DIMENSI METRIK GRAF *COMMUTING* DAN *NON COMMUTING* DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

OLEH
MOH. AFIFUDDIN
NIM. 11610070

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016

DIMENSI METRIK GRAF *COMMUTING* DAN *NON COMMUTING* DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh
Moh. Afifuddin
NIM. 11610070

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016

DIMENSI METRIK GRAF *COMMUTING* DAN *NON COMMUTING* DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh
Moh. Afifuddin
NIM. 11610070

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 16 Mei 2016

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr. Abdussakir, M.Pd	Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001	NIP. 19630502 198703 1 005

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
FAKULTAS SAINTEK JURUSAN MATEMATIKA

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

DIMENSI METRIK GRAF *COMMUTING* DAN *NON COMMUTING* DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh
Moh. Afifuddin
NIM. 11610070

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 30 Mei 2016

Penguji Utama	:	Evawati Alisah, M.Pd	....
Ketua Penguji	:	H. Wahyu H. Irawan, M.Pd	....
Sekretaris Penguji	:	Dr. Abdussakir, M.Pd	....
Anggota Penguji	:	Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Moh. Afifuddin
NIM	:	11610070
Jurusan	:	Matematika
Fakultas	:	Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	:	Dimensi Metrik Graf *Commuting* dan *Non Commuting* dari Grup Dihedral

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 09 Juni 2016
Yang membuat pernyataan,

Moh. Afifuddin
NIM. 11610070

MOTO

وَلۡيَخۡشَ ٱلَّذِينَ لَوۡ تَرَكُواْ مِنۡ خَلۡفِهِمۡ ذُرِّيَّةٗ ضِعَٰفًا خَافُواْ عَلَيۡهِمۡ فَلۡيَتَّقُواْ ٱللَّهَ وَلۡيَقُولُواْ قَوۡلٗا سَدِيدًا

"Dan hendaklah takut kepada Allah orang-orang yang seandainya meninggalkan di belakang mereka anak-anak yang lemah, yang mereka khawatir terhadap (kesejahteraan) mereka. Oleh sebab itu hendaklah mereka bertakwa kepada Allah dan hendaklah mereka mengucapkan perkataan yang benar" (QS. an-Nisaa: 09).

PERSEMBAHAN

Karya kecil ini penulis persembahkan untuk orang-orang yang turut mewarnai hidup penulis.

Kedua Orang Tua Penulis.

***Rama* Achmad Zarnuji dan Ibu Arifatun.**

Yang telah mencurahkan kasing sayangnya tanpa mengenal batas waktu. Membimbing, mendo'akan, memotivasi, serta menginspirasi penulis untuk menjadi manusia yang lebih baik.

Adik-adik Penulis.

Ach. Taqiyuddin, alm. Muhyiddin, Hasbiyallah dan Mutawally.

Terima kasih atas segala kasih sayang, motivasi, dan dukungan yang telah diberikan.

Seluruh Keluarga Besar Penulis.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah Swt. yang telah melimpahkan rahmat, taufiq, hidayah, serta inayah-Nya kepada penulis sehingga penulisan skripsi ini dapat diselesaikan. Shalawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada Nabi Muhammad Saw. yang telah membimbing manusia dari jalan kegelapan menuju jalan yang terang benderang yaitu agama Islam di mana ilmu pengetahuan sudah berkembang pesat seperti sekarang ini.

Suatu kebahagiaan dan kebanggaan tersendiri bagi penulis karena telah dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul "*Dimensi Metrik Graf Commuting dan Non Commuting dari Grup Dihedral*" dengan baik. Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini tidak terlepas dari bimbingan, arahan, dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya serta penghargaan yang setinggi-tingginya kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si., selaku rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd., selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus dosen pembimbing yang senantiasa dengan sabar memberikan arahan dan bimbingan dalam penulisan skripsi ini.

4. Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd., selaku dosen pembimbing keagamaan yang telah mamberikan sumbangsih dalam penulisan skripsi ini.
5. Seluruh dosen UIN Maulana Malik Ibrahim Malang khususnya para dosen matematika yang telah memberikan banyak pengalaman dan ilmu serta senantiasa membimbing dan memberikan motivasi kepada penulis agar dapat menyelesaikan studi dengan baik.
6. *Rama* Achmad Zarnuji dan Ibu Arifatun tercinta yang telah mencurahkan kasih sayangnya, senantiasa mendoakan, membimbing, serta memotivasi penulis untuk dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini dengan baik.
7. Dr. Hj. Mufidah Ch, M.Ag selaku ketua LP2M beserta teman relawan yang menjadi rumah inspirasi penulis di UIN Maulana Malik Ibrahim Malang
8. Seluruh teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2011 dan semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, yang telah memberikan bantuan baik moril, materiil, maupun spiritual bagi penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi dengan baik.

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat khususnya bagi penulis dan bagi pembaca pada umumnya.

Malang, Mei 2016

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Afifuddin, Moh. 2016. **Dimensi Metrik Graf *Commuting* dan *Non Commuting* dari Grup Dihedral**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd. (II) Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd.

Kata kunci: dimensi metrik, graf *commuting*, graf *non commuting*, grup dihedral.

Beberapa penelitian tentang penerapan graf pada grup dihedral telah banyak dilakukan. Dengan demikian perlu adanya penelitian secara berkelanjutan mengenai graf *commuting* dan graf *non commuting* dari grup dihedral. Sehingga pada penulisan skripsi ini akan diteliti mengenai dimensi metrik graf *commuting* dan graf *non commuting* dari grup dihedral.

Metode yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah kajian pustaka, dengan menggunakan rujukan beberapa buku dan jurnal. Sedangkan analisis yang dilakukan adalah dengan mengamati pola berdasarkan beberapa contoh. Dari pola yang dihasilkan, kemudian dicari rumus umumnya yang selanjutnya dinyatakan sebagai teorema.

Berdasarkan hasil pembahasan dalam penelitian ini, diperoleh suatu teorema. Teorema yang dihasilkan adalah dimensi metrik graf *commuting* dan *non commuting* dari grup dihedral.

1. Dimensi metrik graf *commuting* dari grup dihedral D_{2n}, $n \geq 3$ adalah $2n-3$ untuk n ganjil, dan $\frac{3n-4}{2}$ untuk n genap.
2. Dimensi metrik graf *non commuting* dari grup dihedral D_{2n}, $n \geq 3$ adalah $2n-3$ untuk n ganjil dan $\frac{3n-4}{2}$ untuk n genap.
3. Interpretasi dimensi metrik dalam penelitian ini fokus pada jarak. Jarak sangat menentukan terhadap kedisiplinan dan akan berdampak pada masa depan.

Dalam penulisan skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pada pembahasan dimensi metrik graf *commuting* dan *non commuting* dari grup dihedral. Dengan demikian untuk penelitian selanjutnya, penulis menyarankan kepada pembaca untuk meneliti dimensi metrik pada graf lainnya.

ABSTRACT

Afifuddin, Moh. 2016. **Metric Dimension of Commuting and Non Commuting Graph of Dihedral Group.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd. (II) Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd.

Keywords: metric dimension, commuting graph, non commuting graph, dihedral group.

Several researches have been done to investigate the application of dihedral group. Thus the research on the commuting and non commuting graph of dihedral group is necessary. So metric dimensions that this thesis will examine the commuting and non commuting graph of dihedral group.

The method used in this thesis is library research using some references such as books and journals. As for the analysis, the pattern based on some examples will be observed. From the obtained pattern, the general formula will be gained and will be stated as lemma or theorem.

Based of the result of this thesis, a theorem about metric dimension of commuting and non commuting graph of dihedral group can be stated as follows:

1. Metric dimension of commuting graph of dihedral group D_{2n}, $n \geq 3$ is $2n - 3$ for n odd, and $\frac{3n-4}{2}$ for n even
2. Metric dimension of non commuting graph of dihedral group D_{2n}, $n \geq 3$ is $2n - 3$ for n odd, and $\frac{3n-4}{2}$ for n even
3. Metric dimensions interpretation in this study focus on the distance. The distance determines the discipline and will have inpact in the future.

The focus of this thesis is only on metric dimension of commuting and non commuting graph of dihedral group. Thus for further research, the author suggests to the reader to examine other dimensions on graph metrics.

ملخص

محمد عفيف الدين. ٢٠١٦. **حجم Metrik لمخطط Commuting و Non Commuting عن مجمع Dihedral**. البحث الجامعي. **شعبة الرياضية** كلية العلوم و التكنولوجية الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: (١) الدكتور عبد الشكر الماجستير (٢) الدكتور الحاج إمام سوجروا الما جستير.

الكلمات الرئيسية: حجم metrik ، لمخطط commuting ، لمخطط non commuting ، مجموع dihedral.

فعلت البحوث عن تطبيق المخطط فى مجموع dihedral. فلذالك تحتاج البحث الاستمرار عن حجم metrik لمخطط commuting و non commuting من مجموع dihedral. فلذالك كتب الباحث البحث الجامعي عن حجم metric لمخطط commuting و non commuting من مجموع dihedral.

الطريقة المستخدمة فى هذالبحث هو المنهج المكتبية باستخدام الكتب و المجلة كالإطار النظرى. و أما تحليل المستخدم هو بملاحضة النمط من الأمثلة. ثم تبحث الرمز العام من نمط الذى توجد فيه ثم تسمى lemma و نظرية.

الحصل من تحليل البيانات فى هذالبحث توجد نظرية. ليما التى حصل عليها فى هذالبث هو حجم metric لمخطط commuting و non commuting من مجموع dihedral.

١. حجم metric لمخطط commuting من مجموع dihedral D_{2n}، $n \geq 3$ هو $2n-3$ لى n عدد شاذ ، و $\frac{3n-4}{2}$ لى n عدد يسوي.
٢. حجم metric لمخطط commuting من مجموع dihedral D_{2n}، $n \geq 3$ هو $2n-3$ لى n عدد شاذ ، و $\frac{3n-4}{2}$ لى n عدد يسوي.
٣. التفسيرات حجم metric في هذالبحث تركز في المقياس. تؤثير المقياس على الانضباط الذى سيؤثر فى المستقبل ايضا.

فى هذالبحث يحدد الباحث البحث عن حجم metric لمخطط commuting و non commutingمن مجموع dihedral. فلذالك للبحث المستقبل يقترح الباحث إلى القارئ لأداء البحث عن حجم metric في لمخطط اللآخر.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Era globalisasi ini semua aspek keilmuan mengalami berkembangan yang sangat pesat, khususnya dalam bidang sains dan teknologi. Sebagai bagian dari sains, matematika berkembang dengan pesat di berbagai bidang di dalamnya. Bidang aljabar yang merupakan salah satu bidang dalam ilmu matematika cukup mengalami perkembangan yang saat pesat. Salah satu cabang aljabar yang banyak diteliti adalah graf, dengan banyaknya penelitian graf yang sudah berhasil selalu memunculkan masalah baru yang sangat menarik untuk diteliti lebih lanjut. Perkembangan dalam bidang aljabar mulai dari pengembangan konsep yang sudah ada hingga kolaborasi antar konsep seperti penerapan graf pada grup dihedral.

Graf G adalah pasangan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan takberurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut sisi. Banyaknya unsur di $V(G)$ disebut order dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$, dan banyaknya unsur di $E(G)$ disebut ukuran dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari G masing-masing cukup ditulis p dan q. Graf dengan order p dan ukuran q dapat disebut graf-(p, q) (Chartrand & Lesniak, 1986).

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung *(adjacent)*, v dan e

serta u dan e disebut terkait langsung *(incident)*, dan titik u dan v disebut ujung dari e. Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$. Derajat dari titik v di graf G, ditulis $deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung dengan v. Dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf G, maka tulisan $deg_G(v)$ disingkat menjadi $deg(v)$ (Chartrand & Lesniak, 1986).

Perkembangan terbaru teori graf juga membahas graf yang dibangun dari grup. Misal G grup berhingga dan X adalah subset dari G. Graf *commuting* $C(G,X)$ adalah graf yang memiliki himpunan titik X dan dua titik berbeda akan terhubung langsung jika saling komutatif di G. Jadi, titik x dan y akan terhubung langsung di $C(G, X)$ jika dan hanya jika $xy = yx$ di G (Vahidi & Talebi, 2010:123). Terkait penelitian mengenai graf *commuting*, Vahidi & Talebi (2010) membahas tentang bilangan bebas, bilangan *clique*, dan bilangan *cover* minimum. Chelvam, dkk (2011) meneliti tentang bilangan kromatik dan bilangan *clique* pada graf *commuting* yang diperoleh dari grup dihedral. Abdussakir, dkk. (2013) meneliti tentang spectrum dari graf *commuting* yang diperoleh dari grup dihedral.

Misalkan G grup tidak komutatif dan $Z(G)$ adalah center dari G. Graf *non commuting* Γ_G adalah graf yang memiliki himpunan titik $G \backslash Z(G)$ dan dua titik $x, y \in G \backslash Z(G)$ akan terhubung langsung di Γ_G jika $xy \neq yx \in G$ (Abdollahi, dkk., 2006). Atau graf *non commuting* dari G didefinisikan sebagai graf yang himpunan titiknya adalah bukan anggota center dari G dan dua titik saling terhubung jika dan hanya jika tidak komutatif (Abdollahi, dkk, 2010).

Misalkan $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ *subset* dari barisan himpunan titik dan v adalah sebuah titik yang menghubungkan graf G. Representasi dari v terhadap S adalah barisan berurut n elemen, $r(u|\mathrm{S}) = (d(v, x_1), \dots, d(v, x_n))$, dimana

$d(x, y)$ menggambarkan jarak antara titik x dan titik y. Himpunan S merupakan himpunan pemisah pada graf G jika untuk setiap titik pada graf G mempunyai representasi jarak yang berbeda terhadap S. Dimensi metrik pada graf G adalah jumlah anggota minimum pada himpunan pemisah, dilambangkan dengan dim(G). Himpunan pemisah yang memuat jumlah anggota minimum dinamakan basis dari graf G. Dengan demikian dim(G) adalah *kardinalitas* basis dari graf G.

Membahas dimensi metrik pada graf maka tidak terlepas dari beberapa penelitian yang sudah ada. Terkait dimensi metrik graf, Mudjiati (2011) membahas dimensi metrik graf kincir dengan daun bervariasi. Saputro (2012) membahas dimensi metrik graf regular dan graf komposisi.

Mendalami dan mangkaji ilmu pengetahuan merupakan keharusan yang harus dilakukan sacara berkelanjutan dengan tujuan selalu mengagungkan ciptaan Allah Swt. dalam kondisi apapun. Keharusan tersebut selaras dengan firman Allah Swt. dalam surat Ali Imron ayat 191,

ٱلَّذِينَ يَذۡكُرُونَ ٱللَّهَ قِيَٰمٗا وَقُعُودٗا وَعَلَىٰ جُنُوبِهِمۡ وَيَتَفَكَّرُونَ فِي خَلۡقِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِ رَبَّنَا
مَا خَلَقۡتَ هَٰذَا بَٰطِلٗا سُبۡحَٰنَكَ فَقِنَا عَذَابَ ٱلنَّارِ ١٩١

"(Yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadaan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata): "Ya Tuhan Kami, Tiadalah Engkau menciptakan ini dengan sia-sia, Maha suci Engkau, Maka peliharalah kami dari siksa neraka"(QS. Ali Imron: 191)

Berdasarkan ayat di atas, jelas bahwa semua ciptaan Allah harus selalu direnungkan dan dikembangkan dengan menggunakan akal pikiran manusia guna semakin mengetahui kekuasaan dan keagungan-Nya termasuk dalam hal ini adalah ilmu pengetahun.

Berdasarkan uraian di atas, sampai saat ini belum ada yang mengkaji secara paralel tentang dimensi metrik graf *commuting* dan *non commuting* grup dihedral. Pada penelitian ini, dikaji lebih dalam salah satu sifat pada graf *commuting* dan *non commuting* dari grup dihedral. Penelitian diarahkan pada dimensi metrik graf *commuting* dan *non commuting* dari grup dihedral serta dikaji bagaimana interpretasinya dalam pandangan agama berdasarkan ayat-ayat al-Quran.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam penelitian ini dengan berdasarkan latar belakang di atas antara lain:

1. Bagaimana bentuk umum dimensi metrik graf *commuting* dari grup dihedral?
2. Bagaimana bentuk umum dimensi metrik graf *non commuting* grup dihedral?
3. Bagaimana interpretasi dimensi metrik dalam pandangan agama?

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah di atas maka tujuan penelitian ini antara lain:

1. Mendeskripsikan bentuk umum dimensi metrik graf *commuting* dari grup dihedral
2. Mendeskripsikan bentuk umum dimensi metrik graf *non commuting* grup dihedral
3. Mendeskripsikan interpretasi dimensi metrik dalam pandangan agama

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan mampu menambah wawasan peneliti dalam melakukan penelitian serta menambah wawasan peneliti dalam memahami teori graf yang sekaligus menjadi sumbangsih pengembangan teori graf. Penelitian ini diharapkan menjadi landasan dasar untuk penelitian selanjutnya.

1.5 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penulisan skripsi ini menggunakan studi literatur yaitu penelitian yang dilakukan dengan cara mengumpulkan data dan informasi dengan bantuan materi yang terdapat di perpustakaan. Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Menentukan grup dihedral dari D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}, D_{16}.
2. Menggambarkan tabel Cayley dari grup dihedral D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}, D_{16}.
3. Menggambarkan graf *commuting* dan *non commuting* dari grup dihedral D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}, D_{16}.
4. Menentukan dimensi metrik dari masing-masing graf yang terbentuk.
5. Menentukan pola dimensi metrik yang terbentuk pada graf *commuting* dan *non commuting*, dan dinyatakan sebagai teorema.
6. Membuktikan teorema yang diperoleh.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dimaksudkan untuk mempermudah dalam memahami intisari dari penulisan skripsi ini. Sistematika pada skripsi sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini membahas tentang latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bab ini menyajikan tentang penjabaran materi graf dan grup dihedral.

Bab III Pembahasan

Bab ini membahas tentang dimensi metrik graf *commuting* dan *non commuting* dari grup dihedral.

Bab IV Penutup

Bab ini berisi tentang kesimpulan dari hasil pembahasan dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Graf

Graf merupakan salah satu banyak cabang ilmu matematika yang aplikasinya banyak digunakan dalam kehidupan kita, namun dalam teori graf masih banyak sekali kajian di dalamnya. Graf G terdiri atas himpunan yang tidak kosong dari elemen-elemen yang disebut titik *(vertex)* dalam penulisan ini disimbolkan dengan $V(G)$, sedangkan himpunan sisi *(edge)* disimbolkan dengan $E(G)$ dan seterusnya menggunakan istilah titik dan sisi.

Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di V yang disebut sebagai sisi. Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan E(G). Sedangkan banyaknya unsur di V disebut order dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di E disebut ukuran dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari G tersebut cukup ditulis dengan p dan q. Graf dengan order p dan ukuran q dapat disebut graf(p,q) (Chartrand dan Lesniak, 1986).

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung *(adjacent)*, v dan e serta u dan e disebut terkait langsung *(incident)*, dan titik u dan v disebut ujung dari e. Dua sisi berbeda e_1 dan e_2 disebut terhubung langsung (*adjacent*), jika terkait langsung pada satu titik yang sama. Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

2.2 Derajat Titik

Jika v adalah titik pada graf G, maka himpunan semua titik di G yang terhubung langsung dengan v disebut lingkungan dari v dan ditulis $N_G(v)$. Derajat dari titik v di graf G, ditulis $deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung dengan v. Dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf G, maka tulisan $deg_G(v)$ disingkat menjadi $deg(v)$ dan $N_G(v)$ disingkat menjadi $N(v)$. Jika dikaitkan dengan konsep lingkungan, derajat titik v di graf G adalah banyaknya anggota dalam $N(v)$. Jadi,

$$\deg(v) = |N(v)|$$

Titik yang berderajat 0 disebut titik terasing atau titik terisolasi. Titik yang berderajat 1 disebut titik ujung atau titik akhir. Titik yang berderajat genap disebut titik genap dan titik yang berderajat ganjil disebut titik ganjil. Derajat maksimum titik di G dilambangkan dengan $\Delta(G)$ dan derajat minimum titik di G dilambangkan dengan $\delta(G)$.

Hubungan antara jumlah derajat semua titik dalam suatu graf G dengan banyak sisi, yaitu q adalah

$$\sum_{v \in G} \deg(v) = 2q$$

disebut sebagai "Teorema Pertama dalam Teori Graf" yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 1

Jika G graf dengan order p dan ukuran q, dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_p\}$, maka $\sum_{i=1}^{p} \deg_G(v_i) = 2q$ (Chartrand dan Lesniak, 1986).

Bukti

Setiap menghitung derajat suatu titik di G, maka suatu sisi dihitung 1 kali. Karena setiap sisi menghubungkan dua titik berbeda maka ketika menghitung derajat semua titik, sisi akan terhitung dua kali. Dengan demikian diperoleh bahwa jumlah semua derajat titik di G sama dengan 2 kali jumlah sisi di G. Terbukti bahwa

$$\sum_{i=1}^{p} \deg(v_i) = 2q$$

Berdasarkan hubungan tersebut, maka banyak titik ganjil dalam suatu graf selalu genap. Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 2

Banyaknya titik ganjil dalam suatu graf selalu genap.

Bukti

Misalkan G graf. Misalkan X adalah himpunan titik genap di G dan Y adalah himpunan titik ganjil di G. Maka

$$\sum_{v \in G} \deg(v) = \sum_{v \in X} \deg(v) + \sum_{v \in Y} \deg(v) = 2q$$

Karena X adalah himpunan titik genap maka $\sum_{v \in X} \deg(v)$ adalah genap. Karena $2q$ adalah bilangan genap dan $\sum_{v \in X} \deg(v)$ juga genap maka $\sum_{v \in Y} \deg(v)$ haruslah bilangan genap.

Karena Y himpunan titik ganjil dan $\sum_{v \in Y} \deg(v)$ adalah bilangan genap, maka banyak titik di Y haruslah genap, sebab jika banyak titik di Y ganjil maka $\sum_{v \in Y} \deg(v)$ adalah ganjil.

Terbukti bahwa banyaknya titik ganjil di G adalah genap.

Graf G dikatakan beraturan-r atau beraturan dengan derajat r jika masing-masing titik v di G, maka $\deg(v) = r$, untuk bilangan bulat taknegatif r. Suatu graf disebut beraturan jika graf tersebut beraturan-r untuk suatu bilangan bulat taknegatif r. Graf beraturan-3 biasa juga disebut dengan graf kubik.

Graf G dikatakan komplit jika setiap dua titik yang berbeda saling terhubung langsung (*adjacent*). Graf komplit dengan order n dinyatakan dengan K_n. Dengan demikian, maka graf K_n merupakan graf beraturan-(n – 1) dengan order $p = n$ dan ukuran $q = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$.

Graf G dikatakan bipartisi jika himpunan titik pada G dapat dipartisi menjadi dua himpunan tak kosong V_1 dan V_2 sehingga masing-masing sisi pada graf G tersebut menghubungkan satu titik di V_1 dengan satu titik di V_2. Jika G adalah graf bipartisi beraturan-r, dengan $r \geq 1$, maka $|V_1| = |V_2|$. Graf G dikatakan *partisi-n* jika himpunan titiknya dapat dipartisi menjadi sebanyak n himpunan tak kosong $V_1, V_2, \dots, V_n$, sehingga masing-masing sisi pada graf G menghubungkan titik pada V_i dengan titik pada V_j, untuk $i \neq j$. Jika $n = 3$, graf partisi-n disebut graf tripartisi.

Suatu graf G disebut bipartisi komplit jika G adalah graf bipartisi dan masing-masing titik pada suatu partisi terhubung langsung dengan semua titik pada partisi yang lain. Graf bipartisi komplit dengan m titik pada salah satu partisi dan n titik pada partisi yang lain ditulis $K_{m,n}$. Graf bipartisi komplit $K_{1,n}$ disebut graf bintang *(star)* dan dinotasikan dengan S_n. Jadi, S_n mempunyai order $(n-1)$ dan ukuran n.

Graf G dikatakan *partisi-n* komplit jika G adalah graf *partisi-n* dengan himpunan partisi $V_1, V_2, \ldots, V_n$, sehingga jika $u \in V_i$ dan $v \in V_j$, $i \neq j$, maka $uv \in E(G)$. Jika $|V_i| = p_i$, maka graf ini dinotasikan dengan $K_{p_1, p_2, \ldots, p_n}$. Urutan $p_1, p_2, \ldots, p_n$ tidak begitu diperhatikan. Graf partisi-n komplit merupakan graf komplit K_n jika dan hanya jika $p_i = 1$ untuk semua i. Jika $p_i = t$ untuk semua i, $t \geq 1$, maka graf partisi-n komplit ini merupakan graf beraturan dan dinotasikan dengan $K_{n(t)}$. Jadi, $K_{n(1)}$ tidak lain adalah K_n.

2.3 Graf Terhubung

Misalkan G graf. Misalkan u dan v adalah titik di G (yang tidak harus berbeda). Jalan *u-v* pada graf G adalah barisan berhingga yang berselang-seling

$$W: u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n = v$$

antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik dan diakhiri dengan titik, dengan

$$e_i = v_{i-1}v_i, i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

adalah sisi di G. v_0 disebut titik awal, v_n disebut titik akhir, titik $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ disebut titik internal, dan n menyatakan panjang dari W. Jika $v_0 \neq v_n$, maka W disebut jalan terbuka. Jika $v_0 = v_n$, maka W disebut jalan tertutup. Jalan yang tidak mempunyai sisi disebut jalan *trivial*. Karena dalam graf dua titik hanya akan dihubungkan oleh tepat satu sisi, maka jalan *u-v*

$$W: u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n = v$$

dapat ditulis menjadi

$$W: u = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n = v$$

Jalan W yang semua sisinya berbeda disebut *trail*. Jalan terbuka yang semua titiknya berbeda disebut lintasan. Dengan demikian setiap lintasan pasti merupakan *trail*, tetapi tidak semua *trail* merupakan lintasan.

Teorema 3

Setiap jalan u-v pada suatu graf selalu memuat lintasan u-v (Chartrand dan Lesniak, 1996: 17).

Bukti

Misalkan W adalah jalan u-v di graf G. Jika W tertutup, maka jelas W memuat lintasan *trivial* di G. Misalkan

$$W: u = v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n = v$$

adalah jalan u-v terbuka. Jika tidak ada titik yang berulang di W, maka W adalah lintasan u-v. Jika ada titik yang berulang di W, misakan i dan j adalah bilangan bulat positif berbeda dengan $i < j$ sehingga $v_i = v_j$. Maka, suku $v_i, v_{i+1}, \dots, v_j$ dihapus dari W. Hasilnya sebut W_1, yakni jalan u-v baru yang panjangnya kurang dari panjang W. Jika pada W_1 tidak ada titik yang berulang, maka W_1 adalah lintasan u-v. Jika pada W_1 ada titik yang berulang, maka lakukan proses penghapusan seperti sebelumnya, sampai akhirnya diperoleh jalan u-v yang merupakan lintasan u-v.

Graf berbentuk lintasan dengan titik sebanyak n dinamakan graf lintasan order n dan ditulis P_n. Jalan tertutup W tak *trivial* yang semua sisinya berbeda disebut sirkuit. Dengan kata lain, sirkuit adalah trail tertutup tak *trivial*. Jalan tertutup tak *trivial* yang semua titiknya berbeda disebut *sikel*. Dengan demikian setiap sikel pasti merupakan sirkuit, tetapi tidak semua sirkuit merupakan sikel. Jika dicarikan hubungan antara sirkuit dan sikel diperoleh bahwa: trail tertutup dan tak *trivial* pada graf G disebut sirkuit di G. Sirkuit $v_1, v_2, v_2, \dots, v_n, v_1 (n \geq 3)$ dengan dengan $v_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$ berbeda disebut *sikel*. Sikel dengan panjang k disebut sikel-k. Sikel-k disebut genap atau ganjil bergantung pada k genap atau ganjil.

Sebuah sirkuit di graf G yang memuat semua sisi G disebuat sirkuit *Euler*. Sebuah graf yang memuat sirkuit *Euler* disebut graf *Euler*. Sikel yang memuat semua titik pada graf disebut sikel Hamilton. Graf yang memuat sikel Hamilton disebut graf Hamilton (Budayasa, 2007:6).

Misalkan u dan v titik berbeda pada graf G. Titik u dan v dikatakan terhubung (*connected*), jika terdapat lintasan u-v di G. Suatu graf G dikatakan terhubung (*connected*), jika untuk setiap titik u dan v yang berbeda di G terhubung. Dengan kata lain, suatu graf G dikatakan terhubung (*connected*), jika untuk setiap titik u dan v di G terdapat lintasan u-v di G. Sebaliknya, jika ada dua titik u dan v di G, tetapi tidak ada lintasan u-v di G, maka G dikatakan tak terhubung (*disconnected*).

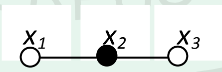
2.4 Radius dan Diameter Graf

Untuk suatu graf terhubung G, maka jarak $d(u, v)$ antara dua titik u dan v di G adalah panjang lintasan terpendek yang menghubungkan u dan v di G. Jika tidak ada lintasan dari titik u ke v, maka didefinisikan jarak $d(u, v) = \infty$. *Eksentrisitas* $e(v)$ dari suatu titik v pada graf terhubung G adalah jarak terjauh (maksimal lintasan terpendek) dari titik v ke setiap titik di G dapat dituliskan $e(v) = \max\{d(u, v): u \in V(G)\}$. Titik v dikatakan titik *eksentrik* dari u jika jarak dari u ke v sama dengan eksentrisitas dari u atau $d(u, v) = e(u)$. *Radius* dari G adalah *eksentrisitas* minimum pada setiap titik di G, dapat dituliskan $rad\, G = \min\{e(v), v \in V\}$. Sedangkan diameter dari G, dinotasikan $diam\ G$ adalah *eksentrisitas maksimum* pada setiap titik di G, dapat dituliskan $diam\, G = \max\{e(v), v \in V\}$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:29).

2.5 Dimensi Metrik

Misalkan $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ *subset* dari barisan himpunan titik dan *v* adalah sebuah titik yang menghubungkan graf G. Representasi dari *v* terhadap S adalah barisan berurut *n* elemen, $r(u|\mathrm{S}) = (d(v, x_1), \dots, d(v, x_n))$, dimana $d(x,y)$ menggambarkan jarak antara titik *x* dan titik *y*. Himpunan S merupakan himpunan pemisah pada graf G jika untuk setiap titik pada graf G mempunyai representasi jarak yang berbeda terhadap S. Dimensi metrik pada graf G adalah jumlah anggota pada himpunan pemisah, dilambangkan dengan $dim(G)$. Sebuah himpunan pemisah yang mengandung jumlah anggota minimum dinamakan basis dari graf G.

Contoh:



Gambar 2.1 Graf Lintasan Tiga Titik

Misal diambil $S = \{x_2\}$, maka representasinya adalah:

$r(x_1|\mathrm{S}) = (1)$ $\quad$ $r(x_2|\mathrm{S}) = (0)$ $\quad$ $r(x_3|\mathrm{S}) = (1)$

karena masih terdapat nilai representasi yang sama yaitu $r(x_1|\mathrm{S}) = (1)$ dan $r(x_3|\mathrm{S}) = (1)$, maka $S = \{x_2\}$, bukan merupakan himpunan pemisah, selanjutnya akan diambil S lainnya, misal diambil $S = \{x_1\}$, maka representasinya adalah:

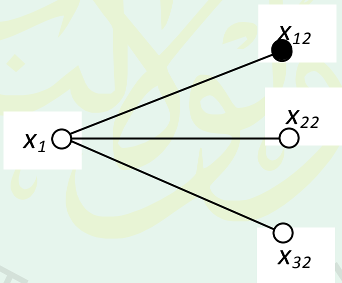
$r(x_1|\mathrm{S}) = (0)$ $\quad r(x_2|\mathrm{S}) = (1)$ $\quad r(x_3|\mathrm{S}) = (2)$,

karena semua titik pada graf tersebut mempunyai representasi yang berbeda terhadap $S = \{x_1\}$, maka $S = \{x_1\}$ merupakan salah satu himpunan pemisah. Begitu juga apabila diambil $S = \{x_3\}$, representasinya adalah sebagaimana berikut:

$r(x_1|\mathrm{S}) = (2)$ $\quad r(x_2|\mathrm{S}) = (1)$ $\quad r(x_3|\mathrm{S}) = (0)$,

Karena $S = \{x_1\}$ dan $S = \{x_3\}$ merupakan himpunan pemisah dari graf di atas, $S = \{x_1\}$ dan $S = \{x_3\}$ disebut sebagai himpunan pemisah yang mempunyai jumlah anggota minimum (basis) sehingga $\dim(G) = 1$. Untuk selanjutnya apabila ada dua basis metrik maka akan diambil satu basis metrik untuk mempercepat penghitungan dimensi metriknya.

Contoh:



Gambar 2.2 Graf Bintang S_3

Ambil $S = \{x_{12}\}$, maka representasinya adalah:

$r(x_1|\mathrm{S}) = (1)$ $\quad r(x_{12}|\mathrm{S}) = (0)$ $\quad r(x_{22}|\mathrm{S}) = (2)$ $\quad r(x_{32}|\mathrm{S}) = (2)$,

karena masih terdapat representasi yang sama yaitu $r(x_{22}|\mathrm{S}) = (2)$ dan $r(x_{32}|\mathrm{S}) = (2)$ maka $S = \{x_{12}\}$ bukan merupakan himpunan pemisah. Oleh sebab itu dicoba untuk mengambil dua titik. Ambil $S = \{x_{12}, x_{22}\}$, maka representasi semua titik terhadap S untuk himpunan S yang memiliki lebih dari satu anggota dihitung mulai dari representasi jarak anggota pertama diikuti representasi anggota kedua dan seterusnya. Keterangan lebih jelas, dapat diamati pada representasi berikut.

Representasi semua titik terhadap $S = \{x_{12}, x_{22}\}$ adalah:

$r(x_1|\mathrm{S}) = (1,1)$ $r(x_{12}|\mathrm{S}) = (0,2)$ $r(x_{22}|\mathrm{S}) = (2,0)$ $r(x_{32}|\mathrm{S}) = (2,2)$,

Karena $S = \{x_{12}, x_{22}\}$ mempunyai representasi yang berbeda dan mempunyai jumlah anggota minimum yaitu 2, maka $S = \{x_{12}, x_{22}\}$ adalah basis graf S_3, maka dimensi metrik S_3 adalah dua, dim(S_3) = 2.

2.6 Grup Dihedral

Grup adalah suatu struktur aljabar yang dinyatakan sebagai $(G,*)$ dengan G adalah himpunan tidak kosong dan $*$ adalah operasi biner di G yang memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $(a * b) * c = a * (b * c), \forall\, a, b, c \in G$ (yaitu $*$ assosiatif).
2. Ada suatu elemen e di G sehingga $a * e = e * a = a, \forall\, a \in G$ (e disebut identitas di G).
3. Untuk setiap $a \in G$ ada suatu element a^{-1} di G sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (a^{-1} disebut invers dari a)

Sebagai tambahan, grup $(G,*)$ disebut *abelian* (grup komutatif) jika $a * b = b * a,\ \forall\, a, b \in G$ (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:31 dan Dummit dan Foote, 1991:13-14). Himpunan bilangan bulat Z dengan operasi jumlah memenuhi aksioma grup, yakni $(Z, +)$ adalah grup *abelian*.

Grup dihedral adalah grup dari himpunan simetri-simetri dari segi-n beraturan, dinotasikan D_{2n}, untuk setiap n bilangan bulat positif dan $n \geq 3$.

Dalam buku lain ada yang menuliskan grup dihedral dengan D_n (Dummit dan Foote, 1991:24-25).

Misalkan D_{2n} suatu grup yang didefinisikan oleh st untuk $s, t \in D_{2n}$ yang diperoleh dari simetri (simetri sebagai fungsi pada segi-n, sehingga st adalah fungsi komposisi). Jika s, t akibat permutasi titik berturut-turut σ, τ, maka st akibat dari $\sigma \circ \tau$. Operasi biner pada D_{2n} adalah assosiatif karena fungsi komposisi adalah assosiatif. Identitas dari D_{2n} adalah identitas dari simetri (yang meninggalkan semua titik tetap), dinotasikan dengan 1, dan *invers* dari $s \in D_{2n}$ adalah kebalikan semua putaran dari simetri s (jadi jika s akibat permutasi pada titik σ, s^{-1} akibat dari σ^{-1}) (Dummit dan Foote, 1991:24-25).

Karena grup dihedral akan digunakan secara *ektensif*, maka perlu beberapa notasi dan beberapa hitungan yang dapat menyederhanakan perhitungan selanjutnya dan membantu mengamati D_{2n}, yaitu:

1. $1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}$,
2. $|s| = 2$,
3. $s \neq r^i, \forall\, i$,
4. $sr^i \neq sr^j, \forall\ 0 \leq i, j \leq n-1$ dengan $i \neq j$. Jadi $D_{2n} = \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}\}$, yaitu setiap elemen dapat dituliskan secara tunggal dalam bentuk $s^k r^i$ untuk $k = 0$ *atau* 1 dan $0 \leq i \leq n-1$,
5. $sr = r^{-1}s$,
6. $sr^i = r^{-i}s$ untuk semua $0 \leq i \leq n$ (Dummit dan Foote, 1991:26).

Sebagai contoh D_6 adalah grup dihendral yang memuat semua simetri (rotasi dan refleksi) pada bangun segitiga sehingga $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$.

2.7 **Graf *Commuting***

Misal G adalah grup berhingga dan X adalah *subset* dari G, graf *commuting* $C(G,X)$ adalah graf dengan X sebagai himpunan titik dan dua elemen berbeda di X terhubung langsung jika keduanya adalah elemen yang saling komutatif di G (Nawawi, dkk, 2012).

Sebagai contoh pada grup dihedral order 6 yaitu $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$ terhadap operasi fungsi komposisi. Diambil $X = D_6$ maka akan ditentukan unsur yang saling komutatif melalui tabel berikut.

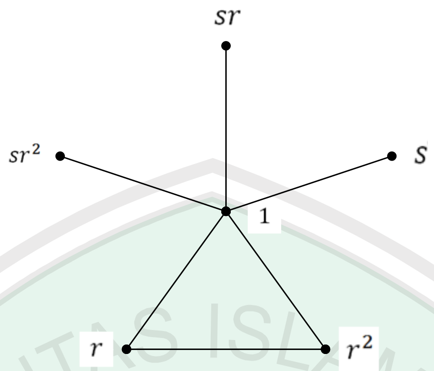
Tabel 2.1 Tabel *Cayley* dari D_6

$\circ$	1	r	r^2	s	sr	sr^2
1	1	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	sr
r^2	r^2	1	r	sr	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	1	r	r^2
sr	sr	sr^2	s	r^2	1	r
sr^2	sr^2	s	sr	r	r^2	1

Dari Tabel 2.1 terlihat bahwa:

1. 1 komutatif dengan setiap elemen D_6 (sifat elemen identitas) sehingga 1 terhubung langsung dengan setiap elemen di $C(D_6, X)$.
2. $r \circ r^2 = r^2 \circ r = 1$ merupakan elemen-elemen yang komutatif sehingga terhubung langsung di $C(D_6, X)$.
3. Untuk elemen-elemen yang tidak komutatif maka elemen-elemen tersebut tidak terhubung langsung di $C(D_6, X)$.

Secara geometri, graf *commuting* pada D_6 dapat disajikan sebagai berikut.



Gambar 2.3 Graf *Commuting* dari D_6

2.8 Graf *Non Commuting*

Misal G adalah sebuah grup, maka himpunan Z dikatakan *center* dari grup G, dituliskan

$Z = \{z \in G : zx = xz, \forall\, x \in G\}$ (Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 229).

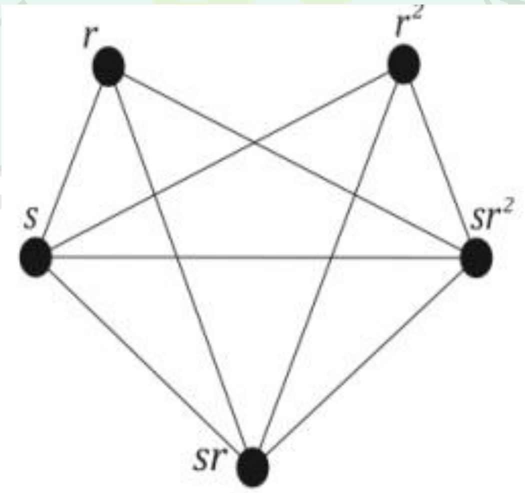
Misal G grup *non abelian* dan $Z(G)$ adalah *center* dari G. Graf *non commuting* Γ_G adalah sebuah graf yang mana titik-titiknya merupakan himpunan dari $G \backslash Z(G)$ dan dua titik x dan y terhubung langsung jika dan hanya jika $xy \neq yx$ (Abdollahi, dkk, 2006).

Sebagai contoh pada grup dihedral order 6 yaitu $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$ terhadap operasi fungsi komposisi. Dihedral D_6 dibangun dari elemen-elemen $\{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$, hasil operasi komposisi pada setiap elemen grup dihedral berbentuk tabel *Cayley* yang menunjukkan unsur-unsur yang tidak komutatif pada D_6 sebagai berikut:

Tabel 2.2 Tabel *Cayley* D_6

$\circ$	**1**	***r***	***r²***	***s***	***sr***	***sr²***
1	1	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	sr
r²	r^2	1	r	sr	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	1	r	r^2
sr	sr	sr^2	s	r^2	1	r
sr²	sr^2	s	sr	r	r^2	1

Dari Tabel 2.2, *center* D_6 atau $Z(D_6)$ yaitu $\{1\}$ yang ditunjukkan pada Tabel dengan warna biru, dan elemen-elemen pada D_6 yang tidak komutatif ditunjukkan pada tabel dengan warna kuning. Sehingga graf *non commuting* dari grup D_6 memiliki himpunan titik-titiknya $\Gamma_{D_6} = \{r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Dari hasil tersebut akan digambarkan ke dalam bentuk graf *non commuting* sebagai berikut:



Gambar 2.4 Graf *Non Commuting* dari D_6

2.9 Jarak dalam Al-Quran

Jarak adalah panjang lintasan antara satu titik terhadap titik yang lain. Menyinggung tentang jarak, dalam al-Quran disebutkan beberapa istilah jarak antara lain:

وَلِسُلَيْمَٰنَ ٱلرِّيحَ غُدُوُّهَا شَهْرٌ وَرَوَاحُهَا شَهْرٌ ۖ وَأَسَلْنَا لَهُۥ عَيْنَ ٱلْقِطْرِ ۖ وَمِنَ ٱلْجِنِّ مَن يَعْمَلُ بَيْنَ
يَدَيْهِ بِإِذْنِ رَبِّهِۦ ۖ وَمَن يَزِغْ مِنْهُمْ عَنْ أَمْرِنَا نُذِقْهُ مِنْ عَذَابِ ٱلسَّعِيرِ ﴿١٢﴾

"Dan Kami (tundukkan) angin bagi Sulaiman, yang perjalanannya di waktu pagi sama dengan perjalanan sebulan dan perjalanannya di waktu sore sama dengan perjalanan sebulan (pula) dan Kami alirkan cairan tembaga baginya. Dan sebahagian dari jin ada yang bekerja di hadapannya (di bawah kekuasaannya) dengan izin Tuhannya. Dan siapa yang menyimpang di antara mereka dari perintah Kami, Kami rasakan kepadanya adzab neraka yang apinya menyala-nyala" (QS. Saba': 12)

Maksud dari ayat di atas ialah bila Nabi Sulaiman melakukan perjalanan dari pagi sampai tengah hari, maka jarak yang ditempuhnya sama dengan jarak perjalanan unta yang cepat dalam sebulan. Begitu pula bila ia melakukan perjalanan dari tengah hari sampai sore, maka kecepatannya sama dengan perjalanan sebulan.

وَجَعَلْنَا بَيْنَهُمْ وَبَيْنَ ٱلْقُرَى ٱلَّتِى بَٰرَكْنَا فِيهَا قُرًى ظَٰهِرَةً وَقَدَّرْنَا فِيهَا ٱلسَّيْرَ ۖ سِيرُوا۟ فِيهَا لَيَالِىَ
وَأَيَّامًا ءَامِنِينَ ﴿١٨﴾

"Dan Kami jadikan antara mereka dan antara negeri-negeri yang Kami limpahkan berkat kepadanya, beberapa negeri yang berdekatan dan Kami tetapkan antara negeri-negeri itu (jarak-jarak) perjalanan. Berjalanlah kamu di kota-kota itu pada malam hari dan siang hari dengan dengan aman" (QS. Saba': 18)

Dari ayat di atas, yang dimaksud dengan negeri yang Kami limpahkan berkat kepadanya ialah negeri yang berada di Syam karena kesuburannya, dan negeri-negeri yang berdekatan ialah negeri-negeri antara Yaman dan Syam, sehingga orang-orang dapat berjalan dengan aman siang dan malam tanpa terpaksa berhenti di padang pasir dan tanpa mendapat kesulitan sebab jarak antara negeri yang satu dengan lainnya cukup ideal untuk melakukan perjalanan.

فَكَانَ قَابَ قَوْسَيْنِ أَوْ أَدْنَىٰ ﴿٩﴾

"Maka jadilah Dia dekat (pada Muhammad sejarak) dua ujung busur panah atau lebih dekat (lagi)" (QS. An-Najm: 9).

Berdasarkan ayat-ayat al-Quran di atas terlihat ada dua istilah jarak yang berbeda. Pada ayat yang berkenaan pada peristiwa perjalanan nabi Sulaiman jarak yang dimaksud adalah jarak dengan bobot waktunya, sedangkan pada ayat yang menjelaskan kesuburan negeri-negeri yang berada di Syam jarak yang dimaksud adalah jarak dengan bobot panjang, begitu pula pada ayat yang terakhir adalah jarak dengan bobot panjang.

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas tentang dimensi metrik graf *commuting* dan *non commuting* yang dibentuk dari grup dihedral D_{2n} berdasarkan pada tabel *Cayley*.

3.1 Dimensi Metrik Graf *Commuting* dari Grup Dihedral

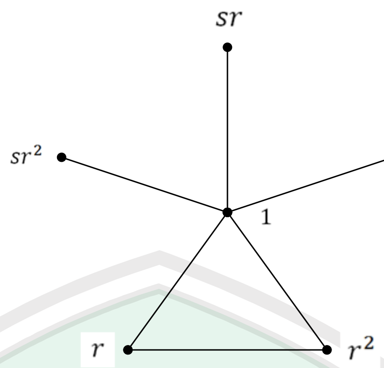
3.1.1 Dimensi Metrik Graf *Commuting* dari Grup Dihedral D_6

Elemen-elemen pembangun dari grup dihedral D_6 yaitu $\{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Berdasarkan elemen-elemen pembangunnya tersebut, maka diperoleh tabel Cayley dari D_6 sebagai berikut:

Tabel 3. 1 Tabel Cayley dari D_6

$\circ$	1	r	r^2	S	sr	sr^2
1	1	r	r^2	S	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	Sr
r^2	r^2	1	r	Sr	sr^2	S
s	s	Sr	sr^2	1	s	r^2
sr	sr	sr^2	s	r^2	1	R
sr^2	sr^2	s	sr	S	r^2	1

Berdasarkan tabel Cayley di atas dapat diketahui elemen-elemen komutatif dari D_{12} dengan operasi $\circ$. Elemen-elemen yang memenuhi sifat komutatif dengan operasi $\circ$ pada D_{12} ditunjukkan dengan warna yang berbeda. Sehingga didapatkan graf *commuting* sebagai berikut:



Gambar 3.1 Graf *Commuting* dari D_6

Berdasarkan graf pada Gambar 3.1 akan diuraikan representasi masing-masing himpunan bagian S pada graf *commuting* dari D_6 dengan anggota 3 elemen.

$S = \{s, sr, sr^2\}$	$S = \{s, sr, r\}$	$S = \{s, sr, r^2\}$
representasi S	representasi S	representasi S
$r(r\|S) = (2,2,2)$	$r(r\|S) = (2,2,0)$	$r(r\|S) = (2,2,1)$
$r(r^2\|S) = (2,2,2)$	$r(r^2\|S) = (2,2,1)$	$r(r^2\|S) = (2,2,0)$
$r(s\|S) = (0,2,2)$	$r(s\|S) = (0,2,2)$	$r(s\|S) = (0,2,2)$
$r(sr\|S) = (2,0,2)$	$r(sr\|S) = (2,0,2)$	$r(sr\|S) = (2,0,2)$
$r(sr^2\|S) = (2,2,0)$	$r(sr^2\|S) = (2,2,2)$	$r(sr^2\|S) = (2,2,2)$
$r(1\|S) = (1,1,1)$	$r(1\|S) = (1,1,1)$	$r(1\|S) = (1,1,1)$
$S = \{s, sr, 1\}$	$S = \{s, sr^2, r\}$	$S = \{s, sr^2, r^2\}$
representasi S	representasi S	representasi S
$r(r\|S) = (2,2,1)$	$r(r\|S) = (2,2,0)$	$r(r\|S) = (2,2,1)$
$r(r^2\|S) = (2,2,1)$	$r(r^2\|S) = (2,2,1)$	$r(r^2\|S) = (2,2,0)$
$r(s\|S) = (0,2,1)$	$r(s\|S) = (0,2,2)$	$r(s\|S) = (0,2,2)$
$r(sr\|S) = (2,0,1)$	$r(sr\|S) = (2,2,2)$	$r(sr\|S) = (2,2,2)$
$r(sr^2\|S) = (2,2,1)$	$r(sr^2\|S) = (2,2,2)$	$r(sr^2\|S) = (2,0,2)$
$r(1\|S) = (1,1,0)$	$r(1\|S) = (1,1,1)$	$r(1\|S) = (1,1,1)$

$S = \{s, sr^2, 1\}$	$S = \{s, r, r^2\}$	$S = \{s, r, 1\}$
representasi S	representasi S	representasi S
$r(r\|\mathrm{S}) = (2, 2, 1)$	$r(r\|\mathrm{S}) = (2, 0, 1)$	$r(r\|\mathrm{S}) = (2, 0, 1)$
$r(r^2\|\mathrm{S}) = (2, 2, 1)$	$r(r^2\|\mathrm{S}) = (2, 1, 0)$	$r(r^2\|\mathrm{S}) = (2, 1, 1)$
$r(s\|\mathrm{S}) = (0, 2, 1)$	$r(s\|\mathrm{S}) = (0, 2, 2)$	$r(s\|\mathrm{S}) = (0, 2, 1)$
$r(sr\|\mathrm{S}) = (2, 2, 2)$	$r(sr\|\mathrm{S}) = (2, 2, 2)$	$r(sr\|\mathrm{S}) = (2, 2, 1)$
$r(sr^2\|\mathrm{S}) = (2, 0, 1)$	$r(sr^2\|\mathrm{S}) = (2, 2, 2)$	$r(sr^2\|\mathrm{S}) = (2, 2, 1)$
$r(1\|\mathrm{S}) = (1, 1, 0)$	$r(1\|\mathrm{S}) = (1, 1, 1)$	$r(1\|\mathrm{S}) = (1, 1, 0)$

Berdasarkan uraian di atas $S = \{s, sr, r\}$ merupakan salah satu himpunan pemisah yang anggotanya paling sedikit, sehingga diperoleh dimensi metrik D_6 adalah 3. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa S dengan 2 elemen memiliki representasi yang sama sebagai berikut:

1. $S = \{s, sr\}$ dengan representasi sama $r(r|\mathrm{S}) = (2, 2)$ dan $r(r^2|\mathrm{S}) = (2, 2)$
2. $S = \{s, sr^2\}$ dengan representasi sama $r(r|\mathrm{S}) = (2, 2)$ dan $r(r^2|\mathrm{S}) = (2, 2)$

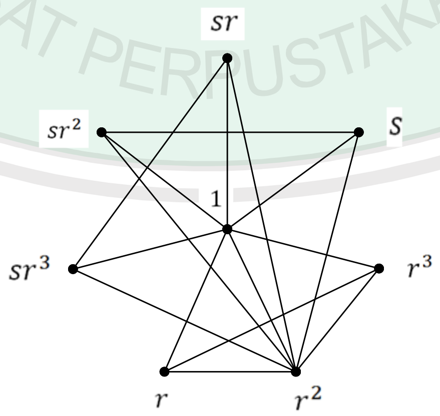
3.1.2 Dimensi Metrik Graf *Commuting* dari Grup Dihedral D_8

Elemen-elemen pembangun dari grup dihedral D_8 yaitu $\{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. Berdasarkan elemen-elemen pembangunnya tersebut, maka diperoleh tabel Cayley dari D_8 sebagai berikut:

Tabel 3.2 Tabel Cayley dari D_8

$\circ$	**1**	**r**	**r^2**	**r^3**	**s**	**sr**	**sr^2**	**sr^3**
1	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
r	r	r^2	r^3	1	sr^3	s	sr	sr^2
r^2	r^2	r^3	1	r	sr^2	sr^3	s	sr
r^3	r^3	1	r	r^2	sr	sr^2	sr^3	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	1	r	r^2	r^3
sr	sr	sr^2	sr^3	s	r^3	1	r	r^2
sr^2	sr^2	sr^3	s	sr	r^2	r^3	1	r
sr^3	sr^3	s	sr	sr^2	r	r^2	r^3	1

Berdasarkan tabel Cayley di atas dapat diketahui elemen-elemen komutatif dari D_8 dengan operasi $\circ$. Elemen-elemen yang memenuhi sifat komutatif dengan operasi $\circ$ pada D_8 ditunjukkan dengan warna yang berbeda. Sehingga didapatkan graf *commuting* sebagai berikut:



Gambar 3.2 Graf *Commuting* dari D_8

Berdasarkan graf pada Gambar 3.2 diperoleh dimensi metrik adalah 4, dengan $S = \{s, sr, r, r^2\}$. Selanjutnya ditunjukkan bahwa S dengan 3 elemen memiliki representasi yang sama sebagai berikut:

1. $S = \{s, sr, r\}$ dengan representasi sama $r(1|\mathrm{S}) = (1, 1, 1)$ dan $r(r^2|\mathrm{S}) = (1, 1, 1)$
2. $S = \{sr^2, sr^3, r\}$ dengan representasi sama $r(1|\mathrm{S}) = (1, 1, 1)$ dan $r(r^2|\mathrm{S}) = (1, 1, 1)$

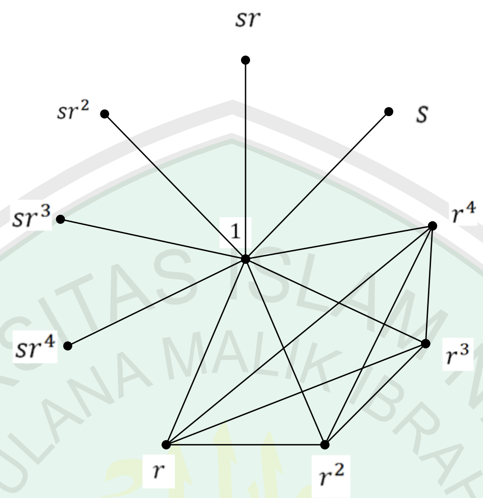
3.1.3 Dimensi Metrik Graf *Commuting* dari Grup Dihedral D_{10}

Elemen-elemen pembangun dari grup dihedral D_{10} yaitu $\{1, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$. Berdasarkan elemen-elemen pembangunnya tersebut, maka diperoleh tabel Cayley dari D_{10}.

Tabel 3.3 Tabel Cayley dari D_{10}

$\circ$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	$\boldsymbol{r^3}$	$\boldsymbol{r^4}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$	$\boldsymbol{sr^3}$	$\boldsymbol{sr^4}$
$\mathbf{1}$	1	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
$\boldsymbol{r}$	r	r^2	r^3	r^4	1	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3
$\boldsymbol{r^2}$	r^2	r^3	r^4	1	r	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2
$\boldsymbol{r^3}$	r^3	r^4	1	r	r^2	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr
$\boldsymbol{r^4}$	r^4	1	r	r^2	r^3	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s
$\boldsymbol{s}$	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	1	r	r^2	r^3	r^4
$\boldsymbol{sr}$	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s	r^4	1	r	r^2	r^3
$\boldsymbol{sr^2}$	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr	r^3	r^4	1	r	r^2
$\boldsymbol{sr^3}$	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2	r^2	r^3	r^4	1	r
$\boldsymbol{sr^4}$	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3	r	r^2	r^3	r^4	1

Berdasarkan tabel Cayley di atas dapat diketahui elemen-elemen komutatif dari D_{10} dengan operasi $\circ$. Elemen-elemen yang memenuhi sifat komutatif dengan operasi ° pada D_{10} ditunjukkan dengan warna yang berbeda. Sehingga didapatkan graf *commuting* sebagai berikut:



Gambar 3.3 Graf *Commuting* dari D_{10}

Berdasarkan graf pada Gambar 3.3 diperoleh dimensi metrik adalah 7, dengan S = $\{s, sr, sr^2, sr^3, r, r^2, r^3\}$. Selanjutnya ditunjukkan bahwa S dengan 6 elemen memiliki representasi yang sama sebagai berikut:

1. $S = \{s, sr, sr^2, r, r^2, r^3\}$ dengan representasi sama $r(sr^3|\text{S}) = (2, 2, 2, 2, 2, 2)$ dan $r(sr^4|\text{S}) = (2, 2, 2, 2, 2, 2)$
2. $S = \{sr, sr^2, sr^3, r, r^2, r^3\}$ dengan representasi sama $r(s|\text{S}) = (2, 2, 2, 2, 2, 2)$ dan $r(sr^2|\text{S}) = (2, 2, 2, 2, 2, 2)$

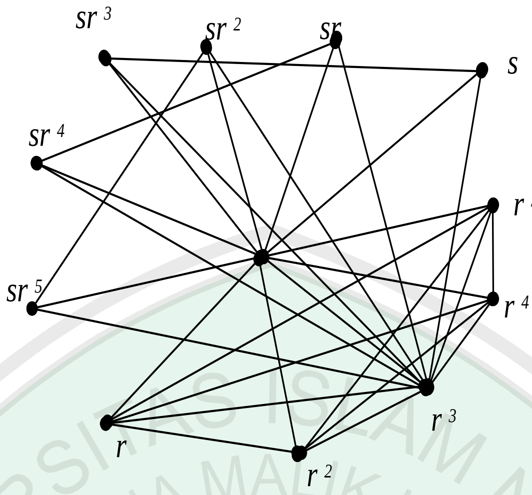
3.1.4 Dimensi Metrik Graf *Commuting* dari Grup Dihedral D_{12}

Elemen-elemen pembangun dari grup dihedral D_{12} yaitu $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$. Berdasarkan elemen-elemen pembangunnya tersebut, maka diperoleh tabel Cayley dari D_{12}.

Tabel 3.4 Tabel Cayley dari D_{12}

$\circ$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	$\boldsymbol{r^3}$	$\boldsymbol{r^4}$	$\boldsymbol{r^5}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$	$\boldsymbol{sr^3}$	$\boldsymbol{sr^4}$	$\boldsymbol{sr^5}$
$\mathbf{1}$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
$\boldsymbol{r}$	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
$\boldsymbol{r^2}$	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3
$\boldsymbol{r^3}$	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2
$\boldsymbol{r^4}$	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr
$\boldsymbol{r^5}$	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s
$\boldsymbol{s}$	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
$\boldsymbol{sr}$	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4
$\boldsymbol{sr^2}$	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3
$\boldsymbol{sr^3}$	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2
$\boldsymbol{sr^4}$	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r
$\boldsymbol{sr^5}$	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1

Berdasarkan tabel Cayley di atas dapat diketahui elemen-elemen komutatif dari D_{12} dengan operasi $\circ$. Elemen-elemen yang memenuhi sifat komutatif dengan operasi $\circ$ pada D_{12} ditunjukkan dengan warna yang berbeda. Sehingga didapatkan graf *commuting* sebagai berikut:



Gambar 3.4 Graf *Commuting* dari D_{12}

Berdasarkan graf pada Gambar 3.4 diperoleh dimensi metrik D_{12} adalah 7, dengan $S = \{s, sr, sr^2, r, r^2, r^3, r^4\}$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa S dengan 6 elemen memiliki representasi yang sama sebagai berikut:

1. $S = \{s, sr, sr^2, r, r^2, r^3\}$ dengan representasi sama $r(r^4|\mathrm{S}) = (2, 2, 2, 1, 1, 1)$ dan $r(r^5|\mathrm{S}) = (2, 2, 2, 1, 1, 1)$
2. $S = \{sr, sr^2, sr^3, r, r^2, r^3\}$ dengan representasi sama $r(r^4|\mathrm{S}) = (2, 2, 2, 1, 1, 1)$ dan $r(r^5|\mathrm{S}) = (2, 2, 2, 1, 1, 1)$

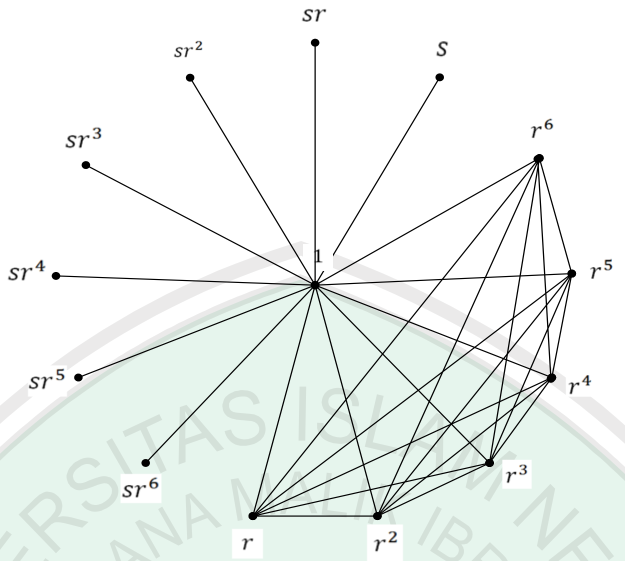
3.1.5 Dimensi Metrik Graf *Commuting* dari Grup Dihedral D_{14}

Elemen-elemen pembangun dari grup dihedral D_{14} yaitu $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$. Berdasarkan elemen-elemen pembangunnya tersebut, maka diperoleh tabel Cayley dari D_{14}.

Tabel 3.5 Tabel Cayley dari D_{14}

$\circ$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	$\boldsymbol{r^3}$	$\boldsymbol{r^4}$	$\boldsymbol{r^5}$	$\boldsymbol{r^6}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$	$\boldsymbol{sr^3}$	$\boldsymbol{sr^4}$	$\boldsymbol{sr^5}$	$\boldsymbol{sr^6}$
$\mathbf{1}$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
$\boldsymbol{r}$	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
$\boldsymbol{r^2}$	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
$\boldsymbol{r^3}$	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3
$\boldsymbol{r^4}$	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2
$\boldsymbol{r^5}$	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr
$\boldsymbol{r^6}$	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s
$\boldsymbol{s}$	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
$\boldsymbol{sr}$	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
$\boldsymbol{sr^2}$	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4
$\boldsymbol{sr^3}$	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3
$\boldsymbol{sr^4}$	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2
$\boldsymbol{sr^5}$	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r
$\boldsymbol{sr^6}$	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1

Berdasarkan tabel Cayley di atas dapat diketahui elemen-elemen komutatif dari D_{124} dengan operasi $\circ$. Elemen-elemen yang memenuhi sifat komutatif dengan operasi $\circ$ pada D_{14} ditunjukkan dengan warna yang berbeda. Sehingga didapatkan graf *commuting* sebagai berikut:



Gambar 3.5 Graf *Commuting* dari D_{14}

Berdasarkan graf pada Gambar 3.5 diperoleh dimensi metrik D_{14} adalah 11, dengan $S = \{ s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5,\ r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$. Selanjutnya ditunjukkan bahwa S dengan 10 elemen memiliki representasi yang sama sebagai berikut:

1. $S = \{ s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$ dengan representasi sama $r(sr^5|\mathrm{S}) = (2,2,2,2,2,2,2,2,2,2)$ dan $r(sr^6|\mathrm{S}) = (2,2,2,2,2,2,2,2,2,2)$
2. $S = \{ s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5,\ r, r^2, r^3, r^4\}$ dengan representasi sama $r(s|\mathrm{S}) = (2,2,2,2,2,2,1,1,1,1)$ dan $r(sr^2|\mathrm{S}) = (2,2,2,2,2,2,1,1,1,1)$

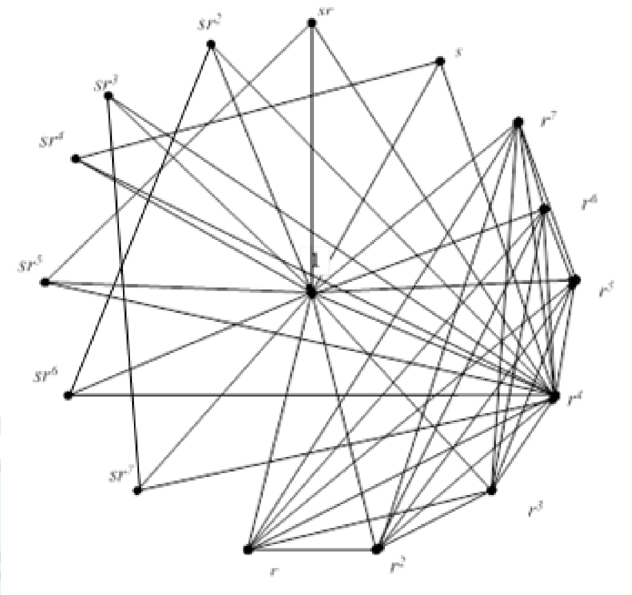
3.1.6 Dimensi Metrik Graf *Commuting* dari Grup Dihedral D_{16}

Elemen-elemen pembangun dari grup dihedral D_{16} yaitu $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$. Berdasarkan elemen-elemen pembangunnya tersebut, maka diperoleh tabel Cayley dari D_{16}.

Tabel 3.6 Tabel Cayley dari D_{16}

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r^3	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^4	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3
r^5	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2
r^6	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr
r^7	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^4	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3
sr^5	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2
sr^6	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r
sr^7	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1

Berdasarkan tabel Cayley di atas dapat diketahui elemen-elemen komutatif dari D_{16} dengan operasi $\circ$. Elemen-elemen yang memenuhi sifat komutatif dengan operasi $\circ$ pada D_{16} ditunjukkan dengan warna yang berbeda. Sehingga didapatkan graf *commuting* sebagai berikut:



Gambar 3.6 Graf *Commuting* dari D_{16}

Berdasarkan graf pada Gambar 3.6 diperoleh dimensi metrik adalah 10, dengan $S = \{s, sr, sr^2, sr^3,\ r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\}$. Selanjutnya ditunjukkan bahwa S dengan 9 elemen memiliki representasi yang sama sebagai berikut:

1. $S = \{s, sr, sr^2,\ r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\}$ dengan representasi sama
   $r(sr^6|\mathrm{S}) = (2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 2)$ dan $r(sr^7|\mathrm{S}) = (2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 2)$
2. $S = \{s, sr, sr^2, sr^3,\ r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$ dengan representasi sama
   $r(r^6|\mathrm{S}) = (1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2)$ dan $r(r^7|\mathrm{S}) = (1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2)$

Berdasarkan pengamatan pada beberapa graf *commuting*, maka dapat diperoleh pola sebagai berikut.

Tabel 3.7 Dimensi Metrik Graf *Commuting* dari Grup Dihedral

Aspek	$\mathbf{D_6}$	$\mathbf{D_8}$	$\mathbf{D_{10}}$	$\mathbf{D_{12}}$	$\mathbf{D_{14}}$	$\mathbf{D_{16}}$	**...**	$\mathbf{D_{2n}}$
Dimensi metrik	3	4	7	7	11	10	...	2n – 3, n ganjil $\frac{3n-4}{2}$, n genap

Teorema

Misalkan G adalah graf *commuting* dari grup Dihedral D_{2n}. Maka dimensi metrik dari G adalah $2n$ – 3 untuk *n* ganjil dan $\frac{3n-4}{2}$ untuk *n* genap.

Bukti

Untuk *n* ganjil, diketahui

1. $d(1,x) = d(x,1) = 1$
2. $d(r^i r^j)\begin{cases}0, i = j\\1, i \neq j\end{cases}$, karena $r^i r^j = r^j r^i$
3. $d(sr^i r^j) = 2, \forall i,j$ dan $d(r^j sr^i) = 2, \forall i,j$, karena $sr^i r^j \neq r^j sr^i$
4. $d(sr^i sr^j)\begin{cases}0, i = j\\2, i \neq j\end{cases}$, karena $sr^i sr^j \neq sr^j sr^i, i \neq j$

Kemudian dimisalkan S dengan anggota sebagai berikut

	S	{ $\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$	⋯	$\boldsymbol{sr^{n-3}}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	$\boldsymbol{r^3}$	⋯	$\boldsymbol{r^{n-3}}$ }
r($\boldsymbol{s}$|S)	=	{ 0	2	2	⋯	2	2	2	2	⋯	2 }
r($\boldsymbol{sr}$|S)	=	{ 2	0	2	⋯	2	2	2	2	⋯	2 }
r($\boldsymbol{sr^2}$|S)	=	{ 2	2	0	⋯	2	2	2	2	⋯	2 }
⋮		⋮	⋮	⋮	⋯	⋮	⋮	⋮	⋮	⋯	⋮
r($\boldsymbol{sr^{n-3}}$|S)	=	{ 2	2	2	⋯	0	2	2	2	⋯	2 }
r($\boldsymbol{sr^{n-2}}$|S)	=	{ 2	2	2	⋯	2	2	2	2	⋯	2 }
r($\boldsymbol{sr^{n-1}}$|S)	=	{ 2	2	2	⋯	2	2	2	2	⋯	2 }
r($\boldsymbol{r}$|S)	=	{ 2	2	2	⋯	2	0	1	1	⋯	1 }
r($\boldsymbol{r^2}$|S)	=	{ 2	2	2	⋯	2	1	0	0	⋯	1 }
r($\boldsymbol{r^3}$|S)	=	{ 2	2	2	⋯	2	1	1	0	⋯	1 }

$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
r($\boldsymbol{r^{n-3}}$|S)	=	{ 2	2	2	$\cdots$	2	1	1	1	$\cdots$	0 }
r($\boldsymbol{r^{n-2}}$|S)	=	{ 2	2	2	$\cdots$	2	1	1	1	$\cdots$	1 }
r($\boldsymbol{r^{n-1}}$|S)	=	{ 2	2	2	$\cdots$	2	1	1	1	$\cdots$	1 }

Dari uraian di atas terlihat S memiliki representasi yang sama yaitu:

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{sr^{n-2}}|\mathrm{S}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{sr^{n-1}}|\mathrm{S}) \text{ dan } r(\boldsymbol{r^{n-2}}|\mathrm{S}) = r(\boldsymbol{r^{n-1}}|\mathrm{S})$$

untuk mendapatkan S dengan representasi yang berbeda maka salah satu dari $\boldsymbol{r^{n-2}}$ atau $\boldsymbol{r^{n-1}}$ dan $\boldsymbol{sr^{n-2}}$ atau $\boldsymbol{sr^{n-1}}$ harus menjadi anggota S**,** sehingga diperoleh

	S	{ $\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$	$\cdots$	$\boldsymbol{sr^{n-3}}$	$\boldsymbol{sr^{n-2}}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	$\boldsymbol{r^3}$	$\cdots$	$\boldsymbol{r^{n-3}}$	$\boldsymbol{r^{n-2}}$ }
r($\boldsymbol{s}$|S)	=	{ 0	2	2	$\cdots$	2	2	2	2	2	$\cdots$	2	2 }
r($\boldsymbol{sr}$|S)	=	{ 2	0	2	$\cdots$	2	2	2	2	2	$\cdots$	2	2 }
r($\boldsymbol{sr^2}$|S)	=	{ 2	2	0	$\cdots$	2	2	2	2	2	$\cdots$	2	2 }
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$		$\vdots$
r($\boldsymbol{sr^{n-3}}$|S)	=	{ 2	2	2	$\cdots$	0	2	2	2	2	$\cdots$	2	2 }
r($\boldsymbol{sr^{n-2}}$|S)	=	{ 2	2	2	$\cdots$	2	0	2	2	2	$\cdots$	2	2 }
r($\boldsymbol{sr^{n-1}}$|S)	=	{ 2	2	2	$\cdots$	2	2	2	2	2	$\cdots$	2	2 }
r($\boldsymbol{r}$|S)	=	{ 2	2	2	$\cdots$	2	2	0	1	1	$\cdots$	1	1 }
r($\boldsymbol{r^2}$|S)	=	{ 2	2	2	$\cdots$	2	2	1	0	0	$\cdots$	1	1 }
r($\boldsymbol{r^3}$|S)	=	{ 2	2	2	$\cdots$	2	2	1	1	0	$\cdots$	1	1 }
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$		$\vdots$

r($\boldsymbol{r^{n-3}}$|S)	= {	2	2	2	⋯	2	2	1	1	1	⋯	0	1 }
r($\boldsymbol{r^{n-2}}$|S)	= {	2	2	2	⋯	2	2	1	1	1	⋯	1	0 }
r($\boldsymbol{r^{n-1}}$|S)	= {	2	2	2	⋯	2	2	1	1	1	⋯	1	1 }

Dari urian di atas terlihat S tidak memiliki representasi yang sama sehingga S merupakan himpunan pemisah minimal, S memiliki anggota sebanyak $2n-3$. Terbukti dim(G) $= 2n-3$, untuk n ganjil

Untuk n genap, diketahui

1. $d(1,x) = d(x,1) = 1$
2. $d(r^i r^j)\begin{cases} 0, i = j \\ 1, i \neq j \end{cases}$, karena $r^i r^j = r^j r^i$
3. $d\left(sr^i r^{\frac{n}{2}}\right) = 1, \forall i$ dan $d\left(r^{\frac{n}{2}} sr^i\right) = 1, \forall i, j$, karena $sr^i r^{\frac{n}{2}} = r^{\frac{n}{2}} sr^i$
4. $d\left(sr^i r^j\right) = 2, \forall i, j$ dan $d\left(r^j sr^i\right) = 2, \forall i, j$, karena $sr^i r^j \neq r^j sr^i$
5. $d(sr^i sr^j)\begin{cases} 0, i = j \\ 2, i \neq j \end{cases}$, karena $sr^i sr^j \neq sr^j sr^i, i \neq j$

Kemudian dimisalkan S dengan anggota sebagai berikut

S	**={** $\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$	⋯	$\boldsymbol{sr^{\frac{n}{2}-1}}$	$\boldsymbol{sr^{\frac{n}{2}}}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	⋯	$\boldsymbol{r^{\frac{n}{2}}}$	$\boldsymbol{r^{\frac{n}{2}+1}}$	⋯	$\boldsymbol{r^{n-3}}$ **}**
r($\boldsymbol{s}$|S)	={ 0	2	2	⋯	2	1	2	2	⋯	1	2	⋯	2 }
r($\boldsymbol{sr}$|S)	={ 2	0	2	⋯	2	2	2	2	⋯	1	2	⋯	2 }
r($\boldsymbol{sr^2}$|S)	={ 2	2	0	⋯	2	2	2	2	⋯	1	2	⋯	2 }
⋮	⋮	⋮	⋮	⋯	⋮	⋮	⋮	⋮	⋯	⋮	⋮	⋯	⋮
r($\boldsymbol{sr^{\frac{n}{2}-1}}$|S)	={ 2	2	2	⋯	0	2	2	2	⋯	1	2	⋯	2 }
r($\boldsymbol{sr^{\frac{n}{2}}}$|S)	={ 2	2	2	⋯	2	0	2	2	⋯	1	2	⋯	2 }
⋮	⋮	⋮	⋮	⋯	⋮	⋮	⋮	⋮	⋯	⋮	⋮	⋯	⋮

r($\boldsymbol{sr^{\frac{n}{2}+i}}$|S)	={	2	2	2	⋯	2	1	2	2	⋯	1	2	⋯	2	}
r($\boldsymbol{r}$|S)	={	2	2	2	⋯	2	2	0	1	⋯	1	1	⋯	1	}
r($\boldsymbol{r^2}$|S)	={	2	2	2	⋯	2	2	1	0	⋯	1	1	⋯	1	}
⋮		⋮	⋮	⋮	⋯	⋮	⋮	⋮	⋮	⋯	⋮	⋮	⋯	⋮	
r($\boldsymbol{r^{\frac{n}{2}}}$|S)	={	1	1	1	⋯	1	1	1	1	⋯	0	1	⋯	1	}
r($\boldsymbol{r^{\frac{n}{2}+1}}$|S)	={	2	1	2	⋯	2	2	1	1	⋯	1	0	⋯	1	}
⋮		⋮	⋮	⋮	⋯	⋮	⋮	⋮	⋮	⋯	⋮	⋮	⋯	⋮	
r($\boldsymbol{r^{n-3}}$|S)	={	2	2	2	⋯	2	1	1	1	⋯	1	1	⋯	0	}
r($\boldsymbol{r^{n-2}}$|S)	={	2	2	2	⋯	2	1	1	1	⋯	1	1	⋯	1	}
r($\boldsymbol{r^{n-1}}$|S)	={	2	2	2	⋯	2	1	1	1	⋯	1	1	⋯	1	}

Dari uraian di atas terlihat S memiliki representasi yang sama yaitu:

$$r(\boldsymbol{r^{n-2}}|S) = r(\boldsymbol{r^{n-1}}|S)$$

untuk mendapatkan S dengan representasi yang berbeda maka salah satu dari $\boldsymbol{r^{n-2}}$ atau $\boldsymbol{r^{n-1}}$ harus menjadi anggota S, sehingga diperoleh

S	**={**	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$	⋯	$\boldsymbol{sr^{\frac{n}{2}-1}}$	$\boldsymbol{sr^{\frac{n}{2}}}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	⋯	$\boldsymbol{r^{\frac{n}{2}}}$	$\boldsymbol{r^{\frac{n}{2}+1}}$	⋯	$\boldsymbol{r^{n-3}}$	$\boldsymbol{r^{n-2}}$	**}**
r($\boldsymbol{s}$|S)	={	0	2	2	⋯	2	1	2	2	⋯	1	2	⋯	1	2	}
r($\boldsymbol{sr}$|S)	={	2	0	2	⋯	2	2	2	2	⋯	1	2	⋯	1	2	}
r($\boldsymbol{sr^2}$|S)	={	2	2	0	⋯	2	2	2	2	⋯	1	2	⋯	1	2	}
⋮		⋮	⋮	⋮	⋯	⋮	⋮	⋮	⋮	⋯	⋮	⋮	⋯	⋮	⋮	
r($\boldsymbol{sr^{\frac{n}{2}-1}}$|S)	={	2	2	2	⋯	0	2	2	2	⋯	1	2	⋯	1	2	}
r($\boldsymbol{sr^{\frac{n}{2}}}$|S)	={	2	2	2	⋯	2	0	2	2	⋯	1	2	⋯	1	2	}

⋮		⋮	⋮	⋮	⋯	⋮	⋮	⋮	⋮	⋯	⋮	⋮	⋯	⋮	⋮
$r(\boldsymbol{sr}^{\frac{n}{2}+i} \mid S)$	= {	2	2	2	⋯	2	1	2	2	⋯	1	2	⋯	1	2 }
$r(\boldsymbol{r} \mid S)$	= {	2	2	2	⋯	2	2	0	1	⋯	1	1	⋯	1	1 }
$r(\boldsymbol{r}^{2} \mid S)$	= {	2	2	2	⋯	2	2	1	0	⋯	1	1	⋯	1	1 }
⋮		⋮	⋮	⋮	⋯	⋮	⋮	⋮	⋮	⋯	⋮	⋮	⋯	⋮	⋮
$r(\boldsymbol{r}^{\frac{n}{2}} \mid S)$	= {	1	1	1	⋯	1	1	1	1	⋯	0	1	⋯	0	1 }
$r(\boldsymbol{r}^{\frac{n}{2}+1} \mid S)$	= {	2	1	2	⋯	2	2	1	1	⋯	1	0	⋯	1	1 }
⋮		⋮	⋮	⋮	⋯	⋮	⋮	⋮	⋮	⋯	⋮	⋮	⋯	⋮	⋮
$r(\boldsymbol{r}^{n-3} \mid S)$	= {	2	2	2	⋯	2	1	1	1	⋯	1	1	⋯	0	1 }
$r(\boldsymbol{r}^{n-2} \mid S)$	= {	2	2	2	⋯	2	1	1	1	⋯	1	1	⋯	1	0 }
$r(\boldsymbol{r}^{n-1} \mid S)$	= {	2	2	2	⋯	2	1	1	1	⋯	1	1	⋯	1	1 }

Dari urian di atas terlihat S tidak memiliki representasi yang sama sehingga S merupakan himpunan pemisah minimal, S memiliki anggota r^i sebanyak $n-2$ dan sr^1 sebanyak $\frac{n}{2}$, sehingga S memuat anggota sebanyak $\frac{3n-4}{2}$. Terbukti dim(G)= $\frac{3n-4}{2}$, untuk n genap.

3.2 Dimensi Metrik Graf *Non Commuting* dari Grup Dihedral

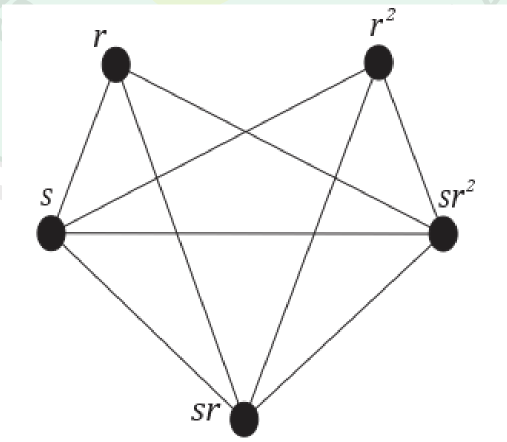
3.2.1 Dimensi Metrik Graf *Non Commuting* dari Grup Dihedral D_6

Elemen-elemen dari grup dihedral D_6 adalah $\{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Adapun hasil operasi komposisi pada setiap elemen grup dihedral D_6 dalam bentuk tabel *Cayley* sebagai berikut:

Tabel 3.8 Tabel *Cayley* $\boldsymbol{D_6}$

∘	1	*r*	r^2	*S*	*sr*	sr^2
1	1	*r*	r^2	*S*	*sr*	sr^2
r	*r*	r^2	1	sr^2	*s*	*sr*
r^2	r^2	1	*r*	*Sr*	sr^2	*s*
s	*s*	*sr*	sr^2	1	*r*	r^2
sr	*sr*	sr^2	*s*	r^2	1	*r*
sr^2	sr^2	*s*	*sr*	*R*	r^2	1

Dari tabel di atas, warna biru menunjukkan *center* grup dihedral D_6 yaitu $\{1\}$, karena jika dioperasikan, 1 komutatif dengan semua elemen di D_6. Sedangkan warna kuning menunjukkan unsur-unsur yang tidak komutatif pada grup dihedral D_6. Sehingga graf *non commuting* dari grup D_6 memiliki himpunan titik-titik $\Gamma_{D_6} = \{r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Kemudian hasil di atas digambarkan ke dalam bentuk graf *non commuting* sebagai berikut:



Gambar 3.7 Graf *Non Commuting* dari $\boldsymbol{D_6}$

Berdasarkan graf pada Gambar 3.7 diperoleh dimensi metrik D_6 adalah 3, dengan $S = \{s, sr, r\}$. Selanjutnya ditunjukkan bahwa S dengan 2 elemen memiliki representasi yang sama sebagai berikut:

1. $S = \{s, r\}$ memiliki representasi sama $\mathrm{r}(sr|\mathrm{S}) = (1,1)$ dan $\mathrm{r}(sr^2|\mathrm{S}) = (1,1)$
2. $S = \{sr, r\}$ memiliki representasi sama $\mathrm{r}(s|\mathrm{S}) = (1,1)$ dan $\mathrm{r}(sr^2|\mathrm{S}) = (1,1)$

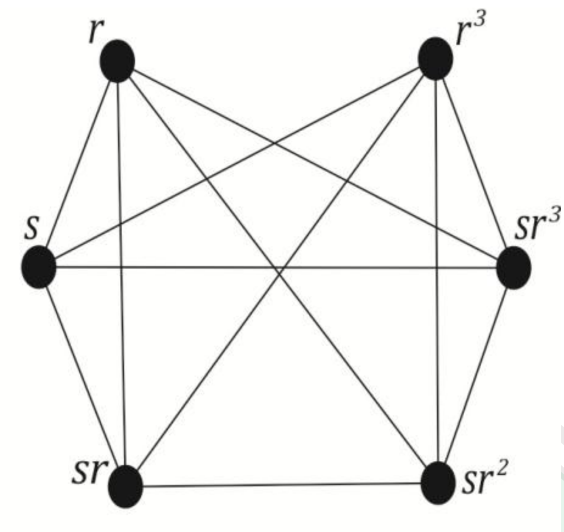
3.2.2 Dimensi Metrik Graf *Non Commuting* Grup Dihedral D_8

Elemen-elemen dari grup dihedral D_8 adalah $\{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. Adapun hasil operasi komposisi pada setiap elemen grup dihedral D_8 dalam bentuk tabel *Cayley* sebagai berikut:

Tabel 3.9 Tabel *Cayley* dari D_8

$\circ$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	$\boldsymbol{r^3}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$	$\boldsymbol{sr^3}$
1	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
r	r	r^2	r^3	1	sr^3	s	sr	sr^2
r^2	r^2	r^3	1	r	sr^2	sr^3	s	sr
r^3	r^3	1	r	r^2	sr	sr^2	sr^3	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	1	r	r^2	r^3
sr	sr	sr^2	sr^3	s	r^3	1	r	r^2
sr^2	sr^2	sr^3	s	sr	r^2	r^3	1	r
sr^3	sr^3	s	sr	sr^2	r	r^2	r^3	1

Dari tabel di atas, warna biru menunjukkan *center* grup dihedral D_8 yaitu $\{1, r^2\}$, karena jika dioperasikan, 1 dan r^2 komutatif dengan semua elemen di D_8. Sedangkan daerah warna kuning merupakan unsur-unsur yang tidak komutatif pada grup dihedral D_8. Sehingga graf *non commuting* dari grup D_8 memiliki himpunan titik-titik $\Gamma_{D_8} = \{r, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. Kemudian hasil di atas digambarkan ke dalam bentuk graf *non commuting* sebagai berikut:



Gambar 3.8 Graf *Non Commuting* dari $\boldsymbol{D_8}$

Berdasarkan graf pada Gambar 3.8 diperoleh dimensi metrik D_8 adalah 3, dengan $S = \{s, sr, r\}$. Selanjutnya ditunjukkan bahwa S dengan 2 elemen memiliki representasi yang sama sebagai berikut:

1. $S = \{s, r\}$ memiliki representasi sama $\mathrm{r}(sr|\mathrm{S}) = (1,1)$ dan $\mathrm{r}(sr^3|\mathrm{S}) = (1,1)$
2. $S = \{sr, r\}$ memiliki representasi sama $\mathrm{r}(s|\mathrm{S}) = (1,1)$ dan $\mathrm{r}(sr^2|\mathrm{S}) = (1,1)$

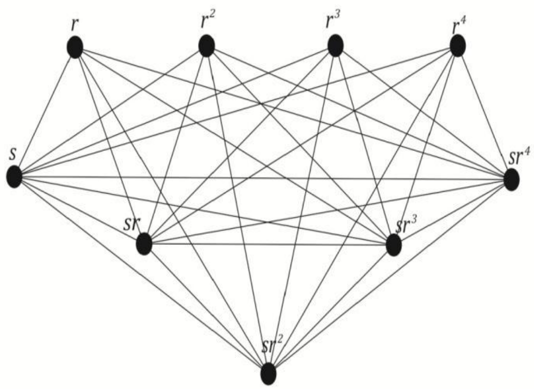
3.2.3 Dimensi Metrik Graf *Non Commuting* dari Grup Dihedral $\boldsymbol{D_{10}}$

Elemen-elemen dari grup dihedral D_{10} adalah $\{1, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2,$ sr^3, $sr^4\}$. Adapun hasil operasi komposisi pada setiap elemen grup dihedral D_{10} dalam bentuk tabel *Cayley* sebagai berikut:

Tabel 3.10 Tabel *Cayley* dari D_{10}

$\circ$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	$\boldsymbol{r^3}$	$\boldsymbol{r^4}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$	$\boldsymbol{sr^3}$	$\boldsymbol{sr^4}$
$\mathbf{1}$	1	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
$\boldsymbol{r}$	r	r^2	r^3	r^4	1	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3
$\boldsymbol{r^2}$	r^2	r^3	r^4	1	r	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2
$\boldsymbol{r^3}$	r^3	r^4	1	r	r^2	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr
$\boldsymbol{r^4}$	r^4	1	r	r^2	r^3	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s
$\boldsymbol{s}$	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	1	r	r^2	r^3	r^4
$\boldsymbol{sr}$	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s	r^4	1	r	r^2	r^3
$\boldsymbol{sr^2}$	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr	r^3	r^4	1	r	r^2
$\boldsymbol{sr^3}$	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2	r^2	r^3	r^4	1	r
$\boldsymbol{sr^4}$	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3	r	r^2	r^3	r^4	1

Dari tabel di atas, warna biru menunjukkan *center* grup dihedral D_{10} yaitu $\{1\}$, karena jika dioperasikan, 1 komutatif dengan semua elemen di D_{10}. Sedangkan daerah warna kuning merupakan unsur-unsur yang tidak komutatif pada grup dihedral D_{10}. Sehingga graf *non commuting* dari grup D_{10} memiliki himpunan titik-titik $\Gamma_{D_{10}} = \{r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$. Kemudian hasil di atas digambarkan ke dalam bentuk graf *non commuting* sebagai berikut:



Gambar 3.9 Graf *Non Commuting* dari $\boldsymbol{D_{10}}$

Berdasarkan graf pada Gambar 3.9 diperoleh dimensi metrik D_{10} adalah 7, dengan $S = \{s, sr, sr^2,\ sr^3, r, r^2, r^3\}$. Selanjutnya ditunjukkan bahwa S dengan 6 elemen memiliki representasi yang sama sebagai berikut:

1. $S = \{s, sr, sr^2,\ r, r^2, r^3\}$ memiliki representasi yang sama
   $r(sr^3|S) = (1,1,1,1,1,1)$ dan $r(sr^4|S) = (1,1,1,1,1,1)$
2. $S = \{s, sr, sr^2,\ sr^3, r, r^2\}$ memiliki representasi yang sama
   $r(r^3|S) = (1,1,1,1,2,2)$ dan $r(r^4|S) = (1,1,1,1,2,2)$

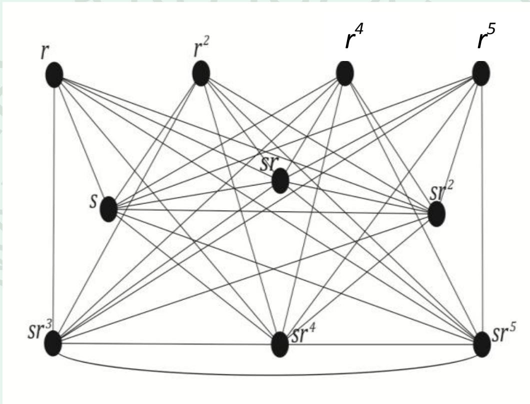
3.2.4 Dimensi Metrik Graf *Non Commuting* dari Grup Dihedral D_{12}

Elemen-elemen dari grup dihedral D_{12} adalah $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$. Adapun hasil operasi komposisi pada setiap elemen grup dihedral D_{12} dalam bentuk tabel *Cayley* sebagai berikut:

Tabel 3.11 Tabel *Cayley* dari D_{12}

$\circ$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	$\boldsymbol{r^3}$	$\boldsymbol{r^4}$	$\boldsymbol{r^5}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$	$\boldsymbol{sr^3}$	$\boldsymbol{sr^4}$	$\boldsymbol{sr^5}$
$\mathbf{1}$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
$\boldsymbol{r}$	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
$\boldsymbol{r^2}$	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3
$\boldsymbol{r^3}$	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2
$\boldsymbol{r^4}$	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr
$\boldsymbol{r^5}$	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s
$\boldsymbol{s}$	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
$\boldsymbol{sr}$	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4
$\boldsymbol{sr^2}$	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3
$\boldsymbol{sr^3}$	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2
$\boldsymbol{sr^4}$	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r
$\boldsymbol{sr^5}$	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1

Dari tabel di atas, warna biru menunjukkan *center* grup dihedral D_{12} yaitu $\{1, r^3\}$, karena jika dioperasikan, 1 dan r^3 komutatif dengan semua elemen di D_{12}. Sedangkan daerah warna kuning merupakan unsur-unsur yang tidak komutatif pada grup dihedral D_{12}. Sehingga graf *non commuting* dari grup D_{12} memiliki himpunan titik-titik $\Gamma_{D_{12}} = \{r, r^2, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$. Kemudian hasil di atas digambarkan ke dalam bentuk graf *non commuting* sebagai berikut:



Gambar 3.10 Graf *Non Commuting* dari $\boldsymbol{D_{12}}$

Berdasarkan graf pada Gambar 3.10 diperoleh dimensi metric D_{12} adalah 6, dengan $S = \{s, sr, sr^2, r, r^2, r^4\}$. Selanjutnya ditunjukkan bahwa S dengan 5 elemen memiliki representasi yang sama sebagai berikut:

1. $S = \{s, sr, sr^2, r, r^2\}$ memiliki representasi sama $r(r^4|\text{S}) = (1, 1, 1, 2, 2)$ dan $r(r^5|\text{S}) = (1, 1, 1, 2, 2)$
2. $S = \{s, sr, r, r^2, r^4\}$ memiliki representasi sama $r(sr^2|\text{S}) = (1, 1, 1, 1, 1)$ dan $r(sr^5|\text{S}) = (1, 1, 1, 1, 1)$

3.2.5 Dimensi Metrik Graf *Non Commuting* dari Grup Dihedral D_{14}

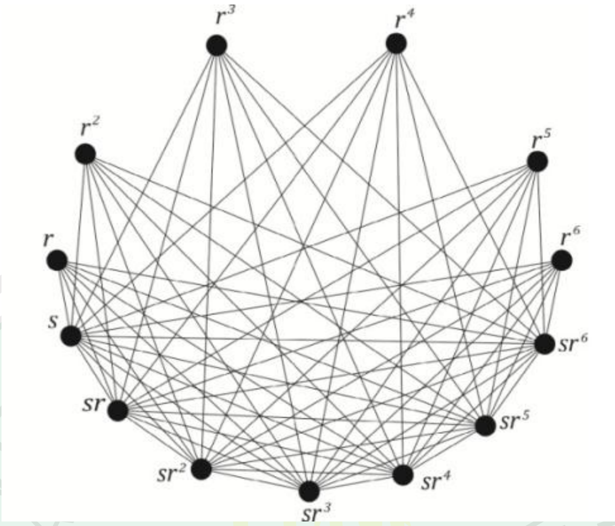
Elemen-elemen dari grup dihedral D_{14} adalah $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$. Adapun hasil operasi komposisi pada setiap elemen grup dihedral D_{14} dalam bentuk tabel *Cayley* sebagai berikut:

Tabel 3.12 Tabel *Cayley* dari $\boldsymbol{D_{14}}$

$\circ$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	$\boldsymbol{r^3}$	$\boldsymbol{r^4}$	$\boldsymbol{r^5}$	$\boldsymbol{r^6}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$	$\boldsymbol{sr^3}$	$\boldsymbol{sr^4}$	$\boldsymbol{sr^5}$	$\boldsymbol{sr^6}$
$\mathbf{1}$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
$\boldsymbol{r}$	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
$\boldsymbol{r^2}$	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
$\boldsymbol{r^3}$	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3
$\boldsymbol{r^4}$	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2
$\boldsymbol{r^5}$	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr
$\boldsymbol{r^6}$	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s
$\boldsymbol{s}$	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
$\boldsymbol{sr}$	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
$\boldsymbol{sr^2}$	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4
$\boldsymbol{sr^3}$	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3
$\boldsymbol{sr^4}$	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2
$\boldsymbol{sr^5}$	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r
$\boldsymbol{sr^6}$	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1

Dari tabel di atas, warna biru menunjukkan *center* grup dihedral D_{14} yaitu $\{1\}$, karena jika dioperasikan, 1 komutatif dengan semua elemen di D_{14}. Sedangkan daerah warna kuning merupakan unsur-unsur yang tidak komutatif pada grup dihedral D_{14}. Sehingga graf *non commuting* dari grup D_{14} memiliki himpunan titik-titik $\Gamma_{D_{14}} = \{r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$.

Kemudian hasil di atas digambarkan ke dalam bentuk graf *non commuting* sebagai berikut:



Gambar 3.11 Graf *Non Commuting* dari D_{14}

Berdasarkan graf pada Gambar 3.11 diperoleh dimensi metrik D_{14} adalah 11, dengan $S = \{s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$. Selanjutnya ditunjukkan bahwa S dengan 10 elemen memiliki representasi yang sama sebagai berikut:

1. $S = \{s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$ memiliki representasi sama $r(sr^5|\mathrm{S}) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ dan $r(sr^6|\mathrm{S}) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$
2. $S = \{s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, r, r^2, r^3, r^4\}$ memiliki representasi sama $r(r^5|\mathrm{S}) = (2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ dan $r(r^6|\mathrm{S}) = (2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$

3.2.6 Dimensi Metrik Graf *Non Commuting* Grup Dihedral D_{16}

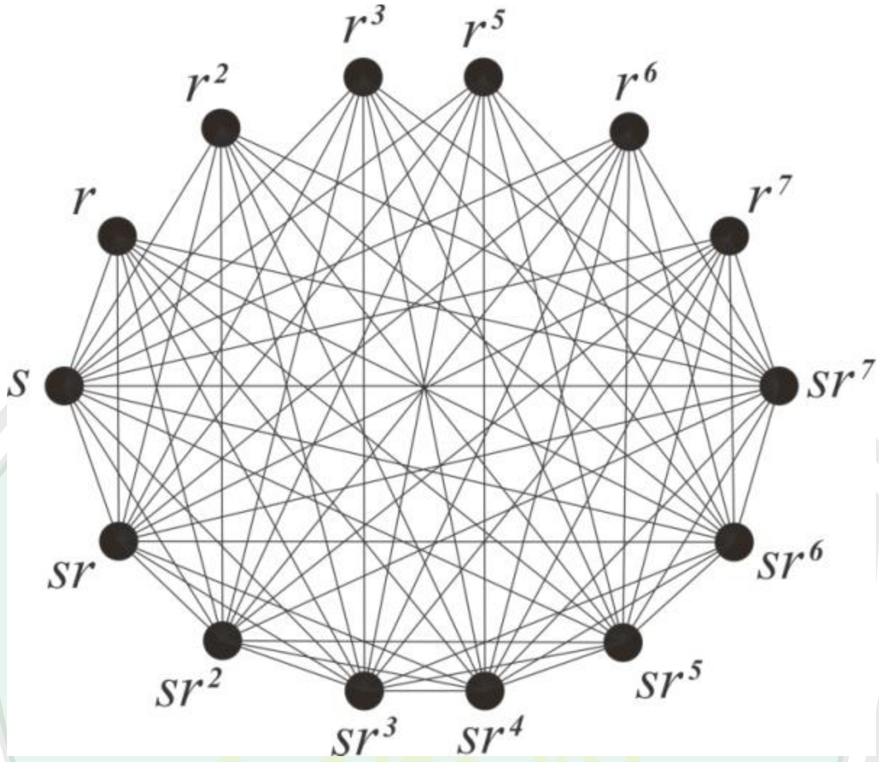
Elemen-elemen dari grup dihedral D_{16} adalah $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$. Adapun hasil operasi komposisi pada setiap elemen grup dihedral D_{16} dalam bentuk tabel *Cayley* sebagai berikut:

Tabel 3.14 Tabel *Cayley* dari $\boldsymbol{D_{16}}$

$\circ$	$\boldsymbol{1}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	$\boldsymbol{r^3}$	$\boldsymbol{r^4}$	$\boldsymbol{r^5}$	$\boldsymbol{r^6}$	$\boldsymbol{r^7}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$	$\boldsymbol{sr^3}$	$\boldsymbol{sr^4}$	$\boldsymbol{sr^5}$	$\boldsymbol{sr^6}$	$\boldsymbol{sr^7}$
$\boldsymbol{1}$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
$\boldsymbol{r}$	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
$\boldsymbol{r^2}$	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
$\boldsymbol{r^3}$	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
$\boldsymbol{r^4}$	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3
$\boldsymbol{r^5}$	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2
$\boldsymbol{r^6}$	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr
$\boldsymbol{r^7}$	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s
$\boldsymbol{s}$	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7
$\boldsymbol{sr}$	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
$\boldsymbol{sr^2}$	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
$\boldsymbol{sr^3}$	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4
$\boldsymbol{sr^4}$	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3
$\boldsymbol{sr^5}$	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2
$\boldsymbol{sr^6}$	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r
$\boldsymbol{sr^7}$	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1

Dari tabel di atas, warna biru menunjukkan *center* grup dihedral D_{16} yaitu $\{1, r^4\}$, karena jika dioperasikan, 1 dan r^4 komutatif dengan semua elemen di D_{16}. Sedangkan daerah warna kuning merupakan unsur-unsur yang tidak komutatif pada grup dihedral D_{16}. Sehingga graf *non commuting* dari grup D_{16} memiliki himpunan titik-titik $\Gamma_{D_{16}} = \{r, r^2, r^3, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$.

Kemudian hasil di atas digambarkan ke dalam bentuk graf *non commuting* sebagai berikut:



Gambar 3.12 Graf *Non Commuting* dari $\boldsymbol{D_{16}}$

Berdasarkan graf pada Gambar 3.12 diperoleh dimensi metrik D_{16} adalah 9, dengan $S = \{s, sr, sr^2, sr^3, r, r^2, r^3, r^5, r^6\}$. Selanjutnya ditunjukkan bahwa S dengan 8 elemen memiliki representasi yang sama sebagai berikut:

1. $S = \{s, sr, sr^2, sr^3, r^2, r^3, r^5, r^6\}$ memiliki representasi yang sama $(r|S) = (2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$ dan $r(r^7|S) = (2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$
2. $S = \{s, sr, sr^2, sr^3, r, r^2, r^3, r^5\}$ memiliki representasi yang sama $(r^6|S) = (2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$ dan $r(r^7|S) = (2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$

Berdasarkan pengamatan pada beberapa graf *non commuting,* maka dapat diperoleh pola sebagai berikut.

Tabel 3.15 Dimensi metrik Graf *Non Commuting* dari Grup Dihedral

Aspek	D_6	D_8	D_{10}	D_{12}	D_{14}	D_{16}	…	D_{2n}
Dimensi metrik	3	3	7	6	11	9	…	2n – 3, n ganjil $\frac{3n-4}{2}$, n genap

Teorema

Misalkan G adalah graf *non commuting* dari grup dihedral D_{2n}, maka dimensi metrik dari G adalah $2n$ – 3 untuk n ganjil dan $\frac{3n-4}{2}$ untuk n genap.

Bukti

Untuk n ganjil, diketahui

1. $d(r^i r^j)\begin{cases}0, i = j\\ 2, i \neq j\end{cases}$, karena $r^i r^j \neq r^j r^i$
2. $d\left(sr^i r^j\right) = 2, \forall i, j$ dan $d\left(r^j sr^i\right) = 2, \forall i, j$, karena $sr^i r^j \neq r^j sr^i$
3. $d(sr^i sr^j)\begin{cases}0, i = j\\ 1, i \neq j\end{cases}$, karena $sr^i sr^j = sr^j sr^i, i \neq j$

Kemudian dimisalkan S sebagai berikut

	S	{ $\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	$\boldsymbol{r^3}$	⋯	$\boldsymbol{r^{n-3}}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$	⋯	$\boldsymbol{r^{n-3}}$ }
r($\boldsymbol{r}$|S)	=	{ 0	2	2	⋯	2	2	2	2	⋯	2 }
r($\boldsymbol{r^2}$|S)	=	{ 2	0	2	⋯	2	2	2	2	⋯	2 }
r($\boldsymbol{r^3}$|S)	=	{ 2	2	0	⋯	2	2	2	2	⋯	2 }
⋮		⋮	⋮	⋮	⋯	⋮	⋮	⋮	⋮	⋯	⋮
r($\boldsymbol{r^{n-3}}$|S)	=	{ 2	2	2	⋯	0	2	2	2	⋯	2 }
r($\boldsymbol{r^{n-2}}$|S)	=	{ 2	2	2	⋯	2	2	2	2	⋯	2 }
r($\boldsymbol{r^{n-1}}$|S)	=	{ 2	2	2	⋯	2	2	2	2	⋯	2 }

r($\boldsymbol{s}$|S)	= { 2	2	2	⋯	2	0	1	1	⋯	1 }
r($\boldsymbol{sr}$|S)	= { 2	2	2	⋯	2	1	0	1	⋯	1 }
r($\boldsymbol{sr^2}$|S)	= { 2	2	2	⋯	2	1	1	0	⋯	1 }
⋮	⋮	⋮	⋮	⋯	⋮	⋮	⋮	⋮	⋯	⋮
r($\boldsymbol{sr^{n-3}}$|S)	= { 2	2	2	⋯	2	1	1	1	⋯	0 }
r($\boldsymbol{sr^{n-2}}$|S)	= { 2	2	2	⋯	2	1	1	1	⋯	1 }
r($\boldsymbol{sr^{n-1}}$|S)	= { 2	2	2	⋯	2	1	1	1	⋯	1 }

Dari uraian di atas terlihat S memiliki representasi yang sama yaitu:

$$r(\boldsymbol{sr^{n-2}}|S) = r(\boldsymbol{sr^{n-1}}|S) \text{ dan } r(\boldsymbol{r^{n-2}}|S) = r(\boldsymbol{r^{n-1}}|S)$$

untuk mendapatkan S dengan representasi yang berbeda maka salah satu dari $\boldsymbol{r^{n-2}}$ atau $\boldsymbol{r^{n-1}}$ dan $\boldsymbol{sr^{n-2}}$ atau $\boldsymbol{sr^{n-1}}$ harus menjadi anggoata S**,** sehingga diperoleh

	S{ $\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	$\boldsymbol{r^3}$	⋯	$\boldsymbol{r^{n-3}}$	$\boldsymbol{r^{n-2}}$	**s**	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$	⋯	$\boldsymbol{sr^{n-3}}$	$\boldsymbol{sr^{n-2}}$}
r($\boldsymbol{r}$|S)	={ 0	2	2	⋯	2	2	2	2	2	⋯	2	2 }
r($\boldsymbol{r^2}$|S)	={ 2	0	2	⋯	2	2	2	2	2	⋯	2	2 }
r($\boldsymbol{r^3}$|S)	={ 2	2	0	⋯	2	2	2	2	2	⋯	2	2 }
⋮	⋮	⋮	⋮	⋯	⋮		⋮	⋮	⋮	⋯		⋮
r($\boldsymbol{r^{n-3}}$|S)	={ 2	2	2	⋯	0	2	2	2	2	⋯	2	2 }
r($\boldsymbol{r^{n-2}}$|S)	={ 2	2	2	⋯	2	0	2	2	2	⋯	2	2 }
r($\boldsymbol{r^{n-1}}$|S)	={ 2	2	2	⋯	2	2	2	2	2	⋯	2	2 }
r(s|S)	={ 2	2	2	⋯	2	2	0	1	1	⋯	1	1 }
r($\boldsymbol{sr}$|S)	={ 2	2	2	⋯	2	2	1	0	1	⋯	1	1 }

r($\boldsymbol{sr^2}$|S)	={ 2	2	2	⋯	2	2	1	1	0	⋯	1	1 }
⋮	⋮	⋮	⋮	⋯	⋮		⋮	⋮	⋮	⋯		⋮
r($\boldsymbol{sr^{n-3}}$|S)	={ 2	2	2	⋯	2	2	1	1	1	⋯	0	1 }
r($\boldsymbol{sr^{n-2}}$|S)	={ 2	2	2	⋯	2	2	1	1	1	⋯	1	0 }
r($\boldsymbol{sr^{n-1}}$|S)	={ 2	2	2	⋯	2	2	1	1	1	⋯	1	1 }

Dari urian di atas terlihat S tidak memiliki representasi yang sama sehingga S merupakan himpunan pemisah minimal, S memiliki anggota sebanyak $2n-3$. Terbukti dim(G) $= 2n-3$, untuk n ganjil

Untuk n genap, diketahui

1. $r^i r^j) \begin{cases} 0, i = j \\ 2, i \neq j \end{cases}$, karena $r^i r^j \neq r^j r^i$
2. $d\left(sr^i r^j\right) = 2, \forall i, j$ dan $d\left(r^j sr^i\right) = 2, \forall i, j$, karena $sr^i r^j \neq r^j sr^i$
3. $d(1, x) = d(x, 1) = 1$
4. $d\left(sr^i r^{\frac{n}{2}}\right) = 2, \forall i$ dan $d\left(r^{\frac{n}{2}} sr^i\right) = 2, \forall i, j$, karena $sr^i r^{\frac{n}{2}} \neq r^{\frac{n}{2}} sr^i$
5. $d(sr^i sr^j) \begin{cases} 0, i = j \\ 1, i \neq j \end{cases}$, karena $sr^i sr^j = sr^j sr^i, i \neq j$

Kemudian dimisalkan S dengan anggota sebagai berikut

S	**={ $\boldsymbol{s}$**	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$	⋯	$\boldsymbol{sr^{\frac{n}{2}-1}}$	$\boldsymbol{sr^{\frac{n}{2}}}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	⋯	$\boldsymbol{r^{\frac{n}{2}+1}}$	⋯	$\boldsymbol{r^{n-3}}$ **}**
r($\boldsymbol{s}$|S)	={ 0	1	1	⋯	1	2	1	1	⋯	1	⋯	1 }
r($\boldsymbol{sr}$|S)	={ 1	0	1	⋯	1	1	1	1	⋯	1	⋯	1 }
r($\boldsymbol{sr^2}$|S)	={ 1	1	0	⋯	1	1	1	1	⋯	1	⋯	1 }
⋮	⋮	⋮	⋮	⋯	⋮	⋮	⋮	⋮	⋯	⋮	⋯	⋮
r($\boldsymbol{sr^{\frac{n}{2}-1}}$|S)	={ 1	1	1	⋯	0	1	1	1	⋯	1	⋯	1 }

$r(sr^{\frac{n}{2}}\vert S)$	$=\{1$	1	1	$\cdots$ 1	0	1	1	$\cdots$	1	$\cdots$	$1\}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$ $\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
$r(sr^{\frac{n}{2}+i}\vert S)$	$=\{1$	1	1	$\cdots$ 1	2	1	1	$\cdots$	1	$\cdots$	$1\}$
$r(r\vert S)$	$=\{1$	1	1	$\cdots$ 1	1	0	2	$\cdots$	2	$\cdots$	$2\}$
$r(r^2\vert S)$	$=\{1$	1	1	$\cdots$ 1	1	2	0	$\cdots$	2	$\cdots$	$2\}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$ $\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
$r(r^{\frac{n}{2}+1}\vert S)$	$=\{1$	2	1	$\cdots$ 1	1	2	2	$\cdots$	0	$\cdots$	$2\}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$ $\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
$r(r^{n-3}\vert S)$	$=\{1$	1	1	$\cdots$ 1	2	2	2	$\cdots$	2	$\cdots$	$0\}$
$r(r^{n-2}\vert S)$	$=\{1$	1	1	$\cdots$ 1	2	2	2	$\cdots$	2	$\cdots$	$2\}$
$r(r^{n-1}\vert S)$	$=\{1$	1	1	$\cdots$ 1	2	2	2	$\cdots$	2	$\cdots$	$2\}$

Dari uraian di atas terlihat S memiliki representasi yang sama yaitu:

$$r(r^{n-2}|S) = r(r^{n-1}|S)$$

untuk mendapatkan S dengan representasi yang berbeda maka salah satu dari r^{n-2} atau r^{n-1} harus menjadi anggoata S, sehingga diperoleh

S	$=\{s$	sr	sr^2	$\cdots$ $sr^{\frac{n}{2}-1}$	$sr^{\frac{n}{2}}$	r	r^2	$\cdots$	$r^{\frac{n}{2}+1}$	$\cdots$	r^{n-3}	$r^{n-2}\}$
$r(s\vert S)$	$=\{0$	1	1	$\cdots$ 1	2	1	1	$\cdots$	1	$\cdots$	1	$1\}$
$r(sr\vert S)$	$=\{1$	0	1	$\cdots$ 1	1	1	1	$\cdots$	1	$\cdots$	1	$1\}$
$r(sr^2\vert S)$	$=\{1$	1	0	$\cdots$ 1	1	1	1	$\cdots$	1	$\cdots$	1	$1\}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$ $\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
$r(sr^{\frac{n}{2}-1}\vert S)$	$=\{1$	1	1	$\cdots$ 0	1	1	1	$\cdots$	1	$\cdots$	1	$1\}$

$r(sr^{\frac{n}{2}}\|S)$	={ 1	1	1	⋯ 1	0	1	1	⋯	1	⋯ 1	1 }
⋮	⋮	⋮	⋮	⋯ ⋮	⋮	⋮	⋮	⋯	⋮	⋯ ⋮	⋮
$r(sr^{\frac{n}{2}+i}\|S)$	={ 1	1	1	⋯ 1	2	1	1	⋯	1	⋯ 1	1 }
$r(r\|S)$	={ 1	1	1	⋯ 1	1	0	2	⋯	2	⋯ 2	2 }
$r(r^2\|S)$	={ 1	1	1	⋯ 1	1	2	0	⋯	2	⋯ 0	2 }
⋮	⋮	⋮	⋮	⋯ ⋮	⋮	⋮	⋮	⋯	⋮	⋯ ⋮	⋮
$r(r^{\frac{n}{2}+1}\|S)$	={ 1	2	1	⋯ 1	1	2	2	⋯	0	⋯ 2	2 }
⋮	⋮	⋮	⋮	⋯ ⋮	⋮	⋮	⋮	⋯	⋮	⋯ ⋮	⋮
$r(r^{n-3}\|S)$	={ 1	1	1	⋯ 1	2	2	2	⋯	2	⋯ 0	2 }
$r(r^{n-2}\|S)$	={ 1	1	1	⋯ 1	2	2	2	⋯	2	⋯ 2	0 }
$r(r^{n-1}\|S)$	={ 1	1	1	⋯ 1	2	2	2	⋯	2	⋯ 2	2 }

Dari urian di atas terlihat S tidak memiliki representasi yang sama sehingga S merupakan himpunan pemisah minimal, S memiliki anggota r^i sebanyak $n-2$ dan sr^1 sebanyak $\frac{n}{2}$, sehingga S memuat anggota sebanyak $\frac{3n-4}{2}$. Terbukti dim(G)= $\frac{3n-4}{2}$, untuk n genap.

3.3 Interpretasi Dimensi Metrik Dalam Pandangan Agama

Matematika tidak lain adalah ilmu yang menjadi alat bantu dalam kehidupan manusia. Matematika telah diciptakan dan sengaja disediakan untuk menuntun manusia memahami kebesaran dan kekuasaan Allah. Matematika tidak lain adalah *makhluq*, dan Allah adalah *khaliq*nya (Abdusysyakir, 2007:88). Matematika pada dasarnya adalah pekerjaan menghitung, sehingga tidak salah jika kemudian ada yang menyebut matematika adalah ilmu hitung atau *ilmu al-hisab*. Dalam urusan hitung-menghitung ini, Allah adalah rajanya. Allah sangat cepat dalam menghitung dan sangat teliti (Abdusysyakir, 2007:83). Seperti yang telah dijelaskan dalam al-Quran bahwa Allah sangat cepat dalam membuat perhitungan dan sangat teliti. Dalam surat an-Nur ayat 39 disebutkan:

وَٱلَّذِينَ كَفَرُوٓاْ أَعۡمَٰلُهُمۡ كَسَرَابِۭ بِقِيعَةٖ يَحۡسَبُهُ ٱلظَّمۡـَٔانُ مَآءً حَتَّىٰٓ إِذَا جَآءَهُۥ لَمۡ يَجِدۡهُ شَيۡـٔٗا
وَوَجَدَ ٱللَّهَ عِندَهُۥ فَوَفَّىٰهُ حِسَابَهُۥۗ وَٱللَّهُ سَرِيعُ ٱلۡحِسَابِ ٣٩

"Dan orang-orang kafir amal-amal mereka adalah laksana fatamorgana di tanah yang datar, yang disangka air oleh orang-orang yang dahaga, tetapi bila didatanginya air itu Dia tidak mendapatinya sesuatu apapun. Dan didapatinya (ketetapan) Allah disisinya, lalu Allah memberikan kepadanya perhitungan amal-amal dengan cukup dan Allah adalah sangat cepat perhitungan-Nya" (Q.S. an-Nur: 39).

Dalam surat Maryam ayat 84 dan 94 juga disebutkan:

فَلَا تَعۡجَلۡ عَلَيۡهِمۡۖ إِنَّمَا نَعُدُّ لَهُمۡ عَدّٗا ٨٤

"Maka janganlah kamu tergesa-gesa memintakan siksa terhadap mereka, karena Sesungguhnya Kami hanya menghitung datangnya (hari siksaan) untuk mereka dengan perhitungan yang teliti" (Q.S. Maryam: 84).

لَّقَدۡ أَحۡصَىٰهُمۡ وَعَدَّهُمۡ عَدّٗا ٩٤

"Sesungguhnya Allah telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti" (Q.S. Maryamr: 94).

Matematika merupakan ilmu yang tidak terlepas dari alam dan agama, semua itu kebenarannya bisa dilihat dalam al-Quran. Alam semesta ini banyak mengandung rahasia tentang fenomena-fenomena alam. Namun keberadaan fenomena-fenomena itu sendiri hanya dapat diketahui oleh orang-orang yang benar-benar mengerti arti kebesaran Allah (Rahman, 2007:1).

Berdasarkan uraian di atas dapat diambil kesimpulan bahwa semua bidang dalam matematika pasti ada korelasinya dalam pandangan agama. Dalam hal ini dimensi metrik yang merupakan basis (himpunan pemisah) sangat berkaitan dengan jarak antara satu titik dengan lainnya.

Jarak adalah panjang lintasan antara satu titik terhadap titik yang lain. Menyinggung tentang jarak, dalam al-Quran disebutkan beberapa istilah jarak antara lain:

وَلِسُلَيْمَٰنَ ٱلرِّيحَ غُدُوُّهَا شَهْرٌ وَرَوَاحُهَا شَهْرٌ ۖ وَأَسَلْنَا لَهُۥ عَيْنَ ٱلْقِطْرِ ۖ وَمِنَ ٱلْجِنِّ مَن يَعْمَلُ بَيْنَ
يَدَيْهِ بِإِذْنِ رَبِّهِۦ ۖ وَمَن يَزِغْ مِنْهُمْ عَنْ أَمْرِنَا نُذِقْهُ مِنْ عَذَابِ ٱلسَّعِيرِ ﴿١٢﴾

"*Dan Kami (tundukkan) angin bagi Sulaiman, yang perjalanannya di waktu pagi sama dengan perjalanan sebulan dan perjalanannya di waktu sore sama dengan perjalanan sebulan (pula) dan Kami alirkan cairan tembaga baginya. Dan sebahagian dari jin ada yang bekerja di hadapannya (di bawah kekuasaannya) dengan izin Tuhannya. Dan siapa yang menyimpang di antara mereka dari perintah Kami, Kami rasakan kepadanya adzab neraka yang apinya menyala-nyala" (Q.S. Saba: 12).*

Dalam tafsir jalalain dijelaskan bahwa "(Dan) Kami tundukkan (bagi Sulaiman angin) menurut qiraat yang lain lafal *ar-Riiha* dibaca *ar-Riihu* yaitu dengan memperkirakan keberadaan lafal *Taskhiirun* (yang perjalanannya di waktu pagi), perjalanannya mulai dari pagi hingga waktu tergelincir matahari (sama dengan perjalanan sebulan, dan perjalanannya di waktu sore hari) yaitu mulai dari tergelincir matahari sampai terbenam (sama dengan perjalanan sebulan), maksudnya sama dengan perjalanan selama itu. Kami leburkan (cairan tembaga baginya) sehingga tembaga itu menjadi lebur selama tiga hari tiga malam, sebagaimana air mengalir dan umat manusia sampai sekarang dapat mengeksploitasinya berkat ilmu yang telah diberikan oleh Allah kepada nabi Sulaiman. (Dan sebagian dari jin ada yang bekerja di bawah kekuasaannya dengan izin) yakni berdasarkan perintah (Rabbnya. Dan siapa yang menyimpang) menyeleweng (di antara mereka dari perintah Kami) yang menyuruhnya untuk taat kepada nabi Sulaiman (Kami rasakan kepadanya adzab neraka yang apinya menyala-nyala) di akhirat nanti. Menurut suatu pendapat, adzab tersebut terjadi di dunia, yaitu malaikat memukulnya dengan cambuk api, yang setiap pukulan dapat membakar dan menghanguskannya".

Sumber lain menjelasakan bahwa maksud dari ayat di atas ialah bila nabi Sulaiman Mengadakan perjalanan dari pagi sampai tengah hari, maka jarak yang ditempuhnya sama dengan jarak perjalanan unta yang cepat dalam sebulan. begitu pula bila ia mengadakan perjalanan dari tengah hari sampai sore, maka kecepatannya sama dengan perjalanan sebulan.

وَجَعَلْنَا بَيْنَهُمْ وَبَيْنَ ٱلْقُرَى ٱلَّتِى بَـٰرَكْنَا فِيهَا قُرًى ظَـٰهِرَةً وَقَدَّرْنَا فِيهَا ٱلسَّيْرَ ۖ سِيرُوا۟ فِيهَا لَيَالِىَ وَأَيَّامًا ءَامِنِينَ ١٨

"Dan Kami jadikan antara mereka dan antara negeri-negeri yang Kami limpahkan berkat kepadanya, beberapa negeri yang berdekatan dan Kami tetapkan antara negeri-negeri itu (jarak-jarak) perjalanan. berjalanlah kamu di kota-kota itu pada malam hari dan siang hari dengan dengan aman" (Q.S. Saba: 18).

Dari ayat di atas yang dimaksud dengan negeri yang Kami limpahkan berkat kepadanya ialah negeri yang berada di Syam, karena kesuburannya dan negeri-negeri yang berdekatan ialah negeri-negeri antara Yaman dan Syam. Sehingga orang-orang dapat berjalan dengan aman siang dan malam tanpa terpaksa berhenti di padang pasir dan tanpa mendapat kesulitan, sebab jarak antara negeri yang satu dengan lainnya cukup ideal untuk melakakukan perjalanan.

فَكَانَ قَابَ قَوْسَيْنِ أَوْ أَدْنَىٰ ٩

"*Maka jadilah Dia dekat (pada Muhammad sejarak) dua ujung busur panah atau lebih dekat (lagi)" (Q.S. An-najm: 9).*

Berdasarkan ayat-ayat al-Quran di atas, terlihat ada dua istilah jarak yang berbeda. Pada ayat yang berkenaan pada peristiwa perjalanan Nabi Sulaiman jarak yang dimaksud adalah jarak dengan bobot waktunya, sedangkan pada ayat yang menjelaskan kesuburan negeri-negeri yang berada di Syam jarak yang dimaksud adalah jarak dengan bobot panjang, begitu pula pada ayat yang terkhir adalah jarak dengan bobot panjang.

Berdasarkan uraian di atas dapat diambil kesimpulan betapa erat hubungan antara dan waktu dalam kehidupan manusia. Dalam kehidupan sehari-hari ketepatan memilih jarak sangat diperlukan sebab akan berdampak pada banyaknya waktu yang dihabiskan. Selain berhubungan dengan waktu, jarak juga sangat berhubungan erat dengan kedisiplinan, hal ini terlihat saat memilih jarak yang salah yaitu terlalu panjang tanpa perhitungan yang matang maka akan membuang-buang waktu dan pasti berdampak pada kedisiplinan.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan yang sudah didapatkan pada Bab III, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Dimensi metrik graf *commuting* dari grup dihedral D_{2n}, $n \geq 3$ adalah $2n - 3$, n ganjil dan $\frac{3n-4}{2}$, n genap.
2. Dimensi metrik graf *non commuting* dari grup dihedral D_{2n}, $n \geq 3$ adalah $2n - 3$, n ganjil dan $\frac{3n-4}{2}$, n genap.
3. Interpretasi dimensi metrik dalam pandangan agama lebih fokus pada jarak. Jarak sangat berpengaruh pada kedisiplinan sehingga jika salah memilih jarak baik dengan jangka waktu ataupun jarak tempuh maka akan berdampak pada keterlambatan. Keterlambatan berdampak pada pengorganisasian waktu yang tidak teratur sehingga akhirnya akan berdampak pada masa depan.

4.2 Saran

Pada penulisan skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pada pokok masalah mengenai dimensi metrik graf *commuting* dan *non commuting* dari grup dihedral. Dengan demikian untuk penelitian selanjutnya, penulis menyarankan kepada pembaca untuk meneliti dimensi metrik pada graf lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Abdollahi, A., Akbari, S., & Maimani, H. 2006. *Non-commuting* Graph of a Group. *Journal of Algebra*, 468-492.

Abdusysyakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Abdussakir, Azizah, N.N., & Nofandika, F.F.. 2009. *Teori Graf*. Malang: UIN Malang Press.

Bondy, J.A. & Murty, U.S.R., 1976. *Graph Theory with Applications*. London: The Macmillan Press Ltd.

Bondy, J.A. & Murty, U.S.R., 2008. *Graph Theory*. New York: Springer.

Budiyasa, I.K.. 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Press.

Chartrand, G. & Lesniak, L.. 1986. *Graph and Digraph 2nd Edition*. California: Wadsworth, Inc.

Chartrand, G. dan Oellermann O.R.. 1993. *Applied and Algorithmic Graph Theory*. Singapore: McGraw-Hill, Inc.

Chelvam, TT., Selvakumar K., & Raja S. 2011. *Commuting* Graphs on Dihedral Groups. *The Journal of Mathematics and Computer* Science. 2 (2): 402-406.

Dummit, DS. & Foote, RM. 1991. *Abstract Algebra*. New Jersey: Prentice Hall, Inc.

Mudjiati, T. 2011. Dimensi Metrik Graf Kincir dengan Daun Bervariasi. Makalah Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika. Yogyakarta: Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY. 3 Desember 2011.

Nawawi, A. & Rowley, P. 2012. *On Commuting Graphs for Elements of Order 3 in Symetry Groups*. Manchester: The MIMS Secretary.

Raisinghania, M.D., & Aggarwal, R.S.. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: S. Chand & Company LTD.

Saputro, S.H. 2012. *On The Metric Dimension of Regular and Composition Graphs and Characterization of all Graphs of Order N with Metric Dimension N – 3*. Disertasi tidak dipublikasikan. Bandung: ITB Bandung.

Vahidi, J. & Talebi, A.A. 2010. The *Commuting* Graphs on Groups D_{2n} and Q_n. *Journal of Mathematics and Computer Science*. 1 (2): 123-127

RIWAYAT HIDUP

Moh. Afifuddin, lahir di kabupaten Sumenep pada tanggal 24 Juni 1992, biasa dipanggil Afif, tinggal di Perum. Griya Sampoerna Sejahtra Kec. Karangploso Kab. Malang. Anak pertama dari pasangan Achmad Zarnuji dengan Arifatun.

Menempuh pendidikan dasar di SDN Kalikatak 1 dan SDN Pajanangger V lulus pada tahun 2005, melanjutkan ke SMP 1 Ibrahimy Sukorejo Situbondo dan lulus pada tahun 2008. Kemudian menempuh pendidikan menengah atas di SMA Ibrahimy Sukorejo Situbondo lulus pada tahun 2011. Selanjutnya, di tahun 2011 menempuh kuliah di Jurusan Matematika UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Salama aktif sebagai mahasiswa, dia aktif diberbagai kegiatan dan organisasi kampus dalam rangka mengenbangkan potensi diri dan berjejaring dengan banyak elemen. Selain sebagai anggota di beberapa organisasi kampus, dia pernah menjabat sebagai ketua CSS MoRA UIN Maulana Malik Ibrahim Malang periode 2013/2014 serta sebagai ketua Relawan POSDAYA Berbasis Masjid LP2M UIN Maulana Malik Ibrahim Malang 2014 sampai sekarang.

Selama menempuh pedidikan tinggat dasar sampai tingkat universitas, berbagai prestasi telah diraih. Prestasi yang pernah diraih diantaranya, Juara I Cerdas Cermat di SMP 1 Ibrahimy dan SMA Ibrahimy , 10 Besar Olimpiade mata pelajaran UN tingkat SMP se-Jatim 2008, Juara III MHQ Gol. 1 Juz Pondok Pesantren Salafiyah-Syafi'iyah 2005, Juara I MHQ Gol. 5 Juz Asrama Huffadzul Qur'an Pondok Pesantren Salafiyah-Syafi'iyah 2008, Juara I MHQ Gol. 10 Juz Asrama Huffadzul Qur'an Pondok Pesantren Salafiyah-Syafi'iyah 2009, Harapan I MHQ Gol. 30 Juz Pondok Pesantren Salafiyah-Syafi'iyah 2010, Juara I MFQ se-kecamatan Wongsorejo 2010, Juara II MFQ se-kabupaten Banyuawangi 2010, dan Juara I MFQ se-kabupaten Situbondo 2010.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Moh. Afifuddin
NIM : 11610070
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi, Matematika
Judul Skripsi : Dimensi Metrik Graf *Commuting* dan *Non Commuting* dari Grup Dihedral
Pembimbing I : Dr. Abdussakir, M.Pd.
Pembimbing II : Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	26 Mei 2015	Konsultasi Kajian Keagamaan	1.
2.	30 September 2015	Revisi Kajian Keagamaan	2.
3.	13 Oktober 2015	Konsultasi Bab I dan Bab II	3.
4.	15 Oktober 2015	Revisi Bab I, Bab II, dan Konsultasi Bab III	4.
5.	27 April 2016	Revisi Bab III	5.
6.	9 Mei 2016	ACC Bab I dan Bab II	6.
7.	9 Mei 2016	ACC Kajian Keagamaan	7.
8.	10 Mei 2016	ACC Bab III	8.
9.	11 Mei 2016	Konsultasi Bab IV	9.
10.	13 Mei 2016	ACC Bab IV	10.
11.	13 Mei 2016	ACC Keseluruhan Kajian Keagamaan	11.
12.	16 Mei 2016	ACC Keseluruhan	12.

Malang, 16 Mei 2016
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001