KESTABILAN PERSAMAAN FUNGSIONAL JENSEN-HOSSZÚ

SKRIPSI

OLEH
ZUKHRUFUN NADHIFA
NIM. 11610053

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016

KESTABILAN PERSAMAAN FUNGSIONAL JENSEN-HOSSZÚ

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh
Zukhrufun Nadhifa
NIM. 11610053

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016

KESTABILAN PERSAMAAN FUNGSIONAL JENSEN-HOSSZÚ

SKRIPSI

Oleh
Zukhrufun Nadhifa
NIM. 11610053

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
12 Januari 2016

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Hairur Rahman, M.Si	Fachrur Rozi, M.Si
NIP. 19800429 200604 1 003	NIP. 19800527 200801 1 012

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP 19751006 200312 1 001

KESTABILAN PERSAMAAN FUNGSIONAL JENSEN-HOSSZÚ

SKRIPSI

Oleh
Zukhrufun Nadhifa
NIM. 11610053

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 27 Januari 2016

Penguji Utama	:	Dr. Usman Pagalay, M.Si	....
Ketua Penguji	:	Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D	....
Sekretaris Penguji	:	Hairur Rahman, M.Si	....
Anggota Penguji	:	Fachrur Rozi, M.Si	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Zukhrufun Nadhifa
NIM	: 11610053
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Kestabilan Persamaan Fungsional Jensen-Hosszú

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 12 Januari 2016
Yang membuat pernyataan,

Zukhrufun Nadhifa
NIM. 11610053

MOTO

فَبِأَيِّ ءَالَآءِ رَبِّكُمَا تُكَذِّبَانِ

”Maka nikmat Tuhan kamu yang manakah yang kamu dustakan”
(Qs. ar-Rahman/55:13)

“Sejauh apapun jalan, pasti dimulai dari selangkah”
(Penulis)

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Bapak Rudiyanto dan Ibu Nurul Rodiana tercinta, serta kakak-kakak dan adik-adik yang selalu memberikan teladan dan semangat yang berarti bagi penulis

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi bagi Allah Swt. atas limpahan rahmat, taufik, hidayah, dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam semoga tetap terlimpahkan kepada Nabi Muhammad Saw. yang telah menuntun umatnya dari zaman yang gelap ke zaman yang terang-benderang.

Penyusunan skripsi ini tidak mungkin dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan, serta arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Hairur Rahman, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang senantiasa memberikan arahan, nasihat, motivasi dalam melakukan penelitian, serta pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Fachrur Rozi, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang senantiasa memberikan arahan, nasihat, motivasi dalam melakukan penelitian, serta pengalaman yang berharga kepada penulis.

6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
7. Bapak dan ibu yang selalu memberikan doa, semangat, serta motivasi kepada penulis.
8. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2011, terima kasih atas kenangan indah yang dirajut bersama dalam menggapai cita-cita.
9. Semua pihak yang secara langsung maupun tidak langsung telah ikut memberikan bantuan dalam menyelesaikan skripsi ini.

Akhirnya penulis hanya bisa berharap, dibalik skripsi ini dapat memberikan manfaat dan wawasan yang lebih luas atau bahkan hikmah bagi penulis maupun pembaca.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, Januari 2016

Penulis

DAFTAR ISI

ABSTRAK

Nadhifa, Zukhrufun. 2016. **Kestabilan Persamaan Fungsional Jensen-Hosszú.** Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Hairur Rahman, M.Si. (II) Fachrur Rozi, M.Si.

Kata Kunci: persamaan fungsional Cauchy *additive*, persamaan fungsional Jensen-Hosszú, konsep kestabilan Hyers-Ulam-Rassias.

Persamaan fungsional Jensen-Hosszú adalah persamaan fungsional yang dikonstruksikan dari persamaan fungsional Jensen dan Hosszú yang merupakan variasi dari persamaan fungsional Cauchy *additive*. Suatu persamaan fungsional dapat diaplikasikan sebagai model dari suatu proses fisik apabila persamaan fungsional tersebut dinyatakan stabil. Konsep kestabilan yang digunakan dalam skripsi ini mengikuti konsep kestabilan Hyers-Ulam dan Hyers-Ulam-Rassias.

Hasil dari skripsi ini adalah persamaan fungsional Jensen-Hosszú dikatakan stabil dengan menggunakan konsep kestabilan Hyers-Ulam dengan indikator:

a. $\left\{\frac{f(2^n x)}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan Cauchy $\forall x \in R_1$.
b. Jika $A(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}$ maka A adalah fungsi *additive*.
c. A memenuhi $|f(x) - A(x)| \leq \delta, \delta > 0$.
d. A adalah fungsi yang tunggal.

Begitu pun dengan menggunakan konsep kestabilan Hyers-Ulam-Rassias persamaan fungsional Jensen-Hosszú dikatakan stabil dengan indikator:

a. $\left\{\frac{f(2^n x)}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan Cauchy $\forall x \in R_1$.
b. Jika $A(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}$ maka A adalah fungsi *additive*.
c. A memenuhi $|f(x) - A(x)| \leq \frac{2\theta}{2-2^p} |x|^p, \theta > 0, p \in (0,1]$
d. A adalah fungsi yang tunggal.

Salah satu contoh fungsi yang memenuhi persamaan fungsional Jensen-Hosszú adalah $f: R \to R, f(x) = 2x + 3, \forall x \in R$. Terbukti pula bahwa contoh fungsi tersebut stabil berdasarkan konsep kestabilan Hyers-Ulam dan Hyers-Ulam-Rassias.

ABSTRACT

Nadhifa, Zukhrufun. 2016. **The Stability of Jensen-Hosszú Functional Equation.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Islamic State University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Hairur Rahman, M.Si. (II) Fachrur Rozi, M.Si.

Keyword: Cauchy *additive* functional equation, Jensen-Hosszú functional equation, Hyers-Ulam-Rassias' concept of stability.

Jensen-Hosszú functional equation is constructed from Jensen and Hosszú functional equation that are the variations of Cauchy *additive* functional equation. A functional equation can be applied as a model of physic progress if it is stable. Stability concept that used in this thesis is Hyers-Ulam and Hyers-Ulam-Rassias' concept.

The result of this thesis is that Jensen-Hosszú functional equation is stable based on Hyers-Ulam's stability concept based on the following indicators:

a. $\left\{\frac{f(2^n x)}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ is a Cauchy sequence $\forall x \in R_1$.
b. If $A(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}$ then A is *additive* function.
c. A satisfies $|f(x) - A(x)| \leq \delta, \delta > 0$
d. A is unique.

As well as by using Hyers-Ulam-Rassias' stability concept, Jensen-Hosszú functional equation is said stable based on the following indicators:

a. $\left\{\frac{f(2^n x)}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ is a Cauchy sequence $\forall x \in R_1$.
b. If $A(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}$ then A is *additive* function.
c. A satisfies $|f(x) - A(x)| \leq \frac{2\theta}{2-2^p}|x|^p, \theta > 0, p \in [0,1)$
e. A is unique.

One example of a function that satisfies Jensen-Hosszú functional equation is $f: R \to R, f(x) = 2x + 3, \forall x \in R$. It is proven also that the function is stable according to Hyers-Ulam and Hyers-Ulam-Rassias' stability concept.

ملخص

نظيفة، زخروف. ٢٠١٦. استقرار معادلة Jensen-Hosszú الدالية. بحث جامعي. شعبة الرياضيات بكلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: (I) خير الرحمن، ماجستير (II) فخرالرازي، ماجستير.

الكلمات الرئيسية: المعادلة الدالية مضافة Cauchy، المعادلة الدالية Jensen-Hosszú، مفهوم الاستقرار Hyers-Ulam-Rassias

المعادلة الدالية Jensen-Hosszú شيدت من المعادلة الدالية Jensen و Hosszú التي هي الاختلافات المعادلة الدالية المضافة Cauchy. المعادلة الدالية يمكن تطبيقها كنموذج للتقدم عالج إذا كان مستقرا. مفهوم الاستقرار التي استخدمت في هذا البحث هو مفهوم Hyers-Ulam و Hyers-Ulam-Rassias.

ونتيجة لهذا البحث هو أن المعادلة الدالية Jensen-Hosszú مستقرة تقوم على مفهوم الاستقرار Hyers-Ulam من خلال مؤشرات على النحو التالي:

أ. $\left\{\frac{f(2^n x)}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ هو تسلسل Cauchy $\forall x \in R_1$

ب. إذا $A(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}$ فكانت A هي الدالية المضافة

ج. A رضى $\delta > 0, |f(x) - A(x)| \leq \delta$

د. A هي وظيفة واحدة

وكمفهوم الاستقرار Hyers-Ulam-Rassias، المعادلة الدالية Jensen-Hosszú يقال مستقرة من المؤشرات على النحو التالي:

أ. $\left\{\frac{f(2^n x)}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ هو تسلسل Cauchy $\forall x \in R_1$

ب. إذا $A(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}$ فكانت A هي الدالية المضافة

ج. A رضى $\theta > 0, p \in [0,1), |f(x) - A(x)| \leq \frac{2\theta}{2-2^p}|x|^p$

د. A هي وظيفة واحدة

مثال واحد من وظيفة ترضي المعادلة الدالية Jensen-Hosszú هو, $f(x) = 2x + 3$ $f: R \to R, \quad \forall x \in R$ وقد ثبت أيضا أن دالية مستقرة وفقا لمفهوم الاستقرار Hyers-Ulam و Hyers-Ulam-Rassias .

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan salah satu bidang ilmu yang dipelajari guna mengasah logika berpikir seseorang. Matematika tidak lepas dari berbagai macam teori yang terdiri dari definisi, teorema, dan sebagainya. Matematika memiliki banyak gagasan yang abstrak yang relevansinya dengan kehidupan sehari-hari sulit untuk dijelaskan, namun pada kenyataannya banyak kemajuan sains dan teknologi yang berdasarkan pada ilmu matematika yang dikombinasikan dengan cabang ilmu lain.

Matematika memiliki banyak cabang ilmu, salah satunya adalah matematika analisis. Analisis dalam matematika meliputi analisis real, analisis kompleks, persamaan differensial, analisis fungsional, teori ukuran, teori operator, dan topologi. Di dalam analisis fungsional terdapat persamaan fungsional, yakni persamaan yang belum diketahui fungsinya. Untuk mendapatkan solusi dari suatu persamaan fungsional harus ditemukan terlebih dahulu persamaan-persamaan fungsi yang memenuhi persamaan fungsional tersebut (Al-Mosadder, 2012:7).

Persamaan fungsional yang paling terkenal adalah persamaan fungsional Cauchy *additive*. Suatu fungsi $f: R \to R$ disebut sebagai fungsi *additive* jika memenuhi persamaan fungsional Cauchy *additive* $f(x+y) = f(x) + f(y)$ untuk setiap $x, y \in R$. Sifat-sifat dari persamaan ini sering diaplikasikan pada pengembangan teori persamaan fungsional lainnya dan merupakan alat yang kuat sebagai pengembangan ilmu pengetahuan khususnya di bidang ilmu alam dan sosial (Jung, 2011:19).

Suatu persamaan atau formula tertentu dapat diaplikasikan sebagai model dari suatu proses fisik jika perubahan kecil pada persamaan tersebut hanya akan menimbulkan perubahan yang kecil pula pada hasilnya. Jika kondisi tersebut terpenuhi, dapat dikatakan bahwa persamaan tersebut adalah persamaan yang stabil. Hal ini juga dapat diterapkan dalam persamaan fungsional. Salah satu contohnya, suatu persamaan fungsional Cauchy *additive* yang dinotasikan sebagai $f(x+y)-f(x)-f(y)=0$ tidak selalu benar $\forall x,y \in R$, namun dapat menjadi benar jika digunakan aproksimasi

$$f(x+y)-f(x)-f(y)\approx 0,$$

$\forall x,y \in R$. Secara matematis dapat dinotasikan sebagai

$$|f(x+y)-f(x)-f(y)|\leq \varepsilon,$$

$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x,y \in R$. Dapat diketahui saat terjadi perubahan kecil pada suatu persamaan hanya akan menimbulkan perubahan yang kecil pula pada hasilnya. Hal inilah yang menjadi inti dari teori kestabilan (Sahoo dan Kannappan, 2011:293).

Dari sini dapat diketahui bahwa suatu persamaan tertentu dapat diaplikasikan jika persamaan tersebut stabil. Permasalahan tentang kestabilan persamaan fungsional pertama kali dicetuskan oleh S. M. Ulam pada tahun 1940. Hyers adalah orang yang pertama menyelesaikan permasalahan tersebut dengan mengasumsikan fungsinya terjadi di ruang Banach. Penyelesaian dari Hyers tersebut melahirkan suatu konsep yang dikenal dengan konsep kestabilan Hyers-Ulam. Konsep tersebut menjadi dasar penelitian terkait dengan kestabilan persamaan fungsional. Pada tahun 1978, Rassias menyempurnakan teorema Hyers yang melahirkan konsep kestabilan Hyers-Ulam-Rassias. Sejak itu, penelitian tentang kestabilan suatu persamaan fungsional banyak mengikuti konsep kestabilan Hyers-Ulam dan Hyers-Ulam-Rassias.

Konsep dasar yang digunakan untuk mengaplikasikan konsep Hyers-Ulam-Rassias adalah ruang Banach. Ruang Banach adalah ruang bernorma yang lengkap. Suatu ruang bernorma dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy-nya konvergen. Darmawijaya (2007:94) menyatakan bahwa setiap ruang bernorma merupakan ruang metrik, dan ruang bernorma adalah ruang vektor yang di dalamnya terdapat norm dan memenuhi sifat bernorma.

Hyers pada tahun 1941 telah membuktikan kestabilan dari persamaan fungsional Cauchy *additive*. Lebih lanjut persamaan fungsional tersebut dapat diaplikasikan dalam mengkarakteristikkan distribusi probabilitas geometri, distribusi probabilitas normal diskrit, dan distribusi probabilitas normal. Persamaan fungsional ini juga dapat digunakan untuk menurunkan rumus pada luas dari suatu persegi panjang, hukum-hukum logaritma, suku bunga tunggal dan majemuk, serta peluruhan gelombang radioaktif (Sahoo dan Kannapan 2011:xv).

Jung (2011:155) menyatakan bahwa terdapat beberapa variasi dari persamaan fungsional Cauchy *additive* antara lain persamaan fungsional Cauchy *additive* yang digeneralisasikan, persamaan fungsional homogen, persamaan fungsional Hosszú, persamaan fungsional Jensen, dan lain sebagainya. Kominek (2009:58) mengkonstruksi suatu persamaan yang diperoleh dari persamaan fungsional Jensen dan Hosszú. Persamaan fungsional tersebut adalah persamaan fungsional Jensen-Hosszú, yakni jika ada suatu fungsi $f: R \to R$ yang memenuhi $f(x + y - xy) + f(xy) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$.

Pemahaman tentang kestabilan akan sesuatu hal terdapat pula di dalam al-Quran, salah satunya adalah tentang kestabilan bumi. Al-Quran menjelaskan bahwa Allah Swt. telah menciptakan gunung sebagai pengokoh dari bumi, yang berperan pula dalam menjaga kestabilan dari bumi. Hal tersebut dapat dilihat dalam al-Quran surat an-Naba'/78:7 dan surat Qaaf/50:7 yang berbunyi

وَٱلۡجِبَالَ أَوۡتَادٗا ٧

"dan gunung-gunung sebagai pasak?"(Qs. an-Naba'/78:7).

وَٱلۡأَرۡضَ مَدَدۡنَٰهَا وَأَلۡقَيۡنَا فِيهَا رَوَٰسِيَ وَأَنۢبَتۡنَا فِيهَا مِن كُلِّ زَوۡجِۭ بَهِيجٖ ٧

"Dan Kami hamparkan bumi itu dan Kami letakkan padanya gunung-gunung yang kokoh dan Kami tumbuhkan padanya segala macam tanaman yang indah dipandang mata" (Qs. Qaaf/50:7).

Dalam ayat tersebut, gunung diciptakan agar bumi stabil dan tidak bergoyang sebagaimana suatu tenda yang stabil dan tidak bergoyang karena adanya pasak. Ibarat bumi adalah suatu rumah maka gunung adalah suatu tiang yang menjadikan rumah itu kokoh dan stabil. Secara geografis daratan yang manusia dan seluruh makhluk hidup tinggali ini terdapat di atas perairan yang luas. Agar daratan ini tidak bergoyang, maka Allah Swt. menancapkan gunung. Dapat dibayangkan apabila gunung tidak diciptakan, maka bumi akan berada dalam keadaan yang tidak stabil dan selalu bergoyang-goyang. Hal tersebut tentu akan menjadikan bumi menjadi tempat yang tidak aman dan nyaman untuk ditinggali.

Persamaan fungsional dapat diaplikasikan apabila persamaan tersebut stabil. Jika suatu persamaan fungsional tidak stabil maka persamaan tersebut tidak dapat diaplikasikan. Begitu pula dengan bumi yang merupakan tempat tinggal manusia akan dapat ditinggali dengan aman dan nyaman apabila keadaannya stabil. Berdasarkan motivasi tersebut, peneliti tertarik untuk melakukan penelitian tentang kestabilan persamaan fungsional khususnya tentang kestabilan dari persamaan fungsional Jensen-Hosszú.

1.2 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimanakah kestabilan dari persamaan fungsional Jensen-Hosszú?
2. Bagaimanakah kestabilan dari contoh fungsi yang memenuhi persamaan fungsional Jensen-Hosszú?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk mengetahui kestabilan dari persamaan fungsional Jensen-Hosszú.
2. Untuk mengetahui kestabilan dari contoh fungsi yang memenuhi persamaan fungsional Jensen-Hosszú.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dalam penelitian ini adalah dapat dijadikan sebagai landasan dalam pengaplikasian persamaan fungsional Jensen-Hosszú dan sebagai sumbangsih dalam perkembangan ilmu matematika modern khususnya bidang analisis fungsional.

1.5 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini, konsep kestabilan yang digunakan untuk menganalisis persamaan tersebut adalah konsep Hyers-Ulam dan Hyers-Ulam-Rassias. Adapun ruang Banach pada konsep kestabilan Hyers-Ulam-Rassias yang digunakan hanyalah ruang Banach pada bilangan real (R).

1.6 Metode Penelitian

Dalam penelitian ini, metode yang digunakan adalah metode kepustakaan (*library research*). *Library research* adalah melakukan penelitian dengan mengumpulkan berbagai informasi dan data dengan bantuan buku, jurnal, artikel, dan sumber lainnya yang relevan. Referensi tersebut berkaitan dengan:

1. Persamaan fungsional Jensen-Hosszú.
2. Konsep kestabilan persamaan fungsional Hyers-Ulam-Rassias.
3. Penelitian terdahulu mengenai kestabilan persamaan fungsional lain dengan yang menggunakan konsep kestabilan Hyers-Ulam-Rassias.

Penelitian ini merupakan penelitian pengembangan dari penelitian sebelumnya, yakni penelitian tentang kestabilan persamaan fungsional Cauchy *additive* yang telah dipaparkan oleh Jung (2011) dalam bukunya yang berjudul *Hyers-Ulam-Rassias Stability of Functional Equation in Nonlinear Analysis*. Adapun langkah-langkah yang ditempuh dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mendeskripsikan konsep kestabilan Hyers-Ulam dan Hyers-Ulam-Rassias untuk persamaan fungsional Jensen-Hosszú.
2. Membuktikan kestabilan persamaan fungsional Jensen-Hosszú.

3. Membuktikan kestabilan dari contoh fungsi yang memenuhi persamaan fungsional Jensen-Hosszú.
4. Membuat kesimpulan dari pembahasan penelitian.

1.7 Sistematika Penulisan

Dalam penulisan skripsi ini, peneliti menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab, dan masing-masing bab dibagi dalam subbab-subbab dengan sistematika penulisan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan yang berisi latar belakang, rumusan masalah, tujuan, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian pustaka, yang berisi dasar-dasar teori yang mendukung bagian pembahasan yaitu ruang bernorma, ruang Banach, persamaan fungsional Jensen-Hosszú, konsep kestabilan Hyers-Ulam dan Hyers-Ulam-Rassias, dan penelitian terdahulu tentang pembuktian kestabilan persamaan Cauchy *additive* dengan menggunakan konsep kestabilan Hyers-Ulam dan Hyers-Ulam-Rassias.

Bab III Pembahasan, yang berisi tentang pemaparan kestabilan persamaan fungsional Jensen-Hosszú dengan menggunakan konsep kestabilan Hyers-Ulam dan Hyers-Ulam-Rassias serta kestabilan dari contoh fungsi yang memenuhi persamaan fungsional Jensen-Hosszú.

Bab IV Kesimpulan dan saran, yang berisi tentang kesimpulan dari hasil penelitian dan pembahasannya, serta saran untuk penelitian berikutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Barisan

Definisi 2.1.1 *Barisan* $\{x_n\}$ *di* R *dikatakan konvergen ke* $x \in R$, *atau* x *dikatakan sebagai limit dari* $\{x_n\}$ *jika* $\forall \varepsilon > 0$ *terdapat bilangan asli* $K(\varepsilon)$ *maka untuk setiap bilangan asli* $n \geq K(\varepsilon)$ *berlaku* $|x_n - x| < \varepsilon$ (Bartle dan Sherbert, 2000:54).

Adapun contoh dari barisan konvergen adalah:

1. $\{x_n\} = \left\{\frac{3n+2}{n+1} \middle| n \in N\right\}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{n+1} = 3$, maka 3 adalah titik konvergennya. Sehingga $\forall \varepsilon > 0$ pilih $K(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon} \leftrightarrow \frac{1}{K} < \varepsilon$, sedemikian hingga $\forall n \in N, n \geq K(\varepsilon)$ berlaku

$$\left|\frac{3n+2}{n+1} - 3\right| = \left|\frac{3n+2}{n+1} - 3\right| = \left|\frac{3n+2-3n-3}{n+1}\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \frac{1}{K(\varepsilon)} < \varepsilon.$$

Artinya $\left|\frac{3n+2}{n+1} - 3\right| < \varepsilon$ berlaku, dan barisan $\left\{\frac{3n+2}{n+1}\right\}$ konvergen menuju 3.

2. $\{x_n\} = \left\{\frac{(-1)^n}{n} \middle| n \in N\right\}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$, maka 0 adalah titik konvergennya. Sehingga $\forall \varepsilon > 0$ pilih $K(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon} \leftrightarrow \frac{1}{K} < \varepsilon$, sedemikian hingga $\forall n \in N, n \geq K(\varepsilon)$ berlaku

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = |(-1)^n| \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{K(\varepsilon)} < \varepsilon.$$

Artinya $\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \varepsilon$ berlaku, dan barisan $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ konvergen menuju 0.

3. $\{x_n\} = \left\{(n)^{\frac{1}{n}} \middle| n \in N\right\}$

Perhatikan bahwa $(n)^{\frac{1}{n}} > 1, \forall n \in N,$ yang berarti $(n)^{\frac{1}{n}}$ dapat dituliskan menjadi $(n)^{\frac{1}{n}} = 1 + a_n \leftrightarrow n = (1 + a_n)^n$. Dengan menggunakan ekspansi binomial akan diperoleh $n = 1 + na_n + \cdots \geq 1 + \frac{1}{2}n(n-1)a_n^2$ yang artinya

$$n \geq 1 + \frac{1}{2}n(n-1)a_n^2$$

$$n - 1 \geq \frac{1}{2}n(n-1)a_n^2$$

$$a_n^2 \leq \frac{2}{n}$$

$$a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}}$$

Berdasarkan proses di atas, diperoleh bahwa $(n)^{\frac{1}{n}} - 1 \leq \sqrt{\frac{2}{n}} \ldots (*)$

Sehingga $\forall \varepsilon > 0$ pilih $K(\varepsilon) > \frac{2}{\varepsilon^2} \leftrightarrow \sqrt{\frac{2}{K}} < \varepsilon$ sedemikian hingga $\forall n \in N,$ $n \geq K(\varepsilon)$ dan berdasarkan $(*)$ diperoleh $(n)^{\frac{1}{n}} - 1 \leq \sqrt{\frac{2}{n}} < \sqrt{\frac{2}{K}} < \varepsilon$. Oleh karena itu berlaku $(n)^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon \ldots (**)$.

Karena $\forall n \in N$ maka $(n)^{\frac{1}{n}} > 1$ yang artinya nilai dari $(n)^{\frac{1}{n}} - 1$ akan selalu positif, sehingga $(**)$ dapat dituliskan sebagai $\left|(n)^{\frac{1}{n}} - 1\right| < \varepsilon$, oleh karena itu barisan $\left\{(n)^{\frac{1}{n}}\right\}$ konvergen menuju 1.

Teorema 2.1.2 (Teorema *Squeeze*) *Jika diberikan barisan–barisan* $\{x_n\}, \{y_n\}$, *dan* $\{z_n\}$ *di* R *yang memenuhi* $x_n \leq y_n \leq z_n, \forall n \in N$, *dan jika*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n$$

maka $\{y_n\}$ *konvergen dan*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n$$

(Bartle dan Sherbert, 2000:64).

Bukti:

Misalkan $w = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n$. Maka $\forall\varepsilon > 0$ dan berdasarkan kekonvergenan dari $\{x_n\}$ dan $\{y_n\}$ menuju w akan ada bilangan asli $K(\varepsilon)$, yang mana $\forall n \in N, n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $|x_n - w| < \varepsilon$ dan $|z_n - w| < \varepsilon$. Sehingga

$$x_n - w \leq y_n - w \leq z_n - w$$

$$-\varepsilon < y_n - w < \varepsilon$$

karena $\varepsilon > 0$ dan $n \in N, n \geq K(\varepsilon)$ sehingga dapat dikatakan bahwa $\{y_n\}$ konvergen dan $\lim_{n\to\infty} y_n = w$.

Contoh:

$\{x_n\} = \left\{\frac{\sin(n)}{n} \middle| n \in N\right\}$ konvergen.

$$-1 \leq \quad \sin(n) \quad \leq 1$$

$$-\frac{1}{n} \leq \quad \frac{\sin(n)}{n} \quad \leq \frac{1}{n}$$

Karena $\left\{-\frac{1}{n}\right\} \to 0$ dan $\left\{\frac{1}{n}\right\} \to 0$ maka berdasarkan teorema 2.1.2 dapat dikatakan bahwa barisan $\left\{\frac{\sin(n)}{n}\right\}$ konvergen dan $\lim_{n\to\infty} \sin(n) = 0$.

Teorema 2.1.3 *Jika* $\{x_n\}$ *adalah barisan bilangan positif di* R *dan* $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = L$ *ada dan* $L < 1$, *maka* $\{x_n\}$ *konvergen dan* $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = 0$

(Bartle dan Sherbert, 2000:66).

Bukti:

Karena $\{x_n\}$ adalah barisan bilangan positif maka $L \geq 0$. Misal ada r dengan $L < r < 1$, dan ambil $\varepsilon = r - L > 0$. Sehingga akan ada bilangan asli $K(\varepsilon)$ sedemikian hingga jika $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n} - L\right| < \varepsilon$, yang artinya $\frac{x_{n+1}}{x_n} < L + \varepsilon = L + (r - L) = r$. Oleh karena itu akan diperoleh

$$0 < x_{n+1} < x_n r < x_{n-1} r^2 < \cdots < x_{K(\varepsilon)} r^{n-K(\varepsilon)+1}$$

Jika $C = \frac{x_{K(\varepsilon)}}{r^{K(\varepsilon)}}$ maka $0 < x_{n+1} < Cr^{n+1}$, karena $0 < r < 1$ maka dapat dikatakan bahwa $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$, yang mana berarti $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Contoh:

$\{x_n\} = \left\{\frac{n}{2^n} \middle| n \in N\right\}$ konvergen.

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \left(\frac{n+1}{2^{n+1}}\right)\left(\frac{2^n}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Karena $\frac{1}{2} < 1$ maka berdasarkan teorema 2.1.3 dapat dikatakan bahwa barisan $\left\{\frac{n}{2n}\right\}$ konvergen.

Definisi 2.1.4 *Barisan* $\{x_n\}$ *di* R *dikatakan terbatas apabila ada bilangan real* $m > 0$ *yang memenuhi* $|x_n| \leq m, \forall n \in N$ (Bartle dan Sherbert, 2000:64).

Adapun contoh dari barisan terbatas adalah:

Diberikan suatu barisan $\{x_n\} = \{(-1)^n | n \in N\}$ di R. Barisan tersebut adalah barisan terbatas.

Bukti:

$\{x_n\} = \{-1,1,-1,1,-1,\dots\}$. Jika diambil $m = 1$ maka $|x_n| \leq m$ adalah benar $\forall n \in N$.

Teorema 2.1.5 *Barisan konvergen adalah terbatas* (Bartle dan Sherbert, 2000:81).

Bukti:

Ambil $\varepsilon = 1$, maka akan ada bilangan asli $K = K(1)$ dan $n \geq K$ yang memenuhi $|x_n - x| < 1$. Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga akan diperoleh $|x_n| = |x_n - x + x| \leq |x_n - x| + |x| < 1 + |x|$. Jika diambil

$$m = \sup\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{K-1}|, |x| + 1\}$$

maka berlaku $|x_n| \leq m, \forall n \in N$

Contoh:

$\{x_n\} = \left\{\frac{3n+2}{n+1} \middle| n \in N\right\}$ terbatas.

Bukti:

$\{x_n\} = \left\{2\frac{1}{2}, 2\frac{2}{3}, 2\frac{3}{4}, 2\frac{4}{5}, \dots\right\}$. Jika diambil $m = 3$ maka $|x_n| \leq m$ adalah benar $\forall n \in N$.

Definisi 2.1.6. *Barisan $\{x_n\}$ di R dikatakan monoton jika barisan tersebut meningkat atau menurun. Barisan tersebut dikatakan meningkat jika memenuhi pertaksamaan $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \cdots$, dan barisan tersebut dikatakan menurun jika memenuhi pertaksamaan $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \cdots$.* (Bartle dan Sherbert, 2000:69).

Contoh:

$\{x_n\} = \{n|n \in N\}$ monoton.

Bukti:

$\{x_n\} = \{1,2, \dots, n, n+1, \dots\}$, karena $n \in N$ maka $\{x_n\}$ memenuhi pertaksamaan $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \cdots$ sehingga $\{x_n\} = \{n\}$ monoton.

Teorema 2.1.7 *Barisan $\{x_n\}$ di R yang monoton adalah konvergen jika dan hanya jika barisan tersebut terbatas* (Bartle dan Sherbert, 2000:69).

Bukti:

Misalkan $\{x_n\}$ monoton naik dan terbatas, sehingga akan ada bilangan real $m > 0$ yang memenuhi $|x_n| \leq m, \forall n \in N$. Berdasarkan sifat kelengkapan pada bilangan real maka supremum dari $x^* = \sup(x_n : n \in N)$ ada, sehingga akan dibuktikan bahwa $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$.

Jika $\varepsilon > 0$, maka $x^* - \varepsilon$ bukanlah batas atas dari himpunan$(x_n : n \in N)$ sehingga akan ada elemen dari himpunan x_K yang memenuhi $x^* - \varepsilon < x_K$. Karena $\{x_n\}$ adalah barisan yang monoton naik maka $x_K \leq x_n$ di mana $n \geq K$, sehingga $x^* - \varepsilon < x_K \leq x_n \leq x^* < x^* + \varepsilon$, oleh karena itu akan diperoleh $|x_n - x^*| < \varepsilon$. Karena $\varepsilon > 0$ maka dapat dikatakan bahwa $\{x_n\}$ konvergen menuju x^*.

Misalkan $\{x_n\}$ monoton turun dan terbatas, sehingga akan ada bilangan real $m > 0$ yang memenuhi $|x_n| \leq m, \forall n \in N$. Berdasarkan sifat kelengkapan pada bilangan real maka infimum dari $x^* = \inf(x_n : n \in N)$ ada, sehingga akan dibuktikan bahwa $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$.

Jika $\varepsilon > 0$, maka $x^* - \varepsilon$ bukanlah batas bawah dari himpunan $(x_n : n \in N)$ sehingga akan ada elemen dari himpunan x_K yang memenuhi $x_K < x^* - \varepsilon$. Karena $\{x_n\}$ adalah barisan yang monoton turun maka $x_n \leq x_K$ di mana $n \geq K$, sehingga $x^* + \varepsilon < x_K \leq x_n \leq x^* < x^* - \varepsilon$, oleh karena itu akan diperoleh $|x_n - x^*| < \varepsilon$. Karena $\varepsilon > 0$ maka dapat dikatakan bahwa $\{x_n\}$ konvergen menuju x^*.

Contoh:

$\{x_n\} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \middle| n \in N\right\}$ konvergen.

Pembuktian kekonvergenan dari barisan di atas akan menggunakan teorema 2.1.7, sehingga akan dibuktikan bahwa barisan tersebut adalah barisan monoton dan terbatas.

Untuk membuktikan bahwa barisan tersebut adalah monoton, akan digunakan ekspansi binomial untuk $\{x_n\}$:

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n}{n} \frac{(n-1)}{n} \dots \frac{n-(k-1)}{n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

karena $\forall i \in \{1,2, \dots, (k-1)\}$: $\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$, dan karena $\sum x_{n+1}$ memiliki *term* lebih banyak daripada $\sum x_n$ maka dapat dikatakan bahwa $\{x_n\}$ adalah barisan monoton naik.

Selanjutnya untuk membuktikan bahwa barisan tersebut terbatas, digunakan kembali ekspansi binomial untuk $\{x_n\}$

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + \frac{n}{n} + \frac{1}{2!}\frac{n(n-1)}{n^2} + \frac{1}{3!}\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} + \dots + \frac{1}{n!}\frac{n(n-1)\dots(n-n+1)}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \\ &< e \end{aligned}$$

Sehingga jika $\{x_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ adalah barisan yang monoton naik dan memiliki batas atas e maka dapat dikatakan bahwa barisan tersebut konvergen menuju e.

Definisi 2.1.8 *Barisan* $\{x_n\}$ *di* R *dikatakan sebagai barisan Cauchy jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat bilangan asli* $H(\varepsilon)$ *sehingga untuk setiap bilangan asli* $m, n \geq H(\varepsilon)$ *berlaku* $|x_n - x_m| < \varepsilon$ (Bartle dan Sherbert, 2000:81).

Adapun contoh dari barisan Cauchy adalah sebagai berikut:

1. $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n^2} \middle| n \in N\right\}$

$\forall \varepsilon > 0$ pilih $H(\varepsilon) > \frac{2}{\varepsilon} \leftrightarrow \frac{2}{H(\varepsilon)} < \varepsilon,$ sehingga $\forall m, n \in N$ dan $m, n \geq H(\varepsilon)$ diperoleh $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{H(\varepsilon)} < \frac{\varepsilon}{2}$ dan $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{H(\varepsilon)} < \frac{\varepsilon}{2}$. Oleh karena itu

$$\left|\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right| \leq \left|\frac{1}{n^2}\right| + \left|\frac{1}{m^2}\right| = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Berdasarkan proses di atas dapat dikatakan bahwa $\left|\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right| < \varepsilon$ berlaku sehingga barisan $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ adalah barisan Cauchy.

2. $\{x_n\} = \left\{\frac{(-1)^n}{n} \middle| n \in N\right\}$

$\forall \varepsilon > 0$ pilih $H(\varepsilon) > \frac{2}{\varepsilon} \leftrightarrow \frac{2}{H(\varepsilon)} < \varepsilon,$ sehingga $\forall m, n \in N$ dan $m, n \geq H(\varepsilon)$ diperoleh $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{H(\varepsilon)} < \frac{\varepsilon}{2}$ dan $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{H(\varepsilon)} < \frac{\varepsilon}{2}$. Oleh karena itu

$$\begin{aligned}\left|\frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^m}{m}\right| &\leq \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| + \left|\frac{(-1)^m}{m}\right| \\ &= |(-1)^n|\left|\frac{1}{n}\right| + |(-1)^m|\left|\frac{1}{m}\right| \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{m}\end{aligned}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Berdasarkan proses di atas dapat dikatakan bahwa $\left|\frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^m}{m}\right| < \varepsilon$ berlaku sehingga barisan $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ adalah barisan Cauchy.

Teorema 2.1.9 *Jika suatu barisan* $\{x_n\}$ *di* R *adalah barisan konvergen, maka barisan tersebut adalah barisan Cauchy* (Bartle dan Sherbert, 2000:81).

Bukti:

Jika $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ dan untuk setiap $\varepsilon > 0$ maka akan ada bilangan natural $K(\varepsilon)$ di mana jika $n \geq K(\varepsilon)$ maka $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$. Selanjutnya jika ada bilangan natural $H(\varepsilon) = K(\varepsilon)$ dan jika $n, m \geq H(\varepsilon)$ maka

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= |(x_n - x) + (x - x_m)| \\ &\leq |x_n - x| + |x_m - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Contoh:

1. $\{x_n\} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \middle| n \in N\right\}$

Telah dibuktikan sebelumnya bahwa barisan $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ konvergen ke e. Jika diambil $x = e$, maka akan diperoleh

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= |(x_n - x) + (x - x_m)| \\ &= \left|\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e\right) + \left(e - \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right)\right| \end{aligned}$$

$$\leq \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| + \left|\left(1+\frac{1}{m}\right)^m - e\right|$$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$ ...karena $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ dan $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ konvergen ke e dan ε adalah sebarang bilangan positif.

$< \varepsilon$

Sehingga $\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right| < \varepsilon$ berlaku dan terbukti bahwa barisan $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ adalah barisan Cauchy.

2. $\{x_n\} = \left\{\frac{n}{2^n}\middle| n \in N\right\}$

Telah dibuktikan sebelumnya bahwa barisan $\left\{\frac{n}{2^n}\right\}$ konvergen. Jika suatu barisan adalah konvergen, maka limitnya ada. Anggap limit dari barisan tersebut adalah $p,$ maka akan diperoleh

$$|x_n - x_m| = |(x_n - x) + (x - x_m)|$$

$$= \left|\left(\frac{n}{2^n} - p\right) + \left(p - \frac{m}{2^m}\right)\right|$$

$$\leq \left|\frac{n}{2^n} - p\right| + \left|\frac{m}{2^m} - p\right|$$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$ …karena $\frac{n}{2^n}$ dan $\frac{m}{2^m}$ konvergen ke p dan ε adalah sebarang bilangan positif.

$< \varepsilon$

Sehingga $\left|\frac{n}{2^n} - \frac{m}{2^m}\right| < \varepsilon$ berlaku dan terbukti bahwa barisan $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ adalah barisan Cauchy.

3. $\{x_n\} = \left\{\frac{\sin(n)}{n} \middle| n \in N\right\}$

Telah dibuktikan sebelumnya bahwa barisan $\left\{\frac{\sin(n)}{n}\right\}$ konvergen ke 0. Jika diambil $x = 0$, maka akan diperoleh

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= |(x_n - x) + (x - x_m)| \\ &= \left|\left(\frac{\sin(n)}{n} - 0\right) + \left(0 - \frac{\sin(n)}{n}\right)\right| \\ &\leq \left|\frac{\sin(n)}{n} - 0\right| + \left|\frac{\sin(m)}{m} - 0\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

...karena $\frac{\sin(n)}{n}$ dan $\frac{\sin(m)}{m}$ konvergen ke 0 dan ε adalah sebarang bilangan positif.

$$< \varepsilon$$

Sehingga $\left|\frac{\sin(n)}{n} - \frac{\sin(m)}{m}\right| < \varepsilon$ berlaku dan barisan $\left\{\frac{\sin(n)}{n}\right\}$ adalah barisan Cauchy.

Teorema 2.1.10 *Barisan Cauchy adalah terbatas* (Bartle dan Sherbert, 2000:82).

Bukti:

Ambil $\varepsilon = 1$, maka akan ada bilangan asli $K = K(\varepsilon)$ dan $n \geq K$ yang memenuhi $|x_n - x_K| < 1$. Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga akan diperoleh $|x_n| = |x_n - x_K + x_K| \leq |x_n - x_K| + |x_K| < 1 + |x_K|$. Jika diambil

$$m = \sup\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{K-1}|, |x_K| + 1\}$$

maka berlaku $|x_n| \leq m, \forall n \in N$

Contoh:

Diberikan suatu barisan Cauchy $\{x_n\} = \left\{\frac{3n+2}{n+1} \middle| n \in N\right\}$ di R. Barisan tersebut terbatas.

$\{x_n\} = \left\{2\frac{1}{2}, 2\frac{2}{3}, 2\frac{3}{4}, 2\frac{4}{5}, \ldots\right\}$. Jika diambil $m = 3$ maka $|x_n| \leq m$ adalah benar $\forall n \in N$.

Teorema 2.1.11 (Teorema Bolzano-Weiestrass) *Setiap barisan yang terbatas memiliki sub-barisan yang konvergen* (Bartle dan Sherbert, 2000:78).

Bukti:

Dimisalkan $\{x_n\}$ adalah barisan yang terbatas dan $\{x_{n_k}\}$ adalah sub-barisan dari $\{x_n\}$. Jika $\{x_n\}$ terbatas, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ akan ada bilangan asli $K(\varepsilon)$ yang memenuhi $n \geq K(\varepsilon)$ dan $|x_n - x| < \varepsilon$. Karena $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$, maka $n_k \geq K(\varepsilon)$ sehingga $\left|x_{n_k} - x\right| < \varepsilon$.

2.2 Ruang Bernorma

Definisi 2.2.1 *Misalkan E suatu ruang vektor. Suatu pemetaan $\|.\|: E \to R$ disebut norm, jika $\forall x, y \in E$ dan $\lambda \in R$ berlaku*

a. $\|x\| \geq 0$;

b. $\|x\| = 0 \leftrightarrow x = 0$;

c. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \; \forall \lambda \in R$;

d. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

$(E, \|.\|)$ *disebut ruang vektor bernorma dan $\|x\|$ disebut norm dari x. Sifat yang keempat tersebut sering disebut sebagai ketaksamaan segitiga ruang vektor bernorma* (Coleman, 2012:1).

Teorema 2.2.2 *Setiap ruang bernorma $(K, \|\cdot\|)$ merupakan ruang metrik terhadap metrik d:*

$$d(x, y) = \|x - y\|, \; \forall x, y \in K.$$

Bukti:

Benar bahwa ruang bernorma $(K, \|\cdot\|)$ merupakan ruang metrik terhadap metrik tersebut sebab $\forall x, y \in K$ akan diperoleh:

a. $d(x,y) = \|x - y\| \geq 0$ adalah benar menurut definisi 2.2.1. (a).

b. $d(x,y) = \|x - y\| = 0 \leftrightarrow x - y = 0 \leftrightarrow x = y$ adalah benar menurut definisi 2.2.1 (b).

c. $d(x,y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1|\|y - x\| = \|y - x\| = d(y,x)$ adalah benar menurut definisi 2.2.1 (c).

d. $d(x,y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\|$

$$\leq \|x - z\| + \|y - z\| = d(x,z) + d(z,y)$$

adalah benar menurut definisi 2.2.1. (d).

Berdasarkan teorema 2.2.2 di atas yaitu setiap ruang bernorma merupakan ruang metrik, maka semua konsep, pengertian, sifat-sifat, serta teorema-teorema yang berlaku pada ruang metrik belaku pula pada ruang bernorma dengan pengertian $d(x,y) = \|x - y\|$ (Darmawijaya, 2007:93).

Adapun contoh dari ruang bernorma adalah:

Misalkan untuk $\|x\| = |x|,\ \forall x \in R$, maka $(R, \|.\|)$ merupakan ruang bernorma.

Bukti:

a. $\|x\| = |x| \geq 0$ adalah benar karena hasil dari harga mutlak adalah selalu lebih dari atau sama dengan 0.

b. $\|x\| = |x| = 0 \leftrightarrow x = 0$.

c. $\|\lambda x\| = |\lambda x| = |\lambda||x| = |\lambda|\|x\|$.

d. $\|x + y\| = |x + y|$

$$\leq |x| + |y| = \|x\| + \|y\|$$

2.3 Ruang Banach

Definisi 2.3.1 *Ruang vektor bernorma E lengkap atau disebut ruang Banach jika setiap barisan Cauchy di E tersebut konvergen* (Coleman, 2012:16).

Adapun contoh dari ruang Banach adalah sebagai berikut:

Diberikan ruang bernorma $(R, \|.\|)$ dengan $\|x\| = |x|$, $\forall x \in R$ dan $\{x_n\} \in R$, $\forall n \in N$ adalah barisan Cauchy, akan dibuktikan bahwa $(R, \|.\|)$ merupakan ruang Banach.

Bukti:

Untuk membuktikan bahwa $(R, \|.\|)$ merupakan ruang Banach, akan ditunjukkan bahwa jika $\{x_n\} \in R$ adalah barisan Cauchy maka $\{x_n\}$ konvergen ke $x \in R$.

Berdasarkan teorema 2.1.10, barisan Cauchy adalah barisan yang terbatas. Selanjutnya digunakan teorema 2.1.11 yang menyatakan bahwa setiap barisan terbatas memiliki sub-barisan yang konvergen.

Jika $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ akan ada bilangan asli $H\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ sedemikian sehingga untuk setiap $m, n \in N$ dan $m, n \geq H\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ berlaku $|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, dan jika sub-barisan dari $\{x_n\}$ yaitu $\{x_{n_k}\}$ adalah konvergen, yang dimisalkan konvergen menuju x, maka akan ada bilangan asli $n_k \geq H\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ pada barisan $(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k, \ldots)$ yang memenuhi $\left|x_{n_k} - x\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Karena $m, n \geq H\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ dan $n_k \geq H\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, jika $m = n_k$ maka akan diperoleh $\left|x_n - x_{n_k}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sehingga

$$|x_n - x| = \left|x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - x\right| \leq \left|x_n - x_{n_k}\right| + \left|x_{n_k} - x\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

yang artinya $|x_n - x| < \varepsilon$. Maka $\{x_n\}$ adalah barisan konvergen.

Jadi terbukti bahwa setiap barisan Cauchy $\{x_n\}$ di R adalah barisan konvergen, sehingga dapat dikatakan bahwa $(R, \|.\|)$ merupakan ruang Banach.

2.4 Persamaan Fungsional

Definisi 2.4.1 *Persamaan fungsional adalah persamaan fungsi yang belum diketahui fungsinya. Ada tiga subjek yang dipelajari dalam persamaan fungsional, yaitu:*

1. *Menemukan solusi khusus (particular),*
2. *Menemukan solusi umum,*
3. *Permasalahan kestabilan* (Al-Mosadder, 2012:7).

2.4.1 Persamaan Fungsional Cauchy *Additive*

Definisi 2.4.1.1 *Suatu fungsi $f: R \to R$ dikatakan fungsi additive jika fungsi tersebut memenuhi persamaan fungsional Cauchy additive berikut*

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$\forall x, y \in R$ (Sahoo dan Kannappan, 2011:4).

Misalkan diberikan suatu fungsi $f: R \to R$ dengan $f(x) = 2x, \forall x \in R,$ maka fungsi tersebut merupakan fungsi *additive*.

Bukti:

$$f(x+y) = 2(x+y) = 2x + 2y = f(x) + f(y), \forall x, y \in R$$

Definisi 2.4.1.2 *Suatu fungsi $f: R \to R$ dikatakan rasional homogen jika dan hanya jika*

$$f(rx) = rf(x)$$

$\forall x \in R$ dan $r \in R$. Definisi di atas menunjukkan bahwa setiap solusi dari persamaan Cauchy *additive* adalah rasional homogen (Sahoo dan Kannappan, 2011:6).

Misalkan diberikan suatu fungsi $f: R \to R$ dengan $f(x) = 2x, \forall x \in R,$ maka fungsi tersebut adalah fungsi yang rasional homogen.

Bukti:

$$f(rx) = 2(rx) = r(2x) = rf(x), \forall x, r \in R$$

2.4.2 Persamaan Fungsional Jensen-Hosszú

Telah diketahui bahwa bila ada suatu fungsi yang memetakan himpunan bilangan real ke bilangan real disebut persamaan fungsional Jensen apabila memenuhi persamaan berikut

$$2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(x) + f(y)$$

dan disebut persamaan fungsional Hosszú apabila memenuhi persamaan berikut

$$f(x+y-xy) + f(xy) = f(x) + f(y).$$

Kedua persamaan fungsional tersebut adalah ekuivalen dan solusi umumnya adalah $f(x) = a(x) + c, \forall x \in R,$ di mana a adalah suatu fungsi *additive* dan c adalah sebarang konstan. Akan dapat dikonstruksikan suatu persamaan fungsional di mana sisi kirinya memiliki bentuk yang sama seperti pada persamaan Hosszú dan sisi kanannya memiliki bentuk yang sama dengan sisi kiri dari persamaan Jensen (Kominek, 2009:53).

Definisi 2.4.2.1 *Suatu fungsi $f: R \to R$ yang memenuhi persamaan berikut*

$$f(x+y-xy) + f(xy) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$\forall x, y \in R$ *dinamakan persamaan fungsional Jensen-Hosszú* (Kominek, 2009:53).

Misalkan diberikan suatu fungsi $f: R \to R$ dengan $f(x) = 2x + 3, \forall x \in R,$ maka fungsi tersebut memenuhi persamaan fungsional Jensen-Hosszú.

Bukti:

$$\begin{aligned} f(x + y - xy) + f(xy) &= 2f\left(\frac{x + y}{2}\right) \\ 2(x + y - xy) + 3 + 2(xy) + 3 &= 2\left[2\left(\frac{x + y}{2}\right) + 3\right] \\ 2x + 2y - 2xy + 3 + 2xy + 3 &= 2[x + y + 3] \\ 2x + 2y + 6 &= 2x + 2y + 6 \end{aligned}$$

2.5 Kestabilan Hyers-Ulam-Rassias

Formula atau persamaan tertentu dapat diaplikasikan sebagai model dari suatu proses fisik jika apabila terjadi perubahan kecil pada persamaan tersebut hanya akan menimbulkan perubahan yang kecil pula pada hasilnya. Jika kondisi tersebut terpenuhi, dapat dikatakan bahwa persamaan tersebut adalah persamaan yang stabil. Dalam aplikasinya, misalkan suatu persamaan fungsional Cauchy *additive* yang dinotasikan sebagai $f(x + y) - f(x) - f(y) = 0$ tidak selalu benar $\forall\, x, y \in R$, namun dapat menjadi benar jika digunakan aproksimasi

$$f(x + y) - f(x) - f(y) \approx 0,$$

$\forall x, y \in R$. Secara matematis dapat dinotasikan sebagai

$$|f(x + y) - f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0, \forall x, y \in R$. Dapat diketahui saat terjadi perubahan kecil pada suatu persamaan hanya akan menimbulkan perubahan yang kecil pula pada hasilnya. Hal inilah yang menjadi inti dari teori kestabilan.

Pada tahun 1940, S. M. Ulam menemukan persoalan, jika diberikan suatu Grup G, grup metrik H dengan metrik (o, o), dan sebarang bilangan positif ε, apakah ada δ positif sedemikian hingga jika ada fungsi $f: G \to H$ yang memenuhi

$$d(f(xy), f(x)f(y)) \leq \delta$$

$\forall x, y \in G$, maka ada fungsi homomorfisme $\varphi: G \to H$ dengan

$$d(f(x), \varphi(x)) \leq \varepsilon$$

$\forall x \in G$? Permasalahan tersebutlah yang dapat membentuk inti dari teori kestabilan. Pada ruang Banach, permasalahan di atas telah dipecahkan oleh D. H. Hyres pada tahun 1941 dengan $\varepsilon = \delta$ dan $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}$ (Sahoo dan Kannappan, 2011:293).

Untuk membuktikannya, Hyers mengkonstruksikan secara eksplisit peta dari fungsi *additive A* dari fungsi f yang diberikan. Metode ini disebut metode langsung dan sudah banyak digunakan untuk mempelajari kestabilan dari berbagai persamaan fungsional.

Pertaksamaan $\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$ dapat dikatakan sebagai Cauchy *difference* dari fungsi f yang terbatas. Pada tahun 1978, Rassias membuktikan teorema Hyers yang lebih diperluas di mana Cauchy *difference*-nya dapat tidak terbatas, artinya tidak hanya terbatas pada sebarang ε positif (Jung, 2011:24).

Berikut adalah teorema Hyers dan Rassias dalam pembuktian kestabilan persamaan fungsional Cauchy *additive* secara umum.

Teorema 2.5.1 (Teorema Hyers) *Misalkan* $f: E_1 \to E_2$ *merupakan suatu fungsi antara ruang Banach sedemikian hingga*

$$\|f(x+y)-f(x)-f(y)\| \leq \delta \tag{2.1}$$

untuk $\delta > 0$ *dan* $\forall x, y \in E_1$, *maka ada limit*

$$A(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}$$

$\forall x \in E_1$, *dan* $A: E_1 \to E_2$ *fungsi additive yang tunggal, sedemikian hingga*

$$\|f(x)-A(x)\| \leq \delta \tag{2.2}$$

$\forall x \in E_1$ (Jung, 2011: 21).

Bukti:

Jika diambil $y = x$, maka persamaan (2.1) dapat diperoleh

$$\begin{aligned} \|f(x+x)-f(x)-f(x)\| &\leq \delta \\ \|f(2x)-2f(x)\| &\leq \delta \end{aligned} \tag{2.3}$$

$\forall x \in E_1$. Jika x adalah sebarang titik di E_1, maka $\frac{x}{2}$ juga adalah sebarang titik di E_1 sehingga pertaksamaan (2.3) tetap berlaku jika mengganti x dengan $\frac{x}{2}$, dan kedua ruasnya dibagi 2, sehingga pertaksamaan tersebut menjadi

$$\left\|\frac{1}{2}f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)\right\| \leq \delta \tag{2.4}$$

$\forall x \in E_1$. Selanjutnya dibuat asumsi induksi bahwa

$$\left\|\frac{1}{2^n}f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right\| \leq \left(1-\frac{1}{2^n}\right)\delta \tag{2.5}$$

berlaku $\forall x \in E_1, \forall n \in N$. Jika $n = 1$, maka pertaksamaan (2.5) adalah benar dengan melihat pertaksamaan (2.4). Selanjutnya asumsikan pertaksamaan (2.5) benar untuk $n = k$, akan diperoleh

$$\left\|\frac{1}{2^k}f(x) - f\left(\frac{x}{2^k}\right)\right\| \leq \left(1-\frac{1}{2^k}\right)\delta \tag{2.6}$$

Untuk $n = k + 1$, maka

$$\left\|\frac{1}{2^{k+1}}f(x)-f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right\| = \left\|\left(\frac{1}{2^k}\right)\left(\frac{1}{2}\right)f(x)-f\left(\left(\frac{1}{2^k}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right\|$$

Karena persamaan fungsional Cauchy *additive* bersifat rasional homogen, maka akan berlaku

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{2^{k+1}}f(x)-f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right\| &= \left\|\left(\frac{1}{2^k}\right)\left(\frac{1}{2}\right)f(x)-\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{2^k}\right)\right\| \\ &= \frac{1}{2}\left\|\frac{1}{2^k}f(x)-f\left(\frac{1}{2^k}\right)\right\|\end{aligned}$$

Bersadarkan (2.6), maka

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{2^{k+1}}f(x)-f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right\| &\leq \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)\delta \\ &\leq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{k+1}}\right)\delta \\ &\leq \left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right)\delta\end{aligned}$$

Sehingga dapat dikatakan asumsi induksi untuk pertaksamaan (2.5) adalah benar $\forall x \in E_1, \forall n \in N$.

Jika $m > n > 0$ maka $m - n \in N$, oleh karena itu n dapat diganti dengan $n - m$ pada pertaksamaan (2.5) sehingga diperoleh

$$\left\|\frac{1}{2^{n-m}}f(x)-f\left(\frac{x}{2^{n-m}}\right)\right\| \leq \left(1-\frac{1}{2^{n-m}}\right)\delta$$

Kemudian kedua ruas dikalikan dengan $\frac{1}{2^m}$, maka

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{2^m}\left(\frac{1}{2^{n-m}}f(x)-f\left(\frac{x}{2^{n-m}}\right)\right)\right\| &\leq \frac{1}{2^m}\left(1-\frac{1}{2^{n-m}}\right)\delta \\ \left\|\frac{1}{2^n}f(x)-\frac{1}{2^m}f\left(\frac{x}{2^{n-m}}\right)\right\| &\leq \left(\frac{1}{2^m}-\frac{1}{2^n}\right)\delta \qquad (2.7)\end{aligned}$$

$\forall x \in E_1, \forall m, n \in N$. Jika x adalah sebarang titik di E_1, maka $2^n x$ juga adalah sebarang titik di E_1 sehingga pertaksamaan (2.7) tetap berlaku jika mengganti x dengan $2^n x$, sehingga pertaksamaan tersebut menjadi

$$\left\|\frac{1}{2^n} f(2^n x) - \frac{1}{2^m} f\left(\frac{2^n x}{2^{n-m}}\right)\right\| \leq \left(\frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^n}\right)\delta$$

$$\left\|\frac{1}{2^n} f(2^n x) - \frac{1}{2^m} f(2^m x)\right\| \leq \left(\frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^n}\right)\delta$$

Jika $m \to \infty$ maka $\left(\frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^n}\right) \to 0$ sehingga $\lim_{m\to\infty} \left\|\frac{f(2^n x)}{2^n} - \frac{f(2^m x)}{2^m}\right\| = 0$. Oleh karena itu $\left\{\frac{f(2^n x)}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan Cauchy di E_1 dan limitnya ada.

Didefinisikan suatu fungsi $A: E_1 \to E_2$ dengan

$$A(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n} \tag{2.8}$$

akan dibuktikan bahwa fungsi A adalah fungsi *additive*.

$$\begin{aligned}
\|A(x+y) - A(x) - A(y)\| &= \left\|\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{f(2^n(x+y))}{2^n} - \frac{f(2^n x)}{2^n} - \frac{f(2^n y)}{2^n}\right\}\right\| \\
&= \left\|\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}\{f(2^n(x+y)) - f(2^n x) - f(2^n y)\}\right\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \|f(2^n(x+y)) - f(2^n x) - f(2^n y)\| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \frac{\delta}{2^n} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Maka terbukti A adalah fungsi *additive* $\forall x, y \in E_1$.

Sekarang akan dibuktikan bahwa $\|A(x) - f(x)\| \leq \delta$

$$\|A(x) - f(x)\| = \left\|\lim_{n\to\infty} \frac{f(2^{nx})}{2^n} - f(x)\right\|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{f(2^{nx})}{2^n} - f(x) \right\|$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \delta \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= \delta$$

Selanjutnya adalah membuktikan bahwa A adalah fungsi yang tunggal. Diasumsikan A tidak tunggal, maka akan ada fungsi *additive* yang lain yaitu $B: E_1 \rightarrow E_2$ yang memenuhi $\|B(x) - f(x)\| \leq \delta, \forall x \in E_1$.

$$\begin{aligned} \|A(x) - B(x)\| &= \|A(x) - f(x) + f(x) - B(x)\| \\ &\leq \|A(x) - f(x)\| + \|f(x) - B(x)\| \\ &= \delta + \delta \\ &\leq 2\delta \end{aligned}$$

Karena A dan B adalah fungsi *additive* maka

$$\begin{aligned} \|A(x) - B(x)\| &= \left\| \frac{nA(x)}{n} - \frac{nB(x)}{n} \right\| \\ &= \left\| \frac{A(nx)}{n} - \frac{B(nx)}{n} \right\| \\ &= \frac{1}{n} \|A(nx) - B(nx)\| \\ &\leq \frac{2\delta}{n} \\ \lim_{n\to\infty} \|A(x) - B(x)\| &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{2\delta}{n} \\ \|A(x) - B(x)\| &\leq 0 \end{aligned}$$

Sehingga $A(x) = B(x), \forall \in E_1$. Oleh karena itu terbukti bahwa A adalah fungsi *additive* yang tunggal dan memenuhi pertidaksamaan (2.2), jadi persamaan fungsional Cauchy *additive* adalah stabil bedasarkan teorema Hyers.

Kestabilan Contoh Fungsi *Additive* dengan Menggunakan Teorema Hyers

Berikut adalah contoh penggunaan Teorema Hyers dalam membuktikan kestabilan dari suatu fungsi *additive* yang memenuhi persamaan fungsional Cauchy *additive*. Jika diberikan suatu fungsi $f: R \to R$ dengan $f(x) = 2x$ maka

$$|f(x+y) - f(x) - f(y)| = |2x + 2y - 2x - 2y| = 0.$$

Karena untuk setiap $\delta > 0$, maka terbukti bahwa contoh fungsi *additive* tersebut memenuhi pertaksamaan

$$|f(x+y) - f(x) - f(y)| \le \delta.$$

Misalkan $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{2^n} f(2^n x) | n \in N\right\}$ adalah suatu barisan di R, akan ditunjukkan bahwa $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy.

Untuk setiap $\varepsilon > 0$, pilih $H > \frac{2}{\varepsilon}$, maka $\forall n, m \ge H$ dapat dikatakan bahwa $\frac{1}{n} \le \frac{1}{H} < \frac{\varepsilon}{2}$ dan $\frac{1}{m} \le \frac{1}{H} \le \frac{\varepsilon}{2}$. Oleh karena itu akan diperoleh

$$\left|\frac{f(2^n x)}{2^n} - \frac{f(2^m x)}{2^m}\right| = \left|\frac{2(2^n x)}{2^n} - \frac{2(2^m x)}{2^m}\right| = |2x - 2x| = 0 < \varepsilon.$$

Jadi dapat dikatakan bahwa $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{2^n} f(2^n x) | n \in N\right\}$ di R adalah barisan Cauchy. Karena setiap barisan Cauchy di R adalah konvergen, sehingga limitnya ada. Maka akan ada suatu fungsi $A: R \to R$ dengan

$$A(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}, \forall x \in R.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $A: R \to R$ merupakan fungsi *additive*.

$$\begin{aligned} |A(x+y) - A(x) - A(y)| &= \left|\lim_{n\to\infty} \left\{\frac{f\big(2^n(x+y)\big)}{2^n} - \frac{f(2^n x)}{2^n} - \frac{f(2^n y)}{2^n}\right\}\right| \\ &= \left|\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}\{f(2^n(x+y)) - f(2^n x) - f(2^n y)\}\right| \end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} |\{f(2^n(x+y)) - f(2^n x) - f(2^n y)\}|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} |\{2(2^n(x+y)) - 2(2^n x) - 2(2^n y)\}|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} |\{2(2^n x) + 2(2^n y) - 2(2^n x) - 2(2^n y)\}|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} |0|$$

$$= 0$$

Jadi $A(x+y) = A(x) + A(y)$. Dari definisi 2.4.1.1, maka dapat dikatakan bahwa A merupakan fungsi *additive*.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa A memenuhi $|f(x) - A(x)| \leq \delta, \forall x \in R$.

$$\begin{aligned} |f(x) - A(x)| &= \left| f(x) - \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n} \right| \\ &= \left| 2x - \lim_{n\to\infty} \frac{2^n f(x)}{2^n} \right| \\ &= |2x - f(x)| \\ &= |2x - 2x| \\ &= 0 \end{aligned}$$

Karena $\forall \delta > 0$, maka $|f(x) - A(x)| \leq \delta$.

Andaikan A tidak tunggal, maka akan ada fungsi *additive* yang lain $B: R \to R$ sedemikian hingga

$$|f(x) - B(x)| \leq \delta$$

$\forall x \in R$.

$$\begin{aligned} |A(x) - B(x)| &= |A(x) - f(x) + f(x) - B(x)| \\ &\leq |A(x) - f(x)| + |f(x) - B(x)| \end{aligned}$$

$$= \quad |f(x) - A(x)| + |f(x) - B(x)|$$

$$\leq \quad \delta + \delta$$

Jadi,

$$|A(x) - B(x)| \leq 2\delta.$$

$$\begin{aligned}
|A(x) - B(x)| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{2^n} A(2^n x) - \frac{1}{2^n} B(2^n x) \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} |A(2^n x) - B(2^n x)| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} 2\delta \\
&= 2\delta \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \\
&= 0
\end{aligned}$$

di mana $n \in N$.

Sehingga $A(x) = B(x), \forall x \in R$. Jadi terbukti bahwa A tunggal, sehingga terbukti bahwa contoh dari fungsi yang memenuhi persamaan fungsional Cauchy *additive* tersebut stabil berdasarkan teorema Hyers.

Teorema 2.5.2 (Teorema Rassias) *Misalkan* $f: E_1 \to E_2$ *merupakan suatu fungsi antara ruang Banach sedemikian hingga*

$$\|f(x + y) - f(x) - f(y)\| \leq \theta(\|x\|^p + \|y\|^p) \tag{2.9}$$

untuk $\theta > 0, p \in [0,1)$ *dan* $\forall x, y \in E_1$, *maka fungsi* $A: E_1 \to E_2$ *additive yang tunggal, sedemikian hingga*

$$\|f(x) - A(x)\| \leq \frac{2\theta}{2 - 2^p} \|x\|^p \tag{2.10}$$

$\forall x \in E_1$ (Jung, 2011: 24).

Bukti:

Jika diambil $y = x$ dan membagi 2 kedua ruas, maka persamaan (2.9) dapat diperoleh

$$\begin{aligned} \|f(x+x) - f(x) - f(x)\| &\leq \theta(\|x\|^p + \|x\|^p) \\ \|f(2x) - 2f(x)\| &\leq 2\theta\|x\|^p \\ \left\|\frac{1}{2}f(2x) - f(x)\right\| &\leq \theta\|x\|^p \qquad (2.11) \end{aligned}$$

$\forall x \in E_1, p \in [0,1)$. Selanjutnya dibuat asumsi induksi bahwa

$$\left\|\frac{1}{2^n}f(2^n x) - f(x)\right\| \leq \theta\|x\|^p \sum_{m=0}^{n-1} 2^{m(p-1)} \qquad (2.12)$$

berlaku $\forall x \in E_1, \forall n \in N, p \in [0,1)$. Jika $n = 1$, maka pertaksamaan (2.11) adalah benar dengan melihat pertaksamaan (2.11). Selanjutnya asumsikan pertaksamaan (2.11) benar untuk $n = k$, akan diperoleh

$$\left\|\frac{1}{2^k}f(2^k x) - f(x)\right\| \leq \theta\|x\|^p \sum_{m=0}^{k-1} 2^{m(p-1)}$$

Untuk $n = k + 1$

$$\left\|\frac{1}{2^{k+1}}f(2^{k+1}x) - f(x)\right\|$$

$$= \left\|\frac{1}{2^{k+1}}f(2^{k+1}x) - \frac{1}{2}f(2x) + \frac{1}{2}f(2x) - f(x)\right\|$$

$$\leq \left\|\frac{1}{2^{k+1}}f(2^{k+1}x) - \frac{1}{2}f(2x)\right\| + \left\|\frac{1}{2}f(2x) - f(x)\right\|$$

$$\leq \theta\|x\|^p \sum_{m=1}^{k} 2^{m(p-1)} + \theta\|x\|^p$$

$$\leq \theta\|x\|^p \sum_{m=0}^{k} 2^{m(p-1)}$$

Sehingga dapat dikatakan asumsi induksi untuk pertaksamaan (2.12) adalah benar

$\forall x \in E_1, \forall n \in N, p \in [0,1)$.

Karena

$$\sum_{m=0}^{n-1} 2^{m(p-1)} \leq \sum_{m=0}^{\infty} 2^{m(p-1)}$$

maka pertaksamaan

$$\left\| \frac{1}{2^n} f(2^n x) - f(x) \right\| \leq \theta \|x\|^p \sum_{m=0}^{\infty} 2^{m(p-1)}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} 2^{m(p-1)} = \frac{2^{0(p-1)}}{1 - 2^{p-1}} = \frac{1}{1 - \frac{2^p}{2}} = \frac{1}{\frac{2 - 2^p}{2}} = \frac{2}{2 - 2^p}$$

$$\left\| \frac{1}{2^n} f(2^n x) - f(x) \right\| \leq \theta \|x\|^p \frac{2}{2 - 2^p} \tag{2.13}$$

Jika $m, n \in N$ dan $m > n > 0$ maka $m - n \in N$, oleh karena itu n dapat diganti dengan $n - m$ pada pertaksamaan (2.13) sehingga diperoleh

$$\left\| \frac{f(2^{n-m} x)}{2^{n-m}} - f(x) \right\| \leq \frac{2\theta}{2 - 2^p} \|x\|^p$$

Kemudian kedua ruas dikalikan dengan $\frac{1}{2^n}$ sehingga

$$\left\| \frac{f(2^{n-m} x)}{2^m} - \frac{f(x)}{2^n} \right\| \leq \frac{1}{2^n} \left(\frac{2\theta}{2 - 2^p} \right) \|x\|^p \tag{2.14}$$

$\forall x \in E_1, \forall m, n \in N$. Jika x adalah sebarang titik di E_1, maka $2^n x$ juga adalah sebarang titik di E_1 sehingga pertaksamaan (2.14) tetap berlaku jika mengganti x dengan $2^n x$, sehingga pertaksamaan tersebut menjadi

$$\left\| \frac{f(2^m x)}{2^m} - \frac{f(2^n x)}{2^n} \right\| \leq \frac{1}{2^n} \left(\frac{2\theta}{2 - 2^p} \right) \|2^n x\|^p$$

$$\leq \quad \frac{2^{np}}{2^n}\left(\frac{2\theta}{2-2^p}\right)\|x\|^p$$

Karena $0 \leq p < 1$ maka $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{np}}{2^n} = 0$ sehingga akan diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} \left\|\frac{f(2^m x)}{2^m} - \frac{f(2^n x)}{2^n}\right\| = 0.$$

Oleh karena itu $\left\{\frac{f(2^n x)}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan Cauchy di E_1 dan merupakan barisan konvergen yang mana limitnya ada.

Didefinisikan suatu fungsi $A: E_1 \to E_2$ dengan

$$A(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n} \tag{2.15}$$

akan dibuktikan bahwa fungsi A adalah fungsi *additive*.

$$\begin{aligned}
\|A(x+y) - A(x) - A(y)\| &= \left\|\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{f(2^n(x+y))}{2^n} - \frac{f(2^n x)}{2^n} - \frac{f(2^n y)}{2^n}\right\}\right\| \\
&= \left\|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\{f(2^n(x+y)) - f(2^n x) - f(2^n y)\}\right\| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\|f(2^n(x+y)) - f(2^n x) - f(2^n y)\| \\
&\leq \lim_{n\to\infty}\frac{\theta(\|x\|^p + \|y\|^p)2^{np}}{2^n} \\
&= 0
\end{aligned}$$

karena $0 \leq p < 1$. Maka terbukti A adalah fungsi *additive* $\forall x, y \in E_1$.

Sekarang akan dibuktikan bahwa $\|A(x) - f(x)\| \leq \delta$

$$\begin{aligned}
\|A(x) - f(x)\| &= \left\|\lim_{n\to\infty}\frac{f(2^n x)}{2^n} - f(x)\right\| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\|\frac{f(2^n x)}{2^n} - f(x)\right\|
\end{aligned}$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \frac{2\theta}{2-2^p}\|x\|^p$$

$$= \frac{2\theta}{2-2^p}\|x\|^p$$

Selanjutnya adalah membuktikan bahwa A adalah fungsi yang tunggal. Diasumsikan A tidak tunggal, maka akan ada fungsi *additive* yang lain yaitu $B: E_1 \to E_2$ yang memenuhi $\|B(x) - f(x)\| \leq \frac{2\theta}{2-2^p}\|x\|^p, \forall x \in E_1$.

$$\begin{aligned}
\|A(x) - B(x)\| &= \|A(x) - f(x) + f(x) - B(x)\| \\
&\leq \|A(x) - f(x)\| + \|f(x) - B(x)\| \\
&\leq \frac{2\theta}{2-2^p}\|x\|^p + \frac{2\theta}{2-2^p}\|x\|^p \\
&= \frac{4\theta}{2-2^p}\|x\|^p
\end{aligned}$$

Karena A dan B adalah fungsi *additive* maka

$$\begin{aligned}
\|A(x) - B(x)\| &= \left\|\frac{nA(x)}{n} - \frac{nB(x)}{n}\right\| \\
&= \left\|\frac{A(nx)}{n} - \frac{B(nx)}{n}\right\| \\
&= \frac{1}{n}\|A(nx) - B(nx)\| \\
&\leq \frac{1}{n}\frac{4\theta}{2-2^p}\|x\|^p \\
\lim_{n\to\infty}\|A(x) - B(x)\| &\leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{4\theta}{2-2^p}\|x\|^p \\
\|A(x) - B(x)\| &\leq 0
\end{aligned}$$

Sehingga $A(x) = B(x), \forall \in E_1$. Oleh karena itu terbukti bahwa A adalah fungsi *additive* yang tunggal dan memenuhi pertaksamaan (2.10), jadi persamaan fungsional Cauchy *additive* adalah stabil bedasarkan teorema Rassias.

Kestabilan Contoh Fungsi *Additive* dengan Menggunakan Teorema Rassias

$|f(x+y)-f(x)-f(y)| = |2x+2y-2x-2y| = 0.$

Karena untuk setiap $\theta > 0, p \in [0,1)$, maka terbukti bahwa contoh fungsi *additive* tersebut memenuhi pertaksamaan

$$|f(x+y)-f(x)-f(y)| \leq \theta(|x|^p + |y|^p)$$

Misalkan $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{2^n} f(2^n x) | n \in N\right\}$ adalah suatu barisan di R, akan ditunjukkan bahwa $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy.

Untuk setiap $\theta > 0$, pilih $H > \frac{2}{\varepsilon}$, maka $\forall n, m \geq H$ dapat dikatakan bahwa $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{H} < \frac{\theta}{2}$ dan $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{H} \leq \frac{\theta}{2}$. Oleh karena itu akan diperoleh

$$\left|\frac{f(2^n x)}{2^n} - \frac{f(2^m x)}{2^m}\right| = \left|\frac{2(2^n x)}{2^n} - \frac{2(2^m x)}{2^m}\right| = |2x - 2x| = 0 < \frac{2\theta}{2-2^p}|x|^p.$$

Jadi dapat dikatakan bahwa $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{2^n} f(2^n x) | n \in N\right\}$ di R adalah barisan Cauchy. Karena setiap barisan Cauchy di R adalah konvergen, sehingga limitnya ada. Maka akan ada suatu fungsi $A: R \to R$ dengan

$$A(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}, \forall x \in R$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $A: R \to R$ merupakan fungsi *additive*.

$$|A(x+y) - A(x) - A(y)| = \left|\lim_{n\to\infty} \left\{\frac{f\left(2^n(x+y)\right)}{2^n} - \frac{f(2^n x)}{2^n} - \frac{f(2^n y)}{2^n}\right\}\right|$$

$$= \left|\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}\{f(2^n(x+y)) - f(2^n x) - f(2^n y)\}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}|\{f(2^n(x+y)) - f(2^n x) - f(2^n y)\}|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}|\{2(2^n(x+y)) - 2(2^n x) - 2(2^n y)\}|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} |\{2(2^n x) + 2(2^n y) - 2(2^n x) - 2(2^n y)\}|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} |0|$$

$$= 0$$

Jadi

$$|A(x+y) - A(x) - A(y)| = 0.$$

sehingga $A(x+y) = A(x) + A(y)$. Dari definisi 2.4.1.1, maka dapat dikatakan bahwa A merupakan fungsi *additive*.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa A memenuhi

$$|f(x) - A(x)| \leq \frac{2\theta}{2-2^p} |x|^p, \forall x \in R.$$

$$\begin{aligned} |f(x) - A(x)| &= \left| f(x) - \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n} \right| \\ &= \left| 2x - \lim_{n\to\infty} \frac{2^n f(x)}{2^n} \right| \\ &= |2x - f(x)| \\ |f(x) - A(x)| &= |2x - 2x| \\ &= 0 \end{aligned}$$

Karena $\theta > 0, p \in [0,1)$, maka $|f(x) - A(x)| \leq \frac{2\theta}{2-2^p} |x|^p$.

Andaikan A tidak tunggal, maka akan ada fungsi *additive* yang lain $B: R \to R$ sedemikian hingga

$$|f(x) - B(x)| \leq \frac{2\theta}{2-2^p} |x|^p$$

$\forall x \in R$.

$$|A(x) - B(x)| = |A(x) - f(x) + f(x) - B(x)|$$

$$\leq |A(x) - f(x)| + |f(x) - B(x)|$$

$$= |f(x) - A(x)| + |f(x) - B(x)|$$

$$\leq \frac{2\theta}{2 - 2^p}|x|^p + \frac{2\theta}{2 - 2^p}|x|^p.$$

Jadi,

$$|A(x) - B(x)| \leq 2\left(\frac{2\theta}{2 - 2^p}|x|^p\right).$$

$$\begin{aligned} |A(x) - B(x)| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2^n}A(2^n x) - \frac{1}{2^n}B(2^n x)\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}|A(2^n x) - B(2^n x)| \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}2\left(\frac{2\theta}{2 - 2^p}|x|^p\right) \\ &= 2\left(\frac{2\theta}{2 - 2^p}|x|^p\right)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

di mana $n \in R$.

Sehingga $A(x) = B(x), \forall x \in R.$ Jadi terbukti bahwa A tunggal, sehingga terbukti bahwa contoh dari fungsi yang memenuhi persamaan fungsional Cauchy *additive* tersebut stabil berdasarkan teorema Rassias.

2.6 Inspirasi Al-Quran Mengenai Kestabilan

Sebagaimana telah dipaparkan pada Bab I bahwa Allah Swt. telah menciptakan bumi dengan gunung sebagai penyetabilnya. Kestabilan bumi yang dimaksud adalah keadaan saat bumi dapat ditinggali dengan aman dan nyaman oleh seluruh makluk hidup. Hal tersebut sesuai dengan tafsir surat Qaaf/50:7 yang ditulis oleh Ar-Rifai'i (2000) yang mengatakan bahwa firman Allah Swt. "*Dan*

Kami hamparkan bumi itu dan Kami letakkan padanya gunung-gunung yang kokoh" supaya bumi beserta penduduknya tidak miring dan bergoncang, gunung-gunung itu berdiri tegak tegak di atas bumi dengan semua sisinya dikelilingi air.

Meski demikian, gunung juga memiliki pergerakan atau perubahannya sendiri sebagaimana dijelaskan dalam al-Quran surat an-Naml/27:88 yang berbunyi

وَتَرَى ٱلۡجِبَالَ تَحۡسَبُهَا جَامِدَةً وَهِيَ تَمُرُّ مَرَّ ٱلسَّحَابِۚ صُنۡعَ ٱللَّهِ ٱلَّذِيٓ أَتۡقَنَ كُلَّ شَيۡءٍۚ إِنَّهُۥ خَبِيرُۢ بِمَا تَفۡعَلُونَ ﴿٨٨﴾

"Dan kamu lihat gunung-gunung itu, kamu sangka dia tetap di tempatnya, padahal ia berjalan sebagai jalannya awan. (Begitulah) perbuatan Allah yang membuat dengan kokoh tiap-tiap sesuatu; sesungguhnya Allah Maha Mengetahui apa yang kamu kerjakan"(Qs.an-Naml/27:88).

Bumi merupakan tempat yang dinamis, di mana setiap elemennya selalu bergerak, begitu pula dengan gunung. Karena pergerakan itulah kadang kala terjadi bencana gunung meletus yang menyebabkan lahar panas keluar dari mulut gunung, lereng gunung yang tadinya dipenuhi dengan pohon akan terbakar sehingga kehilangan fungsinya sebagai hutan atau tempat tinggal hewan-hewan yang tinggal di dalamnya. Perhatikan al-Quran surat al-Mulk/67:3 yang berbunyi

ٱلَّذِي خَلَقَ سَبۡعَ سَمَٰوَٰتٖ طِبَاقٗاۖ مَّا تَرَىٰ فِي خَلۡقِ ٱلرَّحۡمَٰنِ مِن تَفَٰوُتٖۖ فَٱرۡجِعِ ٱلۡبَصَرَ هَلۡ تَرَىٰ مِن فُطُورٖ ﴿٣﴾

"Yang telah menciptakan tujuh langit berlapis-lapis. Kamu sekali-kali tidak melihat pada ciptaan Tuhan Yang Maha Pemurah sesuatu yang tidak seimbang. Maka lihatlah berulang-ulang, adakah kamu lihat sesuatu yang tidak seimbang"(Qs. al-Mulk/67:3).

Dapat dikatakan dari penggalan surat al-Mulk di atas bahwa meskipun gunung memiliki pergerakannya sendiri, hal tersebut tidak membuat bumi (ciptaan Allah Swt.) menjadi tidak seimbang atau tidak stabil. Dalam ayat tersebut manusia diperintahkan untuk memperhatikan ciptaan Allah Swt. yang salah satu contohnya adalah bumi, yang mana padanya tidak terdapat kesimpangsiuran, pertentangan, aib, dan cacat.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Kestabilan Persamaan Fungsional Jensen-Hosszú

Berdasarkan konsep kestabilan Hyers-Ulam dan Hyers-Ulam-Rassias, maka akan dikonstruksikan suatu teorema untuk membuktikan kestabilan persamaan fungsional Jensen-Hosszú. Permasalahan kestabilan suatu persamaan fungsional telah dipecahkan pada Ruang Banach dan melahirkan konsep kestabilan Hyers-Ulam dan Hyers-Ulam-Rassias. Pada skripsi ini masalah Ruang Banach yang dibahas hanyalah Ruang Banach pada bilangan real (R), oleh sebab itu akan dibuktikan terlebih dahulu bahwa $(R, \|.\|)$ adalah ruang Banach dengan $\|x\| = |x|$. Sebelum dilakukan pembuktian bahwa R adalah ruang Banach, harus terlebih dahulu dibuktikan bahwa R adalah ruang bernorma.

Untuk membuktikan bahwa $(R, \|.\|)$ dengan $\|x\| = |x|$ adalah ruang bernorma, akan ditunjukkan bahwa $\|x\| = |x|$ memenuhi 4 aksioma pada definisi 2.2.1.

1. $\|x\| = |x| \geq 0$ adalah benar karena hasil dari harga mutlak adalah selalu lebih dari atau sama dengan 0.
2. $\|x\| = |x| = 0 \leftrightarrow x = 0$.
3. $\|\lambda x\| = |\lambda x| = |\lambda||x| = |\lambda|\|x\|$.
4. $\|x + y\| = |x + y| \leq |x| + |y| = \|x\| + \|y\|$

Berdasarkan proses di atas, dapat dikatakan bahwa R adalah ruang bernorma. Misalkan $\{x_n\}$ adalah suatu barisan Cauchy di dalam $(R, \|.\|)$, untuk membuktikan bahwa $(R, \|.\|)$ merupakan ruang Banach, akan ditunjukkan bahwa jika $\{x_n\}$ di dalam $(R, \|.\|)$ adalah barisan Cauchy maka $\{x_n\}$ konvergen di $(R, \|.\|)$.

Berdasarkan teorema 2.1.10, barisan Cauchy adalah barisan yang terbatas. Selanjutnya digunakan teorema 2.1.11 yang menyatakan bahwa setiap barisan terbatas memiliki sub-barisan yang konvergen.

Jika $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ akan ada bilangan asli $H\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ sedemikian sehingga $\forall m, n \in N$ dan $m, n \geq H\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ berlaku $|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, dan jika sub-barisan dari $\{x_n\}$ yaitu $\{x_{n_k}\}$ adalah konvergen, yang dimisalkan konvergen menuju x, maka akan ada bilangan asli $n_k \geq H\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ pada barisan $(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k, \dots)$ yang memenuhi $\left|x_{n_k} - x\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Karena $m, n \geq H\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ dan $n_k \geq H\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, jika $m = n_k$ maka akan diperoleh $\left|x_n - x_{n_k}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sehingga

$$|x_n - x| = \left|x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - x\right| \leq \left|x_n - x_{n_k}\right| + \left|x_{n_k} - x\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

yang artinya $|x_n - x| < \varepsilon$. Maka $\{x_n\}$ adalah barisan konvergen.

Jadi terbukti bahwa setiap barisan Cauchy $\{x_n\} \in R$ adalah barisan konvergen, maka $(R, \|.\|)$ merupakan ruang Banach. Sehingga dapat dikatakan bahwa f juga merupakan fungsi di antara ruang Banach.

3.1.1 Kestabilan Persamaan Fungsional Jensen-Hosszú Berdasarkan Teorema Hyers

Misalkan $f: R_1 \to R_2$ merupakan suatu fungsi di antara ruang Real sedemikian hingga

$$\left|f(x + y - xy) + f(xy) - 2f\left(\frac{x + y}{2}\right)\right| \leq \delta$$

untuk $\delta > 0$ dan $\forall x, y \in R_1$. Maka ada limit

$$A(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}, \forall x \in R_1$$

dan $A: R_1 \to R_2$ fungsi *additive* yang tunggal sedemikian hingga

$$|f(x) - A(x)| \leq \delta, \forall x \in R_1$$

Untuk membuktikan teorema tersebut, maka harus ditunjukkan bahwa:

1. $\left\{\frac{f(2^n x)}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan Cauchy $\forall x \in R_1$.
2. Jika $A(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}$ maka A adalah fungsi *additive.*
3. A memenuhi $|f(x) - A(x)| \leq \delta, \forall \delta > 0$.
4. A adalah fungsi yang tunggal.

Akan ditunjukkan poin nomor 1 bahwa $\left\{\frac{f(2^n x)}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan Cauchy $\forall x \in R_1$.

Dimisalkan $y = 0$, dan diasumsikan $f(0) = 0$ maka

$$\left|f(x) + f(0) - 2f\left(\frac{x}{2}\right)\right| < \delta$$

$$\left|f(x) - 2f\left(\frac{x}{2}\right)\right| < \delta$$

$\forall x \in R_1$. Jika x adalah sebarang titik di R_1, maka $2^k x, \forall k = 1,2,3, \dots, n$ juga adalah sebarang titik di R_1 sehingga pertaksamaan di atas tetap berlaku jika mengganti x dengan $2^k x$, maka

$$|f(2^k x) - 2f(2^{k-1}x)| \quad \leq \quad \delta$$

Pada kedua ruas dikalikan dengan $\frac{1}{2^k}$ dan ditambahkan sebanyak n kali

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} |f(2^k x) - 2f(2^{k-1}x)| \quad \leq \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \delta$$

$$\leq \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\delta \qquad (3.1)$$

Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga maka pada pertaksamaan (3.1) diperoleh

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\left(f(2^k x) - 2f(2^{k-1}x)\right)\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\left|f(2^k x) - 2f(2^{k-1}x)\right|$$

Dengan menggunakan induksi matematika, akan dapat dibuktikan bahwa

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\left(f(2^k x) - 2f(2^{k-1}x)\right) = \frac{1}{2^n}f(2^n x) - f(x)$$

Untuk $n = 1$, maka

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{2^k}\left(f(2^k x) - 2f(2^{k-1}x)\right) = \frac{1}{2}f(2x) - 2f(x)$$

adalah benar.

Untuk $n = a$,

$$\sum_{k=1}^{a} \frac{1}{2^k}\left(f(2^k x) - 2f(2^{k-1}x)\right) = \frac{1}{2^a}f(2^a x) - f(x)$$

Diasumsikan benar, maka untuk $n = a + 1$

$$\sum_{k=1}^{a+1} \frac{1}{2^k}\left(f(2^k x) - 2f(2^{k-1}x)\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{a} \frac{1}{2^k}\left(f(2^k x) - 2f(2^{k-1}x)\right) + \frac{1}{2^{a+1}}f(2^{a+1}x) - \frac{1}{2^a}f(2^a x)$$

$$= \frac{1}{2^a}f(2^a x) - f(x) + \frac{1}{2^{a+1}}f(2^{a+1}x) - \frac{1}{2^a}f(2^a x)$$

$$= -f(x) + \frac{1}{2^{a+1}}f(2^{a+1}x)$$

Sehingga terbukti bahwa $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\left(f(2^k x)-2f(2^{k-1}x)\right)=\frac{1}{2^n}f(2^n x)-f(x)$ yang mengakibatkan

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2^n}f(2^n x)-f(x)\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\left(f(2^k x)-2f(2^{k-1}x)\right)\right|\\ &\leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\left|f(2^k x)-2f(2^{k-1}x)\right|\\ &\leq \left(1-\frac{1}{2^n}\right)\delta \qquad (3.2)\end{aligned}$$

Jika $0<n<m$ maka n dapat diganti dengan $n-m$, sehingga pertaksamaan (3.2) akan menjadi

$$\left|\frac{f(2^{n-m}x)}{2^{n-m}}-f(x)\right| \leq \left(1-\frac{1}{2^n}\right)\delta$$

Jika x adalah sebarang titik di R_1, maka $2^m x$ juga adalah sebarang titik di R_1 sehingga pertaksamaan tersebut tetap berlaku jika mengganti x dengan $2^m x$, dan kedua ruas dikalikan dengan $\frac{1}{2^m}$, maka pertaksamaan di atas menjadi

$$\left|\frac{f(2^n x)}{2^n}-\frac{f(2^m x)}{2^m}\right| \leq \left(\frac{1}{2^m}-\frac{1}{2^n}\right)\delta$$

Jika $m\to\infty$ maka $\left(\frac{1}{2^m}-\frac{1}{2^n}\right)\to 0$ sehingga $\lim_{m\to\infty}\left|\frac{f(2^n x)}{2^n}-\frac{f(2^m x)}{2^m}\right|=0.$ Oleh karena itu $\left\{\frac{f(2^n x)}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan Cauchy di R_1. Karena R_1 adalah ruang Real, dan berdasarkan pembuktian yang telah dilakukan sebelumnya dapat dikatakan setiap barisan Cauchy-nya konvergen dan limitnya ada.

Selanjutnya akan dibuktikan poin nomor 2 yakni jika $A(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(2^n x)}{2^n}$ maka A adalah fungsi *additive*.

$$\begin{aligned}
|A(x+y)-A(x)-A(y)| &= \left|\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{f(2^n(x+y))}{2^n}-\frac{f(2^nx)}{2^n}-\frac{f(2^ny)}{2^n}\right\}\right| \\
&= \left|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\{f(2^n(x+y))-f(2^nx)-f(2^ny)\}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}|f(2^n(x+y))-f(2^nx)-f(2^ny)| \\
&\leq \lim_{n\to\infty}\frac{\delta}{2^n} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Maka terbukti A adalah fungsi *additive* $\forall x, y \in R_1$.

Selanjutnya akan dibuktikan poin nomor 3 yaitu A memenuhi

$$|f(x)-A(x)| \leq \delta.$$

Perhatikan pertaksamaan (3.2)

$$\left|\frac{1}{2^n}f(2^nx)-f(x)\right| \leq \left(1-\frac{1}{2^n}\right)\delta$$

Jika diambil limitnya untuk $n \to \infty$, maka

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2^n}f(2^nx)-f(x)\right| &\leq \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\delta \\
\left|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n}f(2^nx)-f(x)\right)\right| &\leq \delta \\
\left|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}f(2^nx)-\lim_{n\to\infty}f(x)\right| &\leq \delta \\
|A(x)-f(x)| &\leq \delta
\end{aligned}$$

Sehingga terbukti bahwa A memenuhi $|f(x)-A(x)| \leq \delta$.

Selanjutnya akan dibuktikan poin nomor 4 bahwa A adalah fungsi yang tunggal. Diasumsikan A tidak tunggal, maka akan ada fungsi *additive* yang lain yaitu $B: R_1 \to R_2$ yang memenuhi $|B(x)-f(x)| \leq \delta, \forall x \in R_1$.

$$
\begin{aligned}
|A(x)-B(x)| &= |A(x)-f(x)+f(x)-B(x)| \\
&\leq |A(x)-f(x)|+|f(x)-B(x)| \\
&= \delta+\delta \\
&\leq 2\delta
\end{aligned}
$$

Karena A dan B adalah fungsi *additive* maka

$$
\begin{aligned}
|A(x)-B(x)| &= \left|\frac{nA(x)}{n}-\frac{nB(x)}{n}\right| \\
&= \left|\frac{A(nx)}{n}-\frac{B(nx)}{n}\right| \\
&= \frac{1}{n}|A(nx)-B(nx)| \\
&\leq \frac{2\delta}{n} \\
\lim_{n\to\infty}|A(x)-B(x)| &\leq \lim_{n\to\infty}\frac{2\delta}{n} \\
|A(x)-B(x)| &\leq 0
\end{aligned}
$$

Sehingga $A(x)=B(x), \forall \in R_1$. Oleh karena itu terbukti bahwa A adalah fungsi *additive* yang tunggal. Sehingga persamaan fungsional Jensen-Hosszú adalah stabil berdasarkan Teorema Hyers.

3.1.2 Kestabilan Persamaan Fungsional Jensen-Hosszú Berdasarkan Teorema Rassias

Misalkan $f: R_1 \to R_2$ merupakan suatu fungsi di antara ruang Real sedemikian hingga

$$
\left|f(x+y-xy)+f(xy)-2f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| \leq \theta(|x|^p+|y|^p)
$$

untuk $\theta > 0, p \in [0,1)$ dan $\forall x, y \in R_1$, maka fungsi $A: R_1 \to R_2$ *additive* yang tunggal, sedemikian hingga

$$|f(x) - A(x)| \leq \frac{2\theta}{2 - 2^p}|x|^p, \forall x \in R_1$$

Untuk membuktikan teorema tersebut, maka harus ditunjukkan bahwa:

1. $\left\{\frac{f(2^n x)}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan Cauchy $\forall x \in R_1$.
2. Jika $A(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}$ maka A adalah fungsi *additive*.
3. A memenuhi $|f(x) - A(x)| \leq \frac{2\theta}{2-2^p}|x|^p, \forall \theta > 0, p \in (0,1]$.
4. A adalah fungsi yang tunggal.

Akan ditunjukkan poin nomor 1 bahwa $\left\{\frac{f(2^n x)}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan Cauchy $\forall x \in E_1$

Dimisalkan $y = 0$, dan diasumsikan $f(0) = 0$ maka

$$\left|f(x) + f(0) - 2f\left(\frac{x}{2}\right)\right| < \theta(|x|^p + |0|^p)$$

$$\left|f(x) - 2f\left(\frac{x}{2}\right)\right| < \theta|x|^p$$

$\forall x \in R_1$. Jika x adalah sebarang titik di R_1, maka $2x$ juga adalah sebarang titik di R_1 sehingga pertaksamaan di atas tetap berlaku jika mengganti x dengan $2x$ dan membagi 2 kedua ruas, maka

$$\left|\frac{1}{2}f(2x) - f(x)\right| < \frac{\theta}{2}|2x|^p$$

Berdasarkan sifat simetris pada ruang metrik pertaksamaan di atas dapat dituliskan sebagai

$$\left|f(x) - \frac{1}{2}f(2x)\right| < \frac{\theta}{2}|2x|^p$$

Jika $n > m$ untuk n dan m bilangan bulat non negatif, maka

$$\left|\frac{1}{2^n}f(2^n x) - \frac{1}{2^m}f(2^m x)\right|$$

$$= \left|\tfrac{1}{2^n}f(2^n x) - \tfrac{1}{2^{n+1}}f(2^{n+1}x) + \tfrac{1}{2^{n+1}}f(2^{n+1}x) - \tfrac{1}{2^{n+2}}f(2^{n+2}x) + \cdots - \right.$$

$$\left. \tfrac{1}{2^{m-1}}f(2^{m-1}x) + \tfrac{1}{2^{m-1}}f(2^{m-1}x) - \tfrac{1}{2^m}f(2^m x)\right|$$

$$\leq \left|\tfrac{1}{2^n}f(2^n x) - \tfrac{1}{2^{n+1}}f(2^{n+1}x)\right| + \left|\tfrac{1}{2^{n+1}}f(2^{n+1}x) - \tfrac{1}{2^{n+2}}f(2^{n+2}x)\right| + \cdots +$$

$$\left|\tfrac{1}{2^{m-1}}f(2^{m-1}x) - \tfrac{1}{2^m}f(2^m x)\right|$$

$$= \tfrac{1}{2^n}\left|f(2^n x) - \tfrac{1}{2}f(2^{n+1}x)\right| + \tfrac{1}{2^{n+1}}\left|f(2^{n-1}x) - \tfrac{1}{2}f(2^{n+2}x)\right| + \cdots +$$

$$\tfrac{1}{2^{m+1}}\left|f(2^{m+1}x) - \tfrac{1}{2}f(2^m x)\right|$$

$$\leq \frac{1}{2^n}\frac{\theta}{2}|2^{n+1}x|^p + \frac{1}{2^{n+1}}\frac{\theta}{2}|2^{n+2}x|^p + \cdots + \frac{1}{2^{m-1}}\frac{\theta}{2}|2^m x|^p$$

$$= \frac{2^p}{2^n}\frac{\theta}{2}|2^n x|^p + \frac{2^p}{2^{n+1}}\frac{\theta}{2}|2^{n+1}x|^p + \cdots + \frac{2^p}{2^{m-1}}\frac{\theta}{2}|2^{m-1}x|^p$$

$$= \frac{2^p\theta}{2}|x|^p\left(\frac{2^{pn}}{2^n} + \frac{2^{p(n+1)}}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{2^{p(m-1)}}{2^{m-1}}\right)$$

$$= \frac{2^p\theta}{2}|x|^p\sum_{k=n}^{m-1}\frac{2^{kp}}{2^k}$$

Jika $m \to \infty$ dan $p \in [0,1)$ maka $\frac{1}{2}\theta|x|^p\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2^k} \to 0$ sehingga

$$\lim_{m\to\infty}\left|\frac{f(2^n x)}{2^n} - \frac{f(2^m x)}{2^m}\right| = 0.$$

Oleh karena itu $\left\{\frac{f(2^n x)}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan Cauchy di R_1. Karena R_1 adalah ruang Real, dan berdasarkan pembuktian yang telah dilakukan sebelumnya dapat dikatakan bahwa setiap barisan Cauchy konvergen dan limitnya ada.

Selanjutnya akan dibuktikan poin nomor 2 yakni jika $A(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}$ maka A adalah fungsi *additive*.

$$
\begin{aligned}
|A(x+y) - A(x) - A(y)| &= \left| \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{f(2^n(x+y))}{2^n} - \frac{f(2^n x)}{2^n} - \frac{f(2^n y)}{2^n} \right\} \right| \\
&= \left| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \{ f(2^n(x+y)) - f(2^n x) - f(2^n y) \} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} |f(2^n(x+y)) - f(2^n x) - f(2^n y)| \\
&\le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \theta(|x|^p + |y|^p) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Maka terbukti A adalah fungsi *additive* $\forall x, y \in R_1$.

Selanjutnya akan dibuktikan poin nomor 3 yaitu A memenuhi

$$|A(x) - f(x)| \le \frac{2\theta}{2 - 2^p} |x|^p$$

$$
\begin{aligned}
|A(x) - f(x)| &= \left| \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n} - f(x) \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{f(2^n x)}{2^n} - f(x) \right| \\
&\le \lim_{n\to\infty} \frac{2^p \theta}{2} |x|^p \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{kp}}{2^k} \\
&= \frac{2^p \theta}{2} |x|^p \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{kp}}{2^k} \\
&= \frac{2^p \theta}{2} |x|^p \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{(1-p)k}} \\
&= \frac{2^p \theta}{2} |x|^p \lim_{n\to\infty} \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^{(1-p)k}} \right)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{2^p\theta}{2}|x|^p \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\frac{1}{2^{(1-p)}}}{1 - \frac{1}{2^{(1-p)}}}\right)$$

$$= \frac{2^p\theta}{2}|x|^p \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\frac{1}{2^{(1-p)}}}{\frac{2^{(1-p)} - 1}{2^{(1-p)}}}\right)$$

$$= \frac{2^p\theta}{2}|x|^p \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2^{(1-p)} - 1}\right)$$

$$= \frac{2^p\theta}{2}|x|^p \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{(1-p)} - 1 + 1}{2^{(1-p)} - 1}\right)$$

$$= \frac{2^p\theta}{2}|x|^p \left(\frac{2^{(1-p)}}{2^{(1-p)} - 1}\right)$$

$$= \frac{2\theta}{2(2^{(1-p)} - 1)}|x|^p$$

$$= \frac{\theta}{\left(\frac{2}{2^p} - 1\right)}|x|^p$$

$$= \frac{\theta}{\left(\frac{2 - 2^p}{2^p}\right)}|x|^p$$

$$= \frac{2^p\theta}{2 - 2^p}|x|^p$$

Karena $2^p < 2, \forall p \in [0,1)$ maka $|A(x) - f(x)| \leq \frac{2\theta}{2-2^p}|x|^p$

Selanjutnya akan dibuktikan poin nomor 4 bahwa A adalah fungsi yang tunggal. Diasumsikan A tidak tunggal, maka akan ada fungsi *additive* yang lain yaitu $B: R_1 \to R_2$ yang memenuhi $|B(x) - f(x)| \leq \frac{2\theta}{2-2^p}|x|^p, \forall x \in R_1$.

$$\begin{aligned} |A(x) - B(x)| &= |A(x) - f(x) + f(x) - B(x)| \\ &\leq |A(x) - f(x)| + |f(x) - B(x)| \end{aligned}$$

$$= \frac{2\theta}{2-2^p}|x|^p + \frac{2\theta}{2-2^p}|x|^p$$

$$\leq \frac{4\theta}{2-2^p}|x|^p$$

Karena A dan B adalah fungsi *additive* maka

$$\begin{aligned}
|A(x) - B(x)| &= \left|\frac{nA(x)}{n} - \frac{nB(x)}{n}\right| \\
&= \left|\frac{A(nx)}{n} - \frac{B(nx)}{n}\right| \\
&= \frac{1}{n}|A(nx) - B(nx)| \\
&\leq \frac{1}{n}\frac{4\theta}{2-2^p}|x|^p \\
\lim_{n\to\infty}|A(x) - B(x)| &\leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{4\theta}{2-2^p}\right)|x|^p \\
|A(x) - B(x)| &\leq 0
\end{aligned}$$

Sehingga $A(x) = B(x), \forall x \in R_1$. Oleh karena itu terbukti bahwa A adalah fungsi *additive* yang tunggal. Sehingga persamaan fungsional Jensen-Hosszú adalah stabil berdasarkan Teorema Rassias.

3.2 Kestabilan dari Contoh Fungsi yang Memenuhi Persamaan Fungsional Jensen-Hosszú

Pada subbab 2.4.2 telah dipaparkan salah satu contoh fungsi yang memenuhi persamaan fungsional Jensen-Hosszú yakni $f(x) = 2x + 3, \forall x \in R$. Di bawah ini akan ditunjukkan pembuktian kestabilan contoh fungsi tersebut dengan menggunakan teorema Hyers dan teorema Rassias.

3.2.1 Kestabilan dari Contoh Fungsi yang Memenuhi Persamaan Fungsional Jensen-Hosszú Berdasarkan Teorema Hyers

$$\left|f(x+y-xy)+f(xy)-2f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right|$$

$$=\left|2x+2y-2xy+3+2xy+3-2\left[2\left(\frac{x+y}{2}\right)+3\right]\right|$$

$$=|2x-2y+6-2x+2y-6|$$

$$=0.$$

Karena untuk setiap $\delta>0$, maka terbukti bahwa contoh fungsi yang memenuhi persamaan fungsional Jensen-Hosszú tersebut memenuhi pertaksamaan

$$\left|f(x+y-xy)+f(xy)-2f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right|\leq\delta.$$

Misalkan $\{x_n\}=\left\{\frac{1}{2^n}f(2^n x)|n\in N\right\}$ adalah suatu barisan di R dengan R adalah ruang Real, akan ditunjukkan bahwa $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy.

Untuk setiap $\varepsilon>0$, pilih $H>\frac{2}{\varepsilon}$, maka $\forall n,m\geq H$ dapat dikatakan bahwa $\frac{1}{n}\leq\frac{1}{H}<\frac{\varepsilon}{2}$ dan $\frac{1}{m}\leq\frac{1}{H}\leq\frac{\varepsilon}{2}$. Oleh karena itu akan diperoleh

$$\left|\frac{f(2^n x)}{2^n}-\frac{f(2^m x)}{2^m}\right|=\left|\frac{2(2^n x)+3}{2^n}-\frac{2(2^m x)+3}{2^m}\right|=\left|2x+\frac{3}{2^n}-2x-\frac{3}{2^m}\right|$$

$$=\left|\frac{3}{2^n}-\frac{3}{2^m}\right|\leq\left|\frac{3}{2^n}\right|+\left|-\frac{3}{2^m}\right|=\frac{3}{2^n}+\frac{3}{2^m}\leq\frac{1}{n}+\frac{1}{m}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

Jadi dapat dikatakan bahwa $\{x_n\}=\left\{\frac{1}{2^n}f(2^n x)|n\in N\right\}$ di R adalah barisan Cauchy. Karena R adalah ruang Real, maka barisan Cauchy-nya konvergen dan limitnya ada. Maka akan ada suatu fungsi $A: R\to R$ dengan $A(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(2^n x)}{2^n}, \forall x\in E$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $A: R\to R$ merupakan fungsi *additive*.

$|A(x+y)-A(x)-A(y)|$

$= \left|\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{f\big(2^n(x+y)\big)}{2^n}-\frac{f(2^n x)}{2^n}-\frac{f(2^n y)}{2^n}\right\}\right|$

$= \left|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\{f(2^n(x+y))-f(2^n x)-f(2^n y)\}\right|$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}|\{f(2^n(x+y))-f(2^n x)-f(2^n y)\}|$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\left|\left\{\left(2\left(2^n(x+y)\right)+3\right)-(2(2^n x)+3)-(2(2^n y)+3)\right\}\right|$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}|\{2(2^n x)+2(2^y x)+3-2(2^n x)-3-2(2^n y)-3\}|$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}|-3|$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{3}{2^n}$

$= 0$

Jadi

$$|A(x+y)-A(x)-A(y)| = 0.$$

Berdasarkan sifat kedua pada ruang bernorma, maka diperoleh

$$A(x+y)-A(x)-A(y) = 0$$

sehingga $A(x+y) = A(x) - A(y)$. Dari definisi 2.4.1.1, maka dapat ditunjukkan bahwa A merupakan fungsi *additive*.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa A memenuhi $|f(x)-A(x)| \le \delta, \forall x \in R$.

$$|f(x)-A(x)| = \left|f(x)-\lim_{n\to\infty}\frac{f(2^n x)}{2^n}\right|$$

$$= \left|2x+3-\lim_{n\to\infty}\frac{2^n f(x)}{2^n}\right|$$

$$= |2x+3-f(x)|$$

$$= |2x + 3 - 2x - 3|$$

$$= |0|$$

$$= 0$$

Karena $\forall\delta > 0$, maka $|f(x) - A(x)| \leq \delta$.

Andaikan A tidak tunggal, maka akan ada fungsi *additive* yang lain $B: R \to R$ sedemikian hingga

$$|f(x) - B(x)| \leq \delta$$

$\forall x \in R$.

$$\begin{aligned} |A(x) - B(x)| &= |A(x) - f(x) + f(x) - B(x)| \\ &\leq |A(x) - f(x)| + |f(x) - B(x)| \\ &= |f(x) - A(x)| + |f(x) - B(x)| \\ &\leq \delta + \delta \end{aligned}$$

Jadi,

$$|A(x) - B(x)| \leq 2\delta.$$

$$\begin{aligned} |A(x) - B(x)| &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{2^n} A(2^n x) - \frac{1}{2^n} B(2^n x)\right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} |A(2^n x) - B(2^n x)| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} 2\delta \\ &= 2\delta \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

di mana $n \in N$.

Karena $|A(x) - B(x)| \leq 0$ dan berdasarkan pada sifat kedua pada ruang bernorma maka

$$A(x) - B(x) = 0$$

$$A(x) = B(x), \forall x \in R.$$

Jadi terbukti bahwa A tunggal, sehingga terbukti bahwa contoh dari fungsi yang memenuhi persamaan fungsional Jensen-Hosszú tersebut stabil berdasarkan teorema Hyers.

3.2.2 Kestabilan dari Contoh Fungsi yang Memenuhi Persamaan Fungsional Jensen-Hosszú Berdasarkan Teorema Rassias

$$\left| f(x+y-xy) + f(xy) - 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) \right|$$

$$= \left| 2x + 2y - 2xy + 3 + 2xy + 3 - 2\left[2\left(\frac{x+y}{2}\right) + 3\right] \right|$$

$$= |2x - 2y + 6 - 2x + 2y - 6| = 0$$

Karena untuk setiap $\theta > 0, p \in [0,1)$ maka terbukti bahwa contoh fungsi yang memenuhi persamaan fungsional Jensen-Hosszú tersebut memenuhi pertaksamaan

$$\left| f(x+y-xy) + f(xy) - 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) \right| \leq \theta(|x|^p + |y|^p).$$

Misalkan $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{2^n} f(2^n x) | n \in N\right\}$ adalah suatu barisan di R, akan ditunjukkan bahwa $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy.

Untuk setiap $\theta > 0$, pilih $H > \frac{2}{\theta}$, maka $\forall n, m \geq H$ dapat dikatakan bahwa $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{H} < \frac{\theta}{2}$ dan $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{H} \leq \frac{\theta}{2}$. Oleh karena itu akan diperoleh

$$\left| \frac{f(2^n x)}{2^n} - \frac{f(2^m x)}{2^m} \right| = \left| \frac{2(2^n x) + 3}{2^n} - \frac{2(2^m x) + 3}{2^m} \right| = \left| 2x + \frac{3}{2^n} - 2x - \frac{3}{2^m} \right|$$

$$= \left| \frac{3}{2^n} - \frac{3}{2^m} \right| \leq \left| \frac{3}{2^n} \right| + \left| -\frac{3}{2^m} \right| = \frac{3}{2^n} + \frac{3}{2^m} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2} < \theta$$

Jadi dapat dikatakan bahwa $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{2^n} f(2^n x) | n \in N\right\}$ di R adalah barisan Cauchy. Karena R adalah ruang Real, maka barisan Cauchy-nya konvergen dan limitnya ada. Maka akan ada suatu fungsi $A: R \to R$ dengan $A(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}, \forall x \in E$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $A: R \to R$ merupakan fungsi *additive*.

$|A(x+y) - A(x) - A(y)|$

$$= \left|\lim_{n\to\infty} \left\{\frac{f\big(2^n(x+y)\big)}{2^n} - \frac{f(2^n x)}{2^n} - \frac{f(2^n y)}{2^n}\right\}\right|$$

$$= \left|\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \{f(2^n(x+y)) - f(2^n x) - f(2^n y)\}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} |\{f(2^n(x+y)) - f(2^n x) - f(2^n y)\}|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \left|\left\{\left(2\big(2^n(x+y)\big) + 3\right) - (2(2^n x) + 3) - (2(2^n y) + 3)\right\}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} |\{2(2^n x) + 2(2^y x) + 3 - 2(2^n x) - 3 - 2(2^n y) - 3\}|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} |-3|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2^n}$$

$$= 0$$

Jadi

$$|A(x+y) - A(x) - A(y)| = 0.$$

Berdasarkan sifat kedua pada ruang bernorma, maka diperoleh

$$A(x+y) - A(x) - A(y) = 0$$

sehingga $A(x+y) = A(x) - A(y)$. Dari definisi 2.4.1.1, maka dapat ditunjukkan bahwa A merupakan fungsi *additive*.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa A memenuhi

$$|f(x) - A(x)| \leq \frac{2\theta}{2-2^p}|x|^p, \forall x \in R.$$

$$\begin{aligned}
|f(x) - A(x)| &= \left|f(x) - \lim_{n\to\infty}\frac{f(2^n x)}{2^n}\right| \\
&= \left|2x + 3 - \lim_{n\to\infty}\frac{2^n f(x)}{2^n}\right| \\
&= |2x + 3 - f(x)| \\
&= |2x + 3 - 2x - 3| \\
&= 0
\end{aligned}$$

Karena $\theta > 0, p \in [0,1)$, maka $|f(x) - A(x)| \leq \frac{2\theta}{2-2^p}|x|^p$.

Andaikan A tidak tunggal, maka akan ada fungsi *additive* yang lain $B: R \to R$ sedemikian hingga

$$|f(x) - B(x)| \leq \frac{2\theta}{2-2^p}|x|^p$$

$\forall x \in R$.

$$\begin{aligned}
|A(x) - B(x)| &= |A(x) - f(x) + f(x) - B(x)| \\
&\leq |A(x) - f(x)| + |f(x) - B(x)| \\
&= |f(x) - A(x)| + |f(x) - B(x)| \\
&\leq \frac{2\theta}{2-2^p}|x|^p + \frac{2\theta}{2-2^p}|x|^p
\end{aligned}$$

Jadi,

$$|A(x) - B(x)| \leq 2\left(\frac{2\theta}{2-2^p}|x|^p\right).$$

$$|A(x) - B(x)| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2^n}A(2^n x) - \frac{1}{2^n}B(2^n x)\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} |A(2^n x) - B(2^n x)|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} 2 \left(\frac{2\theta}{2 - 2^p} |x|^p \right)$$

$$= 2 \left(\frac{2\theta}{2 - 2^p} |x|^p \right) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}$$

$$= 0$$

di mana $n \in N$.

Karena $|A(x) - B(x)| \leq 0$ dan berdasarkan sifat kedua pada ruang bernorma maka

$$A(x) - B(x) = 0$$

$$A(x) = B(x), \forall x \in R$$

Jadi terbukti bahwa A tunggal, sehingga terbukti bahwa contoh dari fungsi yang memenuhi persamaan fungsional Jensen-Hosszú tersebut stabil berdasarkan teorema Rassias.

3.3 Kaitan Kestabilan Persamaan Fungsional dan Bumi dalam Pandangan Islam

Suatu persamaan fungsional dapat diaplikasikan apabila persamaan tersebut stabil. Jika suatu persamaan fungsional dikatakan tidak stabil maka persamaan tersebut tidak dapat diaplikasikan. Pembahasan di atas menunjukkan bahwa persamaan fungsional Jensen-Hosszú bersifat stabil sehingga persamaan fungsional ini dapat diaplikasikan. Hal ini selaras dengan bumi, yang mana jika bumi sebagai tempat tinggal makhluk hidup berada dalam keadaan yang tidak stabil maka bumi tidak dapat ditinggali.

Di dalam al-Quran terdapat banyak ayat yang membahas tentang bumi. Ayat-ayat tersebut telah membicarakan fakta-fakta ilmiah tentang bumi yang belum terungkap ketika al-Quran diturunkan. Salah satunya adalah bagaimana Allah Swt. telah menciptakan gunung sebagai penyetabil bumi yang dapat dilihat pada surat an-Naba'/78:7 dan surat Qaaf/50:7.

Pada awalnya, gunung didefinisikan sebagain *landform* yang sangat tinggi yang dicirikan dengan penonjolan tinggi di atas daerah sekelilingnya, namun al-Quran memberikan gambaran yang berbeda tentang gunung. Gunung disebutkan sebagai penyetabil bumi yang menjaga permukaan bumi agar tidak bergoncang, sebagai tiang pancang yang memancang bumi ke bawah dengan aman. Fenomena ini mulai terungkap pada pertengahan abad ke-19, George Airy (1865) mengadakan penelitian yang mengatakan bahwa bumi terdiri dari lempeng-lempeng lithosfer yang bergerak secara horizontal dengan kecepatan yang tidak sama dan suatu saat akan bertubrukan. Adanya gunung ini memperlambat gerak lithosfer sehingga tidak terjadi tubrukan yang lebih drastis, sehingga di sini gunung berfungsi sebagai tiang pancang yang menguatkan bumi dari goncangan-goncangan yang lebih kuat (Kaunia, 2005:189).

Dapat dikatakan bahwa jika bumi tidak memiliki gunung, maka bumi akan selalu mengalami guncangan-guncangan yang mana dalam keadaan tersebut bumi tidak dapat ditinggali. Namun Allah Swt. telah menciptakan gunung, pun menjelaskannya dalam al-Quran bahwa gunung adalah sesuatu yang diciptakan untuk menyetabilkan bumi, agar padanya seluruh makhluk hidup dapat tinggal dengan aman dan nyaman.

Gunung yang berperan sebagai penyetabil bumi ternyata memiliki pergerakannya sendiri yang terkadang menimbulkan gempa bumi maupun gunung meletus. Manusia seringkali menyebut fenomena gempa bumi dan gunung meletus sebagai suatu bencana. Bencana menurut Kamus Besar Bahasa Indonesia adalah sesuatu yang menyebabkan kesusahan, kerugian, atau penderitaan. Namun jika manusia mencari makna dari apa-apa yang terjadi padanya, maka ia akan menemukan bahwa sesungguhnya ada nikmat Allah Swt. yang diturunkan melalui ujian (bencana). Hal tersebut dapat dilihat dalam al-Quran surat al-Baqarah/2:216 yang berbunyi:

كُتِبَ عَلَيۡكُمُ ٱلۡقِتَالُ وَهُوَ كُرۡهٞ لَّكُمۡۖ وَعَسَىٰٓ أَن تَكۡرَهُواْ شَيۡـٔٗا وَهُوَ خَيۡرٞ لَّكُمۡۖ وَعَسَىٰٓ أَن تُحِبُّواْ
شَيۡـٔٗا وَهُوَ شَرّٞ لَّكُمۡۚ وَٱللَّهُ يَعۡلَمُ وَأَنتُمۡ لَا تَعۡلَمُونَ ٢١٦

"Diwajibkan atas kamu berperang, padahal berperang itu adalah sesuatu yang kamu benci. Boleh jadi kamu membenci sesuatu, padahal ia amat baik bagimu, dan boleh jadi (pula) kamu menyukai sesuatu, padahal ia amat buruk bagimu; Allah Swt. mengetahui, sedang kamu tidak mengetahui"(Qs. al-Baqarah/2:216).

Jika terjadi aktifitas gempa yang terlalu banyak maka akan mengakibatkan makhluk hidup akan binasa, namun jika tidak ada aktifitas sama sekali maka bahan makanan yang ada di dasar laut yang dihanyutkan oleh aliran sungai tidak akan didaur ulang ke daratan melalui pengangkatan tektonik. Setiap perubahan yang terjadi pada bumi akan selalu memberi dampak pada makhluk hidup yang tinggal di dalamnya, namun tidak selamanya dampak tersebut adalah dampak negatif. Perubahan yang terjadi pada bumi sesungguhnya adalah siklus alami yang memang harus terjadi demi menjaga stabilitasnya sebagai tempat tinggal seluruh makhluk hidup (Yahya, 2004:78).

Allah Swt. juga menjelaskan pada surat al-Hadid/57: 22-23 yang berbunyi:

مَآ أَصَابَ مِن مُّصِيبَةٍ فِي ٱلۡأَرۡضِ وَلَا فِيٓ أَنفُسِكُمۡ إِلَّا فِي كِتَٰبٍ مِّن قَبۡلِ أَن نَّبۡرَأَهَآۚ إِنَّ ذَٰلِكَ عَلَى
ٱللَّهِ يَسِيرٞ ٢٢ لِّكَيۡلَا تَأۡسَوۡاْ عَلَىٰ مَا فَاتَكُمۡ وَلَا تَفۡرَحُواْ بِمَآ ءَاتَىٰكُمۡۗ وَٱللَّهُ لَا يُحِبُّ كُلَّ مُخۡتَالٖ فَخُورٍ
٢٣

"Tiada suatu bencanapun yang menimpa di bumi dan (tidak pula) pada dirimu sendiri melainkan telah tertulis dalam kitab (Lauhul Mahfuzh) sebelum Kami menciptakannya. Sesungguhnya yang demikian itu adalah mudah bagi Allah Swt. (22). (Kami jelaskan yang demikian itu) supaya kamu jangan berduka cita terhadap apa yang luput dari kamu, dan supaya kamu jangan terlalu gembira terhadap apa yang diberikan-Nya kepadamu. Dan Allah Swt. tidak menyukai setiap orang yang sombong lagi membanggakan diri (23) (Qs.al-Hadid/57: 22-23).

Dari dua buah ayat tersebut dapat dilihat bahwa sesungguhnya ilmu Allah Swt. tentang segala sesuatu sebelum terciptanya dan catatannya yang sesuai dengan peristiwa yang akan terjadi di saat peristiwa itu terjadi adalah mudah saja bagi Allah Swt. karena Dia mengetahui apa yang telah dan akan terjadi dan sesuatu yang tidak akan terjadi yang kalau saja terjadi maka pastilah Allah Swt. telah mengetahuinya.

Allah Swt. telah memberitahukan kepada kamu tentang ilmu-Nya yang telah terdahulu dan catatan-Nya yang telah ada terlebih dahulu tentang segala peristiwa sebelum terjadi, dan ketetapan-Nya terhadap alam ini sebelum terwujud, agar kamu mengetahui bahwa apa yang menimpa diri kamu itu bukanlah untuk menyalahkan dirimu, dan sesuatu yang tidak dialamatkan kepadamu maka tidak akan menimpamu. Oleh karena itu, janganlah kamu berputus asa terhadap sesuatu yang luput darimu karena kalau saja Allah Swt. menakdirkan suatu perkara maka pastilah terjadi. Janganlah kamu menyombongkan diri kepada orang lain dengan nikmat yang telah diberikan kepada kamu itu. Karena nikmat itu datang bukanlah karena usaha dan jerih payah kamu. Sesungguhnya itu terjadi adalah karena kuadrat Allah Swt. dan rezeki-Nya juga janganlah kamu jadikan nikmat Allah

Swt. itu untuk berbuat keburukan, kesewenang-wenangan, dan kamu jadikan wasilah untuk menyombongkan diri di hadapan orang lain, yang mana itu adalah takabbur di hadapan orang lain dan menundukkan diri lebih tinggi dari mereka, akan tetap hendaklah kita sambut kebahagiaan itu dengan rasa syukur, dan kesedihan dengan rasa sabar (Ar-Rifa'i, 2000:606).

Allah Swt. mengetahui apa-apa yang belum, sedang, dan akan terjadi di seluruh alam semesta ini, tidak terkecuali di bumi. Begitu pula dengan bencana alam yang sesungguhnya sudah digariskan oleh Allah Swt. dan manusia hanya dapat berusaha melaluinya dan mencari hikmah padanya. Memang bencana alam banyak memberikan dampak buruk yang besar bagi manusia baik dari segi fisik maupun psikis, namun hal tersebut bukanlah alasan bagi manusia untuk berputus asa dan berburuk sangka kepada Allah Swt.. Sesuatu yang sepertinya sangat rumit dan sulit bagi manusia sesungguhnya sangat mudah bagi Allah Swt.. Oleh karena itu hendaknya manusia selalu berpikir tentang apa-apa yang terjadi di bumi dan tidak menyombongkan diri karena segala apa yang diciptakan oleh Allah Swt. semua sudah ada takarannya dan sudah yang terbaik untuk manusia.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, maka dapat diambil kesimpulan mengenai kestabilan persamaan fungsional Jensen-Hosszú sebagai berikut:

1. Dengan menggunakan konsep kestabilan Hyers-Ulam dapat dibuktikan bahwa persamaan fungsional Jensen-Hosszú stabil dengan indikator:

   a. $\left\{\frac{f(2^n x)}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan Cauchy $\forall x \in R_1$.

   b. Jika $A(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}$ maka A adalah fungsi *additive*.

   c. A memenuhi $|f(x) - A(x)| \leq \delta, \forall \delta > 0$.

   d. A adalah fungsi yang tunggal.

   Begitu pula dengan menggunakan konsep kestabilan Hyers-Ulam-Rassias dapat dibuktikan bahwa persamaan fungsional Jensen-Hosszú stabil dengan indikator:

   a. $\left\{\frac{f(2^n x)}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan Cauchy $\forall x \in R_1$.

   b. Jika $A(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}$ maka A adalah fungsi *additive*.

   c. A memenuhi $|f(x) - A(x)| \leq \frac{2\theta}{2-2^p}|x|^p, \forall \theta > 0, p \in (0,1]$.

   d. A adalah fungsi yang tunggal.

2. Contoh fungsi yang memenuhi persamaan fungsional Jensen-Hosszú adalah $f: R \to R, f(x) = 2x + 3, \forall x \in R$. Setelah dianalisis dengan menggunakan

konsep kestabilan Hyers-Ulam dan Hyers-Ulam-Rassias dapat diketahui bahwa contoh fungsi tersebut stabil.

4.2 Saran

Pada penelitian ini hanya dibahas mengenai kestabilan persamaan fungsional Jensen-Hosszu. Dalam penelitian selanjutnya dapat diteliti mengenai aplikasi dari persamaan fungsional Jensen-Hosszu ataupun meneliti kestabilan dari persamaan fungsional lain yang masih belum diketahui kestabilannya.

DAFTAR PUSTAKA

Al-Mosadder, R.S. 2012. *On Stability of Some Types of Functional Equations, Gaza*. Gaza: Islamic University of Gaza.

Ar-Rifa'i, N. 2000. *Kemudahan dari Allah, Ringkasan Tafsir Ibnu Katsir Jilid 4*. Jakarta: Gema Insani.

Bartle, R.G dan Sherbert, D.R. 2000. *Introduction to Real Analysis.* New York: John Wiley & Sons. Inc.

Coleman, R. 2012. *Calculus on Normed Vector Spaces.* London: Springer Science+Business Media New York.

Darmawijaya, S. 2007. *Pengantar Analisis Abstrak*. Yogyakarta: Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam UGM.

Jung, S.M. 2011. *Hyers-Ulam-Rassias Stability of Functional Equations in Nonlinear Analysis.* London: Springer Science+Business Media.

Kaunia. 2005. *Book Review Prespektif Islam Tentang Sains*. Yogyakarta: UIN Sunan Kalijaga.

Kominek, Z. 2009. On a Jensen–Hosszú Equation 1. *Annales Mathematicae Silesianae*, 23: 57-60.

Sahoo, P.K dan Kannapan, P. 2011. *Introduction to Functional Equation*. New York: CRC Press.

Yahya, H. 2004. *Pustaka Sains Populer Islami, Penciptaan Alam Semesta*. Terjemahan Ary Nilandari. Bandung: Dzikra.

RIWAYAT HIDUP

Zukhrufun Nadhifa, lahir di kota Denpasar pada tanggal 16 November 1993, biasa dipanggil Dhifa, tinggal di Malang Jl. Sunan Ampel No.9 Kota Malang. Anak ketiga dari lima bersaudara dari Bapak Rudiyanto dan Ibu Nurul Rodiana.

Pendidikan dasarnya ditempuh di MIN Malang I dan lulus pada tahun 2005, setelah itu melanjutkan ke MTsN Negeri Malang I dan lulus tahun 2008. Kemudian melanjutkan pendidikan ke SMAN 8 Malang dan lulus tahun 2011. Selanjutnya, pada tahun 2011 menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil Jurusan Matematika.

Selama menjadi mahasiswa, dia pernah aktif di organisasi HMJ Matematika dan menjadi asisten praktikum dalam rangka mengembangkan kompetensi akademiknya.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Zukhrufun Nadhifa
Nim : 11610053
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Kestabilan Persamaan Fungsional Jensen-Hosszú
Pembimbing I : Hairur Rahman, M.Si
Pembimbing II : Fachrur Rozi, M.Si

	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	8 Maret 2015	Konsultasi Bab I & Bab II	1.
2.	13 Maret 2015	Revisi Bab I & Bab II	2.
3.	8 April 2015	Konsultasi Agama Bab I	3.
4.	18 April 2015	Konsultasi Bab III	4.
5.	11 Mei 2015	Konsultasi Agama Bab II	5.
6.	15 Mei 2015	Revisi Agama Bab I	6.
7.	4 Agustus 2015	Konsultasi Bab III	7.
8.	21 Agustus 2015	Konsultasi Bab III	8.
9.	28 Agustus 2015	ACC Bab I & Bab II	9.
10.	28 Agustus 2015	Revisi Agama Bab II	10.
11.	23 September 2015	Konsultasi Agama Bab III	11.
12.	1 Oktober 2015	Revisi Agama Bab III	12.
13.	3 Desember 2015	ACC Agama Keseluruhan	13.
14.	12 Januari 2016	ACC Keseluruhan	14.

Malang, 12 Januari 2016
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001