = x^2 = y \in B$.

Maka f merupakan fungsi surjektif.

Definisi 2.6 (Bijektif):

Pemetaan yang sekaligus injektif dan surjektif disebut pemetaan bijektif atau korespondensi 1-1 (Arifin, 2000:8).

Contoh:

Misalkan R adalah himpunan semua bilangan real.

Pemetaan $f: R \to R$ didefinisikan oleh $f(x) = 4x + 3, \forall x \in R$.

maka f merupakan fungsi bijektif.

Bukti:

Jika $a, b \in R$ sedemikian sehingga $f(a) = f(b)$, yaitu $4a + 3 = 4b + 3$ maka $a = b$. Maka f termasuk fungsi injektif atau 1-1.

Selanjutnya jika $d \in R$, ada $c \in R$ dengan diberikan $c = \frac{d-3}{4}$ sedemikian sehingga $(c) = f(\frac{d-3}{4}) = 4\left(\frac{d-3}{4}\right) + 3 = d$. maka f termasuk fungsi surjektif. Karena f termasuk fungsi injektif dan surjektif, maka f termasuk fungsi bijektif.

2.3 Grup

Salah satu sistem aljabar yang paling sederhana adalah grup. Grup didefinisikan sebagai himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi biner yang memenuhi beberapa aksioma, di antaranya tertutup, asosiatif, memiliki elemen identitas, dan memiliki elemen invers. Apabila salah satu aksioma tidak terpenuhi maka bukan grup.

Definisi 2.7 (Operasi Biner)

Misalkan S suatu himpunan yang tidak kosong. Operasi $*$ pada elemen-elemen S disebut sebagai operasi biner. Apabila setiap dua elemen $a, b \in S$, maka $(a * b) \in S$ atau dapat pula dikatakan bahwa operasi $*$ merupakan pemetaan dari $S \times S$ke S. Operasi $*$ pada S merupakan operasi biner, dapat pula dikatakan bahwa operasi $*$ pada S bersifat tertutup (Sukirman, 2005:35).

Contoh :

Misalkan B merupakan semua himpunan bilangan bulat. Operasi $+$ pada B merupakan operasi biner, sebab operasi $+$ merupakan suatu pemetaan dari $B \times B \rightarrow B$, yaitu $\forall (a, b) \leq (B \times B)$, maka $(a + b) \in B$. Jumlah dua bilangan bulat adalah bilangan bulat pula. Operasi $":"$ atau pembagian pada B bukan merupakan operasi biner pada B, sebab ada $(a, b) \in B \times B$ sedemikian sehingga $(a : b) \notin B$, misal$(3,4) \in B \times B$ dan $(3 : 4) \notin B$.

Misalkan operasi $*$ pada S adalah suatu operasi biner, yaitu

a. Apabila $\forall a, b \in S$ berlaku $a * \text{b} = \text{b} * a$, maka dikatakan bahwa operasi $*$ pada S bersifat komutatif.

b. Apabila $\forall a, b \in S$ berlaku $(a * b) * c = a * (\text{b} * c)$, maka dikatakan bahwa operasi $*$ pada S bersifat asosiatif.

c. Jika ada $e \in S$ sedemikian sehingga $\forall a \in S$ berlaku $a * e = e * a = a$, maka e disebut elemen identitas terhadap operasi $*$.

d. Jika $\forall a \in S, \exists\, b \in S$ sedemikian sehingga $a * b = b * a = e$, maka b disebut invers dari a terhadap operasi $*$ dan invers dari a ditulis a^{-1}.

2.3.1 Teori Grup

Definisi 2.8 (Grup)

Suatu grup merupakan pasangan terurut $(G,*)$ dimana G adalah suatu himpunan dengan $*$ adalah operasi biner pada G yang memenuhi aksioma berikut:

(i) $(a * b) * c = a * (b * c)$ untuk semua $a, b, c \in G$ (asosiatif)

(ii) Ada elemen e di G sehingga $a * e = e * a = a$ untuk semua $a \in G$ (e adalah identitas dari G)

(iii) $\forall\, a \in G$ ada elemen a^{-1} pada G, sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (a^{-1} adalah invers dari a).

(Dummit & Foote, 1991:17-18).

Contoh:

Misal didefinisikan $G = M_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$. Buktikan bahwa $(G, +)$ adalah grup.

Bukti:

1. Akan dibuktikan + operasi biner

   Ambil sebarang $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, maka

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$$

   Karena $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ maka $2a, 2b, 2c, 2d \in \mathbb{Z}$.

   Maka, jelas (G,+) tertutup

2. Bersifat asosiatif

   Ambil sebarang $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l \in \mathbb{Z}$, maka

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a+e)+i & (b+f)+j \\ (c+g)+k & (d+h)+l \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+e+i & b+f+j \\ c+g+k & d+h+l \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+(e+i) & b+(f+j) \\ c+(g+k) & d+(h+l) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}\right]$$

   Terbukti bahwa untuk sebarang $a, b, c \epsilon \mathbb{Z}$ berlaku

$$(a+b)+c = a+(b+c)$$

   Jadi (G,+) asosiatif.

3. Mempunyai elemen identitas

   Elemen identitas untuk penjumlahan adalah $e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, maka

$$e + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

   Sedangkan di pihak lain :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + e = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

G mempunyai elemen identitas $e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Mempunyai invers

Setiap elemen di G mempunyai invers, misal:

$$(a^{-1}) = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix},$$

Maka:

$$(a^{-1}) + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e$$

dan

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (a^{-1}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e$$

G mempunyai invers terhadap penjumlahan yaitu:

$$(a^{-1}) = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$$

Karena G memenuhi (1), (2), (3), dan (4) maka (G,+) adalah grup.

Definisi 2.9

Grup $(G,*)$ disebut grup komutatif jika dan hanya jika untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b = b * a$ (Fraleigh, 1994:39).

Contoh:

Selidiki apakah (Z, +) merupakan grup *abelian*.

Bukti:

Misalkan $a, b, c \in Z$ dengan + merupakan operasi biner,

Akan dibuktikan bahwa $(Z, +)$ adalah grup *abelian* jika memenuhi:

1. $(a+b)+c = a+(b+c)$, untuk semua $a, b, c \in Z$ (yaitu operasi + bersifat asosiatif).
2. Untuk semua$a \in Z$ ada suatu elemen 0 di Z sehingga $a+0=0+a=a$ (0 disebut identitas di Z).
3. Untuk setiap $a \in Z$ ada suatu elemen $-a$ di Z sehingga $a+(-a)=(-a)+a=0$ ($-a$ disebut invers dari a).
4. Untuk semua $a, b, \in Z$ maka $a+b=b+a$ (komutatif).

   Jadi $(Z, +)$ adalah grup komutatif.

Teorema 2.1:

Misal G adalah grup dengan operasi biner $*$. Jika a dan b elemen dari G, maka persamaan linear $a*x=b$ dan $y*a=b$ memiliki solusi unik x dan y dalam G.

Bukti:

Pertama ditunjukkan bahwa solusi $a^{-1}*b$ adalah solusi $a*x=b$

Dicatat bahwa $a*(a^{-1}*b) = (a*a^{-1})*b$ (asosiatif)

$= e*b$ (definisi a^{-1})

$= b$

Akan ditunjukkan bahwa solusi $b*a^{-1}$ adalah solusi $y*a=b$

$$y*a=b$$

$$(b*a^{-1})*a = b*(a^{-1}*a)$$

$$= b*e$$

$$= b$$

Sehingga $x=a^{-1}*b$ adalah solusi dari $a*x=b$. Dengan cara yang sama $y=b*a^{-1}$ adalah solusi dari $y*a=b$.

(Fraleigh, 2003:41-42)

2.3.2 Subgrup

Definisi 2.10

Misalkan G adalah grup. Maka subset H dari G adalah subgrup dari G jika H adalah himpunan tidak kosong dan H adalah tertutup terhadap hasil operasi dan inversnya ($x, y \in H$, berarti $x^{-1} \in H$ dan $xy \in H$). Jika H adalah subgrup dari G, maka dapat juga ditulis dengan $H \subseteq G$. (Dummit dan Foote, 1991:45).

Contoh:

Misalkan $2Z = \{2n|n \in Z\} = \{0,2,-2,4,-4, \ldots\}$ dengan Z bilangan bulat terhadap operasi penjumlahan $(+)$. Buktikan bahwa $(2Z, +)$merupakan subgrup.

Bukti:

a. Untuk membuktikan bahwa operasinya biner.

   Ambil $x, y \in 2Z$, maka$x = 2m$ dan $y = 2n$, untuk suatu $m, n \in 2Z$.

   Maka $x + y = 2m + 2n = 2(m + n) \in 2Z$,

   Jadi $m + n \in 2Z$ bersifat tertutup pada operasi biner +.

b. Untuk membuktikan asosiatif.

   Karena $(Z, +)$, Maka $x + (y + z) = (x + y) + z$.

   Jadi operasi $+$ bersifat asosiatif.

c. Untuk membuktikan elemen identitas.

   Untuk setiap $x \in 2Z$ maka $0 + 2n = 2n + 0 = 2n$

   dengan 0 adalah elemen identitas.

d. Untuk membuktikan invers.

   Ambil$x \in 2Z$ maka $x = 2m$. Untuk setiap $m \in Z$, Maka $(-m) \in Z$.

   $y = 2(-m) = -2m \in 2Z$

   $x + y = 2m + (-2m) = 0$

$y + x = (-2m) + 2m = 0$

Jadi $y = x^{-1} = -x$.

Maka dapat disimpulkan bahwa bilangan bulat genap $2Z$ merupakan subgrup karena terhadap operasi yang sama dengan Z juga merupakan grup.

Teorema 2.2

Jika H suatu subset dari grup G, maka H adalah subgrup dari G jika dan hanya jika $\forall\, a, b \in H$ berlaku

(i) $ab \in H$

(ii) $a^{-1} \in H$

Bukti:

Jika H subgrup dari G, maka H suatu grup, sehingga (i) dan (ii) dipenuhi. Sebaliknya, jika $a \in H$ maka menurut (ii) $a^{-1} \in H$, selanjutnya menurut (i) , maka $aa^{-1} = a^{-1}a = e \in H$. Jika terdapat $a, b, c \in H$ dan H subset dari G, maka $a, b, c \in G$, sehingga $(ab)c = a(bc)$, yaitu memenuhi sifat asosiatif. Sehingga dapat disimpulkan bahwa H suatu grup dan karena H subset dari G, maka H subgrup dari G (Sukirman, 2005: 55).

2.3.3 Homomorfisme Grup

Pada bagian ini, akan diuraikan tentang suatu fungsi yang dapat dibangun dari suatu grup kepada grup lainnya (mungkin ke dirinya sendiri) dan memenuhi sifat-sifat tertentu.

Definisi 2.11 (Homomorfisme Grup)

Diketahui $(G, \circ)$ dan $(G', *)$ merupakan suatu grup. Maka suatu fungsi $\varphi: G \rightarrow G'$ disebut Homomorfisme jika dan hanya jika didefinisikan untuk setiap $a, b \in G$, maka berlaku $\varphi(a \circ b) = \varphi(a) * \varphi(b)$ (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:252).

Ada beberapa definisi khusus mengenai homomorfisme grup pada fungsi f yaitu apabila fungsi f surjektif atau onto, maka homomorfisme f dari G ke G' disebut Epimorfisme, untuk G' merupakan pemetaan homomorfik dari grup G. Maka dapat dikatakan $(G,\circ)$ adalah homomorfik $(G',*)$, dan dapat ditulis:

$$(G,\circ) \approx (G',*)$$

Apabila fungsi f injektif atau satu-satu, maka homomorfisme f disebut Monomorfisme, sedangkan apabila fungsi f surjektif dan injektif, maka homomorfisme f disebut Isomorfisme (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:252).

Contoh:

Diberikan $(N,+)$ dan $(M,+)$ keduanya adalah grup, dengan $N = \{x + y\sqrt{2}\ | x, y \in Z\}$dan $N = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in Z\right\}$. Misal $\varphi: N \to M$ dan didefinisikan dengan $\varphi(x + y\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ untuk setiap $x + y\sqrt{2} \in N$, maka selidiki apakah $\varphi: N \to M$ adalah Homomorfisme.

Bukti:

Ambil sebarang$x + y\sqrt{2}$dan$p + q\sqrt{2} \in N$, maka

$$\begin{aligned} \varphi[(x + y\sqrt{2}) + (p + q\sqrt{2})] &= \varphi[(x + p) + (y + q)\sqrt{2}] \\ &= \begin{pmatrix} x + p & y + q \\ -(y + q) & x + p \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x + p & y + q \\ -y - q & x + p \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix} \\ &= \varphi(x + y\sqrt{2}) + \varphi(p + q\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Jadi φ adalah homomorfisme.

Teorema 2.3

Misalkan $\varphi: G \to G'$ suatu homomorfisme grup, maka:

a. $\varphi(e) = e'$, dengan e dan e' berturut-turut menyatakan unsur identitas dari grup G dan G'.

b. $\varphi(a^{-1}) = \left(\varphi(a)\right)^{-1}$ untuk semua unsur $a \in G$.

Bukti:

a. Diketahui $ee = e$. Jadi $\varphi(e)\varphi(e) = \varphi(e)$.

   Maka hubungan ini mengakibatkan $\varphi(e) = e'$

b. Untuk setiap $a \in G$ berlaku $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

   Diketahui $\varphi(a)\ \varphi(a^{-1}) = \varphi(a^{-1})\ \varphi(a) = \varphi(e) = e'$

   Karena unsur invers dari $\varphi(a)$ di G' tunggal.

   Maka $\varphi(a^{-1}) = \left(\varphi(a)\right)^{-1}$

(Arifin, 2000: 55-56)

2.3.4 Isomorfisme

Dua grup sekilas nampak berbeda, tetapi dapat dibuktikan sama dengan penamaan sederhana pada elemen grup tersebut. Yaitu dengan menunjukkan korespondensi satu-satu antara elemen dua grup dan antara operasi grup. Dalam hal ini disebut dengan isomorfisme grup.

Definisi 2.12 (Isomorfisme)

Diketahui $(G,\cdot)$ dan $(H,\circ)$ merupakan suatu grup isomorfik jika fungsi $\phi : G \to H$ adalah satu-satu dan onto sehingga operasi grup diawetkan yaitu $\phi(a \cdot b) = \phi(a) \circ \phi(b)$ untuk setiap $a, b \in G$. Jika G isomorfik terhadap H dapat ditulis $G \cong H$. Pemetaan ϕ disebut Isomorfisme. (Thomas, 2013: 144).

Contoh:

$Z_4 \cong \langle i \rangle$, didefinisikan pemetaan $\phi: Z_4 \to \langle i \rangle$ dengan $\phi(n) = i^n$. Pemetaan ϕ adalah satu-satu dan onto karena

$$\phi(0) = 1$$

$$\phi(1) = i$$

$$\phi(2) = -1$$

$$\phi(3) = -i$$

Maka
$$\begin{aligned} \phi(m+n) &= i^{m+n} \\ &= i^m i^n \\ &= \phi(m)\phi(n) \end{aligned}$$

Jadi ϕ adalah isomorfisme.

Teorema 2.4

Misalkan $\phi: G \to H$ adalah isomorfisme dari dua grup, sehingga jika G adalah abelian maka H adalah abelian.

Bukti:

Misalkan h_1 dan h_2 adalah elemen dari H. Dimana ϕ adalah onto ada $g_1, g_2 \in G$ sedemikian hingga $\phi(g_1) = h_1$ dan $\phi(g_2) = h_2$ oleh karena itu

$$\begin{aligned} h_1 h_2 &= \phi(g_1)\phi(g_2) \\ &= \phi(g_1\, g_2) \\ &= \phi(g_2\, g_1) \\ &= \phi(g_1)\phi(g_2) \\ &= h_1 h_2 \end{aligned}$$

(Thomas, 2013: 146)

2.4 K-Aljabar

Struktur aljabar merupakan himpunan yang tidak kosong dengan paling sedikit satu atau lebih operasi biner dan aksioma-aksioma yang berlaku. Salah satu struktur aljabar tersebut adalah K-Aljabar. K-Aljabar dibangun atas grup dengan menggunakan operasi biner $\odot$ pada $(G,*)$, sehingga untuk setiap x, y di G didefinisikan $x \odot y = x * y^{-1}$ dan e adalah unsur identitas di G.

Definisi 2.12

K-Aljabar $(G,*,\odot,e)$ adalah struktur aljabar yang didefinisikan pada grup $(G,*)$, dimana setiap elemen bukan identitas tidak berorder 2, dan memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. $(x \odot y) \odot (x \odot z) = (x \odot ((e \odot z) \odot (e \odot y))) \odot x$
2. $x \odot (x \odot y) = (x \odot (e \odot y)) \odot x$
3. $x \odot x = e$
4. $x \odot e = x$
5. $e \odot x = x^{-1}$ $,\forall\, x, y, z \in G$ (Dar & Akram, 2006)

Jika grup $(G,*)$ merupakan grup komutatif, maka aksioma 1 dan 2 menjadi:

1. $(x \odot y) \odot (x \odot z) = z \odot y$
2. $x \odot (x \odot y) = y$

(Dar & Akram, 2006)

Contoh:

Misalkan $(Z,+)$ adalah grup dengan identitas $e = 0$. Didefinisikan operasi $\odot$ pada Z, sehingga $\forall\, a, b, c \in Z$, maka $a \odot b = a + b^{-1} = a + (-b)$. Akan dibuktikan bahwa $(Z,+,\odot,0)$ adalah K-Aljabar.

Bukti:

1. $(a \odot b) \odot (a \odot c) = (a + (-b)) \odot (a + (-c))$

$= (a - b) + (a - c)^{-1}$

$= (\mathrm{a} - \mathrm{b}) - (\mathrm{a} - \mathrm{c})$

$= (a - a) + (c - b)$

$= c - b$

$= c + (-b)$

$= c + (b)^{-1}$

$= c \odot b$

Jadi $(a \odot b) \odot (a \odot c) = (c \odot b)$.

2. $a \odot (a \odot b) = a \odot (a + (-b))$

$= a + (a - b)^{-1}$

$= a - (a - b)$

$= (a - a) + b$

$= b$

Jadi $a \odot (\mathrm{a} \odot \mathrm{b}) = \mathrm{b}$.

3. $a \odot a = a + (-a)$

$= a - a$

$= 0$

Jadi $a \odot a = 0$.

4. $a \odot 0 = a + 0$

$= a$

Jadi $a \odot 0 = a$.

5. $0 \odot a = 0 + a^{-1}$

$= (a)^{-1}$

Jadi $0 \odot a = x^{-1}$.

Maka $(Z, +, \odot, 0)$ adalah K-Aljabar.

Teorema 2.4

Misal $(G,*)$ merupakan grup komutatif, dan $(G,*,\odot, e)$ adalah K-Aljabar, maka $\forall\ x, y, z \in G$ berlaku $(x \odot y) \odot z = x \odot (z \odot y^{-1})$.

Bukti:

$(x \odot y) \odot z = (x * y^{-1}) * z^{-1}$ (definisi K-Aljabar)

$= x * (y^{-1} * z^{-1})$ (asssosiatif)

$= x * (y * z)^{-1}$ (aturan invers)

$= x * (z * y)^{-1}$ (komutatif)

$= x \odot (z * y)$ (definisi K-Aljabar)

$= x \odot (z * (y^{-1})^{-1})$ (definisi K-Aljabar)

$= x \odot (z \odot y^{-1})$ (definisi K-Aljabar)

Contoh:

Misalkan $(Z, +)$ adalah suatu grup bilangan bulat dengan identitas $e = 0$. Didefinisikan operasi $\odot$ pada Z, sehingga $\forall\ a, b, c \in Z$, maka $a \odot b = a + (-b)$.

$(a \odot b) \odot c = (a + (-b)) + (-c)$ (definisi K-Aljabar)

$= (a - b) - c$

$= a - (b - c)$ (asosiatif)

$= a - (c - b)$ (komutatif)

$= a + \big(-(c + b)\big)$

$= a \odot (c + b)$ (definisi K-Aljabar)

$= a \odot (c + (-b)^{-1})$ (definisi K-Aljabar)

$= a \odot (c \odot b^{-1})$ (definisi K-Aljabar)

Jadi $(a \odot b) \odot c = a \odot (c \odot b^{-1})$.

2.5 Konsep Himpunan dalam Islam

Al-Quran adalah pedoman hidup bagi manusia. Di dalam al-Quran terkandung hukum Allah SWT yang harus dipatuhi oleh manusia agar selamat di dunia dan di akhirat.

Di dalam al-Quran juga terkandung kajian tentang matematika. Al-Quran mengelompokkan manusia atas beberapa kelompok sesuai dengan amalnya. Pengelompokkan manusia dalam al-Quran sesuai dengan teori himpunan pada matematika yang dipelajari pada cabang matematika aljbar abstrak. Himpunan adalah kumpulan objek-objek yang jelas syarat keanggotaannya. Pengelompokkan manusia terdapat pada surat al-Fatihah/1:7 berikut:

صِرَٰطَ ٱلَّذِينَ أَنۡعَمۡتَ عَلَيۡهِمۡ غَيۡرِ ٱلۡمَغۡضُوبِ عَلَيۡهِمۡ وَلَا ٱلضَّآلِّينَ ٧

Artinya: *"(yaitu) jalan orang-orang yang telah Engkau beri nikmat kepada mereka; bukan (jalan) mereka yang dimurkai dan bukan (pula jalan) mereka yang sesat".*

Dalam ayat 7 surat al-Fatihah ini dijelaskan manusia terbagi menjadi tiga kelompok, yaitu (1) kelompok yang mendapat nikmat dari Allah SWT, (2) kelompok yang dimurkai, dan (3) kelompok yang sesat (Abdussakir, 2007:110).

Kelompok yang mendapat nikmat adalah umat islam sedangkan kelompok yang dimurkai adalah umat yahudi dan kelompok yang sesat adalah umat nasrani (Tafsir Jalalain, 2008: 275).

BAB III

PEMBAHASAN

Struktur aljabar merupakan himpunan yang tidak kosong dengan paling sedikit sebuah relasi ekuivalensi, satu atau lebih operasi biner dan aksioma-aksioma yang berlaku kemudian akan membentuk suatu sistem baru. Salah satu struktur aljabar tersebut adalah K-aljabar.

Misalkan $G = (G,*)$ suatu grup terhadap operasi biner $*$. Jika e adalah unsur identitas pada G dan untuk setiap x, y di G didefinisikan operasi

$$x \odot y = x * y^{-1}$$

sedemikian sehingga operasi tersebut merupakan operasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu maka akan membentuk struktur aljabar baru yang dinamakan K-aljabar.

K-aljabar mempunyai sifat yang hampir sama dengan grup. Hal ini dapat dilihat dari grup yang mempunyai konsep subgrup dan homomorfisme grup. Sedangkan pada K-aljabar terdapat konsep K-subaljabar dan homomorfisme pada K-aljabar yang disebut K-homomorfisme.

Pada bagian ini akan dibahas mengenai K-aljabar, K-subaljabar, dan K-homomorfisme.

3.1 Beberapa Teorema K-Aljabar

Berikut ini akan diberikan definisi dan contoh dari K-aljabar.

Definisi 3.1

Misalkan $(G,*)$ suatu grup dan pada G didefinisikan operasi $\odot$ sedemikian sehingga $\forall x, y \in G, x \odot y = x * y^{-1}$ maka akan membentuk struktur aljabar baru yaitu $(G,*,\odot,e)$. Suatu $(G,*,\odot,e)$ dinamakan K-aljabar, jika G adalah bukan grup dengan order-2 dan $\forall x, y, z \in G$ berlaku:

6. $(x \odot y) \odot (x \odot z) = (x \odot ((e \odot z) \odot (e \odot y))) \odot x$
7. $x \odot (x \odot y) = (x \odot (e \odot y)) \odot x$
8. $x \odot x = e$
9. $x \odot e = x$
10. $e \odot x = x^{-1}$ $, \forall x, y, z \in G$

Jika grup $(G,*)$ merupakan grup komutatif, maka aksioma 1 dan 2 menjadi:

3. $(x \odot y) \odot (x \odot z) = z \odot y$
4. $x \odot (x \odot y) = y$

Contoh 3.1

$G = \{-i, i, 1, -1\}$ terhadap operasi perkalian merupakan grup, lebih tepatnya merupakan grup siklik dengan generator i, jika pada G dilengkapi dengan operasi $\odot$, sebagaimana (seperti) diberikan tabel berikut:

Tabel 3.1 Operasi $\odot$ pada G

$\odot$	$-i$	i	1	-1
$-i$	1	-1	$-i$	i
i	-1	1	i	$-i$
1	i	$-i$	1	-1
-1	$-i$	i	-1	1

Bukti:

$-i \odot -i = 1$	$i \odot -i = -1$	$1 \odot -i = -i$	$-1 \odot -i = i$
$-i \odot i = -1$	$i \odot i = 1$	$1 \odot i = i$	$-1 \odot i = -i$
$-i \odot 1 = i$	$i \odot 1 = -i$	$1 \odot 1 = 1$	$-1 \odot 1 = -1$
$-i \odot -1 = -i$	$i \odot -1 = i$	$1 \odot -1 = -1$	$-1 \odot -1 = 1$

Maka $(G,\cdot,\odot,e)$ membentuk K-aljabar. Hal ini dapat dilihat dari tabel bahwa aksioma 1 sampai 5 dipenuhi oleh G.

Contoh 3.2

$S_3 = \{e, a, b, x, y, z\}$, dengan $e = (1), a = (1\ 2\ 3), b = (1\ 3\ 2), x = (1\ 2), y = (1\ 3)$, $z = (2\ 3)$ terhadap operasi komposisi fungsi $(S_3,\circ)$ membentuk grup, lebih tepatnya merupakan grup permutasi. Jika pada S_3 dilengkapi dengan operasi $\odot$, sebagaimana (seperti) diberikan tabel berikut:

Tabel 3.2 Operasi $\odot$ pada S_3

$\odot$	e	x	y	z	a	b
e	e	x	y	z	a	b
x	x	e	a	b	z	y
y	y	b	e	a	x	z
z	z	a	b	e	y	x
a	a	z	x	y	e	b
b	b	y	z	x	a	e

Maka $(S_3,\circ,\odot,e)$ membentuk K-aljabar. Hal ini dapat dilihat dari tabel, bahwa aksioma 1 sampai 5 dari K-aljabar dipenuhi oleh S_3.

Selanjutnya akan ditinjau sifat dari K-aljabar $(G,*,\odot,e)$, jika G merupakan grup komutatif.

Teorema 3.1

Misalkan $(G,*)$ grup komutatif. Jika $(G,*,\odot,e)$ adalah suatu K-aljabar, maka $\forall x,y,z \in G$ berlaku:

1. $(e \odot x) \odot (e \odot y) = y \odot x = e \odot (x \odot y)$
2. $(x \odot z) \odot (y \odot z) = x \odot y$
3. $e \odot (e \odot x) = x$
4. $x\odot (e \odot y) = y \odot (e \odot x)$

Bukti:

1. $(e \odot x) \odot (e \odot y) = x^{-1} \odot y^{-1}$

$$= x^{-1} * y$$

$$= y * x^{-1}$$

$$= y \odot x$$

$$(e \odot x) \odot (e \odot y) = \Big(e \odot \big((e \odot y) \odot (e \odot y)\big)\Big) \odot e$$

$$= (e \odot (y^{-1} \odot x^{-1})) \odot e$$

$$= e \odot (y^{-1} \odot x^{-1})$$

$$= e \odot (y^{-1} * x)$$

$$= e \odot (x * y^{-1})$$

$$= e \odot (x \odot y)$$

Karena $(e \odot x) \odot (e \odot y) = y \odot x$ dan $(e \odot x) \odot (e \odot y) = e \odot (x \odot y)$ maka $y \odot x = e \odot (x \odot y)$

2. $(x \odot z) \odot (y \odot z) = (x \odot z) * (y \odot z)^{-1}$

$$= (x * z^{-1}) * (y * z^{-1})^{-1}$$

$$= (x * z^{-1}) * (z * y^{-1})$$

$$= \left(x * (z^{-1} * z)\right) * y^{-1}$$

$$= x * y^{-1}$$

$$= x \odot y$$

3. $e \odot (e \odot x) = e \odot x^{-1}$

$$= e * x$$

$$= x$$

4. $x \odot (e \odot y) = e \odot y^{-1}$

$$= x * y$$

$$= y \odot x^{-1}$$

$$= y \odot (e \odot x)$$

Jika operasi $\odot$ pada $(G,*,\odot,e)$ bersifat komutatif, maka K-aljabar $(G,*,\odot,e)$ bersifat komutatif, sebagaimana diberikan oleh definisi berikut:

Definisi 3.2

Suatu K- aljabar$(G,*,\odot,e)$ dikatakan komutatif jika $\forall x, g \in G$ berlaku $g \odot (e \odot x) = x \odot (e \odot g)$.

Contoh 3.3

Berdasarkan **Contoh 3.1** diketahui bahwa $G = \{-i, i, 1, -1\}$ terhadap operasi pergandaan merupakan K-aljabar. Berdasarkan Tabel 3.1 dapat dilihat bahwa **Definisi 3.2** dipenuhi, sehingga $(G,*,\odot,e)$ merupakan K-aljabar yang komutatif.

Teorema 3.2

Suatu K-aljabar $(G,*,\odot,e)$ dikatakan komutatif jika dan hanya jika $e \odot x = x$.

Bukti:

($\Rightarrow$)

Misalkan $(G,*,\odot,e)$ komutatif terhadap operasi $\odot$. Akan ditunjukkan $e \odot x = x$. Diambil sebarang unsur $x, g \in G$, karena $(G,*,\odot,e)$ K-aljabar komutatif, maka

$$\begin{aligned} g \odot (e \odot x) &= x \odot (e \odot g) \\ &= x \odot (g \odot e) \\ &= x \odot g \\ &= g \odot x \end{aligned}$$

Karena $g \odot (e \odot x) = g \odot x$, maka $(e \odot x) = x$.

($\Leftarrow$)

Misalkan $e \odot x = x$, menurut definisi operasi $\odot$, $e \odot x = x^{-1}$ sehingga diperoleh $x = x^{-1}$. Akan ditunjukkan bahwa $(G,*,\odot,e)$ suatu K-aljabar yang komutatif. Diambil sebarang unsur $x, g \in G$, maka:

$$\begin{aligned} g \odot (e \odot x) &= g \odot x \\ &= g \odot x^{-1} \\ &= g * x \\ &= x * g \\ &= x * (e * g^{-1})^{-1} \\ &= x \odot (e \odot g) \end{aligned}$$

Karena $g \odot (e \odot x) = x \odot (e \odot g)$, maka $(G,*,\odot,e)$ suatu K-aljabar yang komutatif.

Selanjutnya akan ditinjau sifat dari K-aljabar $(G,*,\odot,e)$, jika tidak komutatif.

Teorema 3.3

Misalkan $(G,*,\odot,e)$ suatu K-aljabar. Jika $(G,*)$ tidak komutatif, maka $\forall x,y,z,u,v \in G$ berlaku:

1. $(x \odot y) \odot (u \odot v) = (x \odot (e \odot v) \odot (e \odot y)) \odot u$
2. $(x \odot y) \odot z = x \odot (z \odot (e \odot y))$
3. $e \odot (e \odot x) = x$
4. $e \odot (x \odot y) = y \odot x = (e \odot x) \odot (e \odot y)$
5. $x \odot y = e$ jika dan hanya jika $x = y$

Bukti:

Diambil sebarang unsur $x,y,z,u,v \in G$ dan misalkan e unsur identitas di G, maka:

1. $(x \odot y) \odot (u \odot v) = (x * y^{-1}) \odot (u * v^{-1})$

$= (x * y^{-1}) * (u * v^{-1})^{-1}$

$= (x * y^{-1}) * (v * u^{-1})$

$= (x * y^{-1} * v) * u^{-1}$

$= (x * (v^{-1} * y)^{-1}) * u^{-1}$

$= (x \odot (v^{-1} \odot y^{-1}) \odot u$

$= (x \odot (e \odot v) \odot (e \odot y)) \odot u$

2. $(x \odot y) \odot z = (x * y^{-1}) * z^{-1}$

$= x * (y^{-1} * z^{-1})$

$= x * (z * y)^{-1}$

$= x \odot (z \odot y^{-1})$

$= x \odot (z \odot (e \odot y))$

3. $e \odot (e \odot x) = (e \odot x)^{-1}$

$= (e * x^{-1})^{-1}$

$= x$

4. $e \odot (x \odot y) = (x \odot y)^{-1}$

$= (x * y^{-1})^{-1}$

$= \ y \odot x$

$= y \odot x = (e \odot x) \odot (e \odot y)$

5. (⇒)

Diketahui $x \odot y = e,$ akan dibuktikan $x = y.$ Diambil sebarang unsur $x, y \in G$ dan berlaku $x \odot y = e.$ Karena $y \in G$ dan $y^{-1} \in G$ sehingga:

$$(x \odot y) \odot \ y^{-1} = e \odot \ y^{-1}$$

$$(x * y^{-1}) * y \ = e * \ y$$

$$x * (y^{-1} * y) = e * \ y$$

$$x * e = e * y$$

$$x = y$$

(⇐)

Diketahui $x = y$, akan dibuktikan bahwa $x \odot y = e.$

Diambil sebarang unsur $x, y \in G$, dengan $x = y$, maka

$$x \odot y = y \odot y$$

$$x \odot y = e$$

Jadi terbukti bahwa jika $(G,*)$ tidak komutatif, maka $\forall x, y, z, u, v \in G$ berlaku aksioma 1 sampai 5.

Diantara himpunan bagian – himpunan bagian dari K-aljabar ada yang memiliki sifat K-aljabar terhadap operasi biner yang sama yang dinamakan K-subaljabar. Berikut ini akan dibahas mengenai K-subaljabar.

3.2 K-Subaljabar

Berikut ini diberikan definisi dan contoh dari K-subaljabar.

Definisi 3.3

Suatu himpunan bagian tidak kosong H dari K-aljabar$(G,*,\odot,e)$ disebut K-subaljabar jika:

3. $e \in H$
4. $h_1 \odot h_2 \in H, \forall h_1, h_1 \in H$

Contoh 3.4

Berdasarkan **Contoh 3.3** diketahui bahwa $(S_3,\circ,\odot,e)$ merupakan K-aljabar. Ditinjau himpunan $A_3 = \{e,a,b\}$ yang merupakan himpunan bagian dari S_3. Operasi $\odot$ pada A_3 diberikan oleh tabel berikut:

Tabel 3.3 Operasi $\odot$ pada A_3

$\odot$	e	a	b
e	e	b	a
a	a	e	b
b	b	a	e

Sehingga karena dipenuhi:

1. $A_3 = \{e,a,b\}$ maka $e \in A_3$
2. Dari tabel terlihat bahwa $\odot$ merupakan operasi biner pada A_3.

Maka $(A_3,\circ,\odot,e)$ merupaka K-subaljabar dari $(S_3,\circ,\odot,e)$.

Selanjutnya akan ditinjau keterkaitan antara subgrup dan K-subaljabar, sebagaimana diberikan oleh teorema berikut:

Teorema 3.4

Misalkan $(G,*,\odot,e)$ adalah suatu K-aljabar dan $g \in G$. Jika H suatu subgrup dari G. Maka $H_{g^2} = \{g \odot (g \odot x) : x \in H\}$ adalah suatu K-subaljabar dari $(G,*,\odot,e)$.

Bukti:

1. Akan ditunjukkan $e \in H_{g^2}$. Misalkan $e$unsur identitas dari G, maka $e \in H$ dan berlaku:

$$\begin{aligned} e = e * e &= (g * g^{-1}) * e \\ &= g * (g^{-1} * e) \\ &= g * (e * g)^{-1} \\ &= g \odot (e * g) \\ &= g \odot (g * e) \\ &= g \odot (g \odot e) \in H_{g^2} \end{aligned}$$

2. Diambil sebarang unsur $x, y \in H_{g^2}$, dapat dituliskan $x = g \odot (g \odot u)$ dan $y = g \odot (g \odot v)$ untuk suatu $d, v \in H$, maka:

$$x \odot y = \big(g \odot (g \odot u)\big) \odot (g \odot (g \odot v))$$

$$= \Big(g \odot \big((e \odot v) \odot (e \odot u)\big)\Big) \odot g$$

$$= \Big(g \odot \big(e \odot (v \odot u)\big)\Big) \odot g$$

$$= \big(g \odot (u \odot v)\big) \odot g$$

$$= g \odot \Big(g \odot \big(e \odot (u \odot v)\big)\Big)$$

$$= g \odot (g \odot (v \odot u)) \in H_{g^2}$$

Jadi terbukti bahwa $H_{g^2} = \{g \odot (g \odot x) : x \in H\}$ adalah suatu K-subaljabar dari $(G,*,\odot,e)$.

Teorema 3.5

Misalkan $H_!$ dan H_2 merupakan K-subaljabar dari suatu K-aljabar $(G,*,\odot,e)$ maka:

1. $H_1 \cap H_2$ adalah K-subaljabar dari $(G,*,\odot,e)$.
2. $H_1 \odot H_2$ adalah K-subaljabar dari $(G,*,\odot,e)$ jika dan hanya jika $H_2 \odot H_1 = H_1 \odot H_2$.

Bukti:

1. (i) Misalkan $H_!$ dan H_2 merupakan K-subaljabar dari suatu K-aljabar $(G,*,\odot,e)$, maka $e \in H_1$ dan $e \in H_2$. Akibatnya $e \in H_1 \cap H_2$, dengan kata lain$H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$.

   (ii) Diambil sebarang unsur $h_1, h_2 \in H_1 \cap H_2$. Karena $h_1, h_2 \in H_1 \cap H_2$, maka $h_1, h_2 \in H_1$ dan $h_1, h_2 \in H_2$. Selanjutnya, karena H_1, H_2 merupakan K-subaljabar dari $(G,*,\odot,e)$, maka $h_1 \odot h_2 \in H_1$ dan $h_1 \odot h_2 \in H_2$. Dengan demikian $h_1 \odot h_2 \in H_1 \cap H_2$.

Jadi terbukti bahwa $H_1 \cap H_2$ merupakan K-subaljabar dari $(G,*,\odot,e)$.

2. (⇒)

   Misalkan $H_1 \odot H_2$ adalah K-subaljabar dari $(G,*,\odot,e)$, dimana $H_1 \odot H_2 = \{h \mid h = h_1 \odot h_2, h_1 \in H_1\ dan\ h_2 \in H_2\}$ Akan ditunjukkan $H_2 \odot H_1 = H_1 \odot H_2$.

   (i) Diambil sebarang unsur $h \in H_2 \odot H_1$, maka $h = h_2 \odot h_1$untuk suatu $h_1 \in H_1$ dan $h_2 \in H_2$, sehingga:

$$
\begin{aligned}
h &= h_2 \odot h_1 \\
&= e \odot (h_1 \odot h_2) \\
&= (h_1 \odot h_1) \odot (h_1 \odot h_2) \\
&= (h_1 \odot {h_2}^{-1} \odot {h_1}^{-1}) \odot h_1 \\
&= (h_1 * h_2 * h_1) * {h_1}^{-1} \\
&= (h_1 * h_2) * (h_1 * {h_1}^{-1})
\end{aligned}
$$

$= (h_1 * h_2) * e$

$= (h_1 * h_2)$

$= h_1 * h_2{}^{-1} \in H_1 \odot H_2$

Karena $h_2 \in H_2$ dan $(H_2,*)$ grup, maka $h_2{}^{-1} \in H_2$ sehingga $h_1 \odot h_2{}^{-1} \in H_1 \odot H_2$. Dengan demikian $H_2 \odot H_1 \subset H_1 \odot H_2$.

(ii) Diambil sebarang unsur $h_1 \in H_1 \odot H_2$, maka $h = h_1 \odot h_2$ untuk suatu $h_1 \in H_1$ dan $h_2 \in H_2$, sehingga

$h = h_1 \odot h_2$

$= e \odot (h_2 \odot h_1)$

$= (h_2 \odot h_2) \odot (h_2 \odot h_1)$

$= (h_2 \odot h_1{}^{-1} \odot h_2{}^{-1}) \odot h_2$

$= (h_2 * h_1 * h_2) * h_2{}^{-1}$

$= (h_2 * h_1) * (h_2 * h_2{}^{-1})$

$= (h_2 * h_1) * e$

$= (h_2 * h_1)$

$= h_2 * h_1{}^{-1} \in H_2 \odot H_1$

Karena $h_1 \in H_1$ dan $(H_1,*)$ grup, maka $h_1{}^{-1} \in H_1$ sehingga $h_2 \odot h_1{}^{-1} \in H_2 \odot H_1$. Dengan demikian $H_1 \odot H_2 \subset H_2 \odot H_1$. Dari (i) dan (ii) terbukti bahwa $H_2 \odot H_1 = H_1 \odot H_2$.

($\Leftarrow$)

Diketahui $H_2 \odot H_1 = H_1 \odot H_2$. Akan ditunjukkan $H_1 \odot H_2$ merupakan K-subaljabar dari $(G,*,\odot,e)$.

(i) $H_1 \odot H_2 \neq \emptyset$, karena $e \in H_1 \odot H_2$, yaitu $e = e \odot e$, dengan $e \in H_1, e \in H_2$.

(ii) Diambil sebarang unsur $x, y \in H_1 \odot H_2$, maka $x = x_1 \odot x_2$ dan $y = y_1 \odot y_2$, dengan $x_1, y_1 \in H_1$ dan $x_2, y_2 \in H_2$, sehingga:

$$
\begin{aligned}
x \odot y &= (x_1 \odot x_2) \odot (y_1 \odot y_2) \\
&= (x_1 \odot (e \odot y_2) \odot (e \odot x_2) \odot y_1 \\
&= (x_1 \odot {y_2}^{-1} \odot {x_2}^{-1})\ \odot y_1 \\
&= (x_1 * y_2 * x_2) * {y_1}^{-1} \\
&= (x_1 * y_2) * (x_2 * {y_1}^{-1}) \\
&= (x_1 \odot {y_2}^{-1}) * (y_1 * {x_2}^{-1})^{-1} \\
&= (x_1 \odot {y_2}^{-1}) \odot (y_1 \odot x_2) \\
&= (x_1 \odot {y_2}^{-1}) \odot (e \odot (x_2 \odot y_1)) \\
&= (x_1 \odot y_1 \odot y_2) \odot {x_2}^{-1} \\
&= \left(x_1 * {y_1}^{-1} * {y_2}^{-1}\right) * x_2 \\
&= (x_1 * {y_1}^{-1}) * ({y_2}^{-1} * x_2) \\
&= (x_1 * {y_1}^{-1}) * ({x_2}^{-1} * y_2)^{-1} \\
&= (x_1 \odot {y_1}^{-1}) * ({x_2}^{-1} \odot {y_2}^{-1})^{-1} \\
&= (x_1 \odot {y_1}^{-1}) \odot ({x_2}^{-1} \odot {y_2}^{-1}) \in H_1 \odot H_2
\end{aligned}
$$

Dari (i) dan (ii) terbukti bahwa $H_1 \odot H_2$ merpakan K-subaljabar dari $(G, *, \odot, e)$.

Seperti halnya pada grup yang mempunyai konsep homomorfisme, K-aljabar yang dibangun atas grup juga mempunyai konsep homomorfisme yang disebut K-homomorfisme.

3.3 Homomorfisme K-Aljabar

Berikut ini akan dibahas Homomorfisme K-aljabar dan sifat-sifat yang berlaku di dalamnya.

Definisi 3.4

Misalkan K_1 dan K_2 merupakan K-aljabar. Suatu pemetaan φ dari K_1 ke K_2, dinotasikan dengan $\varphi: K_1 \to K_2$, disebut K-homomorfisme jika $\forall x_1, y_1 \in K_1$ berlaku $\varphi(x_1 \odot y_1) = \varphi(x_1) \odot \varphi(y_1)$, dimana $\varphi(x_1), \varphi(y_1) \in K_2$.

Contoh 3.5

Misal $(G, \odot)$ suatu K-aljabar, dibentuk himpunan bagian $H = \{g \odot (g \odot x) : \in G\}$, berdasarkan **Teorema 3.4** H merupakan$K$-subaljabar dari G. Selanjutnya didefinisikan pemetaan $\varphi: (G, \odot) \to (H, \odot)$, dengan $\varphi(x) = g \odot (g \odot x), \forall x \in G$. Akan ditunjukkan bahwa$\varphi: (G, \odot) \to (H, \odot)$ merupkan suatu K-homomorfisme. Diambil sebarang unsur$x, y \in G$, maka $(x \odot y) \in G$ dan $\varphi(x \odot y) = g(g \odot (x \odot y))$

$$= \big(g \odot (e \odot (x \odot y))\big) \odot g$$

$$= \big(g \odot ((e \odot y) \odot (e \odot x))\big) \odot g$$

$$= \big(g \odot (g \odot x)\big) \odot \big(g \odot (g \odot y)\big)$$

$$= \varphi(x) \odot (y)$$

Karena $\varphi(x \odot y) = \varphi(x) \odot (y)$, maka $\varphi: (G, \odot) \to (H, \odot)$ merupkan suatu K-homomorfisme.

Berikut akan ditinjau sifat-sifat dari K-homomorfisme sebagaimana diberikan oleh teorema berikut:

Teorema 3.6

Misalkan $K_1 = (G_1, *, \odot, e_1)$ dan $K_2 = (G_2, *, \odot, e_2)$ serta $\varphi: K_1 \to K_2$, suatu$K$-homomorfisme. Jika K_1 suatu K-aljabar yang komutatif, maka $\forall x_1, x_2 \in K_1$ berlaku

1. $\varphi(e_1) = e_2$

2. $\varphi(x) = \varphi(x^{-1})$
3. $\varphi(e_1 \odot x_1) = e_2 \odot \varphi(x_1)$
4. $\varphi(x_1 \odot x_2) = e_2$ jika dan hanya jika $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$.
5. Jika H_1 adalah subaljabar dari K_1 maka $\varphi(K_1)$ adalah subaljabar dari K_2.

Bukti:

1. Misalkan φ suatu K-homomorfisme dari K_1 ke K_2, dimana e_1 dan e_2 berturut-turut menyatakan unsur identitas dari K_1 dan K_2 terhadap operasi biner $\odot$.

   Diambil sebarang unsur $x \in K_1$, maka $x \odot e_1 = a$ dan $\varphi(x \odot e_1) = \varphi(x) \ldots (i)$

   Karena $\varphi: K_1 \to K_2$ suatu K-homomorfisme, maka persamaan (i) menjadi $\varphi(x) \odot \varphi(e_1) = \varphi(x) \ldots .(ii)$

   Selanjutnya, karena $\varphi(a) \in K_2$ dan e_2 adalah unsur di K_2, maka $\varphi(x) = \varphi(x) \odot e_2 \ldots (iii)$

   Sehingga dari (ii) dan (iii) diperoleh $\varphi(x) \odot \varphi(e_1) = \varphi(x) = \varphi(x) \odot e_2$ dengan demikian berakibat $\varphi(e_1) = e_2$.

2. Misalkan e_2 menyatakan unsur identitas dari K_1. Akan ditunjukkan $\varphi(x) = \varphi(x^{-1})$. Diambil sebarang unsur $x \in K_1$, maka $e \odot x = x^{-1}$.

   Karena $e \odot x = x^{-1} \in K_1$ dan φ suatu K-homomorfisme, maka:

   $$\varphi(e \odot x) = \varphi(x^{-1}) \ldots (i)$$

   Selanjutnya menurut **Teorema 3.2,** menyatakan bahwa $e \odot x = x$.

   Karena $e \odot x = x \in K_1$ dan φ suatu K-homomorfisme, maka :

   $$\varphi(e \odot x) = \varphi(x) \ldots (ii)$$

Dari persamaan (i) dan (ii) diperoleh $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)$.

3. Misalkan e_1 menyatakan unsur identitas dari K_1. Akan ditunjukkan $\varphi(e_1 \odot x_1) = e_2 \odot \varphi(x_1)$. Diambil sebarang unsur $x_1 \in K_1$ maka $e_1 \odot x_1 \in K_1$ dan berlaku

$$\begin{aligned}\varphi(e_1 \odot x_1) &= \varphi(e_1) \odot \varphi(x_1)\\ &= e_2 \odot \varphi(x_1).\end{aligned}$$

4. $(\Rightarrow)$

Diketahui $\varphi(x_1 \odot x_2) = e_2$. Akan ditunjukkan $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$.

Diambil sebarang unsur $x_1, x_2 \in K_1$. Karena $x_1, x_2 \in K_1$ maka $x_1 \odot x_2 \in K_1$ dan berlaku:

$$\varphi(x_1 \odot x_2) = e_2$$

$$\varphi(x_1 \odot x_2) \odot \varphi({x_2}^{-1}) = e_2 \odot \varphi({x_2}^{-1})$$

$$\varphi[(x_1 \odot x_2) \odot {x_2}^{-1}] = e_2 \odot \varphi({x_2}^{-1})$$

$$\varphi[(x_1 * {x_2}^{-1}) * x_2] = [\varphi({x_2}^{-1})]^{-1}$$

$$\varphi[x_1 * ({x_2}^{-1} * x_2)] = [\varphi({x_2}^{-1})]^{-1}$$

$$\varphi[x_1 * e_1] = [\varphi({x_2}^{-1})]^{-1}$$

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$$

$(\Leftarrow)$

Diketahui $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$, akan ditunjukkan $\varphi(x_1 \odot x_2) = e_2$.

Diambil sebarang unsur $x_1, x_2 \in K_1$.

Karena $x_1, x_2 \in K_1$ maka unsur $x_1 \odot x_2 \in K_1$ dan berlaku:

$$\begin{aligned}\varphi(x_1 \odot x_2) &= \varphi(x_1) \odot \varphi(x_2)\\ &= \varphi(x_1) \odot \varphi(x_1)\\ &= \varphi(x_1 \odot x_1)\\ &= \varphi(e_1)\\ &= e_2\end{aligned}$$

5. Misalkan H_1 merupakan subaljabar dari K_1. Akan ditunjukkan bahwa $\varphi(H_1)$ adalah subaljabar dari K_2.

(i). $H_1 \neq \emptyset$ karena setidaknya H_1 memuat elemen identitas yaitu $e_1 \in H_1$ maka $(e_1) = e_2 \in \varphi(H_1)$. Dengan kata lain $\varphi(H_1) \neq \emptyset$.

(ii). Diambil sebarang unsur $y_1, y_2 \in \varphi(H_1)$, maka terdapat $x_1, x_2 \in H_1$ sedemikian sehingga $\varphi(x_1) = y_1, \varphi(x_2) = y_2$, dan

$$y_1 \odot y_2 = \varphi(x_1) \odot \varphi(x_2)$$

$$= \varphi(x_1 \odot x_2) \in \varphi(H_1),$$

Karena $x_1 \odot x_2 \in H_1$

Lema 3.1

Misalkan$\varphi: K_1 \to K_2$ suatu K-homomorfisme , maka $\forall x_1, y_1 \in K_1$ berlaku:

1. $\varphi(x_1 \odot y_1) = \varphi(y_1 \odot x_1)$
2. $\varphi(x_1) = \varphi(e_1 \odot x_1)$

Bukti:

1. Misal e_1 adalah unsur identitas dari K_1. Diambil sebarang unsur $x_1, y_1 \in K_1$ maka $x_1 \odot y_1 \in K_1$ dan $y_1 \odot x_1 \in K_1$. Dengan demikian $e_1 \odot (x_1 \odot y_1) \in K_1$. Menurut **Teorema 3.3** berlaku

$$e_1 \odot (x_1 \odot y_1) = y_1 \odot x_1$$

$$\varphi[e_1 \odot (x_1 \odot y_1)] = \varphi(y_1 \odot x_1)$$

$$\varphi[(e_1 \odot x_1) \odot (e_1 \odot y_1)] = \varphi(y_1 \odot x_1)$$

$$\varphi({x_1}^{-1} \odot {y_1}^{-1}) = \varphi(y_1 \odot x_1)$$

$$\varphi({x_1}^{-1}) \odot \varphi({y_1}^{-1}) = \varphi(y_1 \odot x_1)$$

$$\varphi(x_1) \odot \varphi(y_1) = \varphi(y_1 \odot x_1)$$

$$\varphi(x_1 \odot y_1) = \varphi(y_1 \odot x_1)$$

2. Misal e_1 adalah unsur identitas dari K_1.

Diambil sebarang unsur $x_1 \in K_1$, maka $e_1 \odot x_1 \in K_1$ dengan $e_1 \odot x_1 = {x_1}^{-1}$.

$$\varphi(e_1 \odot x_1) = \varphi({x_1}^{-1})$$

$$\varphi(e_1 \odot x_1) = \varphi(x_1)$$

3.4 Inspirasi Penciptaan Alam Semesta terhadap Konsep Aljabar

Proses penciptaan alam semesta tertera dalam al-Quran, seperti dalam surat Ath-Thalaq/65:12 berikut:

ٱللَّهُ ٱلَّذِى خَلَقَ سَبْعَ سَمَـٰوَٰتٍ وَمِنَ ٱلْأَرْضِ مِثْلَهُنَّ يَتَنَزَّلُ ٱلْأَمْرُ بَيْنَهُنَّ لِتَعْلَمُوٓا۟ أَنَّ ٱللَّهَ عَلَىٰ كُلِّ شَىْءٍ
قَدِيرٌ وَأَنَّ ٱللَّهَ قَدْ أَحَاطَ بِكُلِّ شَىْءٍ عِلْمًۢا ﴿١٢﴾

Artinya: *"Allah-lah yang menciptakan tujuh langit dan seperti itu pula bumi. perintah Allah berlaku padanya, agar kamu mengetahui bahwasanya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu, dan Sesungguhnya Allah ilmu-Nya benar-benar meliputi segala sesuatu".*

Dalam ayat tersebut Allah menciptakan langit dengan tujuh lapisan. Dan setiap lapisan memiliki ciri khas atau tanda untuk membedakan antara lapisan satu dengan yang lainnya. Alam semesta terdiri atas semua materi, termasuk tenaga dan radiasi serta hal yang telah diketahui dan baru dalam tahap percaya bahwa pasti ada di antariksa.Bumi, bulan, planet-planet, dan matahari yang termasuk dalam tata surya hanyalah merupakan titik kecil di antara lebih dari 200 miliar bintang penyusun galaksi bima sakti.

Al-Quran menyebutkan proses penciptaan alam semesta dengan kalimat *sittati ayyamin* yang artinya enam fase. Sebagaimana disebutkan dalam surat al-Sajdah/32:4 berikut:

ٱللَّهُ ٱلَّذِي خَلَقَ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضَ وَمَا بَيۡنَهُمَا فِي سِتَّةِ أَيَّامٖ ثُمَّ ٱسۡتَوَىٰ عَلَى ٱلۡعَرۡشِۖ مَا لَكُم مِّن
دُونِهِۦ مِن وَلِيّٖ وَلَا شَفِيعٍۚ أَفَلَا تَتَذَكَّرُونَ ٤

Artinya: *”Allah lah yang menciptakan langit dan bumi dan apa yang ada di antara keduanya dalam enam masa, kemudian Dia bersemayam di atas 'Arsy. Tidak ada bagi kamu selain dari padanya seorang penolongpun dan tidak (pula) seorang pemberi syafa'at. Maka Apakah kamu tidak memperhatikan?”*

Fase Pertama

Sebuah ledakan besar (*bigbang*) sekitar 12-20 miliar tahun lalu. Inilah terciptanya materi, energi, dan waktu.

Firman Allah dalam surat al-Anbiya/21:30

أَوَلَمۡ يَرَ ٱلَّذِينَ كَفَرُوٓاْ أَنَّ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضَ كَانَتَا رَتۡقٗا فَفَتَقۡنَٰهُمَاۖ وَجَعَلۡنَا مِنَ ٱلۡمَآءِ كُلَّ شَيۡءٍ
حَيٍّۚ أَفَلَا يُؤۡمِنُونَ ٣٠

Artinya: *“Dan Apakah orang-orang yang kafir tidak mengetahui bahwasanya langit dan bumi itu keduanya dahulu adalah suatu yang padu, kemudian Kami pisahkan antara keduanya. dan dari air Kami jadikan segala sesuatu yang hidup. Maka Mengapakah mereka tiada juga beriman?”*

Fase kedua

Masa ini adalah pembentukan langit.

Firman Allah dalam surat al-Baqarah/2:29

هُوَ ٱلَّذِي خَلَقَ لَكُم مَّا فِي ٱلۡأَرۡضِ جَمِيعٗا ثُمَّ ٱسۡتَوَىٰٓ إِلَى ٱلسَّمَآءِ فَسَوَّىٰهُنَّ سَبۡعَ سَمَٰوَٰتٖۚ
وَهُوَ بِكُلِّ شَيۡءٍ عَلِيمٞ ٢٩

Artinya: *“Dia-lah Allah, yang menjadikan segala yang ada di bumi untuk kamu dan Dia berkehendak (menciptakan) langit, lalu dijadikan-Nya tujuh langit. dan Dia Maha mengetahui segala sesuatu”.*

Fase ketiga

Pada masa ini adalah proses penciptaan tata surya, termasuk bumi dan matahari serta dipancarkannya cahaya matahari.

Firman Allah dalam surat an-Nazi’at/79:29

وَأَغۡطَشَ لَيۡلَهَا وَأَخۡرَجَ ضُحَىٰهَا ﴿٢٩﴾

Artinya: *"Dan Dia menjadikan malamnya gelap gulita, dan menjadikan siangnya terang benderang".*

Fase keempat

Bumi yang terbentuk dari debu-debu antar bintang yang dingin mulai menghangat dengan pemanasan sinar matahari. Akibatnya tejadi pemadatan kulit bumi.

Firman Allah dalam surat an-Nazi'at/79:30

وَٱلۡأَرۡضَ بَعۡدَ ذَٰلِكَ دَحَىٰهَآ ﴿٣٠﴾

Artinya: *"Dan bumi sesudah itu dihamparkan-Nya".*

Fase kelima

Hadirnya air dan atmosfer di bumi menjadi persyaratan terciptanya kehidupan di bumi.

Firman Allah dalam surat al-Anbiya/21:30

أَوَلَمۡ يَرَ ٱلَّذِينَ كَفَرُوٓاْ أَنَّ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضَ كَانَتَا رَتۡقٗا فَفَتَقۡنَٰهُمَاۖ وَجَعَلۡنَا مِنَ ٱلۡمَآءِ كُلَّ شَيۡءٍ حَيٍّۚ أَفَلَا يُؤۡمِنُونَ ﴿٣٠﴾

Artinya: *"Dan Apakah orang-orang yang kafir tidak mengetahui bahwasanya langit dan bumi itu keduanya dahulu adalah suatu yang padu, kemudian Kami pisahkan antara keduanya. dan dari air Kami jadikan segala sesuatu yang hidup. Maka Mengapakah mereka tiada juga beriman?".*

Fase keenam

Pada masa ini terdapat kehidupan di bumi yang dimulai makhluk bersel tunggal dan tumbuh-tumbuhan. Hadirnya tumbuh-tumbuhan dan proses fotosintesis menyebabkan atmosfer mulai terisi dan oksigen bebas. Pada masa ini juga geologis yang menyebabkan pergeseran lempengan tektonik dan lahirnya rantai pegunungan di bumi terus berlanjut.

Fase-fase penciptaan alam semesta yang dijelaskan dalam al-Quran sesuai dengan fase-fase dalam matematika. Misalnya pada cabang aljabar, ada fase dimana aljabar akan disebut K-aljabar, dan pada K-aljabar akan membentuk cabang K-subaljabar dan K-homomorfisme.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan perumusan masalah dan pembahasan, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

Sifat-sifat dari K-aljabar, K- subaljabar dan K- homomorfisme adalah:

a. K-Subaljabar terdiri dari 2 teorema yaitu

(i) Misalkan $(G,*,\odot,e)$ adalah suatu K-aljabar dan $g \in G$. Jika H suatu subgrup dari G. Maka $H_{g^2} = \{g \odot (g \odot x): x \in H\}$ adalah suatu K-subaljabar dari $(G,*,\odot,e)$.

(ii) Misalkan $H_!$ dan H_2 merupakan K-subaljabar dari suatu K-aljabar $(G,*,\odot,e)$ maka:

3. $H_1 \cap H_2$ adalah K-subaljabar dari $(G,*,\odot,e)$.

4. $H_1 \odot H_2$ adalah K-subaljabar dari $(G,*,\odot,e)$ jika dan hanya jika $H_2 \odot H_1 = H_1 \odot H_2$.

b. Komutatif dari K-aljabar terdiri dari dua teorema yaitu:

(i). Misalkan $(G,*)$ grup komutatif. Jika $(G,*,\odot,e)$ adalah suatu K-aljabar, maka $\forall x, y, z \in G$ berlaku:

5. $(e \odot x) \odot (e \odot y) = y \odot x = e \odot (x \odot y)$

6. $(x \odot z) \odot (y \odot z) = x \odot y$

7. $e \odot (e \odot x) = x$

8. $x \odot (e \odot y) = y \odot (e \odot x)$

(ii) Misalkan $(G,*,\odot,e)$ suatu K-aljabar. Jika $(G,*)$ tidak komutatif, maka $\forall x,y,z,u,v \in G$ berlaku:

6. $(x \odot y) \odot (u \odot v) = (x \odot (e \odot v) \odot (e \odot y)) \odot u$
7. $(x \odot y) \odot z = x \odot (z \odot (e \odot y))$
8. $e \odot (e \odot x) = x$
9. $e \odot (x \odot y) = y \odot x = (e \odot x) \odot (e \odot y)$
10. $x \odot y = e$ jika dan hanya jika $x = y$

c. K-Homomorfisme terdiri dari 1 teorema dan 1 lema

Teorema:

Misalkan $K_1 = (G_1,*,\odot,e_1)$ dan $K_2 = (G_2,*,\odot,e_2)$ serta $\varphi: K_1 \rightarrow K_2$, suatu K-homomorfisma. Jika K_1 suatu K-aljabar yang komutatif, maka $\forall x_1, x_2 \in K_1$ berlaku

6. $\varphi(e_1) = e_2$
7. $\varphi(x) = \varphi(x^{-1})$.
8. $\varphi(e_1 \odot x_1) = e_2 \odot \varphi(x_1)$.
9. $\varphi(x_1 \odot x_2) = e_2$ jika dan hanya jika $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$.
10. Jika H_1 adalah subaljabar dari K_1 maka $\varphi(K_1)$ adalah subaljabar dari K_2.

Lema:

Misalkan $\varphi: K_1 \rightarrow K_2$ suatu K-homomorfisme ,maka $\forall x_1, y_1 \in K_1$ berlaku:

3. $\varphi(x_1 \odot y_1) = \varphi(y_1 \odot x_1)$.
4. $\varphi(x_1) = \varphi(e_1 \odot x_1)$.

4.2 Saran

Saran yang dapat diberikan untuk penelitian berikutnya adalah menurunkan sifat-sifat lain yang definisinya terdapat di aljabar biasa (aljabar konvensional) misalnya distributif, reflektif, transitif dan lain sebagainya berbasis pada definisi K-aljabar. Pengembangan definisi baru dari aljabar berikutnya juga dapat dilakukan dengan menurunkan teorema, lema dan bukti berdasarkan modifikasi dari definisi aljabar biasa (aljabar konvensional).

DAFTAR PUSTAKA

Afifah, Ani. 2013. *K-Homomorfisme Pada Q-Aljabar*. Skripsi S1 Malang: Jurusan Matematika UIN Maliki Malang.

Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika.* Malang: UIN Malang Press.

Abdussakir. 2009. *Matematika 1: Kajian Integratif Matematika dan Al-Qur'an.* Malang: UIN Malang Press.

Arifin, A.. 2000. *Aljabar*. Bandung: ITB Bandung.

Dar, K. H. dan Akram, M.. 2006. *Journal: On Subclasses of K (G)-Algebras*, Annuals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser.

Dar, K. H. dan Akram, M.. 2007. *Journal: On K-Homomorphisms of K-algebras*, International Mathematical Forum.

Dummit, D. S. dan Richard M. F.. 1991. *Abstract Algebra.* New Jersey: Prentice Hall, Inc.

Durbin, J.R.. 1992. *Modern Algebra: An Introduction Third Edition.* Canada: John Wiley and Sons, Inc

Fraleigh, J. B.. 1994. *A First Course in Abstract Algebra.* United States. Addison-Wesley Publishing Company inc.

Iswati dan Suryoto. 2013. *K- Aljabar*. Semarang: Jurusan Matematika UNDIP Semarang

Judson, Thomas W dan F. Stephen. 2013. *Abstract Algebra*: Austin State University.

Raishinghania, M. D. dan Aggarwal, R. S. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: S. Chand and Company Ltd.

Soewandi, H., dan Sinduningrum. 2011. *Ilmu Kealaman Dasar (IKD)*. Jakarta: Ghalia Indonesia.

Sukirman. 2005. *Pengantar Struktur Aljabar*. Malang: Universitas Negeri Malang.

(https://ahmadbinhanbal.wordpress.com/2014/01/05/bagaimana-al-quran menjelaskan-tentang-alam-semesta/), diakses 14 Juni 2016.

RIWAYAT HIDUP

Moh. Irfan Kamil, lahir di kabupaten Malang pada tanggal 05 Mei 1991, bisa dipanggil Irfan. Alamat Jl. KH. Hasyim Asy'ari RT 06 RW 02 Desa Brongkal Kecamatan Pagelaran Kabupaten Malang. Anak kedua dari Bapak Moh. Zahri Mahfuddin dan Ibu Rohimah dan saya punya kakak yang bernama Moh.Saiful Rizal dan adik bernama Aminaturrosyadah.

Pendidikan dasar ditempuh di SDN 01 Brongkal-Pagelaran- Malang, dan lulus pada tahun 2003. Setelah itu melanjutkan pendidikan di SMP Babussalam Banjarejo- Pagelaran- Malang dan lulus pada tahun 2006. Kemudian melanjutkan pendidikan SMA Negeri 01 Gonganglegi Kabupaten Malang dan lulus tahun 2009. Selanjutnya pada tahun 2009 menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil Jurusan Matematika Fakultas SAINTEK (Sains dan Teknologi).

Dalam masa perkuliahan, pernah belajar bahasa Arab selama 1 tahun di PKPBA mulai semester pertama dan kedua. Setelah itu pernah perlajar bahasa Inggris selama 1 tahun di PKPBI mulai semester tiga dan semester empat di kampus Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Moh. Irfan Kamil
NIM : 09610058
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Kajian terhadap K-Aljabar
Pembimbing I : Evawati Alisah, M.Pd
Pembimbing II : Fachrur Rozi, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	4 Februari 2016	Konsultasi Bab I	1.
2.	17 Maret 2016	Konsultasi Bab I	2.
3.	22 April 2016	Konsultasi Kajian Agama Bab I	3.
4.	27 Mei 2016	Konsultasi Bab II	4.
5.	30 Mei 2016	Konsultasi Bab III	5.
6.	1 Juni 2016	Konsultasi Bab III	6.
7.	3 Juni 2016	Konsultasi Bab I	7.
8.	6 Juni 201	Konsultasi Bab II	8.
9.	13 Mei 2016	Konsultasi Agama Bab II	9.
10.	30 Mei 2016	Konsultasi Agama Bab II	10.
11.	3 Juni 2016	Konsultasi Agama Bab III	11.
12.	08 Juni 2016	ACC Agama Bab I-III	12.
13.	09 Juni 2016	ACC Keseluruhan	13.

Malang, 14 Juni 2016
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001