PENENTUAN SELESAIAN KONGRUENSI POLINOMIAL

SKRIPSI

OLEH
ANI AFIDATUL KHUSNAH
NIM. 09610032

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG

2016

PENENTUAN SELESAIAN KONGRUENSI POLINOMIAL

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh
Ani Afidatul Khusnah
NIM. 09610032

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016

PENENTUAN SELESAIAN KONGRUENSI POLINOMIAL

SKRIPSI

Oleh
Ani Afidatul Khusnah
NIM. 09610032

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal, 8 Juni 2016

Pembimbing I	Pembimbing II
H. Wahyu H. Irawan, M.Pd	Fachrur Rozi, M.Si
NIP. 19710420 200003 1 003	NIP. 19800527 200801 1 012

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PENENTUAN SELESAIAN KONGRUENSI POLINOMIAL

SKRIPSI

Oleh
Ani Afidatul Khusnah
NIM. 09610032

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan untuk
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 8 Juni 2016

Penguji Utama	:	Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D	....
Ketua Penguji	:	Hairur Rahman, M.Si	....
Sekretaris Penguji	:	H. Wahyu H. Irawan, M.Pd	....
Anggota Penguji	:	Fachrur Rozi, M.Si	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Ani Afidatul Khusnah

NIM : 09610032

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Penentuan Selesaian Kongruensi Polinomial

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pemikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil menjiplak, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 8 Juni 2016
Yang membuat pernyataan,

Ani Afidatul Khusnah
NIM. 09610032

MOTO

DON'T BE AFRAID TO MOVE...
Because the Distance of 1000 Miles Starts by a Single Step

PERSEMBAHAN

Dengan iringan doa serta rasa syukur yang tidak terbatas. Skripsi ini penulis persembahkan kepada:

Abahanda (Drs. Maksar Syam) dan Ibunda (Siti Rosidatul Husna), yang senantiasa dengan ikhlas dan tiada henti melantunkan doa, memotivasi, selalu mendukung langkah apapun yang penulis ambil, memberikan restunya kepada penulis dalam menuntut ilmu, selalu memberikan teladan yang baik bagi penulis.

Adik-adik tersayang (Feni Umi Nur Azizah dan Nadia Putri Rahmawati) yang telah menjadi motivasi dan inspirasi bagi penulis

Kakek (KH. Syamsuri dan KH. Munawir), Nenek (Hj. Sumirah dan Hj. Sumiati), Paman (Muhamad Basuni, S.Sos) yang selalu memberi dukungan moril agar penulis tetap selalu bersemangat.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt. Atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terimakasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. H. Wahyu H. Irawan, M.Pd, selaku dosen Pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Fachrur Rozi, M.Si, selaku dosen Pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.
6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.

7. Ayah dan Ibu yang selalu memberikan doa, semangat, serta motivasi kepada penulis sampai saat ini.
8. Seluruh teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2009
9. Muhammad Faisal dan Yudita Prihatini, penyemangat yang selalu mendampingi penulis dalam berbagai macam kesulitan.
10. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, Juni 2016

Penulis

DAFTAR ISI

BAB V PENUTUP

ABSTRAK

Khusnah, Ani Afidatul. 2016. **Penentuan Selesaian Kongruensi Polinomial**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd. (II) Fachrur Rozi, M.Si.

Kata Kunci : selesaian, kongruensi polinomial, kongruensi linier, kongruensi linier simultan, teorema sisa China.

Polinomial merupakan pernyataan matematika yang melibatkan penjumlahan, perkalian dan pangkat dalam satu atau lebih variabel dengan koefisien. Suatu polinomial dalam satu variabel dengan koefisien konstan memiliki bentuk seperti berikut:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \text{, dimana } a_i, x \in \mathbb{Z}$$

Kongruensi polinomial berbeda dengan persamaan linier satu variabel yang tidak bisa digabung dengan persamaan linier satu variabel yang lain. Kongruensi polinomial dapat menghasilkan dua atau lebih kongruensi linier, dan dari dua atau lebih kongruensi linier tersebut dapat digabung dan gabungannya disebut kongruensi linier simultan. Kongruensi linier simultan terdiri dari beberapa kongruensi linier satu variabel dan dengan nilai modulo yang berbeda. Kongruensi linier dalam penggunaannya dapat diselesaikan dengan berbagai cara, salah satunya ialah teorema sisa China. Adapun bentuk umum dari kongruensi linier simultan adalah sebagai berikut:

$$\begin{gathered} f(x) \equiv a_1 \pmod{P_1^{\alpha_1}} \\ f(x) \equiv a_2 \pmod{P_2^{\alpha_2}} \\ f(x) \equiv a_3 \pmod{P_3^{\alpha_3}} \\ \vdots \\ f(x) \equiv a_r \pmod{P_r^{\alpha_r}} \end{gathered}$$

dimana $P_1, P_2, \dots, P_r$ adalah bilangan prima yang berbeda, dan $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ adalah bilangan bulat positif.

Metode yang dilakukan dalam penulisan skripsi ini adalah metode kepustakaan, yaitu metode yang dilakukan dengan mempelajari buku-buku yang berkaitan dengan masalah penulisan skripsi.

Hasil penelitian menunjukkan bahwa kongruensi polinomial memiliki lebih dari satu selesaian, sehingga dilakukan secara simultan dengan menerapkan teorema sisa China *(Chinese Remainder Theorem)* untuk mendapatkan selesaian yang tunggal.

ABSTRACT

Khusnah, Ani Afidatul. 2016. **Solving of Congruence Polynomial.** Thesis. Department of Mathematic, Faculty of Science and Technologi, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd. (II) Fachrur Rozi, M.Si.

Keywords: determination, polynomial congruence, linear congruence, linear simultaneous congruence, Chinese remainder theorem.

Polynomial is a mathematical statement involving The multiplication of the rank of summing in one or more variables with the coefficients. A polynomial in one variable with the coefficients constant having the form of like the following:

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, where $a_i, x \in \mathbb{Z}$

Polynomial congruence different from linear equation one variable that cannot be combined with another linear equation one variable, congruence a polynomial can produce two or more linear congruence, and two or more linear congruence can be combined and the combined called congruence linear simultaneous. Congruence linear simultaneous is a system consisting of several congruence linear one variable and with different value modulo. Congruence linear in te use of congruence linear simultaneous can be settled by various ways, one of them is a chinese remainder theorem. As for common form of congruence linear simultaneous is as follows:

$$
\begin{gathered}
f(x) \equiv a_1 \pmod{P_1^{\alpha_1}} \\
f(x) \equiv a_2 \pmod{P_2^{\alpha_2}} \\
f(x) \equiv a_3 \pmod{P_3^{\alpha_3}} \\
\vdots \\
f(x) \equiv a_r \pmod{P_r^{\alpha_r}}
\end{gathered}
$$

where $P_1, P_2, \ldots, P_r$ is a different prime number, and $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ is positive integer

The method done in writing this thesis is the method of literature by studying books pertaining to the matter at writing thesis.

The result of the study indicate the congruence polynomial has more than one solution. Than conducted simultaneously by appliying the chinese remainder theorem to obtain a single solution.

ملخص

لحسنى، ابي عفيدة. 2016. **تحديد انتهاء التطابق فولينوميال**. بحث جامعي. شعبة الريا ضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالنج. المشرف، المشرف: (١) وحي هنكي ايراوان، الماجستير. (٢) فخر الرازي، الماجستير

الكلمات الرئيسية: متعدد الحدود التطابق، والتطابق الخطي، والتطابق الخطية في وقت واحد، الصينية تبقى نظرية.

متعدد الحدود هو عبارة رياضية تشمل بالإضافة إلى ذلك، الضرب ورتبة في متغير واحد أو أكثر مع معاملات .متعدد الحدود في متغير واحد مع المعاملات الثابتة لديه النموذج التالي:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \, , a_i, x \in \mathbb{Z}$$

ان تطابق فولينوميال مع معادلة الخطية بل بالتحدث على جمع العدد مادولو. وهذا شيئ يختلف مع معادلة الخطية بمتغير واحد الذي ينفصل مع متغير اخر. واما هذا الشيئ يحتصل شيئين او اكثر من تطابق الخطية ومن تطابقين او اكثر دمجها ويسمى بتطابق الخطية وفي وقت واحد. وان تطابق الخطية وفي وقت واحد هو نظم الذي يتكون من تطابق الخطية الاول بقيمة مختلف (مادولو). واما في استخدامها بخطوات واحد منها نظرية عن تبقى الصينية. واما الشكل العام من تطابق الخطية وفي وقت واحد وهو:

$$\begin{gathered} f(x) \equiv a_1 \ (\mathrm{mod}\ P_1^{\alpha_1}) \\ f(x) \equiv a_2 \left(\mathrm{mod}\ P_2^{\alpha_2}\right) \\ f(x) \equiv a_3 \left(\mathrm{mod}\ P_3^{\alpha_3}\right) \\ \vdots \\ f(x) \equiv a_r (\mathrm{mod}\ P_r^{\alpha_r}) \end{gathered}$$

حيث $P_1, P_2, \dots, P_r$ هي يعبي متميزة، $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ هو عدد صحيح موجب.

واما المدخل المستخدم في هذا البحث وهو الدراسة المكتبية وهي باستخدام الكتب الذي يتعلق عن البحث الجامعي.

وأظهرت النتائج أن التطابق كثيرات الحدود لها أكثر من حل واحد، حتى يتم ذلك في وقت واحد من خلال تطبيق نظرية الباقي الصينية للحصول على حل واحد.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan suatu disiplin ilmu yang selalu mengalami perkembangan. Matematika tidak hanya merupakan ilmu hitung yang selama ini dikenal banyak orang. Matematika mempunyai beberapa cabang keilmuan dalam perkembangannya, penerapan ilmu matematika ini dapat memberikan suatu solusi dalam penyelesaian suatu permasalahan. Salah satu cabang matematika yang sering digunakan adalah aljabar, dan kajian ilmu matematika adalah bilangan bulat. Membahas tentang bilangan bulat ini tidak lepas dari masalah kongruensi. Kongruensi merupakan cara lain untuk mengkaji keterbagian dalam himpunan bilangan bulat (Irawan, dkk, 2014:63).

Kongruensi mempunyai sifat-sifat yang sama dengan persamaan dalam aljabar. Aljabar merupakan salah satu cabang matematika yang mempelajari penyederhanaan serta pemecahan masalah yang menjadi pengganti konstanta atau variabel. Menurut Muhsetyo (1997:159) dalam aljabar dapat ditentukan akar-akar persamaan yang dinyatakan dengan $f(x) = 0$, dimana $f(x)$ adalah fungsi polinomial yang koefisien-koefisiennya konstan, nilai-nilai x memenuhi persamaan $f(x) = 0$ disebut akar, penyelesaian atau jawaban dari persamaan $f(x) = 0$. Sedangkan polinomial sendiri merupakan pernyataan matematika yang melibatkan penjumlahan perkalian pangkat dalam satu atau lebih variabel dengan koefisien.

Dewasa ini semakin banyak muncul penggunaan model matematika maupun penalaran matematika sebagai alat bantu dalam menyelesaikan permasalahan yang dihadapi dalam berbagai disiplin ilmu. Teori bilangan merupakan salah satu cabang matematika yang penting dan banyak manfaatnya karena teori-teorinya dapat diterapkan dalam kehidupan sehari-hari, bilangan bulat dipelajari tanpa menggunakan teknik dari area matematika lainnya. Dalam teori bilangan, kongruensi yang paling sederhana adalah kongruensi yang berderajat satu, dan disebut dengan kongruensi linier yang mempunyai bentuk $ax \equiv b \pmod{m}, \forall\, a \neq 0$ (Muhsetyo, 1997:161). Teori bilangan membahas dasar-dasarnya yaitu salah satunya termasuk membahas teorema sisa China *(chinese remainder theorem)* yang akan diterapkan pada penulisan skripsi ini.

Modulo adalah sebuah operasi bilangan yang menghasilkan sisa pembagian dari suatu bilangan terhadap bilangan lainnya, jadi modulo merupakan suatu operasi untuk mencari sisa dari pembagian suatu bilangan.

Dalam penulisan skripsi ini mengetengahkan bahasan yang mempunyai analogi dengan permasalahan pada persamaan polinomial (pada aljabar), yaitu menentukan selesaian dari masalah kongruensi polinomial.

Bentuk umum dari kongruensi polinomial adalah sebagai berikut:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \equiv b \text{ (mod m)}$$

$a_n \neq 0, a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1$ dinamakan koefisien, $, x^{n-1}, x^{n-2}, \ldots, x^2, x$ dinamakan variabel pangkat, $n, n-1, \ldots, 2, 1$ dinamakan pangkat dan a_0 dinamakan suku tetap, dengan $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1 \in \mathbb{Z}$. Permasalahan adalah menentukan harga pada x yang memenuhi kongruensi polinomial tersebut.

Pada penelitian sebelumnya dari Madinatuz Zuhroh (2011) membahas tentang cara menyelesaikan kongruensi linier simultan satu variabel, pada hasil penelitiannya membahas mengenai cara menyelesaikan kongruensi linier simultan dengan menggunakan dua metode yaitu dengan cara rekursif dan dengan cara menerapkan teorema sisa China, dalam penulisan tersebut menggunakan modulo yang relatif prima. Maka pada skripsi ini mengembangkan penelitian sebelumnya yaitu menentukan selesaian persekutuan tunggal dari kongruensi polinomial dengan modulo yang bukan relatif prima dan menerapkan teorema sisa China untuk mendapatkan selesaian yang tunggal.

Membahas tentang masalah kongruensi membutuhkan penyelesaian yang tidak mudah, meski demikian masalah kongruensi tetap ada selesaiannya. Hal ini dijelaskan dalam al-Quran surat at-Thaha/20:2-3 yaitu:

مَآ أَنزَلۡنَا عَلَيۡكَ ٱلۡقُرۡءَانَ لِتَشۡقَىٰٓ ۝٢ إِلَّا تَذۡكِرَةً لِّمَن يَخۡشَىٰ ۝٣

"Kami tidak menurunkan al-Quran ini kepadamu agar kamu menjadi susah. Tetapi sebagai peringatan bagi orang yang takut (kepada Allah)" (Q.S. At-Thaha/20:2-3).

Dalam tafsir Ibnu Katsir (2007:369) tentang ayat di atas, Allah berfirman: "Kami tidak menurunkan al-Quran ini kepadamu agar kamu menjadi susah." Juwaibir meriwayatkan dari adh-Dhahhak, setelah Allah menurunkan al-Quran kepada Rasul-Nya, maka beliau dan juga para Sahabatnya melaksanakannya, lalu orang-orang musyrik dari kaum Quraisy berkata: "al-Quran ini tidak diturunkan kepada Muhammad agar dia menjadi susah." Maka Allah Ta'ala menurunkan ayat ini: Kami tidak menurunkan al-Quran ini kepadamu agar kamu menjadi susah, tetapi sebagai peringatan bagi orang yang takut (kepada Allah)." Kenyataan yang terjadi tidak seperti yang dilakukan oleh orang-orang sesat itu, tetapi barang siapa yang diberi ilmu oleh Allah, berarti Dia telah menghendaki kebaikan yang banyak darinya, sebagaimana yang ditegaskan di dalam kitab ash-shahihain dari Mu'awiyah, di mana dia bercerita, Rasulullah bersabda, "Apabila Allah menghendaki kebaikan baginya, maka Dia akan memahamkan ilmu agama kepadanya." (HR. Al-Bukhari dan Muslim). Mengenai firman-Nya: Kami tidak menurunkan al-Quran ini kepadamu agar kamu menjadi susah," Qatadah mengemukakan: "Tidak. Demi Allah, Allah tidak menjadikannya sebagai suatu yang menyusahkan, tetapi justru Dia menjadikannya sebagai rahmat, cahaya, dan petunjuk menuju ke Surga." "Tetapi sebagai peringatan bagi orang yang takut (kepada Allah)." Sesungguhnya Allah menurunkan Kitab-Nya dan mengutus Rasul-Nya sebagai rahmat yang dilimpahkan kepada para hamba-Nya agar orang yang ingat semakin ingat, dan orang yang mendengar bisa mengambil manfaat dari apa yang didengarnya dari kitab Allah, al-Quran merupakan peringatan yang diturunkan oleh Allah yang memuat ketetapan halal dan haramnya.

Berdasarkan ayat di atas dapat disimpulkan bahwa Allah tidaklah membuat kesusahan dengan diturunkannya al-Quran, tetapi Allah menurunkan al-Quran sebagai kemudahan untuk memberi peringatan kepada manusia. Allah juga tidak memberikan suatu masalah atau ujian sebagaimana melebihi kemampuan umatnya. Setiap ujian atau masalah yang telah diberikan kepadanya, Allah telah memberikan petunjuk kepada umatnya untuk menyelesaikannya. Seperti halnya masalah kongruensi pada bilangan bulat ini yang membutuhkan selesaian khusus agar didapatkan solusi yang unik (tunggal).

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, masalah yang dibahas dalam penulisan skripsi ini adalah bagaimana cara menentukan selesaian kongruensi polinomial?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan penelitian ini adalah untuk menjelaskan bagaimana cara menentukan selesaian kongruensi polinomial.

1.4 Batasan Masalah

Masalah yang diangkat dalam skripsi ini terlalu luas jika diteliti secara menyeluruh, Agar penelitian lebih fokus dan tidak meluas dari pembahasan yang dimaksud, penulis hanya membahas kongruensi polinomial dengan modulo bilangan yang komposit atau perkalian prima, dan menggunakan kongruensi linier simultan sehingga dapat diterapkan dengan teorema sisa China untuk mendapatkan selesaian tunggal.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penulisan skripsi ini adalah:

1. Bagi Penulis

   Menambah wawasan penulis untuk mengetahui bagaimana menentukan selesaian suatu kongruensi polinomial.
2. Bagi Lembaga UIN Maulana Malik Ibrahim Malang

   Sebagai tambahan informasi pembelajaran mata kuliah yang berhubungan dengan kongruensi polinomial. Juga sebagai tambahan bahan kepustakaan.
3. Bagi Mahasiswa

   Menambah pengetahuan keilmuan mengenai kongruensi polinomial.

1.6 Sistematika Penulisan

Agar penelitian ini mudah dipahami, maka dalam sistematika penulisannya dibentuk bab-bab yang di dalamnya terdapat beberapa subbab dengan rumusan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan meliputi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Kajian pustaka meliputi teori-teori yang mendukung pembahasan. Teori-teori tersebut berupa definisi dan teorema yang meliputi keterbagian, algoritma pembagian, keprimaan, kongruensi, kongruensi linier, kongruensi linier simultan, teorema sisa China dan kajian Islam dalam menyelesaikan masalah.

Bab III Metode Penelitian

Pada bab ini berisi tentang jenis dan pendekatan penelitian, data dan sumber data, pengumpulan data, dan prosedur penelitian.

Bab IV Pembahasan

Pada bab ini berisi tentang pembahasan kongruensi polinomial dengan menggunakan theorema sisa China *(chinese remainder theorem)* untuk mencari selesaian tunggalnya, serta kajian agama mengenai keyakinan untuk menyelesaikan masalah dalam Islam.

Bab IV Penutup

Penutup berisi tentang kesimpulan dari hasil penelitian dan saran sebagai acuan bagi peneliti selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Keterbagian

Sifat-sifat yang berkaitan dengan keterbagian *(divisibility)* merupakan dasar pengembangan teori bilangan, jika suatu bilangan bulat dibagi oleh suatu bilangan bulat yang lain, maka hasil pembagiannya adalah bilangan bulat atau bukan bilangan bulat. Misalnya jika 30 dibagi 5 maka hasil baginya adalah bilangan bulat 6, tetapi jika 30 dibagi 4 maka hasil baginya adalah 7,5 bukan bilangan bulat. Keadaan inilah yang mendasari definisi keterbagian (Muhsetyo, 1997:43).

Definisi 2.1

Misalkan $a, b \in \mathbb{Z}$, dengan $a \neq 0$. a dikatakan pembagi b, ditulis $a \mid b$, jika $a = bx$, untuk suatu $x \in \mathbb{Z}$ (Abdussakir, 2009:114).

Berdasarkan Definisi 2.1, maka suatu bilangan bulat $a, a \neq 0$, membagi bilangan bulat b jika terdapat suatu bilangan bulat x sehingga $b = ax$. Notasi $a \mid b$ dapat dibaca dengan "a habis membagi b", "b habis dibagi a", "a pembagi b", "a faktor dari b", atau "b kelipatan dari a". Jika a tidak membagi b, maka ditulis $a \nmid b$ (Abdussakir, 2009:114).

Perhatikan contoh 2.1 berikut.

Contoh 2.1

1. $3 \mid 9$, karena ada $3 \in \mathbb{Z}$ sehingga $9 = 3 \times 3$.
2. $7 \mid 35$, karena ada $5 \in \mathbb{Z}$ sehingga $35 = 7 \times 5$.
3. $2 \nmid 7$, karena tidak ada $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $7 = 2x$.

Jika $a \mid b$ dan $0 < a < b$, maka a disebut pembagi sejati dari b. Sebagai contoh, karena $2 \mid 6$ dan $0 < 2 < 6$, maka 2 dikatakan pembagi sejati dari 6. Untuk selanjutnya, notasi $a \mid b$ sudah memuat pengertian bahwa $a \neq 0$ (Abdussakir, 2009:115).

Teorema 2.1

Untuk bilangan bulat $a, b,$ dan c berlaku:

1. $a \mid b$, maka $a \mid bx$ untuk setiap bilangan bulat x
2. $a \mid b$ dan $b \mid c$, maka $a \mid c$
3. $a \mid b$ dan $a \mid c$, maka $a \mid (bx + cy)$ untuk setiap bilangan bulat x dan y
4. $a \mid b$ dan $b \mid a$, maka $a = \pm b$
5. $a \mid b, a > 0,$ dan $b > 0$, maka $a \leq b$
6. Untuk setiap bilangan bulat $m \neq 0$, $a \mid b$ jika dan hanya jika $ma \mid mb$ (Abdussakir, 2009:115).

Bukti:

1. $a \mid b$, maka ada $y \in \mathbb{Z}$ sehingga $b = ay$.

   Akibatnya berlaku pula bahwa $bx = (ay)x = a(yx)$ untuk setiap bilangan bulat x. Karena pada bilangan bulat berlaku sifat tertutup pada perkalian, maka berarti terdapatlah bilangan bulat $p = yx$ sehingga berlaku $bc = ap$.

   Jadi $a \mid bc$.

2. Karena $a \mid b$, maka $b = ax$ untuk suatu $x \in \mathbb{Z}$.

   Karena $b \mid c$, maka $c = by$ untuk suatu $y \in \mathbb{Z}$.

   Diperoleh $c = by = (ax)y = a(xy)$, untuk suatu $xy \in \mathbb{Z}$.

   Jadi $a \mid c$.

3. Karena $a \mid b$, maka $b = ak_1$ untuk suatu $k_1 \in \mathbb{Z}$.

   Karena $a \mid c$, maka $c = ak_2$ untuk suatu $k_2 \in \mathbb{Z}$.

Akibatnya berlaku $bx = (ak_1)x$ untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$ dan $cy = (ak_2)y$ untuk setiap $y \in \mathbb{Z}$. Diperoleh $bx + cy = (ak_1)x + (ak_2)y = a(k_1x + k_2y)$, untuk suatu $k_1x + k_2y \in \mathbb{Z}$.

Jadi $a \mid (bx + cy)$.

4. Karena $a \mid b$, maka $b = ax$ untuk suatu $x \in \mathbb{Z}$.

   Karena $b \mid a$, maka $a = by$ untuk suatu $y \in \mathbb{Z}$.

   Diperoleh

   $b = ax = (by)x = b(yx)$

   $b - b(yx) = b(1 - yx) = 0$.

   Karena $b \neq 0$, maka $1 - yx = 0$ atau $xy = 1$.

   Persamaan terakhir dipenuhi untuk $x = y = 1$ atau $x = y = -1$.

   Sehingga didapatkan $a = \pm b$.

5. Karena $a \mid b$, maka $b = ax$ untuk suatu $x \in \mathbb{Z}$.

   Karena $a > 0, b > 0$ dan $b = ax$, maka $x > 0$.

   Untuk $x = 1$ maka dipenuhi $a = b$,

   Sedangkan untuk $x > 1$ maka $b > a$.

   Jadi $a \leq b$.

6. Jika $a \mid b$, maka $b = ax$ untuk suatu $x \in \mathbb{Z}$. Akibatnya untuk $m \in \mathbb{Z}$ dan $m \neq 0$ maka berlaku $mb = m(ax) = (ma)x$.

   Jadi $ma \mid mb$.

   Jika $ma \mid mb$ dan $m \neq 0$, maka $mb = (ma)x$ untuk suatu $x \in \mathbb{Z}$.

   $mb = (ma)x = m(ax)$ atau $mb - m(ax) = m(b - ax) = 0$.

   Karena $m \neq 0$, maka $b - ax = 0$ atau $b = ax$ untuk suatu $x \in \mathbb{Z}$.

   Jadi $a \mid b$.

2.2 Algoritma Pembagian

Teorema 2.2

Misalkan a dan b adalah bilangan bulat dengan $a > 0$. Maka terdapat bilangan bulat q dan r yang masing-masing tunggal sehingga $b = qa + r, 0 \leq r < a$ (Abdussakir, 2009:117).

Bukti:

Diketahui a dan b adalah bilangan bulat dengan $a > 0$. Perhatikan barisan aritmatika berikut:

$$\dots, b - 3a, b - 2a, b - a, b, b + a, b + 2a, b + 3a, \dots$$

Barisan ini mempunyai bentuk umum $b - qa$, dengan $q \in \mathbb{Z}$.

Barisan bilangan ini dapat ditulis sebagai himpunan

$$S = \{b - qa \mid q \in \mathbb{Z}\}$$

Selanjutnya ambil himpunan P yang semua anggotanya adalah anggota himpunan S yang tidak negatif, yaitu:

$$P = \{b - qa \mid b - qa \geq 0, q \in \mathbb{Z}\}$$

Maka $P \neq \emptyset$, sebab

(1) Jika $b \geq 0$ dan $q = 0$, maka $b - qa = b - 0a = b \in P$.

(2) Jika $b < 0$ dan $q = b$, maka $b - qa = b - ba = b(1 - a)$.

Karena $a > 0$ atau $a \geq 1$, maka $1 - a \leq 0$. karena $b < 0$, maka $b(1 - a) \geq 0$. jadi $b - ba \in P$.

Karena $P \neq \emptyset$ dan $P \subseteq \mathbb{N}$, sesuai prinsip urutan pada $\mathbb{N}$, maka P mempunyai unsur terkecil. Misalkan r adalah unsur terkecil di P.

Karena $r \in P$, maka $r \geq 0$ dan $r = b - qa$ atau $b = qa + r$, untuk suatu $q \in \mathbb{Z}$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $r < a$.

Andaikan $r \geq a$.

Maka $0 \leq r - a$ dan $r - a = (b - qa) - a = b - (q + 1)a$.

Jadi $r - a \in P$.

Karena $a > 0$, maka $r - a < r$.

Jadi ada elemen $(r - a)$ di P yang kurang dari r. Hal ini bertentangan dengan pernyataan bahwa r adalah unsur terkecil di P.

Dengan demikian, maka haruslah $r < a$. Dari $r \geq 0$ dan $r < a$, maka $0 \leq r < a$. Sehingga $b = qa + r$, untuk $0 \leq r < a$.

Berikutnya akan ditunjukkan bahwa q dan r masing-masing tunggal.

Andaikan ada q_1 dan q_2 dengan $q_1 \neq q_2$ dan ada r_1 dan r_2 dengan $r_1 \neq r_2$ sehingga

$$b = q_1 a + r_1, 0 \leq r_1 < a$$

dan

$$b = q_2 a + r_2, 0 \leq r_2 < a$$

Maka $q_1 a + r_1 = q_2 a + r_2$ atau $r_2 - r_1 = a(q_1 - q_2)$.

Berarti $a \mid (r_2 - r_1)$ atau $(r_2 - r_1)$ adalah kelipatan dari a.

Di sisi lain, karena $0 \leq r_1 < a$ dan $0 \leq r_2 < a$ maka $-a < (r_2 - r_1) < a$.

Satu-satunya kelipatan dari a yang terletak diantara $-a$ dan a adalah 0. Sehingga diperoleh $r_2 - r_1 = 0$ atau $r_2 = r_1$,

Karena $r_2 - r_1 = a(q_1 - q_2)$ maka $a(q_1 - q_2) = 0$

Karena $a > 0$ maka $q_1 - q_2 = 0$ atau $q_1 = q_2$ jadi q dan r masing-masing adalah tunggal (Abdussakir, 2009:117-118).

2.3 Keprimaan

Definisi 2.2

Misalkan $p \in \mathbb{Z}, p > 1$. p disebut bilangan prima jika pembagi positif dari p adalah 1 dan p itu sendiri (Abdussakir, 2009:130).

Bilangan prima terkecil adalah 2, dan 2 merupakan satu-satunya bilangan prima genap. Berikut ini merupakan contoh bilangan prima

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 31, \ldots$$

Tentunya masih banyak bilangan prima lainnya. Bilangan bulat positif lebih dari 1 yang tidak prima disebut *bilangan komposit*. Jadi bilangan komposit mempunyai pembagi positif selain 1 dan bilangan itu sendiri. Sebagai contoh, 4 adalah komposit karena pembagi positif dari 4 adalah $1, 2,$ dan 4. Bilangan komposit lainnya misalnya

$$4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 18, 20, \ldots$$

Masih banyak lagi bilangan komposit lainnya. Berdasarkan definisi bilangan prima dan bilangan komposit, maka bilangan 1 tidak termasuk bilangan prima dan juga bukan bilangan komposit, setiap bilangan komposit dapat dinyatakan sebagai hasil perkalian bilangan-bilangan prima. Menyatakan bilangan komposit sebagai perkalian dari bilangan-bilangan prima disebut faktorisasi prima (Abdussakir, 2009:131).

Contoh 2.2

$$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5$$

$$175 = 5 \cdot 5 \cdot 7 = 5^2 \cdot 7$$

$$105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$4.725 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$$

Secara lebih umum, dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 2.3

Setiap bilangan bulat $n > 1$ dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan-bilangan prima (dimungkinkan hanya mempunyai satu faktor) (Abdussakir, 2009:131).

Bukti:

Karena $n > 1$ maka ada dua kemungkinan, yaitu n bilangan prima atau n bilangan komposit.

Jika n bilangan prima maka n adalah faktor prima bagi dirinya sendiri.

Jika n bilangan komposit, maka dapat difaktorkan.

Misalkan $n = n_1 n_2$. Jika n_1 dan n_2 adalah bilangan prima, berarti n merupakan perkalian bilangan-bilangan prima.

Jika n_1 bukan prima, n_1 difaktorkan, misalkan $n_1 = n_3 n_4$, dengan $1 < n_3 < n_4 < n_1$. Jika n_2 juga bukan prima, maka n_2 juga difaktorkan dengan cara yang sama, misalkan $n_2 = n_5 n_6$ dengan $1 < n_5 < n_6 < n_2$.

Jadi, $n = n_3 n_4 n_5 n_6$. Jika n_3, n_4, n_5, n_6 adalah bilangan-bilangan prima, maka terbukti.

Jika tidak, lakukanlah proses yang sama sehingga faktor-faktornya makin kecil. Karena faktor-faktornya adalah bilangan bulat yang lebih dari 1, maka faktor-faktornya menjadi bilangan-bilangan prima.

Jadi n dapat menuliskan sebagai perkalian bilangan-bilangan prima.

Karena faktor-faktor prima tersebut tidak harus berbeda, maka hasilnya dapat ditulis dalam bentuk

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \dots p_n^{\alpha_n}$$

dimana $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ adalah bilangan-bilangan prima yang berbeda, dan $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ adalah bilangan bulat positif.

Teorema 2.4

Misalkan $a, b \in \mathbb{Z}$. Jika $p \mid ab$, p bilangan prima, maka $p \mid a$ atau $p \mid b$ (Abdussakir, 2009:133).

Bukti:

Misalkan $p \nmid a$. Akan ditunjukkan bahwa $p \mid b$.

Karena p bilangan prima, maka p mempunyai tepat dua faktor positif, yaitu 1 dan p. Karena $p \nmid a$, maka $(p, a) = 1$. sehingga $p \mid b$.

Teorema 2.5

Banyaknya bilangan prima adalah tak berhingga.

Bukti:

Andaikan banyak bilangan prima adalah berhingga, yaitu

$$p_1, p_2,\ p_3, p_4, \ldots, p_n$$

Misalkan $P = (p_1 p_2 p_3 p_4 \ldots\ p_n) + 1$.

Karena $P > 1$, maka P dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan-bilangan prima.

(i) Jika P prima, maka P bukan salah satu dari $p_i, i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Jadi ada bilangan prima lain selain $p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots, p_n$.

(ii) Jika P komposit, maka P dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan-bilangan prima.

Andaikan $p_i \mid (p_1 p_2 p_3 p_4 \ldots p_n)$ dan $p_i \mid (p_1 p_2 p_3 p_4 \ldots p_n) + 1$ maka diperoleh bahwa $p_i \mid 1$.

Berarti $p_i = 1$. Hal ini tidak mungkin karena p_i adalah bilangan prima. Jadi faktor prima dari P adalah selain $p_1, p_2, p_3, p_4, \dots, p_n$. Jadi ada bilangan prima lain selain $p_1, p_2, p_3, p_4, \dots, p_n$.

Dari (i) dan (ii) disimpulkan bahwa ada bilangan prima lain selain $p_1, p_2, p_3, p_4, \dots, p_n$. Hal ini kontradiksi dengan pengandaian bahwa bilangan prima hanyalah $p_1, p_2, p_3, p_4, \dots, p_n$. Dengan demikian, maka terbukti bahwa banyaknya bilangan prima adalah tak hingga (Abdussakir, 2009:134-135).

2.4 Kongruensi

Kadang-kadang dua bilangan bulat a dan b, mempunyai sisa yang sama jika dibagi dengan bilangan bulat positif m. Katakan bahwa a dan b **kongruen dalam modulo m**, dan dilambangkan sebagai

$$a \equiv b \pmod{m}$$

(notasi '≡' dibaca 'kongruen')

Jika a tidak kongruen dengan b dalam modulus m, maka ditulis $a \not\equiv b \pmod{m}$ (Munir, 2012:192).

Definisi 2.3

Misalkan a dan b adalah bilangan bulat dan m adalah bilangan bulat positif, maka $a \equiv b \pmod{m}$ jika m habis membagi $a - b$ (Munir, 2012:192).

Kekongruenan $a \equiv b \pmod{m}$ dapat pula dituliskan dalam hubungan $a = b + km$ yang dalam hal ini sembarang k adalah bilangan bulat. Pembuktiannya adalah sebagai berikut: menurut Definisi 2.3, $a \equiv b \pmod{m}$ jika $m \mid (a - b)$. Jika $m \mid (a - b)$, maka terdapat bilangan bulat k sedemikian sehingga $a - b = km$ atau $a = b + km$, dapat ditulis $a \equiv b \pmod{m}$

Sifat-sifat pengerjaan hitung pada aritmatia modulo, khususnya terhadap operasi perkalian dan penjumlahan, dinyatakan dalam Teorema 2.6 berikut:

Teorema 2.6

Misalkan m adalah bilangan bulat positif.

1. Jika $a \equiv b \pmod m$ dan c adalah sembarang bilangan bulat maka
   i) $(a + c) \equiv (b + c)(\text{mod } m)$
   ii) $ac \equiv bc \pmod m$
   iii) $a^p \equiv b^p \pmod m$ untuk suatu bilangan bulat tak negatif p
2. Jika $a \equiv b \pmod m$ dan $c \equiv d \pmod m$, maka
   i) $(a + c) \equiv (b + d)(\text{mod } m)$
   ii) $ac \equiv bd \pmod m$

(Munir, 2012:193)

Bukti.

1. $a \equiv b \pmod m$ berarti:
   i) $(a + c) \equiv (b + c)(\text{mod } m)$

   $a = b + km$ (dari persamaan 2.2)

   $a - b = km$

   $(a - b) + c = c + km$ (sifat assosiatif)

   $(a + c) - (b + c) = km$

   $\Leftrightarrow (a + c) = (b + c) + km$ (kedua ruas dijumlah dengan c)

   $\Leftrightarrow (a + b) \equiv (b + c)(\text{mod } m)$

   ii) $ac \equiv bc \pmod m$

   $\Leftrightarrow a = b + km$ (dari persamaan 2.2)

   $\Leftrightarrow a - b = km$

$\Leftrightarrow (a-b)c = ckm$ (kedua ruas dikalikan dengan c)

$\Leftrightarrow ac = bc + Km$ (dalam hal ini, $K = kc$)

$\Leftrightarrow ac \equiv bc \pmod{m}$

iii) $a^p \equiv b^p \pmod{m}$untuk suatu bilangan bulat tak negatif p

$\Leftrightarrow a = b + km$ (dari persamaan 2.2)

$\Leftrightarrow a^p = (b+km)^p$ (dengan Binomial Newton)

$\Leftrightarrow \mathrm{C}_0^p(km)^p + \mathrm{C}_1^p(km)^{p-1}\cdot b + \mathrm{C}_2^p(km)^{p-2}\cdot b^2 + \cdots + \mathrm{C}_p^p(km)^0 + b^p$

$\Leftrightarrow m\left(\mathrm{C}_0^p(km)^p + \mathrm{C}_1^p(km)^{p-1}\cdot b + \mathrm{C}_2^p(km)^{p-2}\cdot b^2 + \cdots +\right.$

$\left.\mathrm{C}_p^p(km)^0\right) + b^p$

$a^p \equiv b^p \pmod{m}$

2. $a \equiv b \pmod{m}$ dan $c \equiv d \pmod{m}$, maka

i) $(a+c) \equiv (b+d) \pmod{m}$

$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a = b + k_1 m$

$c \equiv d \pmod{m} \Leftrightarrow \underline{c = d + k_2 m \quad +}$

$(a+c) = (b+d) + (k_1 + k_2)m$

$(a+c) = (b+d) + Km$ $(K = k_1 + k_2)$

$(a+c) \equiv (b+d) \pmod{m}$

ii) $ac \equiv bd \pmod{m}$

$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a = b + k_1 m$

$c \equiv d \pmod{m} \Leftrightarrow \underline{c = d + k_2 m \quad \text{x}}$

$ac = (b + k_1 m)(d + k_2 m)$

$= bd + bk_2 m + k_1 md + k_1 m\, k_2 m$

$= bd + (bk_2 + k_1 d + k_1 k_2 m)m$

$$\equiv bd (\bmod m)$$

Dalil 2.1

Ditentukan f adalah suatu fungsi polinomial dengan koefisien-koefisien bulat, jika $a \equiv b \ (\bmod m)$ maka $f(a) \equiv f(b) (\bmod m)$ (Muhsetyo, 1997:141-142)

Bukti.

Ambil polinomial $f(x) = P_n x^n + P_{n-1} x^{n-1} + \cdots + P_1 x + P_0$ dengan $P_i \in \mathbb{Z}$ $(i = 1,2,3, \ldots, n)$ maka:

$f(a) = P_n a^n + P_{n-1} a^{n-1} + \cdots + P_1 a + P_0$ dan

$f(b) = P_n b^n + P_{n-1} b^{n-1} + \cdots + P_1 b + P_0$

Sehingga:

$f(a) - f(b) = P_n(a^n - b^n) + P_{n-1}(a^{n-1} - b^{n-1}) + \cdots + P_1(a - b) + P_0$

Selanjutnya menurut teorema 2.6:

$\{a \equiv b \ (\bmod m)$ dan $a \equiv b \ (\bmod m)\} \rightarrow a^2 \equiv b^2 \ (\bmod m) \rightarrow m \mid (a^2 - b^2)$

$\{a \equiv b \ (\bmod m)$ dan $a^2 \equiv b^2 \ (\bmod m)\} \rightarrow a^3 \equiv b^3 \ (\bmod m) \rightarrow m \mid (a^3 - b^3)$

Demikian seterusnya sehingga diperoleh

$m \mid (a^4 - b^4),\ m \mid (a^5 - b^5), m \mid (a^6 - b^6), \ldots, m \mid (a^n - b^n)$

Karena:

$m \mid (a^n - b^n) \rightarrow m \mid P_n(a^n - b^n)$

$m \mid (a^{n-1} - b^{n-1}) \rightarrow m \mid P_{n-1}(a^{n-1} - b^{n-1})$

$m \mid (a^{n-2} - b^{n-2}) \rightarrow m \mid P_{n-2}(a^{n-2} - b^{n-2})$

$\vdots$

$m \mid (a^2 - b^2) \rightarrow m \mid P_2(a^2 - b^2)$

$m \mid (a - b) \rightarrow m \mid P_1(a - b)$

Jadi $m \mid \{P_n(a^n - b^n) + P_{n-1}(a^{n-1} - b^{n-1}) + \cdots + P_2(a^2 - b^2) + P_1(a - b)\}$

Atau $m \mid \{f(a) - f(b)\} \rightarrow f(a) \equiv f(b) \pmod{m}$.

2.5 Kongruensi Linier

Di dalam aljabar, masalah utama yang akan dijawab dalam membahas persamaan adalah mencari akar, penyelesaian, atau jawaban dari persamaan aljabar yang dinyatakan dalam bentuk:

$$f(x) = 0$$

dengan $f(x)$ adalah suatu polinomial yang koefisien-koefisiennya konstan. Nilai-nilai x memenuhi persamaan $f(x) = 0$ disebut akar, penyelesaian atau jawaban dari persamaan $f(x) = 0$ (Muhsetyo, 1997:159).

Serupa dengan persamaan aljabar, masalah utama yang akan dijawab dalam kongruensi adalah mencari nilai-nilai bilangan bulat x yang memenuhi:

$$f(x) \equiv 0 \pmod{m}$$

dengan $f(x)$ adalah suatu polinomial yang koefisien-koefisiennya bulat (Muhsetyo, 1997:159).

Contoh 2.4

$f(x) = x^3 + 6x^2 - 11 \equiv 0 \pmod 5$

Dipenuhi oleh $x = 3$ sebab jika x diganti 3:

$$\begin{aligned} f(3) &= 3^3 + 6(3)^2 - 11 \equiv 0 \pmod 5 \\ &= 27 + 54 - 11 \equiv 0 \pmod 5 \\ &= 70 \equiv 0 \pmod 5 \end{aligned}$$

berarti $x = 3$ memenuhi kongruensi.

Nilai $x = 3$ disebut akar atau penyelesaian kongruensi $f(x) = x^3 + 6x^2 - 11 \equiv 0 \pmod 5$, menyelesaikan kongruensi berarti mencari akar atau mencari penyelesaian kongruensi.

Definisi 2.4

Ditentukan $f(x)$ adalah suatu polinomial dengan koefisien-koefisien bulat, dan $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{m-1}\}$ adalah suatu sistem residu yang lengkap modulo m, banyaknya penyelesaian kongruensi $f(x) \equiv 0 \pmod m$ adalah banyaknya $a_i(a_i = 0, 1, 2, \dots, m-1)$ yang memenuhi kongruensi $f(a_i) \equiv 0 \pmod m$ (Muhsetyo, 1997:159-160).

Contoh 2.4

Diketahui $f(x) = 2x - 4 \equiv 0 \pmod 6$

Maka banyaknya penyelesaian dari $f(x) = 2x - 4 \equiv 0 \pmod 6$, atau $(2x - 4) \equiv 0 \pmod 6$, ditentukan oleh sistem residu yang lengkap modulo 6, yaitu {0,1,2,3,4,5}

Dari $x = a_i$ $(a_i = 0,1,2,3,4,5)$, dapat ditentukan bahwa:

$f(0) = 2 \cdot 0 - 4 = -4 \not\equiv 0 \pmod 6$

$f(1) = 2 \cdot 1 - 4 = -2 \not\equiv 0 \pmod 6$

$f(2) = 2 \cdot 2 - 4 = \quad 0 \equiv 0 \pmod 6$

$f(3) = 2 \cdot 3 - 4 = \quad 2 \not\equiv 0 \pmod 6$

$f(4) = 2 \cdot 4 - 4 = \quad 4 \not\equiv 0 \pmod 6$

$f(5) = 2 \cdot 5 - 4 = \quad 6 \equiv 0 \pmod 6$

Sehingga nilai-nilai x yang memenuhi $(2x - 4) \equiv 0 \pmod 6$ adalah $x = 2$ dan $x = 5$. Banyaknya penyelesaian kongruensi $(2x - 4) \equiv 0 \pmod 6$ adalah dua, yaitu $x = 2$ dan $x = 5$ (Muhsetyo, 1997:160).

Sekarang, jika $x = 2$ ditambah dengan $6k$ $(k \in \mathbb{Z})$, maka akan diperoleh barisan $\dots, -10, -4, 2, 8, 14, 20, \dots$

Yang masing-masing suku barisan memenuhi kongruensi $(2x - 4) \equiv 0 \pmod 6$.

Misalnya:

$2 \cdot (-10) - 4 = -24 \equiv 0 \pmod 6$

$2 \cdot (-4) \quad - 4 = -12 \equiv 0 \pmod 6$

$2 \cdot 2 \qquad - 4 = \quad 0 \equiv 0 \pmod 6$

$2 \cdot 8 \qquad - 4 = \quad 12 \equiv 0 \pmod 6$

$2 \cdot 14 \quad - 4 = \quad 24 \equiv 0 \pmod 6$

$2 \cdot 20 \quad - 4 = \quad 36 \equiv 0 \pmod 6$

Demikian pula, jika $x = 5$ ditambah dengan $6k$ $(k \in \mathbb{Z})$ maka akan diperoleh barisan $\dots, -7, -1, 5, 11, 17, 23, \dots$ yang mana masing-masing suku barisan memenuhi kongruensi $(2x - 4) \equiv 0 \pmod 6$. Meskipun semua nilai dari $x = 2 + 6k$ dan $x = 5 + 6k$ $(k \in \mathbb{Z})$ memenuhi kongruensi $(2x - 4) \equiv 0 \pmod 6$, $x = 2 + 6k$ dipandang sebagai satu penyelesaian, dan $x = 5 + 6k$ dipandang sebagai satu penyelesaian yang lain (Muhsetyo, 1997:160-161).

Kongruensi yang paling sederhana adalah kongruensi yang berderajat satu, dan disebut dengan kongruensi linier. Di dalam aljabar dikenal persamaan linier yang bentuknya $ax \equiv b$ $(a \neq 0)$, maka di dalam teori bilangan dikenal kongruensi linier yang mempunyai bentuk $ax \equiv b \pmod m$ (Muhsetyo, 1997:161).

Kekongruenan linier adalah kongruen yang berbentuk $ax \equiv b \pmod m$ dengan $a, b, m \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ dan $m > 0$ dan x adalah peubah. Bentuk kongruen linier berarti menentukan nilai-nilai x yang memenuhi kekongruenan tersebut. Metode yang sederhana untuk mencari nilai-nilai x tersebut adalah dengan menggunakan persamaan $ax = b + km$ yang dapat disusun menjadi $x = \frac{b+km}{a}$ dengan $k \in \mathbb{Z}$ (Munir, 2012:197).

2.6 Kongruensi Linier Simultan

Seringkali dilakukan secara simultan untuk mencari suatu selesaian yang memenuhi sejumlah kongruensi linier. Ini berarti, dari beberapa kongruensi linier akan dicari selesaian yang memenuhi masing-masing kongruensi linier tersebut.

Teorema 2.7 Kongruensi simultan $x \equiv a \pmod m$, $x \equiv b \pmod n$ dapat diselesaikan hanya jika $a \equiv b \pmod{(m,n)}$, dan memiliki selesaian tunggal yaitu $x \equiv x_0 \pmod{(m,n)}$ (Irawan, dkk, 2014:88-89).

Bukti.

Diketahui kongruensi $x \equiv a \pmod m$, $x \equiv b \pmod n$.

Kongruensi pertama: $x \equiv a \pmod m \rightarrow x = a + mk; k \in \mathbb{Z}$, kemudian dengan kongruensi kedua harus memenuhi: $a + mk \equiv b \pmod n$, atau $mk \equiv b - a \pmod n$.

$mk \equiv b - a \pmod n$ dapat diselesaikan jika $d \mid b - a; d = (m,n)$, atau dengan kata lain kondisi $a \equiv b \pmod{(m,n)}$ harus dipenuhi. $d = (m,n) \rightarrow d \mid m$ dan $d \mid n$.

Jika $d \mid m, d \mid n$ dan $d \mid b - a$ maka $\frac{m}{d}, \frac{n}{d}, \frac{(b-a)}{d} \in \mathbb{Z}$.

$\frac{m}{d}, \frac{n}{d}, \frac{(b-a)}{d} \in \mathbb{Z}$ dan $mk \equiv b - a \pmod n$ mengakibatkan $\frac{mk}{d} \equiv \frac{(b-a)}{d} \pmod{\frac{n}{d}}$.

Jika $d = (m,n)$ maka $(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}) = 1$.

$\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right) = 1$ dan $\frac{mk}{d} \equiv \frac{(b-a)}{d} \left(\mathrm{mod}\, \frac{n}{d}\right) \rightarrow \frac{mk}{d} \equiv \frac{(b-a)}{d} \left(\mathrm{mod}\, \frac{n}{d}\right)$ mempunyai satu penyelesaian.

Misalkan penyelesaian adalah $k = k_0$ sehingga selesaiannya adalah

$k \equiv k_0 \left(\text{mod}\, \frac{n}{d}\right)$, atau

$k = k_0 + \frac{n}{d} \cdot r; r \in \mathbb{Z}$

Karena $x = a + mk$ dan $k = k_0 + \frac{n}{d} \cdot r$

Maka:

$x = a + mk$

$\quad = a + m(k_0 + \frac{n}{d} \cdot r)$

$\quad = (a + mk_0) + \frac{m\,n}{d} \cdot r$

$\quad = (a + mk_0) + (m, n).r$; sebab $(m, n)[m, n] = mn$

$\quad = x_0 + (m, n).r$; sebab $x_0 = a + mk_0$ sehingga $x = x_0\ (mod\ (m, n))$.

2.7 Teorema Sisa China *(Chinese Remainder Theorem)*

Teorema 2.8

Teorema sisa China menyebutkan:

Misalkan $m_1, m_2, \ldots, m_r$ adalah bilangan bulat positif sedemikian sehingga FPB$(m_i, m_j) = 1$ untuk $i \neq j$. Maka sistem kongruensi simultan $x \equiv a_1 \ (\text{mod}\ m_1), x \equiv a_2 \ (\text{mod}\ m_2), \ldots, x \equiv a_r \ (\text{mod}\ m_r)$ mempunyai satu selesaian

$$x \equiv \sum_{j=1}^{r} \frac{m}{m_j}\ b_j a_j \ (\text{mod}\ m)$$

(Irawan, dkk, 2014:91-93)

Bukti.

Misal $m = m_1 m_2 \ldots m_r$

$\frac{m}{m_j}$ $(j = 1,2, \ldots, r)$ adalah bilangan bulat yang tidak memuat m_j.

Jika $\left(\frac{m}{m_j}\right) = 1$ maka terdapat bilangan bulat b_j sedemikian sehingga:

$\left(\frac{m}{m_j}\right)\ b_j \equiv 1 \pmod{m_j}$ yang mempunyai satu penyelesaian.

Karena $\frac{m}{m_j}$ masih memuat m_i, maka untuk $i = j$ berlaku: $\left(\frac{m}{m_j}\right) b_j \equiv 0 \pmod{m_i}$.

Dengan mengambil

$$x_0 = \sum_{j=1}^{r} \frac{m}{m_j}\ b_j a_j$$

Maka

$$x_0 = \frac{m}{m_1}\ b_1 a_1 + \frac{m}{m_2}\ b_2 a_2 + \cdots + \frac{m}{m_i}\ b_i a_i + \cdots + \frac{m}{m_r}\ b_r a_r$$

Dalam modulo $m_i\ (i = 1,2, \ldots, r), x_0$ dapat dinyatakan dengan:

$x_0 = \frac{m}{m_1}\ b_1 a_1 + \frac{m}{m_2}\ b_2 a_2 + \cdots + \frac{m}{m_i}\ b_i a_i + \cdots + \frac{m}{m_r}\ b_r a_r$

$x_0 = \frac{m}{m_1}\ b_1 a_1 \pmod{m_i} + \frac{m}{m_2}\ b_2 a_2 \pmod{m_i} + \cdots + \frac{m}{m_i}\ b_i a_i \pmod{m_i} + \cdots +$

$\frac{m}{m_r}\ b_r a_r \pmod{m_i}$

Karena $\frac{m}{m_j}\ b_j \equiv 1 \pmod{m_j}$ dan untuk $i = j$ berlaku $\frac{m}{m_j}\ b_j$

Maka:

$\frac{m}{m_1}\ b_1 \equiv 0 \pmod{m_i}, \frac{m}{m_2}\ b_2 \equiv 0 \pmod{m_i}, \ldots, \frac{m}{m_i}\ b_i \equiv 1 \pmod{m_i}, \ldots,\ \frac{m}{m_r}\ b_r \equiv$ $1 \pmod{m_i}$, sehingga:

$\frac{m}{m_1}\ b_1 a_1 \equiv 0 \pmod{m_i}, \frac{m}{m_2}\ b_2 a_2 \equiv 0 \pmod{m_i}, \ldots, \frac{m}{m_i}\ b_i a_i \equiv a_i \pmod{m_i}, \ldots,$

$\frac{m}{m_r}\ b_r a_r \equiv 0 \pmod{m_i}$

Jadi $x_0 \equiv 0 \pmod{m_i} + 0 \pmod{m_i} + \cdots +\ a_i \pmod{m_i} + \cdots + 0 \pmod{m_1}$

$\equiv a_i \pmod{m_i}$

Karena $i = 1,2, \dots, r$, maka $x_0 \equiv a_1 \pmod{m_1}, x_0 \equiv a_2 \pmod{m_2}, \dots, x_0 \equiv a_r \pmod{m_r}$.

Berarti x_0 memenuhi semua kongruensi $x \equiv a_i \pmod{m_i}$ atau x_0 merupakan penyelesaian persekutuan dari semua kongruensi $x \equiv a_i \pmod{m_i}$

Karena $(m_i, m_i) = 1$ untuk $i = j$,

Maka $x_0 \equiv a_i \pmod{[m_1, m_2, \dots, m_r]}$, sebab

$[m_1, m_2, \dots, m_r] = m_1, m_2, \dots, m_r = m$ sehingga $x_0 \equiv a_i \pmod{m}$.

Jadi selesaian persekutuan kongruensi linier simultan adalah:

$$x \equiv \sum_{j=1}^{r} \frac{m}{m_j} b_j a_j \pmod{m}; x_0 = x$$

Pada abad pertama, seorang matematikawan China yang bernama Sun Tse mengajukan pertanyaan sebagai berikut:

Tentukan satu bilangan bulat yang bila dibagi dengan 5 menyisakan 3, bila dibagi 7 menyisakan 5, dan bila dibagi 11 menyisakan 7.

Pernyataan Sun Tse dapat dirumuskan ke dalam sistem kongruen linier:

$$x \equiv 3 \pmod{5}$$

$$x \equiv 5 \pmod{7}$$

$$x \equiv 7 \pmod{11}$$

Tentukan solusi dari pernyataan Sun Tse di atas.

Kongruensi pertama, $x \equiv 3 \pmod{5}$, memberikan $x = 3 + 5k_1$ untuk beberapa nilai k. Substitusikan ini ke dalam kongruensi kedua menjadi $3 + 5k_1 \equiv 5 \pmod{7}$, dari sini akan diperoleh $k_1 \equiv 6 \pmod{7}$, atau $k_1 = 6 + 7k_2$ untuk beberapa nilai k_2. Maka didapatkan $x = 3 + 5k_1 = 3 + 5(6 + 7k_2) = 33 + 35k_2$ yang mana memenuhi dua kongruensi pertama. Jika x memenuhi kongruensi yang ketig, sehingga harus mempunyai $33 + 35k_2 \equiv 7 (\mathrm{mod}\ 11)$, yang mengakibatkan $k_2 \equiv 9\ (\mathrm{mod}\ 11)$ atau $k_2 = 9 + 11k_3$. Substitusikan k_2 ini kedalam kongruensi yang ketiga menghasilkan $x = 33 + 35(9 + 11k_3) \equiv 348 + 385k_3 (\mathrm{mod}\ 11)$. Dengan demikian, $x \equiv 348\ (\mathrm{mod}\ 385)$ yang memenuhi ketiga kongruensi tersebut. Dengan kata lain, 348 adalah solusi unik modulo 385. Catatlah bahwa $385 = 5 \,.\, 7 \,.\, 11$.

Solusi unik ini mudah dibuktikan sebagai berikut. Solusi tersebut modulo $m = m_1 \,.\, m_2 \,.\, m_3 = 5 \,.\, 7 \,.\, 11 = 5 \,.\, 7 = 11 \,.\, 35$, karena $77 \,.\, 3 \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 5)$, $55 \,.\, 6 \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 7)$, dan $35 \,.\, 6 \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 11)$, solusi unik dari sistem kongruensi tersebut adalah

$$x \equiv 3 \,.\, 77 \,.\, 3 + 5 \,.\, 55 \,.\, 6 + 7 \,.\, 35 \,.\, 6\ (\mathrm{mod}\ 385)$$

$$\equiv 3.813\ (\mathrm{mod}\ 385) \equiv 348\ (\mathrm{mod}\ 385)$$

(Munir, 2012:199)

2.8 Kajian Islam dalam Menyelesaikan Masalah

لَا يُكَلِّفُ ٱللَّهُ نَفْسًا إِلَّا وُسْعَهَا ۚ لَهَا مَا كَسَبَتْ وَعَلَيْهَا مَا ٱكْتَسَبَتْ ۗ ﴿٢٨٦﴾

“Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya. Ia mendapat pahala (dari kebaikan) yang diusahakannya dan ia mendapat siksa (dari kejahatannya) yang dikerjakannya…”(QS. Al-Baqarah/2:286)

Menurut tafsir *Fi Zhilalil Quran* (2000:402-403) demikianlah seorang muslim menggambarkan rahmat Tuhannya dan keadilan-Nya dalam tugas-tugas yang diwajibkan-Nya dalam mengemban kekhalifahannya di muka bumi, dalam mengujinya ditengah-tengah pengembanan khalifah itu, dan dalam memberikan balasan atas amalnya setelah tugasnya selesai. Ia merasa tenang dan tenteram terhadap rahmat Allah dan keadilan-Nya dalam semua ini. Karenanya, ia tidak merasa bosan dengan tugas-tugasnya, tidak sempit dadanya untuk mengembannya, dan tidak merasa keberatan dalam melaksanakannya. Ia percaya bahwa Allah yang telah menugaskan kewajiban atasnya itu lebih mengetahui hakikat kemampuannya. Seandainya tugas-tugas itu di luar kemampuannya niscaya Allah tidak akan memfardhukannya atas dirinya. Dengan gambaran bahwa orang yang beriman dapat menghimpun semangat untuk melaksanakan tugas-tugasnya. Dan apabila tidak berada dalam batas kemampuannya, niscaya Allah tidak akan mewajibkannya atas dirinya. Apabila sekali tempo ia merasa lemah, lelah, atau merasa bebannya berat, maka ia menyadari bahwa itu adalah kelemahan dirinya, bukan bebannya yang terlalu berat. Lalu terhimpunlah kembali semangatnya, hilanglah kelemahannya dari dirinya, dan timbullah semangatnya yang baru untuk menunaikan tugas-tugasnya itu, selama tugas itu masih dalam batas kemampuannya. Ini merupakan pengarahan yang sangat bagus untuk membangkitkan kembali *himmah* 'hasrat dan semangat' ketika melemah karena panjangnya perjalanan. Sedangkan dalam tafsir Nurul Quran (2006:112) pada permulaannya, ayat di atas menyatakan bahwa keseluruhan ketentuan dalam Islam, dari sudut pandang kesanggupan dan kemampuan manusia, bersandar dan bergantung pada ayat ini. Lantas, ditambahkan bahwa kebaikan atau keburukan apapun yang dilakukan seseorang akan kembali kepadanya.

Menurut tafsir *Fi Zhilalil Quran* (2000:403) seseorang tidak akan mendapatkan pahala kecuali dari apa yang diusahakannya sendiri, dan seseorang tidak akan memikul dosa kecuali dari apa yang dikerjakannya. Setiap orang akan kembali kepada Tuhannya dengan lembaran khususnya, dengan segala pahala atau dosanya. Maka ia tidak dapat melindungi seseorang dan tidak meminta pertolongan kepada seseorang. Setiap orang harus berani membela dirinya dan hak-hak Allah terhadap dirinya, selama dia masih merasa bahwa dia kelak akan menerima pembalasan Allah secara personal, sendiri-sendiri, dan tidak ada orang lain yang dapat menakut-nakuti dalam pertanggungjawaban pribadi ini. Maka, di antara konsekuensi iman ialah bersemangatnya setiap anggota jamaah untuk menunaikan hak-hak jamaah (orang banyak), karena itu termasuk hak Allah juga atas dirinya. Lalu ia diperintahkan bersama jamaah untuk bersikap setia dalam urusan harta dan usaha, berjuang dan memberi nasihat, menegakkan kebenaran dalam masyarakat dan menumpas kebatilan, dan kebajikan, serta memberantas kejahatan dan kemungkaran. Semua itu akan diperhitungkan untuknya, mana yang baik dan mana yang buruk, pahala atau dosa, dalam lembaran catatannya pada hari ketika dia menghadap Allah seorang diri, dan selanjutnya akan menerima pembalan-Nya. Sedangkan menurut tafsir Ibnu Katsir (2000:245-246) Allah adalah pelindung dan penolong hamba-Nya, hanya kepada Allah lah umat manusia bertawakkal, dan Allah lah yang dimintai pertolongan, dan hanya kepada Allah lah berserah diri, tiada daya dan tiada kekuatan bagi hamba-Nya kecuali dengan pertolongan Allah. Orang-orang yang ingkar kepada agama-Nya, ingkar kepada keesaan-Nya dan risalah Nabi-Nya, dan mereka menyembah selain Allah serta mempersekutukan Allah dengan seseorang di antara hamba-hamba Allah. Tolonglah umat manusia dari orang-orang yang kafir, dan jadikanlah akibat yang terpuji bagi umat manusia atas orang-orang yang ingkar di dunia dan di akhirat.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis dan Pendekatan Penelitian

Ditinjau dari jenis datanya, jenis penelitian ini merupakan jenis penelitian kualitatif. Penelitian kualitatif adalah penelitian yang bermaksud untuk memahami fenomena tentang apa yang dialami oleh subjek penelitian secara utuh dan dengan cara deskripsi dalam bentuk kata-kata dan bahasa pada suatu konteks khusus yang alamiah, serta dengan memanfaatkan berbagai metode alamiah yang salah satunya bermanfaat untuk keperluan meneliti dari segi prosesnya. Untuk pendekatan penelitian, peneliti menggunakan metode kepustakaan. *Library research* (penelitian kepustakaan), yaitu penelitian yang dilaksanakan dengan menggunakan literatur (kepustakaan), baik berupa buku, catatan, maupun laporan hasil penelitian dari penelitian terdahulu.

3.2 Data dan Sumber Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data kualitatif. Pada penelitian ini, data tersebut berupa definisi-definisi dan teorema seperti definisi keterbagian, definisi keprimaan, definisi kongruensi, dan beserta teorema teoremanya.

Sementara itu, sumber data yang digunakan dalam penelitian ini adalah sumber data sekunder, yakni data yang berupa dokumen-dokumen yang telah tersedia. Peneliti membaca literatur-literatur yang dapat menunjang penelitian, yaitu literatur-literatur yang berhubungan dengan penelitian ini.

3.3 Pengumpulan Data

Teknik pengumpulan data merupakan langkah yang paling strategis dalam penelitian, karena tujuan utama dari penelitian adalah mendapatkan data. Dalam kegiatan pengumpulan data untuk penelitian ini digunakan metode pengumpulan studi pustaka atau metode dokumentasi. Dengan cara mencari data yang berupa buku-buku seperti buku teori bilangan, matematika diskrit, jurnal kongruensi polinomial, maupun internet yang berhubungan dengan penelitian ini.

3.4 Prosedur Penelitian

Prosedur penelitian adalah langkah-langkah atau urutan-urutan yang harus dilalui atau dikerjakan dalam suatu penelitian, sehingga mampu menjawab rumusan masalah dan tujuan penelitian.Tahapan prosedur pada penelitian ini adalah:

1. Merumuskan Masalah.

   Sebelum peneliti melakukan penelitian, peneliti mempersiapkan suatu permasalahan yang akan dibahas pada penelitian ini, karena jika tidak ada masalah maka penelitian ini tidak akan berjalan. Rumusan masalah pada penelitian ini adalah bagaimana cara menentukan selesaian kongruensi polinomial.
2. Mengumpulkan Data.

   Sebelum peneliti memperoleh data, peneliti mempersiapkan suatu permasalahan yang akan dianalisa kemudian mengidentifikasi permasalahan tersebut. Maka dari permasalahan tersebut pengumpulan data dapat diperoleh dan peneliti mencari literatur yang berhubungan dengan penelitian ini. Setelah peneliti mendapatkan literatur yang berhubungan dengan penelitian ini, maka diperoleh hasilnya seperti definisi-definisi dan teoreme-teorema yang valid.

3. Menganalisis Data.

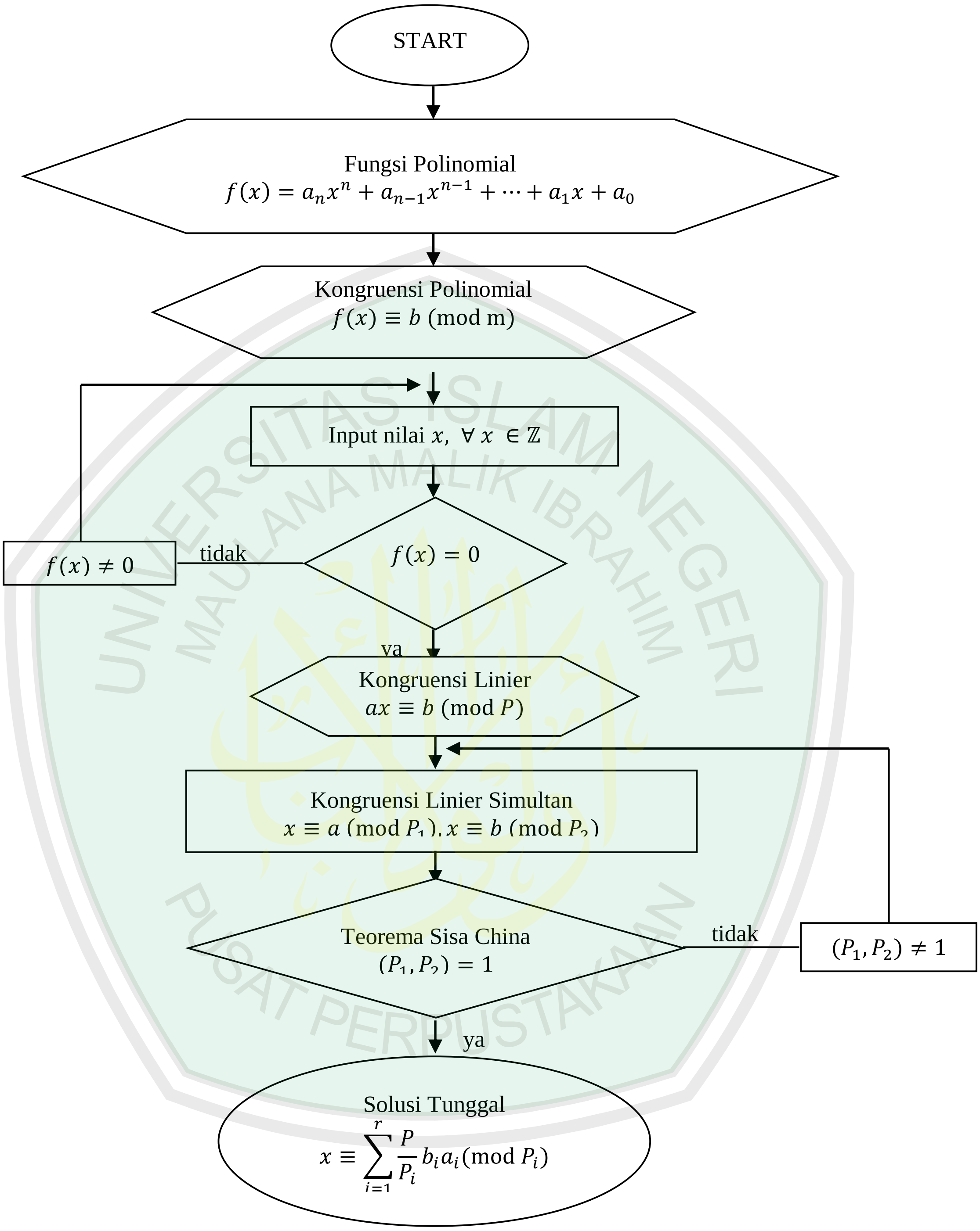
   Sebelum menganalisa data, peneliti mempersiapkan data yang telah diperoleh dari pengumpulan data, data tersebut berupa kata-kata atau teks. Seperti definisi-definisi, teorema-teorema, dan lain-lain. Setelah data telah dipersiapkan, maka tugas peneliti selanjutnya yaitu membaca, mempelajari, dan menganalisa dengan langkah-langkah yang telah dijelaskan sebelumnya. Dalam penelitian ini, analisis dilakukan dengan cara:

   a. Mengambil fungsi polinomial;
   b. Menentukan kongruensi polinomial;
   c. Menentukan akar-akar persamaan/selesaian dari kongruensi polinomial yang telah di ambil;
   d. Menentukan kongruensi linier simultan;
   e. Menyelesaikan kongruensi linier simultan dengan menerapkan teorema sisa China untuk mendapatkan selesaian tunggal.

4. Membuat Kesimpulan.

   Setelah peneliti melakukan analisa data, langkah yang terakhir adalah peneliti membuat kesimpulan. Kesimpulannya adalah mengetahui tujuan dari penelitian ini yaitu menjelaskan bagaimara cara menentukan selesaian kongruensi polinomial.

Flowchart alur pembahasan untuk menentukan selesaian kongruensi polinomial



Keterangan:

	Terminator, Permulaan atau akhir program
	Predefined Process, Pemberian nilai awal
	Process, Tindakan yang dilakukan
	Decision, Kondisi yang akan menghasilkan dua kemungkinan ya/tidak

BAB IV

PEMBAHASAN

4.1 Kongruensi Polinomial

Kongruensi mempunyai sifat-sifat yang sama dengan persamaan dalam aljabar. Dalam aljabar akan ditentukan akar-akar persamaan yang dinyatakan dengan $f(x) = 0$, dimana $f(x)$ adalah polinomial. Demikian halnya dengan kongruensi, masalahnya adalah menentukan bilangan bulat x sehingga memenuhi kongruensi $f(x) \equiv 0 \pmod{m}$, dimana $f(x)$ adalah polinomial dengan koefisien bilangan bulat.

Ambil sebuah kasus dan buktikan bahwa kongruensi polinomial berikut memiliki selesaian, Misalkan:

$$f(x) \equiv a \pmod{P} \qquad , \forall\, x \in \mathbb{Z}$$

Misalkan $P = \{P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot P_r^{\alpha_r}\}$. dimana $P_1, P_2, \ldots, P_r$ adalah bilangan prima yang berbeda, dan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ adalah bilangan bulat positif.

Menurut Teorema 2.3 dinyatakankan bahwa "Setiap bilangan bulat $n > 1$ dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan-bilangan prima (dimungkinkan hanya mempunyai satu faktor)" (Abdussakir, 2009:131).

Karena kongruensi di atas merupakan bilangan bulat positif maka terdapat dua kemungkinan, yaitu apakah P termasuk bilangan prima ataukah P merupakan bilangan komposit, apabila P merupakan bilangan prima maka P adalah faktor prima bagi dirinya sendiri, dan sistem residu lengkap modulo P adalah $x = \{0, 1, 2, 3, \ldots, P-1\}$, sedangkan jika P merupakan bilangan komposit maka dapat difaktorkan. cari terlebih dahulu faktorisasi prima dari P, misalkan $P = \{P_1^{\alpha_1} \cdot$

$P_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot P_r^{\alpha_r}\}$, dimana $P_1, P_2, \ldots, P_r$ adalah bilangan prima yang berbeda, dan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ adalah bilangan bulat positif.

Maka untuk mencari selesaian dari kongruensi $f(x) \equiv a \pmod{P}$, dengan diketahui bahwa P merupakan bilangan komposit, maka faktorisasi prima dari P adalah $P = \{P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2} \cdot P_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot P_r^{\alpha_r}\}$, Menurut definisi 2.4 Bahwa $f(x)$ adalah suatu polinomial dengan koefisien bilangan bulat, dan $\{P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot P_r^{\alpha_r}\}$ adalah suatu sistem residu yang lengkap modulo P, maka banyaknya penyelesaian kongruensi $f(x) \equiv a \pmod{P}$ adalah banyaknya $a_i(a_i = 0, 1, 2, \ldots, P-1)$ yang memenuhi kongruensi $f(a_i) \equiv 0 \pmod{P}$.

maka kongruensi linier simultannya adalah sebagai berikut:

$$f(x) \equiv a_1 \pmod{P_1^{\alpha_1}}$$

$$f(x) \equiv a_2 \left(\text{mod } P_2^{\alpha_2}\right)$$

$$f(x) \equiv a_3 \left(\text{mod } P_3^{\alpha_3}\right)$$

$$\vdots$$

$$f(x) \equiv a_r (\text{mod } P_r^{\alpha_r})$$

dimana $a_1, a_2, a_3, \ldots a_r$ adalah sembarang $r \in \mathbb{Z}$

Kongruensi pertama:

$$f(x) \equiv a_1 \left(\text{mod } P_1^{\alpha_1}\right) \rightarrow P_1^{\alpha_1} = \{0, 1, 2, \ldots, P_1^{\alpha_1} - 1\}.$$

Kongruensi kedua:

$$f(x) \equiv a_2 \left(\text{mod } P_2^{\alpha_2}\right) \rightarrow P_2^{\alpha_2} = \{0, 1, 2, \ldots, P_2^{\alpha_2} - 1\}.$$

Kongruensi ketiga:

$$f(x) \equiv a_3 \left(\text{mod } P_3^{\alpha_3}\right) \rightarrow P_3^{\alpha_3} = \{0, 1, 2, \ldots, P_3^{\alpha_3} - 1\}.$$

$$\vdots$$

Kongruensi ke$-\ r$:

$$f(x) \equiv a_r \left(\text{mod } P_r^{\alpha_r}\right) \ \rightarrow \ \ P_r^{\alpha_r} = \{0, 1, 2, \dots, \ P_r^{\alpha_r} - 1\}.$$

Untuk menentukan bahwa kongruensi linier simultan tersebut masing-masing mempunyai selesaian maka terapkan Teorema Sisa China *(Chinese Remainder Theorem)* untuk membuktikannya.

Contoh

Buktikan bahwa kongruensi polinomial berikut memiliki selesaian:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4 \equiv 0 \text{ (mod 175)}$$

Jawab

Diketahui $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4 \equiv 0$ (mod 175)

Dengan catatan bahwa faktorisasi dari $175 = 5^2 \cdot 7$ maka, (i) $x^3 + 3x^2 - 4 \equiv 0$ (mod 5) dan (ii) $x^3 + 3x^2 - 4 \equiv 0$ (mod 7).

(i) $x^3 + 3x^2 - 4 \equiv 0$ (mod 5) sistem residu lengkap modulo 5, yaitu

$x = \{0,1,2,3,4\}$, dapat ditentukan bahwa:

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4 \equiv 0$ (mod 5)

$f(0) = (0)^3 + 3 \cdot (0)^3 - 4 = -4 \not\equiv 0$ (mod 25)

$f(1) = (1)^3 + 3 \cdot (1)^2 - 4 \equiv 0$ (mod 25)

$= 1 + 3 - 4 \equiv 0$ (mod 25)

$= 0 \equiv 0$ (mod 25)

$f(2) = (2)^3 + 3 \cdot (2)^2 - 4 \not\equiv 0$ (mod 25)

$= 8 + 12 - 4 \not\equiv 0$ (mod 25)

$= 16 \not\equiv 0$ (mod 25)

$f(3) = (3)^3 + 3 \cdot (3)^2 - 4 \equiv 0$ (mod 25)

$= 27 + 27 - 4 \equiv 0$ (mod 25)

$= \quad 50 \quad \equiv 0 \pmod{25}$

$f(4) = (4)^3 + 3 \cdot (4)^2 - 4 \not\equiv 0 \pmod{25}$

$= \ 64 \ + \ 48 \quad - 4 \not\equiv 0 \pmod{25}$

$= \quad 108 \quad \not\equiv 0 \pmod{25}$

Kekongruenan $a \equiv b \pmod{m}$ dapat pula dituliskan dalam hubungan $a = b + km$, Untuk sembarang $k \in \mathbb{Z}$.

Meskipun semua nilai dari $x = 1 + 5k$ dan $x = 3 + 5k$ $(k \in \mathbb{Z})$ memenuhi kongruensi $x^3 + 3x^2 - 4 \equiv 0 \pmod{5}$, $x = 1 + 5k$ dipandang sebagai satu solusi, dan $x = 3 + 5k$ dipandang sebagai satu solusi yang lain. Maka dapat ditentukam suku barisan yang memenuhi kongruensi $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4 \equiv 0 \pmod{25}$. Jika $x = 3$ ditambah dengan $5k$ $(k \in \mathbb{Z})$, maka akan diperoleh barisan $x = 3,8,13,18,23$, yang mana masing-masing suku barisan memenuhi kongruensi $x^3 + 3x^2 - 4 \equiv 0 \pmod{25}$. Misalnya:

$f(8) = (8)^3 + 3 \cdot (8)^2 - 4 \equiv 0 \pmod{25}$

$= 512 \ + \ 192 \quad - 4 \equiv 0 \pmod{25}$

$= \quad 700 \quad \equiv 0 \pmod{25}$

$f(13) = (13)^3 + 3 \cdot (13)^2 \quad - 4 \equiv 0 \pmod{25}$

$= 2.197 \ + \ 507 \quad - 4 \equiv 0 \pmod{25}$

$= \quad 2.700 \quad \equiv 0 \pmod{25}$

$f(18) = (18)^3 + 3 \cdot (18)^2 \quad - 4 \equiv 0 \pmod{25}$

$= 5.832 \ + \ 972 \quad - 4 \equiv 0 \pmod{25}$

$= \quad 6.800 \quad \equiv 0 \pmod{25}$

$f(23) = (23)^3 + 3 \cdot (23)^2 \quad - 4 \equiv 0 \pmod{25}$

$= 12.167 + \ 1.587 \ - 4 \equiv 0 \pmod{25}$

$= \quad 13.750 \quad \equiv 0 \pmod{25}$

(ii) $x^3 + 3x^2 - 4 \equiv 0 \pmod{7}$ sistem residu lengkap modulo 7,

$x = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ dapat ditentukan bahwa:

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4 \equiv 0 \pmod{7}$

$f(0) = (0)^3 + 3 \cdot (0)^3 - 4 = -4 \not\equiv 0 \pmod{7}$

$f(1) = (1)^3 + 3 \cdot (1)^2 - 4 \equiv 0 \pmod{7}$

$= 1 + 3 - 4 \equiv 0 \pmod{7}$

$= 0 \equiv 0 \pmod{7}$

$f(2) = (2)^3 + 3 \cdot (2)^2 - 4 \not\equiv 0 \pmod{7}$

$= 8 + 12 - 4 \not\equiv 0 \pmod{7}$

$= 16 \not\equiv 0 \pmod{7}$

$f(3) = (3)^3 + 3 \cdot (3)^2 - 4 \not\equiv 0 \pmod{7}$

$= 27 + 27 - 4 \not\equiv 0 \pmod{7}$

$= 50 \not\equiv 0 \pmod{7}$

$f(4) = (4)^3 + 3 \cdot (4)^2 - 4 \not\equiv 0 \pmod{7}$

$= 64 + 48 - 4 \not\equiv 0 \pmod{7}$

$= 108 \not\equiv 0 \pmod{7}$

$f(5) = (5)^3 + 3 \cdot (5)^2 - 4 \equiv 0 \pmod{7}$

$= 125 + 75 - 4 \equiv 0 \pmod{7}$

$= 196 \equiv 0 \pmod{7}$

$f(6) = (6)^3 + 3 \cdot (6)^2 - 4 \not\equiv 0 \pmod{7}$

$= 216 + 108 - 4 \not\equiv 0 \pmod{7}$

$= 320 \not\equiv 0 \pmod{7}$

Sehingga nilai-nilai x yang memenuhi $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4 \equiv 0 \pmod 7$ adalah $x = 1$ dan $x = 5$ maka banyaknya solusi kongruensi $x^3 + 3x^2 - 4 \equiv 0 \pmod 7$ ada 2, yaitu $x = 1 + 7t$ dan $x = 5 + 7t$.

Jadi masing-masing dari solusi yang telah didapat dipasangkan satu persatu sehingga menjadi kongruensi linear simultan, dan memenuhi syarat untuk diselesaikan dengan Teorema Sisa China karena $(P_1, P_2) = 1$

a) $x \equiv 1 \pmod{5^2}$

$x \equiv 1 \pmod 7$

b) $x \equiv 3 \pmod{5^2}$

$x \equiv 1 \pmod 7$

c) $x \equiv 8 \pmod{5^2}$

$x \equiv 1 \pmod 7$

d) $x \equiv 13 \pmod{5^2}$

$x \equiv 1 \pmod 7$

e) $x \equiv 18 \pmod{5^2}$

$x \equiv 1 \pmod 7$

f) $x \equiv 23 \pmod{5^2}$

$x \equiv 1 \pmod 7$

g) $x \equiv 1 \pmod{5^2}$

$x \equiv 5 \pmod 7$

h) $x \equiv 3 \pmod{5^2}$

$x \equiv 5 \pmod 7$

i) $x \equiv 8 \pmod{5^2}$

$x \equiv 5 \pmod 7$

j) $x \equiv 13 \pmod{5^2}$

$x \equiv 5 \pmod{7}$

k) $x \equiv 18 \pmod{5^2}$

$x \equiv 5 \pmod{7}$

l) $x \equiv 23 \pmod{5^2}$

$x \equiv 5 \pmod{7}$

4.2 Cara Menentukan Selesaian Kongruensi Polinomial Menggunakan Teorema Sisa China *(Chinese Remainder Theorem)*

Misalkan $P_1^{\alpha_1}, P_2^{\alpha_2}, P_3^{\alpha_3}, \dots, P_r^{\alpha_r}$ adalah bilangan bulat positif sedemikian sehingga $(P_i, P_j) = 1$ untuk $i \neq j$. Maka sistem kongruensi simultan di atas mempunyai selesaian persekutuan tunggal sebagai berikut:

$$x \equiv \sum_{i=1}^{r} \frac{P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} P_3^{\alpha_3} \dots P_r^{\alpha_r}}{P_i} b_i a_i (\text{mod } [P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} P_3^{\alpha_3} \dots P_r^{\alpha_r}])$$

Diketahui: $P = \{P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2} \cdot P_3^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot P_r^{\alpha_r}\}$

Karena $\frac{P}{P_i^{\alpha_i}}$ $(i = 1,2,3, \dots, r)$ adalah bilangan bulat yang tidak memuat $P_i^{\alpha_i}$. Serta $\left(\frac{P}{P_i^{\alpha_i}}\right) = 1$ maka terdapat bilangan bulat b_i, serta $(P_i, Pj) = 1$ untuk $i \neq j$ maka $\left(\frac{P}{P_i^{\alpha_i}}\right) b_i = 1$. Menurut dalil jika $\left(\frac{P}{P_i^{\alpha_i}}, P_i^{\alpha_i}\right) = 1$ sedemikian sehingga $\left(\frac{P}{P_i^{\alpha_i}}\right) b_i \equiv 1 \pmod{P_i}$ mempunyai satu selesaian.

Jika $\frac{P}{P_i^{\alpha_i}}$ masih memuat $P_i^{\alpha_i}$, maka untuk $i \neq j$ berlaku $\left(\frac{P}{P_i^{\alpha_i}}\right) b_i \equiv 0 \pmod{P_i}$. Dengan mengambil

$$x_0 = \sum_{i=1}^{r} \frac{P}{P_i}\ b_i a_i$$

Maka:

$$x_0 = \frac{P}{P_1^{\alpha_1}} b_1 a_1 + \frac{P}{P_2^{\alpha_2}} b_2 a_2 + \frac{P}{P_3^{\alpha_3}} b_3 a_3 + \cdots + \frac{P}{P_r^{\alpha_r}} b_r a_r$$

Dalam modulo P_i $(i = 1,2,3, \dots, r), x_0$ dapat dinyatakan dengan

$$x_0 \equiv \left(\frac{P}{P_1^{\alpha_1}} b_1 a_1 + \frac{P}{P_2^{\alpha_2}} b_2 a_2 + \cdots + \frac{P}{P_i^{\alpha_i}} b_i a_i + \cdots + \frac{P}{P_r^{\alpha_r}} b_r a_r\right) \pmod{P_i}$$

$$x_0 \equiv \frac{P}{P_1^{\alpha_1}} b_1 a_1 \pmod{P_i} + \frac{P}{P_2^{\alpha_2}} b_2 a_2 \pmod{P_i} + \cdots + \frac{P}{P_i^{\alpha_i}} b_i a_i \pmod{P_i} + \ \dots +$$

$$\frac{P}{P_r^{\alpha_r}} b_r a_r \pmod{P_i}$$

Karena $\left(\frac{P}{P_i}\right) b_i \equiv 1 \pmod{P_i}$ dan untuk $i \neq j$ berlaku $\left(\frac{P}{P_i}\right) b_i \equiv 0 \pmod{P_i}$ maka diperoleh:

$$\frac{P}{P_1^{\alpha_1}} b_1 \equiv 0 \pmod{P_i}$$

$$\frac{P}{P_2^{\alpha_2}} b_2 \equiv 0 \pmod{P_i}$$

$$\frac{P}{P_3^{\alpha_3}} b_3 \equiv 0 \pmod{P_i}$$

$$\vdots$$

$$\frac{P}{P_i^{\alpha_i}} b_i \equiv 0 \pmod{P_i}$$

$$\vdots$$

$$\frac{P}{P_r^{\alpha_r}} b_r \equiv 0 \pmod{P_i}$$

Sehingga

$$\frac{P}{P_1^{\alpha_1}} b_1 a_1 \equiv 0 \pmod{P_i}$$

$$\frac{P}{P_2^{\alpha_2}} b_2 a_2 \equiv 0 \pmod{P_i}$$

$$\frac{P}{P_3^{\alpha_3}} b_3 a_3 \equiv 0 \pmod{P_i}$$

$$\vdots$$

$$\frac{P}{P_i^{\alpha_i}} b_i a_i \equiv a_i \pmod{P_i}$$

$$\vdots$$

$$\frac{P}{P_r^{\alpha_r}} b_r a_r \equiv 0 \pmod{P_i}$$

Jadi $x_0 \equiv 0 \pmod{P_i} + 0 \pmod{P_i} + \cdots + a_i \pmod{P_i} + \cdots + 0 \pmod{P_i}$

$x_0 \equiv a_i (\text{mod } P_i)$

Karena $i = (1,2,3, \dots, r)$ maka

$x_0 \equiv a_1 \pmod{P_1^{\alpha_1}}$

$x_0 \equiv a_2 \pmod{P_2^{\alpha_2}}$

$x_0 \equiv a_3 \pmod{P_3^{\alpha_3}}$

$\vdots$

$x_0 \equiv a_r \pmod{P_r^{\alpha_r}}$

Hal ini berarti x_0 memenuhi semua kongruensi $x \equiv a_i \pmod{P_i}$. Dengan kata lain x_0 merupakan selesaian persekutuan dari semua kongruensi linier simultan tersebut.

Maka selesaian dari masing-masing kongruensi simultannya adalah sebagai berikut:

$$x_0 \equiv \sum_{i=1}^{r} \frac{P}{P_i} b_i a_i \pmod{P_i}$$

Contoh

a) $f(x) \equiv 1 \pmod{5^2}$

$f(x) \equiv 1 \pmod{7}$

Diketahui: $a_1 = 1, a_2 = 1$

$P_1 = 5^2, P_2 = 7$

$P = 5^2 \cdot 7 = 175$

$(5^2, 7) = 1$

Kemudian

$$\frac{P}{P_1} = \frac{175}{25} = 7 \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{P}{P_2} = \frac{175}{7} = 25 \in \mathbb{Z}$$

Karena $\left(\frac{P}{P_1}, P_1\right) = \left(\frac{175}{25}, 25\right) = (7{,}25) = 1$ maka ada $b_1 \in \mathbb{Z}$ sehingga

$\left(\frac{P}{P_1}, P_1\right) = b_1 (\text{mod } P_1)$ mempunyai satu selesaian yaitu

$\frac{175}{25}\ b_1 \equiv 1 \text{ (mod 25)}$

$7 \cdot\ b_1 \equiv 1 \text{ (mod 25)}$

$b_1 = 18$

Karena $\left(\frac{P}{P_2}, P_2\right) = \left(\frac{175}{7}, 7\right) = (25{,}7) = 1$ maka ada $b_2 \in \mathbb{Z}$ sehingga

$\left(\frac{P}{P_2}, P_2\right) = b_2 (\text{mod } P_2)$ mempunyai satu selesaian yaitu

$\frac{175}{7}\ b_2 \equiv 1 \text{ (mod 7)}$

$25 \cdot\ b_2 \equiv 1 \text{ (mod 7)}$

$b_2 = 2$

Jika x_0 dinyatakan dalam modulo P_1, maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\frac{P}{P_1} b_1 a_1 \equiv \frac{175}{25} \cdot 18 \cdot 1$$

$$\equiv 7 \cdot 18 \cdot 1$$

$$\equiv 126 \equiv 1 \pmod{25}$$

$$\frac{P}{P_2} b_2 a_2 \equiv \frac{175}{7} \cdot 2 \cdot 1$$

$$\equiv 25 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\equiv 50 \equiv 0 \pmod{25}$$

$$x_0 \equiv \frac{P}{P_1} b_1 a_1 \pmod{25} + \frac{P}{P_2} b_2 a_2 \pmod{25}$$

$$\equiv 1 \pmod{25} + 0 \pmod{25}$$

$$\equiv 1 \pmod{25}$$

$$\equiv a_1 \pmod{P_1}$$

Jika x_0 dinyatakan dalam modulo P_2, maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\frac{P}{P_1} b_1 a_1 \equiv \frac{175}{25} \cdot 18 \cdot 1$$

$$\equiv 7 \cdot 18 \cdot 1$$

$$\equiv 126 \equiv 0 \pmod{7}$$

$$\frac{P}{P_2} b_2 a_2 \equiv \frac{175}{7} \cdot 2 \cdot 1$$

$$\equiv 25 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\equiv 50 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$x_0 \equiv \frac{P}{P_1} b_1 a_1 \pmod{7} + \frac{P}{P_2} b_2 a_2 \pmod{7}$$

$$\equiv 0 \pmod{7} + 1 \pmod{7}$$

$$\equiv 1 \pmod{7}$$

$$\equiv a_2 \pmod{P_2}$$

Karena x_0 memenuhi kongruensi pertama dan kedua, maka x_0 merupakan selesaian persekutuan yang secara simultan memenuhi semua kongruensi.

Maka:

$$x_0 \equiv \left(\frac{P}{P_1} b_1 a_1 + \frac{P}{P_2} b_2 a_2\right) (\text{mod } 175)$$

$$x_0 \equiv \left(\frac{175}{25} \cdot 18 \cdot 1 + \frac{175}{7} \cdot 2 \cdot 1\right) (\text{mod } 175)$$

$$x_0 \equiv 7 \cdot 18 \cdot 1 + 25 \cdot 2 \cdot 1 \ (\text{mod } 175)$$

$$x_0 \equiv 126 + 50 \ (\text{mod } 175)$$

$$x_0 \equiv 176 \ (\text{mod } 175)$$

$$x_0 \equiv 1 \ (\text{mod } 175)$$

b) $f(x) \equiv 3 \ (\text{mod } 5^2)$

$f(x) \equiv 1 \ (\text{mod } 7)$

Diketahui: $a_1 = 3, a_2 = 1$

$$P_1 = 5^2, P_2 = 7$$

$$P = 5^2 \cdot 7 = 175$$

$$(5^2, 7) = 1$$

Kemudian

$$\frac{P}{P_1} = \frac{175}{25} = 7 \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{P}{P_2} = \frac{175}{7} = 25 \in \mathbb{Z}$$

Karena $\left(\frac{P}{P_1}, P_1\right) = \left(\frac{175}{25}, 25\right) = (7{,}25) = 1$ maka ada $b_1 \in \mathbb{Z}$ sehingga $\left(\frac{P}{P_1}, P_1\right) = b_1 (\text{mod } P_1)$ mempunyai satu selesaian yaitu

$$\frac{175}{25}\ b_1 \equiv 1 \ (\text{mod } 25)$$

$$7 \cdot \ b_1 \equiv 1 \ (\text{mod } 25)$$

$$b_1 = 18$$

Karena $\left(\frac{P}{P_2}, P_2\right) = \left(\frac{175}{7}, 7\right) = (25,7) = 1$ maka ada $b_2 \in \mathbb{Z}$ sehingga

$\left(\frac{P}{P_2}, P_2\right) = b_2(\text{mod } P_2)$ mempunyai satu selesaian yaitu

$$\frac{175}{7}\ b_2 \equiv 1 \pmod 7$$

$$25 \cdot\ b_2 \equiv 1 \pmod 7$$

$$b_2 = 2$$

Jika x_0 dinyatakan dalam modulo P_1, maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\frac{P}{P_1} b_1 a_1 \equiv \frac{175}{25} \cdot 18 \cdot 3$$

$$\equiv 7 \cdot 18 \cdot 3$$

$$\equiv 378\ \equiv 3 \pmod{25}$$

$$\frac{P}{P_2} b_2 a_2 \equiv \frac{175}{7} \cdot 2 \cdot 1$$

$$\equiv 25 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\equiv 50\ \equiv 0 \pmod{25}$$

$$x_0 \equiv \frac{P}{P_1} b_1 a_1 \pmod{25} + \frac{P}{P_2} b_2 a_2 \pmod{25}$$

$$\equiv 3 \pmod{25} + 0 \pmod{25}$$

$$\equiv 3 \pmod{25}$$

$$\equiv a_1 \pmod{P_1}$$

Jika x_0 dinyatakan dalam modulo P_2, maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\frac{P}{P_1} b_1 a_1 \equiv \frac{175}{25} \cdot 18 \cdot 3$$

$$\equiv 7 \cdot 18 \cdot 3$$

$$\equiv 378\ \equiv 0 \pmod 7$$

$$\frac{P}{P_2}b_2a_2 \equiv \frac{175}{7}\cdot 2\cdot 1$$

$$\equiv 25\cdot 2\cdot 1$$

$$\equiv 50 \ \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 7)$$

$$x_0 \equiv \frac{P}{P_1}b_1a_1 \ (\mathrm{mod}\ 7) + \frac{P}{P_2}b_2a_2 \ (\mathrm{mod}\ 7)$$

$$\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 7) + 1 \ (\mathrm{mod}\ 7)$$

$$\equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 7)$$

$$\equiv a_2 \ (\mathrm{mod}\ P_2)$$

Karena x_0 memenuhi kongruensi pertama dan kedua, maka x_0 merupakan selesaian persekutuan yang secara simultan memenuhi semua kongruensi.

Maka:

$$x_0 \equiv \left(\frac{P}{P_1}b_1a_1 + \frac{P}{P_2}b_2a_2\right) (\mathrm{mod}\ 175)$$

$$x_0 \equiv \left(\frac{175}{25}\cdot 18\cdot 3 + \frac{175}{7}\cdot 2\cdot 1\right) (\mathrm{mod}\ 175)$$

$$x_0 \equiv 7\cdot 18\cdot 3 + 25\cdot 2\cdot 1 \ (\mathrm{mod}\ 175)$$

$$x_0 \equiv 378 + 50 \ (\mathrm{mod}\ 175)$$

$$x_0 \equiv 428 \ (\mathrm{mod}\ 175)$$

$$x_0 \equiv 78 \ (\mathrm{mod}\ 175)$$

c) $f(x) \equiv 8 \ (\mathrm{mod}\ 5^2)$

$f(x) \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 7)$

Diketahui: $a_1 = 8, a_2 = 1$

$P_1 = 5^2, P_2 = 7$

$P = 5^2 \cdot 7 = 175$

$(5^2, 7) = 1$

Kemudian

$$\frac{P}{P_1} = \frac{175}{25} = 7 \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{P}{P_2} = \frac{175}{7} = 25 \in \mathbb{Z}$$

Karena $\left(\frac{P}{P_1}, P_1\right) = \left(\frac{175}{25}, 25\right) = (7{,}25) = 1$ maka ada $b_1 \in \mathbb{Z}$ sehingga

$\left(\frac{P}{P_1}, P_1\right) = b_1(\text{mod } P_1)$ mempunyai satu selesaian yaitu

$$\frac{175}{25}\ b_1 \equiv 1 \ (\text{mod } 25)$$

$$7 \cdot\ b_1 \equiv 1 \ (\text{mod } 25)$$

$$b_1 = 18$$

Karena $\left(\frac{P}{P_2}, P_2\right) = \left(\frac{175}{7}, 7\right) = (25{,}7) = 1$ maka ada $b_2 \in \mathbb{Z}$ sehingga

$\left(\frac{P}{P_2}, P_2\right) = b_2(\text{mod } P_2)$ mempunyai satu selesaian yaitu

$$\frac{175}{7}\ b_2 \equiv 1 \ (\text{mod } 7)$$

$$25 \cdot\ b_2 \equiv 1 \ (\text{mod } 7)$$

$$b_2 = 2$$

Jika x_0 dinyatakan dalam modulo P_1, maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\frac{P}{P_1} b_1 a_1 \equiv \frac{175}{25} \cdot 18 \cdot 8$$

$$\equiv 7 \cdot 18 \cdot 8$$

$$\equiv 1.008 \equiv 8 \ (\text{mod } 25)$$

$$\frac{P}{P_2} b_2 a_2 \equiv \frac{175}{7} \cdot 2 \cdot 1$$

$$\equiv 25 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\equiv 50 \ \equiv 0 \pmod{25}$$

$$x_0 \equiv \frac{P}{P_1} b_1 a_1 \pmod{25} + \frac{P}{P_2} b_2 a_2 \pmod{25}$$

$$\equiv 8 \pmod{25} + 0 \pmod{25}$$

$$\equiv 8 \pmod{25}$$

$$\equiv a_1 \pmod{P_1}$$

Jika x_0 dinyatakan dalam modulo P_2, maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\frac{P}{P_1} b_1 a_1 \equiv \frac{175}{25} \cdot 18 \cdot 8$$

$$\equiv 7 \cdot 18 \cdot 8$$

$$\equiv 1.008 \equiv 0 \pmod{7}$$

$$\frac{P}{P_2} b_2 a_2 \equiv \frac{175}{7} \cdot 2 \cdot 1$$

$$\equiv 25 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\equiv 50 \ \equiv 1 \pmod{7}$$

$$x_0 \equiv \frac{P}{P_1} b_1 a_1 \pmod{7} + \frac{P}{P_2} b_2 a_2 \pmod{7}$$

$$\equiv 0 \pmod{7} + 1 \pmod{7}$$

$$\equiv 1 \pmod{7}$$

$$\equiv a_2 \pmod{P_2}$$

Karena x_0 memenuhi kongruensi pertama dan kedua, maka x_0 merupakan selesaian persekutuan yang secara simultan memenuhi semua kongruensi.

Maka:

$$x_0 \equiv \left(\frac{P}{P_1} b_1 a_1 + \frac{P}{P_2} b_2 a_2\right) \pmod{175}$$

$$x_0 \equiv \left(\frac{175}{25} \cdot 18 \cdot 8 + \frac{175}{7} \cdot 2 \cdot 1\right) \pmod{175}$$

$x_0 \equiv 7 \cdot 18 \cdot 8 + 25 \cdot 2 \cdot 1 \pmod{175}$

$x_0 \equiv 1008 + 50 \pmod{175}$

$x_0 \equiv 1058 \pmod{175}$

$x_0 \equiv 8 \pmod{175}$

d) $f(x) \equiv 13 \pmod{5^2}$

$f(x) \equiv 1 \pmod 7$
Diketahui: $a_1 = 13, a_2 = 1$

$P_1 = 5^2, P_2 = 7$

$P = 5^2 \cdot 7 = 175$

$(5^2, 7) = 1$

Kemudian

$$\frac{P}{P_1} = \frac{175}{25} = 7 \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{P}{P_2} = \frac{175}{7} = 25 \in \mathbb{Z}$$

Karena $\left(\frac{P}{P_1}, P_1\right) = \left(\frac{175}{25}, 25\right) = (7,25) = 1$ maka ada $b_1 \in \mathbb{Z}$ sehingga

$\left(\frac{P}{P_1}, P_1\right) = b_1 (\mathrm{mod}\ P_1)$ mempunyai satu selesaian yaitu

$\frac{175}{25}\ b_1 \equiv 1 \pmod{25}$

$7 \cdot\ b_1 \equiv 1 \pmod{25}$

$b_1 = 18$

Karena $\left(\frac{P}{P_2}, P_2\right) = \left(\frac{175}{7}, 7\right) = (25,7) = 1$ maka ada $b_2 \in \mathbb{Z}$ sehingga

$\left(\frac{P}{P_2}, P_2\right) = b_2 (\mathrm{mod}\ P_2)$ mempunyai satu selesaian yaitu

$\frac{175}{7}\ b_2 \equiv 1 \pmod 7$

$25 \cdot\ b_2 \equiv 1 \pmod 7$

$b_2 = 2$

Jika x_0 dinyatakan dalam modulo P_1, maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\frac{P}{P_1} b_1 a_1 \equiv \frac{175}{25} \cdot 18 \cdot 13$$

$$\equiv 7 \cdot 18 \cdot 13$$

$$\equiv 1.638 \equiv 13 \pmod{25}$$

$$\frac{P}{P_2} b_2 a_2 \equiv \frac{175}{7} \cdot 2 \cdot 1$$

$$\equiv 25 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\equiv 50\ \equiv 0 \pmod{25}$$

$$x_0 \equiv \frac{P}{P_1} b_1 a_1 \pmod{25} + \frac{P}{P_2} b_2 a_2 \pmod{25}$$

$$\equiv 13 \pmod{25} + 0 \pmod{25}$$

$$\equiv 13 \pmod{25}$$

$$\equiv a_1 \pmod{P_1}$$

Jika x_0 dinyatakan dalam modulo P_2, maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\frac{P}{P_1} b_1 a_1 \equiv \frac{175}{25} \cdot 18 \cdot 13$$

$$\equiv 7 \cdot 18 \cdot 13$$

$$\equiv 1.638 \equiv 0 \pmod 7$$

$$\frac{P}{P_2} b_2 a_2 \equiv \frac{175}{7} \cdot 2 \cdot 1$$

$$\equiv 25 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\equiv 50\ \equiv 1 \pmod 7$$

$$x_0 \equiv \frac{P}{P_1} b_1 a_1 \pmod 7 + \frac{P}{P_2} b_2 a_2 \pmod 7$$

$\equiv 0 \pmod 7 + 1 \pmod 7$

$\equiv 1 \pmod 7$

$\equiv a_2 \pmod{P_2}$

Karena x_0 memenuhi kongruensi pertama dan kedua, maka x_0 merupakan selesaian persekutuan yang secara simultan memenuhi semua kongruensi.

Maka:

$$x_0 \equiv \left(\frac{P}{P_1} b_1 a_1 + \frac{P}{P_2} b_2 a_2\right) \pmod{175}$$

$$x_0 \equiv \left(\frac{175}{25} \cdot 18 \cdot 13 + \frac{175}{7} \cdot 2 \cdot 1\right) \pmod{175}$$

$$x_0 \equiv 7 \cdot 18 \cdot 13 + 25 \cdot 2 \cdot 1 \pmod{175}$$

$$x_0 \equiv 1638 + 50 \pmod{175}$$

$$x_0 \equiv 1688 \pmod{175}$$

$$x_0 \equiv 113 \pmod{175}$$

e) $f(x) \equiv 18 \pmod{5^2}$

$f(x) \equiv 1 \pmod 7$

Diketahui: $a_1 = 18, a_2 = 1$

$P_1 = 5^2, P_2 = 7$

$P = 5^2 \cdot 7 = 175$

$(5^2, 7) = 1$

Kemudian

$$\frac{P}{P_1} = \frac{175}{25} = 7 \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{P}{P_2} = \frac{175}{7} = 25 \in \mathbb{Z}$$

Karena $\left(\frac{P}{P_1}, P_1\right) = \left(\frac{175}{25}, 25\right) = (7,25) = 1$ maka ada $b_1 \in \mathbb{Z}$ sehingga $\left(\frac{P}{P_1}, P_1\right) = b_1(\text{mod } P_1)$ mempunyai satu selesaian yaitu

$$\frac{175}{25}\ b_1 \equiv 1\ (\text{mod } 25)$$

$$7 \cdot\ b_1 \equiv 1\ (\text{mod } 25)$$

$$b_1 = 18$$

Karena $\left(\frac{P}{P_2}, P_2\right) = \left(\frac{175}{7}, 7\right) = (25,7) = 1$ maka ada $b_2 \in \mathbb{Z}$ sehingga $\left(\frac{P}{P_2}, P_2\right) = b_2(\text{mod } P_2)$ mempunyai satu selesaian yaitu

$$\frac{175}{7}\ b_2 \equiv 1\ (\text{mod } 7)$$

$$25 \cdot\ b_2 \equiv 1\ (\text{mod } 7)$$

$$b_2 = 2$$

Jika x_0 dinyatakan dalam modulo P_1, maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\frac{P}{P_1} b_1 a_1 \equiv \frac{175}{25} \cdot 18 \cdot 18$$

$$\equiv 7 \cdot 18 \cdot 18$$

$$\equiv 2.268 \equiv 18\ (\text{mod } 25)$$

$$\frac{P}{P_2} b_2 a_2 \equiv \frac{175}{7} \cdot 2 \cdot 1$$

$$\equiv 25 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\equiv 50\ \equiv 0\ (\text{mod } 25)$$

$$x_0 \equiv \frac{P}{P_1} b_1 a_1\ (\text{mod } 25) + \frac{P}{P_2} b_2 a_2\ (\text{mod } 25)$$

$$\equiv 18\ (\text{mod } 25) + 0\ (\text{mod } 25)$$

$$\equiv 18\ (\text{mod } 25)$$

$\equiv a_1 \pmod{P_1}$

Jika x_0 dinyatakan dalam modulo P_2, maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\frac{P}{P_1} b_1 a_1 \equiv \frac{175}{25} \cdot 18 \cdot 18$$

$$\equiv 7 \cdot 18 \cdot 18$$

$$\equiv 2.268 \equiv 0 \pmod{7}$$

$$\frac{P}{P_2} b_2 a_2 \equiv \frac{175}{7} \cdot 2 \cdot 1$$

$$\equiv 25 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\equiv 50 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$x_0 \equiv \frac{P}{P_1} b_1 a_1 \pmod{7} + \frac{P}{P_2} b_2 a_2 \pmod{7}$$

$$\equiv 0 \pmod{7} + 1 \pmod{7}$$

$$\equiv 1 \pmod{7}$$

$$\equiv a_2 \pmod{P_2}$$

Karena x_0 memenuhi kongruensi pertama dan kedua, maka x_0 merupakan selesaian persekutuan yang secara simultan memenuhi semua kongruensi.

Maka:

$$x_0 \equiv \left(\frac{P}{P_1} b_1 a_1 + \frac{P}{P_2} b_2 a_2\right) \pmod{175}$$

$$x_0 \equiv \left(\frac{175}{25} \cdot 18 \cdot 18 + \frac{175}{7} \cdot 2 \cdot 1\right) \pmod{175}$$

$$x_0 \equiv 7 \cdot 18 \cdot 18 + 25 \cdot 2 \cdot 1 \pmod{175}$$

$$x_0 \equiv 2268 + 50 \pmod{175}$$

$$x_0 \equiv 2318 \pmod{175}$$

$$x_0 \equiv 43 \pmod{175}$$

f) $f(x) \equiv 23 \pmod{5^2}$

$f(x) \equiv 1 \pmod 7$

Diketahui: $a_1 = 23, a_2 = 1$

$P_1 = 5^2, P_2 = 7$

$P = 5^2 \cdot 7 = 175$

$(5^2, 7) = 1$

Kemudian

$$\frac{P}{P_1} = \frac{175}{25} = 7 \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{P}{P_2} = \frac{175}{7} = 25 \in \mathbb{Z}$$

Karena $\left(\frac{P}{P_1}, P_1\right) = \left(\frac{175}{25}, 25\right) = (7{,}25) = 1$ maka ada $b_1 \in \mathbb{Z}$ sehingga $\left(\frac{P}{P_1}, P_1\right) = b_1 (\text{mod } P_1)$ mempunyai satu selesaian yaitu

$$\frac{175}{25}\ b_1 \equiv 1 \pmod{25}$$

$$7 \cdot\ b_1 \equiv 1 \pmod{25}$$

$$b_1 = 18$$

Karena $\left(\frac{P}{P_2}, P_2\right) = \left(\frac{175}{7}, 7\right) = (25{,}7) = 1$ maka ada $b_2 \in \mathbb{Z}$ sehingga $\left(\frac{P}{P_2}, P_2\right) = b_2 (\text{mod } P_2)$ mempunyai satu selesaian yaitu

$$\frac{175}{7}\ b_2 \equiv 1 \pmod 7$$

$$25 \cdot\ b_2 \equiv 1 \pmod 7$$

$$b_2 = 2$$

Jika x_0 dinyatakan dalam modulo P_1, maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\frac{P}{P_1}b_1a_1 \equiv \frac{175}{25} \cdot 18 \cdot 23$$

$$\equiv 7 \cdot 18 \cdot 23$$

$$\equiv 2.898 \equiv 23 \ (\text{mod } 25)$$

$$\frac{P}{P_2}b_2a_2 \equiv \frac{175}{7} \cdot 2 \cdot 1$$

$$\equiv 25 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\equiv 50 \ \equiv 0 \ (\text{mod } 25)$$

$$x_0 \equiv \frac{P}{P_1}b_1a_1 \ (\text{mod } 25) + \frac{P}{P_2}b_2a_2 \ (\text{mod } 25)$$

$$\equiv 23 \ (\text{mod } 25) + 0 \ (\text{mod } 25)$$

$$\equiv 23 \ (\text{mod } 25)$$

$$\equiv a_1 \ (\text{mod } P_1)$$

Jika x_0 dinyatakan dalam modulo P_2, maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\frac{P}{P_1}b_1a_1 \equiv \frac{175}{25} \cdot 18 \cdot 23$$

$$\equiv 7 \cdot 18 \cdot 23$$

$$\equiv 2.898 \equiv 0 \ (\text{mod } 7)$$

$$\frac{P}{P_2}b_2a_2 \equiv \frac{175}{7} \cdot 2 \cdot 1$$

$$\equiv 25 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\equiv 50 \ \equiv 1 \ (\text{mod } 7)$$

$$x_0 \equiv \frac{P}{P_1}b_1a_1 \ (\text{mod } 7) + \frac{P}{P_2}b_2a_2 \ (\text{mod } 7)$$

$$\equiv 0 \ (\text{mod } 7) + 1 \ (\text{mod } 7)$$

$$\equiv 1 \ (\text{mod } 7)$$

$$\equiv a_2 \ (\text{mod } P_2)$$

Karena x_0 memenuhi kongruensi pertama dan kedua, maka x_0 merupakan selesaian persekutuan yang secara simultan memenuhi semua kongruensi.

Maka:

$$x_0 \equiv \left(\frac{P}{P_1} b_1 a_1 + \frac{P}{P_2} b_2 a_2\right) (\text{mod } 175)$$

$$x_0 \equiv \left(\frac{175}{25} \cdot 18 \cdot 23 + \frac{175}{7} \cdot 2 \cdot 1\right) (\text{mod } 175)$$

$$x_0 \equiv 7 \cdot 18 \cdot 23 + 25 \cdot 2 \cdot 1 \ (\text{mod } 175)$$

$$x_0 \equiv 2898 + 50 \ (\text{mod } 175)$$

$$x_0 \equiv 2948 \ (\text{mod } 175)$$

$$x_0 \equiv 148 \ (\text{mod } 175)$$

g) $f(x) \equiv 1 \ (\text{mod } 5^2)$

$f(x) \equiv 5 \ (\text{mod } 7)$

Diketahui: $a_1 = 1, a_2 = 5$

$P_1 = 5^2, P_2 = 7$

$P = 5^2 \cdot 7 = 175$

$(5^2, 7) = 1$

Kemudian

$$\frac{P}{P_1} = \frac{175}{25} = 7 \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{P}{P_2} = \frac{175}{7} = 25 \in \mathbb{Z}$$

Karena $\left(\frac{P}{P_1}, P_1\right) = \left(\frac{175}{25}, 25\right) = (7{,}25) = 1$ maka ada $b_1 \in \mathbb{Z}$ sehingga $\left(\frac{P}{P_1}, P_1\right) = b_1 (\text{mod } P_1)$ mempunyai satu selesaian yaitu

$$\frac{175}{25}\ b_1 \equiv 1 \ (\text{mod } 25)$$

$7 \cdot\ b_1 \equiv 1 \text{ (mod 25)}$

$b_1 = 18$

Karena $\left(\frac{P}{P_2}, P_2\right) = \left(\frac{175}{7}, 7\right) = (25,7) = 1$ maka ada $b_2 \in \mathbb{Z}$ sehingga

$\left(\frac{P}{P_2}, P_2\right) = b_2 (\text{mod } P_2)$ mempunyai satu selesaian yaitu

$$\frac{175}{7}\ b_2 \equiv 1 \text{ (mod 7)}$$

$$25 \cdot\ b_2 \equiv 1 \text{ (mod 7)}$$

$$b_2 = 2$$

Jika x_0 dinyatakan dalam modulo P_1, maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\frac{P}{P_1} b_1 a_1 \equiv \frac{175}{25} \cdot 18 \cdot 1$$

$$\equiv 7 \cdot 18 \cdot 1$$

$$\equiv 126\ \equiv 1 \text{ (mod 25)}$$

$$\frac{P}{P_2} b_2 a_2 \equiv \frac{175}{7} \cdot 2 \cdot 5$$

$$\equiv 25 \cdot 2 \cdot 5$$

$$\equiv 250\ \equiv 0 \text{ (mod 25)}$$

$$x_0 \equiv \frac{P}{P_1} b_1 a_1 \text{ (mod 25)} + \frac{P}{P_2} b_2 a_2 \text{ (mod 25)}$$

$$\equiv 1 \text{ (mod 25)} + 0 \text{ (mod 25)}$$

$$\equiv 1 \text{ (mod 25)}$$

$$\equiv a_1 \text{ (mod } P_1)$$

Jika x_0 dinyatakan dalam modulo P_2, maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\frac{P}{P_1} b_1 a_1 \equiv \frac{175}{25} \cdot 18 \cdot 1$$

$$\equiv 7 \cdot 18 \cdot 1$$

$$\equiv 126 \equiv 0 \pmod 7$$

$$\frac{P}{P_2} b_2 a_2 \equiv \frac{175}{7} \cdot 2 \cdot 5$$

$$\equiv 25 \cdot 2 \cdot 5$$

$$\equiv 250 \equiv 5 \pmod 7$$

$$x_0 \equiv \frac{P}{P_1} b_1 a_1 \pmod 7 + \frac{P}{P_2} b_2 a_2 \pmod 7$$

$$\equiv 0 \pmod 7 + 5 \pmod 7$$

$$\equiv 5 \pmod 7$$

$$\equiv a_2 \pmod{P_2}$$

Karena x_0 memenuhi kongruensi pertama dan kedua, maka x_0 merupakan selesaian persekutuan yang secara simultan memenuhi semua kongruensi.

Maka:

$$x_0 \equiv \left(\frac{P}{P_1} b_1 a_1 + \frac{P}{P_2} b_2 a_2\right) \pmod{175}$$

$$x_0 \equiv \left(\frac{175}{25} \cdot 18 \cdot 1 + \frac{175}{7} \cdot 2 \cdot 5\right) \pmod{175}$$

$$x_0 \equiv 7 \cdot 18 \cdot 1 + 25 \cdot 2 \cdot 5 \pmod{175}$$

$$x_0 \equiv 126 + 250 \pmod{175}$$

$$x_0 \equiv 376 \pmod{175}$$

$$x_0 \equiv 26 \pmod{175}$$

h) $f(x) \equiv 3 \pmod{5^2}$

$f(x) \equiv 5 \pmod 7$

Diketahui: $a_1 = 3, a_2 = 5$

$P_1 = 5^2, P_2 = 7$

$P = 5^2 \cdot 7 = 175$

$$(5^2, 7) = 1$$

Kemudian

$$\frac{P}{P_1} = \frac{175}{25} = 7 \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{P}{P_2} = \frac{175}{7} = 25 \in \mathbb{Z}$$

Karena $\left(\frac{P}{P_1}, P_1\right) = \left(\frac{175}{25}, 25\right) = (7,25) = 1$ maka ada $b_1 \in \mathbb{Z}$ sehingga $\left(\frac{P}{P_1}, P_1\right) = b_1(\text{mod } P_1)$ mempunyai satu selesaian yaitu

$$\frac{175}{25}\ b_1 \equiv 1 \ (\text{mod } 25)$$

$$7 \cdot\ b_1 \equiv 1 \ (\text{mod } 25)$$

$$b_1 = 18$$

Karena $\left(\frac{P}{P_2}, P_2\right) = \left(\frac{175}{7}, 7\right) = (25,7) = 1$ maka ada $b_2 \in \mathbb{Z}$ sehingga $\left(\frac{P}{P_2}, P_2\right) = b_2(\text{mod } P_2)$ mempunyai satu selesaian yaitu

$$\frac{175}{7}\ b_2 \equiv 1 \ (\text{mod } 7)$$

$$25 \cdot\ b_2 \equiv 1 \ (\text{mod } 7)$$

$$b_2 = 2$$

Jika x_0 dinyatakan dalam modulo P_1, maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\frac{P}{P_1} b_1 a_1 \equiv \frac{175}{25} \cdot 18 \cdot 3$$

$$\equiv 7 \cdot 18 \cdot 3$$

$$\equiv 378 \ \equiv 3 \ (\text{mod } 25)$$

$$\frac{P}{P_2} b_2 a_2 \equiv \frac{175}{7} \cdot 2 \cdot 5$$

$$\equiv 25 \cdot 2 \cdot 5$$

$$\equiv 250 \;\equiv 0 \pmod{25}$$

$$x_0 \equiv \frac{P}{P_1} b_1 a_1 \pmod{25} + \frac{P}{P_2} b_2 a_2 \pmod{25}$$

$$\equiv 3 \pmod{25} + 0 \pmod{25}$$

$$\equiv 3 \pmod{25}$$

$$\equiv a_1 \pmod{P_1}$$

Jika x_0 dinyatakan dalam modulo P_2, maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\frac{P}{P_1} b_1 a_1 \equiv \frac{175}{25} \cdot 18 \cdot 3$$

$$\equiv 7 \cdot 18 \cdot 3$$

$$\equiv 378 \;\equiv 0 \pmod{7}$$

$$\frac{P}{P_2} b_2 a_2 \equiv \frac{175}{7} \cdot 2 \cdot 5$$

$$\equiv 25 \cdot 2 \cdot 5$$

$$\equiv 250 \;\equiv 5 \pmod{7}$$

$$x_0 \equiv \frac{P}{P_1} b_1 a_1 \pmod{7} + \frac{P}{P_2} b_2 a_2 \pmod{7}$$

$$\equiv 0 \pmod{7} + 5 \pmod{7}$$

$$\equiv 5 \pmod{7}$$

$$\equiv a_2 \pmod{P_2}$$

Karena x_0 memenuhi kongruensi pertama dan kedua, maka x_0 merupakan selesaian persekutuan yang secara simultan memenuhi semua kongruensi.

Maka:

$$x_0 \equiv \left(\frac{P}{P_1} b_1 a_1 + \frac{P}{P_2} b_2 a_2\right) \pmod{175}$$

$$x_0 \equiv \left(\frac{175}{25} \cdot 18 \cdot 3 + \frac{175}{7} \cdot 2 \cdot 5\right) (\text{mod } 175)$$

$$x_0 \equiv 7 \cdot 18 \cdot 3 + 25 \cdot 2 \cdot 5 \ (\text{mod } 175)$$

$$x_0 \equiv 378 + 250 \ (\text{mod } 175)$$

$$x_0 \equiv 628 \ (\text{mod } 175)$$

$$x_0 \equiv 103 \ (\text{mod } 175)$$

i) $f(x) \equiv 8 \ (\text{mod } 5^2)$

$f(x) \equiv 5 \ (\text{mod } 7)$

Diketahui: $a_1 = 8, a_2 = 5$

$$P_1 = 5^2, P_2 = 7$$

$$P = 5^2 \cdot 7 = 175$$

$$(5^2, 7) = 1$$

Kemudian

$$\frac{P}{P_1} = \frac{175}{25} = 7 \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{P}{P_2} = \frac{175}{7} = 25 \in \mathbb{Z}$$

Karena $\left(\frac{P}{P_1}, P_1\right) = \left(\frac{175}{25}, 25\right) = (7,25) = 1$ maka ada $b_1 \in \mathbb{Z}$ sehingga

$\left(\frac{P}{P_1}, P_1\right) = b_1 (\text{mod } P_1)$ mempunyai satu selesaian yaitu

$$\frac{175}{25} \ b_1 \equiv 1 \ (\text{mod } 25)$$

$$7 \cdot \ b_1 \equiv 1 \ (\text{mod } 25)$$

$$b_1 = 18$$

Karena $\left(\frac{P}{P_2}, P_2\right) = \left(\frac{175}{7}, 7\right) = (25,7) = 1$ maka ada $b_2 \in \mathbb{Z}$ sehingga

$\left(\frac{P}{P_2}, P_2\right) = b_2 (\text{mod } P_2)$ mempunyai satu selesaian yaitu

$$\frac{175}{7}\ b_2 \equiv 1 \pmod 7$$

$$25 \cdot\ b_2 \equiv 1 \pmod 7$$

$$b_2 = 2$$

Jika x_0 dinyatakan dalam modulo P_1, maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\frac{P}{P_1} b_1 a_1 \equiv \frac{175}{25} \cdot 18 \cdot 8$$

$$\equiv 7 \cdot 18 \cdot 8$$

$$\equiv 1.008 \equiv 8 \pmod{25}$$

$$\frac{P}{P_2} b_2 a_2 \equiv \frac{175}{7} \cdot 2 \cdot 5$$

$$\equiv 25 \cdot 2 \cdot 5$$

$$\equiv 250\ \equiv 0 \pmod{25}$$

$$x_0 \equiv \frac{P}{P_1} b_1 a_1 \pmod{25} + \frac{P}{P_2} b_2 a_2 \pmod{25}$$

$$\equiv 8 \pmod{25} + 0 \pmod{25}$$

$$\equiv 8 \pmod{25}$$

$$\equiv a_1 \pmod{P_1}$$

Jika x_0 dinyatakan dalam modulo P_2, maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\frac{P}{P_1} b_1 a_1 \equiv \frac{175}{25} \cdot 18 \cdot 8$$

$$\equiv 7 \cdot 18 \cdot 8$$

$$\equiv 1.008 \equiv 0 \pmod 7$$

$$\frac{P}{P_2} b_2 a_2 \equiv \frac{175}{7} \cdot 2 \cdot 5$$

$$\equiv 25 \cdot 2 \cdot 5$$

$$\equiv 250\ \equiv 5 \pmod 7$$

$$x_0 \equiv \frac{P}{P_1} b_1 a_1 \pmod 7 + \frac{P}{P_2} b_2 a_2 \pmod 7$$

$$\equiv 0 \pmod 7 + 5 \pmod 7$$

$$\equiv 5 \pmod 7$$

$$\equiv a_2 \pmod{P_2}$$

Karena x_0 memenuhi kongruensi pertama dan kedua, maka x_0 merupakan selesaian persekutuan yang secara simultan memenuhi semua kongruensi.

Maka:

$$x_0 \equiv \left(\frac{P}{P_1} b_1 a_1 + \frac{P}{P_2} b_2 a_2\right) \pmod{175}$$

$$x_0 \equiv \left(\frac{175}{25} \cdot 18 \cdot 8 + \frac{175}{7} \cdot 2 \cdot 5\right) \pmod{175}$$

$$x_0 \equiv 7 \cdot 18 \cdot 8 + 25 \cdot 2 \cdot 5 \pmod{175}$$

$$x_0 \equiv 1008 + 250 \pmod{175}$$

$$x_0 \equiv 1258 \pmod{175}$$

$$x_0 \equiv 33 \pmod{175}$$

j) $f(x) \equiv 13 \pmod{5^2}$

$f(x) \equiv 5 \pmod 7$

Diketahui: $a_1 = 13, a_2 = 5$

$P_1 = 5^2, P_2 = 7$

$P = 5^2 \cdot 7 = 175$

$(5^2, 7) = 1$

Kemudian

$$\frac{P}{P_1} = \frac{175}{25} = 7 \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{P}{P_2} = \frac{175}{7} = 25 \in \mathbb{Z}$$

Karena $\left(\frac{P}{P_1}, P_1\right) = \left(\frac{175}{25}, 25\right) = (7,25) = 1$ maka ada $b_1 \in \mathbb{Z}$ sehingga

$\left(\frac{P}{P_1}, P_1\right) = b_1 (\text{mod } P_1)$ mempunyai satu selesaian yaitu

$$\frac{175}{25}\ b_1 \equiv 1\ (\text{mod } 25)$$

$$7 \cdot\ b_1 \equiv 1\ (\text{mod } 25)$$

$$b_1 = 18$$

Karena $\left(\frac{P}{P_2}, P_2\right) = \left(\frac{175}{7}, 7\right) = (25,7) = 1$ maka ada $b_2 \in \mathbb{Z}$ sehingga

$\left(\frac{P}{P_2}, P_2\right) = b_2 (\text{mod } P_2)$ mempunyai satu selesaian yaitu

$$\frac{175}{7}\ b_2 \equiv 1\ (\text{mod } 7)$$

$$25 \cdot\ b_2 \equiv 1\ (\text{mod } 7)$$

$$b_2 = 2$$

Jika x_0 dinyatakan dalam modulo P_1, maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\frac{P}{P_1} b_1 a_1 \equiv \frac{175}{25} \cdot 18 \cdot 13$$

$$\equiv 7 \cdot 18 \cdot 13$$

$$\equiv 1.638 \equiv 13\ (\text{mod } 25)$$

$$\frac{P}{P_2} b_2 a_2 \equiv \frac{175}{7} \cdot 2 \cdot 5$$

$$\equiv 25 \cdot 2 \cdot 5$$

$$\equiv 250\ \equiv 0\ (\text{mod } 25)$$

$$x_0 \equiv \frac{P}{P_1} b_1 a_1\ (\text{mod } 25) + \frac{P}{P_2} b_2 a_2\ (\text{mod } 25)$$

$$\equiv 13\ (\text{mod } 25) + 0\ (\text{mod } 25)$$

$$\equiv 13\ (\text{mod } 25)$$

$$\equiv a_1 \text{ (mod } P_1)$$

Jika x_0 dinyatakan dalam modulo P_2, maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\frac{P}{P_1} b_1 a_1 \equiv \frac{175}{25} \cdot 18 \cdot 13$$

$$\equiv 7 \cdot 18 \cdot 13$$

$$\equiv 1.638 \equiv 0 \text{ (mod 7)}$$

$$\frac{P}{P_2} b_2 a_2 \equiv \frac{175}{7} \cdot 2 \cdot 5$$

$$\equiv 25 \cdot 2 \cdot 5$$

$$\equiv 250 \ \equiv 5 \text{ (mod 7)}$$

$$x_0 \equiv \frac{P}{P_1} b_1 a_1 \text{ (mod 7)} + \frac{P}{P_2} b_2 a_2 \text{ (mod 7)}$$

$$\equiv 0 \text{ (mod 7)} + 5 \text{ (mod 7)}$$

$$\equiv 5 \text{ (mod 7)}$$

$$\equiv a_2 \text{ (mod } P_2)$$

Karena x_0 memenuhi kongruensi pertama dan kedua, maka x_0 merupakan selesaian persekutuan yang secara simultan memenuhi semua kongruensi.

Maka:

$$x_0 \equiv \left(\frac{P}{P_1} b_1 a_1 + \frac{P}{P_2} b_2 a_2\right) \text{ (mod 175)}$$

$$x_0 \equiv \left(\frac{175}{25} \cdot 18 \cdot 13 + \frac{175}{7} \cdot 2 \cdot 5\right) \text{ (mod 175)}$$

$$x_0 \equiv 7 \cdot 18 \cdot 13 + 25 \cdot 2 \cdot 5 \text{ (mod 175)}$$

$$x_0 \equiv 1.638 + 250 \text{ (mod 175)}$$

$$x_0 \equiv 1.888 \text{ (mod 175)}$$

$$x_0 \equiv 138 \text{ (mod 175)}$$

k) $f(x) \equiv 18 \pmod{5^2}$

$f(x) \equiv 5 \pmod{7}$

Diketahui: $a_1 = 18, a_2 = 5$

$P_1 = 5^2, P_2 = 7$

$P = 5^2 \cdot 7 = 175$

$(5^2, 7) = 1$

Kemudian

$$\frac{P}{P_1} = \frac{175}{25} = 7 \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{P}{P_2} = \frac{175}{7} = 25 \in \mathbb{Z}$$

Karena $\left(\frac{P}{P_1}, P_1\right) = \left(\frac{175}{25}, 25\right) = (7{,}25) = 1$ maka ada $b_1 \in \mathbb{Z}$ sehingga

$\left(\frac{P}{P_1}, P_1\right) = b_1 (\text{mod } P_1)$ mempunyai satu selesaian yaitu

$\frac{175}{25}\ b_1 \equiv 1 \pmod{25}$

$7 \cdot\ b_1 \equiv 1 \pmod{25}$

$b_1 = 18$

Karena $\left(\frac{P}{P_2}, P_2\right) = \left(\frac{175}{7}, 7\right) = (25{,}7) = 1$ maka ada $b_2 \in \mathbb{Z}$ sehingga

$\left(\frac{P}{P_2}, P_2\right) = b_2 (\text{mod } P_2)$ mempunyai satu selesaian yaitu

$\frac{175}{7}\ b_2 \equiv 1 \pmod{7}$

$25 \cdot\ b_2 \equiv 1 \pmod{7}$

$b_2 = 2$

Jika x_0 dinyatakan dalam modulo P_1, maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\frac{P}{P_1} b_1 a_1 \equiv \frac{175}{25} \cdot 18 \cdot 18$$

$$\equiv 7 \cdot 18 \cdot 18$$

$$\equiv 2.268 \equiv 18 \pmod{25}$$

$$\frac{P}{P_2} b_2 a_2 \equiv \frac{175}{7} \cdot 2 \cdot 5$$

$$\equiv 25 \cdot 2 \cdot 5$$

$$\equiv 250 \;\equiv 0 \pmod{25}$$

$$x_0 \equiv \frac{P}{P_1} b_1 a_1 \pmod{25} + \frac{P}{P_2} b_2 a_2 \pmod{25}$$

$$\equiv 18 \pmod{25} + 0 \pmod{25}$$

$$\equiv 18 \pmod{25}$$

$$\equiv a_1 \pmod{P_1}$$

Jika x_0 dinyatakan dalam modulo P_2, maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\frac{P}{P_1} b_1 a_1 \equiv \frac{175}{25} \cdot 18 \cdot 18$$

$$\equiv 7 \cdot 18 \cdot 18$$

$$\equiv 2.268 \equiv 0 \pmod{7}$$

$$\frac{P}{P_2} b_2 a_2 \equiv \frac{175}{7} \cdot 2 \cdot 5$$

$$\equiv 25 \cdot 2 \cdot 5$$

$$\equiv 250 \;\equiv 5 \pmod{7}$$

$$x_0 \equiv \frac{P}{P_1} b_1 a_1 \pmod{7} + \frac{P}{P_2} b_2 a_2 \pmod{7}$$

$$\equiv 0 \pmod{7} + 5 \pmod{7}$$

$$\equiv 5 \pmod{7}$$

$$\equiv a_2 \pmod{P_2}$$

Karena x_0 memenuhi kongruensi pertama dan kedua, maka x_0 merupakan selesaian persekutuan yang secara simultan memenuhi semua kongruensi.

Maka:

$$x_0 \equiv \left(\frac{P}{P_1} b_1 a_1 + \frac{P}{P_2} b_2 a_2\right) (\text{mod } 175)$$

$$x_0 = \left(\frac{175}{25} \cdot 18 \cdot 18 + \frac{175}{7} \cdot 2 \cdot 5\right) (\text{mod } 175)$$

$$x_0 \equiv 7 \cdot 18 \cdot 18 + 25 \cdot 2 \cdot 5 \ (\text{mod } 175)$$

$$x_0 \equiv 2.268 + 250 \ (\text{mod } 175)$$

$$x_0 \equiv 2.518 \ (\text{mod } 175)$$

$$x_0 \equiv 68 \ (\text{mod } 175)$$

l) $f(x) \equiv 23 \ (\text{mod } 5^2)$

$f(x) \equiv 5 \ (\text{mod } 7)$

Diketahui: $a_1 = 23, a_2 = 5$

$P_1 = 5^2, P_2 = 7$

$P = 5^2 \cdot 7 = 175$

$(5^2, 7) = 1$

Kemudian

$$\frac{P}{P_1} = \frac{175}{25} = 7 \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{P}{P_2} = \frac{175}{7} = 25 \in \mathbb{Z}$$

Karena $\left(\frac{P}{P_1}, P_1\right) = \left(\frac{175}{25}, 25\right) = (7,25) = 1$ maka ada $b_1 \in \mathbb{Z}$ sehingga

$\left(\frac{P}{P_1}, P_1\right) = b_1 (\text{mod } P_1)$ mempunyai satu selesaian yaitu

$$\frac{175}{25}\ b_1 \equiv 1 \ (\text{mod } 25)$$

$7 \cdot b_1 \equiv 1 \pmod{25}$

$b_1 = 18$

Karena $\left(\frac{P}{P_2}, P_2\right) = \left(\frac{175}{7}, 7\right) = (25,7) = 1$ maka ada $b_2 \in \mathbb{Z}$ sehingga

$\left(\frac{P}{P_2}, P_2\right) = b_2 (\text{mod } P_2)$ mempunyai satu selesaian yaitu

$\frac{175}{7}\, b_2 \equiv 1 \pmod{7}$

$25 \cdot b_2 \equiv 1 \pmod{7}$

$b_2 = 2$

Jika x_0 dinyatakan dalam modulo P_1, maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\frac{P}{P_1} b_1 a_1 \equiv \frac{175}{25} \cdot 18 \cdot 23$$

$$\equiv 7 \cdot 18 \cdot 23$$

$$\equiv 2.898 \equiv 23 \pmod{25}$$

$$\frac{P}{P_2} b_2 a_2 \equiv \frac{175}{7} \cdot 2 \cdot 5$$

$$\equiv 25 \cdot 2 \cdot 5$$

$$\equiv 250 \equiv 0 \pmod{25}$$

$$x_0 \equiv \frac{P}{P_1} b_1 a_1 \pmod{25} + \frac{P}{P_2} b_2 a_2 \pmod{25}$$

$$\equiv 23 \pmod{25} + 0 \pmod{25}$$

$$\equiv 23 \pmod{25}$$

$$\equiv a_1 (\text{mod } P_1)$$

Jika x_0 dinyatakan dalam modulo P_2, maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\frac{P}{P_1} b_1 a_1 \equiv \frac{175}{25} \cdot 18 \cdot 23$$

$$\equiv 7 \cdot 18 \cdot 23$$

$$\equiv 2.898 \equiv 0 \pmod 7$$

$$\frac{P}{P_2} b_2 a_2 \equiv \frac{175}{7} \cdot 2 \cdot 5$$

$$\equiv 25 \cdot 2 \cdot 5$$

$$\equiv 250 \ \equiv 5 \pmod 7$$

$$x_0 \equiv \frac{P}{P_1} b_1 a_1 \pmod 7 + \frac{P}{P_2} b_2 a_2 \pmod 7$$

$$\equiv 0 \pmod 7 + 5 \pmod 7$$

$$\equiv 5 \pmod 7$$

$$\equiv a_2 \pmod{P_2}$$

Karena x_0 memenuhi kongruensi pertama dan kedua, maka x_0 merupakan selesaian persekutuan yang secara simultan memenuhi semua kongruensi.

Maka:

$$x_0 \equiv \left(\frac{P}{P_1} b_1 a_1 + \frac{P}{P_2} b_2 a_2\right) \pmod{175}$$

$$x_0 \equiv \left(\frac{175}{25} \cdot 18 \cdot 23 + \frac{175}{7} \cdot 2 \cdot 5\right) \pmod{175}$$

$$x_0 \equiv 7 \cdot 18 \cdot 23 + 25 \cdot 2 \cdot 5 \pmod{175}$$

$$x_0 \equiv 2898 + 250 \pmod{175}$$

$$x_0 \equiv 3148 \pmod{175}$$

$$x_0 \equiv 173 \pmod{175}$$

Jadi selesaian dari $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4 \equiv 0 \pmod{175}$ adalah $x \equiv 3,813,18,23 \pmod{25}$ dan $x \equiv 1,5 \pmod 7$ maka dengan menggunakan Teorema Sisa China *(Chinese Remainder Theorem)* dapat diperoleh masing-masing selesaian tunggalnya sebagai berikut

$x_0 \equiv 1,78,8,113,43,148,26,103,33,138,68,173 \pmod{175}$.

4.3 Keyakinan untuk Menyelesaikan Masalah dalam Islam

Islam adalah agama yang mengatasi dan melintasi waktu, karena sistem nilai yang ada di dalamnya adalah mutlak. Kebenaran nilai islam bukan hanya untuk masa dahulu, tetapi juga untuk masa sekarang bahkan masa yang akan datang, sehingga nilai-nilai dalam islam berlaku sepanjang masa. Dalam penelitian ini, juga terdapat beberapa kajian ilmu matematika khususnya ilmu teori bilangan dan aljabar, yaitu mengenai kajian kongruensi polinomial modulo prima. Berdasarkan pembahasan, dapat diketahui bahwa terdapat beberapa tahapan atau proses dalam menyelesaikan kongruensi polinomial modulo prima adalah bertujuan untuk mempermudah dalam menyelesaikan kongruensi polinomial tersebut. Jika dikaitkan dengan agama islam, hal ini dapat direlevansikan dengan al-Quran yang menyebutkan bahwa al-Quran diturunkan untuk mempermudah. Sebagaimana yang tertera pada surat at Thaha/20:2-3:

مَآ أَنزَلْنَا عَلَيْكَ ٱلْقُرْءَانَ لِتَشْقَىٰٓ ﴿٢﴾ إِلَّا تَذْكِرَةً لِّمَن يَخْشَىٰ ﴿٣﴾

"Kami tidak menurunkan al-Quran ini kepadamu agar kamu menjadi susah, tetapi sebagai peringatan bagi orang yang takut (kepada Allah)"(QS. at-Thaha/20:2-3).

Ayat di atas menceritakan bahwa Allah tidaklah membuat kesusahan dengan diturunkannya al-Quran, tetapi Allah menurunkan al-Quran sebagai kemudahan untuk memberi peringatan kepada manusia. Seperti yang telah dijelaskan dalam bab-bab sebelumnya bahwa dalam menyelesaikan kongruensi polinomial modulo prima terdapat banyak tahapan. Allah tidak memberikan suatu masalah atau ujian sebagaimana melebihi kemampuan umatnya. Dan setiap ujian atau masalah yang telah diberikan kepadanya, Allah telah memberikan petunjuk kepada umatnya untuk menyelesaikannya.

Dijelaskan pula pada surat Al Baqarah/2:286 sebagai berikut:

لَا يُكَلِّفُ ٱللَّهُ نَفۡسًا إِلَّا وُسۡعَهَاۚ لَهَا مَا كَسَبَتۡ وَعَلَيۡهَا مَا ٱكۡتَسَبَتۡۗ ... ﴿٢٨٦﴾

"Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya. Ia mendapat pahala (dari kebaikan) yang diusahakannya dan ia mendapat siksa (dari kejahatannya) yang dikerjakannya…" (QS. Al-Baqarah/2:286)

Dengan kata lain, seseorang tidak dibebani melainkan sebatas kemampuannya. Hal ini merupakan salah satu dari lemah lembut Allah kepada makhluk-Nya dan kasih sayang-Nya kepada manusia, serta kebaikan-Nya kepada manusia. Maka hendaklah perbanyak bersyukur, karena betapa melimpahnya kenikmatan yang Allah berikan kepada manusia, yang tidak terhingga jumlahnya. Allah memberikan kehidupan, kesehatan dan begitu banyak nikmat yang lainnya. Allah tidak pernah memberikan ujian kepada hamba-Nya jika Allah tidak mengetahui batas kemampuan hamba-Nya tersebut. Allah maha tahu akan segala ciptaan-Nya, baik itu yang ukurannya besar maupun yang terkecil sekalipun. Tidak satupun dari itu yang luput dari pandangan dan rencana-Nya. Tidak pernah sekalipun rencana Allah meleset dari tujuan awalnya. Begitupun dengan manusia, Allah lebih tahu akan kemampuan dan kapasitas manusia sebagai makhluk ciptaan-Nya dibandingkan manusia itu sendiri. Maka, jika manusia merasa tidak sanggup melaksanakan sesuatu atau mendapat tugas dan amanah yang banyak, Allah-lah tempat mengadu dan yang dapat melapangkan hati manusia, karena Allah yang lebih mengetahui kapasitas kemampuan manusia dalam menyelesaikan dan mengerjakan sesuatu.

Allah berfirman dalam surat al-Insyiraah/94:6 sebagai berikut:

إِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرًا ﴿٦﴾

"Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan." (QS. al-Insyiraah/94:6)

Bahkan dalam kesulitan itu sendiri ada kemudahan, dan kesulitan akan terjadi terus menerus, berulang-ulang, kesulitan senantiasa disertai kemudahan, dalam susah ada mudahnya, dalam sempit ada lapangnya. Bahaya yang mengancam adalah menjadi sebab akal berjalan, fikiran mencari jalan keluar. Oleh sebab itu dapatlah diyakini bahwa kesulitan, kesempitan, marabahaya yang mengancam dan berbagai macam pengalaman hidup yang pahit, dapat menyebabkan manusia bertambah cerdas menghadapi semuanya.

Jadi dapat disimpulkan bahwa ayat-ayat di atas sangat relevan jika dikaitkan dengan penentuan selesaian kongruensi polinomial dengan modulo prima, begitu banyak kesulitan dan rintangan untuk mendapatkan selesaiannya. Begitu juga Allah yang telah menunjukkan banyak hal untuk memperlihatkan kekuasaan-Nya dan banyak hal juga untuk menjadikan segalanya menjadi mudah.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada Bab IV, maka dapat diambil kesimpulan bahwa kongruensi polinomial dari $f(x) \equiv a \ (\text{mod}\ P),\ \forall\, x \in \mathbb{Z}$ dengan $P = \{P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot P_r^{\alpha_r}\}$, dimana $P_1, P_2, \ldots, P_r$ adalah bilangan prima yang berbeda, dan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ adalah bilangan bulat positif, dan $f(x)$ adalah suatu polinomial yang koefisien-koefisiennya konstan dan nilai-nilai x memenuhi persamaan $f(x) \equiv 0 \ (\text{mod}\ P)$, ada yang memiliki selesaian dan ada yang tidak memiliki selesaian, bergantung pada koefisien masing-masing variabel.

Kongruensi yang mempunyai selesaian ada yang memiliki satu selesaian dan ada yang memiliki lebih dari satu selesaian. Sistem kongruensi yang memiliki lebih dari satu selesaian seringkali dilakukan secara simultan untuk mencari suatu selesaian yang memenuhi sejumlah kongruensi linier. ini berarti, dari beberapa kongruensi linier akan dicari selesaian yang memenuhi masing-masing kongruensi linier tersebut dengan menerapkan teorema sisa China *(Chinese Remainder Theorem)* untuk mendapatkan selesaian yang tunggal.

Kongruensi linier dalam sistem yang simultan dapat diselidiki dan ditentukan hanya jika $(P_i, Pj) = 1$, untuk $i \neq j$. Maka kongruensi simultan mempunyai selesaian persekutuan tunggal sebagai berikut:

$$x \equiv \sum_{i=1}^{r} \frac{P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} P_3^{\alpha_3} \ldots\ P_r^{\alpha_r}}{P_i} b_i a_i (\text{mod}\ [P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} P_3^{\alpha_3} \ldots\ P_r^{\alpha_r}])$$

5.2 Saran

Pada skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pada pokok bahasan mengenai penyelesaian kongruensi dari persamaan suatu polinomial dengan menggunakan modulo yang tidak relatif prima. Maka dari itu, untuk penulisan selanjutnya, penulis menyarankan untuk mengkaji sistem kongruensi polinomial secara lebih efisien atau menggunakan pemrograman.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2009. *Matematika 1 Kajian Integratif Matematika & Al-Qur'an*. Malang: UIN-Malang Press

Kasir,A.A.I. 2000. *Tafsir Ibnu Kasir Juz 3.* Bandung: Sinar Baru Algensindo Offset.

Imani, A.K.F. 2006. *Tafsir Nurul Quran Jilid 3.* Jakarta: Al-Huda.

Irawan, W.H., Hijriyah, N. 2014. *Pengantar Teori Bilangan*. Malang: UIN-Malang Press.

Katsir. 2007. *Tafsir Ibnu Katsir jilid 5.* Bogor: Pustaka Imam Syafi'i.

Muhsetyo, G. 1997. *Dasar-dasar Teori Bilangan.* Jakarta: PGSM.

Munir, R. 2012. *Matematika Diskrit.* Bandung: Informatika Bandung.

Quthb, Sayyid. 2000. *Tafsir Fi Zhilalil Qur'an jilid 1.* Jakarta: Gema Insani Press.

Zuhroh, M. 2011. *Menyelesaikan Kongruensi Linier Simultan Satu Variabel.* Malang: Skripsi Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

RIWAYAT HIDUP

Ani Afidatul Khusnah, lahir di kabupaten Jember Propinsi Jawa Timur pada tanggal 5 Mei 1991, biasa dipanggil fifi, putri pertama dari bapak Drs. Maksar Syam dan ibu Siti Rosidatul Khusnah, memiliki dua adik perempuan, yang pertama Feni Umi Nur Azizah dan yang kedua Nadia Putri Rahmawati. Penulis bertempat tinggal di Jl. Gajayana Gg.V no. 629D Kecamatan Lowokwaru Kabupaten Malang.

Dia menyelesaikan pendidikan dasar di MIMA 39 YASPPIBIS Desa Ampel Kecamatan Wuluhan Kabupaten Jember dan lulus pada tahun 2003, setelah itu melanjutkan ke Mts. Al-Ma'arif YASPPIBIS Kecamatan Wuluhan Kabupaten Jember dan lulus pada tahun 2006, kemudian penulis hijrah ke Jombang untuk melanjutkan pendidikan ke SMA Darul Ulum 1 Unggulan BPP-Teknologi Kecamatan Peterongan Kabupaten Jombang dan lulus pada tahun 2009. Selanjutnya, pada tahun 2009 menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil Jurusan Matematika.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax. (0341) 558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : ANI AFIDATUL KHUSNAH
NIM : 09610032
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Penentuan Selesaian Kongruensi Polinomial
Pembimbing I : H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd
Pembimbing II : Fachrur Rozi, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	15 April 2015	Konsultasi Bab I dan Bab II Matematika	1.
2.	29 April 2015	Revisi Bab I dan II, Konsultasi Bab III	2.
3.	8 Mei 2015	ACC Bab I dan Bab II Matematika	3.
4.	15 Mei 2015	Konsultasi Bab I, Bab II Keagamaan	4.
5.	18 Mei 2015	Revisi Bab I, Bab II Keagamaan	5.
6.	12 November 2015	Konsultasi Bab I, Bab II, Bab III Matematika	6.
7.	17 November 2015	Revisi Bab III, dan Penambahan pada Bab II Matematika	7.
8.	26 November 2015	Revisi Bab I, Bab II, Bab III Keagamaan	8.
9.	7 Januari 2016	Konsultasi Bab IV Matematika	9.
10.	09 Februari 2016	Penambahan Surat Al-Baqarah/2:286 pada Bab II	10.
11.	12 Februari 2016	Revisi Bab II dan Bab III Keagamaan	11.
12.	26 Mei 2016	ACC Keseluruhan Matematika	12.
13.	26 Mei 2016	ACC Keseluruhan Keagamaan	13.

Malang, 8 Juni 2016
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001