# GRAF KONJUGASI DARI SUBGRUP DI GRUP SIMETRI

**SKRIPSI**


**OLEH**
**IRNAWATI**
**NIM. 12610032**



**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM**
**MALANG**
**2016**

**GRAF KONJUGASI DARI SUBGRUP DI GRUP SIMETRI**

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada**
**Fakultas Sains dan Teknologi**
**Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang**
**untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam**
**Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh**
**Irnawati**
**NIM. 12610032**

**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM**
**MALANG**
**2016**

**GRAF KONJUGASI DARI SUBGRUP DI GRUP SIMETRI**

**SKRIPSI**

**Oleh**
**Irnawati**
**NIM. 12610032**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 27 Mei 2016

| Pembimbing I, | Pembimbing II, |
| --- | --- |
| H. Wahyu H. Irawan, M.Pd | Fachrur Rozi, M.Si |
| NIP. 19710420 200003 1 003 | NIP. 19800527 200801 1 012 |

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM FAKULTAS SAINTEK JURUSAN MATEMATIKA

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**GRAF KONJUGASI DARI SUBGRUP DI GRUP SIMETRI**

**SKRIPSI**

**Oleh**
**Irnawati**
**NIM. 12610032**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 09 Juni 2016

| | | |
|---|---|---|
| Penguji Utama | : Dr. Abdussakir, M.Pd | ..................... |
| Ketua Penguji | : Evawati Alisah, M.Pd | ..................... |
| Sekretaris Penguji | : H. Wahyu H. Irawan, M.Pd | ..................... |
| Anggota Penguji | : Fachrur Rozi, M.Si | ..................... |

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
FAKULTAS SAINTEK JURUSAN MATEMATIKA

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Irnawati

NIM : 12610032

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Graf Konjugasi dari Subgrup di Grup Simetri

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kacuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 27 Mei 2016
Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL
2EBB6ADF824090093
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Irnawati
NIM. 12610032

# MOTO

"Mimpi menjadikan hidup kita terarah"

## PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Sukur, ibunda Warniti serta adik tersayang Nurul Afifah yang selalu memberikan doa, motivasi dan dukungan setiap waktu.

## KATA PENGANTAR

*Assalamu'alaikum Wr. Wb*

Segala puji bagi Allah Swt. yang telah memberikan rahmat, taufik dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk mendapatkan gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Penyusunan skripsi ini tidak terlepas dari bantuan, bimbingan dan arahan dari beberapa pihak. Untuk itu penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. H. Wahyu H. Irawan, M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, arahan dan nasihat kepada penulis.
5. Fachrur Rozi, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan bimbingan dan berbagi ilmu kepada penulis.
6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang khususnya seluruh staf dosen yang telah memberikan banyak ilmu yang berharga bagi penulis.

7. Ayahanda dan Ibunda yang selalu memberikan doa dan motivasi kepada penulis.
8. Seluruh teman-teman Jurusan Matematika angkatan 2012, terutama Fatmawati Hidayat, Wasiatun Riskiyah dan Hendrik Widya Permata yang tidak pernah pamrih memberikan motivasi dan saran dalam penyelesaian skripsi ini.

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi penulis dan pembaca.

*Wassalamu'alaikum Wr. Wb*

Malang, Juni 2016

Penulis

## DAFTAR ISI

# DAFTAR TABEL

# DAFTAR GAMBAR

# ABSTRAK

Irnawati. 2016. **Graf Konjugasi dari Subgrup di Grup Simetri.** Skripsi. Jurusan Matematika. Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) H. Wahyu H. Irawan, M.Pd. (II) Fachrur Rozi, M.Si.

**Kata Kunci:** grup simetri, subgrup, konjugasi pada grup, graf konjugasi

Salah satu bahasan tentang keterkaitan antara teori graf dan struktur aljabar adalah graf konjugasi. Graf konjugasi didefinisikan sebagai suatu graf yang dibangun dari kelas-kelas konjugasi pada suatu grup non komutatif, dimana kelas-kelas konjugasi tersebut diperoleh dari unsur-unsur yang saling berkonjugasi. Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan krakteristik graf konjugasi dari subgrup non komutatif di grup simetri. Adapun metode penelitian yang digunakan adalah metode kepustakaan dengan langkah awal menentukan subgrup non komutatif di grup simetri, menentukan kelas-kelas konjugasi, menggambarkan grafnya, membuat konjektur tentang karakteristik graf konjugasi tersebut serta membuktikannya.

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan didapatkan bahwa pada grup simetri-$n$ (subgrup tak sejati dari grup simetri-$n$) unsur-unsur yang memiliki tipe sikel sama adalah saling berkonjugasi sehingga berada pada satu kelas konjugasi serta membentuk graf komplit. Sedangkan graf konjugasi dari subgrup-subgup non komutatif di grup simetri-$n$ membentuk kumpulan graf komplit.

Bagi penelitian selanjutnya diharapkan dapat menentukan pola umum graf konjugasi dari subgrup di grup simetri serta menentukan pola umum dari subgrup di grup simetri.

# ABSTRACT

Irnawati. 2016. **The Conjugate Graph of Subgroups in Symmetry Group**. Thesis. Department of Mathematics. Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisor: (I) H. Wahyu H. Irawan, M.Pd. (II) Fachrur Rozi, M.Si.

**Keywords:** symmetry groups, subgroups, conjugate on group, conjugate graph.

One of the discussion about the relation of graph theory and structure of algebra is a conjugate graph. The conjugate graph is defined as a graph constructed from conjugate classes of non commutative group, in which it is obtained from the conjugate elements. The propose of this research is to determine the characteristics of conjugate graph of subgroups in symmetry group. This research used library research method, the first step are determining non commutative subgroups, determining conjugate classes, drawing the conjugate graph, making the conjecture about characteristics conjugate graph and the proving it.

Based on the research that has been done, it is obtained that in the symmetry group (inproper subgroups of $n$-symmetry group), the elements that have the same cycle type is conjugate so that it is in the same conjugacy classes and form a complete graphs. In addition the conjugate graph of non commutative subgoups in symmetry group form collection of complete graphs.

For further research the author suggests to determine the general pattern conjugation graph of subgroups in symmetry group and to determine the general pattern of subgroups in symmetry group.

# ملخص

إرنـاوتـي. ٢٠١٦. **مخطط Conjugate في Subgroup من Symmetry Group**. **بحث جامعي**. **شعبة** الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالنج. المشرف (١) وحي هنكي إراوان الماجستير (٢) فحر الرزي الماجستير.

**الكلمات المفتاحية**: symmetry group، subgroup، conjugate في group ،مخطط conjugate

احد الدراسة من نظرية المخطط و نظر ية الجبار هي مخطط conjugate. مخطط conjugate محدد بالمخطط التي مكون من فصول conjugate في non commutative group و يمكن الحصول علي فصول conjugate من اعضاء الإقتران. هدف من هذا البحث هي تثبيت خصائص المخطط conjugate من non commutative subgroup في group و منهج البحث في هذ البحث هي دراسة مكتبية بتثبيت subgroup في symmetry group تثبيت فصول conjugate، ترسيم مخطط و يصنع حدس عن خصا ئص العام في مخطط conjugate ثم يصح عنه.

و من نتا ئج هذا البحث أن في n-symmetry group هي الأعضاء كان من نفس حنس cycle هي الإقتران وكان في نفس فصل conjugate و تكوّن مخطط كامل. وكذا في non commutative subgroups مجمع من مخطط كامل.

ارجو الى الباحثون الحاضرون بثبت أسلوب العام لمخطط conjugate من subgroup في symmetry group و أسلوب العام من subgroup في symmetry group.

# BAB I

# PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Al-Quran merupakan sumber dari segala sumber ilmu yang ada di dunia. Semua permasalahan yang terdapat dalam aspek kehidupan umat manusia sudah tercantum di dalamnya. Sehingga rujukan yang digunakan oleh umat muslim dalam mempelajari aspek kehidupan pastilah senantiasa berasal dari al-Quran, tak terkecuali pengetahuan tentang sains dan teknologi yang saat ini mempunyai pengaruh sangat besar bagi kehidupan manusia. Tidak dapat dipungkiri lagi bahwa perkembangan sains dan teknologi tidak terlepas dari peran ilmu matematika. Sehingga matematika menjadi salah satu ilmu yang berperan penting dalam merumuskan konsep-konsep ilmu pengetahuan terutama ilmu pengetahuan alam. Seperti yang telah disebutkan dalam al-Quran pada surat al-Furqan/25:2 yang berbunyi:

ٱلَّذِى لَهُۥ مُلْكُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُن لَّهُۥ شَرِيكٌ فِى ٱلْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَىْءٍ
فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

*"yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu bagi-Nya dalam kekuasaan (Nya), dan Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya" (QS. al-Furqan/25:2).*

Ayat di atas menjelaskan bahwa alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdusysyakir, 2007:79-80).

Matematika didefinisikan sebagai abstraksi dari dunia nyata yang ditulis dalam bentuk bahasa simbol. Bahasan yang terdapat dalam matematika tersusun dengan rapi. Pemahaman suatu konsep akan mempengaruhi pemahaman pada konsep berikutnya yang berkaitan (Abdusysyakir, 2007:7-13). Selain pemahaman konsep yang saling berkaitan, terdapat juga keterkaitan antar cabang matematika salah satunya adalah keterkaitan antara aljabar dengan teori graf.

Struktur aljabar merupakan cabang aljabar yang mempelajari tentang himpunan tak kosong dengan dilengkapi satu atau lebih operasi biner yang berlaku pada himpunan tersebut. Salah satu struktur aljabar yang terdiri dari himpunan tak kosong dengan dilengkapi satu opersi biner adalah grup. Grup $(G,*)$ merupakan suatu himpunan tak kosong $G$ dengan operasi biner $*$ yang memenuhi tiga aksioma yaitu, operasi $*$ bersifat assosiatif di $G$, $G$ mempunyai unsur identitas terhadap operasi $*$, dan setiap unsur di $G$ mempunyai invers terhadap operasi $*$.

Bahasan matematika yang mempelajari tentang himpunan titik dan himpunan sisi disebut teori graf. Chartrand dan Lesniak (1996:1) menyatakan bahwa suatu graf $G$ berisikan dua himpunan yaitu himpunan berhingga tak kosong dari objek-objek yang disebut titik bersama dengan himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $G$ yang disebut sisi.

Graf konjugasi merupakan bahasan tentang keterkaitan antara struktur aljabar dengan teori graf. Graf konjugasi didefinisikan sebagai suatu graf yang dibangun dari kelas-kelas konjugasi pada suatu grup tidak komutatif, dimana kelas-kelas konjugasi tersebut diperoleh dari unsur-unsur yang saling berkonjugasi. Salah satu jenis grup tidak komutatif yang sering dibahas dalam struktur aljabar adalah grup simetri. Grup $(S_{\Omega},\circ)$ disebut sebagai grup simetri pada himpunan $\Omega$. Misal $\Omega$ adalah sebarang himpunan tak kosong dan $S_\Omega$ adalah himpunan yang memuat semua fungsi-fungsi bijektif dari $\Omega$ ke $\Omega$ (atau himpunan yang memuat semua permutasi dari $\Omega$) maka himpunan $S_\Omega$ dengan operasi komposisi " $\circ$ " atau $(S_\Omega, \circ)$ merupakan suatu grup (Dummit dan Foote, 1991:29).

Struktur aljabar dan teori graf merupakan dua bahasan yang perlu dikaji oleh mahasiswa matematika. Sehingga keterkitan antara keduanya menjadi topik yang menarik untuk dikaji secara lebih rinci. Penelitian terdahulu yang dilakukan oleh Hartanto (2013) menyebutkan bahwa graf konjugasi dari grup dihedral-$2n$ dengan $n$ ganjil membentuk satu graf trivial, $\frac{n-1}{2}$ graf komplit dengan dua titik dan satu graf komplit dengan $n$ titik, sedangkan graf konjugasi dari grup dihedral-$2n$ dengan $n$ genap membentuk dua graf trivial, $\frac{n-2}{2}$ graf komplit dengan dua titik dan satu graf komplit dengan $\frac{n}{2}$ titik. Pada penelitian ini penulis tertarik untuk mengkaji tentang graf konjugasi tetapi pada subgrup di grup simetri. Hal ini sesuai dengan kewajiban manusia untuk memperluas ilmu yang disebutkan dalam al-Quran surat al-Mujaadilah/58:11, yaitu:

...يَرۡفَعِ ٱللَّهُ ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ مِنكُمۡ وَٱلَّذِينَ أُوتُواْ ٱلۡعِلۡمَ دَرَجَٰتٖۚ وَٱللَّهُ بِمَا تَعۡمَلُونَ خَبِيرٞ ١١

*"... Allah akan memberi kelapangan untukmu. Dan apabila dikatakan: "Berdirilah kamu", maka berdirilah, niscaya Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. Dan Allah Maha Mengetahui apa yang kamu kerjakan" (QS. al-Mujaadilah/58:11).*

Ayat di atas menjelaskan bahwa seorang muslim harus memberikan keluasan ilmu bagi sesamanya, sehingga pada skripsi ini akan dikaji lebih luas tentang graf konjugasi tetapi pada subgrup di grup simetri. Berdasarkan permasalahan tersebut maka penulis merumuskan judul *"Graf Konjugasi dari Subgrup di Grup Simetri"*.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan pada bagian sebelumnya, maka rumusan masalah penelitian ini yaitu "Bagaimana karakteristik graf konjugasi dari subgrup di grup simetri?".

## 1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah yang telah dipaparkan, maka tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui karakteristik graf konjugasi dari subgrup di grup simetri.

## 1.4 Manfaat Penelitian

Berdasarkan tujuan penelitian yang telah dipaparkan, maka manfaat penelitian ini dibedakan berdasarkan kepentingan beberapa pihak yaitu:

1. Bagi Penulis

   Untuk menambah wawasan khususnya mengenai graf konjugasi dari subgrup di grup simetri.

2. Bagi Pembaca

   Sebagai tambahan pengetahuan dan wawasan keilmuan matematika khususnya tentang keterkaitan antara teori graf dengan aljabar.

3. Bagi Lembaga

   Sebagai tambahan bahan literatur yang digunakan sebagai sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya teori graf.

### 1.5 Metode Penelitian

Dalam penelitian ini penulis menggunakan pendekatan penelitian kualitatif, dengan metode penelitian kepustakaan (*library research*) yaitu menggunakan literatur, baik berupa buku, catatan, maupun laporan hasil penelitian dari peneliti terdahulu (Hasan, 2002:11). Data yang digunakan oleh penulis berupa data primer dan data sekunder. Data primer pada penelitian ini didapatkan dari hasil pengamatan penulis berupa unsur-unsur dari subgrup di grup simetri-3 sampai grup simetri-5. Sedangkan data sekunder yang digunakan oleh penulis berupa definisi, teorema dan sifat-sifat yang berkaitan dengan pengambilan kesimpulan pada penelitian ini. Langkah-langkah yang dilakukan oleh penulis untuk menentukan graf konjugasi dari subgrup di grup simetri adalah sebagai berikut:

1. Menentukan unsur-unsur dari grup simetri-3 sampai grup simetri-5.
2. Menentukan subgrup tidak komutatif di grup simetri-3 sampai grup simetri-5.
3. Menentukan kelas-kelas konjugasi dari subgrup tidak komutatif di grup simetri-3 sampai grup simetri-5.
4. Menggambarkan graf konjugasi dari subgrup tidak komutatif di grup simetri-3 sampai grup simetri-5.
5. Membuat konjektur tentang karakteristik graf konjugasi dari subgrup tidak komutatif di grup simetri.
6. Membuktikan pernyataan konjektur.

7. Membuat kesimpulan tentang karakteristik graf konjugasi dari subgrup tidak komutatif di grup simetri.

### 1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan ini dimaksudkan untuk mempermudah pemahaman inti dari penelitian ini yang dibagi menjadi empat bab antara lain:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini penulis menjelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan dari penelitian ini.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bab ini penulis menjelaskan teori yang mendasari penulisan skripsi ini. Dasar teori yang digunakan meliputi definisi, teorema, sifat-sifat serta contoh yang berhubungan dengan graf, terhubung langsung (*adjacent*), terkait (*incident*), graf terhubung, derajat titik, grup, grup simetri, subgrup, konjugasi pada grup dan graf konjugasi.

Bab III Pembahasan

Pada bab ini menguraikan tentang langkah-langkah penentuan kelas-kelas konjugasi, menggambarkan graf konjugasi, membuat konjektur tentang karakteristik graf konjugasi dari subgrup di grup simetri dan membuktikannya.

Bab IV Penutup

Pada bab ini menjelaskan tentang kesimpulan dari penelitian yang telah dilakukan dan saran yang dapat dijadikan acuan bagi peneliti selanjutnya.

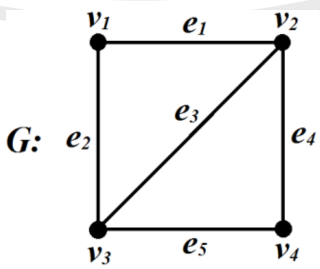
# BAB II

# KAJIAN PUSTAKA

## 2.1 Graf

Suatu graf $G = (V, E)$ adalah struktur matematika yang berisikan dua himpunan berhingga $V$ dan $E$. Unsur-unsur dari $V$ disebut titik, dan unsur-unsur dari $E$ disebut sisi (Gross dan Yellen, 2006:2). Sedangkan menurut Chartrand dan Lesniak (1996:1) graf $G$ adalah suatu himpunan berhingga tak kosong dari objek-objek yang disebut titik dan himpunan pasangan berurutan dari titik-titik yang berbeda di $G$ (mungkin kosong) yang disebut sisi. Himpunan titik di $G$ dinotasikan $V(G)$, sedangkan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$. Banyaknya himpunan titik pada graf $G$ disebut *order* di $G$ dan dinotasikan dengan $n(G)$, atau dapat dinotasikan dengan $n$. Sedangkan banyaknya himpunan sisi pada graf G disebut *size* (ukuran) di $G$ dan dinotasikan dengan $m(G)$ atau dapat dinotasikan dengan $m$.

Contoh Graf:



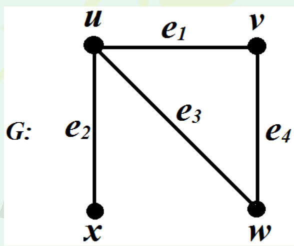
Gambar 2.1 Graf $G$

Pada Gambar 2.1 graf $G$ dapat dinyatakan $G = \big(V(G), E(G)\big)$ dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_2v_4,, v_3v_4\}$. Dapat pula dituliskan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ dengan $e_1 = (v_1, v_2)$, $e_2 = (v_1, v_3), e_3 = (v_2, v_3)$, $e_4 = (v_2, v_4)$, $e_5 = (v_3, v_4)$. Graf $G$ mempunyai 4 titik, maka *order* dari graf *G* adalah $n = 4$ dan mempunyai 5 sisi sehingga *size* graf *G* adalah $m = 5$.

## 2.2 Terhubung Langsung (*Adjacent*) dan Terkait (*Incident*)

Misalkan $u$ dan $v$ adalah dua titik di graf $G$ dan $e = \{u, v\}$ (sering ditulis $e = uv$) adalah sebuah sisi di $G$. Titik $u$ dan $v$ disebut terhubung langsung (*adjacent*) di $G$. Sisi $e$ menghubungkan (*joining*) titik $u$ dan titik $v$ di $G$, $u$ dan $v$ titik-titik akhir sisi $e$, sisi $e$ dikatakan terkait (*incident*) dengan titik $v$ dan titik $u$ (Budayasa, 2007:2).

Contoh Graf:



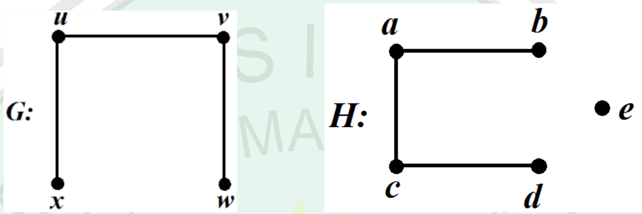

Gambar 2. 2 Graf dengan 4 Titik dan 4 Sisi

Dari Gambar 2.2 diketahui bahwa titik yang terhubung langsung antara lain $u$ dengan $v$, $u$ dengan $w$, $v$ dengan $w$ dan $u$ dengan $x$. Sedangkan sisi $e_1$ terkait dengan titik $u$ dan titik $v$, sisi $e_2$ terkait dengan titik $u$ dan titik $x$, sisi $e_3$ terkait dengan titik $u$ dan titik $w$, sisi $e_4$ terkait dengan titik $v$ dan titik $w$.

## 2.3 Graf Terhubung

Sebuah graf $G$ dikatakan terhubung (*connected*) jika untuk setiap dua titik $G$ yang berbeda terdapat sebuah lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut, sedangkan graf $G$ yang tidak terhubung disebut *disconnected* (Budayasa, 2007:8).

Contoh Graf Terhubung dan Graf tidak Terhubung:

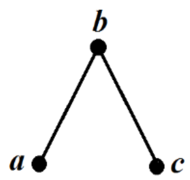



Gambar 2.3 Graf Terhubung *G* dan Graf tidak Terhubung $H$

## 2.4 Derajat Titik

Misalkan $G$ sebuah graf dan $v$ sebuah titik di $G$. Derajat titik $v$ di graf $G$ adalah banyaknya sisi di $G$ yang terkait dengan $v$, dinotasikan dengan $\deg_G v$ atau $\deg v$. Derajat minimum di $G$ adalah derajat minimum di antara titik-titik di $G$ dan dinotasikan dengan $\delta(G)$. Derajat maksimum di $G$ adalah derajat maksimum di antara titik-titik di G dan dinotasikan dengan $\Delta(G)$ (Chartrand dan Lesniak, 1996:2).

Contoh Graf:




Gambar 2. 4 Graf *G* dengan $\mathbf{deg}\, a = 1,\ \mathbf{deg}\, b = 2,\ \mathbf{deg}\, c = 1$

## 2.5 Grup

### 2.5.1 Definisi dan Sifat Operasi Biner

a. Suatu operasi biner $*$ pada himpunan tak kosong $G$ merupakan suatu fungsi $*: G \times G \rightarrow G. \forall a, b \in G$ yang dituliskan dengan $a * b$ untuk $*(a, b)$.

b. Suatu operasi biner $*$ pada himpunan tak kosong $G$ merupakan assosiatif jika untuk semua $a, b, c \in G$ maka berlaku $a * (b * c) = (a * b) * c$.

c. Jika $*$ merupakan operasi biner pada himpunan tak kosong $G$ maka unsur-unsur $a$ dan $b$ dari $G$ komutatif jika $a * b = b * a$. Dikatakan bahwa operasi $*$ di $G$ adalah komutatif jika untuk semua $a, b \in G, a * b = b * a$. (Dummit dan Foote, 2004:16).

### 2.5.2 Definisi Grup

Suatu grup merupakan pasangan berurutan $(G,*)$ dengan $G$ merupakan himpunan tak kosong dan $*$ merupakan operasi biner di $G$ yang memenuhi aksioma-aksioma berikut:

a. $(a * b) * c = a * (b * c)$, untuk semua $a, b, c \in G$, operasi $*$ bersifat assosiatif di $G$.

b. Terdapat unsur $e$ di $G$ yang disebut sebagai unsur identitas dari $G$ sedemikian sehingga untuk semua $a \in G$ maka berlaku $a * e = e * a = a$ (terdapat identitas $e$ dari $G$ terhadap operasi $*$).

c. Untuk setiap $a \in G$, terdapat suatu unsur $a^{-1}$ di G yang disebut invers dari $a$ sedemikian sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (terdapat invers dalam $G$ terhadap operasi $*$) (Dummit dan Foote, 2004:16).

Contoh Grup:

$(Z, +)$ merupakan suatu grup.

Bukti:

i. Operasi penjumlahan pada $Z$ merupakan operasi biner karena pemetaan $Z \times Z \to Z. \forall a, b \in Z$ maka $a + b \in Z$.

ii. $\forall a, b, c \in Z$, maka $(a + b) + c = a + (b + c)$. Jadi operasi penjumlahan bersifat assosiatif di $Z$.

iii. Ambil $0 \in Z$, sehingga $a + 0 = 0 + a = a, \forall a \in Z$. Jadi 0 adalah unsur identitas pada operasi penjumlahan.

iv. $\forall a \in Z$. Terdapat $-a \in Z$. Sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$. Jadi invers dari $a$ adalah $-a$.

Dari (i), (ii), (iii) dan (iv) terbukti bahwa $(Z, +)$ adalah grup.

## 2.6 Grup Simetri

Misal $\Omega$ adalah sebarang himpunan tak kosong dan misal $S_\Omega$ adalah himpunan yang memuat semua fungsi-fungsi bijektif dari $\Omega$ ke $\Omega$ (atau himpunan yang memuat semua permutasi dari $\Omega$). Himpunan $S_\Omega$ dengan operasi komposisi "$\circ$" atau $(S_\Omega, \circ)$ merupakan suatu grup. Operasi komposisi "$\circ$" merupakan suatu operasi biner pada $S_\Omega$ karena jika $\sigma: \Omega \to \Omega$ dan $\tau: \Omega \to \Omega$ adalah fungsi-fungsi bijektif, maka $\sigma \circ \tau$ juga merupakan suatu fungsi bijektif dari $\Omega$ ke $\Omega$. Selanjutnya operasi "$\circ$" adalah komposisi fungsi yang bersifat assosiatif. Identitas dari $S_\Omega$ merupakan permutasi 1 yang didefinisikan dengan $1(a) = a, \forall a \in \Omega$. Untuk setiap permutasi $\sigma: \Omega \rightarrow \Omega$ terdapat fungsi invers $\sigma^{-1}: \Omega \rightarrow \Omega$ yang memenuhi $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = 1$. Semua aksioma grup dipenuhi oleh $(S_\Omega,\circ)$. Grup $(S_\Omega,\circ)$ disebut sebagai grup simetri pada himpunan $\Omega$. Suatu sikel adalah deretan bilangan bulat yang merepresentasikan unsur-unsur dari $S_n$ yang mempermutasikan sikelnya dari bilangan bulat. Panjang sikel adalah banyaknya bilangan bulat yang terdapat pada sikel tersebut. Suatu sikel dengan panjang $t$ disebut sikel-$t$ dan dua sikel dikatakan saling asing jika banyaknya bilangan bulat tidak sama (Dummit dan Foote, 1991:29-30).

Jika $\alpha \in S_n$ adalah produk dari sikel yang saling asing dengan panjang sikel $n_1, n_2, \dots, n_r$ di mana $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_r$ maka $n_1, n_2, \dots, n_r$ disebut sebagai tipe sikel dari $\alpha$ (Dummit dan Foote, 1991:126).

Contoh Grup Simetri-3:

Misal diberikan himpunan tak kosong $H$, dengan $H = \{1,2,3\}$. Apabila $H$ dikenai fungsi bijektif dari $H$ ke $H$, maka dapat dituliskan fungsi bijektif tersebut dalam bentuk sikel berikut:

$$\begin{array}{ll} (1\ \ 2\ \ 3) & (2\ \ 3) \\ (1\ \ 3\ \ 2) & (1\ \ 3) \\ (1) & (1\ \ 2) \end{array}$$

Misal $S_3 = \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1), (2\ 3), (1\ 3), (1\ 2)\}$. Apabila dikenai operasi komposisi "$\circ$" pada $S_3$, maka struktur $(S_3,\circ)$ membentuk grup simetri-3 yang dapat dilihat pada tabel Cayley seperti yang dipaparkan pada Tabel 2.1.

Tabel 2. 1 Komposisi dari $S_3$

| $\circ$ | $(1\ 2\ 3)$ | $(1\ 3\ 2)$ | $(1)$ | $(2\ 3)$ | $(1\ 3)$ | $(1\ 2)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $(1\ 2\ 3)$ | $(1\ 3\ 2)$ | $(1)$ | $(1\ 2\ 3)$ | $(1\ 2)$ | $(2\ 3)$ | $(1\ 3)$ |
| $(1\ 3\ 2)$ | $(1)$ | $(1\ 2\ 3)$ | $(1\ 3\ 2)$ | $(1\ 3)$ | $(1\ 2)$ | $(2\ 3)$ |
| $(1)$ | $(1\ 2\ 3)$ | $(1\ 3\ 2)$ | $(1)$ | $(2\ 3)$ | $(1\ 3)$ | $(1\ 2)$ |
| $(2\ 3)$ | $(1\ 3)$ | $(1\ 2)$ | $(2\ 3)$ | $(1)$ | $(1\ 2\ 3)$ | $(1\ 3\ 2)$ |
| $(1\ 3)$ | $(1\ 2)$ | $(2\ 3)$ | $(1\ 3)$ | $(1\ 3\ 2)$ | $(1)$ | $(1\ 2\ 3)$ |
| $(1\ 2)$ | $(2\ 3)$ | $(1\ 3)$ | $(1\ 2)$ | $(1\ 2\ 3)$ | $(1\ 3\ 2)$ | $(1)$ |



## 2.7 Subgrup

Misal $(G,*)$ adalah grup. Himpunan bagian $H$ dari $G$ disebut subgrup dari $G$ jika $H$ tidak kosong dan $H$ bersama opersi biner "$*$" mempertahankan aksioma grup (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:209).

Contoh Subgrup:

$(R,+)$ adalah grup dengan $R$ merupakan himpunan bilangan real, dan $(Z,+)$ adalah grup dengan $Z$ merupakan himpunan bilangan bulat. Karena $Z$ himpunan bagian dari $R$ maka $(Z,+)$ adalah subgrup dari $(R,+)$.

## 2.8 Konjugasi Pada Grup

Misal $G$ adalah grup tidak komutatif. Untuk $h,g \in G$, terdapat $x \in G$ sedemikian sehingga $g = x\,h\,x^{-1}$, maka $g$ dan $h$ adalah saling konjugasi satu sama lain (Kandasamy dan Smarandache, 2009:12).

Contoh Konjugasi pada Grup Simetri-3:

Diketahui unsur-unsur di grup simetri-3 antara lain:

$(1\ 2\ 3)$ $\qquad\qquad$ $(2\ 3)$

$(1\ 3\ 2)$ $\qquad$ $(1\ 3)$

$(1)$ $\qquad$ $(1\ 2)$

1. Untuk setiap $(1) \in S_3$ terdapat $(1) \in S_3$ sedemikian sehingga

   $(1) \circ (1) \circ (1)^{-1} = (1) \circ (1) \circ (1) = (1) \circ (1) = (1)$

   Didapatkan $(1)$ konjugasi dengan dirinya sendiri.

2. Untuk setiap $(1\ 2\ 3) \in S_3$ terdapat $(2\ 3) \in S_3$ sedemikian sehingga

   $$\begin{aligned}(2\ 3) \circ (1\ 2\ 3) \circ (2\ 3)^{-1} &= (2\ 3) \circ (1\ 2\ 3) \circ (2\ 3)\\ &= (2\ 3) \circ (1\ 2)\\ &= (1\ 3\ 2)\end{aligned}$$

   Didapatkan $(1\ 3\ 2)$ konjugasi dengan $(1\ 2\ 3)$.

3. Untuk setiap $(1\ 2) \in S_3$ terdapat $(1\ 3) \in S_3$ sedemikian sehingga

   $$\begin{aligned}(1\ 3) \circ (1\ 2) \circ (1\ 3)^{-1} &= (1\ 3) \circ (1\ 2) \circ (1\ 3)\\ &= (1\ 3) \circ (1\ 3\ 2)\\ &= (2\ 3)\end{aligned}$$

   Didapatkan $(2\ 3)$ konjugasi dengan $(1\ 2)$.

## 2.9 Graf Konjugasi

Misalkan *G* adalah grup *non* abelian (tidak komutatif) dan $[e]$, $[g_1]$,… $[g_n]$ (dengan $e$ adalah unsur identitas) dinotasikan sebagai kelas-kelas konjugasi dari *G* maka untuk setiap anggota $h_i$ yang berada pada kelas konjugasi $[g_i]$ adalah saling terhubung dengan $g_i$, dimana $i = 1, 2, \dots n$. Sehingga graf ini disebut sebagai graf konjugasi dari kelas-kelas konjugasi pada grup tidak komutatif (Kandasamy dan Smarandache, 2009:79).

Contoh Graf Konjugasi dari Grup Simetri-3:

Diberikan unsur-unsur di grup simetri-3 antara lain:

$$(1\ \ 2\ \ 3) \qquad\qquad (2\ \ 3)$$

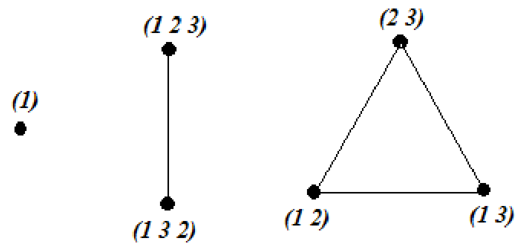
$$(1\ \ 3\ \ 2) \qquad\qquad (1\ \ 3)$$

$$(1) \qquad\qquad (1\ \ 2)$$

Untuk setiap $(1\ \ 2\ \ 3) \in S_3$ terdapat $(2\ \ 3) \in S_3$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned}(2\ \ 3) \circ (1\ \ 2\ \ 3) \circ (2\ \ 3)^{-1} &= (2\ \ 3) \circ (1\ \ 2\ \ 3) \circ (2\ \ 3)\\ &= (2\ \ 3) \circ (1\ \ 2)\\ &= (1\ \ 3\ \ 2)\end{aligned}$$

Didapatkan $(1\ \ 3\ \ 2)$ konjugasi dengan $(1\ \ 2\ \ 3)$. Oleh karena itu, kelas konjugasinya adalah $[(1\ \ 2\ \ 3)] = \{(1\ \ 2\ \ 3), (1\ \ 3\ \ 2)\}$ yang merupakan himpunan unsur yang saling berkonjugasi di $S_3$. Dengan menggunakan cara yang serupa didapatkan kelas konjugasi lain dari $S_3$ adalah $[(1)] = \{(1)\}$ dan $[(2\ \ 3)] = \{(2\ \ 3), (1\ \ 3), (1\ \ 2)\}$. Graf konjugasi dari grup simetri-3 $(S_3)$ digambarkan sebagai berikut:




Gambar 2. 5 Graf Konjugasi dari Grup Simetri-3

## 2.10 Akhlak dalam Islam

Akhlak ialah sifat-sifat yang dibawa manusia sejak lahir yang tertanam dalam jiwanya dan selalu ada padanya. Sifat itu dapat lahir berupa perbuatan baik disebut akhlak mulia, atau perbuatan buruk disebut akhlak yang tercela sesuai dengan pembinaannya. Pada hakikatnya *khulk* (budi pekerti) atau akhlak ialah suatu kondisi atau sifat yang telah meresap dalam jiwa dan menjadi kepribadian hingga dari situ timbullah berbagai macam perbuatan dengan cara spontan dan mudah tanpa dibuat-buat dan tanpa memerlukan pemikiran. Apabila dari kondisi tadi timbul kelakuan yang baik dan terpuji menurut pandangan syari'at dan akal pikiran, maka ia dinamakan budi pekerti mulia dan sebaliknya apabila yang lahir kelakuan yang buruk, maka disebut budi pekerti yang tercela (Asmaran, 1992:1-3).

Kedudukan akhlak dalam kehidupan manusia menempati tempat yang penting, sebagai individu maupun masyarakat dan bangsa, sebab jatuh bangunnya suatu masyarakat tergantung kepada bagaimana akhlaknya. Apabila akhlaknya baik, maka sejahteralah lahir dan batinnya, apabila akhlaknya rusak, maka rusaklah lahir dan batinnya (Abdullah, 2007:1).

Ada dua jenis akhlak dalam Islam, yaitu *akhlaqul karimah* (akhlak terpuji) ialah akhlak yang baik dan benar menurut syari'at Islam, dan *akhlaqul madzmumah* (akhlak tercela) ialah akhlak yang tidak baik dan tidak benar menurut Islam (Abdullah, 2007:37).

**1. *Akhlaqul Karimah* (Akhlak Terpuji/Akhlak Baik)**

Akhlak yang baik ialah segala tingkah laku yang terpuji (*mahmudah*) juga bisa dinamakan *fadhilah* (kelebihan). Akhlak yang baik diciptakan oleh sifat-sifat yang baik. Oleh karena itu, dalam hal jiwa manusia dapat menelurkan perbuatan-

perbuatan lahiriah. Tingkah laku lahiriah oleh tingkah laku batin, berupa sifat dan kelakuan batin yang juga dapat berbolak-balik yang mengakibatkan berbolak-baliknya perbuatan jasmani manusia. Oleh karena itu, tindak-tanduk batin (hati) itu pun dapat berbolak-balik.

Sesuatu yang dapat dikatakan baik apabila ia memberikan kesenangan, kepuasan, kenikmatan, sesuai dengan yang diharapkan, dapat dinilai positif oleh orang yang menginginkannya. Baik juga disebut *mustabah*, yaitu amal atau perbuatan yang disenangi. Perbuatan baik merupakan *akhlaqul karimah* yang wajib dikerjakan. Al-ghazali menyebutkan, perbuatan dapat dikatakan baik karena adanya pertimbangan akal yang mengambil keputusan secara mendesak, seperti menyelamatkan orang-orang yang tenggelam atau orang-orang yang menderita kecelakaan. Jadi, *akhlaqul karimah* berarti tingkah laku yang terpuji yang merupakan tanda kesempurnaan iman seseorang kepada Allah (Abdullah, 2007:38-41).

Konsep *akhlaqul karimah* dalam Islam merupakan suatu pedoman bagi manusia untuk menjalani kehidupannya dengan berperilaku yang baik dan tidak meninggikan dirinya sendiri maupun orang lain. Sebagai manusia yang mempunyai fitrah berakhlak mulia, hendaklah bersyukur kepada Allah. Ketentraman dan ketenangan jiwa merupakan unsur pertama dalam menciptakan kebahagiaan dan keselamatan. Kebahagiaan dapat dicapai dengan dasar iman yang kuat, bulat, teguh dan beramal saleh yang benar. Allah berfirman:

ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ وَعَمِلُواْ ٱلصَّٰلِحَٰتِ طُوبَىٰ لَهُمۡ وَحُسۡنُ مَـَٔابٖ ٢٩

*Orang-orang yang beriman dan beramal saleh, bagi mereka kebahagiaan dan tempat kembali yang baik (QS. ar-Ra'd/13:29))*

Iman bukan hanya ucapan saja, tetapi kepercayaan yang mewarnai kehidupan sehingga benar-benar teguh pendirian. Keimanan yang teguh memantul dalam sikap hidup sehari-hari, itulah yang membawa kebahagian hakiki dalam hidup (Abdullah, 2007:186).

Adapun jenis-jenis *akhlaqul karimah* itu adalah sebagai berikut:

a. *Al-Amanah* (sifat jujur dan dapat dipercaya)

b. *Al-Alifah* (sifat yang disenangi)

c. *Al-'Afwu* (sifat pemaaf)

d. *Anie Satun* (sifat manis muka)

e. *Al-Khairu* (kebaikan atau berbuat baik)

f. *Al-Khusyu'* (tekun bekerja sambil menundukkan diri (berzikir kepada-Nya))

**2. *Akhlaqul Madzmumah* (Akhlak Tercela/Akhlak Tidak Baik)**

*Akhlaqul madzmumah* ialah perangkai yang tercermin dari tutur kata, tingkah laku, dan sikap yang tidak baik. *Akhlaqul madzmumah* menghasilkan pekerjaan buruk dan tingkah laku yang tidak baik. Sesuatu yang dikatakan buruk apabila membuat orang menjadi tidak senang dengan apa yang diperbuatnya, tidak memberikan kepuasan dan tidak memberikan kenikmatan terhadap sesuatu yang dibuatnya juga tidak sesuai dengan yang diharapkan, sesuatu yang dinilai negatif oleh orang yang menginginkannya (Abdullah, 2007:55-57).

Akhlak buruk merupakan sifat yang tercela dan dilarang oleh norma-norma yang berlaku dalam kehidupan sehari-hari. Apabila seseorang melaksanakan niscaya mendapatkan dosa (*al-Dzanb*) dari Allah karena perbuatan tersebut adalah perbuatan yang tercela di hadapan Allah. Oleh karena itu, manusia diperintahkan untuk menjauhi akhlak tidak baik (*akhlaqul madzmumah*) tersebut, seperti yang disebutkan dalam firman Allah yang berbunyi:

قُل لَّا يَسۡتَوِي ٱلۡخَبِيثُ وَٱلطَّيِّبُ وَلَوۡ أَعۡجَبَكَ كَثۡرَةُ ٱلۡخَبِيثِۚ فَٱتَّقُواْ ٱللَّهَ يَٰٓأُوْلِي ٱلۡأَلۡبَٰبِ لَعَلَّكُمۡ تُفۡلِحُونَ ١٠٠

*Katakanlah: "Tidak sama yang buruk dengan yang baik, meskipun banyaknya yang buruk itu menarik hatimu, Maka bertakwalah kepada Allah Hai orang-orang berakal, agar kamu mendapat keberuntungan." (QS. al-Ma'idah/5:100)*

Adapun jenis-jenis *akhlaqul madzmumah* (akhlak tercela) itu adalah sebagai berikut:

a. *Ananiyah* (sifat egoistis)

b. *Al-Baghyu* (suka obral diri pada lawan jenis yang tidak hak (melacur))

c. *Al-Bukhlu* (sifat bakhil, kikir, kedekut (terlalu cinta harta))

d. *Al-Kadzab* (sifat pendusta atau pembohong)

e. *Al-Khamru* (gemar minum minuman yang mengandung alkohol (al-Khamar))

f. *Al-Khiyannah* (sifat pengkhiyanat)

g. *Azh-Zhulmun* (sifat aniaya)

h. *Al-Jubnu* (sifat pengecut)

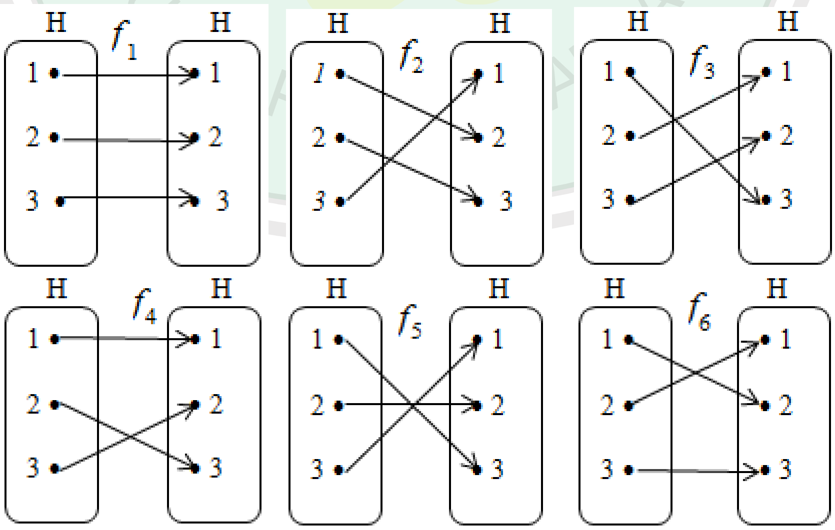
# BAB III

# PEMBAHASAN

Pada bab ini penulis akan menguraikan langkah-langkah dalam menentukan graf konjugasi pada subgrup di grup simetri-3 sampai grup simetri-5. Langkah awal yang dilakukan penulis yaitu dengan menentukan kelas-kelas konjugasi dari himpunan yang dimaksud, kemudian menggambarkan graf konjugasi dan membuat konjektur tentang karakteristik graf konjugasi serta membuktikannya.

## 3.1 Grup Simetri-3

Diberikan suatu himpunan tak kosong $H$, dengan $H = \{1,2,3\}$. Jika ditentukan fungsi bijektif dari $H$ ke $H$, maka semua fungsi-fungsi bijektif tersebut dapat dituliskan sebagai berikut:




Gambar 3.1 Semua Fungsi Bijektif dari $\boldsymbol{H}$ ke $\boldsymbol{H}$

Berdasarkan fungsi bijektif tersebut didapatkan unsur-unsur di grup simetri-3 antara lain:

$$(1) \qquad (2\ \ 3)$$

$$(1\ \ 2\ \ 3) \qquad (1\ \ 3)$$

$$(1\ \ 3\ \ 2) \qquad (1\ \ 2)$$

Dari unsur-unsur grup simetri-3 tersebut didapatkan subgrupnya sebagai berikut:

a. Subgrup trivial dan subgrup sejati (komutatif)
   1. $\{(1)\}$
   2. $\{(1),(1\ \ 2\ \ 3),(1\ \ 3\ \ 2)\}$
   3. $\{(1),(2\ 3)\}$
   4. $\{(1),(1\ 3)\}$
   5. $\{(1),(1\ 2)\}$

b. Subgrup tak sejati (tidak komutatif)

   $\{(1),(1\ \ 2\ \ 3),(1\ \ 3\ \ 2),(2\ \ 3),(1\ \ 3),(1\ \ 2)\}$.

Subgrup trivial dan subgrup sejati (komutatif) tidak dibahas karena tidak memenuhi definisi subbab 2.9. Sehingga pada grup simetri-3 hanya akan ditentukan graf konjugasi dari subgrup tak sejati di grup simetri-3.

### 3.1.1 Konjugasi pada Subgrup di Grup Simetri-3

Konjugasi dari subgrup tak sejati di grup simetri-3 dengan $S_3 = \{(1),(1\ \ 2\ \ 3),(1\ \ 3\ \ 2),(2\ \ 3),(1\ \ 3),(1\ \ 2)\}$ adalah sebagai berikut:

1. Unsur $(1)$ konjugasi dengan $(1)$

   Untuk $(1) \in S_3$ terdapat $(1) \in S_3$ sedemikian sehingga

   $$(1) \circ (1) \circ (1)^{-1} = (1) \circ (1) \circ (1) = (1) \circ (1) = (1)$$

   Didapatkan $(1)$ konjugasi dengan $(1)$ maka kelas konjugasinya adalah $[(1)] = \{(1)\}$.

2. Konjugasi antar unsur selain $(1)$

   a. Untuk $(1 \quad 2 \quad 3) \in S_3$ terdapat $(1) \in S_3$ sedemikian sehingga

   $$\begin{aligned}(1) \circ (1 \quad 2 \quad 3) \circ (1)^{-1} &= (1) \circ (1 \quad 2 \quad 3) \circ (1)\\ &= (1) \circ (1 \quad 2 \quad 3)\\ &= (1 \quad 2 \quad 3)\end{aligned}$$

   b. Untuk $(1 \quad 3 \quad 2) \in S_3$ terdapat $(1) \in S_3$ sedemikian sehingga

   $$\begin{aligned}(1) \circ (1 \quad 3 \quad 2) \circ (1)^{-1} &= (1) \circ (1 \quad 3 \quad 2) \circ (1)\\ &= (1) \circ (1 \quad 3 \quad 2)\\ &= (1 \quad 3 \quad 2)\end{aligned}$$

   c. Untuk $(1 \quad 2 \quad 3) \in S_3$ terdapat $(1 \quad 2) \in S_3$ sedemikian sehingga

   $$\begin{aligned}(1 \quad 2) \circ (1 \quad 2 \quad 3) \circ (1 \quad 2)^{-1} &= (1 \quad 2) \circ (1 \quad 2 \quad 3) \circ (1 \quad 2)\\ &= (1 \quad 2) \circ (1 \quad 3)\\ &= (1 \quad 3 \quad 2)\end{aligned}$$

   Didapatkan $(1 \;\; 2 \;\; 3)$ konjugasi dengan $(1 \;\; 3 \;\; 2)$ maka kelas konjugasinya adalah $[(1 \;\; 2 \;\; 3)] = \{(1 \;\; 2 \;\; 3), (1 \;\; 3 \;\; 2)\}$.

   d. Untuk $(2 \quad 3) \in S_3$ terdapat $(1) \in S_3$ sedemikian sehingga

   $$(1) \circ (2 \quad 3) \circ (1)^{-1} = (1) \circ (2 \quad 3) \circ (1)$$

$= (1) \circ (2 \quad 3)$

$= (2 \quad 3)$

e. Untuk $(2 \quad 3) \in S_3$ terdapat $(1 \quad 2) \in S_3$ sedemikian sehingga

$(1 \quad 2) \circ (2 \quad 3) \circ (1 \quad 2)^{-1} = (1 \quad 2) \circ (2 \quad 3) \circ (1 \quad 2)$

$= (1 \quad 2) \circ (1 \quad 3 \quad 2)$

$= (1 \quad 3)$

f. Untuk $(2 \quad 3) \in S_3$ terdapat $(1 \quad 3 \quad 2) \in S_3$ sedemikian sehingga

$(1 \quad 3 \quad 2) \circ (2 \quad 3) \circ (1 \quad 3 \quad 2)^{-1} = (1 \quad 3 \quad 2) \circ (2 \quad 3) \circ (1 \quad 2 \quad 3)$

$= (1 \quad 3 \quad 2) \circ (1 \quad 3)$

$= (1 \quad 2)$

g. Untuk $(1 \quad 3) \in S_3$ terdapat $(1) \in S_3$ sedemikian sehingga

$(1) \circ (1 \quad 3) \circ (1)^{-1} = (1) \circ (1 \quad 3) \circ (1)$

$= (1) \circ (1 \quad 3)$

$= (1 \quad 3)$

h. Untuk $(1 \quad 3) \in S_3$ terdapat $(1 \quad 2 \quad 3) \in S_3$ sedemikian sehingga

$(1 \quad 2 \quad 3) \circ (1 \quad 3) \circ (1 \quad 2 \quad 3)^{-1} = (1 \quad 2 \quad 3) \circ (1 \quad 3) \circ (1 \quad 3 \quad 2)$

$= (1 \quad 2 \quad 3) \circ (2 \quad 3)$

$= (1 \quad 2)$

i. Untuk $(1 \quad 2) \in S_3$ terdapat $(1) \in S_3$ sedemikian sehingga

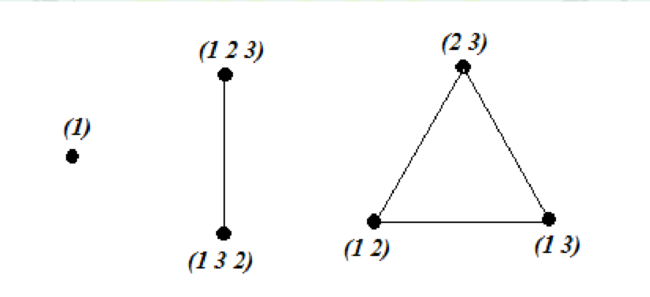
$(1) \circ (1 \quad 2) \circ (1)^{-1} = (1) \circ (1 \quad 2) \circ (1)$

$= (1) \circ (1 \quad 2)$

$= (1 \quad 2)$

Didapatkan bahwa unsur $(2 \quad 3), (1 \quad 3)$ dan $(1 \quad 2)$ saling berkonjugasi sehingga kelas konjugasinya adalah $[(2 \quad 3)] = \{(2 \quad 3), (1 \quad 3), (1 \quad 2)\}$.

Berdasarkan perhitungan yang telah dilakukan didapatkan kelas konjugasi dari subgrup tak sejati di grup simetri-3 adalah $[(1)] = \{(1)\}$, $[(1 \ 2 \ 3)] = \{(1 \ 2 \ 3), (1 \ 3 \ 2)\}$ dan $[(2 \quad 3)] = \{(2 \quad 3), (1 \quad 3), (1 \quad 2)\}$, sehingga graf konjugasinya dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3.2 Graf Konjugasi dari $S_3$

## 3.2 Grup Simetri-4

Diberikan suatu himpunan tak kosong $K$, dengan $K = \{1,2,3,4\}$. Jika ditentukan fungsi bijektif dari $K$ ke $K$, analog dengan subbab 3.1 didapatkan unsur-unsur dari grup simetri-4 adalah sebagai berikut:

| | |
|---|---|
| $(1)$ | $(1 \ 4 \ 2)$ |
| $(1 \ 2)$ | $(1 \ 2 \ 3)$ |
| $(1 \ 3)$ | $(1 \ 3 \ 2)$ |
| $(1 \ 4)$ | $(1 \ 2)(3 \ 4)$ |

| | |
|---|---|
| $(3\ \ 4)$ | $(1\ \ 3)(2\ \ 4)$ |
| $(2\ \ 4)$ | $(1\ \ 4)(2\ \ 3)$ |
| $(2\ \ 3)$ | $(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4)$ |
| $(2\ \ 3\ \ 4)$ | $(1\ \ 3\ \ 2\ \ 4)$ |
| $(2\ \ 4\ \ 3)$ | $(1\ \ 4\ \ 2\ \ 3)$ |
| $(1\ \ 3\ \ 4)$ | $(1\ \ 2\ \ 4\ \ 3)$ |
| $(1\ \ 4\ \ 3)$ | $(1\ \ 4\ \ 3\ \ 2)$ |
| $(1\ \ 2\ \ 4)$ | $(1\ \ 3\ \ 4\ \ 2)$ |

Dari unsur-unsur grup simetri-4 tersebut didapatkan subgrupnya sebagai berikut:

a. Subgrup trivial dan subgrup sejati (komutatif)

1. $\{(1)\}$
2. $\{(1),(1\ \ 2)\}$
3. $\{(1),(1\ \ 3)\}$
4. $\{(1),(1\ \ 4)\}$
5. $\{(1),(3\ \ 4)\}$
6. $\{(1),(2\ \ 4)\}$
7. $\{(1),(2\ \ 3)\}$
8. $\{(1),(1\ \ 2)(3\ \ 4)\}$
9. $\{(1),(1\ \ 3)(2\ \ 4)\}$
10. $\{(1),(1\ \ 4)(2\ \ 3)\}$
11. $\{(1),(1\ \ 3\ \ 4),(1\ \ 4\ \ 3)\}$

12. $\{(1),(2\ 3\ 4),(2\ 4\ 3)\}$

13. $\{(1),(1\ 2\ 4),(1\ 4\ 2)\}$

14. $\{(1),(1\ 2\ 3),(1\ 3\ 2)\}$

15. $\{(1),(1\ 2)(1\ 3),(1\ 3)(2\ 4),(1\ 4)(2\ 3)\}$

16. $\{(1),(1\ 2)(3\ 4),(1\ 3\ 2\ 4),(1\ 4\ 2\ 3)\}$

17. $\{(1),(1\ 3)(2\ 4),(1\ 2\ 3\ 4),(1\ 4\ 3\ 2)\}$

18. $\{(1),(1\ 4)(2\ 3),(1\ 2\ 4\ 3),(1\ 3\ 4\ 2)\}$

19. $\{(1),(1\ 3),(3)(2\ 4),(1\ 3)(2\ 4)\}$

20. $\{(1),(3\ 4),(1\ 2),(1\ 2)(3\ 4)\}$

21. $\{(1),(2\ 3),(1\ 4),(1\ 4)(2\ 3)\}$

b. Subgrup sejati (tidak komutatif)

1. $\{(1),\ (1\ 3),(1\ 4),(3\ 4),(1\ 3\ 4),(1\ 4\ 3)\}$
2. $\{(1),\ (3\ 4),(2\ 4),(2\ 3),\ (2\ 3\ 4),(2\ 4\ 3)\}$.
3. $\{(1),\ (1\ 2),\ (1\ 4),\ (2\ 4),\ (1\ 2\ 4),(1\ 4\ 2)\}$.
4. $\{(1),\ (1\ 2),\ (1\ 3),\ (2\ 3),\ (1\ 2\ 3),(1\ 3\ 2)\}$.
5. $\{(1),\ (1\ 3),\ (2\ 4),(1\ 2\ 3\ 4),\ (1\ 4\ 3\ 2),\ (1\ 2)(3\ 4),(1\ 3)(2\ 4),$ $(1\ 4)(2\ 3)\}$
6. $\{(1),\ (1\ 2),\ (3\ 4),\ (1\ 3\ 2\ 4),\ (1\ 4\ 2\ 3),\ (1\ 2)(3\ 4),\ (1\ 3)(2\ 4),$ $(1\ 4)(2\ 3)\}$
7. $\{(1),\ (1\ 4),\ (2\ 3),\ (1\ 2\ 4\ 3),\ (1\ 3\ 4\ 2),\ (1\ 2)(3\ 4),\ (1\ 3)(2\ 4),$ $(1\ 4)(2\ 3)\}$

8. $\{(1),\ (2\ \ 3\ \ 4), (2\ \ 4\ \ 3), (1\ \ 3\ \ 4), (1\ \ 4\ \ 3),\ (1\ \ 2\ \ 4), (1\ \ 4\ \ 2), (1\ \ 2\ \ 3),$
$(1\ \ 3\ \ 2), (1\ \ 2)(3\ \ 4), (1\ \ 3)(2\ \ 4), (1\ \ 4)(2\ \ 3)\}$

c. Subgrup tak sejati (tidak komutatif)

$\{(1), (1\ \ 2), (1\ \ 3), (1\ \ 4), (3\ \ 4), (2\ \ 4), (2\ \ 3), (2\ \ 3\ \ 4), (2\ \ 4\ \ 3), (1\ \ 3\ \ 4),$
$(1\ \ 4\ \ 3), (1\ \ 2\ \ 4), (1\ \ 4\ \ 2), (1\ \ 2\ \ 3), (1\ \ 3\ \ 2), (1\ \ 2)(3\ \ 4), (1\ \ 3)(2\ \ 4),$
$(1\ \ 4)(2\ \ 3), (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 4\ 2\ 3), (1\ 2\ 4\ 3), (1\ 4\ 3\ 2),$
$(1\ 3\ 4\ 2)\}$

Subgrup trivial dan subgrup sejati (komutatif) tidak dibahas karena tidak memenuhi definisi subbab 2.9. Sehingga pada grup simetri-4 hanya akan ditentukan graf konjugasi dari subgrup sejati (tidak komutatif) dan subgrup tak sejati dari grup simetri-4.

### 3.2.1 Konjugasi pada Subgrup di Grup Simetri-4

Konjugasi pada subgrup di grup simetri-4 dilakukan dengan proses pengerjaan yang serupa dengan subbab 3.1.1, sehingga didapatkan hasil konjugasi pada subgrup di grup simetri-4 sebagai berikut:

1. Unsur-unsur yang saling berkonjugasi dari subgrup $P_1$ dengan

   $P_1 = \{(1), (1\ \ 3), (1\ \ 4), (3\ \ 4), (1\ \ 3\ \ 4), (1\ \ 4\ \ 3)\}$

   yaitu:

   $(1)$ konjugasi dengan $(1)$

   $(1\ \ 3)$ konjugasi dengan $(1\ \ 3)$

   $(1\ \ 3)$ konjugasi dengan $(1\ \ 4)$

   $(1\ \ 3)$ konjugasi dengan $(3\ \ 4)$

   $(1\ \ 4)$ konjugasi dengan $(1\ \ 4)$

$(1\ \ 4)$ konjugasi dengan $(3\ \ 4)$

$(3\ \ 4)$ konjugasi dengan $(3\ \ 4)$

$(1\ \ 3\ \ 4)$ konjugasi dengan $(1\ \ 3\ \ 4)$

$(1\ \ 3\ \ 4)$ konjugasi dengan $(1\ \ 4\ \ 3)$

$(1\ \ 4\ \ 3)$ konjugasi dengan $(1\ \ 4\ \ 3)$

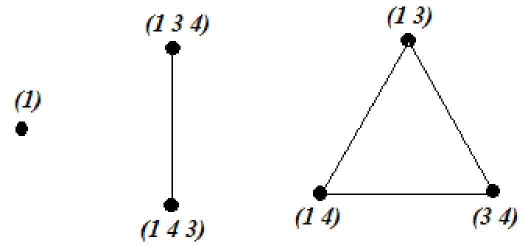
Sehingga didapatkan kelas-kelas konjugasi dari subgrup $P_1$ antara lain:

a. $[(1)] = \{(1)\}$

b. $[(1\ \ 3)] = \{(1\ \ 3), (1\ \ 4), (3\ \ 4)\}$

c. $[(1\ \ 3\ \ 4)] = \{(1\ \ 3\ \ 4), (1\ \ 4\ \ 3)\}$

Graf konjugasi dari subgrup $P_1$ digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3.3 Graf Konjugasi dari Subgrup $\boldsymbol{P_1}$

2. Unsur-unsur yang saling berkonjugasi dari subgrup $P_2$ dengan

$P_2 = \{(1), (3\ \ 4),\ (2\ \ 4), (2\ \ 3), (2\ \ 3\ \ 4), (2\ \ 4\ 3)\}$

yaitu:

$(1)$ konjugasi dengan $(1)$

$(3\ \ 4)$ konjugasi dengan $(3\ \ 4)$

$(3\ \ 4)$ konjugasi dengan $(2\ \ 4)$

$(3\ \ 4)$ konjugasi dengan $(2\ \ 3)$

$(2\ \ 4)$ konjugasi dengan $(2\ \ 4)$

$(2\ \ 4)$ konjugasi dengan $(2\ \ 3)$

$(2\ \ 3)$ konjugasi dengan $(2\ \ 3)$

$(2\ \ 3\ \ 4)$ konjugasi dengan $(2\ \ 3\ \ 4)$

$(2\ \ 3\ \ 4)$ konjugasi dengan $(2\ \ 4\ 3)$

$(2\ \ 4\ 3)$ konjugasi dengan $(2\ \ 4\ 3)$

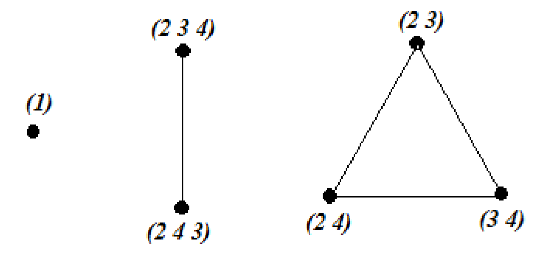
Sehingga didapatkan kelas-kelas konjugasi dari subgrup $P_2$ antara lain:

a. $[(1)] = \{(1)\}$

b. $[(3\ \ 4)] = \{(3\ \ 4), (2\ \ 4), (2\ \ 3)\}$

c. $[(2\ \ 3\ \ 4)] = \{(2\ \ 3\ \ 4), (2\ \ 4\ 3)\}$

Graf konjugasi dari subgrup $P_2$ digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3.4 Graf Konjugasi dari Subgrup $\boldsymbol{P_2}$

3. Unsur-unsur yang saling berkonjugasi dari subgrup $P_3$ dengan

$P_3 = \{(1),\ (1\ \ 2), (1\ \ 4), (2\ \ 4), (1\ \ 2\ \ 4), (1\ \ 4\ \ 2)\}$

yaitu:

$(1)$ konjugasi dengan $(1)$

$(1\ \ 2)$ konjugasi dengan $(1\ \ 2)$

$(1\ \ 2)$ konjugasi dengan $(1\ \ 4)$

$(1\ \ 2)$ konjugasi dengan $(2\ \ 4)$

$(1\ \ 4)$ konjugasi dengan $(1\ \ 4)$

$(1\ \ 4)$ konjugasi dengan $(2\ \ 4)$

$(2\ \ 4)$ konjugasi dengan $(2\ \ 4)$

$(1\ \ 2\ \ 4)$ konjugasi dengan $(1\ \ 2\ \ 4)$

$(1\ \ 2\ \ 4)$ konjugasi dengan $(1\ \ 4\ \ 2)$

$(1\ \ 4\ \ 2)$ konjugasi dengan $(1\ \ 4\ \ 2)$

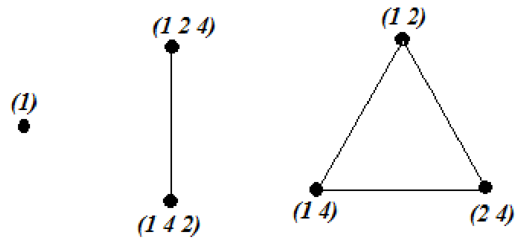
Sehingga didapatkan kelas-kelas konjugasi dari subgrup $P_3$ antara lain:

a. $[(1)] = \{(1)\}$

b. $[(1\ \ 2)] = \{(1\ \ 2), (1\ \ 4), (2\ \ 4)\}$

c. $[(1\ \ 2\ \ 4)] = \{(1\ \ 2\ \ 4), (1\ \ 4\ \ 2)\}$

Graf konjugasi dari subgrup $P_3$ digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3.5 Graf Konjugasi dari Subgrup $\boldsymbol{P_3}$

4. Unsur-unsur yang saling berkonjugasi dari subgrup $P_4$ dengan

$P_4 = \{(1), (1\ \ 2), (1\ \ 3), (2\ \ 3), (1\ \ 2\ \ 3), (1\ \ 3\ \ 2)\}$

yaitu:

$(1)$ konjugasi dengan $(1)$

$(1\ \ 2)$ konjugasi dengan $(1\ \ 2)$

$(1\ \ 2)$ konjugasi dengan $(1\ \ 3)$

$(1\ \ 2)$ konjugasi dengan $(2\ \ 3)$

$(1\ \ 3)$ konjugasi dengan $(1\ \ 3)$

$(1\ \ 3)$ konjugasi dengan $(2\ \ 3)$

$(2\ \ 3)$ konjugasi dengan $(2\ \ 3)$

$(1\ \ 2\ \ 3)$ konjugasi dengan $(1\ \ 2\ \ 3)$

$(1\ \ 2\ \ 3)$ konjugasi dengan $(1\ \ 3\ \ 2)$

$(1\ \ 3\ \ 2)$ konjugasi dengan $(1\ \ 3\ \ 2)$

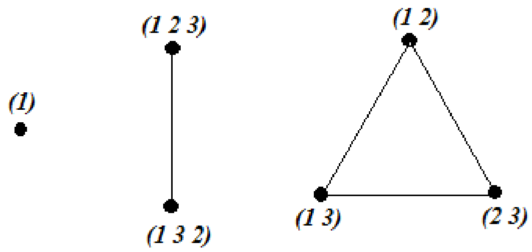
Sehingga didapatkan kelas-kelas konjugasi dari subgrup $P_4$ antara lain:

a. $[(1)] = \{(1)\}$

b. $[(1\ \ 2)] = \{(1\ \ 2), (1\ \ 3), (2\ \ 3)\}$

c. $[(1\ \ 2\ \ 3)] = \{(1\ \ 2\ \ 3), (1\ \ 3\ \ 2)\}$

Graf konjugasi dari subgrup $P_4$ digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3.6 Graf Konjugasi dari Subgrup $\boldsymbol{P_4}$

5. Unsur-unsur yang saling berkonjugasi dari subgrup $P_5$ dengan

$P_5 = \{(1), (1\ \ 3), (2\ \ 4), (1\ \ 2\ \ 3\ \ 4), (1\ \ 4\ \ 3\ \ 2), (1\ \ 2)(3\ \ 4), (1\ \ 3)(2\ \ 4),$ $(1\ \ 4)(2\ \ 3)\}$ yaitu:

$(1)$ konjugasi dengan $(1)$

$(1\ \ 3)$ konjugasi dengan $(1\ \ 3)$

$(1\ \ 3)$ konjugasi dengan $(2\ \ 4)$

$(2\ \ 4)$ konjugasi dengan $(2\ \ 4)$

$(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4)$ konjugasi dengan $(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4)$

$(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4)$ konjugasi dengan $(1\ \ 4\ \ 3\ \ 2)$

$(1\ \ 4\ \ 3\ \ 2)$ konjugasi dengan $(1\ \ 4\ \ 3\ \ 2)$

$(1\ \ 2)(3\ \ 4)$ konjugasi dengan $(1\ \ 2)(3\ \ 4)$

$(1\ \ 2)(3\ \ 4)$ konjugasi dengan $(1\ \ 4)(2\ \ 3)$

$(1\ \ 4)(2\ \ 3)$ konjugasi dengan $(1\ \ 4)(2\ \ 3)$

$(1\ \ 3)(2\ \ 4)$ konjugasi dengan $(1\ \ 3)(2\ \ 4)$

Sehingga didapatkan kelas-kelas konjugasi dari subgrup $P_5$ antara lain:

a. $[(1)] = \{(1)\}$

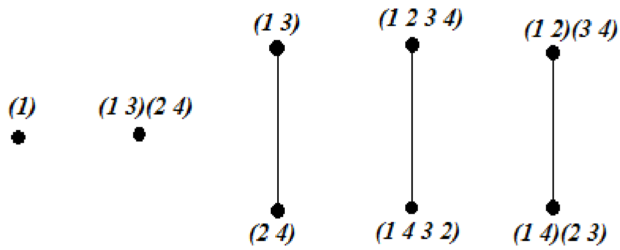
b. $[(1\ \ 3)] = \{(1\ \ 3), (2\ \ 4)\}$

c. $[(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4)] = \{(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4), (1\ \ 4\ \ 3\ \ 2)\}$

d. $[(1\ \ 2)(3\ \ 4)] = \{(1\ \ 2)(3\ \ 4), (1\ \ 4)(2\ \ 3)\}$

e. $[(1\ \ 3)(2\ \ 4)] = \{(1\ \ 3)(2\ \ 4)\}$

Graf konjugasi dari subgrup $P_5$ digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3.7 Graf Konjugasi dari Subgrup $\boldsymbol{P_5}$

6. Unsur-unsur yang saling berkonjugasi dari subgrup $P_6$ dengan

$P_6 = \{(1), (1\ \ 2), (3\ \ 4), (1\ \ 3\ \ 2\ \ 4), (1\ \ 4\ \ 2\ \ 3), (1\ \ 2)(3\ \ 4), (1\ \ 3)(2\ \ 4),$

$(1\ \ 4)(2\ \ 3)\}$ yaitu:

$(1)$ konjugasi dengan $(1)$

$(1\ \ 2)$ konjugasi dengan $(1\ \ 2)$

$(1\ \ 2)$ konjugasi dengan $(3\ \ 4)$

$(3\ \ 4)$ konjugasi dengan $(3\ \ 4)$

$(1\ \ 3\ \ 2\ \ 4)$ konjugasi dengan $(1\ \ 3\ \ 2\ \ 4)$

$(1\ \ 3\ \ 2\ \ 4)$ konjugasi dengan $(1\ \ 4\ \ 2\ \ 3)$

$(1\ \ 4\ \ 2\ \ 3)$ konjugasi dengan $(1\ \ 4\ \ 2\ \ 3)$

$(1\ \ 2)(3\ \ 4)$ konjugasi dengan $(1\ \ 2)(3\ \ 4)$

$(1\ \ 3)(2\ \ 4)$ konjugasi dengan $(1\ \ 3)(2\ \ 4)$

$(1\ \ 3)(2\ \ 4)$ konjugasi dengan $(1\ \ 4)(2\ \ 3)$

$(1\ \ 4)(2\ \ 3)$ konjugasi dengan $(1\ \ 4)(2\ \ 3)$

Sehingga didapatkan kelas-kelas konjugasi dari subgrup $P_6$ antara lain:

a. $[(1)] = \{(1)\}$

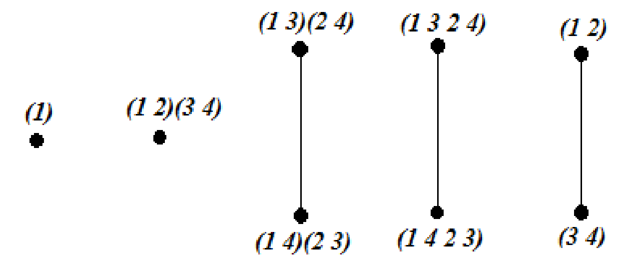
b. $[(1\ \ 2)] = \{(1\ \ 2), (3\ \ 4)\}$

c. $[(1\ \ 3\ \ 2\ \ 4)] = \{(1\ \ 3\ \ 2\ \ 4), (1\ \ 4\ \ 2\ \ 3)\}$

d. $[(1\ \ 2)(3\ \ 4)] = \{(1\ \ 2)(3\ \ 4)\}$

e. $[(1\ \ 3)(2\ \ 4)] = \{(1\ \ 3)(2\ \ 4), (1\ \ 4)(2\ \ 3)\}$

Graf konjugasi dari subgrup $P_6$ digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3.8 Graf Konjugasi dari Subgrup $P_6$

7. Unsur-unsur yang saling berkonjugasi dari subgrup $P_7$ dengan $P_7 = \{(1),\ (1\ \ 4),\ (2\ \ 3),\ (1\ \ 2\ \ 4\ \ 3),\ (1\ \ 3\ \ 4\ \ 2),\ (1\ \ 2)(3\ \ 4),\ (1\ \ 3)(2\ \ 4),$ $(1\ \ 4)(2\ \ 3)\}$ yaitu:

$(1)$ konjugasi dengan $(1)$

$(1\ \ 4)$ konjugasi dengan $(1\ \ 4)$

$(1\ \ 4)$ konjugasi dengan $(2\ \ 3)$

$(2\ \ 3)$ konjugasi dengan $(2\ \ 3)$

$(1\ \ 2\ \ 4\ \ 3)$ konjugasi dengan $(1\ \ 2\ \ 4\ \ 3)$

$(1\ \ 2\ \ 4\ \ 3)$ konjugasi dengan $(1\ \ 3\ \ 4\ \ 2)$

$(1\ \ 3\ \ 4\ \ 2)$ konjugasi dengan $(1\ \ 3\ \ 4\ \ 2)$

$(1\ \ 2)(3\ \ 4)$ konjugasi dengan $(1\ \ 2)(3\ \ 4)$

$(1\ \ 2)(3\ \ 4)$ konjugasi dengan $(1\ \ 3)(2\ \ 4)$

$(1\ \ 3)(2\ \ 4)$ konjugasi dengan $(1\ \ 3)(2\ \ 4)$

$(1\ \ 4)(2\ \ 3)$ konjugasi dengan $(1\ \ 4)(2\ \ 3)$

Sehingga didapatkan kelas-kelas konjugasi dari subgrup $P_7$ antara lain:

a. $[(1)] = \{(1)\}$

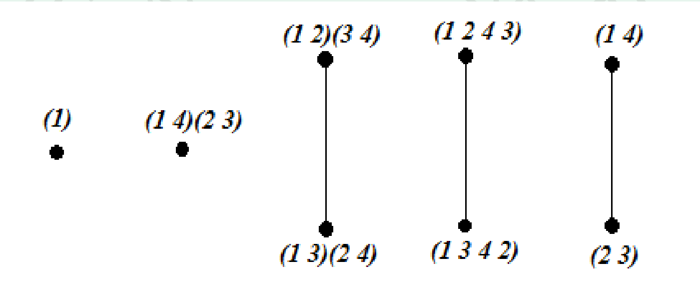
b. $[(1\ \ 4)] = \{(1\ \ 4), (2\ \ 3)\}$

c. $[(1\ \ 2\ \ 4\ \ 3)] = \{(1\ \ 2\ \ 4\ \ 3), (1\ \ 3\ \ 4\ \ 2)\}$

d. $[(1\ \ 2)(3\ \ 4)] = \{(1\ \ 2)(3\ \ 4), (1\ \ 3)(2\ \ 4)\}$

e. $[(1\ \ 4)(2\ \ 3)] = \{(1\ \ 4)(2\ \ 3)\}$

Graf konjugasi dari subgrup $P_7$ digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3.9 Graf Konjugasi dari Subgrup $\boldsymbol{P_7}$

8. Unsur-unsur yang saling berkonjugasi dari subgrup $P_8$ dengan $P_8 = \{(1), (2\ \ 3\ \ 4), (2\ \ 4\ \ 3), (1\ \ 3\ \ 4), (1\ \ 4\ \ 3), (1\ \ 2\ \ 4), (1\ \ 4\ \ 2), (1\ \ 2\ \ 3),$ $(1\ \ 3\ \ 2), (1\ \ 2)(3\ \ 4), (1\ \ 3)(2\ \ 4), (1\ \ 4)(2\ \ 3)\}$ yaitu:

   $(1)$ konjugasi dengan $(1)$

   $(2\ \ 3\ \ 4)$ konjugasi dengan $(2\ \ 3\ \ 4)$

   $(2\ \ 3\ \ 4)$ konjugasi dengan $(1\ \ 4\ \ 3)$

   $(2\ \ 3\ \ 4)$ konjugasi dengan $(1\ \ 2\ \ 4)$

   $(2\ \ 3\ \ 4)$ konjugasi dengan $(1\ \ 3\ \ 2)$

   $(1\ \ 4\ \ 3)$ konjugasi dengan $(1\ \ 4\ \ 3)$

   $(1\ \ 4\ \ 3)$ konjugasi dengan $(1\ \ 2\ \ 4)$

$(1\ \ 4\ \ 3)$ konjugasi dengan $(1\ \ 3\ \ 2)$

$(1\ \ 2\ \ 4)$ konjugasi dengan $(1\ \ 2\ \ 4)$

$(1\ \ 2\ \ 4)$ konjugasi dengan $(1\ \ 3\ \ 2)$

$(1\ \ 3\ \ 2)$ konjugasi dengan $(1\ \ 3\ \ 2)$

$(2\ \ 4\ \ 3)$ konjugasi dengan $(2\ \ 4\ \ 3)$

$(2\ \ 4\ \ 3)$ konjugasi dengan $(1\ \ 3\ \ 4)$

$(2\ \ 4\ \ 3)$ konjugasi dengan $(1\ \ 4\ \ 2)$

$(2\ \ 4\ \ 3)$ konjugasi dengan $(1\ \ 2\ \ 3)$

$(1\ \ 3\ \ 4)$ konjugasi dengan $(1\ \ 3\ \ 4)$

$(1\ \ 3\ \ 4)$ konjugasi dengan $(1\ \ 4\ \ 2)$

$(1\ \ 3\ \ 4)$ konjugasi dengan $(1\ \ 2\ \ 3)$

$(1\ \ 4\ \ 2)$ konjugasi dengan $(1\ \ 4\ \ 2)$

$(1\ \ 4\ \ 2)$ konjugasi dengan $(1\ \ 2\ \ 3)$

$(1\ \ 2\ \ 3)$ konjugasi dengan $(1\ \ 2\ \ 3)$

$(1\ \ 2)(3\ \ 4)$ konjugasi dengan $(1\ \ 2)(3\ \ 4)$

$(1\ \ 2)(3\ \ 4)$ konjugasi dengan $(1\ \ 3)(2\ \ 4)$

$(1\ \ 2)(3\ \ 4)$ konjugasi dengan $(1\ \ 4)(2\ \ 3)$

$(1\ \ 3)(2\ \ 4)$ konjugasi dengan $(1\ \ 3)(2\ \ 4)$

$(1\ \ 3)(2\ \ 4)$ konjugasi dengan $(1\ \ 4)(2\ \ 3)$

$(1\ \ 4)(2\ \ 3)$ konjugasi dengan $(1\ \ 4)(2\ \ 3)$

Sehingga didapatkan kelas-kelas konjugasi dari subgrup $P_8$ antara lain:

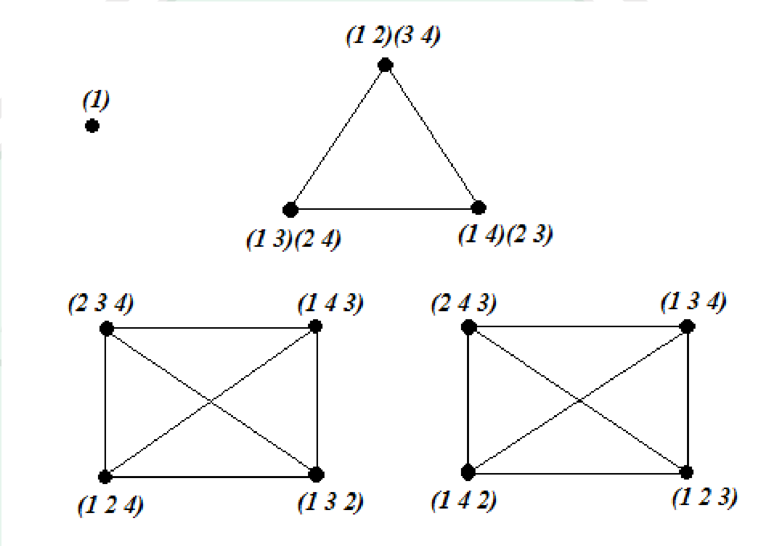
a. $[(1)] = \{(1)\}$

b. $[(2\ \ 3\ \ 4)] = \{(2\ \ 3\ \ 4), (1\ \ 4\ \ 3), (1\ \ 2\ \ 4), (1\ \ 3\ \ 2)\}$

c. $[(2\ \ 4\ \ 3)] = \{(2\ \ 4\ \ 3), (1\ \ 3\ \ 4), (1\ \ 4\ \ 2), (1\ \ 2\ \ 3)\}$

d. $[(1\ \ 2)(3\ \ 4)] = \{(1\ \ 2)(3\ \ 4), (1\ \ 3)(2\ \ 4), (1\ \ 4)(2\ \ 3)\}$

Graf konjugasi dari subgrup $P_8$ digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3. 10 Graf Konjugasi dari Subgrup $\boldsymbol{P_8}$

9. Unsur-unsur yang saling berkonjugasi dari subgrup tak sejati $S_4$ dengan $S_4 = \{(1), (1\ \ 2), (1\ \ 3), (1\ \ 4), (3\ \ 4), (2\ \ 4), (2\ \ 3), (2\ \ 3\ \ 4), (2\ \ 4\ \ 3), (1\ \ 3\ \ 4), (1\ \ 4\ \ 3), (1\ \ 2\ \ 4), (1\ \ 4\ \ 2), (1\ \ 2\ \ 3), (1\ \ 3\ \ 2), (1\ \ 2)(3\ \ 4), (1\ \ 3)(2\ \ 4), (1\ \ 4)(2\ \ 3), (1\ \ 2\ \ 3\ \ 4), (1\ \ 3\ \ 2\ \ 4), (1\ \ 4\ \ 2\ \ 3), (1\ \ 2\ \ 4\ \ 3), (1\ \ 4\ \ 3\ \ 2), (1\ \ 3\ \ 4\ \ 2)\}$ yaitu:

   a. $(1)$ konjugasi dengan $(1)$

   b. Unsur $(1\ \ 2), (1\ \ 3), (1\ \ 4), (3\ \ 4), (2\ \ 4)$ dan $(2\ \ 3)$ saling berkonjugasi.

   c. Unsur $(2\ \ 3\ \ 4), (2\ \ 4\ \ 3), (1\ \ 3\ \ 4), (1\ \ 4\ \ 3), (1\ \ 2\ \ 4), (1\ \ 4\ \ 2), (1\ \ 2\ \ 3)$ dan $(1\ \ 3\ \ 2)$ saling berkonjugasi.

d. Unsur $(1\ \ 2)(3\ \ 4)$, $(1\ \ 3)(2\ \ 4)$ dan $(1\ \ 4)(2\ \ 3)$ saling berkonjugasi.

e. Unsur $(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4)$, $(1\ \ 3\ \ 2\ \ 4)$, $(1\ \ 4\ \ 2\ \ 3)$, $(1\ \ 2\ \ 4\ \ 3)$, $(1\ \ 4\ \ 3\ \ 2)$ dan $(1\ \ 3\ \ 4\ \ 2)$ saling berkonjugasi.

Sehingga didapatkan kelas-kelas konjugasi dari $S_4$ antara lain:

1) $[(1)] = \{(1)\}$

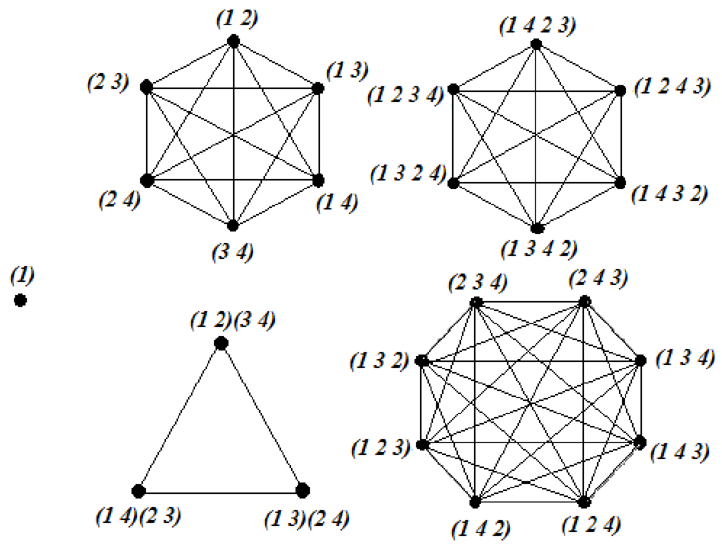
2) $[(1\ \ 2)] = \{(1\ \ 2), (1\ \ 3), (1\ \ 4), (3\ \ 4), (2\ \ 4), (2\ \ 3)\}$

3) $[(2\ \ 3\ \ 4)] = \{(2\ \ 3\ \ 4), (2\ \ 4\ \ 3), (1\ \ 3\ \ 4), (1\ \ 4\ \ 3), (1\ \ 2\ \ 4), (1\ \ 4\ \ 2), (1\ \ 2\ \ 3), (1\ \ 3\ \ 2)\}$

4) $[(1\ \ 2)(3\ \ 4)] = \{(1\ \ 2)(3\ \ 4), (1\ \ 3)(2\ \ 4), (1\ \ 4)(2\ \ 3)\}$

5) $[(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4)] = \{(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4), (1\ \ 3\ \ 2\ \ 4), (1\ \ 4\ \ 2\ \ 3), (1\ \ 2\ \ 4\ \ 3), (1\ \ 4\ \ 3\ \ 2), (1\ \ 3\ \ 4\ \ 2)\}$.

Graf konjugasi dari $S_4$ digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3.11 Graf Konjugasi dari $S_4$

## 3.3 Grup Simetri-5

Diberikan suatu himpunan tak kosong $L$, dengan $L = \{1,2,3,4,5\}$. Jika ditentukan fungsi bijektif dari $L$ ke $L$, analog dengan subbab 3.1 didapatkan unsur-unsur dari grup simetri-5 adalah sebagai berikut:

| | | |
|---|---|---|
| $(1)$ | $(1\ 4\ 5\ 2)$ | $(2\ 3)$ |
| $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ | $(1\ 5\ 2\ 4)$ | $(1\ 5)$ |
| $(1\ 2\ 3\ 5\ 4)$ | $(1\ 5\ 4\ 2)$ | $(1\ 4)$ |
| $(1\ 2\ 4\ 3\ 5)$ | $(1\ 2\ 3\ 5)$ | $(1\ 3)$ |
| $(1\ 2\ 4\ 5\ 3)$ | $(1\ 2\ 5\ 3)$ | $(1\ 2)$ |
| $(1\ 2\ 5\ 3\ 4)$ | $(1\ 3\ 2\ 5)$ | $(1\ 2)(3\ 4\ 5)$ |
| $(1\ 2\ 5\ 4\ 3)$ | $(1\ 3\ 5\ 2)$ | $(1\ 2)(3\ 5\ 4)$ |
| $(1\ 3\ 2\ 4\ 5)$ | $(1\ 5\ 2\ 3)$ | $(1\ 3)(2\ 4\ 5)$ |
| $(1\ 3\ 2\ 5\ 4)$ | $(1\ 5\ 3\ 2)$ | $(1\ 3)(2\ 5\ 4)$ |
| $(1\ 3\ 4\ 2\ 5)$ | $(1\ 2\ 3\ 4)$ | $(1\ 4)(2\ 3\ 5)$ |
| $(1\ 3\ 4\ 5\ 2)$ | $(1\ 2\ 4\ 3)$ | $(1\ 4)(2\ 5\ 3)$ |
| $(1\ 3\ 5\ 2\ 4)$ | $(1\ 3\ 2\ 4)$ | $(1\ 5)(2\ 3\ 4)$ |
| $(1\ 3\ 5\ 4\ 2)$ | $(1\ 3\ 4\ 2)$ | $(1\ 5)(2\ 4\ 3)$ |
| $(1\ 4\ 2\ 3\ 5)$ | $(1\ 4\ 2\ 3)$ | $(2\ 3)(1\ 4\ 5)$ |
| $(1\ 4\ 2\ 5\ 3)$ | $(1\ 4\ 3\ 2)$ | $(2\ 3)(1\ 5\ 4)$ |
| $(1\ 4\ 3\ 2\ 5)$ | $(3\ 4\ 5)$ | $(2\ 4)(1\ 3\ 5)$ |
| $(1\ 4\ 3\ 5\ 2)$ | $(3\ 5\ 4)$ | $(2\ 4)(1\ 5\ 3)$ |
| $(1\ 4\ 5\ 2\ 3)$ | $(2\ 4\ 5)$ | $(2\ 5)(1\ 3\ 4)$ |
| $(1\ 4\ 5\ 3\ 2)$ | $(2\ 5\ 4)$ | $(2\ 5)(1\ 4\ 3)$ |

| | | |
|---|---|---|
| $(1\ 5\ 2\ 3\ 4)$ | $(2\ 3\ 5)$ | $(3\ 4)(1\ 2\ 5)$ |
| $(1\ 5\ 2\ 4\ 3)$ | $(2\ 5\ 3)$ | $(3\ 4)(1\ 5\ 2)$ |
| $(1\ 5\ 3\ 2\ 4)$ | $(2\ 3\ 4)$ | $(3\ 5)(1\ 2\ 4)$ |
| $(1\ 5\ 3\ 4\ 2)$ | $(2\ 4\ 3)$ | $(3\ 5)(1\ 4\ 2)$ |
| $(1\ 5\ 4\ 2\ 3)$ | $(1\ 4\ 5)$ | $(4\ 5)(1\ 2\ 3)$ |
| $(1\ 5\ 4\ 3\ 2)$ | $(1\ 5\ 4)$ | $(4\ 5)(1\ 3\ 2)$ |
| $(2\ 3\ 4\ 5)$ | $(1\ 3\ 5)$ | $(2\ 3)(4\ 5)$ |
| $(2\ 3\ 5\ 4)$ | $(1\ 5\ 3)$ | $(2\ 4)(3\ 5)$ |
| $(2\ 4\ 3\ 5)$ | $(1\ 3\ 4)$ | $(2\ 5)(3\ 4)$ |
| $(2\ 4\ 5\ 3)$ | $(1\ 4\ 3)$ | $(1\ 3)(4\ 5)$ |
| $(2\ 5\ 3\ 4)$ | $(1\ 2\ 5)$ | $(1\ 4)(3\ 5)$ |
| $(2\ 5\ 4\ 3)$ | $(1\ 5\ 2)$ | $(1\ 5)(3\ 4)$ |
| $(1\ 3\ 4\ 5)$ | $(1\ 2\ 4)$ | $(1\ 2)(4\ 5)$ |
| $(1\ 3\ 5\ 4)$ | $(1\ 4\ 2)$ | $(1\ 4)(2\ 5)$ |
| $(1\ 4\ 3\ 5)$ | $(1\ 2\ 3)$ | $(1\ 5)(2\ 4)$ |
| $(1\ 4\ 5\ 3)$ | $(1\ 3\ 2)$ | $(1\ 2)(3\ 5)$ |
| $(1\ 5\ 3\ 4)$ | $(4\ 5)$ | $(1\ 3)(2\ 5)$ |
| $(1\ 5\ 4\ 3)$ | $(3\ 5)$ | $(1\ 5)(2\ 3)$ |
| $(1\ 2\ 4\ 5)$ | $(3\ 4)$ | $(1\ 2)(3\ 4)$ |
| $(1\ 2\ 5\ 4)$ | $(2\ 5)$ | $(1\ 3)(2\ 4)$ |
| $(1\ 4\ 2\ 5)$ | $(2\ 4)$ | $(1\ 4)(2\ 3)$ |

Dari unsur-unsur grup simetri-5 tersebut didapatkan subgrupnya sebagai berikut:

a. Subgrup trivial dan subgrup sejati (komutatif)

1. $\{(1)\}$
2. $\{(1),(4\ \ 5)\}$
3. $\{(1),(3\ \ 4\ \ 5),(3\ \ 5\ \ 4)\}$
4. $\{(1),(1\ \ 4),(2\ \ 5),(1\ \ 4)(2\ \ 5)\}$
5. $\{(1),(1\ \ 2\ \ 3\ \ 5\ \ 4),(1\ \ 3\ \ 4\ \ 2\ \ 5),(1\ \ 4\ \ 5\ \ 3\ \ 2),(1\ \ 5\ \ 2\ \ 4\ \ 3)\}$

b. Subgrup sejati (tidak komutatif)

1. $\{(1),(2\ \ 3),(2\ \ 4),(3\ \ 4),\ (2\ \ 3\ \ 4),(2\ \ 4\ \ 3)\}$
2. $\{(1),\ (2\ \ 4\ \ 3\ \ 5),\ (2\ \ 5\ \ 3\ \ 4),\ (4\ \ 5),\ (2\ \ 3),\ (2\ \ 3)(4\ \ 5),\ (2\ \ 4)(3\ \ 5),$ $(2\ \ 5)(3\ \ 4)\}$
3. $\{(1),\ (1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5),\ (1\ \ 3\ \ 5\ \ 2\ \ 4),\ (1\ \ 4\ \ 2\ \ 5\ \ 3),\ (1\ \ 5\ \ 4\ \ 3\ \ 2),$ $(1\ \ 2)(3\ \ 5),(1\ \ 3)(4\ \ 5),(1\ \ 4)(2\ \ 3),\ (1\ \ 5)(2\ \ 4),(2\ \ 5)(3\ \ 4)\}$
4. $\{(1),\ (1\ \ 2),\ (1\ \ 5),\ (2\ \ 5),\ (3\ \ 4),\ (1\ \ 2\ \ 5),\ (1\ \ 5\ \ 2),\ (1\ \ 2)(3\ \ 4),$ $(1\ \ 5)(3\ \ 4),(2\ \ 5)(3\ \ 4),(3\ \ 4)(1\ \ 2\ \ 5),(3\ \ 4)(1\ \ 5\ \ 2)\}$
5. $\{(1),\ (1\ \ 2\ \ 3\ \ 5),\ (1\ \ 2\ \ 4\ \ 3),\ (1\ \ 3\ \ 4\ \ 2),\ (1\ \ 3\ \ 5\ \ 4),\ (1\ \ 4\ \ 2\ \ 5),$ $(1\ \ 4\ \ 5\ \ 3),(1\ \ 5\ \ 2\ \ 4),\ (1\ \ 5\ \ 3\ \ 2),(2\ \ 3\ \ 4\ \ 5),(2\ \ 5\ \ 4\ \ 3),(1\ \ 2\ \ 5\ \ 3\ \ 4),$ $(1\ \ 3\ \ 2\ \ 4\ \ 5),\ (1\ \ 4\ \ 3\ \ 5\ \ 2),\ (1\ \ 5\ \ 4\ \ 2\ \ 3),\ (1\ \ 2)(4\ \ 5),\ (1\ \ 3)(2\ \ 5),$ $(1\ \ 4)(2\ \ 3),(1\ \ 5)(3\ \ 4),(2\ \ 4)(3\ \ 5)\}$
6. $\{(1),\ (2\ \ 3\ \ 4\ \ 5),\ (2\ \ 3\ \ 5\ \ 4),\ (2\ \ 4\ \ 3\ \ 5),\ (2\ \ 4\ \ 5\ \ 3),\ (2\ \ 5\ \ 3\ \ 4),$ $(2\ \ 5\ \ 4\ \ 3),\ (3\ \ 4\ \ 5),\ (3\ \ 5\ \ 4),(2\ \ 4\ \ 5),(2\ \ 5\ \ 4),(2\ \ 3\ \ 5),\ (2\ \ 5\ \ 3),$

$(2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3), (4\ 5), (3\ 5), (3\ 4), (2\ 5), (2\ 4), (2\ 3), (2\ 3)(4\ 5),$
$(2\ 4)(3\ 5), (2\ 5)(3\ 4)\}$

7. $\{(1), (1\ 2\ 3\ 4\ 5), (1\ 2\ 3\ 5\ 4), (1\ 2\ 4\ 3\ 5), (1\ 2\ 4\ 5\ 3),$
$(1\ 2\ 5\ 3\ 4), (1\ 2\ 5\ 4\ 3), (1\ 3\ 2\ 4\ 5), (1\ 3\ 2\ 5\ 4), (1\ 3\ 4\ 2\ 5),$
$(1\ 3\ 4\ 5\ 2), (1\ 3\ 5\ 2\ 4), (1\ 3\ 5\ 4\ 2), (1\ 4\ 2\ 3\ 5), (1\ 4\ 2\ 5\ 3),$
$(1\ 4\ 3\ 2\ 5), (1\ 4\ 3\ 5\ 2), (1\ 4\ 5\ 2\ 3), (1\ 4\ 5\ 3\ 2), (1\ 5\ 2\ 3\ 4),$
$(1\ 5\ 2\ 4\ 3), (1\ 5\ 3\ 2\ 4), (1\ 5\ 3\ 4\ 2), (1\ 5\ 4\ 2\ 3), (1\ 5\ 4\ 3\ 2),$
$(3\ 4\ 5), (3\ 5\ 4), (2\ 4\ 5), (2\ 5\ 4), (2\ 3\ 5), (2\ 5\ 3), (2\ 3\ 4),$
$(2\ 4\ 3), (1\ 4\ 5), (1\ 5\ 4), (1\ 3\ 5), (1\ 5\ 3), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3),$
$(1\ 2\ 5), (1\ 5\ 2), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (2\ 3)(4\ 5),$
$(2\ 4)(3\ 5), (2\ 5)(3\ 4), (1\ 3)(4\ 5), (1\ 4)(3\ 5), (1\ 5)(3\ 4),$
$(1\ 2)(4\ 5), (1\ 4)(2\ 5), (1\ 5)(2\ 4), (1\ 2)(3\ 5), (1\ 3)(2\ 5),$
$(1\ 5)(2\ 3), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$

c. Subgrup tak sejati (tidak komutatif)

$\{(1), (1\ 2\ 3\ 4\ 5), (1\ 2\ 3\ 5\ 4), (1\ 2\ 4\ 3\ 5), (1\ 2\ 4\ 5\ 3), (1\ 2\ 5\ 3\ 4),$
$(1\ 2\ 5\ 4\ 3), (1\ 3\ 2\ 4\ 5), (1\ 3\ 2\ 5\ 4), (1\ 3\ 4\ 2\ 5), (1\ 3\ 4\ 5\ 2),$
$(1\ 3\ 5\ 2\ 4), (1\ 3\ 5\ 4\ 2), (1\ 4\ 2\ 3\ 5), (1\ 4\ 2\ 5\ 3), (1\ 4\ 3\ 2\ 5),$
$(1\ 4\ 3\ 5\ 2), (1\ 4\ 5\ 2\ 3), (1\ 4\ 5\ 3\ 2), (1\ 5\ 2\ 3\ 4), (1\ 5\ 2\ 4\ 3),$
$(1\ 5\ 3\ 2\ 4), (1\ 5\ 3\ 4\ 2), (1\ 5\ 4\ 2\ 3), (1\ 5\ 4\ 3\ 2), (2\ 3\ 4\ 5),$
$(2\ 3\ 5\ 4), (2\ 4\ 3\ 5), (2\ 4\ 5\ 3), (2\ 5\ 3\ 4), (2\ 5\ 4\ 3), (1\ 3\ 4\ 5),$
$(1\ 3\ 5\ 4), (1\ 4\ 3\ 5), (1\ 4\ 5\ 3), (1\ 5\ 3\ 4), (1\ 5\ 4\ 3), (1\ 2\ 4\ 5),$

(1 2 5 4), (1 4 2 5), (1 4 5 2), (1 5 2 4), (1 5 4 2), (1 2 3 5), (1 2 5 3), (1 3 2 5), (1 3 5 2), (1 5 2 3), (1 5 3 2), (1 2 3 4), (1 2 4 3), (1 3 2 4), (1 3 4 2), (1 4 2 3), (1 4 3 2), (3 4 5), (3 5 4), (2 4 5), (2 5 4), (2 3 5), (2 5 3), (2 3 4), (2 4 3), (1 4 5), (1 5 4), (1 3 5), (1 5 3), (1 3 4), (1 4 3), (1 2 5), (1 5 2), (1 2 4), (1 4 2), (1 2 3), (1 3 2), (4 5), (3 5), (3 4), (2 5), (2 4), (2 3), (1 5), (1 4), (1 3), (1 2), (1 2)(3 4 5), (1 2)(3 5 4), (1 3)(2 4 5), (1 3)(2 5 4), (1 4)(2 3 5), (1 4)(2 5 3), (1 5)(2 3 4), (1 5)(2 4 3), (2 3)(1 4 5), (2 3)(1 5 4), (2 4)(1 3 5), (2 4)(1 5 3), (2 5)(1 3 4), (2 5)(1 4 3), (3 4)(1 2 5), (3 4)(1 5 2), (3 5)(1 2 4), (3 5)(1 4 2), (4 5)(1 2 3), (4 5)(1 3 2), (2 3)(4 5), (2 4)(3 5), (2 5)(3 4), (1 3)(4 5), (1 4)(3 5), (1 5)(3 4), (1 2)(4 5), (1 2)(4 5), (1 4)(2 5), (1 5)(2 4), (1 2)(3 5), (1 3)(2 5), (1 5)(2 3), (1 2)(3 4), (1 3)(2 4), (1 4)(2 3)}

Subgrup trivial dan subgrup sejati (komutatif) tidak dibahas karena tidak memenuhi definisi subbab 2.9. Sehingga pada grup simetri-5 hanya akan ditentukan graf konjugasi dari subgrup sejati (tidak komutatif) dan subgrup tak sejati di grup simetri-5.

### 3.3.1 Konjugasi pada Subgrup di Grup Simetri-5

Konjugasi pada subgrup di grup simetri-5 dilakukan dengan proses pengerjaan yang serupa dengan subbab 3.1.1, sehingga didapatkan hasil konjugasi pada subgrup di grup simetri-5 sebagai berikut:

1. Unsur-unsur yang saling berkonjugasi dari subgrup $P_9$ dengan

   $P_9 = \{(1), (2\ \ 3), (2\ \ 4), (3\ \ 4), (2\ \ 3\ \ 4),\ (2\ \ 4\ \ 3)\}$

   yaitu:

   $(1)$ konjugasi dengan $(1)$

   $(2\ \ 3)$ konjugasi dengan $(2\ \ 3)$

   $(2\ \ 3)$ konjugasi dengan $(2\ \ 4)$

   $(2\ \ 3)$ konjugasi dengan $(3\ \ 4)$

   $(2\ \ 4)$ konjugasi dengan $(2\ \ 4)$

   $(2\ \ 4)$ konjugasi dengan $(3\ \ 4)$

   $(3\ \ 4)$ konjugasi dengan $(3\ \ 4)$

   $(2\ \ 3\ \ 4)$ konjugasi dengan $(2\ \ 3\ \ 4)$

   $(2\ \ 3\ \ 4)$ konjugasi dengan $(2\ \ 4\ \ 3)$

   $(2\ \ 4\ \ 3)$ konjugasi dengan $(2\ \ 4\ \ 3)$

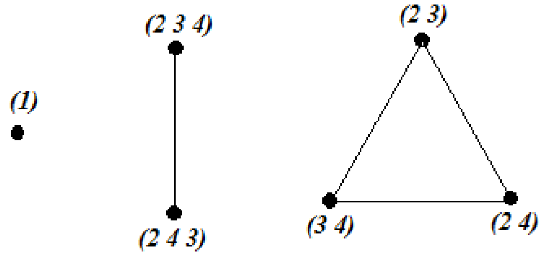
   Sehingga didapatkan kelas-kelas konjugasi dari subgrup $P_9$ antara lain:

   a. $[(1)] = \{(1)\}$

   b. $[(2\ \ 3)] = \{(2\ \ 3), (2\ \ 4), (3\ \ 4)\}$

   c. $[(2\ \ 3\ \ 4)] = \{(2\ \ 3\ \ 4), (2\ \ 4\ \ 3)\}$

   Graf konjugasi dari subgrup $P_9$ digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3.12 Graf Konjugasi dari Subgrup $\boldsymbol{P_9}$

2. Unsur-unsur yang saling berkonjugasi dari subgrup $P_{10}$ dengan

$P_{10} = \{(1), (2\ \ 4\ \ 3\ \ 5), (2\ \ 5\ \ 3\ \ 4), (4\ \ 5), (2\ \ 3), (2\ \ 3)(4\ \ 5), (2\ \ 4)(3\ \ 5), (2\ \ 5)(3\ \ 4)\}$ yaitu:

$(1)$ konjugasi dengan $(1)$

$(2\ \ 4\ \ 3\ \ 5)$ konjugasi dengan $(2\ \ 4\ \ 3\ \ 5)$

$(2\ \ 4\ \ 3\ \ 5)$ konjugasi dengan $(2\ \ 5\ \ 3\ \ 4)$

$(2\ \ 5\ \ 3\ \ 4)$ konjugasi dengan $(2\ \ 5\ \ 3\ \ 4)$

$(4\ \ 5)$ konjugasi dengan $(4\ \ 5)$

$(4\ \ 5)$ konjugasi dengan $(2\ \ 3)$

$(2\ \ 3)$ konjugasi dengan $(2\ \ 3)$

$(2\ \ 3)(4\ \ 5)$ konjugasi dengan $(2\ \ 3)(4\ \ 5)$

$(2\ \ 4)(3\ \ 5)$ konjugasi dengan $(2\ \ 4)(3\ \ 5)$

$(2\ \ 4)(3\ \ 5)$ konjugasi dengan $(2\ \ 5)(3\ \ 4)$

$(2\ \ 5)(3\ \ 4)$ konjugasi dengan $(2\ \ 5)(3\ \ 4)$

Sehingga didapatkan kelas-kelas konjugasi dari subgrup $P_{10}$ antara lain:

a. $[(1)] = \{(1)\}$

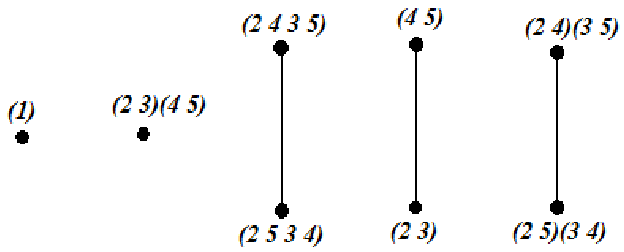
b. $[(2\ \ 4\ \ 3\ \ 5)] = \{(2\ \ 4\ \ 3\ \ 5), (2\ \ 5\ \ 3\ \ 4)\}$

c. $[(4\ \ 5)] = \{(4\ \ 5), (2\ \ 3)\}$

d. $[(2\ \ 3)(4\ \ 5)] = \{(2\ \ 3)(4\ \ 5)\}$

e. $[(2\ \ 4)(3\ \ 5)] = \{(2\ \ 4)(3\ \ 5), (2\ \ 5)(3\ \ 4)\}$

Graf konjugasi dari subgrup $P_{10}$ digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3.13 Graf Konjugasi dari Subgrup $\boldsymbol{P_{10}}$

3. Unsur-unsur yang saling berkonjugasi dari subgrup $P_{11}$ dengan

$P_{11} = \{(1), (1\ 2\ 3\ 4\ 5), (1\ 3\ 5\ 2\ 4), (1\ 4\ 2\ 5\ 3), (1\ 5\ 4\ 3\ 2),$ $(1\ 2)(3\ 5), (1\ 3)(4\ 5), (1\ 4)(2\ 3), (1\ 5)(2\ 4), (2\ 5)(3\ 4)\}$ yaitu:

$(1)$ konjugasi dengan $(1)$

$(1\ 2\ 4\ 3\ 5)$ konjugasi dengan $(1\ 2\ 4\ 3\ 5)$

$(1\ 2\ 4\ 3\ 5)$ konjugasi dengan $(1\ 5\ 4\ 3\ 2)$

$(1\ 5\ 4\ 3\ 2)$ konjugasi dengan $(1\ 5\ 4\ 3\ 2)$

$(1\ 3\ 5\ 2\ 4)$ konjugasi dengan $(1\ 3\ 5\ 2\ 4)$

$(1\ 3\ 5\ 2\ 4)$ konjugasi dengan $(1\ 4\ 2\ 5\ 3)$

$(1\ 4\ 2\ 5\ 3)$ konjugasi dengan $(1\ 4\ 2\ 5\ 3)$

$(1\ 2)(3\ 5)$ konjugasi dengan $(1\ 2)(3\ 5)$

$(1\ 2)(3\ 5)$ konjugasi dengan $(1\ 3)(4\ 5)$

$(1\ 2)(3\ 5)$ konjugasi dengan $(1\ 4)(2\ 3)$

$(1\ 2)(3\ 5)$ konjugasi dengan $(1\ 5)(2\ 4)$

$(1\ 2)(3\ 5)$ konjugasi dengan $(2\ 5)(3\ 4)$

$(1\ 3)(4\ 5)$ konjugasi dengan $(1\ 3)(4\ 5)$

$(1\ 3)(4\ 5)$ konjugasi dengan $(1\ 4)(2\ 3)$

$(1\ \ 3)(4\ \ 5)$ konjugasi dengan $(1\ \ 5)(2\ \ 4)$

$(1\ \ 3)(4\ \ 5)$ konjugasi dengan $(2\ \ 5)(3\ \ 4)$

$(1\ \ 4)(2\ \ 3)$ konjugasi dengan $(1\ \ 4)(2\ \ 3)$

$(1\ \ 4)(2\ \ 3)$ konjugasi dengan $(1\ \ 5)(2\ \ 4)$

$(1\ \ 4)(2\ \ 3)$ konjugasi dengan $(2\ \ 5)(3\ \ 4)$

$(1\ \ 5)(2\ \ 4)$ konjugasi dengan $(1\ \ 5)(2\ \ 4)$

$(1\ \ 5)(2\ \ 4)$ konjugasi dengan $(2\ \ 5)(3\ \ 4)$

$(2\ \ 5)(3\ \ 4)$ konjugasi dengan $(2\ \ 5)(3\ \ 4)$

Sehingga didapatkan kelas-kelas konjugasi dari subgrup $P_{11}$ antara lain:

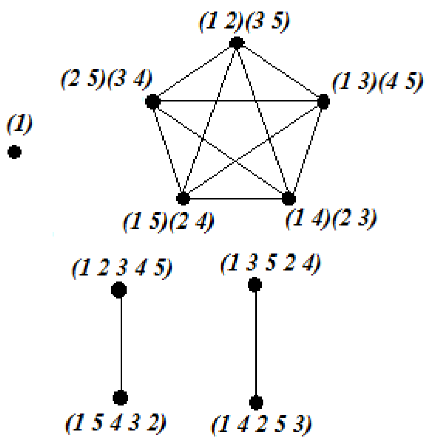
a. $[(1)] = \{(1)\}$

b. $[(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5)] = \{(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5), (1\ \ 5\ \ 4\ \ 3\ \ 2)\}$

c. $[(1\ \ 3\ \ 5\ \ 2\ \ 4)] = \{(1\ \ 3\ \ 5\ \ 2\ \ 4), (1\ \ 4\ \ 2\ \ 5\ \ 3)\}$

d. $[(1\ \ 2)(3\ \ 5)] = \{(1\ \ 2)(3\ \ 5),\ (1\ \ 3)(4\ \ 5),\ (1\ \ 4)(2\ \ 3),\ (1\ \ 5)(2\ \ 4),$
$(2\ \ 5)(3\ \ 4)\}$

Graf konjugasi dari subgrup $P_{11}$ digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3.14 Graf Konjugasi dari Subgrup $P_{11}$

4. Unsur-unsur yang saling berkonjugasi dari subgrup $P_{12}$ dengan $P_{12} = \{(1),\ (1\ 2),\ (1\ 5),\ (2\ 5),\ (3\ 4),\ (1\ 2\ 5),\ (1\ 5\ 2),\ (1\ 2)(3\ 4),\ (1\ 5)(3\ 4), (2\ 5)(3\ 4), (3\ 4)(1\ 2\ 5), (3\ 4)(1\ 5\ 2)\}$ yaitu:

   $(1)$ konjugasi dengan $(1)$

   $(1\ 2)$ konjugasi dengan $(1\ 2)$

   $(1\ 2)$ konjugasi dengan $(1\ 5)$

   $(1\ 2)$ konjugasi dengan $(2\ 5)$

   $(1\ 5)$ konjugasi dengan $(1\ 5)$

   $(1\ 5)$ konjugasi dengan $(2\ 5)$

   $(2\ 5)$ konjugasi dengan $(2\ 5)$

   $(3\ 4)$ konjugasi dengan $(3\ 4)$

   $(1\ 2\ 5)$ konjugasi dengan $(1\ 2\ 5)$

   $(1\ 2\ 5)$ konjugasi dengan $(1\ 5\ 2)$

   $(1\ 5\ 2)$ konjugasi dengan $(1\ 5\ 2)$

   $(1\ 2)(3\ 4)$ konjugasi dengan $(1\ 2)(3\ 4)$

   $(1\ 2)(3\ 4)$ konjugasi dengan $(1\ 5)(3\ 4)$

   $(1\ 2)(3\ 4)$ konjugasi dengan $(2\ 5)(3\ 4)$

   $(1\ 5)(3\ 4)$ konjugasi dengan $(1\ 5)(3\ 4)$

   $(1\ 5)(3\ 4)$ konjugasi dengan $(2\ 5)(3\ 4)$

   $(2\ 5)(3\ 4)$ konjugasi dengan $(2\ 5)(3\ 4)$

   $(3\ 4)(1\ 2\ 5)$ konjugasi dengan $(3\ 4)(1\ 2\ 5)$

   $(3\ 4)(1\ 2\ 5)$ konjugasi dengan $(3\ 4)(1\ 5\ 2)$

$(3\ \ 4)(1\ \ 5\ \ 2)$ konjugasi dengan $(3\ \ 4)(1\ \ 5\ \ 2)$

Sehingga didapatkan kelas-kelas konjugasi dari subgrup $P_{12}$ antara lain:

a. $[(1)] = \{(1)\}$

b. $[(1\ \ 2)] = \{(1\ \ 2), (1\ \ 5), (2\ \ 5)\}$

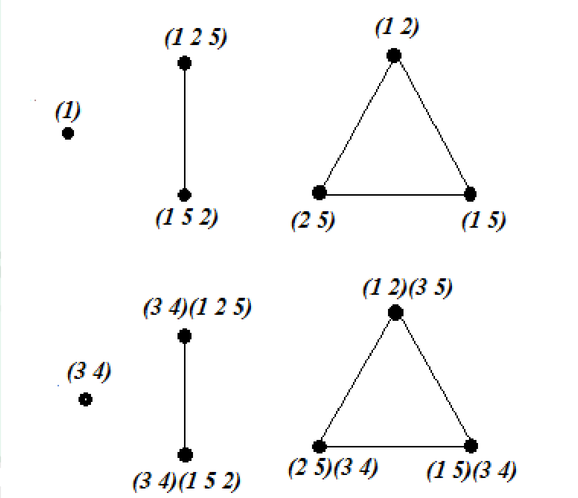
c. $[(3\ \ 4)] = \{(3\ \ 4)\}$

d. $[(1\ \ 2\ \ 5)] = \{(1\ \ 2\ \ 5), (1\ \ 5\ \ 2)\}$

e. $[(1\ \ 2)(3\ \ 4)] = \{(1\ \ 2)(3\ \ 4), (1\ \ 5)(3\ \ 4), (2\ \ 5)(3\ \ 4)\}$

f. $[(3\ \ 4)(1\ \ 2\ \ 5)] = \{(3\ \ 4)(1\ \ 2\ \ 5), (3\ \ 4)(1\ \ 5\ \ 2)\}$

Graf konjugasi dari subgrup $P_{12}$ digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3.15 Graf Konjugasi dari Subgrup $P_{12}$

5. Unsur-unsur yang saling berkonjugasi dari subgrup $P_{13}$ dengan

$P_{13} = \{(1), (1\ \ 2\ \ 3\ \ 5), (1\ \ 2\ \ 4\ \ 3), (1\ \ 3\ \ 4\ \ 2), (1\ \ 3\ \ 5\ \ 4), (1\ \ 4\ \ 2\ \ 5), (1\ \ 4\ \ 5\ \ 3), (1\ \ 5\ \ 2\ \ 4), (1\ \ 5\ \ 3\ \ 2), (2\ \ 3\ \ 4\ \ 5), (2\ \ 5\ \ 4\ \ 3), (1\ \ 2\ \ 5\ \ 3\ \ 4), (1\ \ 3\ \ 2\ \ 4\ \ 5), (1\ \ 4\ \ 3\ \ 5\ \ 2), (1\ \ 5\ \ 4\ \ 2\ \ 3), (1\ \ 2)(4\ \ 5), (1\ \ 3)(2\ \ 5), (1\ \ 4)(2\ \ 3), (1\ \ 5)(3\ \ 4), (2\ \ 4)(3\ \ 5)\}$ yaitu:

$(1)$ konjugasi dengan $(1)$

$(1\ 2\ 3\ 5)$ konjugasi dengan $(1\ 2\ 3\ 5)$

$(1\ 2\ 3\ 5)$ konjugasi dengan $(1\ 3\ 4\ 2)$

$(1\ 2\ 3\ 5)$ konjugasi dengan $(1\ 4\ 5\ 3)$

$(1\ 2\ 3\ 5)$ konjugasi dengan $(1\ 5\ 2\ 4)$

$(1\ 2\ 3\ 5)$ konjugasi dengan $(2\ 5\ 4\ 3)$

$(1\ 3\ 4\ 2)$ konjugasi dengan $(1\ 3\ 4\ 2)$

$(1\ 3\ 4\ 2)$ konjugasi dengan $(1\ 4\ 5\ 3)$

$(1\ 3\ 4\ 2)$ konjugasi dengan $(1\ 5\ 2\ 4)$

$(1\ 3\ 4\ 2)$ konjugasi dengan $(2\ 5\ 4\ 3)$

$(1\ 4\ 5\ 3)$ konjugasi dengan $(1\ 4\ 5\ 3)$

$(1\ 4\ 5\ 3)$ konjugasi dengan $(1\ 5\ 2\ 4)$

$(1\ 4\ 5\ 3)$ konjugasi dengan $(2\ 5\ 4\ 3)$

$(1\ 5\ 2\ 4)$ konjugasi dengan $(1\ 5\ 2\ 4)$

$(1\ 5\ 2\ 4)$ konjugasi dengan $(2\ 5\ 4\ 3)$

$(2\ 5\ 4\ 3)$ konjugasi dengan $(2\ 5\ 4\ 3)$

$(1\ 2\ 4\ 3)$ konjugasi dengan $(1\ 2\ 4\ 3)$

$(1\ 2\ 4\ 3)$ konjugasi dengan $(1\ 3\ 5\ 4)$

$(1\ 2\ 4\ 3)$ konjugasi dengan $(1\ 4\ 2\ 5)$

$(1\ 2\ 4\ 3)$ konjugasi dengan $(1\ 5\ 3\ 2)$

$(1\ 2\ 4\ 3)$ konjugasi dengan $(2\ 3\ 4\ 5)$

$(1\ 3\ 5\ 4)$ konjugasi dengan $(1\ 3\ 5\ 4)$

$(1\ 3\ 5\ 4)$ konjugasi dengan $(1\ 4\ 2\ 5)$

$(1\ 3\ 5\ 4)$ konjugasi dengan $(1\ 5\ 3\ 2)$

$(1\ 3\ 5\ 4)$ konjugasi dengan $(2\ 3\ 4\ 5)$

$(1\ 4\ 2\ 5)$ konjugasi dengan $(1\ 4\ 2\ 5)$

$(1\ 4\ 2\ 5)$ konjugasi dengan $(1\ 5\ 3\ 2)$

$(1\ 4\ 2\ 5)$ konjugasi dengan $(2\ 3\ 4\ 5)$

$(1\ 5\ 3\ 2)$ konjugasi dengan $(1\ 5\ 3\ 2)$

$(1\ 5\ 3\ 2)$ konjugasi dengan $(2\ 3\ 4\ 5)$

$(2\ 3\ 4\ 5)$ konjugasi dengan $(2\ 3\ 4\ 5)$

$(1\ 2\ 5\ 3\ 4)$ konjugasi dengan $(1\ 2\ 5\ 3\ 4)$

$(1\ 2\ 5\ 3\ 4)$ konjugasi dengan $(1\ 3\ 2\ 4\ 5)$

$(1\ 2\ 5\ 3\ 4)$ konjugasi dengan $(1\ 4\ 3\ 5\ 2)$

$(1\ 2\ 5\ 3\ 4)$ konjugasi dengan $(1\ 5\ 4\ 2\ 3)$

$(1\ 3\ 2\ 4\ 5)$ konjugasi dengan $(1\ 3\ 2\ 4\ 5)$

$(1\ 3\ 2\ 4\ 5)$ konjugasi dengan $(1\ 4\ 3\ 5\ 2)$

$(1\ 3\ 2\ 4\ 5)$ konjugasi dengan $(1\ 5\ 4\ 2\ 3)$

$(1\ 4\ 3\ 5\ 2)$ konjugasi dengan $(1\ 4\ 3\ 5\ 2)$

$(1\ 4\ 3\ 5\ 2)$ konjugasi dengan $(1\ 5\ 4\ 2\ 3)$

$(1\ 5\ 4\ 2\ 3)$ konjugasi dengan $(1\ 5\ 4\ 2\ 3)$

$(1\ 2)(4\ 5)$ konjugasi dengan $(1\ 2)(4\ 5)$

$(1\ 2)(4\ 5)$ konjugasi dengan $(1\ 3)(2\ 5)$

$(1\ 2)(4\ 5)$ konjugasi dengan $(1\ 4)(2\ 3)$

$(1\ \ 2)(4\ \ 5)$ konjugasi dengan $(1\ \ 5)(3\ \ 4)$

$(1\ \ 2)(4\ \ 5)$ konjugasi dengan $(2\ \ 4)(3\ \ 5)$

$(1\ \ 3)(2\ \ 5)$ konjugasi dengan $(1\ \ 3)(2\ \ 5)$

$(1\ \ 3)(2\ \ 5)$ konjugasi dengan $(1\ \ 4)(2\ \ 3)$

$(1\ \ 3)(2\ \ 5)$ konjugasi dengan $(1\ \ 5)(3\ \ 4)$

$(1\ \ 3)(2\ \ 5)$ konjugasi dengan $(2\ \ 4)(3\ \ 5)$

$(1\ \ 4)(2\ \ 3)$ konjugasi dengan $(1\ \ 4)(2\ \ 3)$

$(1\ \ 4)(2\ \ 3)$ konjugasi dengan $(1\ \ 5)(3\ \ 4)$

$(1\ \ 4)(2\ \ 3)$ konjugasi dengan $(2\ \ 4)(3\ \ 5)$

$(1\ \ 5)(3\ \ 4)$ konjugasi dengan $(1\ \ 5)(3\ \ 4)$

$(1\ \ 5)(3\ \ 4)$ konjugasi dengan $(2\ \ 4)(3\ \ 5)$

$(2\ \ 4)(3\ \ 5)$ konjugasi dengan $(2\ \ 4)(3\ \ 5)$

Sehingga didapatkan kelas-kelas konjugasi dari subgrup $P_{13}$ antara lain:

a. $[(1)] = \{(1)\}$

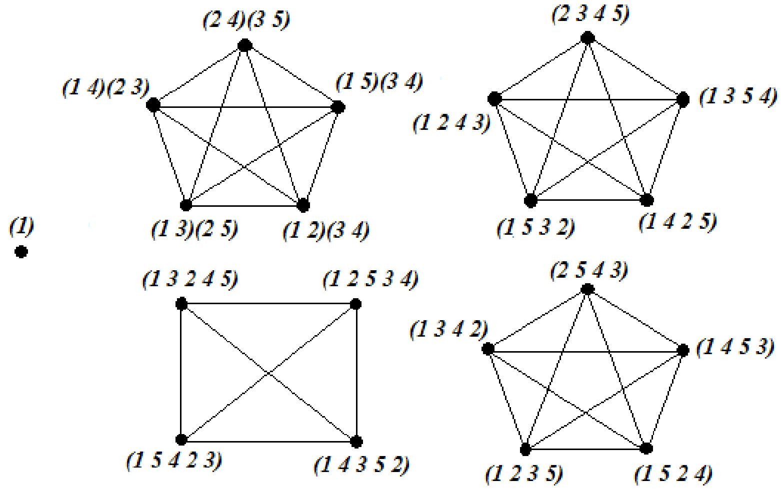
b. $[(1\ 2\ 3\ 5)] = \{(1\ 2\ 3\ 5), (1\ 3\ 4\ 2), (1\ 4\ 5\ 3), (1\ 5\ 2\ 4), (2\ 5\ 4\ 3)\}$

c. $[(1\ 2\ 4\ 3)] = \{(1\ 2\ 4\ 3), (1\ 3\ 5\ 4), (1\ 4\ 2\ 5), (1\ 5\ 3\ 2), (2\ 3\ 4\ 5)\}$

d. $[(1\ 2\ 5\ 3\ 4)] = \{(1\ 2\ 5\ 3\ 4), (1\ 3\ 2\ 4\ 5), (1\ 4\ 3\ 5\ 2), (1\ 5\ 4\ 2\ 3)\}$

e. $[(1\ \ 2)(4\ \ 5)] = \{(1\ \ 2)(4\ \ 5), (1\ \ 3)(2\ \ 5), (1\ \ 4)(2\ \ 3), (1\ \ 5)(3\ \ 4), (2\ \ 4)(3\ \ 5)\}$

Graf konjugasi dari subgrup $P_{13}$ digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3.16 Graf Konjugasi dari Subgrup $\boldsymbol{P_{13}}$

6. Unsur-unsur yang saling berkonjugasi dari subgrup $P_{14}$ dengan $P_{14} = \{(1), (2\ 3\ 4\ 5), (2\ 3\ 5\ 4), (2\ 4\ 3\ 5), (2\ 4\ 5\ 3), (2\ 5\ 3\ 4), (2\ 5\ 4\ 3), (3\ 4\ 5), (3\ 5\ 4), (2\ 4\ 5), (2\ 5\ 4), (2\ 3\ 5), (2\ 5\ 3), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3), (4\ 5), (3\ 5), (3\ 4), (2\ 5), (2\ 4), (2\ 3), (2\ 3)(4\ 5), (2\ 4)(3\ 5), (2\ 5)(3\ 4)\}$ yaitu:

   a. $(1)$ konjugasi dengan $(1)$

   b. Unsur $(2\ 3\ 4\ 5)$, $(2\ 3\ 5\ 4)$, $(2\ 4\ 3\ 5)$, $(2\ 4\ 5\ 3)$, $(2\ 5\ 3\ 4)$ dan $(2\ 5\ 4\ 3)$ saling berkonjugasi.

   c. Unsur $(3\ 4\ 5)$, $(3\ 5\ 4)$, $(2\ 4\ 5)$, $(2\ 5\ 4)$, $(2\ 3\ 5)$, $(2\ 5\ 3)$, $(2\ 3\ 4)$ dan $(2\ 4\ 3)$ saling berkonjugasi.

   d. Unsur $(4\ 5)$, $(3\ 5)$, $(3\ 4)$, $(2\ 5)$, $(2\ 4)$ dan $(2\ 3)$ saling berkonjugasi.

   e. Unsur $(2\ 3)(4\ 5)$, $(2\ 4)(3\ 5)$ dan $(2\ 5)(3\ 4)$ saling berkonjugasi.

Sehingga didapatkan kelas-kelas konjugasi dari subgrup $P_{14}$ antara lain:

1) $[(1)] = \{(1)\}$

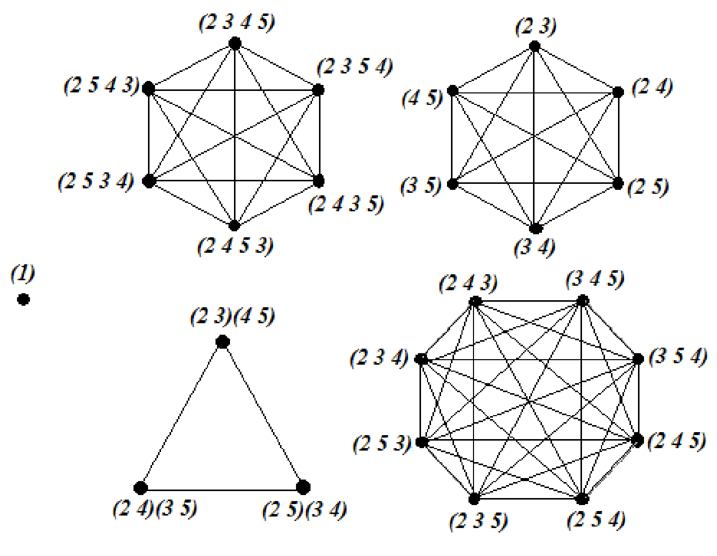
2) $[(2\ 3\ 4\ 5)] = \{(2\ 3\ 4\ 5), (2\ 3\ 5\ 4), (2\ 4\ 3\ 5), (2\ 4\ 5\ 3), (2\ 5\ 3\ 4), (2\ 5\ 4\ 3)\}$

3) $[(3\ 5\ 4)] = \{(3\ 4\ 5), (3\ 5\ 4), (2\ 4\ 5), (2\ 5\ 4), (2\ 3\ 5), (2\ 5\ 3), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)\}$

4) $[(4\ 5)] = \{(4\ 5), (3\ 5), (3\ 4), (2\ 5), (2\ 4), (2\ 3)\}$

5) $[(2\ 3)(4\ 5)] = \{(2\ 3)(4\ 5), (2\ 4)(3\ 5), (2\ 5)(3\ 4)\}$

Graf konjugasi dari subgrup $P_{14}$ digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3.17 Graf Konjugasi dari Subgrup $P_{14}$

7. Unsur-unsur yang saling berkonjugasi dari subgrup $P_{15}$ dengan

$P_{15} =$ $\{(1),$ $(1\ 2\ 3\ 4\ 5),$ $(1\ 2\ 3\ 5\ 4),$ $(1\ 2\ 4\ 3\ 5),$ $(1\ 2\ 4\ 5\ 3),$ $(1\ 2\ 5\ 3\ 4),$ $(1\ 2\ 5\ 4\ 3),$ $(1\ 3\ 2\ 4\ 5),$ $(1\ 3\ 2\ 5\ 4),$ $(1\ 3\ 4\ 2\ 5),$ $(1\ 3\ 4\ 5\ 2),$ $(1\ 3\ 5\ 2\ 4),$ $(1\ 3\ 5\ 4\ 2),$ $(1\ 4\ 2\ 3\ 5),$ $(1\ 4\ 2\ 5\ 3),$ $(1\ 4\ 3\ 2\ 5),$ $(1\ 4\ 3\ 5\ 2),$ $(1\ 4\ 5\ 2\ 3),$ $(1\ 4\ 5\ 3\ 2),$ $(1\ 5\ 2\ 3\ 4),$ $(1\ 5\ 2\ 4\ 3),$ $(1\ 5\ 3\ 2\ 4),$ $(1\ 5\ 3\ 4\ 2),$ $(1\ 5\ 4\ 2\ 3),$ $(1\ 5\ 4\ 3\ 2),$ $(3\ 4\ 5),$ $(3\ 5\ 4),$ $(2\ 4\ 5),$ $(2\ 5\ 4),$ $(2\ 3\ 5),$ $(2\ 5\ 3),$ $(2\ 3\ 4),$ $(2\ 4\ 3),$ $(1\ 4\ 5),$ $(1\ 5\ 4),$ $(1\ 3\ 5),$ $(1\ 5\ 3),$ $(1\ 3\ 4),$ $(1\ 4\ 3),$ $(1\ 2\ 5),$ $(1\ 5\ 2),$ $(1\ 2\ 4),$ $(1\ 4\ 2),$ $(1\ 2\ 3),$ $(1\ 3\ 2),$ $(2\ 3)(4\ 5),$ $(2\ 4)(3\ 5),$ $(2\ 5)(3\ 4),$ $(1\ 3)(4\ 5),$ $(1\ 4)(3\ 5),$ $(1\ 5)(3\ 4),$ $(1\ 2)(4\ 5),$ $(1\ 4)(2\ 5),$ $(1\ 5)(2\ 4),$ $(1\ 2)(3\ 5),$ $(1\ 3)(2\ 5),$ $(1\ 5)(2\ 3),$ $(1\ 2)(3\ 4),$ $(1\ 3)(2\ 4),$ $(1\ 4)(2\ 3)\}$ yaitu

a. $(1)$ konjugasi dengan $(1)$

b. Unsur $(1\ 2\ 3\ 4\ 5),$ $(1\ 2\ 4\ 5\ 3),$ $(1\ 2\ 5\ 3\ 4),$ $(1\ 3\ 2\ 5\ 4),$ $(1\ 3\ 4\ 2\ 5),$ $(1\ 3\ 5\ 4\ 2),$ $(1\ 4\ 2\ 3\ 5),$ $(1\ 4\ 3\ 5\ 2),$ $(1\ 4\ 5\ 2\ 3),$ $(1\ 5\ 2\ 4\ 3),$ $(1\ 5\ 3\ 2\ 4)$ dan $(1\ 5\ 4\ 3\ 2)$ saling berkonjugasi

c. Unsur $(1\ 2\ 3\ 5\ 4),$ $(1\ 2\ 4\ 3\ 5),$ $(1\ 2\ 5\ 4\ 3),$ $(1\ 3\ 2\ 4\ 5),$ $(1\ 3\ 4\ 5\ 2),$ $(1\ 3\ 5\ 2\ 4),$ $(1\ 4\ 2\ 5\ 3),$ $(1\ 4\ 3\ 2\ 5),$ $(1\ 4\ 5\ 3\ 2),$ $(1\ 5\ 2\ 3\ 4),$ $(1\ 5\ 3\ 4\ 2)$ dan $(1\ 5\ 4\ 2\ 3)$ saling berkonjugasi

d. Unsur $(3\ 4\ 5),$ $(3\ 5\ 4),$ $(2\ 4\ 5),$ $(2\ 5\ 4),$ $(2\ 3\ 5),$ $(2\ 5\ 3),$ $(2\ 3\ 4),$ $(2\ 4\ 3),$ $(1\ 4\ 5),$ $(1\ 5\ 4),$ $(1\ 3\ 5),$ $(1\ 5\ 3),$ $(1\ 3\ 4),$ $(1\ 4\ 3),$ $(1\ 2\ 5),$ $(1\ 5\ 2),$ $(1\ 2\ 4),$ $(1\ 4\ 2),$ $(1\ 2\ 3)$ dan $(1\ 3\ 2)$ saling berkonjugasi

e. Unsur $(2\ 3)(4\ 5)$, $(2\ 4)(3\ 5)$, $(2\ 5)(3\ 4)$, $(1\ 3)(4\ 5)$, $(1\ 4)(3\ 5)$, $(1\ 5)(3\ 4)$, $(1\ 2)(4\ 5)$, $(1\ 4)(2\ 5)$, $(1\ 5)(2\ 4)$, $(1\ 2)(3\ 5)$, $(1\ 3)(2\ 5)$, $(1\ 5)(2\ 3)$, $(1\ 2)(3\ 4)$, $(1\ 3)(2\ 4)$ dan $(1\ 4)(2\ 3)$ saling berkonjugasi

Sehingga didapatkan kelas-kelas konjugasi dari subgrup $P_{15}$ antara lain:

1) $[(1)] = \{(1)\}$

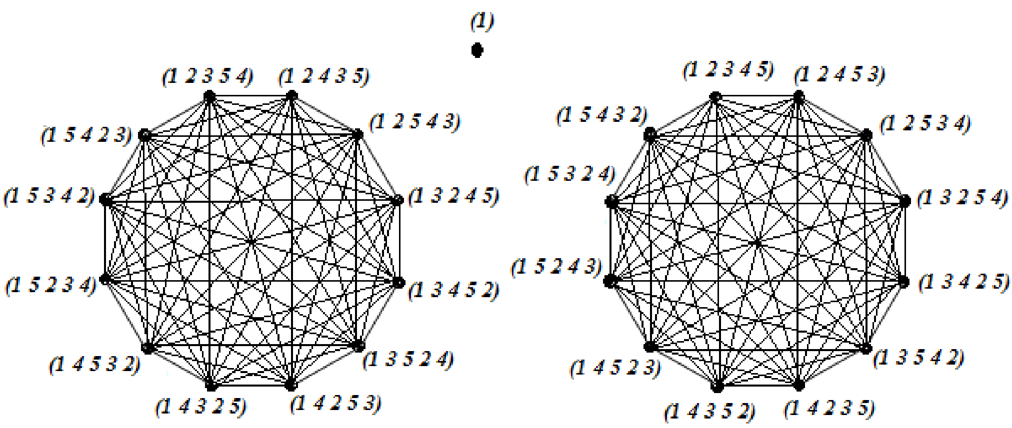
2) $[(1\ 2\ 3\ 4\ 5)] = \{(1\ 2\ 3\ 4\ 5), (1\ 2\ 4\ 5\ 3), (1\ 2\ 5\ 3\ 4), (1\ 3\ 2\ 5\ 4), (1\ 3\ 4\ 2\ 5), (1\ 3\ 5\ 4\ 2), (1\ 4\ 2\ 3\ 5), (1\ 4\ 3\ 5\ 2), (1\ 4\ 5\ 2\ 3), (1\ 5\ 2\ 4\ 3), (1\ 5\ 3\ 2\ 4)(1\ 5\ 4\ 3\ 2)\}$

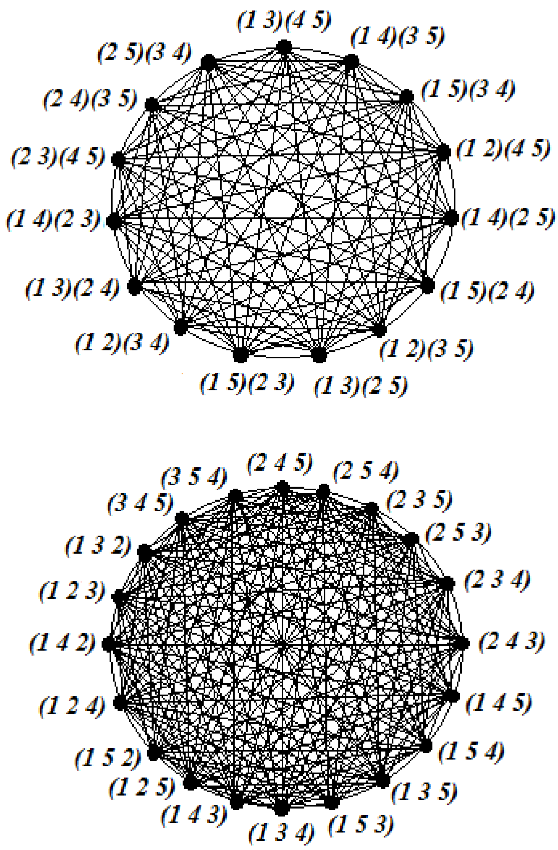
3) $[(1\ 2\ 3\ 5\ 4)] = \{(1\ 2\ 3\ 5\ 4), (1\ 2\ 4\ 3\ 5), (1\ 2\ 5\ 4\ 3), (1\ 3\ 2\ 4\ 5), (1\ 3\ 4\ 5\ 2), (1\ 3\ 5\ 2\ 4), (1\ 4\ 2\ 5\ 3), (1\ 4\ 3\ 2\ 5), (1\ 4\ 5\ 3\ 2), (1\ 5\ 2\ 3\ 4), (1\ 5\ 3\ 4\ 2)(1\ 5\ 4\ 2\ 3)\}$

4) $[(3\ 4\ 5)] = \{(3\ 4\ 5), (3\ 5\ 4), (2\ 4\ 5), (2\ 5\ 4), (2\ 3\ 5), (2\ 5\ 3), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3), (1\ 4\ 5), (1\ 5\ 4), (1\ 3\ 5), (1\ 5\ 3), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3), (1\ 2\ 5), (1\ 5\ 2), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$

5) $[(2\ 3)(4\ 5)] = \{(2\ 3)(4\ 5), (2\ 4)(3\ 5), (2\ 5)(3\ 4), (1\ 3)(4\ 5), (1\ 4)(3\ 5), (1\ 5)(3\ 4), (1\ 2)(4\ 5), (1\ 4)(2\ 5), (1\ 5)(2\ 4), (1\ 2)(3\ 5), (1\ 3)(2\ 5), (1\ 5)(2\ 3), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$

Graf konjugasi dari subgrup $P_{15}$ digambarkan sebagai berikut:






Gambar 3.18 Graf Konjugasi dari Subgrup $P_{15}$

8. Unsur-unsur yang saling berkonjugasi dari subgrup tak sejati di grup simetri-5 $(S_5)$ yaitu:

   a. $(1)$ konjugasi dengan $(1)$

   b. Unsur $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$, $(1\ 2\ 3\ 5\ 4)$, $(1\ 2\ 4\ 3\ 5)$, $(1\ 2\ 4\ 5\ 3)$, $(1\ 2\ 5\ 3\ 4)$, $(1\ 2\ 5\ 4\ 3)$, $(1\ 3\ 2\ 4\ 5)$, $(1\ 3\ 2\ 5\ 4)$, $(1\ 3\ 4\ 2\ 5)$, $(1\ 3\ 4\ 5\ 2)$, $(1\ 3\ 5\ 2\ 4)$, $(1\ 3\ 5\ 4\ 2)$, $(1\ 4\ 2\ 3\ 5)$, $(1\ 4\ 2\ 5\ 3)$, $(1\ 4\ 3\ 2\ 5)$, $(1\ 4\ 3\ 5\ 2)$, $(1\ 4\ 5\ 2\ 3)$, $(1\ 4\ 5\ 3\ 2)$, $(1\ 5\ 2\ 3\ 4)$, $(1\ 5\ 2\ 4\ 3)$, $(1\ 5\ 3\ 2\ 4)$, $(1\ 5\ 3\ 4\ 2)$, $(1\ 5\ 4\ 2\ 3)$ dan $(1\ 5\ 4\ 3\ 2)$ saling berkonjugasi

c. Unsur $(2\ 3\ 4\ 5)$, $(2\ 3\ 5\ 4)$, $(2\ 4\ 3\ 5)$, $(2\ 4\ 5\ 3)$, $(2\ 5\ 3\ 4)$, $(2\ 5\ 4\ 3)$, $(1\ 3\ 4\ 5)$, $(1\ 3\ 5\ 4)$, $(1\ 4\ 3\ 5)$, $(1\ 4\ 5\ 3)$, $(1\ 5\ 3\ 4)$, $(1\ 5\ 4\ 3)$, $(1\ 2\ 4\ 5)$, $(1\ 2\ 5\ 4)$, $(1\ 4\ 2\ 5)$, $(1\ 4\ 5\ 2)$, $(1\ 5\ 2\ 4)$, $(1\ 5\ 4\ 2)$, $(1\ 2\ 3\ 5)$, $(1\ 2\ 5\ 3)$, $(1\ 3\ 2\ 5)$, $(1\ 3\ 5\ 2)$, $(1\ 5\ 2\ 3)$, $(1\ 5\ 3\ 2)$, $(1\ 2\ 3\ 4)$, $(1\ 2\ 4\ 3)$, $(1\ 3\ 2\ 4)$, $(1\ 3\ 4\ 2)$, $(1\ 4\ 2\ 3)$ dan $(1\ 4\ 3\ 2)$ saling berkonjugasi

d. Unsur $(3\ 4\ 5)$, $(3\ 5\ 4)$, $(2\ 4\ 5)$, $(2\ 5\ 4)$, $(2\ 3\ 5)$, $(2\ 5\ 3)$, $(2\ 3\ 4)$, $(2\ 4\ 3)$, $(1\ 4\ 5)$, $(1\ 5\ 4)$, $(1\ 3\ 5)$, $(1\ 5\ 3)$, $(1\ 3\ 4)$, $(1\ 4\ 3)$, $(1\ 2\ 5)$, $(1\ 5\ 2)$, $(1\ 2\ 4)$, $(1\ 4\ 2)$, $(1\ 2\ 3)$ dan $(1\ 3\ 2)$ saling berkonjugasi

e. Unsur $(4\ 5)$, $(3\ 5)$, $(3\ 4)$, $(2\ 5)$, $(2\ 4)$, $(2\ 3)$, $(1\ 5)$, $(1\ 4)$, $(1\ 3)$ dan $(1\ 2)$ saling berkonjugasi

f. Unsur $(1\ 2)(3\ 4\ 5)$, $(1\ 2)(3\ 5\ 4)$, $(1\ 3)(2\ 4\ 5)$, $(1\ 3)(2\ 5\ 4)$, $(1\ 4)(2\ 3\ 5)$, $(1\ 4)(2\ 5\ 3)$, $(1\ 5)(2\ 3\ 4)$, $(1\ 5)(2\ 4\ 3)$, $(2\ 3)(1\ 4\ 5)$, $(2\ 3)(1\ 5\ 4)$, $(2\ 4)(1\ 3\ 5)$, $(2\ 4)(1\ 5\ 3)$, $(2\ 5)(1\ 3\ 4)$, $(2\ 5)(1\ 4\ 3)$, $(3\ 4)(1\ 2\ 5)$, $(3\ 4)(1\ 5\ 2)$, $(3\ 5)(1\ 2\ 4)$, $(3\ 5)(1\ 4\ 2)$, $(4\ 5)(1\ 2\ 3)$ dan $(4\ 5)(1\ 3\ 2)$ saling berkonjugasi

g. Unsur $(2\ 3)(4\ 5)$, $(2\ 4)(3\ 5)$, $(2\ 5)(3\ 4)$, $(1\ 3)(4\ 5)$, $(1\ 4)(3\ 5)$, $(1\ 5)(3\ 4)$, $(1\ 2)(4\ 5)$, $(1\ 4)(2\ 5)$, $(1\ 5)(2\ 4)$, $(1\ 2)(3\ 5)$, $(1\ 3)(2\ 5)$, $(1\ 5)(2\ 3)$, $(1\ 2)(3\ 4)$, $(1\ 3)(2\ 4)$ dan $(1\ 4)(2\ 3)$ saling berkonjugasi

Sehingga didapatkan kelas-kelas konjugasi dari $S_5$ antara lain:

1) $[(1)] = \{(1)\}$

2) $[(1\ 2\ 3\ 4\ 5)] = \{(1\ 2\ 3\ 4\ 5), (1\ 2\ 3\ 5\ 4), (1\ 2\ 4\ 3\ 5), (1\ 2\ 4\ 5\ 3),$
$(1\ 2\ 5\ 3\ 4), (1\ 2\ 5\ 4\ 3), (1\ 3\ 2\ 4\ 5), (1\ 3\ 2\ 5\ 4),$
$(1\ 3\ 4\ 2\ 5), (1\ 3\ 4\ 5\ 2), (1\ 3\ 5\ 2\ 4), (1\ 3\ 5\ 4\ 2),$
$(1\ 4\ 2\ 3\ 5), (1\ 4\ 2\ 5\ 3), (1\ 4\ 3\ 2\ 5), (1\ 4\ 3\ 5\ 2),$
$(1\ 4\ 5\ 2\ 3), (1\ 4\ 5\ 3\ 2), (1\ 5\ 2\ 3\ 4), (1\ 5\ 2\ 4\ 3),$
$(1\ 5\ 3\ 2\ 4), (1\ 5\ 3\ 4\ 2), (1\ 5\ 4\ 2\ 3), (1\ 5\ 4\ 3\ 2)\}$

3) $[(2\ 3\ 4\ 5)] = \{(2\ 3\ 4\ 5), (2\ 3\ 5\ 4), (2\ 4\ 3\ 5), (2\ 4\ 5\ 3), (2\ 5\ 3\ 4),$
$(2\ 5\ 4\ 3), (1\ 3\ 4\ 5), (1\ 3\ 5\ 4), (1\ 4\ 3\ 5), (1\ 4\ 5\ 3),$
$(1\ 5\ 3\ 4), (1\ 5\ 4\ 3), (1\ 2\ 4\ 5), (1\ 2\ 5\ 4), (1\ 4\ 2\ 5),$
$(1\ 4\ 5\ 2), (1\ 5\ 2\ 4), (1\ 5\ 4\ 2), (1\ 2\ 3\ 5), (1\ 2\ 5\ 3),$
$(1\ 3\ 2\ 5), (1\ 3\ 5\ 2), (1\ 5\ 2\ 3), (1\ 5\ 3\ 2), (1\ 2\ 3\ 4),$
$(1\ 2\ 4\ 3), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 3\ 4\ 2), (1\ 4\ 2\ 3), (1\ 4\ 3\ 2)\}$

4) $[(3\ 4\ 5)] = \{(3\ 4\ 5), (3\ 5\ 4), (2\ 4\ 5), (2\ 5\ 4), (2\ 3\ 5), (2\ 5\ 3),$
$(2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3), (1\ 4\ 5), (1\ 5\ 4), (1\ 3\ 5), (1\ 5\ 3),$
$(1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3), (1\ 2\ 5), (1\ 5\ 2), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2),$
$(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$

5) $[(4\ 5)] = \{(4\ 5), (3\ 5), (3\ 4), (2\ 5), (2\ 4), (2\ 3), (1\ 5), (1\ 4), (1\ 3),$
$(1\ 2)\}$

6) $[(1\ 2)(3\ 4\ 5)] = \{(1\ 2)(3\ 4\ 5), (1\ 2)(3\ 5\ 4), (1\ 3)(2\ 4\ 5),$

$(1\ \ 3)(2\ \ 5\ \ 4)$, $(1\ \ 4)(2\ \ 3\ \ 5)$, $(1\ \ 4)(2\ \ 5\ \ 3)$,

$(1\ \ 5)(2\ \ 3\ \ 4)$, $(1\ \ 5)(2\ \ 4\ \ 3)$, $(2\ \ 3)(1\ \ 4\ \ 5)$,

$(2\ \ 3)(1\ \ 5\ \ 4)$, $(2\ \ 4)(1\ \ 3\ \ 5)$, $(2\ \ 4)(1\ \ 5\ \ 3)$,

$(2\ \ 5)(1\ \ 3\ \ 4)$, $(2\ \ 5)(1\ \ 4\ \ 3)$, $(3\ \ 4)(1\ \ 2\ \ 5)$,

$(3\ \ 4)(1\ \ 5\ \ 2)$, $(3\ \ 5)(1\ \ 2\ \ 4)$, $(3\ \ 5)(1\ \ 4\ \ 2)$,

$(4\ \ 5)(1\ \ 2\ \ 3), (4\ \ 5)(1\ \ 3\ \ 2)\}$

7) $[(2\ \ 3)(4\ \ 5)] = \{(2\ \ 3)(4\ \ 5),\ (2\ \ 4)(3\ \ 5),\ (2\ \ 5)(3\ \ 4),\ (1\ \ 3)(4\ \ 5),$

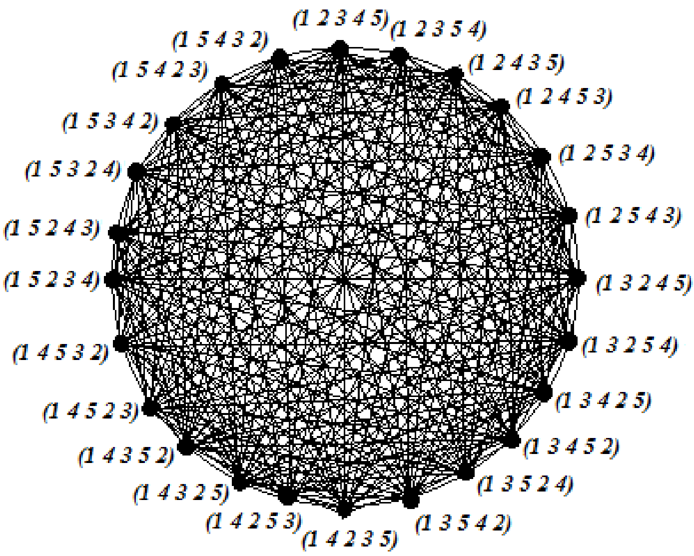
$(1\ \ 4)(3\ \ 5),\ (1\ \ 5)(3\ \ 4),\ (1\ \ 2)(4\ \ 5),\ (1\ \ 4)(2\ \ 5),$

$(1\ \ 5)(2\ \ 4),\ (1\ \ 2)(3\ \ 5),\ (1\ \ 3)(2\ \ 5),\ (1\ \ 5)(2\ \ 3),$

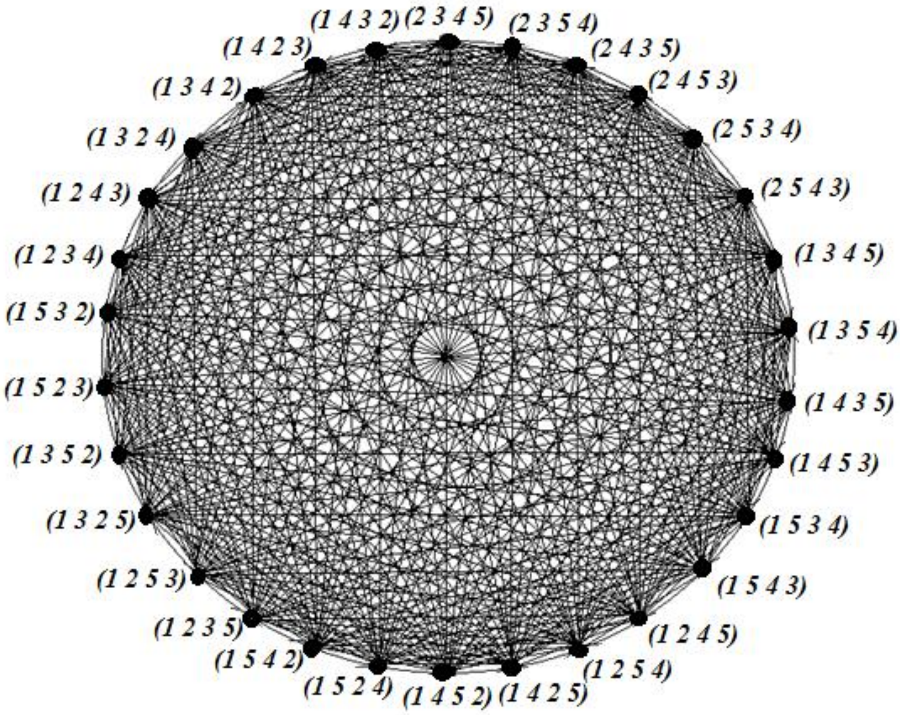
$(1\ \ 2)(3\ \ 4), (1\ \ 3)(2\ \ 4), (1\ \ 4)(2\ \ 3)\}$

Graf konjugasi dari $S_5$ digambarkan sebagai berikut:

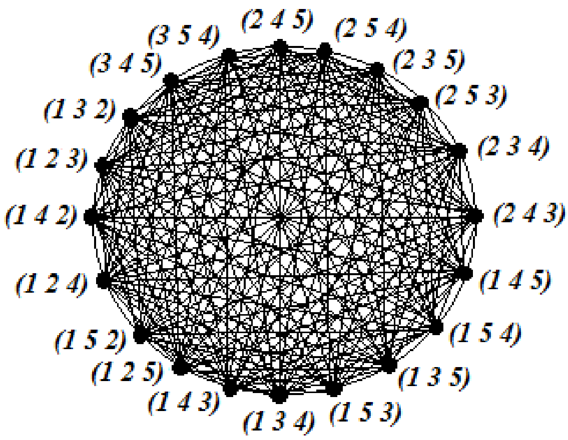

Gambar 3.19 Graf Konjugasi dari Kelas Konjugasi $[(\mathbf{1})]$ di $\boldsymbol{S_5}$



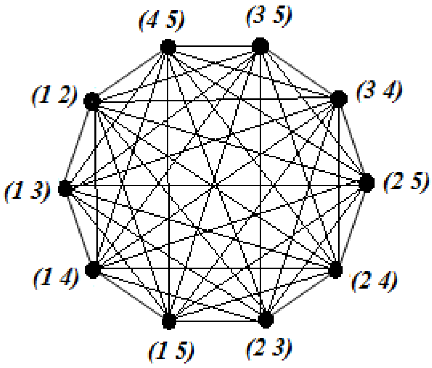

Gambar 3.20 Graf Konjugasi dari Kelas Konjugasi $[(\mathbf{1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5})]$ di $\boldsymbol{S_5}$



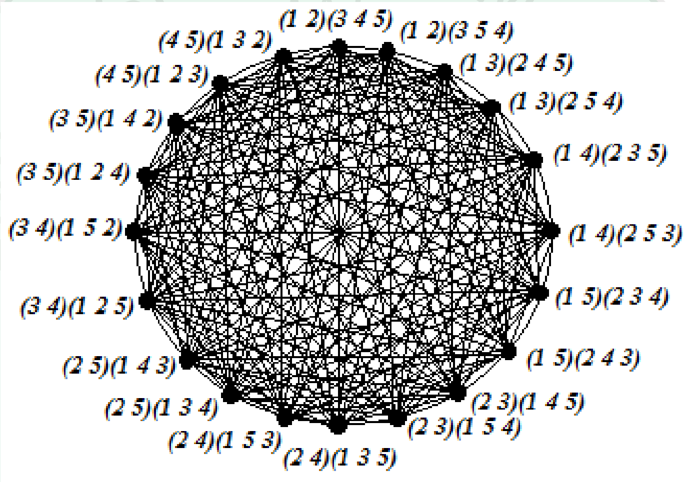

Gambar 3. 21 Graf Konjugasi dari Kelas Konjugasi $[(2\ \ 3\ \ 4\ \ 5)]$ di $S_5$



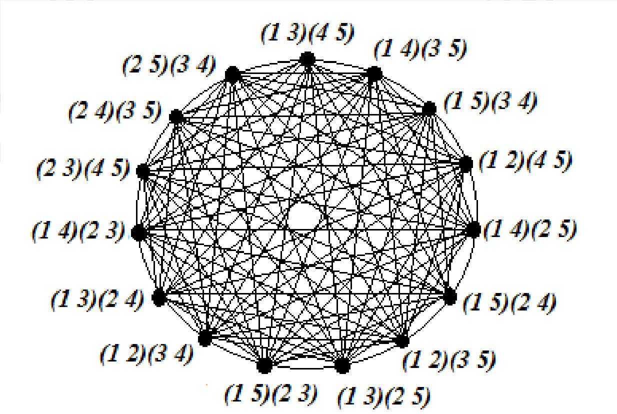

Gambar 3.22 Graf Konjugasi dari Kelas Konjugasi $[(3\ \ 4\ \ 5)]$ di $S_5$




Gambar 3.23 Graf Konjugasi dari Kelas Konjugasi $[(\mathbf{4}\ \ \mathbf{5})]$ di $S_5$




Gambar 3.24 Graf Konjugasi dari Kelas Konjugasi $[(\mathbf{1}\ \ \mathbf{2})(\mathbf{3}\ \ \mathbf{4}\ \ \mathbf{5})]$ di $S_5$




Gambar 3. 25Graf Konjugasi dari Kelas Konjugasi $[(\mathbf{2}\ \ \mathbf{3})(\mathbf{4}\ \ \mathbf{5})]$ di $S_5$

### 3.4 Karakteristik Graf Konjugasi dari Subgrup di Grup Simetri-$n$

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan didapatkan karakteristik graf konjugasi dari subgrup non komutatif di grup simetri diperoleh dari bentuk graf konjugasi pada subgrup tersebut yang dipaparkan pada Tabel 3.1.

Tabel 3. 1 Karakteristik Graf Konjugasi dari Subgrup di Grup Simetri-$n$

| Subgrup tidak Komutatif di Grup Simetri-$n$ | Banyak Unsur dalam Subgrup | Syarat Subgrup | Tipe Sikel dalam Satu Kelas Konjugasi | Banyak Unsur Sikel | Bentuk Graf Konjugasi |
|---|---|---|---|---|---|
| Subgrup di grup simetri-3 | 6 | Semua unsur grup simetri-3 | $(\cdot)(\cdot)(\cdot)$ | 1 | Graf Trivial |
| | | | $(\cdot)(\cdot\ \cdot)$ | 3 | Graf Komplit-3 |
| | | | $(\cdot\ \cdot\ \cdot)$ | 2 | Graf Komplit-2 |
| Subgrup di grup simetri-4 dengan $\Omega = \{a, b, c, d\}$ | 6 | Unsur yang berwarna biru adalah unsur yang sama pada himpunan $\Omega$ | $(\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot)$ | 1 | Graf Trivial |
| | | | $(\cdot)(\cdot)(\cdot\ \cdot)$ | 3 | Graf Komplit-3 |
| | | | $(\cdot)(\cdot\ \cdot\ \cdot)$ | 2 | Graf Komplit-2 |
| | 8 | dengan $a \neq b \neq c \neq d$ | $(a)(b)(c)(d)$ | 1 | Graf Trivial |
| | | | $(a)(b)(c\ \ d)$<br>$(c)(d)(a\ \ b)$ | 2 | Graf Komplit-2 |
| | | | $(a\ \ c\ \ b\ \ d)$<br>$(a\ \ d\ \ b\ \ c)$ | 2 | Graf Komplit-2 |
| | | | $(a\ \ b)(c\ \ d)$<br>$(a\ \ c)(b\ \ d)$<br>$(a\ \ d)(b\ \ c)$ | 3 | Graf Komplit-2 dan Graf Trivial |
| | 12 | Semua unsur dengan tipe tersebut | $(\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot)$ | 1 | Graf Trivial |
| | | | $(\cdot)(\cdot\ \cdot\ \cdot)$ | 8 | Graf Komplit-4 (2 komponen) |
| | | | $(\cdot\ \cdot)(\cdot\ \cdot)$ | 3 | Graf Komplit-3 |
| | 24 | Semua unsur grup simetri-4 | $(\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot)$ | 1 | Graf Trivial |
| | | | $(\cdot)(\cdot)(\cdot\ \cdot)$ | 6 | Graf Komplit-6 |
| | | | $(\cdot)(\cdot\ \cdot\ \cdot)$ | 8 | Graf Komplit-8 |
| | | | $(\cdot\ \cdot)(\cdot\ \cdot)$ | 3 | Graf Komplit-3 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | $(\ .\ .\ .\ .\ )$ | 6 | Graf Komplit-6 |

Lanjutan 1 Tabel 3.1

| Subgrup tidak Komutatif di Grup Simetri-$n$ | Banyak Unsur dalam Subgrup | Syarat Subgrup | Tipe Sikel dalam Satu kelas Konjugasi | Banyak Unsur Sikel | Bentuk Graf Konjugasi |
|---|---|---|---|---|---|
| Subgrup di Grup Simetri-5 dengan $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$ | 6 | Unsur yang berwarna biru adalah unsur yang sama pada himpunan $\Omega$ | $(\ .\ )(\ .\ )(\ .\ )(\ .\ )(\ .\ )$ | 1 | Graf Trivial |
| | | | $(\ .\ )(\ .\ )(\ .\ )(\ .\ .\ )$ | 3 | Graf Komplit-3 |
| | | | $(\ .\ )(\ .\ )(\ .\ .\ .\ )$ | 2 | Graf Komplit-2 |
| | 8 | dengan $a \neq b \neq c \neq d \neq e$ | $(a)(b)(c)(d)(e)$ | 1 | Graf Trivial |
| | | | $(a)(b)(c)(d\ e)$<br>$(a)(d)(e)(b\ c)$ | 2 | Graf Komplit-2 |
| | | | $(a)(b\ e\ c\ d)$<br>$(a)(b\ d\ c\ e)$ | 2 | Graf Komplit-2 |
| | | | $(a)(b\ c)(d\ e)$<br>$(a)(b\ d)(c\ e)$<br>$(a)(b\ e)(c\ d)$ | 3 | Graf Komplit-2 dan Graf Trivial |
| | 10 | dengan $a \neq b \neq c \neq d \neq e$ | $(a)(b)(c)(d)(e)$ | 1 | Graf Trivial |
| | | | $(a\ b\ c\ d\ e)$<br>$(a\ c\ e\ b\ d)$<br>$(a\ d\ b\ e\ c)$<br>$(a\ e\ d\ c\ b)$ | 4 | Graf Komplit-2 (2 komponen) |
| | | | $(a)(b\ e)(c\ d)$<br>$(b)(a\ c)(d\ e)$<br>$(c)(a\ e)(b\ d)$<br>$(d)(a\ b)(c\ e)$<br>$(e)(a\ d)(b\ c)$ | 5 | Graf Komplit-5 |
| | 12 | dengan $a \neq b \neq c \neq d \neq e$ | $(a)(b)(c)(d)(e)$ | 1 | Graf Trivial |
| | | | $(c)(d)(a\ b\ e)$<br>$(c)(d)(a\ e\ b)$ | 2 | Graf Komplit-2 |
| | | | $(a)(b\ e)(c\ d)$<br>$(b)(a\ e)(c\ d)$<br>$(e)(a\ b)(c\ d)$ | 3 | Graf Komplit-3 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | $(c)(d)(e)(a\ \ b)$<br>$(b)(c)(d)(a\ \ e)$<br>$(a)(c)(d)(b\ \ e)$<br>$(a)(b)(c)(c\ \ d)$ | 4 | Graf Komplit-3 dan Graf Trivial |
| | | | $(c\ \ d)(a\ \ b\ \ e)$<br>$(c\ \ d)(a\ \ e\ \ b)$ | 2 | Graf Komplit-2 |

Lanjutan 2 Tabel 3.1

| Subgrup tidak Komutatif di Grup Simetri-$n$ | Banyak Unsur dalam Subgrup | Syarat Subgrup | Tipe Sikel dalam Satu kelas Konjugasi | Banyak Unsur Sikel | Bentuk Graf Konjugasi |
|---|---|---|---|---|---|
| Subgrup di Grup Simetri-5 dengan $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$ | 20 | dengan $a \neq b \neq c \neq d \neq e$ | $(a)(b)(c)(d)(e)$ | 1 | Graf Trivial |
| | | | $(a)(b\ \ c\ \ d\ \ e)$<br>$(a)(b\ \ e\ \ d\ \ c)$<br>$(b)(a\ \ c\ \ e\ \ d)$<br>$(b)(a\ \ d\ \ e\ \ c)$<br>$(c)(a\ \ d\ \ b\ \ e)$<br>$(c)(a\ \ e\ \ b\ \ d)$<br>$(d)(a\ \ b\ \ c\ \ e)$<br>$(d)(a\ \ e\ \ c\ \ b)$<br>$(e)(a\ \ b\ \ d\ \ c)$<br>$(e)(a\ \ c\ \ d\ \ b)$ | 10 | Graf Komplit-5 (2 komponen) |
| | | | $(a\ \ c\ \ b\ \ d\ \ e)$<br>$(a\ \ d\ \ c\ \ e\ \ b)$<br>$(a\ \ e\ \ d\ \ b\ \ c)$<br>$(a\ \ b\ \ e\ \ c\ \ d)$ | 4 | Graf Komplit-4 |
| | | | $(a)(b\ \ d)(c\ \ e)$<br>$(b)(a\ \ e)(c\ \ d)$<br>$(c)(a\ \ b)(d\ \ e)$<br>$(d)(a\ \ c)(b\ \ e)$<br>$(e)(a\ \ d)(b\ \ c)$ | 5 | Graf Komplit-5 |
| | 24 | Unsur yang berwarna biru adalah unsur yang sama pada himpunan | $(\ .\ )(\ .\ )(\ .\ )(\ .\ )(\ .\ )$ | 1 | Graf Trivial |
| | | | $(\ .\ )(\ .\ )(\ .\ )(\ .\ \ .\ )$ | 6 | Graf Komplit-6 |
| | | | $(\ .\ )(\ .\ )(\ .\ \ .\ \ .\ )$ | 8 | Graf Komplit-8 |
| | | | $(\ .\ )(\ .\ \ .\ )(\ .\ \ .\ )$ | 3 | Graf |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Ω | | | Komplit-3 |
| | | | ( .)( . . . . ) | 6 | Graf Komplit-6 |



Lanjutan 3 Tabel 3.1

| Subgrup tidak Komutatif di Grup Simetri-$n$ | Banyak Unsur dalam Subgrup | Syarat Subgrup | Tipe Sikel dalam Satu kelas Konjugasi | Banyak Unsur Sikel | Bentuk Graf Konjugasi |
|---|---|---|---|---|---|
| Subgrup di Grup Simetri-5 | 60 | Semua unsur dengan tipe tersebut | ( .)( .)( .)( .)( .) | 1 | Graf Trivial |
| | | | ( . . . . . ) | 24 | Graf Komplit-12 (2 komponen) |
| | | | ( .)( .)( . . . ) | 20 | Graf Komplit-20 |
| | | | ( .)( . .)( . .) | 15 | Graf Komplit-15 |
| | 120 | Semua unsur grup simetri-4 | ( .)( .)( .)( .)( .) | 1 | Graf Trivial |
| | | | ( . . . . . ) | 24 | Graf Komplit-24 |
| | | | ( .)( . . . . ) | 30 | Graf Komplit-30 |
| | | | ( .)( .)( . . . ) | 20 | Graf Komplit-20 |
| | | | ( .)( .)( .)( . .) | 10 | Graf Komplit-10 |
| | | | ( . .)( . . . ) | 20 | Graf Komplit-20 |
| | | | ( .)( . .)( . .) | 15 | Graf Komplit-15 |

**Teorema 1**

Pada grup simetri-$n$, unsur-unsur yang memiliki tipe sikel sama adalah saling berkonjugasi sehingga berada pada satu kelas konjugasi serta membentuk graf komplit.

Bukti:

Akan ditunjukkan terlebih dahulu bahwa unsur yang memiliki tipe sikel sama adalah saling berkonjugasi.

$(\leftarrow)$ Misalkan $a$ dan $b$ saling berkonjugasi, maka akan dipilih $c$ yang memenuhi $b = c \circ a \circ c^{-1}$.

Misal tipe sikel dari $a$ adalah

$(x_1 \dots x_n)(y_1 \dots y_m) \dots$

Tinjau permutasi $\varphi$ yang mempunyai tipe sikel sama dengan tipe sikel dari $a$. Dalam hal ini permutasi $\varphi$ diperoleh dengan mengganti masing-masing $i$ dalam dekomposisi dari sikel $a$ adalah $c(i)$, yaitu

$\varphi = \big(c(x_1) \dots c(x_n)\big)\big(c(y_1) \dots c(y_m)\big) \dots$

didapatkan

$b\big(c(x_i)\big) = c \circ a \circ c^{-1}\big(c(x_i)\big) = c \circ a(x_i) = c(x_{i+1}) = \varphi(c(x_i))$

Sehingga $b\big(c(x_i)\big) = \varphi(c(x_i))$, dengan cara serupa didapatkan $b\big(c(y_i)\big) = \varphi(c(y_i))$. Terlihat bahwa $b = \varphi$. Jadi dapat disimpulkan bahwa unsur $b$ mempunyai tipe sikel sama dengan $a$.

$(\rightarrow)$ Misal diberikan dua permutasi dengan tipe sikel sama yaitu:

$a = (x_1 \dots x_n)(y_1 \dots y_m) \dots$ dan $b = (u_1 \dots u_n)(v_1 \dots v_m) \dots$

Didefinisikan suatu permutasi $c$ oleh

$c(x_i) = u_i, c(y_i) = v_i, \ldots$

Misalkan $\varphi = c \circ a \circ c^{-1}$ konjugasi dengan $a$. Didapatkan

$\varphi(u_i) = c \circ a \circ c^{-1}(u_i) = c \circ a(x_i) = c(x_{i+1}) = u_{i+1} = b(u_i)$

Sehingga $\varphi(u_i) = b(u_i)$, dengan cara serupa didapatkan $\varphi(v_i) = b(v_i)$ dan seterusnya. Terlihat bahwa $\varphi = b$. Jadi unsur $b$ mempunyai tipe sikel sama dengan $a$.

Karena setiap unsur yang memiliki tipe sikel sama adalah saling berkonjugasi, maka pasti unsur-unsur tersebut berada pada satu kelas konjugasi. Diketahui bahwa setiap dua unsur dalam satu kelas konjugasi adalah saling berkonjugasi sehingga pada graf konjugasinya setiap dua titik saling terhubung langsung. Hal ini mengakibatkan graf konjugasinya membentuk graf komplit.

**Teorema 2**

Graf konjugasi dari subgrup-subgup tidak komutatif di grup simetri-$n$ merupakan kumpulan graf komplit dengan $t$ titik dimana $t$ merupakan faktor-faktor pembagi dari $n!$ dengan $t \neq n!$.

Bukti:

Misal $S_n$ merupakan grup simetri-$n$ dan $H$ merupakan subgrup dari $S_n$, order dari $S_n$ adalah $n!$ dan order dari $H$ adalah faktor dari order $S_n$. Jika $t$ disimbolkan sebagai order dari $H$ maka $t$ merupakan faktor dari $n!$ dan $t \neq n!$ karena $H$ subgrup sejati dari $S_n$. Sebab $H$ adalah subgrup dari grup simetri-$n$ maka anggota subgrup $H$ akan membentuk kelas-kelas konjugasi. Masing-masing kelas konjugasi tersebut membentuk graf komplit, karena dalam satu kelas konjugasi unsur-unsurnya saling terhubung langsung. Jadi graf konjugasi dari $H$ adalah kumpulan graf-graf komplit.

### 3.5 Kajian Konjugasi pada Grup dalam Islam

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan pada konjugasi pada subgrup didapatkan bahwa setiap unsur konjugasi dengan dirinya sendiri. Karakteristik konjugasi pada subgrup tersebut jika direpresentasikan pada akhlak atau perbuatan manusia, maka segala bentuk perbuatan manusia akan kembali pada dirinya sendiri. Hal ini berarti bahwa, jika manusia tersebut berakhlak baik maka ia akan mendapatkan pahala dan jika manusia tersebut berakhlak tidak baik maka ia akan mendapatkan dosa. Seperti yang telah disebutkan dalam QS. al-Zalzalah/99:7-8:

فَمَن يَعۡمَلۡ مِثۡقَالَ ذَرَّةٍ خَيۡرٗا يَرَهُۥ ۝٧ وَمَن يَعۡمَلۡ مِثۡقَالَ ذَرَّةٖ شَرّٗا يَرَهُۥ ۝٨

*Barangsiapa yang mengerjakan kebaikan seberat dzarrahpun, niscaya dia akan melihat (balasan)nya. Dan barangsiapa yang mengerjakan kejahatan sebesar dzarrahpun, niscaya dia akan melihat (balasan)nya pula (QS. al-Zalzalah/99:7-8).*

Ayat di atas menjelaskan bahwa siapa saja yang mengerjakan perbuatan baik dan buruk (sewaktu di dunia) walaupun seberat dzarrah, maka dia pasti akan melihat (balasannya). Yang dimaksud dengan dzarrah dalam ayat ini adalah seekor semut kecil yang sudah dimaklumi. Jadi, dzarrah itu bukanlah atom sebagaimana yang dikatakan orang-orang sekarang, karena pada saat itu (saat al-Quran diturunkan) atom belum dikenal. Allah Swt. tidak berfirman pada satu kaum kecuali dengan bahasa yang mereka pahami. Penyebutan dzarrah di sini sebagai ungkapan bagi sesuatu yang paling kecil. Jadi suatu amalan tidak akan disia-siakan walaupun sebesar semut atau lebih kecil. Manusia pasti akan melihat dan mengetahui setiap amalnya di hari kiamat nanti (Muhammad, 2003:526-530)

Kebaikan merupakan balasan dari kebaikan yang dilakukan sebelumnya, demikian pula keburukan yang dilakukan manusia itu merupakan balasan dari keburukan sebelumnya, berarti dapat dikatakan bahwa bencana yang menimpanya adalah akibat dosa yang dilakukan sebelumnya. Berdasarkan asumsi tersebut, dapat dikatakan bahwa dosa yang dilakukan manusia itu berasal dari dirinya, meskipun ia ditakdirkan atasnya. Pasalnya, apabila balasan yang merupakan "akibat" itu berasal dari dirinya, tentu "amal" yang menjadi bagian dari balasan tersebut berasal dari dirinya pula. Karena itu, dalam khutbahnya nabi Saw. selalu berdoa, "Kami berlindung kepada Allah dari kejahatan diri kami dan dari keburukan amal kami" (Taymiyyah, 2005:53).

Berdasarkan hal tersebut, maka dapat disimpulkan bahwa segala bentuk perbuatan manusia akan kembali kepada dirinya sendiri. Setiap kebaikan maupun keburukan yang telah dilakukan oleh manusia meskipun sangat kecil maka Allah akan memberikan balasan atas perbuatannya tersebut.

# BAB IV

# PENUTUP

## 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan pada graf konjugasi dari subgrup di grup simetri-$n$ didapatkan bahwa karakteristik graf konjugasi dari subgrup tidak komutatif di grup simetri-$n$ yaitu pada grup simetri-$n$ (subgrup tak sejati dari grup simetri-$n$) unsur-unsur yang memiliki tipe sikel sama adalah saling berkonjugasi sehingga berada pada satu kelas konjugasi serta membentuk graf komplit. Sedangkan graf konjugasi dari subgrup-subgup tidak komutatif (selain subgrup tak sejati) di grup simetri-$n$ merupakan kumpulan graf komplit dengan $t$ titik dimana $t$ merupakan faktor-faktor pembagi dari $n!$ dengan $t \neq n!$.

## 4.2 Saran

Penelitian ini membahas tentang penentuan karakteristik graf konjugasi dari subgrup di grup simetri. Pada pelitian selanjutnya penulis memberikan saran untuk menentukan pola umum graf konjugasi dari subgrup di grup simetri serta menentukan pola umum dari subgrup di grup simetri.

## DAFTAR PUSTAKA


Abdullah, M.Y. 2006. *Studi Akhlak dalam Perspektif al-Quran*. Jakarta: Amzah.

Abdusysyakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN-Malang Press.

Asmaran, A. 2002. *Pengantar Studi Akhlak*. Jakarta: PT Raja Grafindo Persada.

Budayasa, I.K. 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Press.

Chartrand, G. dan Lesniak, L. 1996. *Graphs and Digraphs Third Edition*. London: Chapman & Hall/CRC.

Dummit, D.S dan Foote, R.M. 1991. *Abstarct Algebra Third Edition*. New York: Prentice- Hall International, Inc.

Gross, J.L dan Yellen, J. 2006. *Graph Theory and its Applications Second Edition*. New York: Chapman & Hall/CRC.

Hartanto, R. 2013. *Graf Konjugasi dari Grup Dihedral-2n* $D_{2n}$ *dengan* $n \in \mathbb{Z}^+$ *dan* $n \geq 3$. Tugas Akhir / Skripsi. Tidak Diterbitkan. Malang. Jurusan Matematika Fakultas SAINTEK UIN MALIKI Malang.

Hasan, M.I. 2002. *Pokok-pokok Metodologi Penelitian dan Aplikasinya*. Bogor: Ghalia Indonesia.

Kandasamy, W.B. dan Smarandache, F. 2009. *Grups As Graphs*. Romania: Editura Cuart.

Muhammad, S. 2003. *Tafsir Juz ‘Amma*. Solo: At-Tibyan

Raisinghania, M.D. dan Aggarwal, R.S. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: S. Chand & Company LTD.

Syukur, A. 2010. *Studi Akhlak*. Semarang: Walisongo Press.

Taymiyyah, I. 2005. *Baik & Buruk*. Jakarta: PT Serambi Ilmu Semesta.

## RIWAYAT HIDUP

Irnawati, lahir di kabupaten Tuban pada tanggal 08 September 1993, biasa dipanggil irna dan dia merupakan anak pertama dari Bapak Sukur dan Ibu Warniti.

Pendidikan dasar ditempuh di SDN Nguluhan lulus tahun 2005, kemudian melanjutkan pendidikan menengah pertama di SMPN 1 Montong lulus tahun 2008, setelah itu melanjutkan pendidikan menengah atas di SMAN 1 Singgahan lulus tahun 2011. Pada tahun 2012 menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil Jurusan Matematika.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

## BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Irnawati
NIM : 12610032
Fakultas/Jurusan: Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Graf Konjugasi dari Subgrup di Grup Simetri
Pembimbing I : H. Wahyu H. Irawan, M.Pd.
Pembimbing II : Fachrur Rozi, M.Si.

| No | Tanggal | Hal | Tanda Tangan |
|---|---|---|---|
| 1. | 08 Desember 2015 | Konsultasi Bab I & Bab II | 1. |
| 2. | 04 Januari 2016 | ACC Bab I & Bab II | 2. |
| 3. | 05 Januari 2016 | Konsultasi Kajian Keagamaan | 3. |
| 4. | 08 Januari 2016 | Revisi Kajian Keagamaan | 4. |
| 5. | 13 Januari 2016 | ACC Bab I Kajian Keagamaan | 5. |
| 6. | 14 Januari 2016 | Konsultasi Bab III | 6. |
| 7. | 03 Februari 2016 | Revisi Bab III | 7. |
| 8. | 16 Februari 2016 | Revisi Bab III | 8. |
| 9. | 07 Maret 2016 | Revisi Bab III | 9. |
| 10. | 09 Maret 2016 | Konsultasi Bab IV | 10. |
| 11. | 24 Maret 2016 | Revisi Bab IV | 11. |
| 12. | 01 April 2016 | Konsultasi Kajian Keagamaan | 12. |
| 13. | 04 April 2016 | Konsultasi Abstrak | 13. |
| 14. | 08 April 2016 | ACC Kajian Keagamaan | 14. |
| 15. | 12 April 2016 | ACC Keseluruhan | 15. |

Malang, 17 Juni 2016
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001