TEOREMA TITIK TETAP DI RUANG NORM

SKRIPSI

OLEH
SUSILO
NIM. 09610008

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016

TEOREMA TITIK TETAP DI RUANG NORM

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh
Susilo
NIM. 09610008

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016

TEOREMA TITIK TETAP DI RUANG NORM

SKRIPSI

Oleh
Susilo
NIM. 09610008

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 23 Juni 2016

Pembimbing I,

Hairur Rahman, M.Si
NIP. 19800429 200604 1 003

Pembimbing II,

Fachrur Rozi, M.Si
NIP. 19800527 200801 1 012

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

TEOREMA TITIK TETAP DI RUANG NORM

SKRIPSI

Oleh
Susilo
NIM. 09610008

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 29 Juni 2016

Penguji Utama	:	Dr. Usman Pagalay, M.Si	....
Ketua Penguji	:	Dr. Abdussakir, M.Pd	....
Sekretaris Penguji	:	Hairur Rahman, M.Si	....
Anggota Penguji	:	Fachrur Rozi, M.Si	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Susilo
NIM	: 09610008
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Teorema Titik Tetap Di Ruang Norm

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 23 Juni 2016
Yang membuat pernyataan,

Susilo
NIM. 09610008

MOTO

إِنَّ مَعَ الْعُسْرِيُسْرًا

"Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan"

(Q.S al-Insyirah/94:6)

Banyak kegagalan dalam hidup ini dikarenakan orang-orang tidak menyadari betapa dekatnya mereka dengan keberhasilan saat mereka menyerah.

(Thomas Alva Edison)

PERSEMBAHAN

Dengan iringan do’a serta rasa syukur yang tidak terbatas. Karya sederhana ini penulis persembahkan kepada:

Ayahanda (Jumani) dan Ibunda (Aspi’ah) tercinta, yang senantiasa dengan ikhlas dan tiada henti melantunkan do’a, memotivasi, selalu mendukung langkah apapun yang penulis ambil, dan memberikan restunya kepada penulis dalam menuntut ilmu, serta selalu memberikan teladan yang baik bagi penulis.

Kakak dan Adik tersayang (Widawati, Reni Rama Wati dan Eni Kusrini) yang telah menjadi motivasi dan inspirasi untuk tetap terus berjuang, agar kelak penulis akan selalu dapat menatap senyum indah diwajah bidadari-bidadari tercinta ini.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Segala puji bagi Allah Swt. atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terimakasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Hairur Rahman, M.Si selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Fachrur Rozi, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.

6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terimakasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
7. Ayah dan Ibu yang selalu memberikan doa, semangat, serta motivasi kepada penulis sampai saat ini.
8. Seluruh teman-teman Jurusan Matematika angkatan 2009.
9. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca.

Wassalamu’alaikum Wr. Wb.

Malang, Juni 2016

Penulis

DAFTAR ISI

ABSTRAK

Susilo. 2016. **Teorema Titik Tetap di Ruang Norm**. Skripsi, Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Hairur Rahman, M.Si. (II) Fachrur Rozi, M.Si.

Kata Kunci : Titik tetap, pemetaan kontraksi, ruang Norm, ruang Metrik Lengkap, ruang Banach

Ruang Norm merupakan ruang vektor yang dilengkapi dengan suatu norm $(\|\quad\|)$. Ruang ber-*norm* mempunyai hubungan erat dengan pemetaan kontruksi, ruang metrik atau biasa disebut fungsi jarak dan ruang banach.

Teorema titik tetap di ruang ber-*norm* merupakan teorema ketunggalan dari suatu titik tetap pada suatu pemetaan yang disebut pemetaan kontraksi dari ruang metrik lengkap kedalam dirinya sendiri. Sebelum mencari titik tetap diruang ber-*norm* akan dibahas ruang banach yang mana ruang banach mempunyai arti ruang *norm* yang lengkap dan dikatakan lengkap jika barisan tersebut konvergen.

Pada penelitian ini bertujuan untuk mengetahui pembuktian titik tetap diruang *norm* dengan kondisi yang diberikan yaitu pada pemetaan Pachpatte.

Berdasarkan hasil pembahasan diperoleh bahwa pemetaan Pachpatte mempunyai titik tetap tunggal yaitu $f(x) = x$ dan $f(y) = y$ dan pemetaan tersebut merupakan titik tetap terhadap dirinya sendiri.

ABSTRACT

Susilo. 2016. **Fixed Point Theorem Norm Space**. Thesis, Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisor: (I) Hairur Rahman, M.Si. (II) Fachrur Rozi, M.Si.

Keywords: Fixed point, contraction mapping, Norm Space, Complete Metric Space, Banach space

Norm space is a vector space equipped with a norm ($\| \quad \|$). The room is air-norm is closely linked with mapping construction, commonly called a metric space or distance function and Banach spaces.

Fixed point theorem in air-norm is the singularity theorems of a fixed point on a mapping called a contraction mapping of a complete metric space into itself. Before looking for a fixed point diruang Air-norm discussed Banach space which has meaning space Banach space norm is complete and is said to be complete if the sequence converges.

In this study aims to determine proving fixed point diruang norm to given conditions is the mapping Pachpatte.

Based on the results of the discussion showed that the mapping Pachpatte have a single fixed point is $f(x) = x$ and $f(y) = y$ and the mapping is a fixed point to itself.

ملخص

سوسيلو. ٢٠١٦. **نظرية نقطة الثابتة في القضاء القاعد**. بحث جامعى، قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف(١) خير الرحمن، الماجستير (٢) فخر الرزي، الماجستير

كلمات الرئيسية: النقطة الثابتة، وخرائط الانكماش، الفضاء القاعد ، فضاء كامل، باناخ الفضاء

الفضاء القاعد هو الفضاء ناقلات مجهزة مع قاعدة (|| ||). الفضاء القاعد يتعلق مع البناء رسم الخرائط، وتسمى عادة القضاء المترى الفضاء باناخ.

نظرية نقطة الثابتة في الفضاء القاعد هو النظريات التفرد من نقطة ثابتة على الخرائط تعيين الانكماش في فضاء كامل في حد ذاته. قبل البحث عن نقطة ثابتة ناقشت فى الفضاء القاعد القواعد والمعايير فضاء باناخ الذي يعني باناخ يعنى الفضاء القاعد اكتمال ويقال أن تكتمل إذا يتقارب التسلسل.

في هذه الدراسة تهدف إلى تحديد تثبت نقطة الثابتة القاعدة في الفضاء القاعد يعنى على رسم الخرائط واستنادا إلى نتائج المناقشة أظهرت أن تعيين رسم الخرائط يكون نقطة ثابتة واحدة يعنى $f(x) = x$ و $f(y) = y$ و تلك الخرائط هى نقطة ثابثة لذاته.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Al-Quran merupakan sumber pengetahuan dan inspirasi umat Islam dalam segala hal. Berbagai informasi sains dan teknologi telah terkandung di dalamnya sejak ribuan tahun silam. Sebelum masuk pada pembahasan tentang penafsiran ayat-ayat al-Quran tentang ilmu-ilmu pengetahuan, peneliti akan menyuguhkan ayat-ayat yang menunjukkan begitu pentingnya menjadi orang yang berilmu.

Allah Swt. berfirman dalam surat al-Mujadalah/58:11:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓا۟ إِذَا قِيلَ لَكُمْ تَفَسَّحُوا۟ فِى ٱلْمَجَٰلِسِ فَٱفْسَحُوا۟ يَفْسَحِ ٱللَّهُ لَكُمْ ۖ وَإِذَا قِيلَ
ٱنشُزُوا۟ فَٱنشُزُوا۟ يَرْفَعِ ٱللَّهُ ٱلَّذِينَ ءَامَنُوا۟ مِنكُمْ وَٱلَّذِينَ أُوتُوا۟ ٱلْعِلْمَ دَرَجَٰتٍ ۚ وَٱللَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ
﴿١١﴾

"Hai orang-orang beriman apabila kamu dikatakan kepadamu: "Berlapang-lapanglah dalam majlis", Maka lapangkanlah niscaya Allah akan memberi kelapangan untukmu. Dan apabila dikatakan: "Berdirilah kamu", Maka berdirilah, niscaya Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. dan Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan" (QS. al-Mujadalah/58:11).

Dijelaskan bahwa Allah Swt. akan memberikan kemuliaan berupa pengangkatan derajat orang-orang yang berilmu dan beriman, ilmu yang dimaksudkan antara lain semua ilmu yang memberi manfaat bagi kehidupan manusia. Ayat tersebut menunjukkan betapa pentingnya ilmu pengetahuan dalam kehidupan manusia, dan matematika adalah salah satunya.

Selain mempelajari ilmu agama sudah seharusnya mempelajari ilmu dunia. Matematika merupakan salah satu ilmu pengetahuan yang harus dipelajari. Secara bahasa, kata “matematika” berasal dari bahasa Yunani yaitu “*mathema*” yang artinya hal-hal yang dipelajari. Orang Belanda menyebut matematika dengan *wiskunde* yang artinya ilmu pasti. Sedangkan orang Arab menyebut matematika dengan ilmu *al-hisab*, artinya ilmu berhitung. Secara istilah, sampai saat ini belum ada definisi yang tepat mengenai matematika. Definisi-definisi yang dibuat para ahli matematika semuanya benar berdasar sudut pandang tertentu. Meskipun belum ada definisi yang tepat. Matematika mempunyai ciri kas yang tidak dimiliki pengetahuan lain, yaitu merupakan abstraksi dari dunia nyata, menggunakan bahasa symbol, dan menganut pola pikir deduktif (pola berpikir yang didasarkan pada kebenaran-kebenaran yang secara umum sudah terbukti benar) (Abdussakir, 2007).

Menurut Purwanto (1998), matematika merupakan alat untuk menyederhanakan penyajian dan pemahaman masalah. Bahasa matematika merupakan suatu bahasa yang menjadikan suatu masalah dapat menjadi lebih sederhana untuk disajikan, memahami, dianalisis dan dipecahkan. Matematika merupakan ilmu pengetahuan dasar yang dibutuhkan semua manusia dalam kehidupan sehari-hari baik secara langsung maupun tidak langsung. Matematika merupakan ilmu yang tidak lepas dari alami dan agama, yang semuanya dapat dilihat dalam al-Quran. Alam semesta ini banyak mengandung rahasia tentang fenomena-fenomena alam. Namun keberadaan fenomena-fenomena itu sendiri hanya dapat diketahui oleh orang-orang yang benar-benar mengerti arti kebesaran Allah Swt.

Matematika lahir dari tuntutan kebutuhan hidup. Tak heran, bila kemudian ilmu hitung memegang peranan yang amat penting dalam kehidupan manusia.

Berkat matematikalah, manusia dapat melakukan aktivitas perdagangan, mengukur tanah serta memprediksi peristiwa dalam astronomi. “Angka-angka mengatur segalanya,” ujar Phytagoras, ahli matematika Yunani. Hal ini sejalan dengan firman Allah Swt. dalam surat al-Qamar/54:49 yang berbunyi:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَٰهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

“Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran” (QS. al-Qamar/54:49).

Dalam kehidupan sehari-hari sering dijumpai permasalahan yang berkaitan dengan matematika. Hal ini dapat dilihat dari banyaknya permasalahan yang dapat dianalisis menggunakan matematika. Oleh karena itu diperlukan pemahaman khusus pada matematika.

Sebagai sarana ilmiah, matematika merupakan salah satu disiplin ilmu yang tidak hanya terdapat satu keilmuan saja di dalamnya. Akan tetapi masih terdapat ilmu-ilmu lain yang menjadi sarana keilmuan bagi disiplin ilmu lain. Untuk mengetahui semua itu maka sebagai pelajar mempunyai kewajiban untuk mempelajari berbagai ilmu sedalam-dalamnya. Matematika sebagai disiplin ilmu dikenal sebagai *Queen of Science*, dan mempunyai cabang keilmuan seperti ilmu analisis maupun ilmu terapan. Matematika bukanlah pengetahuan menyendiri yang dapat sempurna karena dirinya sendiri, tetapi adanya matematika itu untuk membantu manusia dalam memahami dan menguasai permasalahan sosial, ekonomi dan alam.

Tidak jauh berbeda dengan sains matematika dapat dibagi dalam berbagai rumpun, misalnya rumpun aljabar. Analisis merupakan salah satu cabang matematika yang terus menerus mengalami perkembangan, yaitu dari analisis klasik dan berkembang menjadi analisis modern. Analisis klasik berbicara tentang sistem bilangan, kekonvergenan suatu barisan maupun deret, kekontinuan, pendiferensial serta pengintegralan. Sedangkan analisis modern berbicara tentang konsep yang bersifat abstrak yang bekerja pada konsep ruang. Salah satu yang dibahas dalam analisis modern adalah analisis fungsional yang merupakan suatu studi tentang ruang bernorma (Hidayani, 2002).

Ruang ber-*norm* berawal dari suatu ruang vektor X atas lapangan $\mathbb{R}$ (himpunan bilangan real) dan $\mathbb{C}$ (himpunan bilangan kompleks). Ruang ber-*norm* dapat dikatakan sebagai panjang dari vektor-vektor. Ruang ber-*norm* juga mempunyai hubungan erat dengan ruang metrik, atau biasa disebut fungsi jarak. Ruang metrik merupakan himpunan dari berbagai macam titik yang mempunyai jarak antara setiap titik tersebut. Ruang metrik adalah ruang linier yang suatu jaraknya diturunkan dari suatu norma yang diberikan oleh panjang suatu vektor (Darmawijaya, 2007).

Kemudian titik tetap (*fixed point*) mempunyai peranan yang penting dalam analisis fungsional. Banyak masalah matematis yang dapat dipecahkan dengan menggunakan prinsip titik tetap. Beberapa di antaranya adalah masalah persamaan linier, persamaan diferensial biasa, persamaan integral, dan persamaan diferensial parsial. Eksistensi titik tetap (*fixed point*) untuk suatu fungsi banyak dikaji oleh para ahli sebagai salah satu metode untuk menyelesaikan problem matematika. Salah satu teorema titik tetap yang penulis bahas adalah Teorema Titik Tetap di Ruang Norm. Dalam teorema tersebut, eksistensi dan ketunggalan titik tetap dapat dijamin kebenarannya untuk fungsi yang kontraktif dan terdefinisi pada ruang yang lengkap. Teorema tersebut sejauh pengetahuan penulis berlaku untuk fungsi bernilai tunggal (*single-valued function*). Oleh karena itu, dalam skripsi ini penulis tertarik membahas titik tetap di ruang norm.

Pada penelitian ini, akan ditunjukkan bahwa ruang ber-*norm* mempunyai titik tetap tunggal. Teorema titik tetap di ruang ber-*norm* menyatakan jika pemetaan f terhadap dirinya sendiri $f: X \rightarrow X$ dari ruang metrik lengkap (X, d) mempunyai pemetaan kontraksi $f(x), f(y) \leq k\ d\ (x, y)$ untuk setiap $0 < k < 1$, maka f mempunyai titik tetap tunggal yang memenuhi kondisi $d\big(f(x), f(y)\big) \leq k \max\left\{d(x, y), \frac{d(y,f(y))[1+d(x,f(x))]}{1+d(x,y)}, \frac{1}{2}\frac{d(x(f(y))[1+d(x,f(x))+d(y,f(y)))}{1+d(x,y)}\right\}$. Sehingga dapat diketahui bahwa pemetaan kontraksi merupakan dasar utama dalam teorema titik tetap di ruang ber-*norm*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, masalah yang dibahas dalam penulisan skripsi ini adalah bagaimana pembuktian teorema titik tetap di ruang ber-*norm*?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan penelitian ini adalah untuk menjelaskan bagaimana pembuktian teorema titik tetap di ruang ber-*norm*.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penulisan skripsi ini adalah:

1. Bagi Penulis

   Menambah wawasan penulis untuk mengetahui bagaimana pembuktian teorema titik tetap di ruang ber-*norm*.

2. Bagi Lembaga UIN Maulana Malik Ibrahim Malang

   Sebagai tambahan informasi pembelajaran mata kuliah yang berhubungan dengan pembuktian teorema titik tetap di ruang ber-*norm*. Dan juga sebagai tambahan bahan kepustakaan.

3. Bagi Mahasiswa

   Menambah pengetahuan keilmuan mengenai pembuktian teorema titik tetap di ruang ber-*norm.*

1.5 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian skripsi ini yaitu dengan mengumpulkan informasi yang berhubungan dengan skripsi ini yaitu dengan bantuan buku-buku, jurnal, artikel, dan sumber-sumber lain yang relevan.

Adapun langkah-langkah yang akan diterapkan penulis dalam pembahasan skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Mengkaji dan memahami teorema titik tetap.
2. Mengkaji dan memahami ruang *norm* dan ruang metrik.
3. Mengkaji dan memahami pemetaan kontraksi
4. Kondisi yang digunakan untuk mewakili dalam mengkaji teorema titik tetap di ruang ber-*norm* adalah

   $$d(f(x),f(y)) \leq k \max\left\{d(x,y), \frac{d(y,f(y))[1+d(x,f(x))]}{1+d(x,y)}, \frac{1}{2}\frac{d(x(f(y))[1+d(x,f(x))+d(y,f(y)))}{1+d(x,y)}\right\}$$

   untuk setiap $x, y \in X$ dimana $0 < k < 1$, maka f mempunyai titik tetap di X.
5. Inti dalam pembahasan ini adalah sampai pada titik tetap di ruang ber-*norm*.

1.6 Sistematika Penulisan

Agar penelitian ini mudah dipahami, maka dalam sistematika penulisannya dibentuk bab-bab yang di dalamnya terdapat beberapa subbab dengan rumusan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan meliputi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bab dua memberikan kajian-kajian yang menjadi landasan masalah yang akan dibahas.

Bab III Pembahasan

Pada bab ini akan membahas tentang pembuktian titik tetap di ruang *norm*, serta kajian agama mengenai penyelesaian masalah dalam Islam.

Bab IV Penutup

Penutup berisi tentang kesimpulan dari hasil penelitian dan saran sebagai acuan bagi peneliti selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai teori-teori yang berhubungan dengan skripsi ini, sehingga dapat dijelaskan sebagai landasan berfikir dan akan mempermudah dalam pembahasan hasil utama pada bab berikutnya.

2.1 Ruang Metrik

Ruang metrik memperjelas konsep jarak, definisi dari metrik bermanfaat untuk mengetahui aplikasi yang lebih umum dari konsep jarak. Di dalam kalkulus dipelajari tentang fungsi-fungsi yang terdefinisi dalam garis bilangan real $\mathbb{R}$. Di dalam bilangan real $\mathbb{R}$ terdefinisi fungsi jarak, yaitu memasangankan $d(x, y) = |x - y|$ dengan setiap pasangan $x, y \in R$. Dalam kalkulus kita belajar fungsi yang didefinisisikan pada bilangan real $\mathbb{R}$ yang menunjukkan bahwa dalam proses limit dan pertimbangan lainnya dapat menggunakan fakta bahwa pada $\mathbb{R}$ kita mempunyai fungsi jarak atau disebut dengan d, dimana jarak $d\ (x, y) = |x - y|$ dengan setiap pasangan titik $x, y \in \mathbb{R}$ (Kreyzig, 1978).

Ruang metrik adalah pengaturan abstrak di mana pengaturan tersebut bermanfaat untuk membahas konsep-konsep dasar analisis seperti konvergensi urutan dan kelangsungan fungsi, alat dasar yang diperlukan adalah fungsi jarak "metrik". Definisi berikut merupakan sifat penting dari fungsi jarak (Rynne and Youngson, 2008).

Definisi 2.1.1 Ruang Metrik

Ruang metrik pada himpunan M adalah fungsi $d: M \times M \to \mathbb{R}$ dengan sifat sebagai berikut untuk setiap $x, y, z \in M$

1. $d(x, y) \geq 0$

2. $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$

3. $d(x, y) = d(y, x)$ (simetri)

4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (ketaksamaan segitiga)

Jika d adalah metrik pada M, maka pasangan (M, d) disebut ruang metrik (Rynne dan Youngson, 2008).

Contoh 2.1

Didefinisikan fungsi $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ yaitu

$$d(x, y) = ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)^{\frac{1}{2}}$$

dengan $x = \binom{x_1}{x_2}$ dan $y = \binom{y_1}{y_2}$. Tunjukkan bahwa fungsi d adalah metrik!

Penyelesaian:

Akan ditunjukkan bahwa d adalah metrik

1. $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \geq 0$

   Jadi $d(x, y) \geq 0$

2. $\Rightarrow d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$

   $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = 0$

   $(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = 0$

   kondisi ini berlaku jika dan hanya jika

   $(x_1 - y_2)^2 = 0$ dan $(x_2 - y_2)^2 = 0$

   akibatnya

   $(x_1 - y_1)^2 = 0$ dan $(x_2 - y_2)^2 = 0$

Sehingga

$x_1 = y_2$ dan $x_2 = y_2$

Jadi $\mathrm{d(x,y)} = 0$ jika dan hanya jika $\mathrm{x} = \mathrm{y}$

$\Leftarrow$ Diketahui $\mathrm{x} = \mathrm{y}$ akan dibuktikan $\mathrm{d(x,y)} = 0$

$\mathrm{x} = \mathrm{y}$

maka $x_1 = y_2$ dan $x_2 = y_2$

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

$$= \sqrt{(0)^2 + (0)^2}$$

$$= 0$$

Sehingga $\mathrm{d(x,y)} = 0$

3. $d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$

$$= \sqrt{(x_1^2 - 2x_1y_1 + y_1^2) + (x_2^2 - 2x_2y_2 + y_2^2)}$$

$$= \sqrt{(y_1^2 - 2x_1y_1 + x_1^2) + (y_2^2 - 2x_2y_2 + x_2^2)}$$

$$= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$$

$$= d(y,x)$$

Jadi $d(x,y) = d(y,x)$

4. $d(x,y) + d(y,z) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} + \sqrt{(y_1 - z)^2 + (y_2 - z_2)^2}$

$$\geq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} + \sqrt{(y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2}$$

$$\geq \sqrt{(x_1^2 - x_1z_1 + z_1^2) + (z_2^2 - 2x_2z_2 + z_2^2)}$$

$$= \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2}$$

$$= d(x,y)$$

Jadi $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Maka, berdasarkan penjelasan di atas, terbukti bahwa d adalah metrik.

2.2 Himpunan Terbuka dan Himpunan Tertutup

Definisi 2.2.1

Misalkan(X,d) adalah ruang metrik, untuk sembarang $x \in X$ dan setiap $r > 0$, himpunan-himpunan

1. $B_x(r) = (y \in X \mid d(x,y) < r)$ disebut bola terbuka
2. $B_x(r) = (y \in X \mid d(x,y) < r)$ disebut bola tertutup (Rynne dan Youngson, 2008).

Contoh 2.2.1

1. Diketahui ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$ dengan metrik $d(x,y) = |x - y|$

   $B_0(1) = (y \in \mathbb{R} \mid -1 < y < 1)$ disebut bola terbuka dari titik 0 dengan jari-jari 1 pada ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$

2. Diketahui ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$ dengan metrik $d(x,y) = |x - y|$

   $B_0(1) = (y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1)$ disebut bola tertutup dari titik 0 dengan jari-jari 1 pada ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$.

2.3 Kekonvergenan dan Kelengkapan

Definisi 2.3.1 (Barisan Konvergen)

1. Barisan (x_n) di ruang metrik (X, d) konvergen ke $x \in X$, dapat juga ditulis dengan $x_n \to x$ jika setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sedemikian sehingga untuk $n > N$, $d(x_n, x) < \varepsilon$ atau $\lim_{n\to\varepsilon} x_n = x$.
2. Barisan (x_n) adalah terbatas jika terdapat suatu bilangan riil $\mathbb{R} > 0$, sedemikian sehingga $|x_n| \leq \mathbb{R}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Barisan (x_n) yang tidak konvergen disebut divergen (Kreyszig, 1978).

Contoh 2.3.1

Misalkan $d(x, y) = \|x - y\|$ untuk setiap $x, y \in X$

$d(x, y)$ mempunyai limit yaitu $\lim_{n\to\infty} \|x - y\| = 0$, maka

$$\|x - y - 0\| < \varepsilon$$

Ambil $\varepsilon > 0$, yang berarti bahwa y juga merupakan limit dari $d(x, y) = \|x - y\|$

Sehingga $\lim_{n\to\infty} x = y$ dapat dilihat bahwa $\|x - y\| < \varepsilon$ dan $\varepsilon > 0$

Maka dapat disimpulkan bahwa $d(x, y)$ konvergen.

Definisi 2.3.2 (Barisan Cauchy)

Barisan $\langle a_n \rangle$ di dalam ruang metrik (X, d) dikatakan sebagai barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan asli $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk semua $m, n > N$ berlaku

$$d(a_m, a_n) < \varepsilon \text{ (Ghozali, 2010).}$$

Teorema 2.3.3

Setiap barisan yang konvergen di dalam ruang metrik (X, d) merupakan barisan Cauchy.

Bukti:

Misalkan $\langle a_n \rangle$ merupakan barisan konvergen ke x. Maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku

$$d(a_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ambil $m > n \geq N$, maka berlaku $d\langle a_n, x \rangle < \frac{\varepsilon}{2}$

dengan menggunakan ketaksamaan segitiga, untuk $m > n \geq N$ berlaku

$$\begin{aligned} d(a_m, a_n) &\leq d(a_m, x) + d(x, a_n) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Jadi barisan $\langle a_n \rangle$ merupakan barisan Cauchy.

Definisi 2.3.4 (Ruang Metrik Lengkap)

Sebuah ruang metrik (X, d) dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy konvergen di dalam X (Sherbet dan Bartle, 2000).

Contoh 2.3.4

1. Sistem bilangan real $(\mathbb{R})$ dengan metrik $d(x, y) = |x - y|$ adalah ruang metrik lengkap.

Keterangan

Misalkan barisan (x_n) dimana $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ dan $n = 1, 2, 3, \ldots$ adalah barisan Cauchy. Maka barisan (x_n) konvergen yaitu konvergen ke $1 \in \mathbb{R}$, jadi terbukti bahwa $(\mathbb{R}, d)$ adalah ruang metrik lengkap.

2. Sistem bilangan rasional $(\mathbb{Q})$ dengan metrik $d(x, y) = |x - y|$ adalah bukan ruang metrik lengkap.

Keterangan

Ambil barisan Cauchy (x_n) di $(\mathbb{Q})$ dengan $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ dan

$n = 1, 2, 3, \ldots$ maka barisan Cauchy (x_n) konvegen ke $e \notin \mathbb{Q}$ karena

$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$ ($e =$ bilangan natural)

Jadi $(\mathbb{Q}, d)$ adalah bukan ruang metrik lengkap.

2.4 Ruang Vektor Ber-*norm*

Definisi 2.4.1 (Ruang Vektor Ber-*norm*)

Misalkan X merupakan ruang vektor pada $\mathbb{F}$. *Norm* pada X adalah fungsi $\|.\|: X \to \mathbb{R}$ sehingga untuk semua $x, y \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{F}$

1. $\|x\| \geq 0$
2. $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$
3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$
4. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ untuk setiap $x, y \in X$

ruang vektor X yang ada *norm*-nya disebut ruang vektor ber-*norm* atau hanya ruang ber-*norm* (Rynne dan Youngson, 2008).

Berdasarkan definisinya dapat diketahui bahwa $x, y \in X$ dan α adalah skalar. *Norm* di X dapat mendefinisikan metrik d di X sebagai

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

Dan disebut sebagai metrik yang dibangun dari *norm*. Ruang ber-*norm* dapat juga ditulis dengan $(X, \|.\|)$ atau disingkat dengan X. Maka, dapat disimpulkan bahwa ruang ber-*norm* juga merupakan ruang metrik dan perlu diketahui bahwa tidak semua ruang metrik adalah ruang ber-*norm*.

2.5 Pemetaan

Definisi 2.5.1 (Pemetaan)

Misalkan X dan Y adalah ruang metrik. Pemetaan f dari himpunan X ke himpunan Y dinotasikan dengan $f: X \to Y$ adalah suatu pengawanan setiap $x \in X$ dikawankan secara tunggal dengan $y \in Y$ dan ditulis $y = f(x)$ (Kreyszig, 1978).

Definisi 2.5.2 (Pemetaan Kontraksi)

Misalkan (X, d) adalah ruang metrik. Pemetaan $f: X \to X$ dikatakan pemetaan kontraksi, jika ada konstanta k dengan $0 \leq k < 1$, berlaku

$$d\big(f(x), f(y)\big) \leq k\ d\ (x, y) \text{ untuk setiap } x, y \in X$$

(Kreyszig, 1978).

Teorema 2.5.3

Misalkan $U \subset \mathbb{R}^n$ terbuka, dan misalkan $f: U \to \mathbb{R}^n$. Misalkan $a_0 \in U$ dan ada konstanta $r > 0$ dan konstanta k dengan $0 \leq k < 1$ sehingga $X = B(a_0) \subset U$ dan untuk setiap $x, y \in X$,

$$\|f(x), f(y)\| \leq k\|x - y\|$$

Maka

$$\|f(a_0) - a_0\| \leq (1 - k)r$$

Jika $a \in X$ maka $f(a) = a$ sehingga a mempunyai titik tetap.

Bukti

$$a_1 = f\ (a_0)$$

$$a_{m+1} = f\ (a_m) \qquad\qquad m = 1,2, \dots$$

$\{a_m\}$ didefinisikan sebagai barisan di X yang memenuhi

$$\|a_i - a_{i-1}\| \leq k^{i-1}\|a_i - a_0\|, \quad i = 1, \dots, m$$

untuk setiap $m \in \mathbb{N}$

$$\|a_m - a_0\| \leq \frac{1}{1-k}\|a_i - a_0\| < r$$

Dari kondisi diatas $a_m \in X$ sehingga dapat didefiniskan $a_{m+1} = f(a_m)$,

$$\begin{aligned}
\|a_{m+1} - a_m\| &= \left\|f(a_m) - f(a_{m-1)}\right\| \\
&\leq k\|a_m - a_{m-1}\| \\
&\leq k^m\|a_1 - a_0\|,
\end{aligned}$$

dimana $i = 1,2, \dots m + 1$ maka,

$$\begin{aligned}
\|a_{m+1} - a_0\| &\leq \sum_{i=1}^{m+1} \left\|f(a_i) - f(a_{i-1)}\right\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{m+1} k^{i-1}\|a_1 - a_0\| \\
&< \frac{1}{1-k}\|a_1 - a_0\| \\
&< r
\end{aligned}$$

Sehingga pada kondisi

$$\|a_m - a_0\| \leq \frac{1}{1-k}\|a_i - a_0\| < r$$

Dapat dibuktikan dengan benar.

Pada definisi barisan $\{a_m\}$ di X ketika $a_0 + \sum_{m=0}^{\infty}(a_{m+1} - a_m)$ termasuk barisan konvergen, dimana barisan konvergen tersebut mendekati a sehingga

$$\|a - a_0\| \leq \frac{1}{1-k}\|a_i - a_0\| < r$$

Maka $a \in X$.

$$a = \lim_{m \to \infty} a_m = \lim_{m \to \infty} f(a_{m-1}) = f(a)$$

Dengan demikian a merupakan titik tetap di f.

Untuk titik tetap b, misalkan $b \in X$ yang memenuhi $f(b) = b$

$$\|b - a\| = \|f(b) - f(a)\| \leq k\|b - a\|$$

Sehingga $k < 1$, yang memenuhi $\|b - a\| = 0$, dengan demikian $b = a$.

2.6 Ruang Banach

Setiap ruang vektor ber-*norm* yang lengkap disebut ruang Banach (Cohen, 2003).

Contoh 2.6.1

$\mathbb{R}^n$ dengan *norm* yang didefiniskan $\|x\|_1 = (\sum i|x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$ yang mana $\|x\|_1 = \sum i|x_i|)$ atau $\|x\|_\infty = max_i|x_i|$

Kemudian

$$\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\|_1 = 3 + 4 = 7$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max(3,4) = 4$$

2.7 Proses Iterasi Mann

Definisi 2.7.1

Misalkan $\mathbb{N}$ adalah himpunan bilangan bulat positif. X adalah himpunan bagian tak kosong dari ruang ber-*norm* dan f pemetaan dari X terhadap dirinya sendiri. Proses iterasi Mann didefinisikan sebagai barisan $\{v_n\}$

$$\begin{cases} v_1 = v \in X \\ v_{n+1} = (1-b_n)v_n + b_n\big(f(v_n)\big), n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Dengan v_n adalah barisan di $[0,1]$ (Rafiq, 2005).

Definisi 2.7.2 (Proses Iterasi Mann)

Proses iterasi Mann $M(x_1, A, T)$ dikatakan normal jika $A = [a_{nj}]$ yang memenuhi:

(1) $a_{nj} \geqq 0$ untuk setiap n, j dan $a_{nj} = 0$ untuk $j > n$

(2) $\sum_j^n a_{nj} = 1$ untuk setiap n

(3) $\lim\limits_n a_{nj} = 0$ untuk j

(4) $a_{n+1,j} = \big(1 - a_{n+1,n+1}\big)a_{nj}$ dengan $j = 1,2, \dots, n$; $n = 1,2,3, \dots$,

(5) $a_{nn} = 1$ untuk setiap n, atau $a_{nn} < 1$ untuk setiap $n > 1$ (Dotson, 1970).

Teorema 2.7.3

Pernyataan berikut adalah benar:

a) Syarat perlu dan cukup agar $M(x_1, A, T)$ menjadi proses iterasi Mann dikatakan normal jika $A = [a_{nj}]$ harus memenuhi (1), (2), (4), (5), dan (3′) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{nn} = \infty$.

b) Matriks $A = [a_{nj}]$ (lebih dari matriks identitas tak hingga) pada semua proses iterasi Mann yang lengkap $M(x_1, A, T)$ akan dikonstruksi sebagai berikut:

   1. Dipilih b_n sedemikian sehingga $0 \leqq b_n < 1$ untuk semua n dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.
   2. Didefinisikan $A = [a_{nj}]$ yaitu

$$a_{11} = 1,\ a_{1j} = 0 \text{ untuk } j > 1,\ a_{n+1,n+1} = b_n,\ n = 1,2,3 \dots;$$

$$a_{n+1,j} = a_{jj} \prod_{i=j}^{n} (1 - b_n) \text{ untuk } j = 1,2, \dots, n$$

dan

$$a_{n+1,j} = 0 \text{ untuk } j > n+1, n = 1,2,3, \ldots$$

3. Barisan v_n dalam proses iterasi Mann normal $M(x_1,\ A, T)$ memenuhi

$$v_{n+1} = (1 - b_n)v_n + b_n(f(v_n))$$

untuk semua $n = 1,2,3$, dengan $b_n = a_{n+1,n+1}$.

Contoh:

Diketahui

$$f(x) = -\tfrac{2}{5}x^2 + \sqrt{x} + \int_0^x x^2y^2f(y)dy, \text{ dan } f_0(x) = \sqrt{x}.$$

Akan ditentukan solusi dari persamaan diatas dengan menggunakan metode iterasi

$$f_{n+1}(x) = -\frac{2}{5}x^2 + \sqrt{x} + \int_0^x x^2y^2f(y)dy,$$

Sehingga diperoleh barisan sebagai berikut:

$$f_1(x) = -\frac{2}{5}x^2 + \sqrt{x} + \int_0^x x^2y^2f_0(y)dy,$$

$$= -\frac{2}{5}x^2 + \sqrt{x} + \int_0^x x^2y^2f\sqrt{y}\,dy,$$

$$= -\frac{2}{5}x^2 + \sqrt{x} + \frac{2}{5}x^2x^{\frac{5}{2}}$$

$$= -\frac{2}{5}x^2 + \sqrt{x} + \frac{2}{5}x^{\frac{9}{2}}$$

$$f_2(x) = -\frac{2}{5}x^2 + \sqrt{x} + \int_0^x x^2y^2f_1(y)dy,$$

$$= -\frac{2}{5}x^2 + \sqrt{x} + \int_0^x x^2y^2(-\frac{2}{5}y^2 + \sqrt{y} + \frac{2}{5}y^{\frac{9}{2}})dy,$$

$$= -\frac{2}{5}x^2 + \sqrt{x} + x^2\int_0^x (-\frac{2}{5}y^4 + y^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{5}y^{\frac{13}{2}})dy,$$

$$= -\frac{2}{5}x^2 + \sqrt{x} + x^2(-\frac{2}{25}x^5 + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{65}x^{\frac{13}{2}})$$

$$= -\frac{2}{5}x^2 + \sqrt{x} - \frac{2}{25}x^5 + \frac{2}{5}x^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{65}x^{\frac{17}{2}}$$

$$f_3(x) = -\frac{2}{5}x^2 + \sqrt{x} + \int_0^x x^2y^2 f_2(y)dy,$$

$$= -\frac{2}{5}x^2 + \sqrt{x} + \int_0^x x^2y^2\left(-\frac{2}{5}y^2 + \sqrt{y} - \frac{2}{25}y^5 + \frac{2}{5}y^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{65}y^{\frac{17}{2}}\right)dy,$$

$$= -\frac{2}{5}x^2 + \sqrt{x} + x^2\int_0^x (-\frac{2}{5}y^4 + y^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{25}y^7 + \frac{2}{5}y^{\frac{9}{2}} + \frac{4}{65}y^{\frac{19}{2}})dy,$$

$$= -\frac{2}{5}x^2 + \sqrt{x} + x^2(-\frac{2}{25}x^5 + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{200}x^8 + \frac{4}{50}x^{\frac{10}{2}} + \frac{8}{1365}x^{\frac{21}{2}})$$

$$= -\frac{2}{5}x^2 + \sqrt{x} - \frac{2}{25}x^7 + \frac{2}{5}x^{\frac{9}{2}} - \frac{2}{200}x^{10} + \frac{4}{50}x^{\frac{14}{2}} + \frac{8}{1365}x^{\frac{23}{2}}$$

Dapat dilihat dari contoh di atas bahwa $|x| \leq 1$, barisan $\{f_n(x)\}$ akan konvergen ke $f(x) = -\frac{2}{5}x^2 + \sqrt{x}$ sehingga dapat disimpulkan bahwa barisan

$$f(x) = -\frac{2}{5}x^2 + \sqrt{x} + \int_0^x x^2y^2 f(y)dy,$$

dan

$f_0(x) = \sqrt{x}$ dengan menggunakan metode iterasi akan kembali kepada dirinya sendiri.

2.8 Teorema Titik Tetap

Menurut Pachpatte (1981) telah dibuktikan teorema titik tetap di ruang ber-*norm* pada pemetaan f dari ruang metrik (X, d) ke dalam dirinya sendiri yaitu dengan memenuhi kondisi dari bentuk pemetaan kontraksi sebagai berikut

$$d(f(x), f(y)) \leq k \max\left\{d(x,y), \frac{d(y,f(y))[1 + d(x,f(x))]}{1 + d(x,y)}, \frac{1}{2}\frac{d(x(f(y))[1 + d(x,f(x)) + d(y,f(y))]}{1 + d(x,y)}\right\}$$

untuk $x, y \in X$dimana$0 < k < 1$ (2.1)

Penggunaan ruang metrik memungkinkan dalam menyelidiki keberadaan dan pendekatan teorema titik tetap di ruang ber-*norm*, yang memenuhi kondisi dari bentuk pemetaan kontraksi ruang Banach.

Definisi 2.8.1

Misalkan f merupakan pemetaan ke dalam dirinya sendiri dari ruang Banach X. Proses iterasi Mann yang terkait dengan f didefinisikan dengan cara berikut

Misalkan v_0 di X dan $v_{n+1} = (1 - b_n)v_n + b_n(f(v_n))$,

untuk $n > 0$ (n bilangan asli) (2.2)

dengan $\{b_n\}$ adalah barisan bilangan real yang memenuhi

(i) $b_0 = 1$

(ii) $0 < b_n < 1$untuk $n > 0$ (n bilangan asli)

(iii) $\sum b_n = \infty$

(iv) $\lim_{n\to\infty} b_n = h > 0$.

2.9 Kajian Sabar dalam Matematika

Allah Swt. akan menjanjikan nikmat secara terus menerus yang telah disempurnakan, nikmat pertama dan utama adalah diutusnya Rasulullah, beliau telah menunjukkan kepada kita *"addinul islam"* dan beliaulah yang memimpin perjuangan Islam selama ini. Oleh karena itu tetaplah mengingat kepada Allah Swt. dan mendekat kepada Allah Swt. supaya Allah Swt. akan ingat dan dekat kepada kita, dan syukurilah atas kenikmatan-Nya, janganlah kalian menjadi orang yang kufur. Tetapi ada syarat utama yang wajib dipenuhi, sebab kejadian-kejadian besar akan diberikan Allah Swt. kelak kepada kita, syarat utama yaitu terdapat dalam surat al-Baqarah/2:153, Allah Swt. berfirman:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ ٱسۡتَعِينُواْ بِٱلصَّبۡرِ وَٱلصَّلَوٰةِۚ إِنَّ ٱللَّهَ مَعَ ٱلصَّٰبِرِينَ ١٥٣

"Wahai orang-orang yang beriman! Mohonlah pertolongan dengan sabar dan sholat, Sesungguhnya Allah adalah beserta orang-orang yang sabar" (QS. al-Baqarah/2:153).

Menurut Al-Mahali (2010) dalam tafsir Jalalain dijelaskan bahwa orang-orang yang beriman diserukan untuk meminta pertolongan hanya kepada Allah Swt. demi mencapai suatu kebahagiaan di akhirat yakni dengan jalan bersabar, taat melakukan ibadah dan sabar dalam menghadapi cobaan-Nya, serta dirikanlah sholat sehingga kalian selalu mengingat Allah Swt. dan menyebutkan asma Allah Swt. secara berulang-ulang (sesungguhnya Allah Swt. bersama orang-orang yang sabar) dalam artian Allah Swt. selalu melimpahkan pertolongan-Nya kepada mereka.

Maksud ayat tersebut mempunyai makna yang besar, suatu keinginan yang tinggi. Menegakkan kalimat Allah Swt. memancarkan tauhid, menjauhkan diri dari menyembah kepada selain Allah Swt. serta menjauhkan diri dari penyakit hati. Suatu kebaikan pastilah di dalamnya terdapat banyak cobaan, cobaan itu pasti banyak dan jalannya pasti sulit. Sering kali kita dengar *"bertambahnya mulia dan tinggi derajat seseorang, bertambah pula cobaan yang dihadapi"* atau *"semakin tingginya pohon semakin kencang pula angin yang menerpa"*. Oleh karena itu, kita harus selalu meminta keteguhan hati, semangat yang tinggi, dan dijauhkan dari sifat putus asa atau pengorbanan yang tidak pernah mengenal kata lelah. Meskipun keinginan yang begitu tinggi, tapi jika tidak diiringi dengan keteguhan hati dan semangat yang kuat, keinginan tersebut tidak akan tercapai. Pada jaman terdahulu Nabi-nabi termasuk juga nabi *"ulul azmi"* semuanya telah menempuh jalan itu dan semuanya menghadapi cobaan yang begitu sulit. Kemenangan mereka hanya terletak pada kesabaran. Maka, jika kalian termasuk orang-orang yang beriman wajib atas kalian untuk bersabar, sabar dalam menderita, sabar dalam kelaparan dan kehausan, sabar dalam menunggu dan lain sebagainya. Jangan merasa sedih, tetaplah meminta yang terbaik kepada-Nya dan yakinlah bahwa Allah selalu bersama dengan orang-orang yang bersabar.

Dapat diketahui bahwa kata *"sobr"* atau sabar berulang kali disebutkan dalam al-Quran sebanyak seratus satu kali kalimat. Hanya dengan sabar orang akan mencapai derajat keimanan yang tinggi, dengan bersabar orang akan mencapai suatu keinginan yang dimaksud, serta dengan bersabar kebenaran akan dapat ditegakkan.

Tujuan hidup ini sebenarnya adalah hanya untuk Allah Swt. dengan mencari keridhaan-Nya. Oleh karena itu, kita harus mendirikan shalat, karena dengan sholat kita akan mengingat Allah Swt. hanya mengingat Allah Swt. hati kita akan menjadi tenang. Sebagaimana yang terdapat dalam surat ar-Ra'ad/13:28 yang berbunyi

ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ وَتَطۡمَئِنُّ قُلُوبُهُم بِذِكۡرِ ٱللَّهِۗ أَلَا بِذِكۡرِ ٱللَّهِ تَطۡمَئِنُّ ٱلۡقُلُوبُ ٢٨

"(yaitu) orang-orang yang beriman dan hati mereka menjadi tenteram dengan mengingat Allah. Ingatlah, hanya dengan mengingat Allahlah hati menjadi tenteram"(QS. ar-Ra'ad/13:28).

Maka sabar dan sholat keduanya harus sejalan, apabila keduanya telah dijalankan dengan kesungguhan dan keyakinan, pasti dengan berjalannya waktu kita akan terlepas dari kesulitan yang ada dalam diri kita, karena Allah Swt. telah berdaulat dalam hati kita. Dapat kita ketahui dalam penggalan surat al-Baqarah ujung ayat 153 yang berbunyi **"إِنَّ اللهَ مَعَ الصَّابِرِيْن"** yang artinya *"Sesungguhnya Allah adalah beserta orang-orang yang sabar"* jangan kalian merasa takut untuk menghadapi hidup ini, kalau Allah telah menjamin bahwa Dia selalu beserta kita, jika kalian merasa sedih berpegang teguhlah pada ayat ini, untuk membentengi diri dengan cara sabar dan sholat.

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwasebagai umat Islam harus menghadapi cobaan-Nya dengan bersabar dan sholat, kesabaran manusia itu tidak ada .

Ruang *Norm* merupakan ruang vektor yang dilengkapi dengan suatu norm. Dikatakan ruang norm yang lengkap, lengkap maksudnya barisan Cauchy yang konvergen, konvergen disini adalah ruang metrik. Jadi, antara ruang norm, dan ruang metrik mempunyai keterkaitan untuk membuktikan suatu teorema titik tetap diruang *Norm*. Begitu juga dengan kesabaran, kesabaran mempunyai keterkaitan yang erat dengan sholat, dengan sholat diriiniakan menjadi tenang. Kita harus belajar untuk menjadi muslim yang lebih sabar dengan keteguhan hati, mudah-mudahan kita akan menerima ganjaran kesabaran itu berupa surga. Seperti dalam surat al-Baqarah/2:155

وَلَنَبۡلُوَنَّكُم بِشَيۡءٖ مِّنَ ٱلۡخَوۡفِ وَٱلۡجُوعِ وَنَقۡصٖ مِّنَ ٱلۡأَمۡوَٰلِ وَٱلۡأَنفُسِ وَٱلثَّمَرَٰتِۗ وَبَشِّرِ
ٱلصَّٰبِرِينَ ١٥٥

"Dan sungguh akan kami berikan cobaan kepadamudengan sedikit ketakutan, kelaparan, kekurangan harta, jiwa, dan buah-buahan. Dan berikanlah berita gembira kepada orang-orang yang sabar"(QS. al-Baqarah/2:155).

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Teorema Titik Tetap di Ruang Ber-*Norm*

Telah didefinisikan pada bab sebelumnya bahwa pemetaan kontraksi, ruang metrik dan ruang Banach mempunyai peran penting pada pencarian titik tetap di ruang ber-*norm*.

Misalnya (X, d) adalah ruang metrik dan f adalah pemetaan kontraksi, jika barisan tersebut konvergen maka mempunyai titik tetap di f yang memenuhi

$$d(f(x), f(y)) \leq k \max\left\{d(x,y), \frac{d(y,f(y))[1+d(x,f(x))]}{1+d(x,y)}, \frac{1}{2}\frac{d(x(f(y))[1+d(x,f(x))+d(y,f(y))]}{1+d(x,y)}\right\}$$

untuk $x, y \in X$ dimana $0 < k < 1$ (3.1)

Misalkan f merupakan pemetaan ke dalam dirinya sendiri dari ruang Banach X. Proses iterasi Mann yang terkait dengan f didefinisikan dengan cara berikut

Misalkan v_0 di X dan $v_{n+1} = (1 - b_n)v_n + b_n(f(v_n))$,

untuk $n > 0$ (n bilangan asli), (3.2)

dengan $\{b_n\}$ adalah barisan bilangan real yang memenuhi

(v) $b_0 = 1$

(vi) $0 < b_n < 1$ untuk $n > 0$ (n bilangan asli)

(vii) $\sum b_n = \infty$

(viii) $\lim_{n\to\infty} b_n = h > 0$.

Teorema 3.1.1

Misalkan X adalah himpunan bagian yang tertutup di ruang ber-*norm*. f adalah pemetaan dari X terhadap dirinya sendiri yang memenuhi (3.1) pada X. $\{v_n\}$

diasumsikan dengan proses iterasi Mann yang bersesuaian dengan f yang di definisikan pada (3.2), dengan $\{b_n\}$ adalah barisan yang memenuhi (i), (ii), dan (iv)**.** Jika $\{v_n\}$ konvergen di X, maka $\{v_n\}$ konvergen ke titik tetap di f.

Bukti:

Pada pembuktian ini, akan dibuktikan pada barisan $\{v_n\}$.

Misalkan $z \in X$yang memenuhi $\lim_{n\to\infty} v_n = z$.

Maka

$$d(z, f(z)) \le d(z, v_{n+1}) + d(v_{n+1}, f(z)) \tag{3.3}$$

$$\le d(z, v_{n+1}) + d(1 - b_n)v_n + b_n(f(v_n), f(z))$$

$$\le d(z, v_{n+1}) + \|(1 - b_n)v_n + b_n(f(v_n) - f(z)\|$$

$$\le d(z, v_{n+1}) + \|(1 - b_n)v_n - (1 - b_n)f(z) + b_n f(v_n) - b_n f(z)\|$$

$$\le d(z, v_{n+1}) + (1 - b_n)\left\|\left(v_n - f(z)\right) + b_n f(v_n) - b_n f(z)\right\|$$

$$\le d(z, v_{n+1}) + (1 - b_n)\, d\left(v_n, f(z)\right) + b_n d(f(v_n), f(z))$$

$d(f(v_n), f(z))$ disubstitusi oleh ketaksamaan (3.1), sehingga diperoleh

$$d\big(z, f(z)\big) \le d(z, v_{n+1}) + (1 - b_n)\, d\left(v_n, f(z)\right) +$$

$$b_n k\ max\left\{d(v_n, z), \frac{d(z, f(z))[1 + d(v_n, f(v_n)]}{1 + d(v_n, z)}, \frac{1}{2}\frac{d(v_n, f(z))[1 + d\big(v_n, f(v_n)\big) + d(z, f(v_n)]}{1 + d(v_n, z)}\right\}$$

kemudian $v_{n+1} = v_n - b_n v_n + b_n f(v_n)$,

$$v_{n+1} - v_n = b_n(f(v_n) - v_n),$$

$$f(v_n) - v_n = \frac{v_{n+1} - v_n}{b_n}$$

sehingga $d\big(v_n, f(v_n)\big) = \frac{d(v_n, v_{n+1})}{b_n}$ (3.4)

dan

$$d\big(z, f(v_n)\big) \le d(z, v_n) + d(v_n, f(v_n)) \tag{3.5}$$

$d(v_n, f(v_n)$ disubstitusi oleh ketaksamaan (3.4), sehingga diperoleh

$$d\big(z, f(v_n)\big) \leq d(z, v_n) + \frac{d(v_n, v_{n+1})}{b_n} \qquad (3.6)$$

Dengan mensubstitusikan nilai-nilai di atas pada ketaksamaan segitiga maka

$$d(z, f(z)) \leq d(z, v_{n+1}) + (1 - b_n)\, d\,\big(v_n, f(z)\big) +$$

$$b_n k\ max \left\{ d(v_n, z), \frac{d(z, f(z))[1 + \frac{d(v_n, v_{n+1})}{b_n}]}{1 + d(v_n, z)}, \frac{1}{2} \frac{d(v_n, f(z))[1 + \frac{2d(v_n, v_{n+1})}{b_n} + d(z, v_n)]}{1 + d(v_n, z)} \right\}$$

selanjutnya dengan mengambil $\lim_{n \to \infty}$ dan menggunakan sifat *(iv)* diperoleh

$$d\big(z, f(z)\big) \leq (1 - h + kh)\ d\ (z, f(z))$$

karena $\lim_{n \to \infty} v_n = z$ maka barisan $\{v_n\}$ konvergen ke z yang berarti bahwa $d\big(z, f(z)\big) = 0$ sehingga z adalah titik tetap di f.

Jadi, terbukti bahwa barisan v_n konvergen ke titik tetap f dan pembuktian ini lengkap.

Contoh:

Misalkan $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ dan d adalah ruang metrik pada bilangan real. Misalkan $f: X \to X$ didefinisikan sebagai

$$f(x) = \begin{cases} 2, & jika\ x = 0 \\ 1, & jika\ x \neq 0 \end{cases}$$

Misalkan $\varphi: R^+ \to R^+$ dengan $\varphi(t) = 1$ untuk setiap $t \in R^+$

Kemudian $\varphi: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ adalah fungsi integral Lesbesgue yang termasuk dalam setiap himpunan bagian $(0, +\infty)$, tidak negatif sedemikian sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$, $\int_0^{\varepsilon} \varphi\,(t) dt > 0$.

Bukti

Pemetaan f terhadap dirinya sendiri harus memenuhi

$$d(f_x, f_y) \leq \beta\ \max\big\{d(f_x, x) + d\big(f_y, y\big) + d\big(f_y, y\big) + d(x, y), d(f_x, x) + d(x, y)\big\}$$

untuk setiap $x, y \in X$ dan $\beta \in [0, \frac{1}{2})$ adalah fungsi kontraktif sehingga

$$\int_0^{d(f_x, f_y)} \varphi(t)dt \leq \alpha\left(\int_0^{d(x,y)} \varphi(t)dt, \int_0^{d(x,f_x)} \varphi(t)dt, \int_0^{d(y,f_y)} \varphi(t)dt\right)$$

$$= \beta \max\left\{\int_0^{d(f_x,x)+d(x,y)} \varphi(t)dt,\right.$$

$$\int_0^{d(f_x,x)+d(f_y,y)} \varphi(t)dt,$$

$$\left.\int_0^{d(f_y,y)+d(x,y)} \varphi(t)dt\right\}$$

yang memenuhi $\forall\ x, y \in X$ dan $\beta \in [0, \frac{1}{2})$

sehingga teorema terpenuhi dan 1 adalah titik tetap di f.

Teorema 3.1.2

Misalkan X adalah himpunan bagian yang tertutup di ruang ber-*norm* dan misalkan f_1 dan f_2 keduanya merupakan pemetaan dari X ke dirinya sendiri yang memenuhi

$$d(f_1(x), f_2(y)) \leq k \max\left\{d(x,y), \frac{d(y, f_2(y))[1 + d(x, f_1(x))]}{1 + d(x,y)}, \frac{1}{2}\frac{d(x, f_2(y))[1 + d(x, f_1(x)) + d(y, f_1(x))]}{1 + d(x,y)}\right\}$$

untuk setiap x, y di X dengan $0 < k < 1$ (3.7)

Misalkan suatu barisan $\{v_n\}$ didefinisikan sesuai dengan proses iterasi Mann yang berhubungan dengan f_1 dan f_2 diberikan sebagai berikut:

untuk $v_0 \in X$,

$$v_{2n+1} = (1 - b_n)v_{2n} + b_n f_1 v_{2n} \text{ dan } v_{2(n+1)} = (1 - b_n)v_{2n+1} + b_n f_2\, v_{2n+1}$$

untuk $n = 0, 1, 2 \ldots$ dengan $\{b_n\}$ adalah barisan yang memenuhi (i), (ii), dan (iv). Jika $\{v_n\}$ konvergen ke z di X, maka z titik tetap utama di $f_1$dan f_2.

Bukti:

Misalkan $z \in X$ sedemikian sehingga memenuhi $\lim\limits_{n \to \infty} v_n = z$.

Maka akan ditunjukkan z titik tetap utama di $f_1$dan f_2.

$$d(z, f_2(z)) \leq d(z, v_{2n+1}) + d(v_{2n+1}, f(z)) \tag{3.8}$$

$$\leq d(z, v_{2n+1}) + d(1 - b_n)v_{2n} + b_n(f_2(v_{2n}), f_2(z))$$

$$\leq d(z, v_{2n+1}) + \|(1 - b_n)v_{2n} + b_n(f_2(v_{2n}) - f_2(z)\|$$

$$\leq d(z, v_{2n+1}) + \|(1 - b_n)v_{2n} - (1 - b_n)f_2(z) + b_n f_2(v_{2n}) - b_n f_2(z)\|$$

$$\leq d(z, v_{2n+1}) + (1 - b_n)\, d\,\left(v_{2n}, f_2(z)\right) + b_n d(f_1(v_{2n}), f_2(z))$$

$d(f_1(v_{2n}), f_2(z))$ disubstitusi oleh ketaksamaan (3.7), sehingga diperoleh

$$d\left(z, f_2(z)\right) \leq d(z, v_{2n+1}) + (1 - b_n)\, d\,\left(v_{2n}, f_2(z)\right) +$$

$$b_n k\ max \left\{ d(v_{2n}, z), \frac{d(z, f_2(z)[1 + d(v_{2n}, f_1(v_{2n})]}{1 + d(v_{2n}, z)}, \frac{1}{2} \frac{d(v_{2n}, f_2(z))[1 + d\left(v_{2n},\ f_1(v_{2n})\right) + d(z, f_1(v_{2n})}{1 + d(v_{2n}, z)} \right\}$$

kemudian $v_{2n+1} = v_{2n} - b_n v_{2n} + b_n f_2(v_n)$,

$$v_{2n+1} - v_{2n} = b_n\left(f_2(v_{2n}) - v_{2n}\right),$$

$$f_2(v_{2n}) - v_{2n} = \frac{v_{2n+1} - v_{2n}}{b_n}$$

sehingga $d\left(v_{2n}, f_2(v_{2n})\right) = \frac{d(v_{2n}, v_{2n+1})}{b_n}$ (3.9)

dan

$$d\left(z, f_2(v_{2n})\right) \leq d(z, v_{2n}) + d(v_{2n}, f_2(v_{2n})) \tag{4.0}$$

$d(v_{2n}, f_2(v_{2n})$ disubstitusi oleh ketaksamaan (3.9), sehinggadiperoleh

$$d\left(z, f_2(v_{2n})\right) \leq d(z, v_{2n}) + \frac{d(v_{2n}, v_{2n+1})}{b_n} \tag{4.1}$$

Dengan mensubstitusikan nilai-nilai di atas pada ketaksamaan segitiga maka

$$d(z, f_2(z)) \leq d(z, v_{2n+1}) + (1 - b_n)\, d\,\left(v_{2n}, f_2(z)\right) +$$

$$b_n k\ max \left\{ d(v_{2n}, z), \frac{d(z, f_2(z))[1 + \frac{d(v_{2n}, v_{2n+1})}{b_n}]}{1 + d(v_{2n}, z)}, \frac{1}{2} \frac{d(v_{2n}, f_2(z))[1 + \frac{2d(v_{2n}, v_{2n+1})}{b_n} + d(z, v_{2n})]}{1 + d(v_{2n}, z)} \right\}$$

selanjutnya dengan mengambil $\lim_{n \to \infty}$ dan menggunakan sifat *(iv)* diperoleh

$$d\left(z, f_2(z)\right) \leq (1 - h + hk)\, d\,(z, f_2(z))$$

karena $\lim_{n\to\infty} v_n = z$ maka barisan $\{v_n\}$ konvergen ke z yang berarti bahwa $d\left(z, f_1(z)\right) = 0$ dan dapat ditunjukkan juga $d\left(z, f_2(z)\right) = 0$ sehingga z adalah titik tetap utama di f_1 dan f_2. Jadi, terbukti bahwa pembuktian ini lengkap.

Contoh

Misalkan $X = [0,1]$ dengan metrik parsial $p: X \times X \to R^+$ didefinisikan

$p(x,y) = \frac{1}{4}|x - y| + \frac{1}{2}\max\{x,y\}$ untuk setiap $x, y \in X$.

dan (X,p) adalah ruang metrik parsial yang lengkap.

Didefinisikan pemetaan $f_1: X \to X$ dan $f_2: X \to CB^P(X)$,

$$f_1(x) = 0 \text{ dan } f_2(x) = \left[\frac{x}{4}, \frac{x}{3}\right], \text{ untuk setiap } x \epsilon X$$

dan fungsi $\varphi: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ dengan $\varphi(t) = \frac{5}{8}t$ untuk $t \geq 0$.

Sehingga untuk setiap $x \epsilon X$, himpunan $f_2(x)$ terbatas dan tertutup terhadap ruang topologi f_p untuk setiap $x, y \epsilon X$,

$$H_p(\{f_1(x)\}, f_2(y)) = H_p\left(\{0\}, \left[\frac{y}{4}, \frac{y}{3}\right]\right) = \frac{y}{4}$$

Kasus 1: jika $x \leq y$ maka

$$M(x,y) = \max\left\{\frac{3}{4}y - \frac{1}{4}x, \frac{3}{4}x, \frac{2}{3}y, \frac{1}{2}[\frac{3}{4}y + p\left(x, \left[\frac{y}{4}, \frac{y}{3}\right]\right)]\right\}.$$

$$(0 \leq x \leq \frac{1}{4}y), (\frac{1}{4}y \leq x \leq \frac{7}{12}y) \text{ dan } (\frac{7}{12}y \leq x \leq \frac{y}{3})$$

sehingga diperoleh

$$M(x.y) = \frac{3}{4}y - \frac{1}{4}x$$

maka

$$H_p(\{f_1(x)\}, f_2(y)) = \frac{y}{4} \leq \frac{3}{8}\left(\frac{3}{4}y - \frac{1}{4}x\right) = \frac{3}{8}M(x,y) = M(x,y) - \varphi\left(M(x,y)\right).$$

jika $(\frac{y}{3} \leq x \leq \frac{8}{9}y)$ maka $M(x,y) = \frac{2}{3}y$,

sehingga

$$H_p(\{f_1(x)\}, f_2(y)) = \frac{y}{4} = \frac{3}{8}\frac{2}{3}y = \frac{3}{8}M(x,y) = M(x,y) - \varphi\big(M(x,y)\big),$$

dan jika $(\frac{8}{9}y \leq x \leq y)$ maka $M(x,y) = \frac{3}{4}x$,

sehingga

$$H_p\big(\{f_1(x)\}, f_2(y)\big) = \frac{y}{4} \leq \frac{3}{8}\frac{3}{4}x = \frac{3}{8}M(x,y) = M(x,y) - \varphi\big(M(x,y)\big).$$

Kasus 2: jika$x > y$ maka

$$M(x,y) = \max\left\{\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}y, \frac{3}{4}x, \frac{2}{3}y, \frac{1}{2}(\frac{2}{3}y + \frac{3}{4}x)\right\} = \frac{3}{4}x.$$

sehingga

$$H_p\big(\{f_1(x)\}, f_2(y)\big) = \frac{y}{4} \leq \frac{3}{8}\frac{3}{4}y \leq \frac{3}{8}\frac{3}{4}x = M(x,y) = M(x,y) - \varphi\big(M(x,y)\big).$$

Maka pemetaanf_1 dan f_2 mempunyai satu titik tetap utama yaitu $u = 0$.

3.2 Keterkaitan Konsep Kesabaran dan Titik Tetap

Hanya dengan sabar semuanya akan dapat diatasi, karena kehidupan ini tidak lepas dari cobaan atau ujian dari Allah. Nabi Muhammad Saw. dalam peperangan uhud kehilangan pamannya yang sangat dicintai yaitu Hamzah bin Abdul Muthalib. Maka apabila mereka bersabar dalam menghadapi ujian dari Allah Swt. mereka kelak akan merasakan hikmah dari semua itu. Suatu keinginan yang tinggi tidak terlepas dari pengorbanan. Berilah khabar kegembiraan kepada mereka yang bersabar, sebagaimana Allah berfirman dalam surat al-Baqarah/2: 156

ٱلَّذِينَ إِذَآ أَصَٰبَتۡهُم مُّصِيبَةٞ قَالُوٓاْ إِنَّا لِلَّهِ وَإِنَّآ إِلَيۡهِ رَٰجِعُونَ ١٥٦

“(Yaitu) orang-orang yang apabila menimpa kepada mereka suatu musibah, mereka berkata sesungguhnya kita ini dari Alla, dan sesungguhnya kepadaNya-lah kita semua akan kembali”(QS. al-Baqarah/2:156).

Menurut Al-Maraghi (1993), dalam tafsir al-Maraghi “Sampaikanlah berita gembira kepada orang-orang yang sabar, yakni orang-orang yang mengatakan perkataan tersebut sebagai ungkapan rasa iman dengan kodrat dan kepastian Allah. Berita gembira tersebut adalah keberhasilan yang akan dicapai oleh orang-orang, sesuai dengan sunnatullah terhadap makhluk-Nya”.

Kesedihan yang dilarang adalah kesedihan yang mendorong seseorang berbuat hal-hal yang tercela oleh akal sehat, dan dilarang oleh syari’at agama. Misalnya, banyak yang terjadi di kalangan masyarakat ketika mereka ditimpa musibah seperti kematian anggota keluarga, lalu diratapi.

Di dalam firman Allah yang berbunyi “*Innalillahi*” menunjukkan pengakuan hamba terhadap Allah sebagai tuhan yang disembah dan diagungkan. Dan di dalam firman Allah yang berbunyi *“wa inna ilaihi raji’un”,* merupakan pengakuan hamba terhadap Allah, bahwa ia akan mati dan dibangkitkan kembali dari kubur. Juga merupakan ungkapan keyakinan seorang hamba, bahwa semua perkara itu kembali hanya kepada Allah.

Begitu juga pada pembahasan tentang teorema titik tetap di ruang *Norm* pada pemetaan Pachpatte mempunyai titik tetap tunggal yaitu $f(x) = x$ dan $f(y) = y$ dimana pemetaan tersebut merupakan titik tetap terhadap dirinya sendiri.

Sehingga dapat diketahui bahwa sesulit apapun hidup ini harus selalu bertawakkal, kembalikan semuanya hanya kepada Allah. Mereka itulah orang-

orang yang sabar disisi Allah Swt. mereka akan mendapatkan ampunan. Mereka juga akan mendapatkan rahmat dari Allah berupa ketenangan hati. Sedikitpun mereka tidak akan merasa kaget di dalam hati. Mereka merasa bahagia karena mendapatkan kebahagian di dunia ataupun di akhirat karena kebersihan jiwa yang dihiasi dengan akhlak mulia, di samping amal-amal shaleh, sesungguhnya sabar itu indah, Allah berfirman dalam surat Yusuf/12:83 yang berbunyi

قَالَ بَلۡ سَوَّلَتۡ لَكُمۡ أَنفُسُكُمۡ أَمۡرٗاۖ فَصَبۡرٞ جَمِيلٌۖ عَسَى ٱللَّهُ أَن يَأۡتِيَنِي بِهِمۡ جَمِيعًاۚ إِنَّهُۥ هُوَ ٱلۡعَلِيمُ
ٱلۡحَكِيمُ ٨٣

Ya'qub berkata: "Hanya dirimu sendirilah yang memandang baik perbuatan (yang buruk) itu. Maka kesabaran yang baik Itulah (kesabaranku). Mudah-mudahan Allah mendatangkan mereka semuanya kepadaku; Sesungguhnya Dia-lah yang Maha mengetahui lagi Maha Bijaksana" (QS. Yusuf/12:83).

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat ditarik kesimpulan bahwa teorema titik tetap di ruang *norm* juga dikenal sebagai teorema pemetaan kontraksi, sebelum mencari ketunggalan titik tetap dapat dicari kelengkapan ruang metrik, dikatakan lengkap jika suatu barisan Cauchy tersebut konvergen, sehingga dapat dibuktikan bahwa teorema titik tetap di ruang *norm* mempunyai titik tetap yang tunggal. Dalam membuktikan teorema titik tetap di ruang *norm*, diperlukan suatu teorema pemetaan Pachpatte yaitu:

$$d(f(x), f(y) \leq k \max\left\{d(x,y), \frac{d(y,f(y))[1+d(x,f(x))]}{1+d(x,y)}, \frac{1}{2}\frac{d(x(f(y))[1+d\big(x,f(x)\big)+d(y,f(y))]}{1+d(x,y)}\right\}$$

untuk setiap $x, y \in X$ dimana $0 < k < 1$, maka f mempunyai titik tetap di X. Sehingga pemetaan Pachpatte mempunyai titik tetap tunggal yaitu $f(x) = x$ dan $f(y) = y$ dimana pemetaan tersebut merupakan titik tetap terhadap dirinya sendiri.

4.2 Saran

Pada skripsi ini, peneliti menggunakan pemetaan Pachpatte untuk membuktikan titik tetap di ruang norm. Oleh karena itu peneliti memberikan saran kepada pembaca yang tertarik pada permasalahan ini supaya mengembangkannya dengan menggunakan pada fungsi ruang yang lainnya

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Al-Mahali, M.J.A. dan As-Suyuthi, A.J.A.. 2010. *Tafsir Jalalain 1*. Surabaya: Bina Ilmu Surabaya.

Al-Maraghi, M.A.. 1993. *Tafsir Al-Maraghi 2*. Mesir: Musthafa Al-Babi Al-Halabi.

Cohen, G. 2003. *A Course in Modern Analysis and Its Applications*. United States of America: Cambridge University Press.

Darmawijaya, S. 2007. *Pengantar Analisis Abstrak*. Yogyakarta: Universitas Gajah Mada.

Dotson, W.G. 1970. *On The Mann Iterative Process. Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 149, 65-66.*

Ghozali, M.S.. 2010. *Analisis Real 1*. Bandung.

Hidayani, F.. 2002. *Ruang Vektor Topologi*. *Skripsi*. Yogyakarta: Jurusan Matematika Fakultas MIPA UGM.

Kreyzig, E. 1989. *Introductory Functional Analysis with Application*. New York: John Wiley and Sons.

Purwanto. 1998. *Matematika Diskrit*. Malang: Institut Keguruan dan Ilmu Pendidikan Malang.

Rafiq, A. 2005. A Convergence Theorem For Mann Fixed point Iteration Procedure. *Applied Mathematics E-Notes*, 6(2006): 289-293.

Rynne, B.P. and Youngson, M.A.. 2008. *Linear Functional Analysis*. London: Springer.

Sherbert, R.D & Bartle, G.R. 1994. *Introduction to Real Analysis*. NewYork: John Wiley and Sons.

Yuel, A.K dan Sharma, P.L. 1981. Fixed point Theorems on Contractive Mappings. *Indian J. pre appl. Math.*, 13(4): 426-428.