

**INDEKS DAN KOINDEKS EKSENTRISITAS ZAGREB
PERTAMA DAN KEDUA PADA GRAF TOTAL DARI
RING BILANGAN BULAT MODULO $2p$**

SKRIPSI

**OLEH
MUHAMMAD IRFAN
NIM. 18610087**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022**

**INDEKS DAN KOINDEKS EKSENTRISITAS ZAGREB
PERTAMA DAN KEDUA PADA GRAF TOTAL DARI
RING BILANGAN BULAT MODULO $2p$**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Muhammad Irfan
NIM. 18610087**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022**

**INDEKS DAN KOINDEKS EKSENTRISITAS ZAGREB
PERTAMA DAN KEDUA PADA GRAF TOTAL DARI
RING BILANGAN BULAT MODULO $2p$**

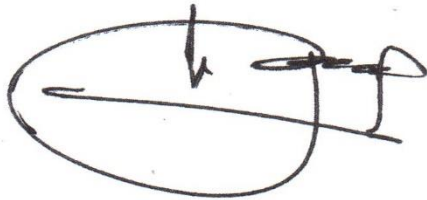
SKRIPSI

**Oleh
Muhammad Irfan
NIM. 18610087**

Telah Disetujui untuk Diuji

Malang, 17 Juni 2022

Dosen Pembimbing I



Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D
NIP. 19571005 198203 1 006


Dosen Pembimbing II



Mohammad Nafie Jauhari, M.Si
NIDT. 19870218 20160801 1 056

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika




Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

**INDEKS DAN KOINDEKS EKSENTRISITAS ZAGREB
PERTAMA DAN KEDUA PADA GRAF TOTAL DARI
RING BILANGAN BULAT MODULO 2p**

SKRIPSI

**Oleh
Muhammad Irfan
NIM. 18610087**

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)


Tanggal 22 Juni 2022

Ketua Penguji : Dr. Elly Susanti, M.Sc

Anggota Penguji 1 : Dr. Abdussakir, M.Pd

Anggota Penguji 2 : Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D

Anggota Penguji 3 : Mohammad Nafie Jauhari, M.Si



.....



.....





.....



.....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Muhammad Irfan

NIM : 18610087

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Indeks dan Koindex Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua
pada Graf Total dari Ring Bilangan Bulat Modulo $2p$

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau tulisan saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber kutipan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan saya tersebut.

Malang, 12 Juni 2022

Yang membuat pernyataan,



1000
SEPULUH RIBU RUPIAH
METERA
TEMPEL
FB471AJX743944061

Muhammad Irfan

MOTO

“Terkadang kita perlu sejenak menoleh ke belakang
sebelum mulai melangkah lebih jauh ke depan.”

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ibunda Mei Purwanti Handayani dan ayahanda Arief Kalmanto serta adik tercinta Wildhan Saputra yang telah senantiasa memberi dukungan berupa doa, motivasi, atau materi kepada penulis hingga dapat menyelesaikan pendidikan di tingkat perguruan tinggi.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Puji syukur atas ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam penyusunan skripsi ini, penulis menyadari sepenuhnya bahwa penyelesaian skripsi ini tidak terlepas dari motivasi, dukungan, serta bimbingan dari berbagai pihak, baik berupa dukungan berupa moril maupun berupa materiil. Oleh sebab itu penulis ingin menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan pelayanan terbaik dengan menyusun program kebijakan yang bertujuan untuk memajukan Fakultas Sains dan Teknologi.
3. Dr. Elly Susanti, M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan pengaruh besar dalam perkembangan Program Studi Matematika sekaligus selaku ketua penguji yang ikut berperan dalam penulisan naskah ini dengan memberikan saran sehingga dapat menjadi masukan bagi penulis agar mampu menyajikan hasil penelitian yang baik.
4. Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D, selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan waktunya dan dengan sabar membimbing serta memberikan arahan dan juga motivasi kepada penulis sepanjang penyelesaian naskah skripsi ini.
5. Mohammad Nafie Jauhari, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah meluangkan waktu untuk membimbing, memberikan pembenahan serta nasehat kepada penulis hingga terselesaikannya pengerjaan skripsi ini.

6. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku penguji utama yang telah memberikakan saran dalam penulisan naskah ini, sehingga dapat menjadi koreksi bagi penulis agar mampu menyajikan hasil menjadi lebih baik.
7. Kedua orang tua serta seluruh keluarga yang telah memberi dukungan, nasehat, serta doa sehingga memotivasi penulis untuk senantiasa terus berjuang menyelesaikan skripsi ini hingga akhir.
8. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah membimbing serta membagikan ilmunya kepada penulis sehingga menjadi bekal materi penulisan skripsi ini.
9. Mahasiswa Program Studi Matematika angkatan 2018 yang ikut memberikan semangat dan motivasi dalam penyelesaian skripsi ini serta telah memberikan pengalaman yang bermakna selama penulis menjadi mahasiswa matematika di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Malang, 12 Juni 2022

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
Error! Bookmark not defined.	
HALAMAN PENGAJUAN	ii
HALAMAN PERSETUJUAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	v
MOTO	vi
PERSEMBAHAN	vii
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
ABSTRAK	xiv
ABSTRACT	xv
المستخلص البحث	xvi
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Manfaat Penelitian	4
1.5 Batasan Masalah	5
BAB II KAJIAN PUSTAKA	6
2.1 Teori Pendukung	6
2.1.1 Grup	6
2.1.2 Ring	7
2.1.3 Kongruensi Modulo n	9
2.1.4 Pembagi Nol	10
2.1.5 Graf	10
2.1.6 Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua	14
2.1.7 Koindex Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua	15
2.2 Kajian Agama	17
2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung	18
BAB III METODE PENELITIAN	20
3.1 Jenis Penelitian	20
3.2 Pra Penelitian	21
3.3 Tahapan Penelitian	21
BAB IV PEMBAHASAN	23
4.1 Graf Total dari Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan \mathbb{Z}_{2p}	23
4.1.1 Graf Total Ring Komutatif \mathbb{Z}_6	23
4.1.2 Graf Total Ring Komutatif \mathbb{Z}_{10}	25
4.1.3 Graf Total Ring Komutatif \mathbb{Z}_{14}	28
4.1.4 Graf Total Ring Komutatif \mathbb{Z}_{22}	32
4.2 Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua	44
4.2.1 Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua pada $\Gamma(\mathbb{Z}_6)$	45

4.2.2	Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua pada $\Gamma(\mathbb{Z}_{10})$	45
4.2.3	Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua pada $\Gamma(\mathbb{Z}_{14})$	47
4.2.4	Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua pada $\Gamma(\mathbb{Z}_{22})$	48
4.3	Koindex Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua	51
4.3.1	Koindex Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua pada $\Gamma(\mathbb{Z}_6)$	52
4.3.2	Koindex Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua pada $\Gamma(\mathbb{Z}_{10})$	52
4.3.3	Koindex Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua pada $\Gamma(\mathbb{Z}_{14})$	53
4.3.4	Koindex Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua pada $\Gamma(\mathbb{Z}_{22})$	55
BAB V PENUTUP		60
5.1	Kesimpulan.....	60
5.2	Saran.....	61
DAFTAR RUJUKAN		62
DAFTAR RIWAYAT HIDUP.....		63

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1	Tabel Perkalian \mathbb{Z}_6	23
Tabel 4.2	Tabel Penjumlahan \mathbb{Z}_6	24
Tabel 4.3	Tabel Perkalian \mathbb{Z}_{10}	25
Tabel 4.4	Tabel penjumlahan \mathbb{Z}_{10}	26
Tabel 4.5	Tabel Perkalian \mathbb{Z}_{14}	28
Tabel 4.6	Tabel Penjumlahan \mathbb{Z}_{14}	29
Tabel 4.7	Tabel Perkalian \mathbb{Z}_{22}	32
Tabel 4.8	Tabel Penjumlahan \mathbb{Z}_{22}	33
Tabel 4.9	Tabel Graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$	40
Tabel 4.10	Tabulasi Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua.....	50
Tabel 4.11	Tabulasi Koindex Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua.....	58

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Contoh Graf.....	10
Gambar 2.2	Terhubung Langsung dan Terkait Langsung	11
Gambar 2.3	Graf untuk Menjelaskan Terhubung Langsung.....	12
Gambar 2.4	Graf untuk Menjelaskan Jarak.....	13
Gambar 2.5	Graf untuk Menjelaskan Eksentrisitas	13
Gambar 2.6	Graf G untuk Mencari Indeks.....	14
Gambar 2.7	Graf untuk Menjelaskan Koindex	16
Gambar 2.8	Kajian Agama dalam Graf	17
Gambar 4.1	Graf total \mathbb{Z}_6	24
Gambar 4.2	Graf Total \mathbb{Z}_{10}	26
Gambar 4.3	Graf Total \mathbb{Z}_{14}	29
Gambar 4.4	Graf Total \mathbb{Z}_{22}	34

ABSTRAK

Irfan, Muhammad. 2022. **Indeks dan Koindex Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua Pada Graf Total dari Ring Bilangan Bulat Modulo $2p$** . Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D (II) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si

Kata Kunci : Indeks dan koindex Zagreb pertama, indeks dan koindex Zagreb kedua, graf total, ring bilangan bulat modulo $2p$

Teori graf adalah pengembangan dari ring, Graf adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di V yang disebut sebagai sisi. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui bentuk umum dari Indeks dan koindex Zagreb pertama serta indeks dan koindex Zagreb kedua pada graf total dari ring bilangan bulat modulo $2p$ dengan $p \geq 3$ dimana p merupakan bilangan prima. Metode penelitian yang digunakan adalah studi literatur dengan merujuk pada beberapa buku serta jurnal ilmiah. Hasil penelitian yang didapat adalah sebagai berikut:

- 1) Indeks dan koindex Zagreb pertama pada graf total ring komutatif \mathbb{Z}_{2p} dengan p adalah bilangan prima dan $p \geq 3$ adalah:

$$E_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})) = 4 \times 2p$$

$$\overline{E}_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})) = 4 \times (p(p-1))$$

- 2) Indeks dan koindex Zagreb Kedua pada graf total ring komutatif \mathbb{Z}_{2p} dengan p adalah bilangan prima dan $p \geq 3$ adalah:

$$E_2(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})) = 4p^2$$

$$\overline{E}_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})) = 4 \times (p(p-1))$$

ABSTRACT

Irfan, Muhammad. 2022. **The First and Second Zagreb Eccentricity Index and Coindex on the Total Graph of the Integer Ring Modulo $2p$** . Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang . Supervisor: (I) Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D (II) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.

Keywords: First Zagreb Eccentricity Index and Coindex, second Zagreb Eccentricity Index and Coindex, total graph, ring integers modulo $2p$.

Graph theory is the extension of the ring, graph is a pair of sets (V, E) where V is non-empty finite set of objects called vertices and E is a (possibly empty) set of unordered pairs of different vertices of V called edge. The purpose of this research is to determine the general form of the first and second Zagreb index and co-index on the total graph of the integer ring modulo $2p$ with $p \geq 3$ where p is a prime number. The research method used literature study using several books and scientific journals. The research results obtained are as follows:

1. The first Zagreb index and co-index on the commutative ring total graph \mathbb{Z}_{2p} with p is a prime number and $p \geq 3$ is:

$$E_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})) = 4 \times 2p$$
$$\overline{E}_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})) = 4 \times (p(p - 1))$$

2. The second Zagreb index and co-index on the commutative ring total graph \mathbb{Z}_{2p} with p is a prime number and $p \geq 3$ is:

$$E_2(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})) = 4p^2$$
$$\overline{E}_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})) = 4 \times (p(p - 1))$$

المستخلص البحث

عرفان، محمد. 2022. المؤشر وزغرب مؤشر رمز غريب الأطوار الأول والثاني على الرسم البياني الإجمالي للحلقة الأعداد الصحيحة مودولو $2p$. البحث الجامعي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج.

المشرف: (1) أ. د. ح. توموذي الماجستير (2) محمد نافع جوهرى الماجستير

الكلمات المفتاحية: المؤشر ومؤشر زغرب الأول، المؤشر ومؤشر زغرب الثاني، الرسم البياني الكلي، حلقة الأعداد الصحيحة مودولو $2p$

نظرية الرسم البياني هي تطور للحلقة، الرسم البياني هو عبارة عن زوج من المجموعات (E, V) ب V يكون مجموعة محدودة وغير فارغة من الكائنات تسمى الرؤوس و E هي مجموعة (ربما فارغة) من الأزواج غير المرتبة من النقاط المميزة في V والتي تسمى الحواف. يهدف هذا البحث إلى تحديد الشكل العام للمؤشر ومؤشر زغرب الأول والمؤشر ومؤشر زغرب الثاني على الرسم البياني الكلي لمقياس الحلقة الأعداد الصحيحة $2p$ ب "ف" $3 \geq$ حيث توجد p رقم أولي. وأسلوب البحث المستخدمة هو الدراسة الأدبية بالرجوع إلى بعض كتب ومجلات علمية. النتائج التي تم الحصول عليها هي كما يلي:

1. المؤشر ومؤشر زغرب الأول في الرسم البياني الإجمالي للحلقة التبادلية \mathbb{Z}_{2p} مع p هو أرقام أولية و $3 \leq p$ وهي:

$$E_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})) = 4 \times 2p$$
$$\overline{E}_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})) = 4 \times (p(p-1))$$

2. المؤشر ومؤشر زغرب الثاني في الرسم البياني الكلي الدائري التبادلي مع p هو أرقام أولية و $3 \leq p$ وهي:

$$E_2(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})) = 4p^2$$
$$\overline{E}_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})) = 4 \times (p(p-1))$$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan cabang ilmu matematika yang sudah cukup lama dikenal dan hasil penelitiannya masih banyak digunakan hingga saat ini. Hal ini dikarenakan pengaplikasiannya yang begitu relevan sebagai penyelesaian masalah dalam kehidupan sehari-hari. Contoh sederhana teori graf adalah mengenai hubungan antara sesama manusia yang di dalam Al-Qur'an sebagaimana telah disebutkan dalam Q.S Al-Hujurat ayat 10, yang artinya :

“Orang-orang beriman itu sesungguhnya bersaudara. Sebab itu, damaikanlah (perbaikilah hubungan) antara kedua saudaramu itu dan takutlah terhadap Allah, supaya kamu mendapat rahmat.”

Pada ayat di atas, menjelaskan tentang setiap hamba Allah di muka bumi ini sebenarnya memiliki keterhubungan yang disebut sebagai tali persaudaraan. Dalam hal ini antar sesama hamba dapat dipresentasikan sebagai titik-titik dalam suatu graf sedangkan sisi-sisinya merupakan representasi dari hubungan antara sesama hamba yang disebut sebagai rasa persaudaraan. Pada ayat tersebut juga dijelaskan bahwa apabila menemui suatu permasalahan dalam menjalin suatu hubungan dengan orang lain hendaknya segera mencari solusi agar tercipta kedamaian di antara keduanya. Apabila hubungan yang terjalin sudah cukup baik, maka dianjurkan untuk senantiasa menjaga hubungan tersebut.

Ring merupakan salah satu bagian dalam ilmu matematika yang masih banyak diteliti di masa kini karena penyelesaiannya dapat dijadikan solusi dalam memecahkan permasalahan kehidupan sehari-hari. Ring adalah suatu himpunan dengan operasi penjumlahan dan perkalian biner dengan syarat memiliki sifat grup

abelian terhadap penjumlahan, asosiatif terhadap perkalian, dan distributif perkalian terhadap penjumlahan. Apabila operasi perkalian ring tersebut bersifat komutatif maka ring tersebut dikatakan ring komutatif. Apabila ring tersebut memiliki identitas perkalian maka ring tersebut dikatakan ring dengan unsur kesatuan (Wicaksono & Soleha, 2013). Misalkan n merupakan bilangan bulat positif, dengan $n > 1$, dan a, b adalah bilangan bulat, Jika n membagi $a - b$, maka dapat dikatakan a kongruen b modulo n atau dapat dinotasikan $a \equiv b \pmod{n}$ (Henky, Hijriyah, & Habibi, 2014).

Dahulu pada awal mula penyebab munculnya ilmu teori graf disebabkan perihal permasalahan yang terjadi pada jembatan di kota Königsberg (sebelah timur negara bagian Prussia, Jerman) atau yang sekarang bernama kota Kaliningrad. Di kota tersebut terdapat tujuh jembatan yang menghubungkan empat daratan yang dibelah oleh sungai Pregal yang mengitari pulau Kneiphof, permasalahannya adalah apakah mungkin ke tujuh jembatan tersebut dapat dilalui tepat satu kali dan kembali ke tempat awal pemberangkatan. Ilmu teori graf pertama kali muncul ketika seorang matematikawan swiss Leonhard Euler pada tahun 1736 mencoba menyelesaikan masalah tersebut dengan memodelkannya ke dalam graf dengan menyatakan daratan sebagai titik V (*vertex*) dan jembatan sebagai sisi E (*edge*) (Munir, 2010). Graf adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di V yang disebut sebagai sisi. Himpunan titik dan sisi di G masing-masing dinotasikan dengan $V(G)$ dan $E(G)$ (Chartrand & Lesniak, 1986)

Indeks eksentrisitas Zagreb pertama didefinisikan sebagai $E_1(G) = \sum_{u \in V(G)} e(u)^2$. Indeks eksentrisitas Zagreb kedua didefinisikan sebagai $E_2(G) = \sum_{uv \in E(G)} e(u)e(v)$. Penelitian terkait indeks Zagreb pertama dan kedua telah dilakukan oleh Gutman (2015) dengan jurnal berjudul *On Zagreb Indices and Coindices* yang membahas tentang suatu himpunan yang dibangun oleh indeks Zagreb dan koindeks dari graf beserta komplemennya.

Materi mengenai koindeks Zagreb pertama dan kedua merupakan materi pelengkap dalam penelitian ini. Untuk koindeks Zagreb pertama memiliki bentuk umum $\bar{E}_1(G) = \sum_{uv \in E(G)} [e(u) + e(v)]$. Koindeks Zagreb kedua memiliki bentuk umum $\bar{E}_2(G) = \sum_{uv \in E(G)} e(u)e(v)$ (Ashrafi, Hamzeh, & T.Doslic, 2010).

Perbedaan penelitian ini dengan beberapa penelitian sebelumnya adalah penelitian ini membahas mengenai eksentrisitas yang merupakan jarak (*distance*) terjauh yang diterapkan pada rumus indeks Zagreb, sehingga pembahasannya tidak menggunakan derajat (*degree*). Selain itu adanya penambahan materi koindeks juga menjadi pembeda tersendiri dibandingkan penelitian sebelumnya. Hal ini memotivasi penulis melakukan penelitian dengan judul “Indeks dan Koindeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua pada Graf Total dari Ring Bilangan Bulat Modulo $2p$ ”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan di atas, maka rumusan masalah penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana bentuk umum indeks dan koindeks eksentrisitas Zagreb pertama pada graf total dari ring bilangan bulat modulo $2p$ dengan p prima?

2. Bagaimana bentuk umum indeks dan koindeks eksentrisitas Zagreb kedua pada graf total dari ring bilangan bulat modulo $2p$ dengan p prima?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, maka tujuan penulisan skripsi ini sebagai berikut:

1. Mengetahui bentuk umum dari indeks dan koindeks eksentrisitas Zagreb pertama pada graf total dari ring bilangan bulat modulo $2p$ dengan p prima.
2. Mengetahui bentuk umum dari indeks dan koindeks eksentrisitas Zagreb kedua pada graf total dari ring bilangan bulat modulo $2p$ dengan p prima.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan membawa manfaat sebagai berikut:

1. Bagi penulis yaitu dapat mengetahui proses pembuktian mengenai pola bentuk umum dari indeks dan koindeks eksentrisitas Zagreb pertama dan kedua pada graf total dari ring bilangan bulat modulo $2p$ dengan p prima.
2. Bagi peneliti selanjutnya yaitu dapat dijadikan rujukan penelitian bidang Matematika khususnya mengenai topik yang berhubungan dengan teori graf contohnya menemukan solusi untuk menentukan rute perjalanan terpendek yang menerapkan konsep indeks dan koindeks Zagreb pertama dan kedua.

1.5 Batasan Masalah

Pada penelitian ini, permasalahan dibatasi dengan hanya menggunakan $p \geq 3$, dengan p merupakan bilangan prima. Pada penelitian ini nilai p tidak dimulai dari 2 dikarenakan pada graf total memiliki syarat antar titik harus terhubung dengan titik lain, sedangkan apabila p bernilai 2 memiliki bentuk graf yang memuat 2 titik yang tidak saling terhubung. Penelitian ini hanya berfokus pada ring komutatif $\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{14}, \mathbb{Z}_{22}$ dikarenakan sampai \mathbb{Z}_{22} telah dapat diketahui pola bentuk umum dari indeks dan koindeks eksentrisitas Zagreb pertama dan kedua dari ring bilangan bulat modulo $2p$ dengan p merupakan bilangan prima.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Teori Pendukung

2.1.1 Grup

Grup yang merupakan suatu himpunan yang tidak kosong dan suatu operasi biner dengan memenuhi beberapa. Misalkan G melambangkan himpunan yang tak kosong dan operasi $+$ pada G adalah suatu operasi biner. Jika $(G, +)$ suatu monoid yang setiap unsurnya mempunyai invers dalam G , maka barulah $(G, +)$ dapat disebut sebagai grup (Sukirman, 2005).

Definisi Grup

Himpunan merupakan himpunan tak kosong dengan operasi biner $+$ dapat dinotasikan $(G, +)$ adalah suatu grup, jika memenuhi aksioma berikut:

- (i) Bersifat asosiatif, yaitu untuk semua $a, b, c \in G$ maka
$$(a + b) + c = a + (b + c),$$
 operasi $+$ asosiatif di G
- (i) Memiliki identitas terhadap operasi $+$ di G , identitas dimisalkan e .
Sehingga berlaku $a + e = e + a = a, \quad \forall a \in G.$
- (ii) Setiap unsur pada G memiliki invers terhadap operasi $+$
Untuk setiap $a \in G$ terdapat $a^{-1} \in G$, a^{-1} merupakan invers dari a ,
Sehingga $a + a^{-1} = a^{-1} + a = e$. Dengan e adalah identitas
(Raisinghania & Aggarwal, 1980)

Contoh Grup

Misalkan $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup, dengan \mathbb{Z} adalah himpunan bilangan bulat dan $+$ adalah operasi penjumlahan. Karena $(\mathbb{Z}, +)$ memenuhi

(i) Ambil $a, b, c \in \mathbb{Z}$, maka $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Jadi operasi penjumlahan bersifat asosiatif di \mathbb{Z} .

(ii) Terdapat $0 \in \mathbb{Z}$ sehingga $a + 0 = 0 + a = a, \forall a \in \mathbb{Z}$

Jadi 0 adalah identitas penjumlahan.

(iii) Untuk $a \in \mathbb{Z}$ ada $(-a) \in \mathbb{Z}$, sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Jadi invers dari a adalah $(-a)$

Jadi $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup.

Definisi Grup Komutatif

Suatu grup $(G, +)$ dengan operasi biner $+$ memenuhi sifat komutatif yaitu $a + b = b + a$, dengan $a, b \in G$ maka $(G, +)$ disebut grup komutatif atau grup *abelian* (Raisinghanian & Aggarwal, 1980).

Contoh Grup Komutatif

Misalkan $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup, dengan \mathbb{Z} adalah himpunan bilangan bulat dan $+$ adalah operasi penjumlahan. Selanjutnya $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup komutatif, karena $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup dan $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ berlaku $x + y = y + x$.

Jadi $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup komutatif

2.1.2 Ring

Ring dinotasikan dengan \mathbb{R} merupakan suatu himpunan dengan dua macam operasi, yakni penjumlahan $(+)$ dan juga perkalian (\times) biner dengan syarat memenuhi beberapa aksioma ring (Dewi, 2011).

Definisi Ring

a. Suatu ring $(R, +, \times)$ merupakan suatu himpunan dinotasikan dengan R dengan operasi biner penjumlahan $(+)$ dan juga perkalian (\times) , yang didefinisikan pada R sedemikian sehingga memenuhi aksioma berikut:

1. $(R, +)$ adalah grup abelian.
2. Memiliki sifat asosiatif terhadap perkalian.

Untuk semua $a, b, c \in R$, maka berlaku $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$.

3. Memiliki sifat distributif

Untuk semua $a, b, c \in \mathbb{Z}$, maka memenuhi hukum :

Distributif kiri $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$, dan

Distributif kanan $(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$

b. Ring komutatif adalah suatu ring yang bersifat komutatif terhadap operasi perkalian. Ring dikatakan komutatif jika untuk semua $a, b \in R$ maka

$$b \times a = a \times b.$$

c. Ring dengan kesatuan adalah suatu ring R dengan suatu identitas perkalian 1 sedemikian hingga $x \times 1 = 1 \times x = x$ untuk semua $x \in R$.

d. Jika n adalah bilangan bulat dengan $n > 1$, maka $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$ adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan $1 \in \mathbb{Z}_n$ (Buchmann, 2004)

Contoh Ring

Buktikan bahwa $(\mathbb{Z}, +, \times)$ dengan \mathbb{Z} adalah himpunan beranggotakan bilangan bulat, dengan $+$ merupakan operasi penjumlahan dan \times merupakan operasi perkalian adalah ring!

Akan dibuktikan jika $(\mathbb{Z}, +, \times)$ merupakan ring

1. Pada contoh 2.1.1.1 telah dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup abelian.
2. Operasi \times bersifat asosiatif di \mathbb{Z} .

Untuk semua $a, b, c \in \mathbb{Z}$, maka berlaku $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$.

3. Operasi perkalian (\times) bersifat distributif terhadap ($+$)

Distributif kanan :

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c), \text{ untuk semua } a, b, c \in \mathbb{Z}$$

Distributif kiri :

$$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c), \text{ untuk semua } a, b, c \in \mathbb{Z}$$

Jadi, terbukti $(\mathbb{Z}, +, \times)$ merupakan suatu ring.

Diketahui $(\mathbb{Z}, +, \times)$ merupakan ring, karena operasi kedua (\times) bersifat komutatif di \mathbb{Z} , yakni berlaku $a \times b = b \times a$, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$, maka $(\mathbb{Z}, +, \times)$ merupakan suatu ring komutatif. Karena terdapat unsur identitas perkalian di \mathbb{Z} terhadap operasi kedua (\times), sehingga untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ berlaku $a \times 1 = 1 \times a = a$, dengan $1 \in \mathbb{Z}$, maka $(\mathbb{Z}, +, \times)$ adalah ring dengan unsur kesatuan.

2.1.3 Kongruensi Modulo n

Misalkan n merupakan bilangan bulat positif, dengan $n > 1$, dan a, b adalah bilangan bulat. Jika n membagi $a - b$, maka dapat dikatakan a kongruen b modulo n atau dapat dinotasikan $a \equiv b \pmod{n}$. Dikatakan a tidak kongruen dengan b modulo n jika n tidak membagi $a - b$, atau dinotasikan $a \not\equiv b \pmod{n}$. Misalkan $0 \leq r < n$ maka $a \equiv r \pmod{n}$ dapat dinotasikan $r = a \pmod{n}$ (Henky, Hijriyah, & Habibi, 2014).

Contoh

$27 \equiv 3 \pmod{4}$ karena $(27 - 3)$ terbagi oleh 4.

$30 \not\equiv 7 \pmod{14}$ karena $(30 - 7)$ tidak terbagi oleh 14.

2.1.4 Pembagi Nol

Suatu elemen x dari ring komutatif R disebut pembagi nol apabila terdapat elemen tak nol $y \in R$ sedemikian hingga $x \times y = 0$ atau $y \times x = 0$. Himpunan pembagi nol dari ring R dinotasikan dengan $Z(R)$ (Joshi, 2014).

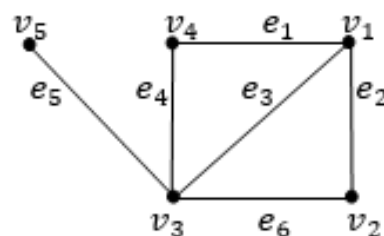
Pembagi nol dapat dicontohkan sebagai berikut:

Misalkan terdapat sebuah ring bilangan bulat modulo 6 yang dinotasikan dengan \mathbb{Z}_6 yang beranggotakan $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ maka didapatkan $Z\{\mathbb{Z}_6\} = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$.

2.1.5 Graf

Graf G merupakan pasangan himpunan yang terdiri atas himpunan tidak kosong serta berhingga $V(G)$ dari obyek disebut *vertex* yang dapat diartikan sebagai titik dan himpunan (mungkin kosong) $E(G)$ dari pasangan titik yang disebut *edge* atau dapat diartikan sebagai sisi. Banyaknya titik pada G disebut order dinotasikan dengan $p(G)$ sedangkan banyaknya sisi pada G disebut ukuran dinotasikan dengan $q(G)$ (Chartrand & Lesniak, 1986)

Graf dicontohkan sebagai berikut



Gambar 2.1 Contoh Graf

Pada gambar 2.1 diperoleh bahwa himpunan $V(G)$ dan $E(G)$ pada graf G adalah

sebagai berikut:

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

Dengan keterangan sebagai berikut:

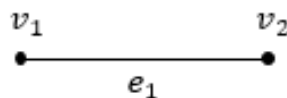
$$e_1 = (v_1, v_4) \quad e_3 = (v_1, v_3) \quad e_5 = (v_3, v_5)$$

$$e_2 = (v_1, v_2) \quad e_4 = (v_3, v_4) \quad e_6 = (v_2, v_3)$$

a. Terhubung dan Terkait Langsung

Misal e_1 adalah sisi di graf G yang menghubungkan titik u dan v , maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*). Titik u dan v dihubungkan oleh sisi $e = (u, v)$, sehingga e dan v serta e dan u disebut terkait langsung (*incident*). Sisi $e = (u, v)$ dapat dinotasikan sebagai $e = uv$ (Chartrand & Lesniak, 1986).

Perhatikan gambar graf I yang memuat himpunan titik $V = \{v_1, v_2\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_1\}$.



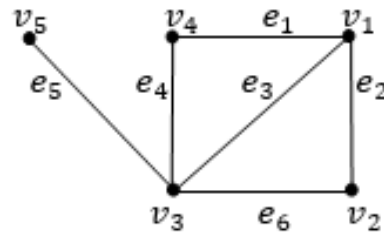
Gambar 2.2 Terhubung Langsung dan Terkait Langsung

Pada gambar 2.2 menunjukkan bahwa v_1 dan v_2 disebut terhubung langsung karena dihubungkan oleh sisi e_1 .

b. Terhubung langsung

Jika titik u dan v adalah titik di graf G dengan $e = uv$ adalah sisi di G , maka dapat dikatakan titik u bertetangga dengan titik v (Chartrand & Lesniak, 1986).

Pengertian terhubung langsung dapat dicontohkan pada gambar berikut:



Gambar 2.3 Graf untuk Menjelaskan Terhubung Langsung

Pada gambar 2.3 diperoleh bahwa v_1 bertetangga dengan v_4 , v_3 dan v_2 . v_2 bertetangga dengan v_1 dan v_3 . v_3 bertetangga dengan v_1 , v_2 , v_4 dan v_5 . v_4 bertetangga dengan v_1 dan v_3 , sedangkan v_5 bertetangga dengan v_3 .

c. Graf Total

Graf total dari ring R dinotasikan dengan $\Gamma(R)$ adalah graf yang titik-titiknya merupakan semua anggota ring R dan dua titik berbeda x dan y akan terhubung langsung jika dan hanya jika $x + y = \mathbb{Z}(R)$ atau pembagi nol dari R . (Anderson & Badawi, 2008)

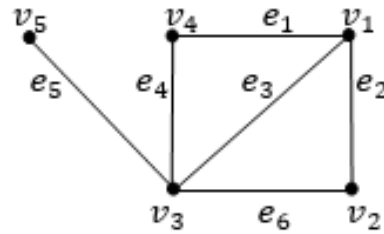
Pembagi nol dapat dicontohkan sebagai berikut:

Misalkan terdapat sebuah ring bilangan bulat modulo 6 yang dinotasikan dengan \mathbb{Z}_6 yang beranggotakan $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ maka dapat dikatakan \mathbb{Z}_6 memiliki pembagi nol, yakni $\{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$

d. Jarak

Untuk suatu graf terhubung G , maka jarak (*distance*) $d(u, v)$ antara dua titik u dan v di G adalah panjang dari lintasan terpendek yang menghubungkan u dan v di G (Chartrand & Lesniak, 1986)

Perhatikan graf G sebagai berikut:



Gambar 2.4 Graf untuk Menjelaskan Jarak

Dari gambar 2.4 diperoleh jarak antar titik sebagai berikut:

$$d(v_1, v_2) = 1 \quad d(v_1, v_3) = 1 \quad d(v_1, v_4) = 1 \quad d(v_1, v_5) = 2$$

$$d(v_2, v_1) = 1 \quad d(v_2, v_3) = 1 \quad d(v_2, v_4) = 2 \quad d(v_2, v_5) = 2$$

$$d(v_3, v_1) = 1 \quad d(v_3, v_2) = 1 \quad d(v_3, v_4) = 1 \quad d(v_3, v_5) = 1$$

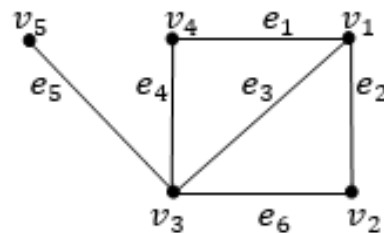
$$d(v_4, v_1) = 1 \quad d(v_4, v_2) = 2 \quad d(v_4, v_3) = 1 \quad d(v_4, v_5) = 2$$

$$d(v_5, v_1) = 2 \quad d(v_5, v_2) = 2 \quad d(v_5, v_3) = 1 \quad d(v_5, v_4) = 2$$

e. Eksentrisitas

Eksentrisitas (*eccentricity*) $e(v)$ dari suatu titik v pada graf terhubung G merupakan maksimum $d(u, v)$, $u \in V(G)$ (Chartrand & Lesniak, 1986)

Contoh:



Gambar 2.5 Graf untuk Menjelaskan Eksentrisitas

Eksentrisitas titik pada contoh gambar 2.5 adalah:

$$e(v_1) = 2, \quad e(v_2) = 2, \quad e(v_3) = 1, \quad e(v_4) = 2, \quad e(v_5) = 2$$

2.1.6 Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua

Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama (E_1) dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$E_1(G) = \sum_{u \in V(G)} (e(u))^2$$

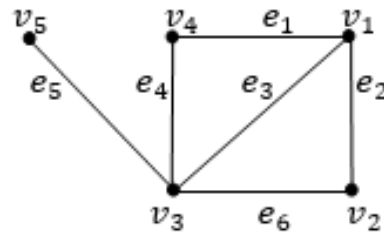
Indeks Eksentrisitas Zagreb Kedua (E_2) dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$E_2(G) = \sum_{uv \in E(G)} e(u)e(v)$$

dengan $e(u)$ merupakan notasi dari nilai eksentrisitas dari titik u , sedangkan $e(v)$ merupakan notasi dari nilai eksentrisitas dari titik v , yang keduanya terhubung langsung (Ashrafi, Hamzeh, & T.Doslic, 2010).

Contoh:

Perhatikan graf G sebagai berikut:



Gambar 2.6 Graf G untuk Mencari Indeks

Berdasarkan gambar 2.6 diperoleh :

$$d(v_1, v_2) = 1 \quad d(v_1, v_3) = 1 \quad d(v_1, v_4) = 1 \quad d(v_1, v_5) = 2$$

$$d(v_2, v_1) = 1 \quad d(v_2, v_3) = 1 \quad d(v_2, v_4) = 2 \quad d(v_2, v_5) = 2$$

$$d(v_3, v_1) = 1 \quad d(v_3, v_2) = 1 \quad d(v_3, v_4) = 1 \quad d(v_3, v_5) = 1$$

$$d(v_4, v_1) = 1 \quad d(v_4, v_2) = 2 \quad d(v_4, v_3) = 1 \quad d(v_4, v_5) = 2$$

$$d(v_5, v_1) = 2 \quad d(v_5, v_2) = 2 \quad d(v_5, v_3) = 1 \quad d(v_5, v_4) = 2$$

Eksentrisitas dari graf G pada gambar 2.6 adalah:

$$e(v_1) = 2, \quad e(v_2) = 2, \quad e(v_3) = 1, \quad e(v_4) = 2, \quad e(v_5) = 2$$

Nilai Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E_1(G) &= \sum_{u \in V(G)} (e(u))^2 \\ &= (e(v_1))^2 + (e(v_2))^2 + (e(v_3))^2 + (e(v_4))^2 + (e(v_5))^2 \\ &= 2^2 + 2^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 \\ &= 17 \end{aligned}$$

Nilai Indeks Eksentrisitas Zagreb Kedua sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E_2(G) &= \sum_{uv \in E(G)} e(u)e(v) \\ &= e(v_1) \cdot e(v_2) + e(v_1) \cdot e(v_3) + e(v_1) \cdot e(v_4) + e(v_2) \cdot e(v_3) + \\ &\quad e(v_3) \cdot e(v_4) + e(v_3) \cdot e(v_5) \\ &= 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 16 \end{aligned}$$

2.1.7 Koindex Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua

Koindex Eksentrisitas Zagreb Pertama \bar{E}_1 dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$\bar{E}_1(G) = \sum_{uv \notin E(G)} [e(u) + e(v)]$$

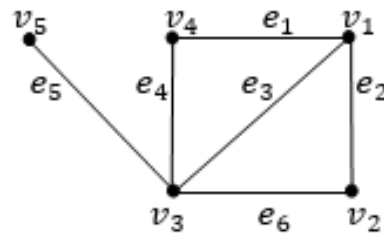
Koindex Eksentrisitas Zagreb Kedua \bar{E}_2 dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$\bar{E}_2(G) = \sum_{uv \notin E(G)} e(u)e(v)$$

dengan $e(u)$ merupakan notasi nilai eksentrisitas dari titik u , sedangkan $e(v)$ merupakan notasi dari nilai eksentrisitas titik v , yang keduanya tidak terhubung langsung (Ashrafi, Hamzeh, & T.Doslic, 2010).

Contoh:

Perhatikan graf G sebagai berikut:



Gambar 2.7 Graf untuk Menjelaskan Koindeks

Eksentrisitas dari graf G pada gambar 2.7 adalah:

$$e(v_1) = 2, \quad e(v_2) = 2, \quad e(v_3) = 1, \quad e(v_4) = 2, \quad e(v_5) = 2$$

Nilai Koindeks Eksentrisitas Zagreb Pertama sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \bar{E}_1(G) &= \sum_{uv \in V(G)} [e(u) + e(v)] \\ &= [e(v_1) + e(v_5)] + [e(v_2) + e(v_4)] + [e(v_2) + e(v_5)] + \\ &\quad [e(v_4) + e(v_5)] \\ &= (2 + 2) \times 4 \\ &= 16 \end{aligned}$$

Nilai Koindeks Eksentrisitas Zagreb Kedua sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \bar{E}_2(G) &= \sum_{uv \in V(G)} e(u)e(v) \\ &= (e(v_1) \times e(v_5)) + (e(v_2) \times e(v_4)) + (e(v_2) \times e(v_5)) + \\ &\quad (e(v_4) \times e(v_5)) \\ &= (2 \times 2) \times 4 \\ &= 16 \end{aligned}$$

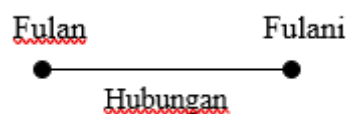
2.2 Kajian Agama

Al-Qur'an memiliki begitu banyak keistimewaan. Salah satunya adalah ayat-ayat dalam Al-Qur'an memiliki keterhubungan erat dengan alam semesta ini beserta isinya tanpa terkecuali dalam bidang ilmu pengetahuan seperti matematika. Tak jarang dilakukan penelitian guna mengetahui makna sesungguhnya yang sebelumnya tersirat dalam ayat-ayat Al-Qur'an.

Pada penelitian ini, penulis mengambil tema terkait dengan Teori Graf. Graf didefinisikan sebagai suatu himpunan tak kosong yang memuat objek-objek yang disebut titik dan suatu pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda yang disebut sisi. Di dalam Al-Qur'an, terdapat firman Allah SWT yang dapat direpresentasikan ke dalam bentuk graf. Berikut adalah salah satu contoh ayat yang dapat dijadikan kajian agama perihal graf, yakni surat Al-Hujurat ayat 10 yang artinya:

“Orang-orang yang beriman itu sesungguhnya bersaudara. Sebab itu damaikanlah (perbaikilah hubungan) antara kedua saudaramu itu dan takutlah terhadap Allah, supaya kamu mendapat rahmat.”(QS.Al-Hujurat:10)

Pada ayat di atas memiliki makna bahwa sesama muslim itu sesungguhnya bersaudara dalam naungan rahmat Allah Swt sehingga hendaknya menyembah kepada-Nya. Apabila digambarkan dalam graf, titik pada graf dipresentasikan oleh orang mukmin dan juga saudaranya. Sedangkan hubungan antara kaum mukmin dengan saudaranya tersebut digambarkan sebagai garis yang menghubungkan dua titik atau lebih sehingga terciptalah suatu graf dari ayat tersebut.



Gambar 2.8 Kajian Agama dalam Graf

Dalam kehidupan sehari-hari faktanya tak jarang harus menghadapi permasalahan yang apabila tak kunjung diselesaikan, maka akan dapat berakhir dengan perselisihan antar sesama saudara. Oleh karena itu dalam surat *Al-Hujurat* ayat 10 diperintahkan agar dapat menjalin perbaikan hubungan dengan saudara yang berselisih tersebut, sehingga melahirkan perdamaian dan tidak menimbulkan perpecahan di antara kaum mukmin.

2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung

Teori utama yang akan dibahas ialah mengenai Indeks dan Koindex Zagreb pertama maupun kedua yang didapat melalui Graf total dengan ring komutatif \mathbb{Z}_{2p} . Dalam penelitian ini penulis ingin menggunakan data ring komutatif \mathbb{Z}_{2p} yang nantinya akan memiliki batasan masalah yakni untuk p haruslah bilangan prima dengan ketentuan $p \geq 3$. Penelitian ini menggunakan $\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{14}, \mathbb{Z}_{22}$. Setelah mendapatkan gambar dari graf total, maka diharuskan mendata nilai dari jarak atau *distance* yang kemudian dapat dicari nilai eksentrisitasnya sehingga dapat dimasukkan ke dalam rumusan indeks Zagreb pertama dan indeks Zagreb kedua.

Rumus umum dari Indeks Zagreb pertama yaitu:

$$E_1(G) = \sum_{u \in V(G)} (e(u))^2$$

yang mana merupakan hasil penjumlahan dari nilai eksentrisitas yang telah dikuadratkan dari masing-masing titik dari graf total ring komutatif \mathbb{Z}_{2p} .

Rumusan umum dari Indeks Zagreb kedua yaitu:

$$E_2(G) = \sum_{uv \in E(G)} e(u)e(v)$$

Yang merupakan hasil perkalian dari nilai eksentrisitas dua titik yang saling terhubung langsung dari titik dari graf total ring komutatif \mathbb{Z}_{2p} .

Rumus umum dari Koindex Zagreb pertama yaitu:

$$\bar{E}_1(G) = \sum_{uv \notin E(G)} [e(u) + e(v)]$$

yang merupakan hasil penjumlahan dari nilai eksentrisitas yang telah dijumlahkan dari dua titik yang tidak terhubung langsung dari graf total ring komutatif \mathbb{Z}_{2p} .

Rumus umum dari Indeks Zagreb kedua yaitu:

$$\bar{E}_2(G) = \sum_{uv \notin E(G)} e(u)e(v)$$

yang merupakan hasil perkalian dari nilai eksentrisitas dua titik yang tidak terhubung langsung dari graf total ring komutatif \mathbb{Z}_{2p} .

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi pustaka atau studi literatur, yaitu kegiatan untuk memperoleh informasi yang sesuai lalu mempelajarinya lalu mengaitkannya dengan topik yang dipilih. Penelitian seperti ini dapat mengambil sumber penelitian dari buku maupun jurnal ilmiah yang berkaitan.

Adapun beberapa tahapan yang akan dilakukan peneliti di antaranya mencari topik penelitian, kemudian mencari teori pendukung yang dibutuhkan, selanjutnya memulai penelitian dengan menentukan objek data yang akan digunakan dalam penelitian, dan tahap terakhir adalah melakukan penelitian hingga akhir. Dalam mencari topik penelitian sebaiknya mencari topik yang masih jarang untuk diteliti. Selain itu, mencari topik yang pembahasannya berguna atau bahkan dapat diterapkan dalam kehidupan di masa kini.

Selanjutnya untuk teori pendukung, sebaiknya mencari dari sumber literatur yang terpercaya seperti buku, jurnal ilmiah, ataupun berpedoman pada naskah peneliti sebelumnya. Teori pendukung yang baik adalah teori yang mampu menjelaskan kepada pembaca perihal bagaimana dasar-dasar teori penelitian tersebut.

Kemudian dalam mencari data yang akan digunakan sebagai obyek penelitian, sebaiknya menggunakan data yang sesuai dengan topik yang dibahas. Dalam hal ini perlu ditentukan batasan masalah yang diambil, sehingga nantinya pembahasan tidak melebihi batas topik yang diangkat.

Ketika sudah melakukan tahapan penelitian, di sinilah tahapan yang menentukan keberhasilan penelitian. Hasil akhir yang diangkat akan sangat berpengaruh terhadap penilaian pembaca terhadap kinerja penulis. Untuk menghindari terjadinya kesalahan yang tidak diinginkan, maka sebaiknya penulis meneliti kembali naskah sebelum dipublikasikan kepada umum.

3.2 Pra Penelitian

Penelitian yang dipilih penulis adalah mengenai indeks dan koindeks eksintrisitas Zagreb pertama dan kedua pada graf total dari ring bilangan bulat modulo $2p$. Penulis terlebih dahulu mencari sumber referensi yang relevan dengan penelitian yang diambil. Pengambilan referensi dilakukan dari beberapa sumber, diantaranya : mencari melalui buku teori graf yang terdapat pada perpustakaan Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, hingga melalui jurnal ilmiah internasional yang berkaitan dengan penelitian yang diangkat.

Dalam penelitian ini penulis ingin menggunakan data ring bilangan bulat modulo $2p$ yang nantinya akan memiliki batasan masalah yakni untuk p haruslah bilangan prima dengan ketentuan $p \geq 3$.

3.3 Tahapan Penelitian

Berikut prosedur penelitian yang dilakukan untuk menentukan indeks dan koindeks eksintrisitas Zagreb pertama dan kedua pada graf total dari ring bilangan bulat modulo $2p$:

1. Menentukan komponen \mathbb{Z}_{2p} , $p = 3, 5, 7, 11$ sehingga didapatkan $\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{10},$

$$\mathbb{Z}_{14}, \mathbb{Z}_{22}.$$

2. Mencari graf total dari ring komutatif $\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{14}, \mathbb{Z}_{22}$. menggunakan tabel Cayley untuk menentukan titik yang terhubung langsung pada graf.
3. Menggambar graf total dari ring komutatif $\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{14}, \mathbb{Z}_{22}$.
4. Menghitung nilai jarak $d(u, v)$ dan nilai eksentrisitas $e(v)$ titik pada graf total ring bilangan bulat modulo $2p$.
5. Menghitung indeks dan koindeks eksintrisitas Zagreb pertama pada graf total dari bilangan bulat modulo $2p$.
6. Menghitung indeks dan koindeks eksintrisitas Zagreb kedua pada graf total dari $\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{14}, \mathbb{Z}_{22}$.
7. Mencari pola bentuk umum indeks dan koindeks eksintrisitas Zagreb pertama dan kedua pada graf total ring bilangan bulat modulo $2p$.
8. Melakukan pembuktian dari pola bentuk umum indeks dan koindeks eksintrisitas Zagreb pertama dan kedua pada graf total dari ring bilangan bulat modulo $2p$.

BAB IV
PEMBAHASAN

Pada bab berikut akan disajikan pembahasan mengenai indeks dan koindeks eksentrisitas Zagreb pertama dan kedua pada graf total dari ring bilangan bulat modulo $2p$ dengan $p \geq 3$, p adalah bilangan prima.

4.1 Graf Total dari Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan \mathbb{Z}_{2p}

Graf total dari ring komutatif dengan unsur kesatuan \mathbb{Z}_{2p} terdiri atas ring komutatif $\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{14}, \mathbb{Z}_{22}$ yang akan dibahas sebagai berikut:

4.1.1 Graf Total Ring Komutatif \mathbb{Z}_6

Ring bilangan bulat modulo 6 atau yang biasa dinotasikan dengan \mathbb{Z}_6 memiliki elemen yaitu $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$ dan $\bar{5}$. Apabila elemen-elemen tersebut dioperasikan satu sama lain dengan operasi perkalian maka akan diperoleh tabel dari operasi perkalian tersebut sebagai berikut:

Tabel 4.1 Tabel Perkalian \mathbb{Z}_6

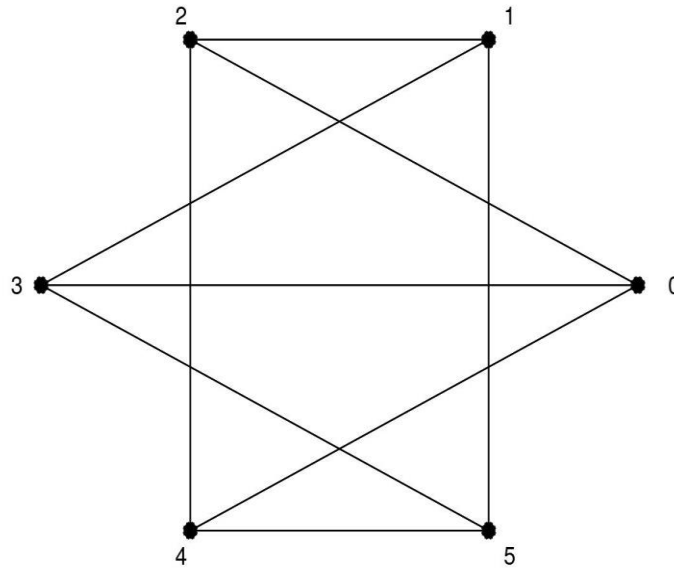
\times	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Berdasarkan tabel tersebut diperoleh $Z(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$. Graf total dari \mathbb{Z}_6 adalah graf yang himpunan titiknya adalah anggota \mathbb{Z}_6 serta titik x dan y akan terhubung langsung jika dan hanya jika $x, y \in \mathbb{Z}_6$ dengan $x + y = Z(\mathbb{Z}_6)$. Maka didapatkan tabel Cayley dengan operasi penjumlahan sebagai berikut:

Tabel 4.2 Tabel Penjumlahan \mathbb{Z}_6

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

Akibatnya akan didapatkan gambar dari $\Gamma(\mathbb{Z}_6)$ sebagai berikut:

Gambar 4.1 Graf Total \mathbb{Z}_6

Dari gambar tersebut juga diperoleh jarak tiap pasang titik pada $\Gamma(\mathbb{Z}_6)$ adalah:

$$\begin{aligned}
 d(\bar{0}, \bar{1}) &= 2, & d(\bar{1}, \bar{0}) &= 2, & d(\bar{2}, \bar{0}) &= 1, & d(\bar{3}, \bar{0}) &= 1, & d(\bar{4}, \bar{0}) &= 1, \\
 d(\bar{0}, \bar{2}) &= 1, & d(\bar{1}, \bar{2}) &= 1, & d(\bar{2}, \bar{1}) &= 1, & d(\bar{3}, \bar{1}) &= 1, & d(\bar{4}, \bar{1}) &= 2, \\
 d(\bar{0}, \bar{3}) &= 1, & d(\bar{1}, \bar{3}) &= 1, & d(\bar{2}, \bar{3}) &= 2, & d(\bar{3}, \bar{2}) &= 2, & d(\bar{4}, \bar{2}) &= 1, \\
 d(\bar{0}, \bar{4}) &= 1, & d(\bar{1}, \bar{4}) &= 2, & d(\bar{2}, \bar{4}) &= 1, & d(\bar{3}, \bar{4}) &= 2, & d(\bar{4}, \bar{3}) &= 2, \\
 d(\bar{0}, \bar{5}) &= 2, & d(\bar{1}, \bar{5}) &= 1, & d(\bar{2}, \bar{5}) &= 2, & d(\bar{3}, \bar{5}) &= 1, & d(\bar{4}, \bar{5}) &= 1,
 \end{aligned}$$

$$d(\bar{5}, \bar{1}) = 1, \quad d(\bar{5}, \bar{2}) = 2, \quad d(\bar{5}, \bar{3}) = 1, \quad d(\bar{5}, \bar{4}) = 1, \quad d(\bar{5}, \bar{0}) = 2,$$

Sehingga diperoleh nilai eksentrisitas dari masing-masing titik pada $\Gamma(\mathbb{Z}_6)$ yaitu:

$$e(\bar{0}) = 2, \quad e(\bar{1}) = 2, \quad e(\bar{2}) = 2, \quad e(\bar{3}) = 2, \quad e(\bar{4}) = 2, \quad e(\bar{5}) = 2$$

4.1.2 Graf Total Ring Komutatif \mathbb{Z}_{10}

Ring bilangan bulat modulo 10 atau yang biasa dinotasikan dengan \mathbb{Z}_{10} memiliki elemen yaitu $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}$ dan $\bar{9}$. Apabila elemen-elemen tersebut dioperasikan satu sama lain dengan operasi perkalian maka akan diperoleh tabel dari operasi perkalian tersebut sebagai berikut:

Tabel 4.3 Tabel Perkalian \mathbb{Z}_{10}

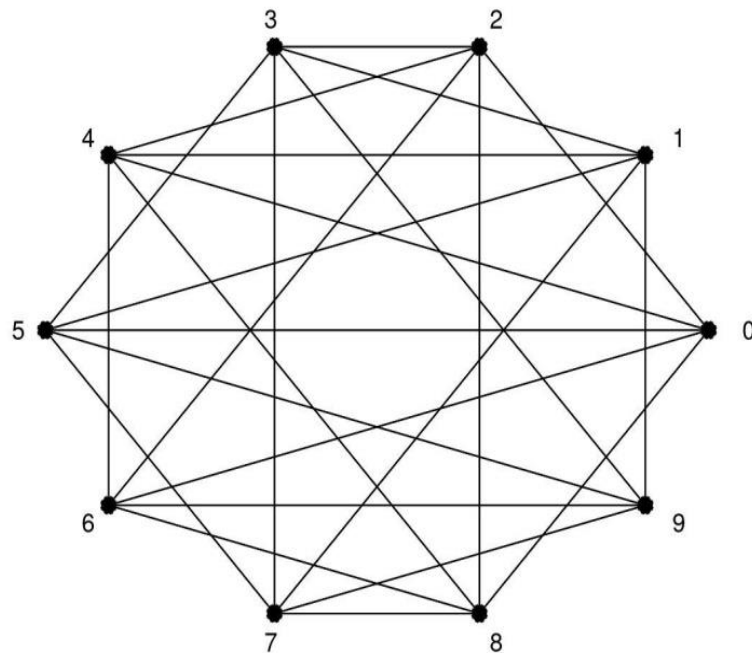
\times	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{8}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$
$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{8}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{9}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Berdasarkan tabel tersebut diperoleh $Z(\mathbb{Z}_{10}) = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{8}\}$. Graf total dari \mathbb{Z}_{10} adalah graf yang himpunan titiknya adalah anggota \mathbb{Z}_{10} serta titik x dan y akan terhubung langsung jika dan hanya jika $x, y \in \mathbb{Z}_{10}$ dengan $x + y = Z(\mathbb{Z}_{10})$. Maka didapatkan tabel Cayley dengan operasi penjumlahan sebagai berikut

Tabel 4.4 Tabel Penjumlahan \mathbb{Z}_{10}

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{7}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{8}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
$\bar{9}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$

Akibatnya akan didapatkan gambar dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{10})$ sebagai berikut:

Gambar 4.2 Graf Total \mathbb{Z}_{10}

Dari gambar tersebut juga diperoleh jarak terdekat tiap pasang titik pada $\Gamma(\mathbb{Z}_{10})$ adalah:

$$d(\bar{0}, \bar{1}) = 2, \quad d(\bar{1}, \bar{0}) = 2, \quad d(\bar{2}, \bar{0}) = 1, \quad d(\bar{3}, \bar{0}) = 2, \quad d(\bar{4}, \bar{0}) = 1,$$

$$\begin{aligned}
d(\bar{0}, \bar{2}) &= 1, & d(\bar{1}, \bar{2}) &= 2, & d(\bar{2}, \bar{1}) &= 2, & d(\bar{3}, \bar{1}) &= 1, & d(\bar{4}, \bar{1}) &= 1, \\
d(\bar{0}, \bar{3}) &= 2, & d(\bar{1}, \bar{3}) &= 1, & d(\bar{2}, \bar{3}) &= 1, & d(\bar{3}, \bar{2}) &= 1, & d(\bar{4}, \bar{2}) &= 1, \\
d(\bar{0}, \bar{4}) &= 1, & d(\bar{1}, \bar{4}) &= 1, & d(\bar{2}, \bar{4}) &= 1, & d(\bar{3}, \bar{4}) &= 2, & d(\bar{4}, \bar{3}) &= 2, \\
d(\bar{0}, \bar{5}) &= 1, & d(\bar{1}, \bar{5}) &= 1, & d(\bar{2}, \bar{5}) &= 2, & d(\bar{3}, \bar{5}) &= 1, & d(\bar{4}, \bar{5}) &= 2, \\
d(\bar{0}, \bar{6}) &= 1, & d(\bar{1}, \bar{6}) &= 2, & d(\bar{2}, \bar{6}) &= 1, & d(\bar{3}, \bar{6}) &= 2, & d(\bar{4}, \bar{6}) &= 1, \\
d(\bar{0}, \bar{7}) &= 2, & d(\bar{1}, \bar{7}) &= 1, & d(\bar{2}, \bar{7}) &= 2, & d(\bar{3}, \bar{7}) &= 1, & d(\bar{4}, \bar{7}) &= 2, \\
d(\bar{0}, \bar{8}) &= 1, & d(\bar{1}, \bar{8}) &= 2, & d(\bar{2}, \bar{8}) &= 1, & d(\bar{3}, \bar{8}) &= 2, & d(\bar{4}, \bar{8}) &= 1, \\
d(\bar{0}, \bar{9}) &= 2, & d(\bar{1}, \bar{9}) &= 1, & d(\bar{2}, \bar{9}) &= 2, & d(\bar{3}, \bar{9}) &= 1, & d(\bar{4}, \bar{9}) &= 2, \\
d(\bar{5}, \bar{0}) &= 1, & d(\bar{6}, \bar{0}) &= 1, & d(\bar{7}, \bar{0}) &= 2, & d(\bar{8}, \bar{0}) &= 1, & d(\bar{9}, \bar{0}) &= 2, \\
d(\bar{5}, \bar{1}) &= 1, & d(\bar{6}, \bar{1}) &= 2, & d(\bar{7}, \bar{1}) &= 1, & d(\bar{8}, \bar{1}) &= 2, & d(\bar{9}, \bar{1}) &= 1, \\
d(\bar{5}, \bar{2}) &= 2, & d(\bar{6}, \bar{2}) &= 1, & d(\bar{7}, \bar{2}) &= 2, & d(\bar{8}, \bar{2}) &= 1, & d(\bar{9}, \bar{2}) &= 2, \\
d(\bar{5}, \bar{3}) &= 1, & d(\bar{6}, \bar{3}) &= 2, & d(\bar{7}, \bar{3}) &= 1, & d(\bar{8}, \bar{3}) &= 2, & d(\bar{9}, \bar{3}) &= 1, \\
d(\bar{5}, \bar{4}) &= 2, & d(\bar{6}, \bar{4}) &= 1, & d(\bar{7}, \bar{4}) &= 2, & d(\bar{8}, \bar{4}) &= 1, & d(\bar{9}, \bar{4}) &= 2, \\
d(\bar{5}, \bar{6}) &= 2, & d(\bar{6}, \bar{5}) &= 2, & d(\bar{7}, \bar{5}) &= 1, & d(\bar{8}, \bar{5}) &= 2, & d(\bar{9}, \bar{5}) &= 1, \\
d(\bar{5}, \bar{7}) &= 1, & d(\bar{6}, \bar{7}) &= 2, & d(\bar{7}, \bar{6}) &= 2, & d(\bar{8}, \bar{6}) &= 1, & d(\bar{9}, \bar{6}) &= 1, \\
d(\bar{5}, \bar{8}) &= 2, & d(\bar{6}, \bar{8}) &= 1, & d(\bar{7}, \bar{8}) &= 1, & d(\bar{8}, \bar{7}) &= 1, & d(\bar{9}, \bar{7}) &= 1, \\
d(\bar{5}, \bar{9}) &= 1, & d(\bar{6}, \bar{9}) &= 1, & d(\bar{7}, \bar{9}) &= 1, & d(\bar{8}, \bar{9}) &= 2, & d(\bar{9}, \bar{8}) &= 2,
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh nilai eksentrisitas dari masing-masing titik pada $\Gamma(\mathbb{Z}_{10})$ yaitu:

$$\begin{aligned}
e(\bar{0}) &= 2, & e(\bar{1}) &= 2, & e(\bar{2}) &= 2, & e(\bar{3}) &= 2, & e(\bar{4}) &= 2, \\
e(\bar{5}) &= 2, & e(\bar{6}) &= 2, & e(\bar{7}) &= 2, & e(\bar{8}) &= 2, & e(\bar{9}) &= 2,
\end{aligned}$$

4.1.3 Graf Total Ring Komutatif \mathbb{Z}_{14}

Ring bilangan bulat modulo 14 atau yang biasa dinotasikan dengan \mathbb{Z}_{14} memiliki elemen yaitu $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{12}$ dan $\bar{13}$. Apabila elemen-elemen tersebut dioperasikan satu sama lain dengan operasi perkalian maka akan diperoleh tabel dari operasi perkalian tersebut sebagai berikut:

Tabel 4.5 Tabel Perkalian \mathbb{Z}_{14}

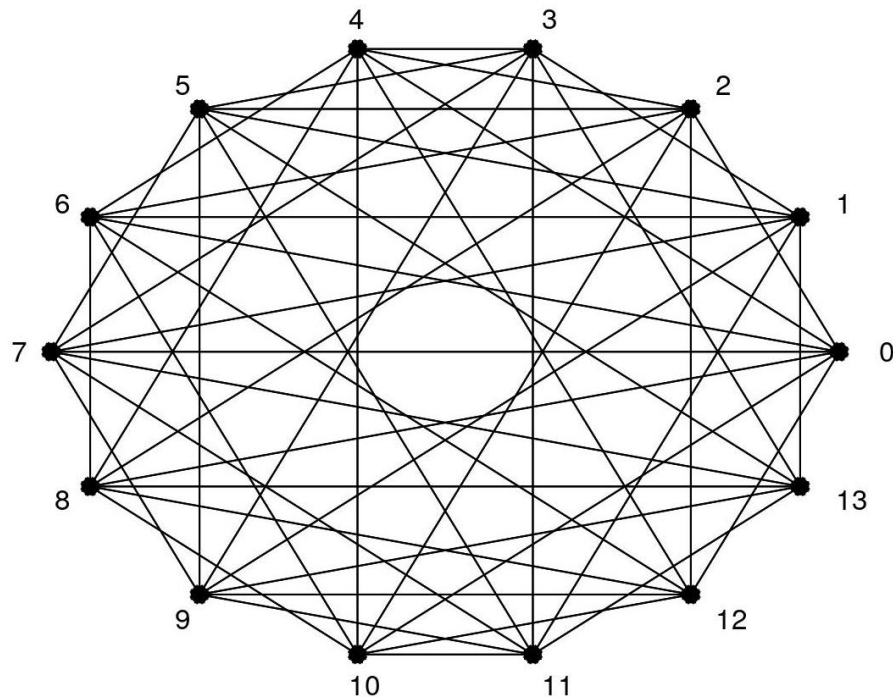
\times	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{12}$	$\bar{13}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{12}$	$\bar{13}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\bar{10}$	$\bar{12}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\bar{10}$	$\bar{12}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\bar{12}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$	$\bar{10}$	$\bar{13}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{8}$	$\bar{11}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{12}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{10}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{12}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{10}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{10}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{11}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\bar{12}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\bar{13}$	$\bar{4}$	$\bar{9}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{12}$	$\bar{4}$	$\bar{10}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{12}$	$\bar{4}$	$\bar{10}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$
$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$
$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{10}$	$\bar{4}$	$\bar{12}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{10}$	$\bar{4}$	$\bar{12}$	$\bar{6}$
$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\bar{4}$	$\bar{13}$	$\bar{8}$	$\bar{3}$	$\bar{12}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\bar{11}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{10}$	$\bar{5}$
$\bar{10}$	$\bar{0}$	$\bar{10}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{12}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{10}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{12}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$
$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{11}$	$\bar{8}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{13}$	$\bar{10}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{12}$	$\bar{9}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{12}$	$\bar{0}$	$\bar{12}$	$\bar{10}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{12}$	$\bar{10}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{13}$	$\bar{0}$	$\bar{13}$	$\bar{12}$	$\bar{11}$	$\bar{10}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Berdasarkan tabel tersebut diperoleh $Z(\mathbb{Z}_{14}) = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{12}\}$. Graf total dari \mathbb{Z}_{14} adalah graf yang himpunan titiknya adalah anggota \mathbb{Z}_{14} serta titik x dan y akan terhubung langsung jika dan hanya jika $x, y \in \mathbb{Z}_{14}$ dengan $x + y = Z(\mathbb{Z}_{14})$. Maka didapatkan tabel Cayley dengan operasi penjumlahan sebagai berikut:

Tabel 4.6 Tabel Penjumlahan \mathbb{Z}_{14}

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{12}$	$\bar{13}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{12}$	$\bar{13}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{12}$	$\bar{13}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{12}$	$\bar{13}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{12}$	$\bar{13}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{12}$	$\bar{13}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{12}$	$\bar{13}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{12}$	$\bar{13}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{7}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{12}$	$\bar{13}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{8}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{12}$	$\bar{13}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
$\bar{9}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{12}$	$\bar{13}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$
$\bar{10}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{12}$	$\bar{13}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$
$\bar{11}$	$\bar{11}$	$\bar{12}$	$\bar{13}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$
$\bar{12}$	$\bar{12}$	$\bar{13}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$
$\bar{13}$	$\bar{13}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{12}$

Akibatnya akan didapatkan gambar dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{14})$ sebagai berikut:

Gambar 4.3 Graf Total \mathbb{Z}_{14}

Dari gambar tersebut juga diperoleh jarak terdekat tiap pasang titik pada $\Gamma(\mathbb{Z}_{14})$ adalah:

$$\begin{aligned}
d(\bar{0}, \bar{1}) &= 2, & d(\bar{1}, \bar{0}) &= 2, & d(\bar{2}, \bar{0}) &= 1, & d(\bar{3}, \bar{0}) &= 2, & d(\bar{4}, \bar{0}) &= 1, \\
d(\bar{0}, \bar{2}) &= 1, & d(\bar{1}, \bar{2}) &= 2, & d(\bar{2}, \bar{1}) &= 2, & d(\bar{3}, \bar{1}) &= 1, & d(\bar{4}, \bar{1}) &= 2, \\
d(\bar{0}, \bar{3}) &= 2, & d(\bar{1}, \bar{3}) &= 1, & d(\bar{2}, \bar{3}) &= 2, & d(\bar{3}, \bar{2}) &= 2, & d(\bar{4}, \bar{2}) &= 1, \\
d(\bar{0}, \bar{4}) &= 1, & d(\bar{1}, \bar{4}) &= 2, & d(\bar{2}, \bar{4}) &= 1, & d(\bar{3}, \bar{4}) &= 1, & d(\bar{4}, \bar{3}) &= 1, \\
d(\bar{0}, \bar{5}) &= 2, & d(\bar{1}, \bar{5}) &= 1, & d(\bar{2}, \bar{5}) &= 1, & d(\bar{3}, \bar{5}) &= 1, & d(\bar{4}, \bar{5}) &= 2, \\
d(\bar{0}, \bar{6}) &= 1, & d(\bar{1}, \bar{6}) &= 1, & d(\bar{2}, \bar{6}) &= 1, & d(\bar{3}, \bar{6}) &= 2, & d(\bar{4}, \bar{6}) &= 1, \\
d(\bar{0}, \bar{7}) &= 1, & d(\bar{1}, \bar{7}) &= 1, & d(\bar{2}, \bar{7}) &= 2, & d(\bar{3}, \bar{7}) &= 1, & d(\bar{4}, \bar{7}) &= 2, \\
d(\bar{0}, \bar{8}) &= 1, & d(\bar{1}, \bar{8}) &= 2, & d(\bar{2}, \bar{8}) &= 1, & d(\bar{3}, \bar{8}) &= 2, & d(\bar{4}, \bar{8}) &= 1, \\
d(\bar{0}, \bar{9}) &= 2, & d(\bar{1}, \bar{9}) &= 1, & d(\bar{2}, \bar{9}) &= 2, & d(\bar{3}, \bar{9}) &= 1, & d(\bar{4}, \bar{9}) &= 2, \\
d(\bar{0}, \bar{10}) &= 1, & d(\bar{1}, \bar{10}) &= 2, & d(\bar{2}, \bar{10}) &= 1, & d(\bar{3}, \bar{10}) &= 2, & d(\bar{4}, \bar{10}) &= 1, \\
d(\bar{0}, \bar{11}) &= 2, & d(\bar{1}, \bar{11}) &= 1, & d(\bar{2}, \bar{11}) &= 2, & d(\bar{3}, \bar{11}) &= 1, & d(\bar{4}, \bar{11}) &= 2, \\
d(\bar{0}, \bar{12}) &= 1, & d(\bar{1}, \bar{12}) &= 2, & d(\bar{2}, \bar{12}) &= 1, & d(\bar{3}, \bar{12}) &= 2, & d(\bar{4}, \bar{12}) &= 1, \\
d(\bar{0}, \bar{13}) &= 2, & d(\bar{1}, \bar{13}) &= 1, & d(\bar{2}, \bar{13}) &= 2, & d(\bar{3}, \bar{13}) &= 1, & d(\bar{4}, \bar{13}) &= 2, \\
d(\bar{5}, \bar{0}) &= 2, & d(\bar{6}, \bar{0}) &= 1, & d(\bar{7}, \bar{0}) &= 1, & d(\bar{8}, \bar{0}) &= 1, & d(\bar{9}, \bar{0}) &= 2, \\
d(\bar{5}, \bar{1}) &= 1, & d(\bar{6}, \bar{1}) &= 1, & d(\bar{7}, \bar{1}) &= 1, & d(\bar{8}, \bar{1}) &= 2, & d(\bar{9}, \bar{1}) &= 1, \\
d(\bar{5}, \bar{2}) &= 1, & d(\bar{6}, \bar{2}) &= 1, & d(\bar{7}, \bar{2}) &= 2, & d(\bar{8}, \bar{2}) &= 1, & d(\bar{9}, \bar{2}) &= 2, \\
d(\bar{5}, \bar{3}) &= 1, & d(\bar{6}, \bar{3}) &= 2, & d(\bar{7}, \bar{3}) &= 1, & d(\bar{8}, \bar{3}) &= 2, & d(\bar{9}, \bar{3}) &= 1, \\
d(\bar{5}, \bar{4}) &= 2, & d(\bar{6}, \bar{4}) &= 1, & d(\bar{7}, \bar{4}) &= 2, & d(\bar{8}, \bar{4}) &= 1, & d(\bar{9}, \bar{4}) &= 2, \\
d(\bar{5}, \bar{6}) &= 2, & d(\bar{6}, \bar{5}) &= 2, & d(\bar{7}, \bar{5}) &= 1, & d(\bar{8}, \bar{5}) &= 2, & d(\bar{9}, \bar{5}) &= 1, \\
d(\bar{5}, \bar{7}) &= 1, & d(\bar{6}, \bar{7}) &= 2, & d(\bar{7}, \bar{6}) &= 2, & d(\bar{8}, \bar{6}) &= 1, & d(\bar{9}, \bar{6}) &= 2, \\
d(\bar{5}, \bar{8}) &= 2, & d(\bar{6}, \bar{8}) &= 1, & d(\bar{7}, \bar{8}) &= 2, & d(\bar{8}, \bar{7}) &= 2, & d(\bar{9}, \bar{7}) &= 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d(\bar{5}, \bar{9}) &= 1, & d(\bar{6}, \bar{9}) &= 2, & d(\bar{7}, \bar{9}) &= 1, & d(\bar{8}, \bar{9}) &= 2, & d(\bar{9}, \bar{8}) &= 2, \\
d(\bar{5}, \bar{10}) &= 2, & d(\bar{6}, \bar{10}) &= 1, & d(\bar{7}, \bar{10}) &= 2, & d(\bar{8}, \bar{10}) &= 1, & d(\bar{9}, \bar{10}) &= 2, \\
d(\bar{5}, \bar{11}) &= 1, & d(\bar{6}, \bar{11}) &= 2, & d(\bar{7}, \bar{11}) &= 1, & d(\bar{8}, \bar{11}) &= 2, & d(\bar{9}, \bar{11}) &= 1, \\
d(\bar{5}, \bar{12}) &= 2, & d(\bar{6}, \bar{12}) &= 1, & d(\bar{7}, \bar{12}) &= 2, & d(\bar{8}, \bar{12}) &= 1, & d(\bar{9}, \bar{12}) &= 1, \\
d(\bar{5}, \bar{13}) &= 1, & d(\bar{6}, \bar{13}) &= 2, & d(\bar{7}, \bar{13}) &= 1, & d(\bar{8}, \bar{13}) &= 1, & d(\bar{9}, \bar{13}) &= 1, \\
d(\bar{10}, \bar{0}) &= 1, & d(\bar{11}, \bar{0}) &= 2, & d(\bar{12}, \bar{0}) &= 1, & d(\bar{13}, \bar{0}) &= 2, \\
d(\bar{10}, \bar{1}) &= 2, & d(\bar{11}, \bar{1}) &= 1, & d(\bar{12}, \bar{1}) &= 2, & d(\bar{13}, \bar{1}) &= 1, \\
d(\bar{10}, \bar{2}) &= 1, & d(\bar{11}, \bar{2}) &= 2, & d(\bar{12}, \bar{2}) &= 1, & d(\bar{13}, \bar{2}) &= 2, \\
d(\bar{10}, \bar{3}) &= 2, & d(\bar{11}, \bar{3}) &= 1, & d(\bar{12}, \bar{3}) &= 2, & d(\bar{13}, \bar{3}) &= 1, \\
d(\bar{10}, \bar{4}) &= 1, & d(\bar{11}, \bar{4}) &= 2, & d(\bar{12}, \bar{4}) &= 1, & d(\bar{13}, \bar{4}) &= 2, \\
d(\bar{10}, \bar{5}) &= 2, & d(\bar{11}, \bar{5}) &= 1, & d(\bar{12}, \bar{5}) &= 2, & d(\bar{13}, \bar{5}) &= 1, \\
d(\bar{10}, \bar{6}) &= 1, & d(\bar{11}, \bar{6}) &= 2, & d(\bar{12}, \bar{6}) &= 1, & d(\bar{13}, \bar{6}) &= 2, \\
d(\bar{10}, \bar{7}) &= 2, & d(\bar{11}, \bar{7}) &= 1, & d(\bar{12}, \bar{7}) &= 2, & d(\bar{13}, \bar{7}) &= 1, \\
d(\bar{10}, \bar{8}) &= 1, & d(\bar{11}, \bar{8}) &= 2, & d(\bar{12}, \bar{8}) &= 1, & d(\bar{13}, \bar{8}) &= 1, \\
d(\bar{10}, \bar{9}) &= 2, & d(\bar{11}, \bar{9}) &= 1, & d(\bar{12}, \bar{9}) &= 1, & d(\bar{13}, \bar{9}) &= 1, \\
d(\bar{10}, \bar{11}) &= 1, & d(\bar{11}, \bar{10}) &= 1, & d(\bar{12}, \bar{10}) &= 1, & d(\bar{13}, \bar{10}) &= 2, \\
d(\bar{10}, \bar{12}) &= 1, & d(\bar{11}, \bar{12}) &= 2, & d(\bar{12}, \bar{11}) &= 2, & d(\bar{13}, \bar{11}) &= 1, \\
d(\bar{10}, \bar{13}) &= 2, & d(\bar{11}, \bar{13}) &= 1, & d(\bar{12}, \bar{13}) &= 2, & d(\bar{13}, \bar{12}) &= 2,
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh nilai eksentrisitas dari masing-masing titik pada $\Gamma(\mathbb{Z}_{14})$:

$$\begin{aligned}
e(\bar{0}) &= 2, & e(\bar{1}) &= 2, & e(\bar{2}) &= 2, & e(\bar{3}) &= 2, & e(\bar{4}) &= 2, \\
e(\bar{5}) &= 2, & e(\bar{6}) &= 2, & e(\bar{7}) &= 2, & e(\bar{8}) &= 2, & e(\bar{9}) &= 2, \\
e(\bar{10}) &= 2, & e(\bar{11}) &= 2, & e(\bar{12}) &= 2, & e(\bar{13}) &= 2,
\end{aligned}$$

4.1.4 Graf Total Ring Komutatif \mathbb{Z}_{22}

Ring modulo 22 atau yang biasa dinotasikan dengan \mathbb{Z}_{22} memiliki elemen yaitu $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{12}, \bar{13}, \bar{14}, \bar{15}, \bar{16}, \bar{17}, \bar{18}, \bar{19}, \bar{20}$ dan $\bar{21}$. Apabila elemen-elemen tersebut dioperasikan satu sama lain dengan operasi perkalian maka akan diperoleh tabel dari operasi perkalian tersebut sebagai berikut:

Tabel 4.7 Tabel Perkalian \mathbb{Z}_{22}

\times	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{12}$	$\bar{13}$	$\bar{14}$	$\bar{15}$	$\bar{16}$	$\bar{17}$	$\bar{18}$	$\bar{19}$	$\bar{20}$	$\bar{21}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{12}$	$\bar{13}$	$\bar{14}$	$\bar{15}$	$\bar{16}$	$\bar{17}$	$\bar{18}$	$\bar{19}$	$\bar{20}$	$\bar{21}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\bar{10}$	$\bar{12}$	$\bar{14}$	$\bar{16}$	$\bar{18}$	$\bar{20}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\bar{10}$	$\bar{12}$	$\bar{14}$	$\bar{16}$	$\bar{18}$	$\bar{20}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\bar{12}$	$\bar{15}$	$\bar{18}$	$\bar{21}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{8}$	$\bar{11}$	$\bar{14}$	$\bar{17}$	$\bar{20}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$	$\bar{10}$	$\bar{13}$	$\bar{16}$	$\bar{19}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{12}$	$\bar{16}$	$\bar{20}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{10}$	$\bar{14}$	$\bar{18}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{12}$	$\bar{16}$	$\bar{20}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{10}$	$\bar{14}$	$\bar{18}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{10}$	$\bar{15}$	$\bar{20}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\bar{13}$	$\bar{18}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{11}$	$\bar{16}$	$\bar{21}$	$\bar{4}$	$\bar{9}$	$\bar{14}$	$\bar{19}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\bar{12}$	$\bar{17}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{12}$	$\bar{18}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{14}$	$\bar{20}$	$\bar{4}$	$\bar{10}$	$\bar{16}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{12}$	$\bar{18}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{14}$	$\bar{20}$	$\bar{4}$	$\bar{10}$	$\bar{16}$
$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{14}$	$\bar{21}$	$\bar{6}$	$\bar{13}$	$\bar{20}$	$\bar{5}$	$\bar{12}$	$\bar{19}$	$\bar{4}$	$\bar{11}$	$\bar{18}$	$\bar{3}$	$\bar{10}$	$\bar{17}$	$\bar{2}$	$\bar{9}$	$\bar{16}$	$\bar{1}$	$\bar{8}$	$\bar{15}$
$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{16}$	$\bar{2}$	$\bar{10}$	$\bar{18}$	$\bar{4}$	$\bar{12}$	$\bar{20}$	$\bar{6}$	$\bar{14}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{16}$	$\bar{2}$	$\bar{10}$	$\bar{18}$	$\bar{4}$	$\bar{12}$	$\bar{20}$	$\bar{6}$	$\bar{14}$
$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\bar{18}$	$\bar{5}$	$\bar{14}$	$\bar{1}$	$\bar{10}$	$\bar{19}$	$\bar{6}$	$\bar{15}$	$\bar{2}$	$\bar{11}$	$\bar{20}$	$\bar{7}$	$\bar{16}$	$\bar{3}$	$\bar{12}$	$\bar{21}$	$\bar{8}$	$\bar{17}$	$\bar{4}$	$\bar{13}$
$\bar{10}$	$\bar{0}$	$\bar{10}$	$\bar{20}$	$\bar{8}$	$\bar{18}$	$\bar{6}$	$\bar{16}$	$\bar{4}$	$\bar{14}$	$\bar{2}$	$\bar{12}$	$\bar{0}$	$\bar{10}$	$\bar{20}$	$\bar{8}$	$\bar{18}$	$\bar{6}$	$\bar{16}$	$\bar{4}$	$\bar{14}$	$\bar{2}$	$\bar{12}$
$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{11}$
$\bar{12}$	$\bar{0}$	$\bar{12}$	$\bar{2}$	$\bar{14}$	$\bar{4}$	$\bar{16}$	$\bar{6}$	$\bar{18}$	$\bar{8}$	$\bar{20}$	$\bar{10}$	$\bar{0}$	$\bar{12}$	$\bar{2}$	$\bar{14}$	$\bar{4}$	$\bar{16}$	$\bar{6}$	$\bar{18}$	$\bar{8}$	$\bar{20}$	$\bar{10}$
$\bar{13}$	$\bar{0}$	$\bar{13}$	$\bar{4}$	$\bar{17}$	$\bar{8}$	$\bar{21}$	$\bar{12}$	$\bar{3}$	$\bar{16}$	$\bar{7}$	$\bar{20}$	$\bar{11}$	$\bar{2}$	$\bar{15}$	$\bar{6}$	$\bar{19}$	$\bar{10}$	$\bar{1}$	$\bar{14}$	$\bar{5}$	$\bar{18}$	$\bar{9}$
$\bar{14}$	$\bar{0}$	$\bar{14}$	$\bar{6}$	$\bar{20}$	$\bar{12}$	$\bar{4}$	$\bar{18}$	$\bar{10}$	$\bar{2}$	$\bar{16}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{14}$	$\bar{6}$	$\bar{20}$	$\bar{12}$	$\bar{4}$	$\bar{18}$	$\bar{10}$	$\bar{2}$	$\bar{16}$	$\bar{8}$
$\bar{15}$	$\bar{0}$	$\bar{15}$	$\bar{8}$	$\bar{1}$	$\bar{16}$	$\bar{9}$	$\bar{2}$	$\bar{17}$	$\bar{10}$	$\bar{3}$	$\bar{18}$	$\bar{11}$	$\bar{4}$	$\bar{19}$	$\bar{12}$	$\bar{5}$	$\bar{20}$	$\bar{13}$	$\bar{6}$	$\bar{21}$	$\bar{14}$	$\bar{7}$
$\bar{16}$	$\bar{0}$	$\bar{16}$	$\bar{10}$	$\bar{4}$	$\bar{20}$	$\bar{14}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{18}$	$\bar{12}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{16}$	$\bar{10}$	$\bar{4}$	$\bar{20}$	$\bar{14}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{18}$	$\bar{12}$	$\bar{6}$
$\bar{17}$	$\bar{0}$	$\bar{17}$	$\bar{12}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\bar{19}$	$\bar{14}$	$\bar{9}$	$\bar{4}$	$\bar{21}$	$\bar{16}$	$\bar{11}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{18}$	$\bar{13}$	$\bar{8}$	$\bar{3}$	$\bar{20}$	$\bar{15}$	$\bar{10}$	$\bar{5}$
$\bar{18}$	$\bar{0}$	$\bar{18}$	$\bar{14}$	$\bar{10}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{20}$	$\bar{16}$	$\bar{12}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{18}$	$\bar{14}$	$\bar{10}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{20}$	$\bar{16}$	$\bar{12}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$
$\bar{19}$	$\bar{0}$	$\bar{19}$	$\bar{16}$	$\bar{13}$	$\bar{10}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{20}$	$\bar{17}$	$\bar{14}$	$\bar{11}$	$\bar{8}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{21}$	$\bar{18}$	$\bar{15}$	$\bar{12}$	$\bar{9}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{20}$	$\bar{0}$	$\bar{20}$	$\bar{18}$	$\bar{16}$	$\bar{14}$	$\bar{12}$	$\bar{10}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{20}$	$\bar{18}$	$\bar{16}$	$\bar{14}$	$\bar{12}$	$\bar{10}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{21}$	$\bar{0}$	$\bar{21}$	$\bar{20}$	$\bar{19}$	$\bar{18}$	$\bar{17}$	$\bar{16}$	$\bar{15}$	$\bar{14}$	$\bar{13}$	$\bar{12}$	$\bar{11}$	$\bar{10}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

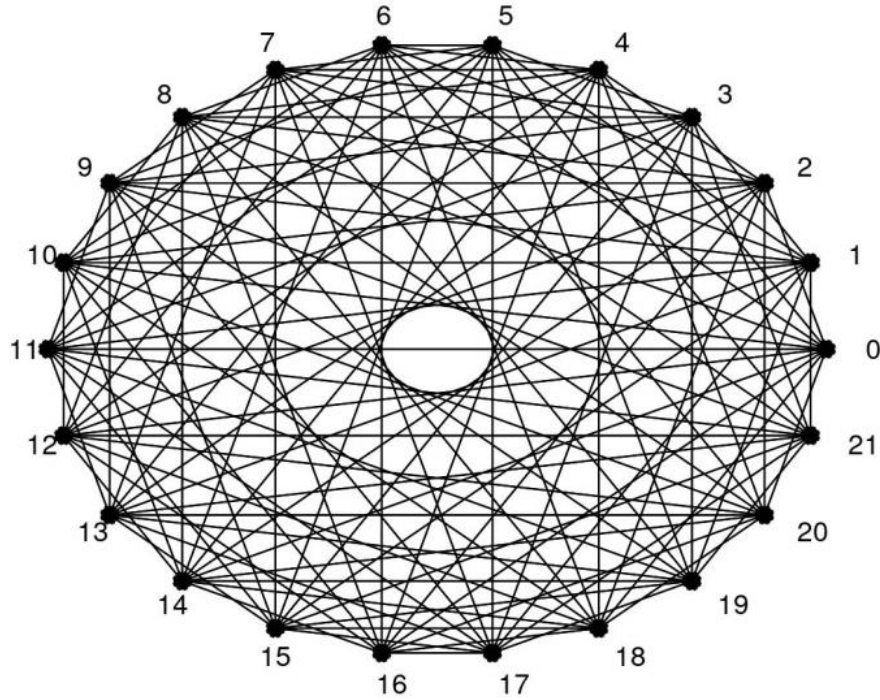
Berdasarkan tabel diperoleh $Z(\mathbb{Z}_{22}) = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{12}, \bar{14}, \bar{16}, \bar{18}, \bar{20}\}$. Graf total dari \mathbb{Z}_{22} adalah graf yang himpunan titiknya adalah anggota \mathbb{Z}_{22} serta titik x dan y akan terhubung langsung jika dan hanya jika $x, y \in \mathbb{Z}_{22}$

dengan $x + y = Z(\mathbb{Z}_{22})$. Maka didapatkan tabel Cayley dengan operasi penjumlahan sebagai berikut:

Tabel 4.8 Tabel Penjumlahan \mathbb{Z}_{22}

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	0	1	2	3	4	5	6	7	8
10	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
13	13	14	15	16	17	18	19	20	21	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
14	14	15	16	17	18	19	20	21	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
15	15	16	17	18	19	20	21	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
16	16	17	18	19	20	21	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
17	17	18	19	20	21	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
18	18	19	20	21	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
19	19	20	21	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
20	20	21	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
21	21	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Akibatnya akan didapatkan gambar dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{22})$ sebagai berikut:



Gambar 4.4 Graf Total \mathbb{Z}_{22}

Dari gambar tersebut diperoleh jarak tiap pasang titik pada $\Gamma(\mathbb{Z}_{22})$ adalah:

$$\begin{aligned}
 & d(\bar{0}, \bar{1}) = 2, \quad d(\bar{1}, \bar{0}) = 2, \quad d(\bar{2}, \bar{0}) = 1, \quad d(\bar{3}, \bar{0}) = 2, \quad d(\bar{4}, \bar{0}) = 1, \\
 & d(\bar{0}, \bar{2}) = 1, \quad d(\bar{1}, \bar{2}) = 2, \quad d(\bar{2}, \bar{1}) = 2, \quad d(\bar{3}, \bar{1}) = 1, \quad d(\bar{4}, \bar{1}) = 2, \\
 & d(\bar{0}, \bar{3}) = 2, \quad d(\bar{1}, \bar{3}) = 1, \quad d(\bar{2}, \bar{3}) = 1, \quad d(\bar{3}, \bar{2}) = 2, \quad d(\bar{4}, \bar{2}) = 1, \\
 & d(\bar{0}, \bar{4}) = 1, \quad d(\bar{1}, \bar{4}) = 2, \quad d(\bar{2}, \bar{4}) = 1, \quad d(\bar{3}, \bar{4}) = 2, \quad d(\bar{4}, \bar{3}) = 2, \\
 & d(\bar{0}, \bar{5}) = 2, \quad d(\bar{1}, \bar{5}) = 1, \quad d(\bar{2}, \bar{5}) = 2, \quad d(\bar{3}, \bar{5}) = 1, \quad d(\bar{4}, \bar{5}) = 2, \\
 & d(\bar{0}, \bar{6}) = 1, \quad d(\bar{1}, \bar{6}) = 2, \quad d(\bar{2}, \bar{6}) = 1, \quad d(\bar{3}, \bar{6}) = 2, \quad d(\bar{4}, \bar{6}) = 1, \\
 & d(\bar{0}, \bar{7}) = 2, \quad d(\bar{1}, \bar{7}) = 1, \quad d(\bar{2}, \bar{7}) = 2, \quad d(\bar{3}, \bar{7}) = 1, \quad d(\bar{4}, \bar{7}) = 1, \\
 & d(\bar{0}, \bar{8}) = 1, \quad d(\bar{1}, \bar{8}) = 2, \quad d(\bar{2}, \bar{8}) = 1, \quad d(\bar{3}, \bar{8}) = 1, \quad d(\bar{4}, \bar{8}) = 1, \\
 & d(\bar{0}, \bar{9}) = 2, \quad d(\bar{1}, \bar{9}) = 1, \quad d(\bar{2}, \bar{9}) = 1, \quad d(\bar{3}, \bar{9}) = 1, \quad d(\bar{4}, \bar{9}) = 2 \\
 & d(\bar{0}, \bar{10}) = 1, \quad d(\bar{1}, \bar{10}) = 1, \quad d(\bar{2}, \bar{10}) = 1, \quad d(\bar{3}, \bar{10}) = 2, \quad d(\bar{4}, \bar{10}) = 1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d(\overline{18}, \overline{10}) &= 1, & d(\overline{19}, \overline{10}) &= 2, & d(\overline{20}, \overline{10}) &= 1, & d(\overline{21}, \overline{10}) &= 2, \\
d(\overline{18}, \overline{11}) &= 2, & d(\overline{19}, \overline{11}) &= 1, & d(\overline{20}, \overline{11}) &= 2, & d(\overline{21}, \overline{11}) &= 1, \\
d(\overline{18}, \overline{12}) &= 1, & d(\overline{19}, \overline{12}) &= 2, & d(\overline{20}, \overline{12}) &= 1, & d(\overline{21}, \overline{12}) &= 1, \\
d(\overline{18}, \overline{13}) &= 2, & d(\overline{19}, \overline{13}) &= 1, & d(\overline{20}, \overline{13}) &= 1, & d(\overline{21}, \overline{13}) &= 1, \\
d(\overline{18}, \overline{14}) &= 1, & d(\overline{19}, \overline{14}) &= 1, & d(\overline{20}, \overline{14}) &= 1, & d(\overline{21}, \overline{14}) &= 2, \\
d(\overline{18}, \overline{15}) &= 1, & d(\overline{19}, \overline{15}) &= 1, & d(\overline{20}, \overline{15}) &= 2, & d(\overline{21}, \overline{15}) &= 1, \\
d(\overline{18}, \overline{16}) &= 1, & d(\overline{19}, \overline{16}) &= 2, & d(\overline{20}, \overline{16}) &= 1, & d(\overline{21}, \overline{16}) &= 2, \\
d(\overline{18}, \overline{17}) &= 2, & d(\overline{19}, \overline{17}) &= 1, & d(\overline{20}, \overline{17}) &= 2, & d(\overline{21}, \overline{17}) &= 1, \\
d(\overline{18}, \overline{19}) &= 2, & d(\overline{19}, \overline{18}) &= 2, & d(\overline{20}, \overline{18}) &= 1, & d(\overline{21}, \overline{18}) &= 2, \\
d(\overline{18}, \overline{20}) &= 1, & d(\overline{19}, \overline{20}) &= 2, & d(\overline{20}, \overline{19}) &= 2, & d(\overline{21}, \overline{19}) &= 1, \\
d(\overline{18}, \overline{21}) &= 2, & d(\overline{19}, \overline{21}) &= 1, & d(\overline{20}, \overline{21}) &= 2, & d(\overline{21}, \overline{20}) &= 2,
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh nilai eksentrisitas dari masing-masing titik pada $\Gamma(\mathbb{Z}_{22})$ yaitu:

$$\begin{aligned}
e(\overline{0}) &= 2, & e(\overline{1}) &= 2, & e(\overline{2}) &= 2, & e(\overline{3}) &= 2, & e(\overline{4}) &= 2, \\
e(\overline{5}) &= 2, & e(\overline{6}) &= 2, & e(\overline{7}) &= 2, & e(\overline{8}) &= 2, & e(\overline{9}) &= 2, \\
e(\overline{10}) &= 2, & e(\overline{11}) &= 2, & e(\overline{12}) &= 2, & e(\overline{13}) &= 2, & e(\overline{14}) &= 2, \\
e(\overline{15}) &= 2, & e(\overline{16}) &= 2, & e(\overline{17}) &= 2, & e(\overline{18}) &= 2, & e(\overline{19}) &= 2, \\
e(\overline{20}) &= 2, & e(\overline{21}) &= 2,
\end{aligned}$$

Berdasarkan uraian di atas, diperoleh tabel berikut

Tabel 4.9 Tabel $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$

$\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$	p	$p(G)$	$q(G)$	$e(v)$
$\Gamma(\mathbb{Z}_6)$	3	6	9	2
$\Gamma(\mathbb{Z}_{10})$	5	10	25	2
$\Gamma(\mathbb{Z}_{14})$	7	14	49	2
$\Gamma(\mathbb{Z}_{22})$	11	22	121	2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$	p	$2p$	p^2	2

Lemma 4.1.1

Misalkan p adalah bilangan prima dan $p \geq 3$. Himpunan pembagi nol dari ring bilangan bulat modulo $2p$ adalah

$$Z(\mathbb{Z}_{2p}) = \{\bar{p}\} \cup \{\overline{2k} \mid k = 0, 1, 2, \dots, (p-1)\}$$

Bukti:

Misalkan $u \in \mathbb{Z}_{2p}, u \neq 0$. Dengan $0 \in Z(\mathbb{Z}_{2p})$

$u \in \mathbb{Z}_{2p} \Leftrightarrow ux \equiv 0 \pmod{2p}$ memiliki solusi tak nol

$$\Leftrightarrow (u, 2p) > 1.$$

$$\Leftrightarrow (u, 2p) = 2 \text{ atau } (u, 2p) = p, \text{ karena } u \neq 2p.$$

$$\Leftrightarrow 2|u \text{ atau } p|u$$

Jadi terbukti jika pembagi nol dari ring bilangan bulat modulo $2p$ adalah

$$Z(\mathbb{Z}_{2p}) = \{\bar{p}\} \cup \{\overline{2k} \mid k = 0, 1, 2, \dots, (p-1)\}$$

Lemma 4.1.2

Misalkan $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$ adalah graf total dari \mathbb{Z}_{2p} , dengan p prima dan $p \geq 3$,

$$V_1 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \dots, \overline{2p-1}\}, \text{ dan}$$

$$V_2 = \{\bar{1}, \bar{3}, \dots, \overline{p-1}, \overline{p+1}, \dots, \overline{2p-2}\}.$$

Maka:

1. $\bar{0}$ terhubung langsung dengan \bar{p} dan $v, \forall v \in V_2$,
2. \bar{p} terhubung langsung dengan $w, \forall w \in V_1$,
3. u terhubung langsung v , untuk setiap $u, v \in V_2, u \neq v$, dan
4. u terhubung langsung v , untuk setiap $u, v \in V_1, u \neq v$.

Bukti.

Karena $\bar{0} + \bar{p} = \bar{p} \in Z(\mathbb{Z}_{2p})$, maka $\bar{0}$ bertetangga dengan \bar{p} .

Karena $v + \bar{0} = v \in Z(\mathbb{Z}_{2p})$, maka $\bar{0}$ bertetangga dengan $v, \forall v \in V$.

Misal $\bar{p} = \overline{2r-1}$ untuk suatu $r \in \mathbb{Z}$ dan $\bar{w} = \overline{2s-1}$ untuk suatu $s \in \{1, 2, \dots, p\}$.

Maka:

$$\begin{aligned} \bar{p} + \bar{w} &= \overline{2r-1} + \overline{2s-1} \\ &= \overline{2(r+s-1)} \in Z(\mathbb{Z}_{2p}). \end{aligned}$$

Dengan demikian \bar{p} terhubung langsung dengan $w, \forall w \in V_1$.

Misal $u = \overline{2x}$ dan $v = \overline{2y}$ untuk suatu $x, y \in \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{p-1}\}$ dan $x \neq y$. Maka

$$\begin{aligned} u + v &= 2x + 2y \\ &= 2(x+y) \in Z(\mathbb{Z}_{2p}). \end{aligned}$$

Dengan demikian u terhubung langsung dengan v , untuk setiap $u, v \in V_2, u \neq v$.

Misal $u = \overline{2x-1}$ dan $v = \overline{2y-1}$ untuk suatu $x, y \in \{\bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{p}\}$ dan $x \neq y$.

Maka

$$\begin{aligned} u + v &= 2x - 1 + 2y - 1 \\ &= 2(x+y-1) \in Z(\mathbb{Z}_{2p}). \end{aligned}$$

Dengan demikian u terhubung langsung dengan v , untuk setiap $u, v \in V_1, u \neq v$

Akibat 4.1.2

Dari Lemma 4.1.2 diperoleh

1. $N_{\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})}(\bar{0}) = \{p\} \cup V_2 \setminus \{\bar{0}\},$
2. $N_{\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})}(\bar{p}) = V_1 \cup \{\bar{0}\},$
3. $N_{\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})}(u) = V_2 \setminus \{u\} \cup \{p - u\}, \forall u \in V_2,$ dan
4. $N_{\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})}(u) = V_1 \setminus \{u\} \cup \{p - u\}, \forall u \in V_1.$

Dengan demikian $\deg(v) = p, \forall v \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p}))$.

Sehingga $|E(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p}))| = \frac{2p \cdot p}{2} = p^2$

dan banyaknya pasangan titik yang tidak terhubung langsung adalah:

$$\begin{aligned} \binom{2p}{2} - p^2 &= \frac{(2p)!}{(2p-2)!2!} - p^2 \\ &= \frac{2p \cdot (2p-1)}{2} - p^2 \\ &= 2p^2 - p - p^2 \\ &= p^2 - p \\ &= p(p-1). \end{aligned}$$

Bukti.

Dari Lemma 4.1.1 didapatkan:

1. $\bar{0}$ terhubung langsung dengan \bar{p} dan $v, \forall v \in V_2$. Namun $\bar{0}$ tidak terhubung langsung dengan $w, \forall w \in V_1$.
2. \bar{p} terhubung langsung dengan $\bar{0}$ dan $w, \forall w \in V_1$.
3. u terhubung langsung v , untuk setiap $u, v \in V_2, u \neq v$,
4. u terhubung langsung v , untuk setiap $u, v \in V_1, u \neq v$.

Lemma 4.1.3

Misal $n \geq 3$ suatu bilangan prima. Eksentrisitas titik $v \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p}))$ adalah $e(v) = 2$.

Bukti.

Misal $v \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p}))$. Maka $v \in V_1 = \{\overline{2n-1} | n = 1, 2, \dots, p\} \setminus \{\overline{p}\}$

atau $v \in V_2 = \{\overline{2n} | n = 0, 1, 2, \dots, p-1\}$ atau $v = p$.

Kasus 1, $v \in V_1$

Karena $v + 0 = v \notin Z(\mathbb{Z}_{2p})$, maka v tidak terhubung langsung dengan 0.

Sehingga:

$$e(v) \geq 2. \quad (i)$$

Dari Lemma 4.1.1, karena v terhubung langsung dengan p dan $w, \forall w \in V_1$, maka $d(v, p) = d(v, w) = 1, \forall w \in V_1$. Karena v terhubung langsung dengan 0, dan 0 terhubung langsung dengan semua unsur V_2 , maka $d(v, w) = 2, \forall w \in V_2$.

Sehingga:

$$e(v) \leq 2. \quad (ii)$$

Dari (i) dan (ii) diperoleh $e(v) = 2, \forall v \in V_1$.

Kasus 2, $v \in V_2$

Karena $v + 1 \notin Z(\mathbb{Z}_{2p})$, maka v tidak terhubung langsung dengan 1. Dengan demikian:

$$e(v) \geq 2. \quad (iii)$$

Dari Lemma 4.1.1, karena v terhubung langsung dengan $w, \forall w \in V_2$, maka $d(v, w) = 1, \forall w \in V_2$. Karena v terhubung langsung dengan $p - v \in V_1$, dan $p - v$ terhubung langsung dengan semua unsur V_1 dan p , maka $d(v, p) = d(v, w) = 2, \forall w \in V_1$.

Sehingga:

$$e(v) \leq 2. \quad (iv)$$

Dari (iii) dan (iv) diperoleh $e(v) = 2, \forall v \in V_2$.

Kasus 3, $v = p$

Karena $v + 2 \notin Z(\mathbb{Z}_{2p})$, maka v tidak terhubung langsung dengan 2. Dengan demikian:

$$e(v) \geq 2. \quad (v)$$

Dari Lemma 4.1.1, karena v terhubung langsung dengan $w, \forall w \in V_1$, maka $d(v, w) = 1, \forall w \in V_1$. Karena p terhubung langsung dengan 0, dan 0 terhubung langsung dengan semua unsur V_2 , maka $d(v, w) = 2, \forall w \in V_2$. Dengan demikian:

$$e(v) \leq 2. \quad (vi)$$

Dari (v) dan (vi) diperoleh $e(v) = e(p) = 2$

Dari ketiga kasus tersebut disimpulkan bahwa $e(v) = 2, \forall v \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p}))$.

4.2 Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua

Bentuk umum dari Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua dari ring komutatif Z_{2p} dapat diketahui dengan mensubstitusikan data hasil pengamatan berupa nilai eksentrisitas $e(u), e(v)$ yang saling terhubung langsung pada graf total. Sehingga didapatkan nilai eksentrisitas Zagreb pertama dan kedua dari ring bilangan bulat modulo $2p$.

4.2.1 Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua pada $\Gamma(\mathbb{Z}_6)$

Dari Gambar 4.1 $\Gamma(\mathbb{Z}_6)$ diperoleh nilai eksentrisitas yaitu:

$$e(\bar{0}) = 2, \quad e(\bar{1}) = 2, \quad e(\bar{2}) = 2, \quad e(\bar{3}) = 2, \quad e(\bar{4}) = 2, \quad e(\bar{5}) = 2$$

Dengan demikian nilai indeks eksentrisitas Zagreb pertama pada $\Gamma(\mathbb{Z}_6)$ yaitu :

$$\begin{aligned} E_1 &= \sum_{u \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_6))} (e(u))^2 \\ &= e(\bar{0})^2 + e(\bar{1})^2 + e(\bar{2})^2 + e(\bar{3})^2 + e(\bar{4})^2 + e(\bar{5})^2 \\ &= (2)^2 \times 6 \\ &= 24 \end{aligned}$$

Kemudian nilai indeks eksentrisitas Zagreb kedua pada $\Gamma(\mathbb{Z}_6)$ yaitu:

$$\begin{aligned} E_2 &= \sum_{uv \in E(\Gamma(\mathbb{Z}_6))} e(u)e(v) \\ &= (e(\bar{0}) \times e(\bar{2})) + (e(\bar{0}) \times e(\bar{3})) + (e(\bar{0}) \times e(\bar{4})) + (e(\bar{1}) \times e(\bar{2})) \\ &\quad + (e(\bar{1}) \times e(\bar{3})) + (e(\bar{1}) \times e(\bar{5})) + (e(\bar{2}) \times e(\bar{4})) + (e(\bar{3}) \times e(\bar{5})) \\ &\quad + (e(\bar{4}) \times e(\bar{5})) \\ &= (2 \times 2) \times 9 \\ &= 36 \end{aligned}$$

4.2.2 Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua pada $\Gamma(\mathbb{Z}_{10})$

Dari Gambar 4.2 $\Gamma(\mathbb{Z}_{10})$ diperoleh nilai eksentrisitas yaitu:

$$\begin{aligned} e(\bar{0}) = 2, \quad e(\bar{1}) = 2, \quad e(\bar{2}) = 2, \quad e(\bar{3}) = 2, \quad e(\bar{4}) = 2, \\ e(\bar{5}) = 2, \quad e(\bar{6}) = 2, \quad e(\bar{7}) = 2, \quad e(\bar{8}) = 2, \quad e(\bar{9}) = 2, \end{aligned}$$

Dengan demikian nilai indeks eksentrisitas Zagreb pertama pada $\Gamma(\mathbb{Z}_{10})$ yaitu

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \sum_{u \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{10}))} (e(u))^2 \\
 &= e(\bar{0})^2 + e(\bar{1})^2 + e(\bar{2})^2 + e(\bar{3})^2 + e(\bar{4})^2 + e(\bar{5})^2 + e(\bar{6})^2 + e(\bar{7})^2 \\
 &\quad + e(\bar{8})^2 + e(\bar{9})^2 \\
 &= (2)^2 \times 10 \\
 &= 40
 \end{aligned}$$

Kemudian nilai indeks eksentrisitas Zagreb kedua pada $\Gamma(\mathbb{Z}_{10})$ yaitu :

$$\begin{aligned}
 E_2 &= \sum_{uv \in E(\Gamma(\mathbb{Z}_{10}))} e(u)e(v) \\
 &= (e(\bar{0}) \times e(\bar{2})) + (e(\bar{0}) \times e(\bar{4})) + (e(\bar{0}) \times e(\bar{5})) + (e(\bar{0}) \times e(\bar{6})) \\
 &\quad + (e(\bar{0}) \times e(\bar{8})) + (e(\bar{1}) \times e(\bar{3})) + (e(\bar{1}) \times e(\bar{4})) + (e(\bar{1}) \times e(\bar{5})) \\
 &\quad + (e(\bar{1}) \times e(\bar{7})) + (e(\bar{1}) \times e(\bar{9})) + (e(\bar{2}) \times e(\bar{3})) + (e(\bar{2}) \times e(\bar{4})) \\
 &\quad + (e(\bar{2}) \times e(\bar{6})) + (e(\bar{2}) \times e(\bar{8})) + (e(\bar{3}) \times e(\bar{5})) + (e(\bar{3}) \times e(\bar{7})) \\
 &\quad + (e(\bar{3}) \times e(\bar{9})) + (e(\bar{4}) \times e(\bar{6})) + (e(\bar{4}) \times e(\bar{8})) + (e(\bar{5}) \times e(\bar{7})) \\
 &\quad + (e(\bar{5}) \times e(\bar{9})) + (e(\bar{6}) \times e(\bar{8})) + (e(\bar{6}) \times e(\bar{9})) + (e(\bar{7}) \times e(\bar{8})) \\
 &\quad + (e(\bar{7}) \times e(\bar{9})) \\
 &= (2 \times 2) \times 25 \\
 &= 100
 \end{aligned}$$

4.2.3 Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua pada $\Gamma(\mathbb{Z}_{14})$

Dari Gambar 4.3 $\Gamma(\mathbb{Z}_{14})$ diperoleh nilai eksentrisitas yaitu:

$$e(\bar{0}) = 2, \quad e(\bar{1}) = 2, \quad e(\bar{2}) = 2, \quad e(\bar{3}) = 2, \quad e(\bar{4}) = 2,$$

$$e(\bar{5}) = 2, \quad e(\bar{6}) = 2, \quad e(\bar{7}) = 2, \quad e(\bar{8}) = 2, \quad e(\bar{9}) = 2,$$

$$e(\bar{10}) = 2, \quad e(\bar{11}) = 2, \quad e(\bar{12}) = 2, \quad e(\bar{13}) = 2,$$

Dengan demikian nilai indeks eksentrisitas Zagreb pertama pada $\Gamma(\mathbb{Z}_{14})$ yaitu

$$\begin{aligned} E_1 &= \sum_{u \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{14}))} (e(u))^2 \\ &= e(\bar{0})^2 + e(\bar{1})^2 + e(\bar{2})^2 + e(\bar{3})^2 + e(\bar{4})^2 + e(\bar{5})^2 + e(\bar{6})^2 + e(\bar{7})^2 \\ &\quad + e(\bar{8})^2 + e(\bar{9})^2 + e(\bar{10})^2 + e(\bar{11})^2 + e(\bar{12})^2 + e(\bar{13})^2 \\ &= (2)^2 \times 14 \\ &= 56 \end{aligned}$$

Kemudian nilai indeks eksentrisitas Zagreb kedua pada $\Gamma(\mathbb{Z}_{14})$ yaitu :

$$\begin{aligned} E_2 &= \sum_{uv \in E(\Gamma(\mathbb{Z}_{14}))} e(u)e(v) \\ &= (e(\bar{0}) \times e(\bar{2})) + (e(\bar{0}) \times e(\bar{4})) + (e(\bar{0}) \times e(\bar{6})) + (e(\bar{0}) \times e(\bar{7})) \\ &\quad + (e(\bar{0}) \times e(\bar{8})) + (e(\bar{0}) \times e(\bar{10})) + (e(\bar{0}) \times e(\bar{12})) + (e(\bar{1}) \times e(\bar{3})) \\ &\quad + (e(\bar{1}) \times e(\bar{5})) + (e(\bar{1}) \times e(\bar{6})) + (e(\bar{1}) \times e(\bar{7})) + (e(\bar{1}) \times e(\bar{9})) \\ &\quad + (e(\bar{1}) \times e(\bar{11})) + (e(\bar{1}) \times e(\bar{13})) + (e(\bar{2}) \times e(\bar{4})) + (e(\bar{2}) \times e(\bar{5})) \\ &\quad + (e(\bar{2}) \times e(\bar{6})) + (e(\bar{2}) \times e(\bar{8})) + (e(\bar{2}) \times e(\bar{10})) + (e(\bar{2}) \times e(\bar{12})) \\ &\quad + (e(\bar{3}) \times e(\bar{4})) + (e(\bar{3}) \times e(\bar{5})) + (e(\bar{3}) \times e(\bar{7})) + (e(\bar{3}) \times e(\bar{9})) \\ &\quad + (e(\bar{3}) \times e(\bar{11})) + (e(\bar{3}) \times e(\bar{13})) + (e(\bar{4}) \times e(\bar{6})) + (e(\bar{4}) \times e(\bar{8})) \\ &\quad + (e(\bar{4}) \times e(\bar{10})) + (e(\bar{4}) \times e(\bar{12})) + (e(\bar{5}) \times e(\bar{7})) + (e(\bar{5}) \times e(\bar{9})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(e(\bar{5}) \times e(\bar{11})) + (e(\bar{5}) \times e(\bar{13})) + (e(\bar{6}) \times e(\bar{8})) + (e(\bar{6}) \times e(\bar{10})) \\
& +(e(\bar{6}) \times e(\bar{12})) + (e(\bar{7}) \times e(\bar{9})) + (e(\bar{7}) \times e(\bar{11})) + (e(\bar{7}) \times e(\bar{13})) \\
& +(e(\bar{8}) \times e(\bar{10})) + (e(\bar{8}) \times e(\bar{12})) + (e(\bar{8}) \times e(\bar{13})) + (e(\bar{9}) \times e(\bar{11})) \\
& +(e(\bar{9}) \times e(\bar{12})) + (e(\bar{9}) \times e(\bar{13})) + (e(\bar{10}) \times e(\bar{11})) \\
& +(e(\bar{10}) \times e(\bar{12})) + (e(\bar{11}) \times e(\bar{13})) \\
& = (2 \times 2) \times 49 \\
& = 196
\end{aligned}$$

4.2.4 Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua pada $\Gamma(\mathbb{Z}_{22})$

Dari Gambar 4.4 $\Gamma(\mathbb{Z}_{22})$ diperoleh nilai eksentrisitas yaitu:

$$\begin{aligned}
e(\bar{0}) &= 2, & e(\bar{1}) &= 2, & e(\bar{2}) &= 2, & e(\bar{3}) &= 2, & e(\bar{4}) &= 2, \\
e(\bar{5}) &= 2, & e(\bar{6}) &= 2, & e(\bar{7}) &= 2, & e(\bar{8}) &= 2, & e(\bar{9}) &= 2, \\
e(\bar{10}) &= 2, & e(\bar{11}) &= 2, & e(\bar{12}) &= 2, & e(\bar{13}) &= 2, & e(\bar{14}) &= 2, \\
e(\bar{15}) &= 2, & e(\bar{16}) &= 2, & e(\bar{17}) &= 2, & e(\bar{18}) &= 2, & e(\bar{19}) &= 2, \\
e(\bar{20}) &= 2, & e(\bar{21}) &= 2,
\end{aligned}$$

Dengan demikian nilai indeks eksentrisitas Zagreb pertama pada $\Gamma(\mathbb{Z}_{22})$ yaitu:

$$\begin{aligned}
E_1 &= \sum_{u \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{22}))} (e(u))^2 \\
&= e(\bar{0})^2 + e(\bar{1})^2 + e(\bar{2})^2 + e(\bar{3})^2 + e(\bar{4})^2 + e(\bar{5})^2 + e(\bar{6})^2 + e(\bar{7})^2 + e(\bar{8})^2 \\
&+ e(\bar{9})^2 + e(\bar{10})^2 + e(\bar{11})^2 + e(\bar{12})^2 + e(\bar{13})^2 + e(\bar{14})^2 + e(\bar{15})^2 \\
&+ e(\bar{16})^2 + e(\bar{17})^2 + e(\bar{18})^2 + e(\bar{19})^2 + e(\bar{20})^2 + e(\bar{21})^2 \\
&= (2)^2 \times 22 \\
&= 88
\end{aligned}$$

Kemudian nilai indeks eksentrisitas Zagreb kedua pada $\Gamma(\mathbb{Z}_{22})$ yaitu :

$$\begin{aligned}
E_2 &= \sum_{uv \in E(\Gamma(\mathbb{Z}_{22}))} e(u)e(v) \\
&= (e(\bar{0}) \times e(\bar{2})) + (e(\bar{0}) \times e(\bar{4})) + (e(\bar{0}) \times e(\bar{6})) + (e(\bar{0}) \times e(\bar{8})) \\
&\quad + (e(\bar{0}) \times e(\bar{10})) + (e(\bar{0}) \times e(\bar{11})) + (e(\bar{0}) \times e(\bar{12})) + (e(\bar{0}) \times e(\bar{14})) \\
&\quad + (e(\bar{0}) \times e(\bar{16})) + (e(\bar{0}) \times e(\bar{18})) + (e(\bar{0}) \times e(\bar{20})) + (e(\bar{1}) \times e(\bar{3})) \\
&\quad + (e(\bar{1}) \times e(\bar{5})) + (e(\bar{1}) \times e(\bar{7})) + (e(\bar{1}) \times e(\bar{9})) + (e(\bar{1}) \times e(\bar{10})) \\
&\quad + (e(\bar{1}) \times e(\bar{11})) + (e(\bar{1}) \times e(\bar{14})) + (e(\bar{1}) \times e(\bar{15})) + (e(\bar{1}) \times e(\bar{17})) \\
&\quad + (e(\bar{1}) \times e(\bar{19})) + (e(\bar{1}) \times e(\bar{21})) + (e(\bar{2}) \times e(\bar{4})) + (e(\bar{2}) \times e(\bar{6})) \\
&\quad + (e(\bar{2}) \times e(\bar{8})) + (e(\bar{2}) \times e(\bar{9})) + (e(\bar{2}) \times e(\bar{10})) + (e(\bar{2}) \times e(\bar{12})) \\
&\quad + (e(\bar{2}) \times e(\bar{14})) + (e(\bar{2}) \times e(\bar{16})) + (e(\bar{2}) \times e(\bar{18})) + (e(\bar{2}) \times e(\bar{20})) \\
&\quad + (e(\bar{3}) \times e(\bar{5})) + (e(\bar{3}) \times e(\bar{7})) + (e(\bar{3}) \times e(\bar{8})) + (e(\bar{3}) \times e(\bar{9})) \\
&\quad + (e(\bar{3}) \times e(\bar{11})) + (e(\bar{3}) \times e(\bar{13})) + (e(\bar{3}) \times e(\bar{15})) + (e(\bar{3}) \times e(\bar{17})) \\
&\quad + (e(\bar{3}) \times e(\bar{19})) + (e(\bar{3}) \times e(\bar{21})) + (e(\bar{4}) \times e(\bar{6})) + (e(\bar{4}) \times e(\bar{7})) \\
&\quad + (e(\bar{4}) \times e(\bar{8})) + (e(\bar{4}) \times e(\bar{10})) + (e(\bar{4}) \times e(\bar{12})) + (e(\bar{4}) \times e(\bar{14})) \\
&\quad + (e(\bar{4}) \times e(\bar{16})) + (e(\bar{4}) \times e(\bar{18})) + (e(\bar{4}) \times e(\bar{20})) + (e(\bar{5}) \times e(\bar{6})) \\
&\quad + (e(\bar{5}) \times e(\bar{7})) + (e(\bar{5}) \times e(\bar{9})) + (e(\bar{5}) \times e(\bar{11})) + (e(\bar{5}) \times e(\bar{13})) \\
&\quad + (e(\bar{5}) \times e(\bar{15})) + (e(\bar{5}) \times e(\bar{17})) + (e(\bar{5}) \times e(\bar{19})) + (e(\bar{5}) \times e(\bar{21})) \\
&\quad + (e(\bar{6}) \times e(\bar{8})) + (e(\bar{6}) \times e(\bar{10})) + (e(\bar{6}) \times e(\bar{12})) + (e(\bar{6}) \times e(\bar{14})) \\
&\quad + (e(\bar{6}) \times e(\bar{16})) + (e(\bar{6}) \times e(\bar{18})) + (e(\bar{6}) \times e(\bar{20})) + (e(\bar{7}) \times e(\bar{9})) \\
&\quad + (e(\bar{7}) \times e(\bar{11})) + (e(\bar{7}) \times e(\bar{13})) + (e(\bar{7}) \times e(\bar{15})) + (e(\bar{7}) \times e(\bar{17})) \\
&\quad + (e(\bar{7}) \times e(\bar{19})) + (e(\bar{7}) \times e(\bar{21})) + (e(\bar{8}) \times e(\bar{10})) + (e(\bar{8}) \times e(\bar{12}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+(e(\bar{8}) \times e(\bar{14})) + (e(\bar{8}) \times e(\bar{16})) + (e(\bar{8}) \times e(\bar{18})) + (e(\bar{8}) \times e(\bar{20})) \\
&+(e(\bar{9}) \times e(\bar{11})) + (e(\bar{9}) \times e(\bar{13})) + (e(\bar{9}) \times e(\bar{15})) + (e(\bar{9}) \times e(\bar{17})) \\
&+(e(\bar{9}) \times e(\bar{19})) + (e(\bar{9}) \times e(\bar{21})) + (e(\bar{10}) \times e(\bar{12})) \\
&+(e(\bar{10}) \times e(\bar{14})) + (e(\bar{10}) \times e(\bar{16})) + (e(\bar{10}) \times e(\bar{18})) \\
&+(e(\bar{10}) \times e(\bar{20})) + (e(\bar{11}) \times e(\bar{13})) + (e(\bar{11}) \times e(\bar{15})) \\
&+(e(\bar{11}) \times e(\bar{17})) + (e(\bar{11}) \times e(\bar{19})) + (e(\bar{11}) \times e(\bar{21})) \\
&+(e(\bar{12}) \times e(\bar{14})) + (e(\bar{12}) \times e(\bar{16})) + (e(\bar{12}) \times e(\bar{18})) \\
&+(e(\bar{12}) \times e(\bar{20})) + (e(\bar{12}) \times e(\bar{21})) + (e(\bar{13}) \times e(\bar{15})) \\
&+(e(\bar{13}) \times e(\bar{17})) + (e(\bar{13}) \times e(\bar{19})) + (e(\bar{13}) \times e(\bar{20})) \\
&+(e(\bar{13}) \times e(\bar{21})) + (e(\bar{14}) \times e(\bar{16})) + (e(\bar{14}) \times e(\bar{18})) \\
&+(e(\bar{14}) \times e(\bar{19})) + (e(\bar{14}) \times e(\bar{20})) + (e(\bar{15}) \times e(\bar{17})) \\
&+(e(\bar{15}) \times e(\bar{18})) + (e(\bar{15}) \times e(\bar{19})) + (e(\bar{15}) \times e(\bar{21})) \\
&+(e(\bar{16}) \times e(\bar{17})) + (e(\bar{16}) \times e(\bar{18})) + (e(\bar{16}) \times e(\bar{20})) \\
&+(e(\bar{17}) \times e(\bar{19})) + (e(\bar{17}) \times e(\bar{21})) + (e(\bar{18}) \times e(\bar{20})) \\
&+(e(\bar{19}) \times e(\bar{21})) \\
&= (2 \times 2) \times 121 = 484
\end{aligned}$$

Tabel 4.10 Tabulasi Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua

\mathbb{Z}_{2p}	E_1	E_2
$\mathbb{Z}_{2(3)} = \mathbb{Z}_6$	$24 = 4 \times 2(3)$	$36 = (2 \times 3)^2$
$\mathbb{Z}_{2(5)} = \mathbb{Z}_{10}$	$40 = 4 \times 2(5)$	$100 = (2 \times 5)^2$
$\mathbb{Z}_{2(7)} = \mathbb{Z}_{14}$	$56 = 4 \times 2(7)$	$196 = (2 \times 7)^2$
$\mathbb{Z}_{2(11)} = \mathbb{Z}_{22}$	$44 = 4 \times 2(11)$	$484 = (2 \times 11)^2$
$\mathbb{Z}_{2(p)} = \mathbb{Z}_{2p}$	$4 \times 2p$	$4p^2$

Dari tabulasi di atas, didapatkan lemma sebagai berikut:

Lemma 4.3.1

Misal $p \geq 3$ suatu bilangan prima. Indeks eksentrisitas Zagreb pertama dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$ adalah

$$E_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})) = 4 \times 2p.$$

Indeks eksentrisitas Zagreb kedua dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$ adalah

$$E_2(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})) = 4p^2.$$

Bukti.

Dari Akibat 4.1.1, diketahui bahwa $|E(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p}))| = p^2$, sehingga

$$\begin{aligned} E_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})) &= \sum_{u \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p}))} e(u)^2 \\ &= 2p \cdot 2^2 \\ &= 4 \times p. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})) &= \sum_{uv \in E(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p}))} e(u)e(v) \\ &= p^2 \cdot 2 \cdot 2 \\ &= 4p^2. \end{aligned}$$

4.3 Koindex Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua

Bentuk umum dari Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua dari Ring Komutatif Z_{2p} dapat diketahui dengan mensubstitusikan data hasil pengamatan berupa nilai eksentrisitas $e(u)$, $e(v)$ yang tidak terhubung langsung

pada graf total dalam bab sebelumnya. Sehingga didapatkan nilai eksentrisitas Zagreb pertama dan kedua dari ring bilangan bulat modulo $2p$ sebagai berikut:

4.3.1 Koindex Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua pada $\Gamma(\mathbb{Z}_6)$

Koindex eksentrisitas Zagreb pertama pada $\Gamma(\mathbb{Z}_6)$ yaitu :

$$\begin{aligned}\bar{E}_1 &= \sum_{uv \in E(\Gamma(\mathbb{Z}_6))} [e(u) + e(v)] \\ &= [e(\bar{0}) + e(\bar{1})] + [e(\bar{0}) + e(\bar{5})] + [e(\bar{1}) + e(\bar{4})] + [e(\bar{2}) + e(\bar{3})] \\ &\quad + [e(\bar{2}) + e(\bar{5})] + [e(\bar{3}) + e(\bar{4})] \\ &= (2 + 2) \times 6 \\ &= 24\end{aligned}$$

Koindex eksentrisitas Zagreb kedua pada $\Gamma(\mathbb{Z}_6)$ yaitu :

$$\begin{aligned}\bar{E}_2 &= \sum_{uv \in E(\Gamma(\mathbb{Z}_6))} e(u)e(v) \\ &= [e(\bar{0}) \times e(\bar{1})] + [e(\bar{0}) \times e(\bar{5})] + [e(\bar{1}) \times e(\bar{4})] + [e(\bar{2}) \times e(\bar{3})] \\ &\quad + [e(\bar{2}) \times e(\bar{5})] + [e(\bar{3}) \times e(\bar{4})] \\ &= (2 \times 2) \times 6 \\ &= 24\end{aligned}$$

4.3.2 Koindex Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua pada $\Gamma(\mathbb{Z}_{10})$

Koindex eksentrisitas Zagreb pertama pada $\Gamma(\mathbb{Z}_{10})$ yaitu :

$$\begin{aligned}\bar{E}_1 &= \sum_{uv \in E(\Gamma(\mathbb{Z}_{10}))} [e(u) + e(v)] \\ &= [e(\bar{0}) + e(\bar{1})] + [e(\bar{0}) + e(\bar{3})] + [e(\bar{0}) + e(\bar{7})] + [e(\bar{0}) + e(\bar{9})] \\ &\quad + [e(\bar{1}) + e(\bar{2})] + [e(\bar{1}) + e(\bar{6})] + [e(\bar{1}) + e(\bar{8})] + [e(\bar{2}) + e(\bar{5})]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+[e(\bar{2}) + e(\bar{7})] + [e(\bar{2}) + e(\bar{9})] + [e(\bar{3}) + e(\bar{4})] + [e(\bar{3}) + e(\bar{6})] \\
&+[e(\bar{3}) + e(\bar{8})] + [e(\bar{4}) + e(\bar{5})] + [e(\bar{4}) + e(\bar{7})] + [e(\bar{4}) + e(\bar{9})] \\
&+[e(\bar{5}) + e(\bar{6})] + [e(\bar{5}) + e(\bar{8})] + [e(\bar{6}) + e(\bar{7})] + [e(\bar{8}) + e(\bar{9})] \\
&= (2 + 2) \times 20 \\
&= 80
\end{aligned}$$

Koindex eksentrisitas Zagreb kedua pada $\Gamma(\mathbb{Z}_{10})$ yaitu :

$$\begin{aligned}
\bar{E}_2 &= \sum_{uv \in E(\Gamma(\mathbb{Z}_{10}))} e(u)e(v) \\
&= [e(\bar{0}) \times e(\bar{1})] + [e(\bar{0}) \times e(\bar{3})] + [e(\bar{0}) \times e(\bar{7})] + [e(\bar{0}) \times e(\bar{9})] \\
&+ [e(\bar{1}) \times e(\bar{2})] + [e(\bar{1}) \times e(\bar{6})] + [e(\bar{1}) \times e(\bar{8})] + [e(\bar{2}) \times e(\bar{5})] \\
&+ [e(\bar{2}) \times e(\bar{7})] + [e(\bar{2}) \times e(\bar{9})] + [e(\bar{3}) \times e(\bar{4})] + [e(\bar{3}) \times e(\bar{6})] \\
&+ [e(\bar{3}) \times e(\bar{8})] + [e(\bar{4}) \times e(\bar{5})] + [e(\bar{4}) \times e(\bar{7})] + [e(\bar{4}) \times e(\bar{9})] \\
&+ [e(\bar{5}) \times e(\bar{6})] + [e(\bar{5}) \times e(\bar{8})] + [e(\bar{6}) \times e(\bar{7})] + [e(\bar{8}) \times e(\bar{9})] \\
&= (2 \times 2) \times 20 \\
&= 80
\end{aligned}$$

4.3.3 Koindex Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua pada $\Gamma(\mathbb{Z}_{14})$

Koindex eksentrisitas Zagreb pertama pada $\Gamma(\mathbb{Z}_{14})$ yaitu :

$$\begin{aligned}
\bar{E}_1 &= \sum_{uv \in E(\Gamma(\mathbb{Z}_{14}))} [e(u) + e(v)] \\
&= [e(\bar{0}) + e(\bar{1})] + [e(\bar{0}) + e(\bar{3})] + [e(\bar{0}) + e(\bar{5})] + [e(\bar{0}) + e(\bar{9})] \\
&+ [e(\bar{0}) + e(\bar{11})] + [e(\bar{0}) + e(\bar{13})] + [e(\bar{1}) + e(\bar{2})] + [e(\bar{1}) + e(\bar{4})] \\
&+ [e(\bar{1}) + e(\bar{8})] + [e(\bar{1}) + e(\bar{10})] + [e(\bar{1}) + e(\bar{12})] + [e(\bar{2}) + e(\bar{3})] \\
&+ [e(\bar{2}) + e(\bar{7})] + [e(\bar{2}) + e(\bar{9})] + [e(\bar{2}) + e(\bar{11})] + [e(\bar{2}) + e(\bar{13})] = \\
&+ [e(\bar{3}) + e(\bar{6})] + [e(\bar{3}) + e(\bar{8})] + [e(\bar{3}) + e(\bar{10})] + [e(\bar{3}) + e(\bar{12})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+[e(\bar{4}) + e(\bar{5})] + [e(\bar{4}) + e(\bar{7})] + [e(\bar{4}) + e(\bar{9})] + [e(\bar{4}) + e(\bar{11})] \\
&+[e(\bar{4}) + e(\bar{13})] + [e(\bar{5}) + e(\bar{6})] + [e(\bar{5}) + e(\bar{8})] + [e(\bar{5}) + e(\bar{10})] \\
&+[e(\bar{5}) + e(\bar{12})] + [e(\bar{6}) + e(\bar{7})] + [e(\bar{6}) + e(\bar{9})] + [e(\bar{6}) + e(\bar{11})] \\
&+[e(\bar{6}) + e(\bar{13})] + [e(\bar{7}) + e(\bar{8})] + [e(\bar{7}) + e(\bar{10})] + [e(\bar{7}) + e(\bar{12})] \\
&+[e(\bar{8}) + e(\bar{9})] + [e(\bar{8}) + e(\bar{11})] + [e(\bar{9}) + e(\bar{10})] + [e(\bar{10}) + e(\bar{13})] \\
&+[e(\bar{9}) + e(\bar{10})] + [e(\bar{10}) + e(\bar{13})] \\
&= (2 + 2) \times 42 \\
&= 168
\end{aligned}$$

Koindex eksentrisitas Zagreb kedua pada $\Gamma(\mathbb{Z}_{14})$ yaitu :

$$\begin{aligned}
\bar{E}_2 &= \sum_{uv \in E(\Gamma(\mathbb{Z}_{14}))} e(u)e(v) \\
&=[e(\bar{0}) \times e(\bar{1})] + [e(\bar{0}) \times e(\bar{3})] + [e(\bar{0}) \times e(\bar{5})] + [e(\bar{0}) \times e(\bar{9})] \\
&+[e(\bar{0}) \times e(\bar{11})] + [e(\bar{0}) \times e(\bar{13})] + [e(\bar{1}) \times e(\bar{2})] + [e(\bar{1}) \times e(\bar{4})] \\
&+[e(\bar{1}) \times e(\bar{8})] + [e(\bar{1}) \times e(\bar{10})] + [e(\bar{1}) \times e(\bar{12})] + [e(\bar{2}) \times e(\bar{3})] \\
&+[e(\bar{2}) \times e(\bar{7})] + [e(\bar{2}) \times e(\bar{9})] + [e(\bar{2}) \times e(\bar{11})] + [e(\bar{2}) \times e(\bar{13})] \\
&+[e(\bar{3}) \times e(\bar{6})] + [e(\bar{3}) \times e(\bar{8})] + [e(\bar{3}) \times e(\bar{10})] + [e(\bar{3}) \times e(\bar{12})] \\
&+[e(\bar{4}) \times e(\bar{5})] + [e(\bar{4}) \times e(\bar{7})] + [e(\bar{4}) \times e(\bar{9})] + [e(\bar{4}) \times e(\bar{11})] \\
&+[e(\bar{4}) \times e(\bar{13})] + [e(\bar{5}) \times e(\bar{6})] + [e(\bar{5}) \times e(\bar{8})] + [e(\bar{5}) \times e(\bar{10})] \\
&+[e(\bar{5}) \times e(\bar{12})] + [e(\bar{6}) \times e(\bar{7})] + [e(\bar{6}) \times e(\bar{9})] + [e(\bar{6}) \times e(\bar{11})] \\
&+[e(\bar{6}) \times e(\bar{13})] + [e(\bar{7}) \times e(\bar{8})] + [e(\bar{7}) \times e(\bar{10})] + [e(\bar{7}) \times e(\bar{12})] \\
&+[e(\bar{8}) \times e(\bar{9})] + [e(\bar{8}) \times e(\bar{11})] + [e(\bar{9}) \times e(\bar{10})] + [e(\bar{10}) \times e(\bar{13})] \\
&+[e(\bar{9}) \times e(\bar{10})] + [e(\bar{10}) \times e(\bar{13})] \\
&= (2 \times 2) \times 42
\end{aligned}$$

$$= 168$$

4.3.4 Koindex Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua pada $\Gamma(\mathbb{Z}_{22})$

Coindeks eksentrisitas Zagreb pertama pada $\Gamma(\mathbb{Z}_{22})$ yaitu :

$$\begin{aligned} \bar{E}_1 &= \sum_{uv \in E(\Gamma(\mathbb{Z}_{22}))} [e(u) + e(v)] \\ &= [e(\bar{0}) + e(\bar{1})] + [e(\bar{0}) + e(\bar{3})] + [e(\bar{0}) + e(\bar{5})] + [e(\bar{0}) + e(\bar{7})] \\ &\quad + [e(\bar{0}) + e(\bar{9})] + [e(\bar{0}) + e(\bar{13})] + [e(\bar{0}) + e(\bar{15})] + [e(\bar{0}) + e(\bar{17})] \\ &\quad + [e(\bar{0}) + e(\bar{19})] + [e(\bar{0}) + e(\bar{21})] + [e(\bar{1}) + e(\bar{2})] + [e(\bar{1}) + e(\bar{6})] \\ &\quad + [e(\bar{1}) + e(\bar{8})] + [e(\bar{1}) + e(\bar{12})] + [e(\bar{1}) + e(\bar{14})] + [e(\bar{1}) + e(\bar{16})] \\ &\quad + [e(\bar{1}) + e(\bar{18})] + [e(\bar{1}) + e(\bar{20})] + [e(\bar{2}) + e(\bar{3})] + [e(\bar{2}) + e(\bar{5})] \\ &\quad + [e(\bar{2}) + e(\bar{7})] + [e(\bar{2}) + e(\bar{11})] + [e(\bar{2}) + e(\bar{13})] + [e(\bar{2}) + e(\bar{15})] \\ &\quad + [e(\bar{2}) + e(\bar{17})] + [e(\bar{2}) + e(\bar{19})] + [e(\bar{2}) + e(\bar{21})] + [e(\bar{3}) + e(\bar{4})] \\ &\quad + [e(\bar{3}) + e(\bar{6})] + [e(\bar{3}) + e(\bar{10})] + [e(\bar{3}) + e(\bar{12})] + [e(\bar{3}) + e(\bar{14})] \\ &\quad + [e(\bar{3}) + e(\bar{16})] + [e(\bar{3}) + e(\bar{18})] + [e(\bar{3}) + e(\bar{20})] + [e(\bar{4}) + e(\bar{5})] \\ &\quad + [e(\bar{4}) + e(\bar{9})] + [e(\bar{4}) + e(\bar{13})] + [e(\bar{4}) + e(\bar{15})] + [e(\bar{4}) + e(\bar{17})] \\ &\quad + [e(\bar{4}) + e(\bar{19})] + [e(\bar{4}) + e(\bar{21})] + [e(\bar{5}) + e(\bar{8})] + [e(\bar{5}) + e(\bar{10})] \\ &\quad + [e(\bar{5}) + e(\bar{12})] + [e(\bar{5}) + e(\bar{14})] + [e(\bar{5}) + e(\bar{16})] + [e(\bar{5}) + e(\bar{18})] \\ &\quad + [e(\bar{5}) + e(\bar{20})] + [e(\bar{6}) + e(\bar{7})] + [e(\bar{6}) + e(\bar{9})] + [e(\bar{6}) + e(\bar{11})] \\ &\quad + [e(\bar{6}) + e(\bar{13})] + [e(\bar{6}) + e(\bar{15})] + [e(\bar{6}) + e(\bar{17})] + [e(\bar{6}) + e(\bar{19})] \\ &\quad + [e(\bar{6}) + e(\bar{21})] + [e(\bar{7}) + e(\bar{8})] + [e(\bar{7}) + e(\bar{10})] + [e(\bar{7}) + e(\bar{12})] \\ &\quad + [e(\bar{7}) + e(\bar{14})] + [e(\bar{7}) + e(\bar{16})] + [e(\bar{7}) + e(\bar{18})] + [e(\bar{7}) + e(\bar{20})] \\ &\quad + [e(\bar{8}) + e(\bar{9})] + [e(\bar{8}) + e(\bar{11})] + [e(\bar{8}) + e(\bar{13})] + [e(\bar{8}) + e(\bar{15})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+[e(\bar{8}) + e(\bar{17})] + [e(\bar{8}) + e(\bar{19})] + [e(\bar{8}) + e(\bar{21})] + [e(\bar{9}) + e(\bar{10})] \\
&+[e(\bar{9}) + e(\bar{12})] + [e(\bar{9}) + e(\bar{14})] + [e(\bar{9}) + e(\bar{16})] + [e(\bar{9}) + e(\bar{18})] \\
&+[e(\bar{9}) + e(\bar{20})] + [e(\bar{10}) + e(\bar{11})] + [e(\bar{10}) + e(\bar{13})] + [e(\bar{10}) + e(\bar{15})] \\
&+[e(\bar{10}) + e(\bar{17})] + [e(\bar{10}) + e(\bar{19})] + [e(\bar{10}) + e(\bar{21})] + [e(\bar{11}) + e(\bar{12})] \\
&+[e(\bar{10}) + e(\bar{17})] + [e(\bar{10}) + e(\bar{19})] + [e(\bar{10}) + e(\bar{21})] + [e(\bar{11}) + e(\bar{12})] \\
&+[e(\bar{11}) + e(\bar{14})] + [e(\bar{11}) + e(\bar{16})] + [e(\bar{11}) + e(\bar{18})] + [e(\bar{11}) + e(\bar{20})] \\
&+[e(\bar{12}) + e(\bar{13})] + [e(\bar{12}) + e(\bar{15})] + [e(\bar{12}) + e(\bar{17})] + [e(\bar{12}) + e(\bar{19})] \\
&+[e(\bar{13}) + e(\bar{14})] + [e(\bar{13}) + e(\bar{16})] + [e(\bar{13}) + e(\bar{18})] + [e(\bar{14}) + e(\bar{15})] \\
&+[e(\bar{14}) + e(\bar{17})] + [e(\bar{14}) + e(\bar{21})] + [e(\bar{15}) + e(\bar{16})] + [e(\bar{15}) + e(\bar{20})] \\
&+[e(\bar{16}) + e(\bar{19})] + [e(\bar{16}) + e(\bar{21})] + [e(\bar{17}) + e(\bar{18})] + [e(\bar{17}) + e(\bar{20})] \\
&+[e(\bar{18}) + e(\bar{19})] + [e(\bar{18}) + e(\bar{21})] + [e(\bar{19}) + e(\bar{20})] + [e(\bar{20}) + e(\bar{21})] \\
&= (2 + 2) \times 110 \\
&= 440
\end{aligned}$$

Koindex eksentrisitas Zagreb kedua pada $\Gamma(\mathbb{Z}_{22})$ yaitu :

$$\begin{aligned}
\bar{E}_2 &= \sum_{uv \in E(\Gamma(\mathbb{Z}_{22}))} e(u)e(v) \\
&=[e(\bar{0}) \times e(\bar{1})] + [e(\bar{0}) \times e(\bar{3})] + [e(\bar{0}) \times e(\bar{5})] + [e(\bar{0}) \times e(\bar{7})] \\
&+[e(\bar{0}) \times e(\bar{9})] + [e(\bar{0}) \times e(\bar{13})] + [e(\bar{0}) \times e(\bar{15})] + [e(\bar{0}) \times e(\bar{17})] \\
&+[e(\bar{0}) \times e(\bar{19})] + [e(\bar{0}) \times e(\bar{21})] + [e(\bar{1}) \times e(\bar{2})] + [e(\bar{1}) \times e(\bar{6})] \\
&+[e(\bar{1}) \times e(\bar{8})] + [e(\bar{1}) \times e(\bar{12})] + [e(\bar{1}) \times e(\bar{14})] + [e(\bar{1}) \times e(\bar{16})] \\
&+[e(\bar{1}) \times e(\bar{18})] + [e(\bar{1}) \times e(\bar{20})] + [e(\bar{2}) \times e(\bar{3})] + [e(\bar{2}) \times e(\bar{5})] \\
&+[e(\bar{2}) \times e(\bar{7})] + [e(\bar{2}) \times e(\bar{11})] + [e(\bar{2}) \times e(\bar{13})] + [e(\bar{2}) \times e(\bar{15})] \\
&+[e(\bar{2}) \times e(\bar{17})] + [e(\bar{2}) \times e(\bar{19})] + [e(\bar{2}) \times e(\bar{21})] + [e(\bar{3}) \times e(\bar{4})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +[e(\bar{3}) \times e(\bar{6})] + [e(\bar{3}) \times e(\bar{10})] + [e(\bar{3}) \times e(\bar{12})] + [e(\bar{3}) \times e(\bar{14})] \\
& + [e(\bar{3}) \times e(\bar{16})] + [e(\bar{3}) \times e(\bar{18})] + [e(\bar{3}) \times e(\bar{20})] + [e(\bar{4}) \times e(\bar{5})] \\
& + [e(\bar{4}) \times e(\bar{9})] + [e(\bar{4}) \times e(\bar{13})] + [e(\bar{4}) \times e(\bar{15})] + [e(\bar{4}) \times e(\bar{17})] \\
& + [e(\bar{4}) \times e(\bar{19})] + [e(\bar{4}) \times e(\bar{21})] + [e(\bar{5}) \times e(\bar{8})] + [e(\bar{5}) \times e(\bar{10})] \\
& + [e(\bar{5}) \times e(\bar{12})] + [e(\bar{5}) \times e(\bar{14})] + [e(\bar{5}) \times e(\bar{16})] + [e(\bar{5}) \times e(\bar{18})] \\
& + [e(\bar{5}) \times e(\bar{20})] + [e(\bar{6}) \times e(\bar{7})] + [e(\bar{6}) \times e(\bar{9})] + [e(\bar{6}) \times e(\bar{11})] \\
& + [e(\bar{6}) \times e(\bar{13})] + [e(\bar{6}) \times e(\bar{15})] + [e(\bar{6}) \times e(\bar{17})] + [e(\bar{6}) \times e(\bar{19})] \\
& + [e(\bar{6}) \times e(\bar{21})] + [e(\bar{7}) \times e(\bar{8})] + [e(\bar{7}) \times e(\bar{10})] + [e(\bar{7}) \times e(\bar{12})] \\
& + [e(\bar{7}) \times e(\bar{14})] + [e(\bar{7}) \times e(\bar{16})] + [e(\bar{7}) \times e(\bar{18})] + [e(\bar{7}) \times e(\bar{20})] \\
& + [e(\bar{8}) \times e(\bar{9})] + [e(\bar{8}) \times e(\bar{11})] + [e(\bar{8}) \times e(\bar{13})] + [e(\bar{8}) \times e(\bar{15})] \\
& + [e(\bar{8}) \times e(\bar{17})] + [e(\bar{8}) \times e(\bar{19})] + [e(\bar{8}) \times e(\bar{21})] + [e(\bar{9}) \times e(\bar{10})] \\
& + [e(\bar{9}) \times e(\bar{12})] + [e(\bar{9}) \times e(\bar{14})] + [e(\bar{9}) \times e(\bar{16})] + [e(\bar{9}) \times e(\bar{18})] \\
& + [e(\bar{9}) \times e(\bar{20})] + [e(\bar{10}) \times e(\bar{11})] + [e(\bar{10}) \times e(\bar{13})] + [e(\bar{10}) \times e(\bar{15})] \\
& + [e(\bar{10}) \times e(\bar{17})] + [e(\bar{10}) \times e(\bar{19})] + [e(\bar{10}) \times e(\bar{21})] + [e(\bar{11}) \times e(\bar{12})] \\
& + [e(\bar{10}) \times e(\bar{17})] + [e(\bar{10}) \times e(\bar{19})] + [e(\bar{10}) \times e(\bar{21})] + [e(\bar{11}) \times e(\bar{12})] \\
& + [e(\bar{11}) \times e(\bar{14})] + [e(\bar{11}) \times e(\bar{16})] + [e(\bar{11}) \times e(\bar{18})] + [e(\bar{11}) \times e(\bar{20})] \\
& + [e(\bar{12}) \times e(\bar{13})] + [e(\bar{12}) \times e(\bar{15})] + [e(\bar{12}) \times e(\bar{17})] + [e(\bar{12}) \times e(\bar{19})] \\
& + [e(\bar{13}) \times e(\bar{14})] + [e(\bar{13}) \times e(\bar{16})] + [e(\bar{13}) \times e(\bar{18})] + [e(\bar{14}) \times e(\bar{15})] \\
& + [e(\bar{14}) \times e(\bar{17})] + [e(\bar{14}) \times e(\bar{21})] + [e(\bar{15}) \times e(\bar{16})] + [e(\bar{15}) \times e(\bar{20})] \\
& + [e(\bar{16}) \times e(\bar{19})] + [e(\bar{16}) \times e(\bar{21})] + [e(\bar{17}) \times e(\bar{18})] + [e(\bar{17}) \times e(\bar{20})] \\
& + [e(\bar{18}) \times e(\bar{19})] + [e(\bar{18}) \times e(\bar{21})] + [e(\bar{19}) \times e(\bar{20})] + [e(\bar{20}) \times e(\bar{21})] \\
& = (2 \times 2) \times 110 \\
& = 440
\end{aligned}$$

Tabel 4.11 Tabulasi Koindex Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua

\mathbb{Z}_{2p}	$p(G)$	$q(G)$	\bar{E}_1	\bar{E}_2
$\mathbb{Z}_{2(3)}$ $= \mathbb{Z}_6$	6	6	12 $= 4 \times 6$ $= 4 \times (3(3 - 1))$	12 $= 4 \times 6$ $= 4 \times (3(3 - 1))$
$\mathbb{Z}_{2(5)}$ $= \mathbb{Z}_{10}$	10	20	80 $= 4 \times 20$ $= 4 \times (5(5 - 1))$	80 $= 4 \times 20$ $= 4 \times (5(5 - 1))$
$\mathbb{Z}_{2(7)}$ $= \mathbb{Z}_{14}$	14	42	168 $= 4 \times 42$ $= 4 \times (7(7 - 1))$	168 $= 4 \times 42$ $= 4 \times (7(7 - 1))$
$\mathbb{Z}_{2(11)}$ $= \mathbb{Z}_{22}$	22	110	440 $= 4 \times 110$ $= 4 \times (11(11 - 1))$	440 $= 4 \times 110$ $= 4 \times (11(11 - 1))$
$\mathbb{Z}_{2(p)}$	$2p$	$p(p - 1)$	$4(p(p - 1))$	$4(p(p - 1))$

Dari tabel di atas, didapatkan lemma sebagai berikut:

Lemma 4.4.1

Misal $p \geq 3$ suatu bilangan prima. Koindex eksentrisitas Zagreb pertama dari

$\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$ adalah

$$\bar{E}_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})) = 4(p(p - 1))$$

Indeks eksentrisitas Zagreb kedua dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$ adalah

$$\bar{E}_2(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})) = 4(p(p - 1))$$

Bukti.

Dari Akibat 4.1.1, diketahui bahwa banyaknya pasangan titik yang tidak saling terhubung adalah $p(p - 1)$, sehingga:

$$\begin{aligned}\overline{E}_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})) &= \sum_{uv \notin E(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p}))} [e(u) + e(v)] \\ &= (p(p - 1))[2 + 2] \\ &= 4(p(p - 1))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{E}_2(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})) &= \sum_{uv \in E(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p}))} e(u)e(v) \\ &= (p(p - 1)) \cdot 2 \cdot 2 \\ &= 4(p(p - 1)).\end{aligned}$$

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Setelah melakukan analisis dan pembahasan, pada penelitian ini penulis memperoleh rumus untuk mencari nilai indeks dan koindeks Zagreb pertama dan kedua pada graf total dari ring komutatif \mathbb{Z}_{2p} , $p \geq 3$ dengan p merupakan bilangan prima sebagai berikut:

1. Indeks Zagreb Pertama pada graf total ring komutatif \mathbb{Z}_{2p} dengan p adalah bilangan prima dan $p \geq 3$ adalah:

$$E_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})) = 4 \times 2p$$

Koindeks Zagreb Pertama pada graf total ring komutatif \mathbb{Z}_{2p} dengan p adalah bilangan prima dan $p \geq 3$ adalah:

$$\overline{E}_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})) = 4 \times (p(p - 1))$$

2. Indeks Zagreb Kedua pada graf total ring komutatif \mathbb{Z}_{2p} dengan p adalah bilangan prima dan $p \geq 3$ adalah:

$$E_2(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})) = 4p^2$$

Koindeks Zagreb Kedua pada graf total ring komutatif \mathbb{Z}_{2p} dengan p adalah bilangan prima dan $p \geq 3$ adalah:

$$\overline{E}_2(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})) = 4 \times (p(p - 1))$$

5.2 Saran

Dalam naskah ini peneliti hanya meneliti mengenai indeks dan koindeks Zagreb pertama dan kedua pada graf total dari ring komutatif \mathbb{Z}_{2p} . Bagi peneliti selanjutnya diharapkan mengangkat penelitian dengan memilih graf yang lain.

DAFTAR RUJUKAN

Al-Qur'an.

- Anderson, D. F., & Badawi, A. (2008). The total graph of a commutative ring. *Journal of Algebra* 320, 2706–2719.
- Ashrafi, A., Hamzeh, A., & T.Doslic. (2010). The Zagreb Coindices of Graph operations. *Discrete Applied Mathematics*, 1571-1578.
- Buchmann, J. (2004). *Introduction to Cryptography, 2nd Edition*. New York: Springel.
- Chartrand, G., & Lesniak, L. (1986). *Graph and Digraphs Second Edition*. California: a Division of Wadsworth, Inc.
- Dewi, N. R. (2011). Analisis Struktur Daerah Integral dari Himpunan Polinomial. *Jurnal Penelitian Sains*, Vol. 14, No. 4(A).
- Gutman, I. (2015). On Zagreb Indices and Coindices. *Match Commun*, 5-16.
- Henky, W. I., Hijriyah, N., & Habibi, A. R. (2014). *Pengantar Teori Bilangan*. Malang: UIN-Maliki Press.
- Joshi, K. (2014). *Foundations of Discrete Mathematics*. New Delhi: New Age International Publishers.
- Munir, R. (2010). *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika Bandung.
- Raisinghania, & Aggarwal. (1980). *Modern Algebra*. New Delhi: Ram Nagar.
- Sakar, P. (2017). The Zagreb Indices of Graph Based on New Operation Related to the join of Graph. *Journal of International Mathematical Virtual institute*.
- Sukirman. (2005). *Pengantar Aljabar Abstrak*. Malang: UM Pres.
- Wicaksono, S. A., & Soleha. (2013). Kajian Sifat-Sifat Graf Pembagi Nol dari Ring Komutatif dengan Kesatuan. *Jurnal Sains dan Seni Pomits*, Vol.2, No. 1.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP



Muhammad Irfan, dilahirkan di Kota Malang pada tanggal 14 Mei 2000. Memiliki nama panggilan Irfan. Bertempat tinggal di Jalan Ahmad Yani III/34, Kecamatan Blimbing, Kota Malang. Merupakan putra pertama dari pasangan Bapak Arief Kalmanto dan Ibu Mei Purwanti

Handayani serta memiliki adik laki-laki yang bernama Wildhan Saputra.

Jenjang pendidikannya dimulai sejak bersekolah di TK Kemala Bhayangkari 10 yang lulus pada tahun 2006. Setelah itu melanjutkan Pendidikan di SD Negeri Blimbing 3 Malang yang lulus pada tahun 2012. Pendidikan selanjutnya ditempuh di SMP Negeri 8 Malang yang lulus pada tahun 2015. Kemudian melanjutkan Pendidikan di SMA Negeri 1 Malang yang lulus pada tahun 2018. Pada jenjang perguruan tinggi ia melanjutkan pendidikannya dengan berkuliah di UIN Maulana Malik Ibrahim Malang dengan memilih menekuni bidang matematika murni di Fakultas Sains dan Teknologi.

Selama menempuh pendidikan di Kampus Ulul Albab UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, selain menyelesaikan tugasnya sebagai mahasiswa, Ia juga memiliki aktivitas yakni menjadi guru les di salah satu bimbingan belajar di Kota Malang. Menurutny dengan kegiatan tersebut, dapat semakin mengasah ilmu yang didapatkan di bangku perkuliahan sembari menambah pengalaman. Baginya, Matematika adalah salah satu ilmu yang menarik untuk dipelajari karena hingga saat ini hasil penelitiannya sangat berguna bagi kemajuan peradaban dan mampu diaplikasikan langsung dalam beberapa kasus pada kehidupan sehari-hari.



**KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**

Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Muhammad Irfan
NIM : 18610087
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Indeks dan Koindex Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua pada Graf Total dari Ring Bilangan Bulat Modulo $2p$
Pembimbing I : Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D
Pembimbing II : Mohammad Nafie Jauhari, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	10 Februari 2022	Konsultasi Bab 1	1.
2.	11 Februari 2022	Konsultasi Kajian Agama	2.
3.	18 Februari 2022	Konsultasi Bab 2	3.
4.	24 Februari 2022	Konsultasi Kajian Agama	4.
5.	28 Februari 2022	Konsultasi Bab 2	5.
6.	5 Maret 2022	Konsultasi Kajian Agama	6.
7.	10 Maret 2022	Konsultasi Bab 2 dan Bab 3	7.
8.	18 Maret 2022	Konsultasi Bab 2 dan Bab 3	8.
9.	24 Maret 2022	ACC Seminar Proposal	9.
10.	25 Maret 2022	ACC Seminar Proposal	10.
11.	18 April 2022	Konsultasi Bab 4	11.
12.	28 April 2022	Konsultasi Bab 4	12.
13.	14 Mei 2022	Konsultasi Bab 5	13.
14.	19 Mei 2022	Konsultasi Bab 5	14.
15.	24 Mei 2022	ACC Seminar Hasil	15.
16.	25 Mei 2022	ACC Seminar Hasil	16.
17.	14 Juni 2022	Konsultasi Bab 4 dan Bab 5	17.
18.	16 Juni 2022	ACC Sidang Skripsi	18.
19.	17 Juni 2022	ACC Sidang Skripsi	19.

Malang, 24 Juni 2022

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc

NIP.19741129 200012 2 005